1 Wstęp

Mamtematycy już od XVII wieku próbują rozwiązywać różne równania różniczkowe. Czasami są wstanie wyprowadzić jawne wzory, jak na przykład dla równań liniowych. Niestety w większości przypadków nie da się ich wyprowadzić. Często rozważają jedynie istnienie pewnych rodzajów rozwiązań np okresowych, heteroklicznych, homoklinicznych czy chaotycznych. Niestety dowody korzystające z metod klasycznych przeważnie mają bardzo sztywne założenia co do prawej strony równania, na przykład często zakłada się że jest ono okresowe.

Natomiast w wiele klasycznych równaniach różniczkowych, takich jak rówanie Lorenza, Rösslera czy Kuramoto-Sivashinskiego wykazuje zachowanie chaotyczne w symulacjach komputerowych, których nie potrafimy wykazać analitycznie. W 1995 Mischaikow i Mrozek [MM] udowodnili istnienie dynamiki chaotcznej w rówaniach Lorenza. Praca w której ukazał się ten wynik została przez Encyklopedie Britannica uznana za jedną z czterech najważniejszych prac matematycznych w 1995 roku. Zgliczyński [cyt] wykazał istnienie dynamiki chaotycznej w równaniu Rösslera. Dla równania Kuramoto-Sivashinskiego istnieją dowody wspierane komputerowo istnienia orbit heteroklinicznych,homoklinicznych[cyt]. O tym ostatnim równaniu napiszę więcej wreszcie pracy, dlatego nie przytaczam tutaj żadnych nazwisk. Wszystkie cytowane przeze dowody były wspierane komputerowo.

W tej pracy przedstawie pojęcie relacji nakrywających. Przytocze odpowiednie definicje. Na końcu wykaże, że istnieje Σ_2 chaosu w równaniu Kuramato-Sivashinskiego dla pewnej wartości parametru. Będę korzystał z metod numerycznych zaimplementowanych w CAPD [CAPD]

2 Notacja

Przy ustalonej normie w $\mathbb{R}^n$ poprzez $B_n(c,r)$ będziemy oznaczali otwartą kule o promieniu r i środku w $c \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli wymiar n będzie jasny z kontektu to będziemy opuszczać indeks n. Niech $S^n(c,r) = \partial B_{n+1}(c,r)$, poprzez S^n będziemy oznaczać $S^n(0,1)$. Dla $n = 0$ defniujemy odpowiednio $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, $B_0(0,r) = \{0\}$, $\partial B_0(0,r) = \emptyset$.

Przy ustalonym Z, poprzez $\operatorname{int} Z$, $\overline{Z}$, ∂Z oznaczamy odpowiednio wnętrze, domknięcie i brzeg *h-setu* Z. Dla odwzorowania $h : [0,1] \times Z \to \mathbb{R}^n$ ustalamy $h_t = h(t,\cdot)$. Poprzez Id oznacamy odzworowanie identycznościowe. Poprzez $f : X \multimap Y$ ozaczamy odwzorwanie częściowe, czyli odwzorowanie którego dziedziną niekoniecznie jest całe X. Dla odwzorowanie $f : X \multimap Y$, poprzez $\operatorname{dom}(f)$ będziemy oznaczać dziedzine f. Dla $N \subset \Omega$, N-otwarty i $c \in \mathbb{R}^n$. Poprzez $detA$ gdzie A to macierz kwadratowa będziemy oznaczać wyznacznik macierzy A. Poprzez π_i będziemy oznaczali rzutowanie na *i-tą* współrzędną.

3 Lokalny stopień Brouwera

W definicji relacji nakrywającej kluczowym pojęciem jest lokalny stopień Brouwera. W tej pracy bedę korzystał z niego jedynie dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ przytocze jednak bardziej ogólną definicje

Definicja 1 *Lokalny Stopień Brouwera. Niech X będzie skończenie wymiarową unormowaną przestrzenią weketorową i D będzie otwartym, ograniczonym podzbiorem X. Niech $f : \overline{D} \to X$ będzie odzorowaniem klasy C^1 i niech c będzie wartością regularną tego odzorowowanie.*

$$f(x) \neq c \quad \forall x \in \partial D \tag{1}$$

to definiujemy lokalny stopień Brouwera jako :

$$deg(f, D, c) := \Sigma_{x \in f^{-1}(c) \cap D} sgn(Det\ d_x f) \tag{2}$$

Jeżeli dla danego c zachodzi warunek nieosiągalności na brzegu ale nie jest wartością regularną to lokalny stopień Brouwera definiujemy następująco

$$deg(f, D, c) := deg(h, D, c) \tag{3}$$

Gdzie h jest funkcją klasy C^1 dostatecznie blisko f , spełniającą warunek na brzegu i c jest jej wartością regularną.

Dla f jedynie spełniającego warunek nieosiągalności na brzegu definiuejemy lokalny stopień Brouwera jako stopień dowolnej funkcji klasy C^1, która spełnia warunek na brzegu i jest dostatecznie blisko f.

Poprawność tej definicji nie jest oczywista, dowód można znaleźć w [N] , [Sch].

Lokalny stopień ma następujące własności.

1. Własność rozwiązania

   $$\text{Jeżeli } deg(f, D, c) \neq 0 \text{ Wtedy istnieje } x \in D \text{takie, że } f(x) = c \tag{4}$$

2. Własność homotopi.
   Niech $H : [0, 1] \times D \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym i

   $$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} H_\lambda^{-1}(c) \cap D \text{ jest zbiorem zwartym} \tag{5}$$

   Wtedy

   $$\forall \lambda \in [0, 1] \quad deg(H_\lambda, D, c) = deg(H_0, D, c) \tag{6}$$

   W szczególności jeżeli $[0, 1] \times \overline{D} \subset dom(H)$ i $\overline{D}$ jest zwarty, wtedy warunk wynika z następującego warunku

   $$c \notin H([0, 1], \partial D) \tag{7}$$

3. Lokalny stopień jesst funckcją lokalnie stałą
   Załóżmy, że D jest otwarty i ograczniczony. Niech p i q należą do tej samej spójnej składowej $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ wtedy

   $$deg(f, D, p) = deg(f, D, q) \tag{8}$$

4. Własność wycinania.
   Załóżmy, żę $E \subset D$, E otwarty i
$$f{-}1(c) \cap D \subset E \tag{9}$$
   Wtedy
$$deg(f, E, c) = deg(f, D, c) \tag{10}$$

5. Loklany stopień dla izomorfizmów afinicznych
   Załóżmy, że $f(x) = A(x - x_0) + c$, gdzie A jest izomorfizmem liniowym i $x_0, c \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli $x_0 \in D$ wtedy
$$deg(f, D, c) = sgn(DetA) \tag{11}$$

6. Własność produktu.
   Niech $U_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, f_i : U_i \to \mathbb{R}^{n_i}$ dla $i = 1, 2$ Wtedy odwzorowanie $(f_1, f_2) : U_1 \times U_2 \to R^{n_1} \times R^{n_2}$ dane wzorem : $(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Wtedy dla $c_1 \in R^{n_1}$ i $c_2 \in R^{n_2}$ takich, że $deg(f_1, U_1, c_1), deg(f_2, U_2, c_2)$ są zdefiniowane zachodzi następująca równość
$$deg((f_1, f_2), U_1 \times U_2, (c_1, c_2)) = deg(f_1, U_1, c_1) \cdot deg(f_2, U_2, c_2) \tag{12}$$

7. Własność mnożenia.
   Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i ograniczony. Niech $f : D \to R^n, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ są ciągłe i niech Δ_i ozanczają ograniczone spójne składowe $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D$. Wtedy
$$deg(g \circ f, D, p) = \Sigma_{\Delta_i} deg(g, \Delta_i, p) deg(f, D, \Delta_i) \tag{13}$$
   Gdzie $deg(f, D, \Delta_i) := deg(f, D, q_i)$ dla jakiegoś $q_i in \Delta_i$. Z własności 8 wynika, że defnicja $def(f, D, \Delta_i)$ nie zależy od wyboru $q_i \in \Delta_i$

