1. Логика высказываний

Определение 1. *Высказывание* — утверждение, которое может быть истинно или ложно.

Пропозициональные переменные — переменные, обозначающие высказывание. Будем считать, что есть фиксированное множество пропозициональных переменных $p_1, p_2, \ldots$.

Определение 2.

- Если p — переменная, то p — формула.
- Если ϕ — формула, то $\neg\phi$ — формула.
- Если ϕ, ψ — формулы, то $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \leftarrow \psi)$ — формулы.

Пример 1. $(p \leftarrow \neg q) \wedge \neg(v \vee (p \leftarrow \neg r))$

Лемма 1. *Лемма о скобочном итоге Рассмотрим формулу ϕ. Пусть χ — префикс ϕ. Скобочный итог χ — количество открывающих скобок в χ минус количество закрывающих. Для всех χ скобочный итог неотрицателен, и равен нулю только если χ — пустое слово(ε), цепочка отрицаний или все слово ϕ.*

Доказательство. Рассмотрим индукцию по построению формулы:

- Если ϕ — переменная, то либо χ равно ϕ, либо ε. В обоих случаях скобочный итог равен нулю, и оба случая подподают под лемму.
- $\phi = \neg\psi$. Тогда либо χ есть ϵ, либо последовательность отрицаний. Эти два случая подпадают под лемму. Либо $\chi = \neg\chi'$, где χ' — префикс ψ. Тогда для более короткой формулы ψ все верно, значит либо скобочный итог χ' больше нуля, тогда и для χ это верно, либо χ' — пустое слово или цепочка отрицаний, тогда χ тоже есть цепочка отрицаний, что попадает под лемму, либо χ' — все слово, тогда χ — тоже все слово.
- $\phi = (\psi \wedge \alpha)$. Тогда χ (префикс ϕ) является либо пустым словом ϵ, и для него все хорошо, либо $\chi = (\chi'$, где χ' — префикс ψ, тогда скобочный итог χ равен итогу χ' плюс один (по определению скобочного итога), а значит он строго больше нуля (так как скобочный итог χ' неотрицателен), либо $\chi = (\psi\wedge$, тогда скобочный итог χ равен единице, либо $\chi = (\psi \wedge \chi''$, где χ'' — префикс α, тогда аналогично скобочный итог χ тогда строго больше нуля.

□

Теорема 1. *Теорема об однозначности разбора Если есть формула η, то η получена по одному из правил 1-3.*

Доказательство. Посмотрим на первый символ. Это может быть либо переменная, либо отрицание, либо открывающая скобка. Если первый символ переменная, то это переменная — сама формула.

Если первый символ отрицание, то рассмотрим формулу μ, полученную путем откусывания от η первого символа. Очевидно, что η получено из μ по второму правилу.

Если же первый символ — скобка, то все не так очевидно. Допустим, что это не так. Пусть $\mu = (\phi \wedge \psi) = (\phi' \wedge \psi')$. Тогда либо ϕ — префикс ϕ', либо наоборот, ϕ' — префикс ϕ Пусть, для определенности ϕ префикс ϕ'. Но так как ϕ и ϕ' — формулы, то их скобочный итог равен нулю. ϕ — префикс ϕ' со скобочным итогом равным нулю. Тогда по лемме либо ϕ пустое слово, либо последовательность отрицаний (что нам не подходит, так как ϕ — формула). Тогда методом исключения $\phi = \phi'$. А значит допущение неверно, а теорема верна. □

Определение 3. Булева функция — $f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$.

Каждая пропозициональная формула задаёт булеву функцию.

$p_1, \ldots, p_m$ — переменные, входящие в формулу. $a_1, \ldots, a_n$ — аргументы функции.

1) Если $\phi = p_i$,то значение функции $(a_1, \ldots, a_n)$ равно a_i.

2) Если $\phi = \neg\psi$, то $\phi(a_1, \ldots, a_n) = not\psi(a_1, \ldots, a_n)$

3) Если $\phi = (\alpha R \beta)$, то $\phi(a_1, \ldots, a_n) = \alpha(a_1, \ldots, a_n) R \beta(a_1, \ldots, a_n)$

Всего булевых функций от $n - 2^{2^n}$ Формул от n переменных бесконечно много. Возникает вопрос: можно для функции $f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ написать формулу, которая её вычисляет?

Рассмотрим частный случай, когда формула равна константе.

