1. Действия с матрицами

Определение 1. Матрицей размера $n \times k$ называется таблица с n строками и k столбцами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

У нас в курсе в роли a_{ij} будут чаще всего выступать числа. Однако, в некоторых случаях бывает нужно рассматривать и матрицы, заполненные многочленами или другими объектами.

Определение 2. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — матрицы одного и того же размера. Тогда *сумма* этих матриц есть матрица $C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Определение 3. Пусть A — матрица и b — число. *Произведением* матрицы A на число b называется матрица $C = (c_{ij}) = (b \cdot a_{ij})$. При этом размер матрицы C совпадает с размером матрицы A.

Обратим внимание на несколько свойств матричных операций.

Свойство 1. *Ассоциативность:* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Свойство 2. *Коммутативность:* $A + B = B + A$.

Свойство 3. *Существует нулевая матрица* 0, *со всеми элементами равными нулю, которая обладает следующими свойствами:*

1) *для любой матрицы выполняется* $A + 0 = A$;

2) *для любой матрицы* A *существует обратная матрица* $-A$, *такая что* $A + (-A) = 0$.

Кроме сложения матриц и умножения матрицы на число мы определим правило *умножения двух матриц.*

Пусть A — строка (матрица размера $1 \times k$), $A = (a_i)$,
B — столбец (матрица размера $k \times 1$), $B = (b_i)$.

Тогда, по нашему определению, $A \cdot B = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot b_i$, то есть линейная комбинация a_i и b_i.

Результат произведения $A \cdot B$ есть матрица размера 1×1 (в некотором смысле — просто одно число.)
Пусть A — матрица размера $n \times k$,
B — матрица размера $k \times l$.
Тогда $A \cdot B = C = (c_{ij})$ есть матрица размера $n \times l$, в которой

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} \cdot b_{tj}.$$

Для упрощения нашего изложения введём следующие обозначения:

- a_{i*} — i-я строка матрицы A;
- a_{*j} — j-й столбец матрицы A.

Тогда можно выразить произведение матриц через произведение строк и столбцов следующим образом:

$$A \cdot B = (a_{i*} \cdot b_{*j}).$$

Остановимся на свойствах, которыми обладает матричное умножение.

Свойство 4. *Ассоциативность:* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Свойство 5. *Некоммутативность: в общем случае для матриц неверно, что $AB = BA$. Читателю предлагается самостоятельно придумать контрпример.*

Свойство 6. *Дистрибутивность:* $A \cdot (B + C) = (B + C) \cdot A = A \cdot B + A \cdot C$.

Свойство 7. *Существование единичной матрицы: Для любого натурального числа $n \geqslant 1$ существует единичная матрица*

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

такая что для любой матрицы A размера $n \times k$ выполнено равенство $AE_k = E_nA = A$.

Еще одна операция, которая определена над матрицами — это операция *транспонирования матрицы.* Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица (необязательно квадратная). Тогда *транспонированная матрица* есть $A^T = (a_{ji})$, т. е. это просто матрица A, элементы которой отражены относительно главной диагонали. Здесь *главной диагональю* мы называем диагональ с элементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$.

Отметим свойства операции транспонирования:

1) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

4) $(B^T A^T)_{ji} = \sum\limits_t b_{tj} \cdot a_{it}$

2. Геометрия на плоскости и в пространстве

1. Векторы

P_1, P_2, P_3 - прямая, плоскость и пространство соответственно.

Определение 4. $\vec{XY}$ - направленный отрезок (Означает, что мы различаем концы отрезков) $\vec{XY} = \vec{ZT}$, если $|XY| = |ZT|$ и они сонаправлены.

Определение 5. *Вектор* - это класс всех равных направленных отрезков.

Операции с векторами

1) Сложение векторов $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

2) Умножение векторов $\alpha\vec{a}$

Определение 6. Линейная комбинация векторов $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ с коэффициэнтами $a_1, a_2, \dots, a_n$ - $\sum\limits_i a_i\vec{v_i}$ Линейная комбинация называется тривиальной, если все коэффициэнты равны 0. Иначе она называется нетривиальной.

Определение 7. Система векторов $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ линейно зависимая, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю. Иначе она линейно независима.

Теорема 1. *Система векторов V линейно зависимая тогда и только тогда, когда (хотя бы) один из них является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Доказательство очевидно и тривиально. □

Пример 1. Рассмотрим неколлинеарные векторы a и b. Не трудно доказать, что система их этих двух векторов линейно независима. Тогда система (a, a, b) линейно зависима, несмотря на то, что b не выражается через остальные векторы.

Введем обозначение: множество векторов на прямой, в плоскости, в пространстве будем обозначать V_1, V_2, V_3.

Введем аббревиатуры: *лз* - линейно зависима, *лнз* - линейно независима.

Утверждение. *Если система векторов линейно независима, то и подсистема линейно независима. Если какая-то подсистема векторов лнз, то и система лнз.*

Доказательство. Если система лз, то один из её векторов выражается через остальные. Тогда и для все системы это верно. □

Лемма 1. *1) Пусть есть ненулевой вектор $\vec{a}$ и вектор $\vec{b}||\vec{a}$. Тогда $\vec{b}$ выражается через $\vec{a}$*

2) Пусть есть a_1, a_2 - неколлинеарные векторы, но b, a_1, a_2 - компланарны. Тогда b выражается через a_1, a_2

3) Пусть a_1, a_2, a_3 - некомпланарны. Тогда любой вектор $b \in V_3$ выражается через них.

Доказательство. 1) $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Если $a \uparrow\uparrow b$, то $b = \lambda x$, иначе $b = -\lambda x$

2) Отложим от некоторой точки O векторы $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ и $\vec{OM}$, равный $\vec{b}$. Рассмотрим проекции B_1 и B_2 точки M на прямые, соответствующие векторам. Тогда $b = OB_1 + OB_2$. Но OB_1 коллинеарен с a_1, а OB_2 — с a_2, а значит они выражаются через a_1 и a_2: $OB_1 = \lambda_1\vec{a_1}, OB_2 = \lambda_2\vec{a_2}$. Тогда $\vec{OM} = \vec{OB}_1 + \vec{OB}_2 = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2}$, следовательно он выражается через $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$.

3) Доказывается аналогично предыдущему пункту.

□

Теорема 2. *1) Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда он равен* 0.

2) Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

3) Система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда они компланарны.

4) Система из четырех векторов линейно зависима всегда.

Доказательство. 1) Если $\alpha\vec{a} = 0, \alpha \neq 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

2)

3) Если a_1 и a_2 коллинеарны, то они (и система) ЛЗ. Если не же нет, то по лемме Если система ЛЗ, то один из векторов (для определенности a_3) выражается через другие. Пусть α - плоскость параллельная a_1 и a_2. Тогда $\alpha||(a_1 + a_2) => \alpha||a_3$. Следовательно они все компланарны.

4) Если a_1, a_2, a_3 линейно независимы (в противном случае все очевидно), то a_4 выражается через a_1, a_2, a_3 по лемме.

□

2. Базис

Определение 8. Пусть V - некоторое пространство векторов. Система векторов этого пространства называется базисом, если выполняются следующие условия:

1) Она линейно независима

2) Через векторы этой системы можно выразить любые векторы этого пространства.

Теорема 3. *Если система* $(a_1, \ldots, a_n)$ *лнз, то любой вектор раскладывается по ней не более чем одним способом.*

Доказательство. Пусть это не так.

$$\vec{b} = \sum_i \alpha_i a_i$$

$$\vec{b} = \sum_i \beta_i a_i$$

Хотя бы для одного коэффициента j $\alpha_j \neq \beta_j$

$$\vec{0} = \vec{b} - vb = \sum_i (\beta_i - \alpha_i) va_i$$

. Получили противоречие $\square$

Определение 9. Пусть $E = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ - базис пространства V. Любой вектор b раскладывается по базису: $b = \sum_i \beta_i \vec{e_i}$. Тогда $\beta_1, \ldots, \beta_n$ - координаты вектора b.

$$\vec{b} = E \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \text{где} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \text{— координатный столбец}$$

Опишем все базисы в V_1, V_2, V_3

1) в V_1 это любой ненулевой вектор
2) в V_2 это любые два неколлинеарных вектора
3) в V_3 это любые три некомпланарных вектора

Доказательство. Докажем последний пункт, остальные будут доказываться аналогично. Пусть есть система из трех некомпланарных векторов e_1, e_2, e_2.

1) Она линейно независима (по теореме).
2) Любой вектор b выражается через эту систему (по лемме).

В базисе не более 3 векторов, так как любые 4 вектора линейно зависимы. Также в векторе не менее 3 векторов, так как через 2 вектора всё выразить нельзя. $\square$

Определение 10. Пусть $E = (e_1, \ldots, e_n)$ и $E' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса пространства V. Тогда разложим вектора из базиса E' по базису E. $e'_i = \sum_j s_{ij} e_j$. Обозначим $S = (s_{ij})$. Тогда S называется *матрицей перехода* от E к E' и выполняется следующее свойство: $E' = S \cdot E$

Теорема 4. *Теорема о замене базиса*
Пусть E, E' — базисы в V, $\vec{b} \in V$. $\vec{b} = E\beta = E'\beta'$ (β, β' — координатные столбцы), S - матрица перехода от E к E'. Тогда $\beta = S\beta'$

Доказательство. $E' = E \cdot S$, $b = E'\beta' = ES\beta'$. Справа записано разложение вектора b по базису E, и $S\beta'$ — координатный столбец. Так как разложение единственно, то $S\beta' = \beta$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 5. *Пусть E, E', E'' - три базиса в V. R - матрица переходов от E к E', S - от E' к E''. Тогда матрица перехода от E к E'' — $R \cdot S$.*

Доказательство. $E'' = E' \cdot S = (E \cdot R) \cdot S = E \cdot (R \cdot S)$. □

Пример 2. Пусть E и E' — базисы. R и S — матрицы перехода от E к E' и наоборот соответственно. Тогда $RS = e = RS$, так как RS — матрица перехода от E к ней же самой.

Определение 11. Базис называется *ортогональным*, если любые два его вектора ортогональны друг другу. Базис называется *ортонормированным*, если он ортогонален и любой его вектор имеет единичную длину.

Пример 3. Рассмотрим два базиса в P_2. $Q_1 = (e_1, e_2)$ — ортонормированный базис. $Q_2 = (e'_1, e'_2)$ — базис, полученный из Q_1 на угол ϕ против часовой стрелки.

$$E' = (e'_1, e'_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Определение 12. Рассмотрим пространство точек P_i. Пусть $O \in P_i$, E — базис в V_i. Тогда пара (O, E) называется декартовой системой координат - ДСК. ДСК называется прямоугольной, если базис *ортонормированный.*

Если $A \in P_i$, то $\vec{OA}$ раскладывается по базису с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тогда говорят, что точка A имеет координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в этой декартовой системе координат.