8. Własnośc dodwania.
   Niech $D = \bigcup_{i \in I} D_i$, gdzie $I = \{1, 2 \dots n\}$ dla jakiegoś $n \in \mathbb{N}$ i D_i są zbiorami otwartymi parami rozłącznymi takimi, żę $\partial D_i \subset \partial D$ dla każdego $i \in I$. Wtedy dla każdego $c \notin f(\partial D)$ zachodzi:
$$deg(f, D, c) = \Sigma_{i \in I} deg(f, D_i, c) \tag{14}$$

4 Narzędzia topologiczne

W tej części wprowadzimy główne narzędzia topologiczne wykorzystane w tej pracy. Kluczowym pojęciem będzie pojęcie *relacji nakrywającej* i *h-setu* [ZGi]

4.1 h-sets

Definicja 2 *[ZGi] h-set, N, jest to obiekt składający się z czterech częsci*

- $|N|$ *- zwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$, będziemy nazywać go suportem h-setu N*
- $u(N), s(N) \in \{0, 1, 2, \dots\}$*, takie, że $u(N) + s(N) = n$*

- *homeomorfizmu* $c_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{u(N)} \times \mathbb{R}^{s(N)}$*, takiego że zachodzi :*

$$c_N(|N|) = \overline{B_{u(N)}}(0,1) \times \overline{B_{s(N)}}(0,1).$$

Defininujemy następująco :

$$\begin{aligned} N_c &= \overline{B_{u(N)}}(0,1) \times \overline{B_{s(N)}}(0,1), \\ N_c^- &= \partial\overline{B_{u(N)}}(0,1) \times \overline{B_{s(N)}}(0,1) \\ N_c^+ &= \overline{B_{u(N)}}(0,1) \times \partial\overline{B_{s(N)}}(0,1) \\ N^- = c_N^{-1}(N_c^-), &\quad N^+ = c_N^{-1}(N_c^+) \end{aligned}$$

Więc *h-set* N, jest iloczynem kartezjańskim dwóch domkniętych kul w jakimś układzie współrzędnych. Liczby $u(N)$ i $s(N)$ to wymiary odpowiednio nomninalnie niestabilnego i stabilnego kierunku. Indeks c odpowiada nowemu układowi współrzędnych zadanego poprzez homeomorfizm c_N. Zauważmy, że jeżeli $u(N) = 0$ wtedy $N^- = \emptyset$ a jeżeli $s(N) = 0$, wtedy $N^+ = \emptyset$. Jeżeli to będzie jasne z kontekstu by nie utradniać sobie życia będziemy opuszczać pionowe kreski przy oznaczeniu suportu h-setu N. Czyli N będzie oznaczało zarówno h-set jaki i jego suport.

4.2 Relacje nakrywające

Definicja 3 *[ZGi] Załóżmy że N, M są* h-setami *, takimi że: $u(N) = u(M) = u > 0$ i $(s(N) = S(M) = s$. Niech $f : N \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Definiujemy $f_c = c_M \circ f \circ c_N^{-1} : N_c \to \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$. Niech w będzie niezerową liczbą całkowitą. Mówimy, że*

$$N \overset{f,w}{\Longrightarrow} M$$

(N f-nakrywa M w stopniu w) wtedy i tylko wtedy jeżeli zachodzą następujące warunki

1 *Istnieje ciągła homotopia $h : [0,1] \times N_c \to \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ spełniająca następujące warunki*

$$\begin{aligned} h_0 &= f_c, && (15) \\ h([0,1], N_c^-) \cap M_c &= \emptyset, && (16) \\ h([0,1], N_c) \cap M_c^+ &= \emptyset. && (17) \end{aligned}$$

2 *Istnieje odwzorowanie $A : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^u$ takie że:*

$$\begin{aligned} h_1(p,q) &= (A(p), 0), \ \textit{for } p \in \overline{B_u}(0,1) \textit{ and } q \in \overline{B_s}(0,1), && (18) \\ A(\partial B_u(0,1)) &\subset \mathbb{R}^u \setminus \overline{B_u}(0,1). && (19) \end{aligned}$$

Co więcej zakładamy że :

$$\deg(A, \overline{B_u}(0,1), 0) = w,$$

Intuicyjnie, $N \overset{f}{\Longrightarrow} N$ jeżeli f rozciąga N w 'nominalnie niestabilnym' kierunku , w taki sposób , że jego rzut na 'nominalnie niestabilny' kierunek w M pokrywa w topologicznei nietrywialny sposób rzut M W 'nominalnie stabilnym'

Rysunek 1: Ilustracja relacji nakrywającej $N \stackrel{f}{\Longrightarrow} M$. W przypadku $u(N) = u(M) = 2$ and $s(N) = s(M) = 1$.

kierunku N jest zwężane przez f. W rezultacie N jest odzoworwane poprzez M w kierunku niestabilnym bez dotykania M^+. Warto zauważyć również że stopień w w relacji nakrywającej zależy jedynie od $A_{|\partial B_u(0,1)}$

Geometria definicji 3 przedstawiona jest na Rysunku . 1.

Definicja 4 *Niech N będzie $h-setem$. Niech $b : \overline{B_{u(N)}}(0,1) \to |N|$ będzie odwzorowanie i zdefnijmy $b_c = c_N \circ b$. Odwzorowanie b nazywamy dyskiem poziomym w N jeżeli istnieje ciągła homotopia $h : [0,1] \times \overline{B_{u(N)}}(0,1) \to N_c$ taka, że :*

$$\begin{aligned} h_0 &= b_c, \\ h_1(x) &= (x,0), \quad \forall x \in \overline{B_{u(N)}(0,1)} \\ h(t,x) &\in N_c^-, \quad \forall t \in [0,1] \ i \ x \in \partial B_{u(N)}(0,1) \end{aligned}$$

Definicja 5 *Załóżmy, że N będzie $h-setem$. Niech $b : \overline{B_{s(N)}}(0,1) \to |N|$ będzie odwzorowanie i zdefnijmy $b_c = c_N \circ b$. Odwzorowanie b nazywamy dyskiem pionowym w N jeżeli istnieje ciągła homotopia $h : [0,1] \times \overline{B_{s(N)}}(0,1) \to N_c$ taka, że :*

$$\begin{aligned} h_0 &= b_c, \\ h_1(x) &= (0,x), \quad \forall x \in \overline{B_{s(N)}}(0,1) \\ h(t,x) &\in N_c^+, \quad \forall t \in [0,1] \ i \ x \in \partial B_{s(N)}(0,1) \end{aligned}$$

Zauważmy, że dysk poziomy w N może również być dyskiem pionwym w N. Przykład : // tutaj obrazek

Theorem 6 *Niech będzie $k \geq 1$. Załóżmy , że $N_i, i = 0, \ldots, k$ są h-setami i dla każdego $i = 0, \ldots, k$ zachodzi*

$$N_{i-1} \stackrel{f_i, w_i}{\Longrightarrow} N_i$$

Załóżmy, że b_0 jest poziomym dyskiem w N_0 i b_e jest pionowym dyskiem w N_k Wtedy istnieje punkt $x \in \operatorname{int} N_0$, taki że:

$$\begin{aligned} x &= b_0(t), \quad \textit{Dla jakiegoś } t \in B_{u(N_0)}(0,1) \\ f_i \circ f_{i-1} \circ \dots f_1(x) &\in \operatorname{int} N_i, \quad i = 1, \dots, k \\ f_k \circ f_{i-1} \circ \dots f_1(x) &= b_e(z), \quad \textit{Dla jakiegoś } t \in B_{u(N_0)} \end{aligned}$$

Rozważmy szczególny przypadek tego twierdzenia. Mianowicie kiedy nasze $h-sety$ leżą na płaszczyźnie i $u(N_i) = s(N_i) = 1$ dla $i = 0, \dots k$. Wtedy dowód staję się bardzo prosty i chciałbym go tutaj przytoczyć. Zanim jednak przejde do dowodu tego twierdzenia musze przytoczyć pewien potrzebny lemat.