- Если $[\phi] = 1$, то ϕ называется тавтологией
- Если $[\phi] = 0$, то ϕ называется противоречием

Примеры тавтологий:

- $A \to A$, где A — произвольная формула (закон тождества)
- $\neg(A \wedge \neg A)$ (закон противоречия)
- $A \vee \neg A$ (закон исключенного третьего)
- $\neg\neg A \to A$ (закон двойного отрицания)
- $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (первый закон де Моргана)
- $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (первый закон де Моргана)
- $(A \to B) \leftrightarrow (A \to B)$ (закон контрапозиции)
- $((A \to B) \to A) \to A$ (закон Пирса)
- $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ (коммутативность конъюнкции)
- $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ (коммутативность дизъюнкции)
- $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ (силлогизм)

Определение 4. Литералом называется либо переменная, либо отрицание переменной.

Определение 5. Конъюнкт — конъюнкция литералов.

Определение 6. Дизъюнкт — дизъюнкция литералов.

Определение 7. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) — конъюнкция дизъюнктов.

Определение 8. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) — дизъюнкция конъюнктов.

Теорема 2. *Любую функцию $f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ можно представить в виде ДНФ и виде КНФ.*

Определение 9. Если $a \in \{0,1\}$, то $p^a = a$, если $a = 1$, и $p^a = \neg p$, если

ДНФ:
f принимает значение 1 на наборах $(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, (a_1^k, \dots, a_n^k)$
$f = \bigvee\limits_{i=1}^{k} \wedge_{j=1}^{n} p_j^{a_j^i}$, где p_j — j-тая переменная, а a_j^i — значение, принимаемое

переменной p_j в i-том наборе.Это работает, если $k > 0$. Если $k = 0$, то функция — противоречие.

КНФ:

f принимает значение 0 на наборах $(b_1^1, \ldots, b_n^1), \ldots, (b_1^l, \ldots, b_n^l)$

$f = \bigwedge\limits_{i=1}^{l} \vee_{j=1}^{n} p_j^{1-b_j^i}$, где p_j — j-тая переменная, а b_j^i — значение, принимаемое переменной p_j в i-том наборе.Это работает, если $l > 0$. Если $l = 0$, то функция — тавтология.

Многочлены Жегалкина:

Рассмотрим конъюнкцию и поймем, что она работает как умножение на числах 0 и 1.

Рассмотрим исключающее или и поймем, что оно есть сложение по модулю 2.

А если есть сложение и умножение, то можно определить, что такое многочлен. Но так как у нас $\forall x: \ x^2 = x$ и $\forall x: \ x + x = 0$, то многочлены получатся специфического вида.

Одночлен — произведение различных переменных: $\prod\limits_{j=1}^{k} x_{i_j}$. (Произведение нуля элементов равно 1)

Многочлен — сумма различных одночленов.

Значение многочлена на наборе нулей и единиц определяется аналогично значению пропозициональной формулы.

Теорема 3. *Каждая функция $f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ представляется в виде многочлена Жегалкина единственным образом с точностью до перестановки слагаемых и сомножителей.*

Доказательство. Всего одночленов — 2^n

Всего многочленов — 2^{2^n}

Функций тоже 2^{2^n}

Тогда если мы докажем, что два многочлена не могут вычислять одну и ту же функцию, то мы сразу получим и существование и единственность.

$\forall x P(x) = Q(x) \Rightarrow P = Q \Leftrightarrow \forall x P(x) - Q(x) = 0 \Rightarrow P = Q \Leftrightarrow \forall x P(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow P = Q$

Пусть $R(x) = P(x) + Q(x) \neq 0$. Возьмем самый короткий одночлен, входящий в R. Пусть это одночлен $x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{1_k}$. Пусть $x_{i_1} = \ldots x_{i_k} = 1$, и $x_i = 0$ для остальных x_i. Но тогда $R(x) = 1$, что противоречит предположению. Значит предположение неверно и $R = 0$. $\square$

1. Полные системы связок

Определение 10. K - мерной связкой (связкой валентности k) называется функция из $\{0,1\}^k$ в $\{0,1\}$

$0, 1$ — 0-местные связки.

Пусть фиксирован набор связок $f_1, \ldots, f_n$ с валентностями $k_1, \ldots, k_n$ соответственно.

Тогда формула определяется так:

1) Переменная является формулой.