Пусть есть некоторая декартова система координат $(0, E)$ в некотором пространстве точек и точки A и B с координатным столбцами α и β соответственно. Тогда $\vec{AB}$ имеет координаты $E(\beta - \alpha)$

Доказательство.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = E\beta - E\alpha = E(\beta - \alpha)$$

□

Утверждение. *Пусть есть точки A и B с координатными столбцами α и β. Тогда для любой точки C на прямой AB: $\gamma = \mu\beta + (1-\mu)\alpha$, где γ — координатный столбец C.*

Доказательство. $\vec{OC} = \vec{OA} + \mu\vec{AB} = E\alpha + \mu E(\beta - \alpha) = E(\mu\beta + (1-\mu)\alpha)$ □

Теорема 6. *Пусть (O, E) и (O', E') — две ДСК в одном и том же пространстве, S — матрица перехода от E к E', $\vec{OO'} = E\gamma$. Тогда, если $A \to_{(O,E)} \alpha$ и $A \to_{(O',E')} \alpha'$, то $\alpha = S\alpha' + \gamma$*

Доказательство.

$$\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A} = E\gamma + \vec{OA}$$

$$\vec{O'A} = E'\alpha' = ES\alpha'$$

$$\vec{OA} = E\gamma + ES\alpha = E(\gamma + S\alpha')$$

□

3. Произведение векторов

Скалярное произведение векторов

Определение 13. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$, где α — угол между векторами, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

Замечание.

$$(\vec{a}, \lambda\vec{a}) = \lambda|\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0, \text{считаем, что } \forall\vec{a} : \vec{a} \perp \vec{0}$$

Определение 14. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V, \vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда *проекцию* вектора a на вектор b мы обозначаем $\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Утверждение.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}, \vec{b})$$

Доказательство. Пусть $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Пусть $\vec{a'} = \mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}$. Тогда $\vec{a'} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a'} = \vec{a}\cos\alpha$. Значит, $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a'}||\vec{b}|\cos\alpha = (\vec{a'}, \vec{b})$. Для случая $\alpha > \frac{\pi}{2}$ доказательство аналогично. □

Утверждение. $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

Доказательство.

$$\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|^2} = \frac{(\vec{a'},\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a'}$$

$$\left|\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|^2}\right|$$

$\square$

Свойства скалярного произведения

- $(\vec{a},\vec{a}) > 0$ при $\vec{a} \neq 0$
- $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ — симмметричность
- $(\alpha\vec{a},\beta\vec{b}) = \alpha\beta(\vec{a},\vec{b})$ — линейность по обоим аргументам.
- $(\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{b}) = (\vec{a_1},\vec{b}) + (\vec{a_2},\vec{b})$

Доказательство. Докажем, что $(\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{b}) = (\vec{a_1},\vec{b}) + (\vec{a_2},\vec{b})$

$(\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{b}) = (\mathrm{pr}_{\vec{b}}(\vec{a_1},\vec{a_2}),\vec{b}) = (\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a_1}+\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a_2},\vec{b}) = (\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a_2},\vec{b})+(\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a_1},\vec{b}) = (\vec{a_1},\vec{b})+(\vec{a_2},\vec{b})$

$\square$

Следствие 1. *Пусть E — ортонормированный базис в V_3. $\vec{a} = E\alpha$, а $\vec{b} = E\beta$, где α и β — координатные столбцы. Тогда $(\vec{a},\vec{b}) = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$*

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ раскладывает по базису как $\sum\limits_i \alpha_i\vec{e_i}$, а $\vec{b}$ — как $\sum\limits_j \beta_j\vec{e_j}$.

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\sum_i \alpha_i\vec{e_i}, \sum_j \beta_j\vec{e_j}) = \sum_i\sum_j(\alpha_i\vec{e_i},\beta_j\vec{e_j}) = \sum_i\sum_j \alpha_i\beta_j(e_i,e_j) = \sum_i \alpha_i\beta_i$$

$\square$

Доказательство. $(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = (E\alpha)^T\cdot E\beta = \alpha^T E^T E\beta = \alpha^T\beta$, так как в ортонормированном базисе $E^TE = 1$ $\square$

Упражнение 1. Понять, где недоговоренность в предыдущем доказательстве.

Следствие 2. *Пусть E — ортонормированный базис,*

$$\vec{a} = E\alpha = E\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

. Тогда $\alpha_i = (\vec{a_i}, \vec{e_i})$

Доказательство.

$$\vec{e_i} = E\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Пользуемся ортонормированностью базиса:

$$(\vec{\alpha_i}, \vec{e_i}) = \sum_j 0 \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i, j \neq i$$

□

Определение 15. Рассмотрим $P_2 \subset P_3$. P_2 делит P_3 на два полупространства. Выделим одно из двух полупространств, и назовем него положительным. Базис $(\vec{a}, \vec{b})$ в V_2 *положительно ориентирован*, если выполнено следущее свойство. Пусть α — угол, на который надо повернуть, чтобы $\vec{a}$ стал сонаправлен $\vec{b}$. Тогда базис $(\vec{a}, \vec{b})$ *положительно ориентирован*, если $\alpha < \pi$, и *отрицательно ориентирован*, если $\alpha > \pi$.

Утверждение. *Базисы $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ и $\left(\vec{b}, \vec{a}\right)$ ориентированы по разному.*

Определение 16. Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — базис. Проведем плоскость, через $\vec{a}\vec{b}$. Назовем положительным пространство, в которое смотрит вектор c. Тогда $(\vec{a}, \vec{b})$ — базис в плоскости, и у него есть ориентация. Ориентацией нашего базиса $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b})$ и будет ориентация базиса $(\vec{a}, \vec{b})$ при $\vec{c}$, смотрящем в положительное полупространство.

Утверждение. *Базисы* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}), (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ *ориентированы одинаково. Остальные три перестановки ориентированы по-другому.*

Определение 17. Пусть есть три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$. Отложим их от одной точки и рассмотрим параллелипипед, тремя ребрами которого являются три полученных отрезка. Будем называть этот параллелипипед натянутым на эту тройку векторов. *Ориентированный объем* — это объем нашего параллелипипеда, взятый со знаком $+$, если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правый базис, и со знаком $-$, если базис левый.

Ориетированный объем обозначается как $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ или просто $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; он часто называется *смешанным произведением* векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Замечание. $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$ компланарны.

Замечание. Если базис ортонормирован, то $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm 1$, в зависимости от ориентации базиса.

Аналогично определяется *ориентированная площадь* параллелограмма, натянутого на $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$ (Обозначается $S(\vec{a}, \vec{b})$).

Замечание. $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ коллинеарны.

Замечание. Если базис ортонормирован, то $S(\vec{a}, \vec{b}) = \pm 1$, в зависимости от ориентации базиса.

Теорема 7. *1)* $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = V(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$

2) $V(\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}) = \lambda V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

3) $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c + d}) = V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$

Доказательство.

- Первое свойство следует из свойств ориентации.
- Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то все очевидно. Рассмотрим $\vec{e}$, такой что $\vec{e} \perp \vec{a}, \vec{e} \perp \vec{b}, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{e})$ — правая тройка. Тогда $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left|S(vecta, \vec{b})\right| \cdot (\pm h)$, где $\pm h$ — алгебраическая длина проекции $\vec{c}$ на $\vec{e}$, т.е $(\vec{c}, \vec{e})$. Тогда $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left|S(\vec{a}, \vec{b})\right| \cdot (\vec{c}, \vec{e})$Тогда пункты (2) и (3) следуют из линейности скалярного произведения.

$\square$

Теорема 8. *1)* $V(\vec{a}, \vec{b}) = V(\vec{b}, \vec{a})$

2) $V(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda V(\vec{a}, \vec{b})$

3) $V(\vec{a}, b \vec{+} c) = V(\vec{a}, \vec{b} + V(\vec{a}, \vec{c})$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству для V_2. ☐

Теорема 9. *Пусть E — базис в V_3, $\vec{a} = E\alpha$, $\vec{b} = E\beta$, $\vec{c} = E\gamma$. Обозначим $A = (\alpha\beta\gamma)$. Тогда $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det A \cdot V(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$*

Доказательство. $A = (a_{ij})$ $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\sum\limits_{i=1}^{3} a_{1i}\vec{e_i}, \sum\limits_{i=1}^{3} a_{2j}\vec{e_i}, \sum\limits_{i=1}^{3} a_{3j}\vec{e_i}) = \sum\limits_i \sum\limits_j \sum\limits_k a_{i1}a_{j2}a_{k3}\vec{e_i}\vec{e_j}\vec{e_k}$(выделим ненулевые слагаемые) $= V(\vec{e_1}, vecte_2, vecte_2) \cdot (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}) = V(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot \det A$ ☐

Следствие 3. *Если E — ортонормированный базис, то $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = \det A$*

Теорема 10. *Пусть $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ — базис в V_2, $(\vec{a}, \vec{b}) = \det A$. Тогда $S(\vec{a}, \vec{b}) = \det A \cdot (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, где $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$*

Теорема 11. *Правило Крамера Пусть есть базис $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ в V_3.*

$$\vec{a} = E \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

. Тогда $\alpha_1 = \frac{(\vec{a}, \vec{e_2}, \vec{e_3})}{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})}$, $\alpha_2 = \frac{(\vec{e_1}, \vec{a}, \vec{e_3})}{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})}$ и $\alpha_3 = \frac{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{a})}{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})}$

Доказательство. Заметим, что знаменатель не равен нулю, так как $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ — базис. Выведем для разнообразия второе свойство. $(\vec{e_1}, \vec{a}, \vec{e_3}) = (\vec{e_1}, \sum\limits_i \alpha_i\vec{e_i}, \vec{e_3}) = \sum_i \alpha_i(\vec{e_1}, \vec{e_i}, \vec{e_3}) = \alpha_2(\vec{e_1}, vecte_2, vecte_3) \Leftarrow \alpha_2 = \frac{(\vec{e_1}, \vec{a}, \vec{e_3})}{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})}$ ☐

Использование. *Пусть есть система уравнений:*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$A = (a_{ij}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{*1}, a*2, a_{*3})$. $a_{*1}x_1 + a_{*2}x_3 + a_{*3}x_3 = b$. *Пусть* a_{*1}, a_{*2}, a_{*3} *— координатные столбцы некоторых векторов* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ *в базисе* E. b *— столбец вектора* $\vec{u}$. $\vec{u} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$. *Если* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ *— базис, то можно использовать парило Крамера.* $x_1 = \frac{\det(a_{*1}ba_{*3})}{\det A}$
Применимо, когда $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ *— базис, т.е. они некомпланарны, т.е.* $\det A \neq 0$. *В этом случае решение системы существует и единственно.*

Определение 18. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ лежат в V_3. Тогда векторным произведением называется такой вектор, что:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
2) $\left|\vec{c}\right| = \left|S(\vec{a}, \vec{b})\right|$
3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая тройка, если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарны.

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$

Замечание. Вектор $\vec{c}$ однозначно определен.

Теорема 12. *Пусть* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$. *Тогда* $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

Доказательство. При доказательстве теоремы (X) было получено, что $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left|S\vec{a}, \vec{b}\right| (\vec{c}, \vec{e})$, где $\vec{e} \perp \vec{a}, \vec{e} \perp \vec{b}$. Тогда $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \left|S(\vec{a}, \vec{b})\right| \vec{e}) = (\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}])$ □

Лемма 2. *Пусть* $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ *таковы, что* $(\vec{a}, \vec{x}) = (\vec{b}, \vec{x})$ *для любого* $x \in V_3$. *Тогда* $\vec{a} = \vec{b}$.

Доказательство. По линейности: $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{x}) = 0$. В частности: $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = (\vec{a} - vectb, \vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ □

Следствие 4. *Пусть* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \in V_3$*:* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c})$ *для любого* $\vec{c} \in V_3$. *Тогда* $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Доказательство. $(\vec{d}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ □

Замечание.