Lemma 7 *Niech N będzie h-setem takim, że $u(N) = 1$ i $s(N) = 1$. Niech h będzie dyskiem poziomym w N a g dyskiem pionowym w N. Wtedy te dwa dyski się przecinają, tzn istnieje takie $t_g \in [-1,1]$ i $t_h \in [-1,1]$ takie, że $g(t_g) = h(t_h)$*

Dowód:
Niech c będzie homeomorfizmem z definicji *h-setu* N. Przecięcia h i g jest równoważne przecięciu h_c i g_c

Niech H_h, H_g to będą odpowiednie homotopie z definicji dysków. Niech π_1, π_2 to będą rzutowania na odpowiednio na pierwszą i drugą współrzędną. Rozważmy funkcje $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowaną następująco :

$$f(t_1, t_2) = h_c(t_1) - g_c(t_2) \tag{20}$$

Szukanie przecięcia tych dwóch dysków sprowadza się do szukanie zer wyżej wymienionej funckji. Jeżeli nasza funckja zeruje się na brzegu kuli na której jest zdefiniowana to znaleźliśmy szukane przecięcie. Załóżmy więc, że funkcja f się nie zeruje. Będziemy chcieli wykazać, że $deg(f, [-1,1] \times [-1,1], 0)$ jest różne od zera.

Rozważmy następującą homotopie $H : [0,1] \times [-1,1] \times [-1,1] \to [-1,1] \times [-1,1]$ Określoną wzorem

$$H(t,(x_1,x_2)) = ((1-t) \cdot h(x_1) + t \cdot (x1, 0)) - ((1-t) \cdot g(x_2) + t \cdot (0, x2)) \tag{21}$$

Zauważmy, że $H_0 = f$, a $H_1 = Id$

Chcemy wykazać, że dla $t \in [0,1]$ i $x \in \partial[-1,1] \times [-1,1]$ zachodzi $H(t,x) \neq 0$

Zauważmy, że $\pi_1(h_c(1)) = 1$ ponieważ z definicji dysku poziomego $h(1) \in N_c^{-1}$. Zbiór N_c^{-1} rozbija się na dwie spojne składowe, mianowicie $\{-1\} \times [-1,1]$ i $\{1\} \times [-1,1]$ a więc $h_c(1)$ musi należeć do jednej z nich. Ponieważ h_c jest homotopijne z $[-1,1] \ni x \to (x,0)$ i homotopia ta punkty z $\partial[-1,1]$ odwzorowuje na N_c^- z tego wynika , że $h_c(1) \in \{1\} \times [-1,1]$, czyli $\pi_1(h_c(1)) = 1$. Analogicznie $\pi_1(h_c(-1)) = -1$.

Taki same rozumowanie tylko na drugiej współrzędnej i dla N_c^+ możemy przeprowadzić dla dysku g i otrzymujemy wtedy, że $\pi_2(g(-1)) = -1$ i $\pi_2(g(1)) = 1$.

Będziemy dowodzić niewprost. Załóżmy, że insteje $x \in \partial B_2$ i $t \in [0,1]$ takie, że

$$H(t,(x_1,x_2)) = 0 \tag{22}$$

$$((1-t) \cdot h(x_1) + t \cdot (x_1, 0)) = ((1-t) g(x_2) \cdot (0, x2)) \tag{23}$$

Mamy dwa przypadki, które nie są rozłączne ale wyczerpują wsztstkie możliwości.

1. $x \in -1, 1 \times [-1, 1]$.
Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $x = (1, u)$. Obłóżmy obie strony równości operatorem π_1 wtedy lewa strona równości wynosi: $\pi_1((1-t) \cdot h(1) + t \cdot (1, 0)) = (1-t) \cdot \pi_1(h(1)) + t \cdot \pi_1((1, 0)) = (1-t) + t = 1$ A prawa strona równości wynosi $\pi_1((1-t)g(u) + t(0, u))) = (1-t)\pi_1(g(u))$. Gdyby zachodziła równość to musiała by też zachodzić dla wartości bezwzględnych co implikowałoby, że $t = 0$ ale $H_0 = f$ i założyliśmy, że f się nie zeruje na brzegu, czyli otrzymujemy sprzeczność. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla $x = (-1, u)$. Wtedy lewa strona równości wynosiła by -1 i stosujemy ten sam argument z wartością bezwzględną.

2. $x \in [-1, 1] \times \{-1, 1\}$.
Znowu dla ustalenia uwagi niech $x = (v, 1)$ i obłóżmy obie strony równości operatorem π_2 wtedy lewa strona wynosi: $\pi_2((1-t)h(v) + t(v, 0)) = (1-t)\pi_2(h(v))$ a prawa strona równości' $\pi_2((1-t)g(1) + t(0, 1)) = (1-t)\pi_2(g(1)) + t\pi_2(0, 1) = (1-t) + t = 1$. Powtarzając wcześniejsze rozumowanie, jeżeli miałaby zachodzić równość zachodziła by również równość dla modułów, a takiej równości z naszych założeń mieć nie możemy. Przypadek $x = (v, -1)$ udowadniamy analogicznie.

A więc $\forall t \in [0, 1] \quad \forall x \in \partial B_2 \quad H(t, x) \neq 0$ a więc $deg(H_t, B_2, 0)$ jest dobrze określony i z homotopijnej niezmienniczości zachodzą następujące równości $deg(f, D, 0) = deg(H_0, D, 0) = deg(H_1, D, 0) = deg(Id, D, 0) = 1$ a więc z własności istnienia rozwiązania istnieje $x = (x_1, x_2) \in B_2$, takie , że $f(x) = 0$ czyli $h_c(x_1) = g_c(x_2)$ czyli dyski h, g się przecinają.

Theorem 8 *Niech będzie $k \geq 1$. Załóżmy , że $N_i, i = 0, \ldots, k$ są h-setami i dla każdego $i = 0, \ldots, k$ mamy, że $u(N_i) = s(N_i) = 1$ i zachodzi :*

$$N_{i-1} \overset{f_i, w_i}{\Longrightarrow} N_i$$

Załóżmy, że b_0 jest poziomym dyskiem w N_0 i b_e jest pionowym dyskiem w N_k Wtedy istnieje punkt $x \in N_0$, taki że:

$$\begin{array}{rcl} x &=& b_0(t), \quad \textit{Dla jakiegoś } t \in B_{u(N_0)}(0, 1) \\ f_i \circ f_{i-1} \circ \ldots f_1(x) &\in& \operatorname{int} N_i, \quad i = 1, \ldots, k \\ f_i \circ f_{i-1} \circ \ldots f_1(x) &=& b_e(z), \quad \textit{Dla jakiegoś } t \in B_{u(N_0)} \end{array}$$

Do naszego dowodu będzie kluczow następujące sposrzeżenie:
1) Niech N, M będą h-setami takimi o jakich mowa w twierdzeniu, czyli $u(N) = u(M) = 1 = s(N) = s(M)$ i niech $N \overset{f,w}{\Longrightarrow} M$. Niech b będzie dyskiem poziomym w N. Wtedy istnieje, takie odzorowanie afiniczne $g : [-1, 1] \to [a, b]$ gdzie $a, b \in (0, 1)$ takie, że $f \circ b \circ g$ jest dyskiem poziomym w M. Dowód:

Wtedy zdefinujmy sobie :

$$\begin{array}{rcl} u &=& \inf\limits_{t \in [-1,1]} : \quad f \circ b(t) \in M \\ v &=& \sup\limits_{t \in [u,1]} : \quad \forall s \in [u, t] : f \circ b(t) \in M \end{array}$$

Z defincji relacji nakrywającej wynika, że $u, vin(-1,1)$

Z definujmy następująco odwzorowanie afiniczne $g : [-1,1] \to [u,v]$ w następujący sposób, jeżeli $\pi_1(f(b(u))) = 1$

$$g(t) = t \cdot \frac{v-u}{2} + \frac{u+v}{2} \tag{24}$$

jeżeli $\pi_1(f(b(u))) = -1$

$$g(t) = t \cdot \frac{u-v}{2} + \frac{u+v}{2} \tag{25}$$

Zachodzi dokładnie jeden przypadek. Odwzorwanie jest oczywiście dobrze określone i łatwo sprawdzić, że jest homeomorfizmem tych dwóch odcinków.