2) Пусть есть некоторое количество формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и связка f валентности k. Тогда $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — формула.

Значения формулы в

1) $[p_i](a_1, \ldots, a_n) = a_i$

2) $[f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)](a_1, \ldots, a_n) = f([\varphi_1], \ldots, [\varphi_n])$

Определение 11. Набор связок $f_1, \ldots, f_n$ называется полным, если при помощи этих связок можно выразить любую булеву функцию.

Примеры полных связок:

- $(\neg, \vee, \wedge)$
- $(\neg, \vee)$
- $(\neg, \wedge)$
- $(1, +, \wedge)$

Примеры неполных связок:

- $\neg$
- $(\wedge, \vee, \to)$

Определение 12. Функция f называется сохраняющей единицу, если $f(1, \ldots, 1) = 1$

Определение 13. Функция f называется сохраняющей ноль, если $f(0, \ldots, 0) = 0$

Определение 14. Функция f называется самодвойственной, если $f(\neg x_1, \ldots, \neg x_k) = \neg f(x_1, \ldots, x_k)$

Определение 15. Функция f называется линейной, если она выражается линейным многочленом Жегалкина, т.е $p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}(+1)$

Определение 16. Функция f называется монотонной, если $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \ldots, x_n \leq y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$

Теорема 4.

1) *Композиция функций, сохраняющих единицу, сохраняет единицу.*

2) *Композиция функций, сохраняющих ноль, сохраняет ноль.*

3) *Композиция самодвойственных функций — самодвойственная функция.*

4) *Композиция линейных функций — линейная функция.*

5) *Композиция монотонных функций — монотонная функция.*

Замечание. Введем обозначения для классов: D_1 — класс функций, сохраняющих единицу, D_0 — класс функций, сохраняющих ноль, S — класс самодвойственных функций. L — класс линейный функций. M — класс монотонных функций.

Следствие 1. *Если $f_1, \ldots, f_n \subset D_1$, то $f_1, \ldots, f_n$ — неполный набор*
Если $f_1, \ldots, f_n \subset D_0$, то $f_1, \ldots, f_n$ — неполный набор
Если $f_1, \ldots, f_n \subset S$, то $f_1, \ldots, f_n$ — неполный набор
Если $f_1, \ldots, f_n \subset L$, то $f_1, \ldots, f_n$ — неполный набор
Если $f_1, \ldots, f_n \subset M$, то $f_1, \ldots, f_n$ — неполный набор

Теорема 5. *Теорема Поста $K = f_1, \ldots, f_n$ — полный набор тогда и только тогда, когда $K \cap \overline{D_1} \neq \emptyset, K \cap \overline{D_0} \neq \emptyset, K \cap \overline{S} \neq \emptyset, K \cap \overline{L} \neq \emptyset, K \cap \overline{M} \neq \emptyset$*

Замечание. $p^a = p$, если $a = 1$ и $p^a = \neg p$, если $a = 0$. Причем $p^a = a^p = a \leftrightarrow p$

Доказательство. Понятно, что если условие о непустых пересечениях не выполняется, то K — не полная система. Пусть это условие выполняется. Тогда в наборе K найдутся: f_0, не сохраняющая ноль, f_1, не сохраняющая единицу, g — не самодвойственная, немонотонная h, нелинейная функция k.
Рассмотрим f_0. $f_0(0,\ldots,0) = 1$. Либо $f_0(1,\ldots,1) = 1$, и у нас есть тождественная единица, либо $f_0(1,\ldots,1) = 0$ и у нас есть отрицание. Рассмотрим f_1. Ситуация с ней аналогична: $f_1(1,\ldots,1) = 0$ и у нас есть либо тождественный ноль, либо отрицание.
Пусть мы в обоих случаях мы получили отрицание. Тогда рассмотрим несамодвойственную g. Тогда $g(\neg a_1,\ldots,\neg a_n) = g(a_1,\ldots,a_n)$. Тогда $g(p^{a_1},\ldots,p^{a_n})$ — константа. И так как у нас есть отрицание, то мы получим обе константы.
Теперь у нас в любом случае точно есть тождественные ноль и единица. Рассмотрим немонотонную функцию h. Тогда существует такой набор $(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},a_n)$, такой что $h(a_1,\ldots,a_{i-1},0,\ldots,ai+1,\ldots,a_n) = 1$ и $h(a_1,\ldots,a_{i-1},1,\ldots,ai+1,\ldots,a_n) = 0$. NТогда рассмотрим функцию $h(a_1,\ldots,a_{i-1},p,\ldots,ai+1,\ldots,a_n)$. Заметим, что она — отрицание p. Теперь у нас есть 0, 1, $\neg$.
Рассмотрим нелинейную функцию k. Значит в многочлене Жегалкина функции k есть произведение двух переменных. Пусть это x_1, x_2, без ограниченя общности. Тогда $k(x_1,\ldots,x_n) = Ax_1x_2 + Bx_1 + Cx_2 + D$, где $A \neq 0$. $A \neq 0$, значит есть набор значений $(a_3,\ldots,a_n)$, такой что $A(a_3,\ldots,a_n) = 1$. Тогда $k(x_1,x_2,a_3,\ldots,a_n) = x_1x_2 + x_1b + x_2c + d$, где b,c,d — значения многочленов B,C,D на данном наборе. Если $d = 1$, то рассмотрим $\neg k$, а так как отрицание есть прибавление единицы, то $\neg k(x_1,x_2,a_3,\ldots,a_n) = x_1x_2 + bx_1 + c_x2$.
Осталось рассмотреть несколько случаев:

$b = c = 0$. Это конъюнкция. Все хорошо

$b = c = 1$. $k = x_1 + x_2 + x_1x_2$. Это дизъюнкция. Все хорошо.

$b = 1, c = 0$. $k = x_1 + x_1x_2 = x_1(x_2+1) = x_1 \wedge \neg x_2$. Все хорошо. □

2. Исчисление высказываний

Аксиомы (схемы аксиом):

1) $A \to (B \to A)$

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3) $(A \wedge B) \to A$

4) $(A \wedge B) \to B$

5) $A \to (B \to (A \wedge B))$

6) $A \to (A \vee B)$

7) $B \to (A \vee B)$

8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

9) $\neg A \to (A \to B)$

10) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

11) $\neg A \vee A$

Правило вывода

modus ponens: если A и $A \to B$, то B. (запись: $\frac{A \quad A \to B}{B}$)

Определение 17. Выводом в исчислении высказываний называется такая последовательность высказываний $c_1, \dots, c_n$, что c_i либо следует из двух ранее встретившихся по правилу modus ponens

Определение 18. Формула называется выводимой если она встречается в каком-то выводе.

Теорема 6. *Теорема о корректности Если φ выводимо, то оно является тавтологией.*

Доказательство. 1) Аксиомы 1-11 — тавтологии.

2) Если A — тавтология, и $A \to B$, то B — тавтология.

□

Обозначение. *Если φ выводимо, то пишут* $\vdash \varphi$

Утверждение. $\vdash (D \to D)$

Определение 19. Пусть Γ — множество пропозициональных формул. Тогда выводом из Γ называется последовательность формул $c_1, \dots, c_n$, такое что либо c_i — аксиома, либо $c_i \in \Gamma$, либо следует из двух предыдущих по правилу modus ponens.

Обозначение. $\Gamma \vdash \varphi$

Лемма 2. *Лемма о дедукции*
Пусть Γ *— множество пропозициональных формул,* A, B *— пропозициональные формулы. Тогда* $\Gamma \vdash A \to B \Leftrightarrow \Gamma \cup \{A\} \vdash B$

Доказательство. Слева направо доказать просто: пусть $c_1, \ldots, c_n$ — вывод $A \to B$ из Γ. Тогда $A \to B$ выводится из $\Gamma \cup \{A\}$. И по правилу modus ponens из $A \to B$ и A получаем B.
Обратно: пусть есть вывод $C_1, \ldots, C_n$ — вывод B из $\Gamma \cup \{A\}$. докажем по индукции, что из $\Gamma \vdash (A \to C_i)$. Есть три способа получить C_i. Пусть C_i— аксиома. Тогда надо доказать: $\Gamma \vdash (A \to C_i)$. Но у нас есть аксиомы C_i и $C_i \to (A \to C_i)$. По правилу modus ponens получаем, что нам надо. Если $C_i \in \Gamma \cup \{A\}$. Тогда либо $C_i \in \Gamma$ и все аналогично, либо $C_i = A$, но мы уже доказали, что $\vdash A \to A$.
Третий случай: C_i выведено из C_j и C_k по правилу modus ponens. Значит $C_k = C_j \to C_i$ (графическое равенство). По предположению индукции $\Gamma \vdash (A \to C_j)$, $\Gamma \vdash (A \to C_k) = (A \to (C_j \to C_i))$.
$(A \to (C_j \to C_i)) \to ((A \to C_j) \to (A \to C_i))$ **(A2)**
$(A \to C_j) \to (A \to C_i)$ **(m.p.)**
$A \to C_i$ **(m.p.)** ∎

Определение 20. φ — тавтология, если она истинна на любом наборе значений переменной.