Теорема 13. *Свойства векторного проиведения*

- $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$
- $[\vec{a},\lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$
- $[\vec{a},\vec{b_1}+\vec{b_2}] = [\vec{a},\vec{b_1}] + [\vec{a},\vec{b_2}]$

Доказательство. Первые два свойства следуют из определения. Третье свойство более интересно:
$\vec{d} = [\vec{a},\vec{b_1}] + [\vec{a},\vec{b_2}]$
$\forall c \in V_3 : (\vec{d},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b_1}],\vec{c}) + ([\vec{a},\vec{b_2}],\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b_1}, vectc) + (\vec{a},\vec{b_2},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b_1} + \vec{b_2},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b_1}+\vec{b_2}],\vec{c}) \Leftarrow \vec{d} = [\vec{a},\vec{b_1}+\vec{b_2}]$ □

Следствие 5. *Пусть $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ — правый ортонормированный базис. Тогда $[\vec{e_1},\vec{e_2}] = \vec{e_3}$, $[\vec{e_2},\vec{e_3}] = \vec{e_1}$, $[\vec{e_3},\vec{e_1}] = \vec{e_2}$*

Теорема 14. *Пусть есть $\mathcal{E} = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ — правый ортонормираванный базис в V_3. Пусть $\vec{a} = \mathcal{E}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \mathcal{E}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$. Тогда $[a,b] = |\ | = \vec{d}$*

Доказательство. Достаточно проверить: $\forall c:\ (\vec{d},\vec{c}) = ([\vec{(a)},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
Пусть c раскладывается по нашему базису с коэффициентами $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. Тогда: $(\vec{d},\vec{c}) = det\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix} = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ □

Упражнение 2. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольный базис. Доказать, что $[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix}[\vec{e_2},\vec{e_3}] & [\vec{e_3},\vec{e_1}] & [\vec{e_1},\vec{e_2}]\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}$

Теорема 15. *Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_3$. Тогда $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$*

Доказательство. Запишем векторы в каком - нибудь хорошем (правом ортонормированном) базисе $\mathcal{E} = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, таком что $\vec{e_1} \parallel \vec{b}$, $\vec{e_2}$ компланарен с $\vec{b}$ и $\vec{c}$. В этом базисе векторы имеют координаты: $\vec{b} = \begin{matrix}\beta\\ 0\\ 0\end{matrix}$, $\vec{c} = \begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ 0\end{matrix}$, $\vec{a} = \begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}$.

Тогда: $[\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ \beta & 0 & 0\\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0\end{vmatrix} = \mathcal{E}\begin{matrix}0\\ 0\\ \beta\gamma_2\end{matrix}$. $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \mathcal{E}\begin{matrix}\alpha_2\beta\gamma 2\\ -\alpha_1\beta\gamma_2\\ 0\end{matrix}$. $\begin{matrix}\alpha_2\beta\gamma 2\\ -\alpha_1\beta\gamma_2\\ 0\end{matrix} = -\alpha_1\beta\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ 0\end{matrix} + (\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)\begin{matrix}\beta\\ 0\\ 0\end{matrix} = -(\vec{a},\vec{b})\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ 0\end{matrix} + (\vec{a},\vec{c})\begin{matrix}\beta\\ 0\\ 0\end{matrix}$ □

3. Множества на плоскости

1. Прямые и плоскости

Прямая на плоскости

Пусть на плоскости зафиксирована ДСК на плоскости.

Способы задания

- Каждой точке на плоскости мы можем сопоставить радиус вектор $\vec{r}$. Прямую мы можем задать как точку с радиус-вектором $\vec{r_0}$ и направляющим ветором a. Тогда радиус вектор любой точки $\vec{r}$ может быть выражен как $\vec{r_0} + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$, так как $\vec{a} \parallel \vec{ax}$. Это уравнение называется векторно-параметрическим.
- Распишем векторно-параметрическое уравнение прямой. $x = x_0 + ta$, $y = y_0 + yt$. Выразим t и приравняем. Получим: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ — каноническое уравнение прямой.
  Понимаем:
  - $a = 0 \Rightarrow x - x_0 = 0$
  - $b = 0 \Rightarrow y - y_0 = 0$
  - $a = b = 0 \Rightarrow$ это какое-то неправильное уравнение, и оно задает неправильную п
- Если приведем обе части канонического уравнения прямой к общему знаменателю, то получим: $Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой.

Переход от общего уравнения к каноническому Пусть $A \neq 0$. Тогда $By = -A(x + \frac{C}{A}) \Leftrightarrow \frac{x+\frac{C}{A}}{B} = \frac{y}{-A}$

Утверждение. *Вектор $\vec{b}$ с координатами α_1, α_2 параллелен прямой, заданный прямой $Ax + By + C = 0$, когда $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$*

Доказательство. Рассмотрим точку K с координатами (x_0, y_0), лежащую на прямой. Рассмотрим точку L, полученную из K сдвигом на вектор $\vec{b}$. У L координаты $(x_0 + \alpha_1, y_0 + \alpha_2)$. $\vec{b}$ параллелен прямой тогда и только тогда, когда L лежит на прямой. $0 = A(x_0 + \alpha_1) + B(y_0 + \alpha_2) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + (A\alpha_1 + B\alpha_2) \Leftrightarrow (A\alpha_1 + B\alpha_2) = 0$ □

Взаимное расположение прямых на плоскости

- Прямые пересекаются: направляющие векторы неколлинеарны.
- Прямые параллельны или совпадают: направляющие векторы коллинеарны. Проверяем путем выбора точки на одной прямой и проверяем, принадлежит ли она второй.

Прямые совпадают, если $(a, b) \parallel (a', b')$, т.е. $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ и $\frac{x_0 - x_0'}{a'} = \frac{y - y_0'}{b'}$, т.е. $\begin{vmatrix} \frac{x_0 - x_0'}{a'} & \frac{y_0 - y_0'}{b'} \end{vmatrix}$

Задание полуплоскостей Рассмотрим неравенство $Ax + By + C > 0$. Уравнение $Ax + By + C = 0$ задает прямую, которая делит плоскость на две полуплоскости. Утверждается, что неравенство задает одну из этих полуплоскостей. Пусть $B > 0$. Рассмотрим произвольную прямую паралельную $\vec{e_2}$ с уравнением $x = x_0$. Тогда неравество равносильно неравенству $y > \frac{-(Ax_0 + C)}{B}$

Пучок прямых

Определение 19. Пучок пересекающихся прямых — множество всех прямых, проходящих через одну точку.

Определение 20. Пучок параллельных прямых — множество всех прямых, параллельных ненулевому вектору.

Замечание. Любые две прямые принадлежат ровно одному пучку.

Теорема 16. *Пусть e_1 и e_2 — две прямые с уравнениями $A_i x + B_i y + C_i = 0$. Тогда все прямые из пучка P, $e_1 \in P, e_2 \in P$, имеют уравнения вида $\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2)$*

Доказательство. Надо доказать, что $l \in P \Leftrightarrow$ l задается таким уравнением

1) Пусть e_1 и e_2 пересекаются в точке $X(x_0, y_0)$, то $A_i x_0 + B_i y_0 + C_i = 0$, значит при подстановке (x_0, y_0) в уравнение вышеозначенного вида уравнение обращается в равенство, значит любая прямая, задаваемая таким уравнением лежит в пучке

2) $e_1 \parallel e_2 \parallel a(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда $A_i \alpha + B_i \beta = 0 \Rightarrow \alpha(A_1 \alpha_1 + B_1 \alpha_2) + \beta(A_2 \alpha_1 + B_2 \alpha_2) = 0$

1) l_1 и l_2 пересекаются в X, $X \in l$. Пусть $A \in l, A \neq X, A(u,v)$. Тогда $\exists \alpha, \beta, \alpha^2+\beta^2 \neq 0: \ \alpha(A_1u+B_1v+C_1)+\beta(A_2u+B_2v+C_2)=0$. Утверждается, что α и β — нужные коэффициенты.

2) Аналогично!

$\square$

Метрические свойства прямой

Замечание. С этого момента считаем ДСК прямоугольной.

Пусть $\vec{n}$ — нормальный вектор нашей прямой. Тогда она задается уравнением $X \in l \Leftrightarrow \vec{AX} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{h}, \vec{r}-\vec{r_0})=0$, или $(\vec{h},\vec{r})=(\vec{n},\vec{r_0})=\alpha$ — нормальное уравнение прямой.

Утверждение. *Пусть прямая в ПДСК имеет уравнение $Ax+By+C=0$. Тогда $\vec{n}=\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right)$ — нормальный вектр к этой прямой.*

Доказательство. Уравнение переписывается в виде $Ax+By=-C$, или $(\vec{r},\vec{n})=-C$, что и значит, что $\vec{n}$ — нормальный вектор к нашей прямой. $\square$

Утверждение. *Пусть прямые заданы уравнениями $(\vec{r},\vec{n_1})=a_1$ и $(\vec{r},\vec{n_2})=a_2$. Тогда угол между прямыми равен углу между векторами $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ или между $\vec{n_1}$ и $-\vec{n_2}$*

Утверждение. *Пусть есть точка с координатами (x_0,y_0), а прямая l задана уравнением $Ax+By+C=0$ в ПДСК. Тогда расстояние от X до l равно $\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$*

Доказательство. Уравнение прямой переписывается в виде $(\vec{r},\vec{n})=(\vec{r_0},\vec{n})$, где $\vec{r_0}$ — радиус-вектор некоторой точки на прямой. Пусть $\vec{x}$ — радиус-вектор точки X. $\rho(X,l)=\mathrm{pr}_{\vec{n}}\vec{AX}=\left|\frac{(\vec{AX},\vec{n})}{\left|\vec{n}\right|^2\vec{n}}=\frac{\left|(\vec{x}-\vec{r_0},\vec{n})\right|}{\left|\vec{[n}\right|}\right|=\frac{(\vec{x},\vec{n})-(\vec{r_0},\vec{n})}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{Ax_0+Bx_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\square$

Следствие 6. *Угол между прямыми заданными в ПДСК уравнениями $A_ix+B_ix+C_i=0$, равен $\alpha=\arccos\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$*

Плоскость в пространстве

Способы задания Пусть есть точка A с радиус-вектором $\vec{r_0}$ и две несовпадающие прямые проходящие через A и лежащие в плоскости. Тогда $\vec{v}, \vec{u}$ — направляющие векторы прямой — неколлинеарны. Тогда векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$ задают базис в плоскости и тогда любая точка на плоскости раскладывается по базису: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{u} + s\vec{v}$, где $s, t \in \mathbb{R}$.

$X \in \alpha \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r_0}, \vec{u}, \vec{v}$ компланарны $\Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}) = a = (\vec{r_0}, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = a \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$

Утверждение. *Вектор* $\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *параллелен плоскости тогда и только тогда, когда* $Aa + Bb + Cc + D = 0$.