Definiujemy odzworowanie $d : [-1,1] \to M$ w następujący spób :

$$d(t) \quad = \quad f(b(g(t)))$$

Chcemy wykazać że w ten spsób zdefiniowane d jest dyskiem poziomym w M.

Rozważmy $d_c = c_M \circ d$ gdzie c_M jest homeomorfizmem z definicji h-setu dla M. Chcemy wykazać, że d_c spełania warunki 1,3 z definicji dysków poziomych. Mianowice, że istnieje taka homotopia $h : [0,1] \times [-1,1] \to M_c$ spełniająca następujące warunki

1. $h_0 = d_c$,
2. $h_1(x) = (x, 0), \quad \forall x \in [-1,1]$
3. $h(t,x) \in N_c^-, \quad \forall t \in [0,1]$ i $x \in \partial[-1,1]$

Rozważmy następującą homotopie : $h : [0,t] \times [-1,1] \ni (t,x) \to (1-t) \cdot d_c(x) + t \cdot (x,0)$

Dowody pierwszej i drugiej własności wynikają w sposób oczywisty z definicji homotopii h

$$h(0,x) = 1 \cdot d_c(x) + 0 \cdot (x,0) = d_c(x)$$

$$h(1,x) = 0 \cdot d_c(x) + 1 \cdot (x,0) = (x,0)$$

Zauważmy że zdefinicji $d_c, d_c(-1), d_c(1) \in M_c^-$. Co więcej zgodnie z definicją d $\pi_1(d_c(1)) = 1$ i $\pi_1(d_c(-1)) = -1$. A więc $\forall t \in [0,1]$ zachodzi

$$\pi_1(h(t,-1) = (1-t) \cdot \pi_1(d_c(-1)) + t \cdot \pi_1(-1,0) = (1-t) \cdot (-1) + t \cdot (-1) = -1$$

i

$$\pi_1(h(t,1) = (1-t) \cdot \pi_1(d_c(1)) + t \cdot \pi_1(1,0) = (1-t) + t = 1$$

Czyli $\forall t \in [0,1] x \in \partial B_1(0,1) \quad h(t,x) \in N_c^{-1}$. A więc d jest dyskiem poziomym.

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia. Udowodnimy, że istnieje $x \in \operatorname{int} N$ taki, że zachodzi 3 punkt twierdzenia i słabsze punkt drugi mianowicie, że

$$f_i \circ f_{i-1} \circ \ldots f_2(\tilde{x}) \in N_i, i = 2, ..., k+1 \tag{26}$$

Przeprowadzimy go indukcyjnie ze względu na k czyli na liczbe relacji nakrywających. Dowód dla k = 1. Czyli mamy dwa zbiory N_0, N_1 i funckje f_1, taką, że $N_0 \overset{f,w}{\Longrightarrow} n_1$ i dysk poziomy b_0 w N_0 i dysk pionowy b_e w N_1. Z powyższego spostrzeżenia wnioskujemy, że istnieje dysk poziomy w N. Oznaczmy go poprzez d taki, że

$$d(t) = f(b_0(g(t))$$

Z wcześniej wykazanego lematu otrzymujemy, że dysk pionowy i poziomy mają conajmniej jeden punkt wspólny a więc istnieje takie $t_0 \in [-1, 1]$, $f(b_0(g(t_0))) \in b_e$, a więc szukanym x w twierdzeniu jest punkt $b_0(g(t))$. Z definicji odwzorowania g wynika, że $x \in N_0$ i $g^{-1}(t) \in B_1(0, 1)$. Załóżmy, że teraz nasze twierdznie jest prawdziwe dla wszystkich $j \leq k$, chcemy wykazać prawdziwość dla k+1 jest relacji nakrywających. Ponownie korzystając ze spostrzeżenia konstrujemy dysk poziomy d w N_1 taki, że $\forall t \in [-1, 1] d(t) = f(b_0(g(t)))$ gdzie g jest afinicznym hoemorfizmem Korzystając z naszego założenia indukcyjnego dla zbiorów $N_i, i = 1 \dots k + 1$ dysku poziomego d i pionowego b_e i odpowiednich relacji nakrywających otrzymujemy, że istenije $\tilde{x} \in N_1$:

1. $\tilde{x} = d(t)$, dla jakiegoś $\tilde{t} \in (-1, 1)$
2. $f_i \circ f_{i-1} \circ \dots f_2(\tilde{x}) \in N_i, i = 2, ..., k + 1$
3. $f_{k+1} \circ f_k \circ \dots f_2(\tilde{x}) = b_e(z)$, dla jakiegoś $z \in [-1, 1]$

Teraz wystarczy wziąć $x = b_0(g(\tilde{t}))$,odpowiednie t. Co kończy dowód indukcyjny, a więc mamy udowodnione twierdzenie z jedynie ze słabszym drugim warunkiem. Załóżmy, że istnieje odpowiedni ciąg *h-setów* $N_i, i = 0 \dots k$ i relacji nakrywających $N_{i-1} \overset{f_i,w_i}{\Longrightarrow} N_i$ takich, że istnieje ciąg jak w twierdzeniu wyżej ale nie jest spełniony drugi warunek tzn , że istenieje $x \in N_0$ i $1 < j < k$ takie, że

$$f_j \circ f_{j-1} \circ \dots f_1(x) \in \partial N_j$$

Oznaczmy $y = f_j \circ f_{j-1} \circ \dots f_1(x)$ Mamy dwa przypdadki:

1. $y \in N_j^-$
   W tym przypadku zauważmy, że z definicji relacji nakrywającej $f_{j+1}(y) \notin N_{j+1}$.
2. $y \in N_j^+$ Ten przypadek również jest niemożliwy ponieważ, N_j^+ jest rozłączny z $f_j(N_{j-1})$ z definicji relacji nakrywającej.

A więc w obu przypadkach otrzymujemy sprzeczność, czyli drugi warunek w twierdzeniu zachodzi.

Definicja 9 *Załóżmy że $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ są h-setami w $\mathbb{R}^n$ i $f_i : |N_i| \to \mathbb{R}^n$ są odwzorwaniami ciągłymi. Mówimy że ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ jest* oełną orbitą w stosunku do $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ and $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *jeżeli :*

$$\begin{aligned} x_i &\in \operatorname{int} |N_i|, \quad i \in \mathbb{Z} \\ f_i(x_i) &= x_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo istnieje takie $T > 0$ takie że:

$$\begin{aligned} N_{i+T} &= N_i, \quad i \in \mathbb{Z} \\ f_{i+T} &= f_i, \quad i \in \mathbb{Z} \\ x_{i+T} &= x_i, \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Wtedy mówimy, że $(x_0 \dots, x_{T-1})$ *jest* okresową orbitą *w stosunku do* $(f_0, \dots, f_{T-1})$ *i* $(N_0, N_1, \dots, N_{T-1})$*.*

Następujące twierdzenie zostało udowodnione w [ZGi]

Theorem 10 *[ZGi, Theorem 9] Załóżmy że* $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *są h-setami i dla każdego* $i \in \mathbb{Z}$ *zachodzi:*

$$N_i \overset{f_i,w_i}{\Longrightarrow} N_{i+1}$$

Wtedy istnieje pełna orbita $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *w stosunku do* $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *i* $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$*. Co więcej jeżeli ciąg zbiorów i funkcji jest okresowy, tzn. istnieje* $T > 0$ *takie że* $N_{i+T} = N_i$*,* $f_{i+T} = f_i$ *dla* $i \in mathbbZ$ *wtedy pełna orbita* $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *może być wybrana w taki sposób by* $(x_0, \dots, x_{T-1})$ *była orbitą okresową w stosunku do* $(f_0, \dots, f_{T-1})$ *i* $(N_0, N_1, \dots, N_{T-1})$*.*

Obviously we cannot make any claim about the uniqueness of $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ in Theorem 10.