Определение 21. φ — выводима, если в каком-нибудь выводе в исчислении высказываний.

Теорема 7. *Теорема о полноте*
Если φ *— тавтология, то* φ *выводима.*

Лемма 3. *Если* φ *выполнена на наборе* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*, то тогда* $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \varphi$ *(*φ *зависит от* $p_1, \ldots, p_n$*)*

Выведем из леммы теорему:
Если φ — тавтология, то φ выполнена на любом наборе. По лемме для любого набора $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \varphi$, в частности $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_{n-1}^{x_{n-1}}, p_n \vdash \varphi$ и $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_{n-1}^{x_{n-1}}, \neg p_n \vdash \varphi$. Но у нас есть правило разбора случаев $\frac{\Gamma, A \vdash C \ \ \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$(оно следует из восьмой аксиомы). Применив её, получим $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_{n-1}^{x_{n-1}}, p_n \vee \neg p_n \vdash \varphi \Rightarrow p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_{n-1}^{x_{n-1}} \vdash \varphi$. Мы исключили последнюю переменную. Аналогично поубиваем остальные $n-1$ переменную и получим, что $\vdash \varphi$

Доказательство.
Докажем следующее утверждение: если φ выполнена на наборе X, то $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \varphi$ и если φ не выполнена, то $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \neg\varphi$.
Доказывать будет индукцией по построению формулы.

- Если φ — переменная, то это очевидное следствие.
- Если $\varphi = \neg\psi$. Пусть ψ истинно. Тогда по предположению индукции $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \psi \vdash \neg\neg\psi \vdash \neg\varphi$. Если ψ ложно, то все аналогично.
- Если $\varphi = (\psi \wedge \xi)$
  Много капитанских утверждений, которые можно доказать руками.
  $P, Q \vdash P \wedge Q$, $P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$,$\neg P, Q \vdash \neg(P \wedge Q)$,$\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$
  $P, Q \vdash P \vee Q$, $P, \neg Q \vdash P \vee Q$,$\neg P, Q \vdash P \vee Q$,$\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$
  $P, Q \vdash P \to Q$, $P, \neg Q \vdash \neg(P \to Q)$,$\neg P, Q \vdash P \to Q$,$\neg P, \neg Q \vdash P \to Q$
  Например пусть $\varphi = \psi \wedge \xi$. Пусть ψ истинно и ξ ложно. Тогда по предположению индукции $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \psi$, $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \neg\xi$, и мы знаем, что $\psi, \neg\xi \vdash \neg(\psi \wedge \xi) = \neg\varphi$. Отсюда следует, что $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_n^{x_n} \vdash \neg\varphi$

□

Определение 22. Множество формул Γ называется совместным, если на некотором наборе значений все формулы из Γ истинны.

Определение 23. Множество формул Γ противоречиво, если для некоторой формулы φ $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Теорема 8. *Если* Γ *совместно, то оно непротиворечиво.*

Доказательство. Если все формулы Γ верны на некотором наборе $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и из Γ выводится некоторая формула ψ, то она тоже верна на этом наборе. (доказательство аналогично теореме о корректности: если формула из Γ или аксиома, то она выполнена на этом наборе. Если же) Следовательно, φ и $\neg\varphi$ не могут быть выведены одновременно, так как они принимают разные наборы значений на всех наборах. □

Докажем теорему о корректности из этой теоремы.
Если φ выводима, то $\{\neg\varphi\}$ противоречиво, следовательно $\{\neg\varphi\}$ несовместно, следовательно $\neg\varphi$ — противоречие, а значит φ — тавтология.

Определение 24. Непротиворечивое множество Δ называется полным, если для любой формулы φ либо $\Delta \vdash \varphi$, $\Delta \vdash \neg\varphi$

Лемма 4. *Если* Γ *непротиворечива, то существует полное непротиворечивое множество* Δ*, такое что* $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство. Докажем только для счетного числа переменных. Если переменных счетное число, то и формул счетное число. Пронумеруем их. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — все формулы от этих переменных.