Доказательство. Пусть $X \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ — точка в плоскости, отложим $\vec{XY} = \vec{w}$. Тогда $\vec{w} \parallel \alpha \Leftrightarrow Y \in \alpha$. То есть: $A(x_0 + a) + B(y_0 + b) + C(z_0 + c) = 0 \Leftrightarrow (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + d) + (Aa + Bb + Cc) = 0 \Leftrightarrow (Aa + Bb + Cc) = 0$ $\square$

Следствие 7. *Значит по уравнению* $Ax+By+Cz+D = 0$ *легко можно найти два неколлинеаных вектора, лежащих на прямой. Пусть* $A \neq 0$. *Тогда это — векторы* $\vec{u} \begin{pmatrix} B \\ -A \\ 0 \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v} \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ -A \end{pmatrix}$

Теорема 17. *Пусть* α_1 *и* α_2 *— плоскости, заданные в ДСК уравнениями* $A_ix + B_ix + C_iz + D = 0$ *параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда векторы* $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ *коллинеарны.*
Если $\alpha_1 \nparallel \alpha_2$, *то направляющий вектор прямой их пересечения имеет координаты* $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Доказательство. Первое утверждение очевидно и тривиально.
Заметим, что $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, иначе векторы $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ коллинеарны (из предыдущего пункта), а значит $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, что противоречит условию. Осталось показать, что $\vec{v} \parallel \alpha_1, \vec{v} \parallel \alpha_1$. $A_1a + B_1b + C_1c = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $\vec{v} \parallel \alpha_1$. Аналогично для α_2. $\square$

Утверждение. *Пусть есть плоскость* α *в ДСК с уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$. *Тогда неравенство* $Ax + By + Cz + D > 0$ *определяет одну из полупространств.*

Определение 21. Пучок пересекающихся плоскостей — множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение 22. Пучок пересекающихся плоскостей — множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости.

Замечание. Любые две различные плоскости лежат ровно в одном пучке.

Теорема 18. *Пусть плоскости α_1, α_2 имеют уравнения $A_i x + B_i x + C_i z + D = 0$. Тогда плоскости, лежащие в пучке с ними имеют уравнения вида $\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D) = 0$*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству для пучка прямых. □

Упражнение 3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — три плоскости, не лежащих в одном пучке. Пусть их уравнения $A_i x + B_i y + C_i z + D = 0$. Связка плоскостей, определенная плоскостями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть все плоскости, задаваемые уравнениями вида: $\sum\limits_i \gamma_i(A_i x + B_i y + C_i z + D) = 0$. Описать плоскости геометрически.

Утверждение. *Пусть плоскость α задана в ПДСК уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ — нормальный вектор к плоскости.*

Утверждение. *Пусть α_1, α_2 — плоскости, заданные в ПДСК уравнениями $A_i x + B_i y + C_i z + D = 0$. Тогда угол между плоскостями α_1 и α_2 равен $\varphi = \arccos \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{sqrt A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 sqrt A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$.*

Доказательство. Угол между α_1 и α_2 — угол между векторами $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$. Т.е. $\cos\varphi = \frac{|(\vec{n_1}, \vec{n_2})|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$ □

Утверждение. *Пусть плоскость α задана уравнением $A_i x + B_i y + C_i z + D = 0$, а точка A имеет координаты $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ в ПДСК. Тогда раастояние от точки до плоскости равно $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$*

Доказательство. $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

$\rho(A, \alpha) = |\operatorname{pr}_{\vec{n}} |\vec{XA}|| = \frac{|(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} = \frac{(\vec{r}, \vec{n}) - (vectr_0, \vec{n})}{|\vec{n}|}$ □

Прямая в пространстве

Мы можем записать уравнение прямой в параметрическом виде: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{a}t$. Оно же расписанное по координатам: $x = x_0 + a_1 t, y = y_0 + a_2 t = z_0 + a_3 t$. Выразив иприрявняв t получим каноническое уравнение прямой: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$

Позиционные задачи Пусть l_1, l_2 — прямые заданные уравнениями $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{a_1}t$, $\vec{r} = \vec{r_2} + \vec{a_2}t$. Какие есть способы взаимного расположения этих прямых?

$\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{a_1}t_1 = \vec{r_2} + vecta_2 t_2$

Пусть наши плоскости компланарны, т.е. лежат в плоскости α. Тогда $\vec{a_1} \parallel \alpha$, $\vec{a_2} \parallel \alpha$, $\vec{A_2A_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \parallel \alpha$. это необходимое и достаточное условия. То есть если векторы $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{r_2} - \vec{r_1}$ компланарны, то прямые лежат в одной плоскости.

Утверждение. *Прямые l_1 и l_2 компланарны тогда и только тогда, когда $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{r_2} - \vec{r_1}) = 0$.*

Следствие 8. *Прямые скрещиваются, если $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{r_2} - \vec{r_1}) \neq 0$.*

Утверждение. *Прямые пересекаются, если они компланарны и $\vec{a_1} \nparallel \vec{a_2}$, и параллельны или совпадают, если $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$*

Точка с радиус-вектором $\vec{r}$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда $|S(\vec{r}, \vec{a})| = \text{const}$, где $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой. Направление $[\vec{r}, \vec{a}]$ ортогонально плоскости, проходящую через 0 и прямую. Ориентация пары $\vec{r}, \vec{a}$ постоянна, значит векторное произведение $[\vec{r}, \vec{a}]$ постоянно. Таким образом, прямая задается уравнением $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{b} = [\vec{r_0}, \vec{a}]$

Еще один способ задания прямой — задание прямой как пересечения двух плоскостей: $(\vec{r}, \vec{n_1}) = d_1$, $(\vec{r}, \vec{n_2}) = d_2$, причем $[\vec{n_1}, \vec{n_2}] \neq 0$

Метрические задачи

1) Угол между прямыми — угол между их направляющими векторами.

2) Расстояние то точки до прямой.
   Пусть X — точка с радиус-вектором $\vec{r}$, l — прямая, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{a}t$. Тогда $\rho(x, l) = \frac{|S(\vec{AX}, \vec{a})|}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{r_0}, \vec{a}] - [\vec{r}, \vec{a}]|}{|vecta|}$

3) Расстояние между скрещивающимися прямыми
$\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{a_1}t$
$\vec{r} = \vec{r_2} + \vec{a_2}t$
Проведем плоскости через них две параллельных плоскости:
α_1: $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{a_1}t + \vec{a_2}s$ α_1: $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{a_1}t + \vec{a_2}s$ Тогда $\rho(l_1, l_2) = \rho(\alpha_1, \alpha_2)$ — это высота параллелипипеда построенного на векторах $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{AA_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. $\rho = \frac{|V(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{AA_1})|}{|S(\vec{a_1}, \vec{a})|} = \frac{(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{r_2} - \vec{r_1})}{[\vec{a_1}, \vec{a_2}]}$

2. Кривые второго порядка

Определение 23. Моном(одночлен) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — это функция вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{i_1} \cdot \ldots x_n^{i_n}$, где i_j — целые неотрицательные числа.

Определение 24. Многочлен от n переменных — некоторая линейная комбинация мономов.

Определение 25. Несократимая запись многочлена — его запись в виде линейной комбинации различных мономов с различными коэффициентами.

Замечание.

Утверждение. *Рассмотрим произвольный многочлен в его несократимой записи $P(x, y, z) = \sum\limits_t a_i x^{i_t} y^{i_t} z^{i_t}$, содержащей хотя бы одно слагаемое. Тогда будет существовать точка, в которой многочлен отличен от нуля.*

Доказательство. Доказательство индукцией по количеству переменных. Пусть $n = 1$. Многочлен $P(x) = a_k x_k + \ldots a_0$, причем у него хотя бы один коэффициент ненулевой. Тогда у p не более k корней, следовательно существует точка, в которой он не ноль.
Рассмотрим прерход только от одной переменной в двум. Переход: $p(x, y) = y_k \varphi_k(x) + y_{k-1}\varphi_{k-1}(x) + \ldots + y_0 \varphi_0(x)$. Хотя бы один из многочленов $\varphi(x)$ — ненулевой (пусть это, без ограничения общности, $\varphi_k(x)$), значит есть x_0,такое, что $\varphi_k(x_0) \neq 0$. Значит $P(x_0, y) = \sum_i Q_i(x_0) y^i$ — ненулевой, а значит, согласно предположению индукции, есть такое y_0, что $P(x_0, y_0) \neq 0$ □

Следствие 9. *Несократимая запись многочлена единственна.*

Доказательство. Пусть $P(x,y,z) = \sum_t = \sum_s$ — две различные несократимые записи. $\square$

Замечание. $deg(0) = -\infty$

Утверждение. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Доказательство. Рассмотрим несократимые записи P и Q. Несократимая запись $P+Q$ получится приведением слагаемых. Следовательно, любой моном, присутсвующий в $P+Q$ должен присутствовать в P или Q. Следовательно степень $P+Q$ не превосходит степени P и степени Q. $\square$

Упражнение 4. $\deg(PQ) = \deg P \deg Q$

Теорема 19. *Если некоротая функция $f(x,y,z)$ — многочлен в некоторой ДСК, то она продолжает оставаться многочленом в любой ДСК и степень многочлена не зависит от ДСК.*

Доказательство. Формула для перехода к новой системе координат: $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$. Теперь если $f(x,y,z)$ — многочлен, то $g = f(s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z' + \gamma_1, \ldots)$ — тоже многочлен. Пусть $degf = n$, то он является линейной комбинацией мономов вида $x^i y^j z^k$, при подстановке и раскрытии скобок получатся мономы от переменных x', y', z', со степенью, не превосходящей n. То есть мы получили, что степень g не превосходит f. Рассмотрим обратный переход из второй ДСК в первую. Тогда: $\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = T \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix}$. Тогда аналогично мы можем сказать, что степень g не превосходит степени f. $\square$

Определение 26. Алгебраическая кривая в P_2 (алгебраическая поверхность в P_3) — это множество точек, задаваемых уравнением $p = 0$, где p — многочлен в некоторой ДСК.

Определение 27. Порядок кривой — наименьшая степень многочлена, задающего эту кривую.

Замечание. Кривые первого порядка — прямая. Поверхность первого порядка — плоскость.

Замечание. Алгебраическое множество P_1 — множество из n точек.

Утверждение. *Объединение и пересечение двух алгебраических кривых (поверхностей) — тоже алгебраическая кривая (поверхность).*

Доказательство. Пусть кривые (поверхности) заданы уравнениями $p_1 = 0, p_2 = 0$. Тогда объединение задается уравнением $p_1 p_2 = 0$, а пересечение — уравнением $p_1^2 + p_2^2 = 0$ $\square$

Доказательство. Сечение алгебраической проверхности плоскостью — алгебраическая кривая с порядком, не превосходящим порядка поверхности. $\square$

Доказательство. Выберем систему координат так, чтобы плоскость сечения задавалась уравнением $z = 0$. Теперь, если у нас есть многочлен n-ной степени, задающий нашу поверхность, то многочлен, задающий кривую можно получить, подставив в уравнение $z = 0$. То есть $f(x, y, 0) = 0$ — уравнение сечения. Очевидно, что $\deg f(x, y, 0) \leq \deg f$ $\square$

Общее уравнение кривой второго порядка: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, $|A| + |B| + |C| \neq 0$

Эллипс

Определение 28. Эллипс — это кривая, задаваемая в некоторой ПДСК уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$.

Вершины эллипса — $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$
Фокусным расстоянием эллипса называется величина $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Точки $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ — фокусы эллипса.
$\varepsilon = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет, для эллипса: $\varepsilon \in [0, 1)$

Теорема 20. *Если есть точка X с координатами (x, y) на эллипсе, то $XF_1 = a - \varepsilon x$,$XF_2 = a + \varepsilon x$*

Доказательство. Заметим, что $a \pm \varepsilon x > 0$, значит мы можем проверить равенство квадратов выражений. $XF_1^2 = (x-c)^2+y^2 = x^2-2xc+c^2+b^2(1-\frac{x^2}{a^2}) = x^2(1-\frac{b^2}{a^2})-2xc+(c^2+b^2)) = x\frac{c^2}{a^2}-2xc+a^2 = (a-x\frac{c}{a})^2 = (a-\varepsilon x)^2$ $\square$

a — большая полуось эллипса
b — большая полуось эллипса

Теорема 21. *Эллипс* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *— множество точек, для которых* $XF_1 + XF_2 = 2a$

Доказательство. Если X лежит на эллипсе, то пользуемся предыдущим свойством. $XF_1 + XF_2 = a + \varepsilon x + a - \varepsilon x = 2a$.
В обратную сторону: пусть $XF_1 + XF_2 = 2a$. Тогда:

- Если $x \geq a$, то $(x, y) = (a, 0)$
- Если $x \leq -a$, то аналогично $(x, y) = (-a, 0)$
- Пусть $|x| < a$. Рассмотрим функцию $f(t) = \rho(F_1, (x, t)) + \rho(F_2, (x, t))$. Эта функция монотонно возрастает, при $t \geq 0$. Значит она не более, чем в одной точке равна $2a$. Такая точка — эта точка эллипса с абсциссой x. Значит, если $y \geq 0$, то X лежит на эллипсе. Аналогично для $y \leq 0$.