Tu trzeba jakiś wstęp

Definicja 11 *Parę* (X,φ) *nazywamy układem dynamicznym na* X *jeżeli dla wszystkich* $x \in X$ *oraz* $t, s \in \mathbb{R}$ *spełnione są następujące warunki*

$$\varphi(x, 0) = x$$

$$\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + 2)$$

Rozważmy równanie różniczkowe postaci:

$$\dot{x} = f(x)$$

Gdzie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją Lipchitzowską (np jest różniczkowalna klasy C^1) . Na mocy twierdzenia Picarda istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu Cauchy'egp

$$\dot{x} = f(x(t))$$

$$x(0) = x_0$$

Z tego twiedzenia wynika również, że rozwiązanie jednoznacznie przedłuża się do rozwiązania wysyconego :

$$I_x \to \mathbb{R}^n$$

Gdzie I_x jest maksymalnmy przedziałem istnieia rozwiąznia. Jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ $I_x = \mathbb{R}$ to równanie $\dot{x}$ indukuje układ dynamiczny:

$$\varphi(x_0, t) := x(t)$$

Gdzie $x(t)$ jest roziwiązaniem problemu Cauchy'ego. Często zdarza się, żę rozwiązania wysycone nie są określone dla wszystkich czasów na osi liczb rzeczywistych, czyli $I_x \neq \mathbb{R}$ dla pewnych $x \in \mathbb{R}^n$. W takim przypadku dane równanie różniczkowe nie indukuje (pełnego) układu dynamicznego tylko loklany układ dynamiczny.

Definicja 12 *Niech X będzie przestrzenią topologiczną $\Omega \subset X \times \mathbb{R}$ podzbiorem takim , że $X \times 0 \subset \Omega$ oraz $\varphi : \Omega \to X$ będzie ciągłe. Dla $x \in X$ określamy*

$$I_x := \{t \in \mathbb{R} | (x,t) \in \Omega\}$$

Trójkę (X, Ω, φ) nazywamy lokalnym układem dynamicznym, jeżeli są spełnione następujące warunki

1. *Ω jest podzbiorem otwartym $X \times \mathbb{R}$ oraz dla wszystkich $x \in X, I_x$ jest przedziałem otartym*
2. *dla każdego $x \in X$*
$$\varphi(x, 0) = x$$
3. *jeżeli $x \in X$, $t \in I_x$ oraz $s \in I_{\varphi(x,t}$, to $t + s \in I_x$ oraz $\varphi(\varphi(x,t), s) = \varphi(x, t+s)$*
4. *jeżeli $t \in I_x$ to $-t \in I_{\varphi(x,t}$*

Oczywiście każdy układ dynamiczny jest lokalnym układem dynamicznym. Pobone definicje można sformułować dla układół z czasem dyskretnym. Mówimy wtedy o dyskretych układach dynamicznych bądź dyskretych lokalnych układach dynamicznych

Definicja 13 *Niech X będzie przestrzenią topologiczną $\varphi : X \times \mathbb{Z} \to X$ będzie ciągłe. Parę (X, φ) nazywamy dyskretnym układem dynamicznym, jeżeli dla $x \in X$ oraz $m, n \in \mathbb{Z}$ są spełnione następujące warunki :*

$$\varphi(x, 0) = x \quad \varphi(\varphi(x,m), n) = \varphi(x, m+n)$$

Dyskretne układyn przeważnie definiuje się jako iteracje pewnego homeomorfizum $f : X \to X$.

$$\varphi(x, n) := f^n(x)$$

W takiej sytuacji będziemy pare (X, f) będziemy nazywać dyskretnym układem dynamicznym

Analogicznie do przypadku ciągłych układów dynamicznych definujemy pojęcie lokalnego dyskretnego układu dynamicznego.

Definicja 14 *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, $\Omega \subset X \times \mathbb{Z}$ podzbiorem takim, że $X \times \{0\} \subset \Omega$ oraz $\varphi : \Omega \to X$ będzie ciągłe. Dla $x \in X$ definujemy*

$$I_x := \{n \in \mathbb{Z} | (x,n) \in \Omega\}$$

Trójkę (X, Ω, φ) nazywamy lokalnym dyskretnym układem dynamicznym, jeżeli są spełnione następujące warunki

1. *dla każdego $x \in X, I_x$ jest przedziałem w $\mathbb{Z}$*
2. *dla każdego $x \in X$,*
$$\varphi(x, 0) = x$$
3. *jeżeli $x \in X$, $m \in I_x$ oraz $n \in I_{\varphi(x,m}$, to $m + n \in I_x$ oraz $\varphi(\varphi(x,t), n) = \varphi(x, m+n)$*

4. jeżeli $m \in I_x$ *to* $-m \in I_{\varphi(x,t)}$

Dla pary (X, f) gdzie X to przetrzeń topologiczna a f to homeomorfizm na obraz można w naturalny spodób wprowadzić lokalny dyskretny układ dynamiczny. Definiując go mianowice :

$$\varphi(x, 0) = x$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x \in dom(f^n)\varphi(x, n) = f^n(x)$$

Jeżeli to będzie jasne z kontektu będziemy korzystali z takiego oznaczania, tzn będziemy parę (X, f) nazywali (lokalnym) dyskretnym układem dynamicznym skonstruowanym w powyższy sposób.

Definicja 15 *Niech* (X, Ω, φ) *będzie lokalnym (dyskretnym) układem dynamicznym. Dla punktu* $x \in X$ *definujemy orbitę punktu* x *jako*

$$\mathcal{O}(x) := \{y \in X | y = \varphi(x, t), t \in I_x\}$$

5 Odwzorowanie Poincarégo

Bardzo często przy badaniu równań różczniczkowych i związanych z nimi loklanymi układami dynamicznym jest dyskretyzacja czasu. Próbujemy jakoś z naszego lokalnego układu dynamicznego stworzyć lokalny dyskre układ dynamiczny. Istnieją dwie sensowne, wykorzystywane techniki. Pierwsza z nich to ustalenie kroku czasowego $h \in \mathbb{R}$ i badanie przesunięć punktów po danym czasie w naszym układzie dynamicznym

$$\varphi_t : X \nrightarrow X, \varphi_t(x) := \varphi(x, t)$$

.

Drugim podejściem jest odwzorowanie Poincarégo zdefinowane następująco

Definicja 16 *Niech* $\dot{(x)} = f(x)$ *będzie równaniem różniczkowym z prawą stroną gładką,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*. Podzbiór* $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ *będziemy nazywać lokalną sekcją równania* $\dot{(x)} = f(x)$ *, jeżeli*

1. Θ *jest rozmaitością wymiaru n-1 bez brzegu*
2. *dla każdego* $x \in \Theta$ *pole wektorowe jest tranwersalne do sekcji w* x*. Mianowcie, iloczyn sklarany* $n(x) \cdot f(x) \neq 0$ *gdzie* $n(x)$ *oznacza wektor normalny do* Θ *w punkcie* x

Ponieważ w każdym puncie lokalnej sekcji Θ pole wektorowe jest do niej tranwersalne (warunek 2), to każde rozwiązannie (istnienie i jednoznacznosć mamy z twierdzenia Cauchy-ego Picarda) z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 \in \Theta$ musi opuścić sekcję Θ, czyli:

$$\forall x \in \Theta \exists \epsilon > 0 \forall t \in (0, \epsilon)\varphi(x_0, t) \notin \Theta$$

Może sie zdarzyć, że pewne punkty z lokalnej sekcji wrócą po pewnym czasie do sekcji Θ po pewnym czasie $t >$, czyli że orbita przetnie ponownie loklaną sekcje po czase $t > 0$. Warunek ten definiuje odwzorowanie Poincarégo. Określamy:

$$T_x := \{t > 0 | \varphi(x, t) \in \Theta\}.$$

Definicja 17 *Niech* Θ *będzie lokalną sekcją równania* $\dot{(x)} = f(x)$. *Wtedy odwzorowanie* $P : \Theta \multimap \Theta$ *określone następująco :*

1. $x \in dom(P) \Leftrightarrow T_x \neq 0$
2. $P(x) := \varphi(x, t_x)$, *gdzie* $t_x := mint \in T_x$

Nazywamy odwzorowaniem Poincar'ego

Odwzororwanie Poincarégo jest często wykorzystywane do szukania rozwiązań okresowych, heteroklicznych lub homokliczynch wyjściowego równania różniczkowego. Na przykłąd by udowodnić, że istenieje rozwiązanie okresowe dla okresowe wystarczy pokazać, że pewne odwzorwanie Poincarégo ma punkt stały lub okresowy. Do tego już możemy wykorzystać znane narzędzia topologiczne jak chociażby lokalny stopięn Brower.