Утверждение. *Если* A *— непротиворечивое множество а* φ *— формула, то хотя бы одно из множеств* $A \cup \{\varphi\}$ *или* $A \cup \{\neg\varphi\}$

Доказательство. Пусть $A \cup \{\varphi\}$ и $A \cup \{\not\varphi\}$ противоречивы. Тогда $A, \varphi \vdash \psi, \neg\psi$, $A, \neg\varphi \vdash \xi, \neg\xi$. Тогда $\neg\xi \to (\xi \to \psi)$, $\xi \to (\neg\xi \to \neg\psi)$. Значит $A, \xi \vdash \psi, \neg\psi$, $A, \neg\xi \vdash \psi, \neg\psi$. Тогда $A \vdash \psi, \neg\psi$. Значит A противоречиво. Противоречие. $\square$

$\Gamma_0 = \Gamma$
Рассматриваем все формулы по очереди и пытаемся добавить формулу или её отрицание: $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\varphi_i\}$, если $\Gamma_{i-1} \cup \{\varphi_i\}$, и $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\neg\varphi\}$.
$\Delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$

- $\Gamma \subseteq \Delta$
- Полнота: либо $\Delta \vdash \varphi$, либо $\Delta \vdash \neg\varphi$
- Непротиворечивость: Все Γ_i непротиворечивы. Рассмотрим формулы в выводе $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, $\psi_j \in \Delta \Rightarrow \psi_j \in \Gamma_{n_j}$. Вывод по определению конечен, значит можно выбрать $n = \max\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$

$\square$

Лемма 5. *Если* Δ *непротиворечивое полное множество, то оно совместно.*

Доказательство.
Δ полное непротиворечивое множество, p_k — переменная. Тогда $\Delta \vdash p_k$ или $\Delta \vdash \neg p_k$. Для каждой p_i мы можем вывести либо её, либо её отрицание, то есть мы можем однозначно определить, что либо $p_i = 0$, либо $p_i = 1$. Получили выполняющий набор. Пусть $\varphi \in \Delta$ и она не выполняется на этом наборе. Тогда $\neg\varphi$ выполняется на этом наборе. Тогда $\Delta \vdash \neg\varphi$, так как все p_i выводятся из Δ и из всех p_i выводится по лемме $\neg\varphi$. Но $\varphi \in \Delta$, а значит $\Delta \vdash \varphi$. Получили, что из Δ выводится и φ и $\neg\varphi$. Тогда Δ противоречиво. Противоречие. $\square$

Теорема 9. *Если* Γ *непротиворечиво, то* Γ *совместно.*

Докажем теорему о полноте из этой теоремы.
Если φ — тавтология, то $\{\neg\varphi\}$ несовместно. По только что сформулированной теореме $\{\neg\varphi\}$ противоречиво, значит есть ψ, такое что $\neg\varphi \vdash \psi$, $\neg\varphi \vdash \neg\psi$. Тогда по правилу рассуждения от противного $\vdash \varphi$.

Доказательство. Γ непротиворечиво, значит есть полное непротиворечивое множество $\Delta, \Gamma \subseteq \Delta$. Δ полное и непротиворечимое, значит оно совместно. Значит все формулы из Δ истинны на каком-то наборе. Но так как Γ — подмножество Δ, то оно тоже совместно. ☐

Теорема 10. *Теорема о компактности*
Пусть Γ *— бесконечное множество формул, и любое конечное подмножество* Γ *совместно, то* Γ *совместно.*

Доказательство. Пусть $K \in \Gamma$ — конечное подмножество. K совместно, значит K непротиворечиво. Любое конечное подмножество Γ непротиворечиво. Из этого следует , что все Γ непротиворечиво, так как любой вывод конечен, следовательно в нем учавствует конечное противоречивое подмножество формул, а такого нет. ☐

2. Языки первого порядка

Пример формулы: $\forall x: \ (\exists y: \ P(f(x,y), g(y)) \vee \neg Q(z, g(z))$

Символы:

1) Индивидные переменные: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$

2) Функциональные символы: $f, y, f_1, f_2, \ldots$. У каждой формулы есть валентность $n \in \mathbb{N}$ — количество принимаемых переменных.

3) Функциональный символ с нулевой валентностью — константа.