$\square$

Определение 29. Директирисы эллипса — это прямые с уравнениями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

Расстояние от точки (x, y) до директрисы $x = \frac{a}{\varepsilon}$ равно $\left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{|a - \varepsilon x|}{\varepsilon}$

Теорема 22. *Эллипс — множество точек, таких, что* $\frac{XF_1}{\rho(x, d_1)} = \varepsilon$

Доказательство. Если X лежит на эллипсе, то $XF_1 = a - \varepsilon x = \varepsilon\rho(x, d_1)$.
Наоборот, если $XF_1 = \varepsilon\rho(x, d_1)$, то $(x - c)^2 + y^2 = \varepsilon^2(x - \frac{a}{\varepsilon})^2 = (a - \varepsilon x)^2$.
$x^2(1 - \varepsilon^2) + (c^2 - a^2) + y^2 = 0$ $x^2\frac{b^2}{a^2} + y^2 - b^2 = 0$ — получили уравнение эллипса. $\square$

То есть эллипс можно определять, как ГМТ точек, отношение расстояний от фокуса до директрисы постоянно и меньше единицы: $\frac{XF_1}{\rho(x, d_1)} = \varepsilon < 1$

Гипербола

Определение 30. Гипербола — кривая, которая в некоторой ПДСК задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$. ПДСК в которой уравнение сохраняет вид называется канонической для данной гиперболы. a называется действительной полуосью
b называется мнимой полуосью

Очевидно, что $|x| \geq a$. Рассмотрим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 0$.

Определение 31. Прямые $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ называются асимптотами гиперболы.

Утверждение. *Пусть (x_0, y_0) — точка гиперболы. Тогда произведение расстояний от точки до асимптот постоянно и равно $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.*

Доказательство. $\rho(X, l_1) = \frac{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$, $\rho(X, l_2) = \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$

$\rho(X, l_1)\rho(X, l_2) = \frac{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} =$ □

Следствие 10. *Пусть точка X движется по гиперболе, так что $OX \to \infty$. Тогда расстояние от X до одной из асимптот стремится к нулю.*

Доказательство. Если точка находится достаточно далеко до начала координат, то расстояние до одной из асимптот также достаточно велико (Рассмотрим ту асимпототу, которая не проходит через ту четверть, в которой лежит точка). Так как произведение расстояний постоянно, то расстояние до второй асимптоты стремится к нулю. □

Определение 32. Фокусным расстоянием гиперболы называется $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение 33. Фокусами гиперболы называются точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$

Определение 34. Эксцентриситетом гиперболы называется $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$

Утверждение. *Пусть X точка на гиперболе с координатами (x_0, y_0). Тогда $XF_1 = |\varepsilon x - a|$, $XF_2 = |\varepsilon x + a|$*

Доказательство. $XF_1^2 = (x - c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + x^2\frac{b^2}{a^2} - b^2 = x^2(1 + \frac{b^2}{a^2}) - 2cx + (c^2 - b^2) = x^2\frac{c^2}{a^2} - 2cx + a^2 = (\varepsilon x - a)^2$. Для второго фокуса вычисления аналогичны. □

Если X лежит на правой ветви гиперболы, то $\varepsilon x - a > x - a \geq 0$, $\varepsilon x + a > 0$
На левой ветви: $\varepsilon x - a < 0$, $\varepsilon x + a \leq 0$

Теорема 23. *Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ есть ГМТ точек X таких, что $|XF_1 - XF_2| = 2a$*

Доказательство. Если точка X лежит на правой ветви, то $XF_1 - XF_2 = (\varepsilon x - a) + (\varepsilon x + a) = -2a$
Если точка X лежит на левой ветви, то $XF_1 - XF_2 = (a - \varepsilon x) + (a + \varepsilon x) = 2a)$
Осталось проверить то, что это условие не задает лишних точек. Пусть $XF_1 - XF_2 = 2a$. То есть $XF_1 = XF_2 \pm a$. $XF_1^2 = XF_2^2 + 4a^2 \pm 4a \cdot XF_2$ $(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm XF_2 \mp 4aXF_2 = 4a + 18xc \Leftrightarrow \mp XF_2 = a + 4x\frac{c}{a} \Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = a^2 = x^2\frac{c^2}{a^2} + 2xc \Leftrightarrow x^2(\frac{c^2}{a^2} - 1) - y^2 + (a^2 - c^2) = 0 \Leftrightarrow x^2\frac{b^2}{a^2} - y^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
И так, гипербола это множество точек, разность расстояний от фокусов до которых □

Определение 35. Директрисы гиперболы это прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

Утверждение. *Гипербола — это ГМТ таких точек, что отношение расстояний до фокуса и директрисы, равно эксцентриситету.*

Доказательство. $XF_1 = |\varepsilon x - a| = |x - \frac{a}{\varepsilon}|\varepsilon = |x - c|\varepsilon = \rho(X, d_1)\varepsilon$. В обратную сторону рассуждения аналогичны рассуждениям для эллипса. □

Парабола

Определение 36. Параболой называется кривая, которая в некоторой ПДСК задается уравнением $y^2 = 2px$

Определение 37. Фокусом гиперболы называется точка $F(\frac{p}{2}, 0)$

Определение 38. Директрисой параболы называется прямая $d: \ x = -\frac{p}{2}$

Теорема 24. *Парабола $y = 2px$ — ГМТ равноудаленных от фокуса и директрисы.*

Доказательство. Пусть $XF = \rho(x, d)$, то есть $\sqrt{(}(x - \frac{p}{2})^2 + y^2) = |x + \frac{p}{2}| \Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px$ □

Определение 39. Эксцентриситет параболы равен единице.

Упражнение 5. Доказать, что $y = \frac{k}{x}$ — гипербола.

Теорема 25. *Рассмотрим эллипс, параболу или гиперболу. Рассмотрим семейство параллельных прямых, каждая из которых пересекает прямую в двух точках. Тогда середины получившихся хорд лежат на одной прямой l. Причем в случае эллипса и гиперболы l проходит через центр симметрии кривой, а в случае параболы l перпендикулярна директрисе параболы ()*

Доказательство. Рассмотрим гиперболу. Она имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Пусть $\binom{\alpha}{\beta}$ — направляющий вектор семейства прямых Рассмотрим, когда точка (x_0, y_0) — середина высекаемой хорды. Прямая: $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$. Подставив в уравнение гиперболы, получим: $t^2(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}) + 2t(\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2}) + \ldots = 0$. Корни этого уравнения — точки пересечения. Точка (x_0, y_0) — середина хорды тогда и только тогда, когда $t = t_1 + t_2 = 0$. По теореме Виета это равносильно $\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} = 0$. То есть (x_0, y_0) лежит на прямой $\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 0$.
В случае параболы и эллипса все аналогично. □

Замечание. То, что прямая пересекает кривую ровно в двух точках говорит нам о том, что уравнение именно квадратное.

Замечание. Прямая, которую мы получили, называется диаметром кривой, сопряженным направлению $\binom{\alpha}{\beta}$. Оно имеет вид $\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 0$ для гиперболы, $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta x}{b^2} = 0$ для эллипса и $\beta y - \alpha p = 0$

Уравнения касательных

Утверждение. *Рассмотрим направление $\binom{\alpha}{\beta}$ и сопряженный с ним диаметр. Тогда точки пересечения диаметра с кривой это те точки в которых касательная принимает направление (α, β).*

Рассмотрим произвольную точку (x_0, y_0) лежащую на гиперболе. Диаметр, проходящий через эту точку имеет уравнение вида $xy_0 - yx_0$. Но с другой стороны, он сопряжен касательной в точке (x_0, y_0), а значит $\frac{x\alpha}{a^2} - \frac{y\beta}{b^2} = 0$, где (α, β) — направляющий вектор прямой. Значит, $\alpha = a^2 y_0$, $\beta = b^2 x_0$. Значит уравнение касательной имеет вид: $\frac{x - x_0}{a^2 y_0} = \frac{y - y_0}{b^2 x_0}$ или $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

Пусть (x_0, y_0) — точка на параболе. Диаметр через неё: $y - y_0 = 0$. $\alpha = \frac{y}{p}$, $\beta = 1$. Уравнение касательной имеет вид

3. Общее уравнение второго порядка

Общее уравнение второго порядка имеет вид: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, причем $|A| + |B| + |C| \neq 0$

С помощью замены системы координат будем приводить уравнение к хорошему виду.

Этап 1: Избавимся от параметра B. Для этого повернем систему координат на угол φ. Матрица перехода к новому базису - $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Формулы перехода имеют вид: $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$, $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$. У нас цель - обнулить B. ПОэтому рассмотрим только коэффициент при $x'y'$. Он равен $-2A\cos\varphi\sin\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Приравняем его к нулю. $-2A\cos\varphi\sin\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \Leftrightarrow (C - A)\sin 2\varphi + 2Bcos2\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}arctg2BA - C$.
Итак, если $A \neq C$, то можно повернуть на $\varphi = \frac{1}{2}arctg2BA - C$. Если $A = C$, то повернем на $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. В обоих случаях это уравнение будет иметь вид $A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$
Этап 2: Пусть $A' \neq 0$. Тогда сдвинем начало координат вдоль оси OX' так, чтобы D' обнулился. Перепишем уравнение $A'(x'^2 + \frac{2D'}{A'}x' + \frac{D'^2}{A'^2}) + C'y'^2 + 2E'y' + F' - \frac{D'^2}{A'^2} = 0$. Значит, можно сделать замену $x'' = x' + \frac{D'}{A'}$ и D'' обнулится. Стоит заметить, что если A' и C' оба ненулевые, то можно обнулить одновременно и D' и E'.

Итак, у нас есть уравнение вида $A''x^2 + C''y^2 + 2D''x + 2E''y + F'' = 0$, причем A'' и C'' одновременно не равны нулю и ровно один из пары коэффициентов A'' и D'' равен нулю. Так же для C'' и E''. То есть есть не более трех ненулевых кожффициентов.

С этого момента считаем, что кривая изначально была задана в полученной ПДСК(будем писать все без штрихов).

1) $A \neq 0$, $C \neq 0$, $AC > 0$. **Можно считать, что** $A > 0, C > 0$
$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$
$Ax^2 + Cy^2 = -F$.
Если $F > 0$, решений нет.
Если $F = 0$, то уравнение имеет вид $Ax^2 + By^2 = 0$, и это точка.
Если $F < 0$, то уравнение можно написать в виде $\frac{A}{-F}x^2 + \frac{B'}{-F}y^2 = 1$, и это эллипс.