6 Symetrie

Wiele układów dynamicznych posiada pewne symetrie lub symetrie odwracania czasu.

Definicja 18 *Homeomorfizm* $S : X \to X$ *będziemy nazywać symetrią lokalnego (dyskretnego) układu dynamicznego* (X, Ω, φ) *jeżeli] dla wszystkich* $x \in X$ *oraz* $t \in I_x$ *zachodzą następujące warunki :*

1. $t \in I_{S(x)}$,
2. $S(\varphi(x, t)) = \varphi(S(x), t)$.

Definicja 19 *Homeomorfizm* $R : X \to X$ *nazywamy symetrią odwrócenia czasu w lokalnym (dyskretnym) układzie dynamicznym* (X, Ω, φ), *jeżeli dla wszystkich* $x \in X$ *oraz* $t \in I_x$ *zachodzą warunki*

1. $-t \in I_{R(x)}$,
2. $R(\varphi(x, t)) = \varphi(R(x), -t)$

Dla układów dyskretnych (X, f) definicje tą można zapisać równoważnie jako :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in dom(f^n) R(x) \in dom(f^{-n}), f^{-n}(R(x)) = R(f^n(x))$$

Lemma 20 *Niech (X,f) będzie lokalnym dyskrtnym układem dynamicznym,* $R : X \to X$ *pewnym homeomorfizmem.* R *jest symetrią odwrócenia w czasu dla* f *wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich* $x \in dom(f)$ *zachodzi*

$$R(x) \in dom(f^{-1}) \text{ oraz } \quad R(f(x)) = f^{-1}(R(x)). \tag{27}$$

Dowód: Zauważmy, że gdy R jest symetrią odwrócenia czasu to warunke z lematu zachodzi. Minowicie z definicji symetri odwrócenia dla $x \in dom(f)$ zachodzi

$$R(f(x)) = R(\varphi(x, 1)) = \varphi(R(x), 1) = f^{-1}(R(x)) \tag{28}$$

W ten sposób otrzymamujemy implikacje w jedną strone. Należy teraz udowodnić, że jeżeli dla funkcji R zachodzą warunki opisane w tezie lematu to rzeczywiście jest ona symetrią odrócenia w czasie. Mianowice wystarczy wykazać , że $\forall x \in dom(f^n)$

$$R(x) \in dom(f^{-n}) \text{ oraz } R(f^n(x)) = f^{-n}(R(x)) \tag{29}$$

Dowód przeprowadzimy w dwóch etapach. Najpierw indukcyjnie dla $n > 0$ a następnie dla $n < 0$. Dla $n = 0$ warunek jest trywialnie spełniony ponieważ $f^0 := Id$. Dla $n = 1$ warunek $R(f(x)) = f^{-1}(R(x))$ jest konsekwencją założenia implikacji. Załóżmy teraz, że (29) zachodzi dla wszsytkich $1 \leq k \leq n$. Chcemy wykazać, że zachodzi również dla $n + 1$. Niech $x \in dom(f^{n+1})$ wtedy mamy $x \in dom(f)$ oraz $f(x) \in dom(f^n)$. Z założenia implikacji otrzymujemy, że $R(x) \in dom(f^{-1})$ a z założenia indukcyjnego

$$f^{-1}(R(x)) = R(f(x)) \in dom(f^{-n})$$

Wynika stąd, że $R(x) \in dom(f^{-(n+1)})$ oraz

$$R(f^{n+1}(x)) = R(f^n(f(x))) \overset{\text{z zał ind.}}{=}$$
$$f^{-n}(R(f(x))) = f^{-n}(f^{-1}(R(x))) = f^{-(n+1)}(R(x)).$$

Czyli udowodniliśmy krok indukcyjny. Teraz będziemy chcieli wykazać teze dla $u < 0$ czyli chcemy pokazać, że jeżeli $x \in dom(f^{-n}$ gdzie $n \in \mathbb{N}$ to

$$R(x) \in dom(f^n) \quad \text{ oraz } R(f^{-n}(x)) = f^n(R(x)) \tag{30}$$

Niech $x \in dom(f^{-n})$ z tego wynika, że $f^{-n}(x) \in dom(f^n)$ Teraz z (29) otrzymujey :

$$R(f^{-n}(x)) \in dom(f^{-n}) \text{ oraz } R(f^n(f^{-n}(x))) = f^{-n}(R(f^{-n}(x)))$$

Z tego wynika, że

$$R(x) = f^{-n}(R(f^{-n}(x))) \in dom(f^n), \quad f^n(R(x)) = R(f^{-n}(x))$$

co kończy dowód lematu.

Często układy dynamiczne, które posiadaj symetrie lub symetrie odwrócenia czasu posiadają również punkty których orbity są niezmiennicze względem symetrii. Takie orbity będziemy nazywać symetrycznymi.

Definicja 21 *Niech (X, Ω, φ) będize lokalnym (dyskretnym) układem dynamicznym a H pewną symetrią (odwrócenia czasu) tego układu. Orbitę punktu $x \in X$ będziemy nazywać symetryczną, jeżeli $H(\mathcal{O}(()\,x) = \mathcal{O}(()\,x)$.*

Przy pewnych założeniach o sekcji Poincar'ego. Symetrie dla całego układu implikuje symetrie dla odwzorowania Poincar'ego. Dokładny sformułowanie tego spostrzeżenia zamieszczam poniżej w formie lematu.

Lemma 22 *Niech (X, Ω, φ) będzie lokalnym układem dynamicznym indukowanym przez pewne równanie różniczkowe, oraz R będzie symetrią odwrócenia czasu dla φ. Załóżmy, żę $\Theta \subset X$ jest loklaną sekcją dla φ taką,że $R(\Theta) = \Theta$. Wtedy $R_{|\Theta}$ jest symetrią odwrócenia czasu dla odwzorowania Poincar'ego $P : \Theta \nrightarrow \Theta$.*

Dowód: Na podstawie wcześniej wykazanego lematu (20) wystarczy pokazać, że dla $x \in dom(P)$ zacodzi

$$R(x) \in dom(P^{-1}) \text{ oraz } R(P(x)) = P^{-1}(R(x))$$

Niech $x \in dom(P)$. Z definicji odwzorwania Poincar'ego istnieje $t_x > 0$ takie, że $P(x) = \varphi(x, t_x)$. Chcemy pokazać, że $R(x) \in dom(P^{-1})$ oraz $P^{-1}(R(x)) = R(P(x))$, dokładniej :

1. $\varphi(R(x), -t_x) \in \Theta$
2. dla $0 < t < t_x$, $\quad \varphi(R(x), -t) \notin \Theta$.

Dowód pierwszego punktu wynika z z faktu, że R jest symetrią odwrócenia czasu w układzie ciągłym czyli skoro $t_x \in I_x$ to z tego wynika, że $-t_x \in I_{R(x)}$ i

$$\varphi(R(x), -t_x) = R(\varphi(x, t_x)) = R(P(x)) \in R(\Theta) = \Theta$$

Stąd wynika, że $R(x) \in dom(P^{-1})$ Drugi punkt będziemy dowodzić niewprost. Załóżmy, że nie zachodzi tzn, istnieje pewein $t \in (0, t_x)$ taki, że $\varphi(R(x), -t) \in \Theta$. Wtedy z założenia, że R jest symetrią odwracania czasu dla naszego układu otrzymujemy :

$$R(\varphi(x, t)) = \varphi(R(x), -t) \in \Theta$$

R jest homeomorfizmem i $R(\Theta) = \Theta$ a więc również $R^{-1}(\Theta) = \Theta$, a wtedy:

$$\varphi(x, t) = R^{-1}(R(\varphi(x, t))) = R^{-1}(\varphi(R(x), -t)) \in R^{-1}(\Theta) = \Theta.$$

Czyli otrzymaliśmy sprzeczość z wyborem t_x,które była zdefiniowane jako minium czsów w których orbita x przecina Θ, w ten sposób udowodniliśmy lemat.