4) Предикатные символы: $P, Q, P_1, Q_2, \ldots$. У них тоже есть валентность.

5) Кванторы: $\forall, \exists$

6) Служебные символы: () и ,.

Определение 25. Терм — это запись, которая может принимать предметное значение.

1) Если x — индивидная переменная, то x — терм.

2) Если c — функциональный символ валентности 0, то c — терм.

3) Если $t_1, \ldots, t_k$ — термы и f — функциональный символ валентности k, то $f(t_1, \ldots, t_k)$ — терм.

Определение 26. Если $t_1, \ldots, t_k$ — термы, а P — предиканый символ, то $P(t_1, \ldots, t_k)$ — атомарная формула.

Определение 27.

- Если F — атомарная формула, то F — формула.
- Если F — формула, то $\forall x F$ и $\exists x F$ — формулы.
- Если F и T — формулы, то $F \wedge T$, $F \vee T$, $\neg F$ — формулы.

Определение 28. Сигнатура — набор предикатных и предикатных символов с указанием валентностей.

Определение 29. Интерпретация сигнатуры:

- Носитель сигнатуры $M \neq \emptyset$
- Для каждого функционального символа валентности k задана функция из M^k в M.
- Для каждого предиката валентности k задан k-местный предикат на M, то есть функция из M^k в $\{0, 1\}$

Определение 30. Оценка — сопоставление каждой переменной, входящей в функцию элемента из M.

Определение истинности формулы при заданной интерпретации на заданной оценке

Обозначение. *V — множество переменных. $\pi : V \to M$ — оценка. $[\varphi](\pi)$ — значение формулы φ на оценке π. $[t][\pi]$ — значение терма t на оценке π.*

Обозначение. *f — фунцкиональный символ. $\tilde{f}$ — функция, ему соответствующая.*

Определение 31. Определение значения терма A:

- Если терм — переменная, то есть $t = x$, то $[t](\pi) = \pi(t)$
- Если терм — константа, то есть $t = c$, то $[t](\pi) = \tilde{c}$
- Если терм был получен с помощью функционального символа, то есть $\varphi = P(t_1, \ldots, t_k)$, то $[t](\pi) = \tilde{f}([t_1](\pi), \ldots, [t_k](\pi))$

Обозначение. *$\pi + x \to m$ — такая оценка, в которой значение переменной x изменено на m.(Если $\pi' = \pi + x \to m$, то $\pi' : V \to M$, $m \in M$, $\pi'(y) = \pi(y)$, если $x \neq y$, и $\pi'(y) = m$, если $x = y$)*

Определение 32. Определение значений формулы определяется аналогично значениям терма.

- $\varphi = P(t_1, \ldots, t_k) \Rightarrow [\varphi](\pi) = \tilde{P}([t_1](\pi), \ldots, [t_k](\pi))$
- $\varphi = \neg\psi \Rightarrow [\varphi](\pi) = \neg[\psi](\pi)$
- $\varphi = (\psi \wedge \xi) \Rightarrow [\varphi](\pi) = [\psi](\pi) \wedge [\psi](\pi)$
- $\varphi = \exists x\psi \Rightarrow [\varphi](\pi) = \bigvee\limits_{m \in M} [\psi](\pi + x \to m)$
- $\varphi = \forall x\psi \Rightarrow [\varphi](\pi) = \bigwedge\limits_{m \in M} [\psi](\pi + x \to m)$

Определение 33. Формула φ общезначима, если она истинна при любой интерпретации на любой оценке.

Определение 34. Параметры функции:

- Если $t = x$, то x — единственный параметр t.
- Если $t = c$, то у t нет параметров.
- Если $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ или $\varphi = P(t_1, \ldots, t_k)$, то множество параметров $t(\varphi)$ — объединение множеств параметров $t_1, \ldots, t_k$
- Если $\varphi = \neg\psi$, то множество параметров φ равно множеству параметров ψ
- Если $\varphi = \psi \wedge \xi$, то множество параметров φ

Определение 35. Формула называется замкнутой, если у неё нет параметров.

Теорема 11. *Истинность формулы зависит только её параметров и интерпретации. То есть если для оценок* π *и* π' *выполняется* $\pi(y) = \pi'(y)$ *для всех* $y \in \operatorname{Par} \varphi$*, то* $[\varphi](\pi) = [\varphi](\pi')$

Следствие 2. *Истинность замкнутой формулы зависит только от интерпретации*