2) $A \neq 0, C \neq 0$, $AC < 0$. **Можно считать, что** $A > 0, C < 0$
$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$

$Ax^2 + Cy^2 = -F$.
Если $F = 0$, то уравнение имеет вид $A'x^2 - B'y^2 = 0, A' > 0, B' > 0$, и это две прямые.
Если $F \neq 0$, то уравнение имеет вид $A'x^2 - B'y^2 = 1, A' > 0, B' > 0$, и это гипербола

3) $AC = 0$. **Можем считать, что $A = 0$.**
   $Cy^2 + 2Dx + F = 0$.

   - $D \neq 0$. $Cy^2 + 2D(x + \frac{F}{2D}) = 0$. $x' = x + \frac{F}{2D} \Rightarrow Cy^2 + 2Dx' = 0 \Rightarrow y^2 = -2\frac{D}{C}x'$. **Это парабола.**
   - $D = 0$ $Cy^2 = -F \Leftrightarrow y^2 = -\frac{F}{C}$. **Это получается либо прямая, либо пустое множество.**

Теорема 26. *Любое уравнение* 2 *порядка заменой ПДСК можно привести к одному из видов, представленных выше. Доказательство выше.*

Определение 40. Пусть $\Phi(x, y) = 0$ — уравнение второго порядка, задающее некоторую кривую. Точка (x_0, y_0) центр это кривой, если $\Phi(x_0 - x, y_0 - y) = \Phi(x_0 + x, y_0 + y)$ при любых x, y.

Найдем центр кривой $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. $\Phi(x_0 - x, y_0 - y) = \Phi(x_0 + x, y_0 - y)$. Распишем: $G(x, y) = -2Axx_0 - 2B(x_0y + y_0x) - 2Cyy_0 - 2Dx - 2Ey = -G(x, y)$. Значит x_0, y_0 — центр, если $G(x, y) = 0$ при всех x, y. $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow x(Ax_0 + By_0 + D) + y(Bx_0 + Cy_0 + E) = 0$. Для того, чтобы $G(x, y) = 0$ выполнялось для всех x, y, надо, чтобы $Ax_0 + By_0 + D = 0$ и $Bx_0 + Cy_0 + E = 0$. Очевидно, что (x_0, y_0) — центр тогда и только тогда, когда он — решение этой системы.

Утверждение. *Центр кривой является центром симметрии этой кривой.*

В случае непустой кривой эллиптического или гиперболического типов кривой центр — начало канонической системы координат.

Упражнение 6. Если X — центр симметрии непустой кривой 2-го порядка, то X — её центр.

4. Линейное пространство

1. Абелева группа

Определение 41. Пусть на некотором множестве есть A операция $+$, сопоставляющая каждым двум элементам из A сопоставляет элемент из A. $+ : A \times A \to A$
Тогда $(A, +)$ называется *абелевой группой*, если для любых $a, b, c \in A$:

- ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- наличие нейтрального элемента 0_A: $\exists 0 \in A : \; \forall a \in A \; a + 0 = 0 + a = a$
- наличие обратного элемента: $\exists (-a), (-a) + a = 0$
- коммуникативность: $a + b = b + c$

Свойство. *Результат операции не зависит от порядка их следования и порядка слагаемых.*

Свойство. *Нейтральный элемент единственен.*

Доказательство. Пусть есть два нейтральных элемента 0_1 и 0_2. Рассмотрим их сумму: $0_1 + 0_2 = 0_1$ (по определению). Но $0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_1$ □

Свойство. *Обратный элемент единственен.*

Доказательство. Пусть у элемента a есть два обратных элемента b_1 и b_2. Тогда $b_1 + a + b_2 = b_1 + (a + b_2) = b_1 + 0 + b_1$. Но $b_1 + a + b_2 = (b_1 + a) + b_2 = 0 + b_2 = b_2$. То есть $b_1 = b_2$ □

Замечание. Если убрать условие коммутативности, то получится определение группы.

Определение 42. *Векторное (линейное) пространство* это абелева группа $(V, +)$, в которой определена операция умножения на действительное число. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, vinV : \alpha \cdot v \in V$ со следующими свойствами:

- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- $\alpha\beta u = \alpha(\beta u)$

- $1 \cdot u = u$

Элементы группы V называют векторами, а элементы α и β — векторами.

Свойство. $0 \cdot v = 0_V$

Доказательство. $0v = (0+0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = (0v - 0v) = 0_V$ □

Свойство. $(-1) \cdot v = -v$

Доказательство. $v + (-1)v = 1v + (-1)v = v(1 + (-1)) = 0 \Rightarrow (-1) \cdot v = -v$ □

Определение 43. Система векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ называется линейно зависимой, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, не равных одновременно нулю, такая что $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. И она называется линейно независимой в противном случае.

Свойство 8. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один их этих векторов является линейной комбинацией других.*

Определение 44. Пусть V — векторное пространство. Подмножество $W \subseteq V$ называется подпространством, если:

- $\forall a, b \in W: \ a + b \in W$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, a \in W: \ \alpha a \in W$

Иначе говоря, W замкнуто относительно операций.

Следствие. *Любое подпространство линейного пространства является линейным пространством.*

Пусть $A \subseteq V$. Обозначим $\langle A \rangle =$ всех конечных линейных комбинаций векторов из
$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \in A$

Определение 45. $\langle A \rangle$ — линейная оболочка A.

Утверждение. $\langle A \rangle$ *— подпространство в A. Более того, для любого подпространства W, содержащего A верно, что $W \supseteq \langle A \rangle$*

Доказательство. Очевидно, что $\langle A \rangle$ замкнуто.
$a_1, \ldots, a_n \in A \Rightarrow a_1, \ldots, a_n \in W \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in W \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq W$. ☐

Определение 46. Множество A порождает пространство V, если $\langle A \rangle = V$. Пространство V называется конечнопорожденным, если существует конечное порождающее множество.

Определение 47. Пусть V — векторное пространство, $A \subseteq V$ — система векторов. Рангом A назовем размер наибольшей независимой подсистемы в A назовем минимальный размер линейно независимой подсистемы в A. Если в A есть линейно независимые системы из бесконечно большого числа векторов, то её ранг бесконечен.

Обозначение. *Ранг A обозначается* $\operatorname{rk} A$

Определение 48. Размерностью пространства A называется её ранг. $\dim V = \operatorname{rk} V$

Утверждение. $A \subseteq B \to \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} B$

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{rk} A = k$ *и* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *— линейно независимая подсистема. Тогда* $\forall v \in A$ *является линейной комбинацией этой системы.*

Лемма 4. *Пусть* $\operatorname{rk} A = r$*, а вектор b есть линейная комбинация некоторых векторов из A. Тогда* $\operatorname{rk}(A \cup \{b\}) = r$

Доказательство. При добавлении вектора к системе ранг уменьшится не может. Остальнось доказать что ранг не больше, чем r. Пусть ранг больше чем r. Тогда в $A \cup \{B\}$ есть $r+1$ независимый вектор $a_1, a_2, \cdots, a_r, b$. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — линейно независимые, и по предыдущей лемме все векторы из A выражаются через них. Таким образом, так как b линейная комбинация каких - то векторов из A, то b выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_r$. ☐

Теорема 27. *Пусть A — система векторов. Тогда* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\langle A \rangle = \dim\langle A \rangle$.

Доказательство. $A \subseteq \langle A \rangle \Rightarrow \operatorname{rk} A \leq \langle A \rangle$
Пусть $\operatorname{rk} A = r$. Предположим, что в $\langle A \rangle$ нашлись линейно независимые векторы $b_1, b_2, \ldots, b_{r+1}$. Добавим их к A по одному. Так как они — линейная комбинация векторов A, то на каждом шаге ранг не изменился. Тогда $\operatorname{rk}(A \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_{r+1}\} = r \Rightarrow \operatorname{rk}\{b_1, b_2, \ldots, b_{r+1}\} \leq r$. Но $\{b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}\}$ линейно независим, а значит $\operatorname{rk}\{b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}\} = r+1$. Противоречие. ☐

Следствие 11. *Пусть V — линейное пространство, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ — набор векторов через которые выражаются все элементы V (то есть $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$). Тогда $k \geq \dim V$*

Теорема 28. *Пусть A — система векторов, и $\operatorname{rk} A = k$. Пусть $v_1, \dots, v_n \in A$ — линейно независимые векторы. Тогда $(v_1, \dots, v_n)$ можно дополнить вектором из A до линейно независимой системы $(v_1, \dots, v_k)$ из k векторов.*

Доказательство. Надо доказать следующую вещь: если $n < k$, то $\exists v_{n+1} \in A: \ (v_1, \dots, v_{n+1})$ — ЛНЗ.
Пусть это не так. Тогда $\forall v_{n+1} \in A: \ (v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ — ЛЗ , то есть $v_{n+1} \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow A \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow k = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \operatorname{rk} \{v_1, \dots, v_n\} = n$. Противоречие. $\square$

Пример 4. $\dim M_{n \times m} = nk$. Рассмотрим $n \times m$ матриц, у которых на месте (i, j) стоит 1, в остальных — 0. Они линейно независимые и пространство ими порождается. Значит $\dim M_{n \times m} = \operatorname{rk} \{E_{ij}\} = nk$

Пример 5. P_n — пространство многочленов от одной переменной со степенью не более n. $\dim P_n = n + 1$. $P_n = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$.

Определение 49. Пусть V — линейное пространство. Набор векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ называется базисом, если $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ линейно независимы и $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Утверждение. *Пусть V — линейное пространство, $v_1, \dots, v_n$ — базис. Тогда $\dim V = n$.*

Утверждение. *В V существует базис тогда и только тогда, когда V конечнопорождено.*

Доказательство. Если в V есть базис , то $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ конечно порождено. Если V конечнопорождено, то $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, то $\dim V = \operatorname{rk} \{v_1, \dots, v_n\} = k \leq n$. Среди $v_1, \dots, v_n$ есть максимальная система линейно независимых векторов, пусть это $v_1, \dots, v_k$ без ограничения общности. Тогда любой вектор из $\{v_1, \dots, v_n\}$ выражается через $v_1, \dots, v_k$. Тогда $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Значит $(v_1, \dots, v_n)$ — базис в V. $\square$

Определение 50. Базис пространства V — линейно независимая подсистема $(v_1, \dots, v_n) \subset V$, где $n = \dim V$.

Определение 51. Базис пространства V — это система $(v_1, \dots, v_n) \subset V$, такая что $n = \dim V$ и $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Утверждение. *Все три определения базиса равносильны.*

Доказательство.

- $(1) \Rightarrow (3)$. $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle, n = \dim V$. По предыдущему утверждению.
- $(2) \Rightarrow (1)$. $v_1, \ldots, v_n$
- $(3) \Rightarrow (2)$. $n = \dim V, V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ — линейно зависима. Тогда без ограничения общности v_n выражается через $v_1, \ldots, v_n$. Но тогда $V = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$

□

Определение 52. Пусть V — конечномерное(конечнопорожденное) пространство, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Тогда $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — координаты вектора v в базисе $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ — координатный столбец v в базисе $\mathcal{E}$. Тогда $v = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Замечание. Координаты вектора определяются однозначно. Действительно, если $v = \mathcal{E}\alpha = \mathcal{E}\beta$, то $\mathcal{E}(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

Утверждение. *Пусть α, β — координатные столбцы векторов u и v в базисе $\mathcal{E}$. Тогда $\alpha + \beta$ — координатный столбец $u + v$. Если $x \in \mathbb{R}$, то $x\alpha$ — координатный столбец вектора $x\alpha$.*

Доказательство. $u = \mathcal{E}\alpha$,$v = \mathcal{E}\beta$, тогда $u + v = \mathcal{E}(\alpha + \beta)$, а $xu = x\mathcal{E}\alpha = \mathcal{E}(x\alpha)$. □

Определение 53. Пусть V и U — линейные пространства. Они называются изоморфными, если существует биекция $\varphi : U \mapsto V$, такая что $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$. Говорят, что такая биекция сохраняет операции и называется *изоморфизмом* между u и v.