7 Arytmetyka Przedziałowa

W tym rozdziale chciałbym przedstwiać techniczne podstawy dowodów komputerowo wspieranych w dynamice. W jak spsób korzystając z arytmetyki liczb wymiernych o skończonym rozwinięciu jesteśmy wstanie udowdnić twierdzenia dotyczące elementów z przestrzeni $\mathbb{R}^n$

7.1 Liczby reprezentowalne

W obliczeniach przeprowadzonych na komputerzez przeważnie korzysta się z liczb zmiennoprzecinkowych typu double zgodnych ze standarder IEEE 754. Standard ten jest zaimplementowany w wielu procesorach, w sczególnosci w komputerach typu PC. Opisuję on między innymi sposby zaokrąglania liczb czy zachowanie w przypadku dzielenia przez zero. Każda liczba typu double jest zakodowana jako 64-bitowy ciąg, w którym 54 młodsze bity kodują mantyse (ozn. m) a kolejne 11 bitów koduje wykładnik(ozn. w), natomiast najstarszy bit jest bitem znaku (ozn. z). Wtedy wartość tak zakodowanej liczby typu double wyliczamy z następującego wzoru :

$$x = (-1)^z * m * 2^{w+1} \tag{31}$$

Tu może jakiś przykład ?, generaalnie na wikipedii piszą, ż
e m ma być libczą naturalną??

Zbiór wszystkich liczb, które można przedstawić w ten sposób będzie oznaczany $\hat{\mathbb{R}}$ a jego liczby będziemy nazywać *liczbami reprezentowalnymi.* Przez $\overline{\mathbb{R}}$ będziemy ozanczać zbiór liczb rzeczywistych rozszerzony o $\pm \inf$ ze standardowym porządkiem.

Jak już wspominałem wcześniej nie wszystkie liczby rzeczywiste możemy zakodować tak jak podano w 31. Liczby rzeczywiste, które nie są liczbami reprezentowalnymi możemy przybliżać następującymi suriekcjiami

$\downarrow\uparrow: \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$

$$\downarrow(x) := max\{y \in \hat{\mathbb{R}} | y \leq x\}$$

$$\uparrow(x) := min\{y \in \hat{\mathbb{R}} | y \leq x\}$$

Wybór któreś z podanych suriekcji, która za pomocą której chcemy przybliżać liczby naturalne jest możliwy poprzez ustawienie odpowiedniej flagi na procesorze. Istotną rodziną zbiorów w $\mathbb{R}$ jest rodzina przedziałów. Będziemy ją oznaczać poprzez $\mathbb{I}$. Jej podzbiór, rodzinę przedziałów o końcach którymi są liczby reprezentowalne będziemy oznaczać poprzez $\hat{\mathbb{I}}$. Poprzez $\overline{\mathbb{I}}$ będziemy oznaczać rodzine przedziałów której końce należą do $\overline{\mathbb{R}}$

Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy najmniejszy przedział reprezentowalny zawierający x przy pomocy funkcji $\updownarrow: \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ jako

$$\updownarrow(x) := [\downarrow(x), \uparrow(x)] \in \hat{\mathbb{I}}$$

W oczywisty sposób funkcje $\uparrow, \downarrow, \updownarrow$ można zdefinować na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych. Dla podzbioru $A \subset \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl}\uparrow(A) & := & max\{\uparrow(a) | ina \in A\} \\ \downarrow(A) & := & min\{\downarrow(a) | ina \in A\} \\ \updownarrow(A) & := & [\downarrow(A), \uparrow(A)]\end{array}$$

8 Arytmetyka przedziałowa

Obliczenia na komputerach są jak już wcześniej wspominałem wykonywane najczęściej na liczbach typu *double*. Oczywiście wynik operacji dwóch liczb reprezentowalnych wcale nie musi być liczbą reprezentowalną. Jednak chcielibyśmy wykonywać obliczenia ścisłe i by wyniki operacji były wiarygodne i o ile to możliwe precyzyjne. Dlatego rosrszerzamy operacje dodwania, odejmowania i dzielenia ze zbioru liczb rzeczywistych na rodzine przedziałów reprezentowalnych.

Niech $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ będą pewnymi podzbiorami oraz niech $\diamondsuit$ będzie jedną z operacji elementarnych, $\diamondsuit \in \{+, -, \cdot, /\}$. Wtedy definujemy

$$A \diamondsuit B := \{a \diamondsuit b | a \in A, b \in B\}. \tag{32}$$

Dodatkowo zakładamy, że przy dzieleniu $0 \notin B$. W sytuacji w której $A, B \in \overline{\mathbb{I}}$ operacje te sprowadzja sie do odpowiednich obliczeń na końcach przedziałów, oraz sprawdzenia znaków liczb, będącymi końcami przedziałów A, B. Wynik takiej operacji jest również przedziełem $A\diamondsuit B \in \hat{\mathbb{R}}$. Możemy próbować w ten sposób rozszerzyć podstawowe operacje na przedziały reprezentowalne. Oczywiście wynik takiej operacji niekoniecznie musi być przedziałem reprezentowalnym, dlatego opreacje elementerne na przedziałach reprezentowalnych musimy zdefiniować w następujący spsób

$$A\hat{\diamondsuit}B := \updownarrow(A\diamondsuit B) \tag{33}$$

gdzie $\hat{\diamondsuit}$ oznacza operacje elementarną w *arytmetyce przedziałowej* . W ten sposób zdefiniowane operacje arytmetyczne zapewniają, że dla $X, Y \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$X\diamondsuit Y \subset \updownarrow(X)\hat{\diamondsuit}\updownarrow(Y) \tag{34}$$

o ile prawa strone isntieje. Operacje na końcach są standartowymi operacjami wykonywanymi sprzętowo. Dzięki temu cechują się one wysoką wydajnością.

W mojej pracy jak już wcześniej pisałem będę korzystał z arytmetyki przedziałowej i metod numerycznych zaimplementowanych w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego przez grupę badawczą CAPD [CAPD].

9 Równanie Kuramoto-Sivashinskiego

Rozważmy równanie :

$$u_t + \nabla^4 u + \nabla^2 u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = 0 \tag{35}$$

Michelson[cyt] przeprowodzaił badanie tego równania. Zauważył, żę wcześniejsze badania [cyt] pokazują, ze jeśli równanie 35 ma rozwiązanie na dużym przedziele symetrycznym $(-l, l)$ z okresowym warunkiem brzegowym to rozwiązania przyjmują postać $u(x,t) = -(c_0)^2 t + v(x,t)$ gdzie $c_0 \approx 1.04$ oraz v jest quasi-okresową falą. Dlatego przyjął, że v nie zależy od t i rozważał rozwiązania równania 35 postaci $u(x,t) = -c^2 t + v(x)$. Jeżeli podstawimy $y = v'$ to możemy przekształcić 35 do postaci

$$y^{'''} + y' = c^2 - \frac{1}{2}y^2 \tag{36}$$

Co można zapisać jako układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= c^2 - \lambda y - \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \tag{37}$$

$$u_t = -u_{xxxx} - u_{xx} - uu_x$$

Układ posiada dwa punkty stacjonarne : $x_-(c) = (-c\sqrt{2}, 0, 0)$ i $x_-(c) = (c\sqrt{2}, 0, 0)$ Co więcej zachowuje miare i odwzorowanie : $\mathbb{R}^4 :\to \mathbb{R}^4$ dane przez:

$$R(x,y,z,t) = (-x, y, -z, -t) \tag{38}$$

9.1 Wybrane znane wyniki

Theorem 23 (Troy) *Rozważmy równanie 36 z parametrem $c = 1$. Wtedy istnieją co najmniej dwa symetryczne(nieparzyste) rozwiązanai okresowe spełniające warunek*

$$y(0) = y''(0) = 0$$

Theorem 24 (Troy) *Rozważmy równanie 36 z parametrem $c = 1$. Wtedy insteją co najmniej dwie symetryczne (nieparzyste) orbity heterokliniczne pomiędzy punktami sacjonarnymi $(y, y', y'') = (\pm\sqrt{2}, 0, 0)$*

Dla równania (37), chciałbym przytoczyć następujące wyniki przez naukaowców z naszego wydziału.

Theorem 25 (Mrozek, Żelawski) *Dla parametru $c = 1$ oraz dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ istnieje rozwiązanie heterokliniczne łączące punkt równowagi $(\sqrt{2}, 0, 0)$ oraz $(-\sqrt{2}, 0, 0)$*

Kładąc w rówaniu (37) $\lambda = 1$ Daniel Wilczak uzyskał między innymi następujący wyniki.

Theorem 26 (Wilczak) *Dla każdego paramtru $c \in [0.8285, 0.861]$ układ Michelson jest Σ_4 chaotyczny, czyli, że istnieje odzorowanie Poincar'ego takie, że jest półsprzężone z pełnym sziftem na czterech symbolach.*

9.2 Symetria w równaniach Kuramoto-Sivashinskiego

W równaniach Kuramato-Sivashinskiego występuje następująca symetria odwracania czasu

$$R(x, y, z) = (-x, y, -z).$$

Z istienia tej symetri wynioskukemy, że dowolne rozwiązanie o warunku początkowym $x(0) = z(0) = 0$ jest symetryczne względem osi y. Ponadtko jeśli takie rozwiązanie dwukrotrnie przetnie oś y to musi być rozwiązaniem okresowym.

W tej pracy będziemy badać równianie (37) dla parametru $\lambda = 1$. Zauważmy, że pole wektorowe równania (37) jest styczne do płasczyzny (x,y,0) tylko na paraboli

$$L := \{(x, c^2 - \frac{1}{2}x^2, 0) | x \in \mathbb{R}\}.$$

W związku z tym możemy określić lokalną sekcje równania (37) jako

$$\Theta := \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Sekcja Θ wybraliśmy w ten sposób by trzecia współrzędna była stale równa 0, a więc by określić punkt na niej musimy podać jedynie współrzędne (x,y) i tak od tej pory bedziemy czynić. Zauwżmy również, że $R(\Theta) = \Theta$ a więc z lematu (22) istnieje symetria odwrócenia czasu dla odwzorowania Poincar'ego $P : \Theta \nrightarrow \Theta$. Będziemy ją również ozanczać R. Nie będzie to prowadziało do żadnych niejednoznaczności piniważ od tej pory będziemy zajmowali się jedynie dynamiką na Θ . Reasumując nasze odwzorwanie $P : \Theta \nrightarrow \Theta$ spełnia następujący warunek:

$$\forall u \in dom(P) \quad R(u) \in dom(P^{-1}), R(P(u)) = P^{-1}(R(u)), \tag{39}$$

dla $R(x, y) = (-x, y)$

Głównym twierdzeniem, które wykaże w tej pracy

Theorem 27 *Dla każdego paramtru $c = 0.49$ układ Michelson jest Σ_4 chaotyczny, czyli, że istnieje odzorowanie Poincar'ego takie, że jest półsprzężone z pełnym sziftem na czterech symbolach.*

10 Dowód numeryczny

10.1 Reprezentacja h-setów

W tej pracy mamy jedynie doczynienia z *h-setami* na płaszczyźnie które mają dokładnie jeden kierunek nominalnie stabilny i niestabilny. Dlatego będziemy reprezentować nasze h-sety w jako następujące trójki (x, s, u), gdzie $x, s, u \in \mathbb{R}^2$ i s, u sa liniowo niezależne. wtedy definuijemy

$$|N| := \{v \in \mathbb{R}^2 | \exists_{t_1, t_2 \in [-1,1]} \quad {}_{v = x + t_1 \cdot s + t_2 \cdot u} = x + [-1, 1] \cdot s + [-1, 1] \cdot u$$

Homemorfizm c_N jest odzwzorowaniem afiniczym zdefiniowanym w nastepujacy sposób

$$c_N(v) = A^{-1}(v - x)$$

Gdzie $A = [u, s]$ jest macierzą kwadratową. Przy takiej reprezentacji $h-setu$ zachodzą następujące równości

$\mathrm{N}^- \;=\; -1, 1 \times s$

$\mathrm{N}^+ \;=\; -1, 1 \times u$

11 Twierdzenia

12 Wyniki numeryczne

13 Kod

Literatura

[N] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analisys, New York University 1974

[Sch] J. Schwartz, Nonlinear Functional Analisys, Gordon and Breach ,New York 1969

[AM] Z. Arai and K. Mischaikow, *Rigorous Computations of Homoclinic Tangencies*, SIAM J. on Appl. Dyn. Sys. 5 (2006), 280–292.

[AZ] G. Arioli and P. Zgliczyński, *Periodic, homoclinic and heteroclinic orbits for Hénon Heiles Hamiltonian near the critical energy level*, Nonlinearity, vol. 16, No. 5 (2003), 1833–1852

[CAPD] CAPD – Computer Assisted Proofs in Dynamics group, a C++ package for rigorous numerics, `http://capd.wsb-nlu.edu.pl`.

[D] R.I. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiments*, Addison-Wesley, 1992.

[GZ] Z. Galias and P. Zgliczyński, *Abundance of homoclinic and heteroclinic orbits and rigorous bounds for the topological entropy for the Hénon map*, Nonlinearity, 14 (2001) 909–932.

[IE] *The IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetics*, ANSI-IEEE Std 754, (1985).

[KWZ] H. Kokubu, D.Wilczak, P. Zgliczyński, *Rigorous verification of cocoon bifurcations in the Michelson system*, Nonlinearity, 20 (2007), 2147-2174.

[Li] Q. Li, *A topological horseshoe in the hyperchaotic Rössler attractor*, Physics Letters A, 372 (2008) 2989–2994.

[L] N. G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge Tracts in Math., No. 73, Cambridge Univ. Press, London, 1978

[MM] K. Mischaikow and M. Mrozek, *Chaos in Lorenz equations: a computer assisted proof*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 33(1995), 66-72.

[Mo] R.E. Moore, *Interval Analysis.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966

[P03] P. Pilarczyk, *Topological numerical approach to the existence of periodic trajectories in ODE's*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, A Supplement Volume: Dynamical Systems and Differential Equations, 701-708 (2003).

[R76] O.E. Rössler, *An Equation for Continuous Chaos*, Physics Letters, Vol. 57A no 5, pp 397–398, 1976.

[R79] O.E. Rössler, *An equation for hyperchaos*, Physics Letters A 71 , no.2-3, (1979), 155–157.

[SK] D. Stoffer and U. Kirchgraber, *Possible chaotic motion of comets in the Sun Jupiter system - an efficient computer-assisted approach*, Nonlinearity, 17 (2004) 281-300.

[T] W. Tucker, *A Rigorous ODE solver and Smale's 14th Problem*, Found. Comput. Math., 2:1, 53-117, 2002.

[W] D. Wilczak, `http://www.ii.uj.edu.pl/~wilczak`.

[WZ] D. Wilczak and P. Zgliczyński, *Heteroclinic Connections between Periodic Orbits in Planar Restricted Circular Three Body Problem - A Computer Assisted Proof*, Comm. Math. Phys., 234 (2003) 1, 37-75.

[WZ2] D. Wilczak and P. Zgliczyński, *Topological method for symmetric periodic orbits for maps with a reversing symmetry*, Discrete Cont. Dyn. Sys. A 17, 629–652 (2007).

[WZ3] D. Wilczak and P. Zgliczyński, *Period doubling in the Rössler system - a computer assisted proof*, Foundations of Computational Mathematics, to appear.

[ZGi] P. Zgliczyński and M. Gidea, *Covering relations for multidimensional dynamical systems*, J. Differential Equations, 202/1(2004), 33–58

[Z] P. Zgliczyński, *Computer assisted proof of chaos in the Rössler equations and the Hénon map*, Nonlinearity **10** (1997), 243-252.

[Z1] P. Zgliczyński, C^1*-Lohner algorithm*, Foundations of Computational Mathematics, **2** (2002), 429–465.