Теорема 29. *Пусть V — конечномерное линейное пространство,* $\dim V = n$. *Тогда V изоморфно $M_{n \times 1}$.*

Доказательство. Выберем в V произвольный базис $\mathcal{E}$ и для $\forall x \in V$ определим $\varphi(x)$ как координатный столбец x в базисе $\mathcal{E}$. Очевидно, что каждому столбцу соответствует хотя бы один вектор, а значит φ — сюръекция, и очевидно, что при $u \neq v$ $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. И, наконец, $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$. А значит φ — изоморфизм. □

Упражнение 7. Доказать, что при $n \neq k$ $M_{n\times 1}$ неизоморфно $M_{k\times 1}$.

Обозначение. *$U \cong V$, если U изоморфно V.*

Определение 54. Пусть V — конечномерное пространство. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — два базиса, $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, где n — размерность пространства. Разложим вектора e'_i по базису $\mathcal{E}$. $e'_i = \sum\limits_{k=1}^{n} s_{ki}e_k$. Матрица $S = (s_{ki})$ называется матрицей перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$. Тогда $\mathcal{E}' = E \cdot S$

Утверждение. *Пусть $v \in V$, $v = \mathcal{E}\alpha = \mathcal{E}'\alpha'$. Тогда $\alpha = S\alpha'$*

Доказательство. $\mathcal{E}\alpha = \mathcal{E}'\alpha' = \mathcal{E}S\alpha' \Rightarrow \alpha = S\alpha'$, так как разложение v по базису $\mathcal{E}$ единственно. □

Утверждение. *Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ — базисы, S — матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$, T — матрица перехода от $\mathcal{E}'$ к $\mathcal{E}''$. Тогда матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}''$ — это ST.*

Доказательство. $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'T = (ES)T = E(ST)$ □

Следствие 12. *Матрица перехода обратима.*

Доказательство. Пусть S — матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$, T — матрица перехода от $\mathcal{E}'$ к $\mathcal{E}$. Тогда ST — матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}$, TS — матрица перехода от $\mathcal{E}'$ к $\mathcal{E}'$. □

Утверждение. *Пусть V — линейное пространство, $\mathcal{E}$ — базис, а S — какая-то обратимая матрица порядка n. Тогда ES — базис в V.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}' = \mathcal{E}S$. В $\mathcal{E}'$ n элементов. Осталось доказать, что любой вектор из V можно выразить через $\mathcal{E}'$. Достаточно доказать, что все векторы $\mathcal{E}$ выражаются через $\mathcal{E}'$. Но S обратима, поэтому $\mathcal{E}'S^{-1} = \mathcal{E}SS^{-1} = \mathcal{E}$. Значит элементы $\mathcal{E}$ выражаются через $\mathcal{E}'$. □

Замечание. Мы пользовались только тем, что $SS^{-1} = E$, и получили $S^{-1}S = SS^{-1} = E$. То есть если матрица обратима справа ($\exists T: ST = E$), то она обратима ($ST = TS = E$).

$M_{n\times 1} \ni v_1, \ldots, v_k$, $\dim\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \operatorname{rk} v_1, \ldots, v_k$
Составим из $v_1, v_2, \ldots, v_k$ матрицы A размера $n \times k$.

Утверждение. *Столбцовый ранг матрицы A $\operatorname{rk}_c A$ — ранг системы столбцов.*

Утверждение. *Строковый ранг матрицы A $\operatorname{rk}_r A$ — ранг системы строк.*

Утверждение. $\operatorname{rk}_r AB \leq \operatorname{rk}_r B$, $\operatorname{rk}_c AB \leq \operatorname{rk}_c A$

Доказательство. Первый столбец AB это Ab_{*1}, то есть $a_{*1} * b_{*1} + \ldots + a_{*k}b_{*k}$, то есть $Ab_{*1} \in V$. Аналогично все столбцы матрицы AB лежат в V.Значит среди них не более $\operatorname{rk}_c A$ независимых столбцов. То есть $\operatorname{rk}_c AB \leq \operatorname{rk}_c AB$ □

Теорема 30. *Теорема о ранге матрицы*
$\operatorname{rk}_c A = \operatorname{rk}_r A$

Доказательство. Докажем, что $\operatorname{rk}_r A \leq \operatorname{rk}_c A$. Пусть $r = \operatorname{rk}_c A$. Значит есть r столбцов, через которые все выражается. Пусть это столбцы $c_1, \ldots, c_r$. $a_{*i} = \sum_{s=1}^{n} = d_{si}c_s$. Рассмотрим матрицу $C = (c_1, \ldots, c_r)$. Рассмотрим матрицу $D = (d_{si})$. Тогда $CD = (a_{*1}, \ldots, a_{*k}) = A$. Таким образом $\operatorname{rk}_r CD \leq \operatorname{rk}_r D$. Но в матрице D r строк, значит $\operatorname{rk}_r D \leq r$, откуда $\operatorname{rk}_r A \leq r = \operatorname{rk}_c A$. □

Замечание. Пусть A имеет размер $n \times k$ и r — минимальное число, такое что A можно разложить в произведение C размера $n \times r$, D размера $r \times k$. По утверждению $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} C, \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} D$. Но $A = CD$, следовательно $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} C = \operatorname{rk} D$, то есть $\operatorname{rk} A \leq r$. Но $r = \operatorname{rk} A$ возможно.

Упражнение 8. Пусть столбцы матрицы A линейно независимы. Тогда $\forall B :\ \operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$

Определение 55. Элементарное преобразование матрицы A это преобразование следующего вида:

- Пусть $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots a_{k*} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} + \alpha a_{j*} \\ \vdots \\ a_{k*} \end{pmatrix}$

- Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots a_{k*} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ \lambda a_{i*} \\ \vdots \\ a_{k*} \end{pmatrix}$

- Пусть $i < j$. Тогда $\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{j*} \\ \vdots a_{k*} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{j*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots a_{k*} \end{pmatrix}$

Обозначение. *E_{ij} — матрица, в которой в позиции (i,j) стоит единица, а в остальных — нули.*

Определение 56. Элементарные преобразования:

- $A \to (E + \alpha E_{ij})A = D_{ij}(\alpha)A$
- $A \to (E - E_{ii} + \lambda E_{ii})A = T_i(\lambda)A$
- $A \to (E - Eii - Ejj + Eji + Eij)A = P_{ij}A$

Все эти матрицы называются элементарными.

Утверждение. *Элементарные матрицы обратимы, и обратные к ним элементарны.*

Доказательство.

- $(D_{ij}(\alpha))^{-1} = D_{ij}(-\alpha)$
- $(T_i(\lambda))^{-1} = T_i(\frac{1}{\lambda})$
- $P_ij^{-1} = P_{ij}$

□

Утверждение. *При элементарных преобразованиях строк матрицы A её ранг не меняется. Более того, не меняются линейные зависимости между столбцами.*

Доказательство. Пусть в матрице A столбцы зависимы с какими то коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то есть $\sum\limits_i \alpha_i a_{*i} = 0$ или $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = 0$. После элементарного преобразования $A \to FA$, то есть $FA\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = 0$. Наоборот, если в FA столбцы зависимы с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, то и в $A = F^{-1}(FA)$ они зависимы с теми же коэффициентами. □

Определение 57. Матрица A имеет ступечатый вид, если номера первых ненулевых элементов в строках строго возрастают.

Определение 58. Первые ненулевые элементы в строках называются главными элементами строк, столбцы в которых они находятся — главные столбцы.

Теорема 31. *Любая матрица элементарными преобразованиями приводится к ступенчатому виду.*

Доказательство. Докажем индукцией по количеству строк. База индукции: матрица из 0 строк.
Заметим, что если матрица нулевая, то она уже приведена к ступенчатому виду. В противном случае выберем первый столбец, содержащий ненулевые числа. Пусть это столбец i. Переставим строки так, чтобы a_{1i} был ненулевым. При каждом $j > 1$ вычтем из j-й строки первую, умноженную на $\frac{a_{ji}}{a_{1i}}$. Тогда весь i-й столбец, кроме a_{1i} обнулился. Применив предположение индукции, для матрицы $n - 1 \times m - 1$, получим, что все ок. $\square$

Утверждение. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.*

Доказательство. Пусть r — количество непустых строк. Тогда $\operatorname{rk} A \leq r$. Осталось оказать, что это строки линейно независимы. Предположим, что $\sum\limits_i \lambda_i a_{i*} = 0$, и какой-то $\lambda_i \neq 0$. Выберем минимальную такую строку i, пусть a_{ij} главный её элемент. Но тогда $\sum\limits_i \lambda_i a_{ij} = \lambda_i a_{ij} \neq 0$. А значит, что $\sum\limits_i \lambda_i a_{i*} \neq 0$ $\square$

Упражнение 9. Покажите, что при элементарных преобразованиях строк строчный ранг не меняется.

Определение 59. Ступечатая матрица называется упрощенной, если все главные элементы равны 1, а все остальные равны 0.

Теорема 32. *Элементарными преобразованиями любая матрица приводится к упрощенному виду.*

Доказательство. Первого условия добиться просто — надо разделить каждую строку на её главный элемент, получим, что все главные элементы единичны.
Рассмотрим все строки, упорядоченные по возрастанию номеров. Пусть a_{ij} — главный элемент, равный 1. Вычтем из каждой строки $k, k \neq i$ строку i умноженную на aij $\square$

Определение 60. Матрица $n \times n$ нызвается невырожденной, если её ранг равен n. Упрощенный вид такой матрицы — E_n

Теорема 33. *Пусть A — квадратная матрица. Тогда следующее равносильно.*

- *A — невырожденная матрица.*
- *элементарными преобразованиями приводится к E.*
- *A есть произведение элементарных матриц.*
- *A — обратима.*
- *A обратима слева или справа.*

Замечание. Произведение обратимых матриц обратимо.

Доказательство.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Упрощенный вид A есть E.
- (2) $\Rightarrow$ (3). $K_1K_2 \dots K_rA = E \Rightarrow A = K_t^{-1} \dots K_1^{-1}$
- (3) $\Rightarrow$ (4). Матрица A обратима, так как элементарные обратимы и произведение обратимый обратимо.
- (4) $\Rightarrow$ (5). Если матрица обратима, то она обратима и справа, и слева.
- (5) $\Rightarrow$ (1). Пусть матрица A обратима справа, то есть $AB = n$. $n = \operatorname{rk} E = \operatorname{rk} AB \leq \operatorname{rk} A \leq n \Rightarrow \operatorname{rk} A = n$

□

2. Системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x + \ldots + a_{1k}x_k &= b_1 && (1) \\ \vdots & && (2) \\ a_{n1}x + \ldots + a_{nk}x_k &= b_n && (3) \\ & && (4) \end{aligned}$$

В матричном виде: $Ax = b$**.**
<u>ОСЛУ:</u> $Ax = 0$**.**

Утверждение. *Множество всех решений есть линейное подпространство в $M_{k\times 1}$. Достаточно найти базис.*

Утверждение. *При элементарных преобразованиях множество решений системы $Ax = 0$ не извеменяется.*

Определение 61. Пусть $Ax = 0$ — ОСЛУ, V — пространство её решений. Тогда базис этого пространства называется фундаментальной системой решений этой ОСЛУ. Матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений называется *фундаментальной матрицей* этой системы.

Замечание. Если k — количество переменных, а $r = \operatorname{rk} A$, то тогда фундаментальная матрица имеет размер $k \times (k - r)$.

Следствие 13. *Пусть k — количество переменных в системе,* $\operatorname{rk} A = r$. *Тогда пространство решений системы $Ax = 0$ имеет размерность $r - k$*

Следствие 14. *Если в ОСЛУ уравнений меньше, чем неизвестных, то она всегда имеет нетривиальное решение.*

Доказательство. $\operatorname{rk} A \leq$ количество строк в A $\leq k$ □

Неоднородные СЛУ

$Ax = b$

Утверждение. *Пусть x_0 — решение системы $Ax = b$, V — пространство решений ОСЛУ $Ax = 0$. Тогда решения неоднородной системы — в точности столбцы вида $x_0 + v$, $v \in V$*

Доказательство. Пусть $Ax = b$. Тогда $Ax = Ax_0$, откуда следует $A(x - x_0) = 0$. То есть $x - x_0 = v, v \in V \Rightarrow x = x_0 + v, v \in V$ □

Метод решения:
Рассмотрим расширенную матрицу нашей системы: $(A|b)$. Приведем её к упрощенному виду (от этого СЛУ не меняется). Матрица A при этом приведется к упрощенному виду. Получим два случая.

1) **Столбец b оказался главным столбцом. Тогда решений нет.**

2) **Если этого не произошло, то матрица всегда имеет решение, т.е** $x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$**,** $x = x_0 + \Phi d$**, где** d **— произвольная**

Теорема 34. *Теорема Кронекера-Капелли Система* $Ax = b$ *совместна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|B)$

Доказательство. Ax — столбец, являющийся линейной комбинацией столбцов матрицы A: $Ax = a_{*1}x_1 + a_{*2}x_2 + \ldots + a_{*k}x_k$. Значит, решить систему $Ax = b$ — выразить вектор b как линейную комбинацию векторов $a_{*1}, \ldots, a_{*k}$. А это возможно тогда и только тогда, когда $b \in \langle a_{*1}, \ldots, a_{*k} \rangle$. А это равносильно $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$ □

3. Лекция 100500. Линейные пространства наносят ответный удар

Определение 62. Пусть A — абелева группа. Пусть $B, C \subseteq A$. Суммой множеств B и C назовем $B + C = \{b + c : b \in B, c \in C\}$. Иногда оно называется *суммой Минковского.*

Суммы и пересечения подпространств

V **— линейное пространство,** U_1, U_2 **— его подпространства.**

Утверждение. $U_1 \cap U_2$ *и* $U_1 + U_2$ *— подпространства в* V*.*

Замечание. Можно определить сумму произвольного числа подпространств. $U_1 + U_2 + \ldots + U_k = u_1 + \ldots + u_k$

Замечание. $U_1 + U_2 = \langle U_1, U_2 \rangle$

Утверждение. *Пусть* $U_1 = \langle A_1 \rangle, \ldots, U_n = \langle A_n \rangle$*. Тогда* $U_1 + \ldots + U_n = \langle A_1 \cup \ldots \cup A_n \rangle$

Доказательство. $A_1, \ldots, A_n \subseteq U_1 + \ldots + U_n \Rightarrow \langle A_1 \cup \ldots \cup A_n \rangle \subseteq U_1 + \ldots + U_n$
$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ — линейная комбинация элементов из $A_1 \cup \ldots \cup A_n \Rightarrow$ $\langle A_1 \cup \ldots \cup A_n \rangle \supseteq U_1 + \ldots + U_n$ □

Следствие 15. $\dim(U_1 + \ldots + U_n) \le \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$

Доказательство. Пусть A_i — базис U_i. Тогда $U_i = \langle A_i \rangle$. Значит $U_1 + \ldots + U_n = \langle A_1 \cup \ldots \cup A_n \rangle$. $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leq |A_1| + \ldots + |A_n| = \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$ □

Замечание. $U_1 + U_2 = U_1 + U_3 \not\Rightarrow U_2 = U_3$

Определение 63. Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — подпространства в V. Сумма $U_1 + \ldots + U_n$ называется *прямой суммой*, если $\forall u \in U_1 \cup \ldots \cup U_n \exists! u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n : u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Обозначение. *Прямая сумма обозначается как* $u \oplus v$

Утверждение. *Сумма подпространств* $U_1 + \ldots + U_n$ *— прямая, тогла и только тогда,* 0 *однозначно раскадывается, в сумму* $0 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $u_i \in U_i$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно верно по определению прямой суммы.
Пусть 0 раскладывается однозначно, но эта сумма не прямая. Тогда $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$, где $u_i, u_i' \in U_i$. Тогда $0 = u - u = u_1 + \ldots + u_n - (u_1' + u_2' + \ldots + u_n') = (u_1 - u_1') + \ldots + (u_n - u_n') = 0 + 0 + \ldots + 0$, $u_i - u_i' \in U_i$, хотя бы одна разность ненулевая. Итак, мы получили две различных разложения нулевого вектора. □

Теорема 35. *Сумма* $U_1 + \ldots + U_n$ *— прямая тогда и только тогда, когда для любого* $i = 1, 2, \ldots, n$ $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_n) = 0$

Доказательство. Пусть это не так, то есть есть $0 \neq u \in U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_n)$. $u = u_{i*} (\in U_i) = u_1 + \ldots + u_{i-1} + u_{i+1} + \ldots + u_n$, $u_i \in U_i$. То есть u раскладывается неоднозначно. То есть сумма не прямая.
Пусть сумма не прямая. Тогда по только что доказанному утверждению $0 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $u_i \in U_i$, среди

□

Упражнение 10. Сумма $U_1 + \ldots + U_n$ — прямая, тогда и только тогда, когда:
$U_1 \cap U_2 = 0$
$(U_1 + U_2) \cap U_3 = 0$
$\ldots$
$(U_1 + \ldots + U_i) \cap U_{i+1}$

Следствие 16. $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = 0$

Теорема 36. *Следующие утверждения равносильны:*

- $U_1 + \ldots + U_n = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$
- $\dim U = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim U_i$
- *Объединение базисов пространств U_i дает базис U.*

Доказательство.

- (2) $\Leftrightarrow$ (3)
  Пусть $\mathcal{E}_i$ — базис в U_i. Тогда $U_i = \langle \mathcal{E}_i \rangle$, а значит, $u_1 + \ldots + U_n = \langle \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n \rangle$. Значит, если $\mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n$ — независима, то она — базис U и $\dim U = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim U_i$. Если эта система линейно зависима, то она — не базис. $\operatorname{rk}(\mathcal{E}_1 \cup \ldots \mathcal{E}_n) < \sum\limits_i \dim U_i \Rightarrow \dim U < \sum\limits_i \dim U_i$
- (3) $\Rightarrow$ (1). Рассмотрим $0 = u_1 + \ldots + u_n$, $u_i \in U_i$. Разложим u_i по базису $\mathcal{E}_i$. Мы получили разложение нуля по базису $(\mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n)$, значит разложение нуля единственно, а значит сумма прямая.
- (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть сумма прямая, но $\bigcup\limits_i \mathcal{E}_i$ — не базис в U, то есть 0 раскладывается более, чем одним способом.

$\square$

Замечание.

Определение 64. Пусть V — пространство, U — его подпространство. Подпространство $W \subseteq U$ называется прямым дополнением к U, если $V = U \oplus W$

Теорема 37. *Для любого подпространства U в V существует его прямое дополнение.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_k)$ — базис в u. Эта система независима. Тогда её можно дополнить (в V) до $(e_1, \ldots, e_m)$ — базиса в V, где $k = \dim U$, $m = \dim V$. Положим $W = \langle e_{k+1}, \ldots, e_m \rangle$. Векторы $e_{k+1}, \ldots, e_m$ независимы, значит они образуют базис W, и значит объединение базисов U и W — базис V. А это значит, что $U + W = U \oplus W = V$. $\square$

Теорема 38. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

Доказательство. $U = U_1 \cap U_2$. Дополним U до U_1 и U_2. $U_1 = U \oplus W_1$, $U_2 = U \oplus W_2$. Мы утверждает, что $U_1 + U_2 = U \oplus W_1 \oplus W_2$. Если это так, то $\dim(U_1 + U_2) = (\dim U + \dim W_1) + (\dim U + \dim W_2) - \dim U = \dim U_1 + \dim U_2 - \sim U_1 \cap U_2$.
То есть нам осталось доказать, что $U_1 + U_2 = U \oplus W_1 \oplus W_2$. Пусть это неверно. Тогда $0 = u + w_1 + w_2$, $u \in U$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Хотя бы два из этих трех векторов ненулевые. Пусть $w_1 \neq 0$. Тогда $-w_1 = u + w_2 \in U_1 \cap U_2 = U$. То есть $-w_1 \in U \cap W = \emptyset$ $\square$

Определение 65. Пусть $V = U \oplus W$. Тогда любой $v \in V$ однозначно раскладывается $v = u + w$, $u \in U, w \in W$. u называется проекцией v на U вдоль

Определение 66. Пусть V — линейное пространство. Функция $f : V \to \mathbb{R}$ называется линейной, если $f(u + v) = f(v) + f(u)$ и $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Пусть $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V, $v = \sum\limits_i \alpha_i e_i = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Тогда $f(v) = \sum\limits_i \alpha_i f(e_i)$. Строка $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ называется координатной строкой функции f и задает эту функцию.

Утверждение. *Все линейные функции на пространстве V образуют линейное пространство.*

Доказательство. Если f_1 и f_2, то любая их линейная комбинация $af_1 + bf_2$ — линейная функция $\forall x, y \in \mathbb{R}$. $\square$

Определение 67. Пространство всех линейных функций на V называется *сопряженным пространством* к V и обозначается V^*

Базисные функции должны иметь координаты $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

Обозначение. *Обозначим базисную функцию, у которой единица стоит на i-м месте как f^i. $\forall j \neq i : f^i(e_j) = 0$, $f^i(e^i) = 0$.*

Тогда $f^i(v)$ — координата при e_i в разложении v по базису. $f^i(v) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_i$.

Утверждение. *Функции f_i — базис пространства V^*.*

Доказательство.

- f^i — линейно независимы.
  Пусть $f^1 = \sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_i f^i$. Тогда $f^1(e_1) = \sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_i f^1(e_i) = 0$. Противоречие.

- $\forall f \in V^k$ $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f(e_i) f^i$. Действительно, это верно для любого e_i, из линейности следует, что это выполнятеся всегда.

$\square$

Следствие 17. $\dim V^* = \dim V$*, следовательно* $V \cong V^*$

Определение 68. Базис $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$ в пространстве V^* называется *взаимным* (биортогональным) к базису $\mathcal{E}$ пространства V.

Утверждение. *Пусть* $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ *— два базиса в* V*,* $\mathcal{E}' = \mathcal{E}S$*. Пусть* $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ *— взаимные к ним базисы в* V^**. Тогда* $\mathcal{F}' = S^{-1}\mathcal{F}$

Доказательство. Нам нужно доказать: $\mathcal{F} = S\mathcal{F}'$. Вычислим $f^i(e'_j) = f^i(ES_{*j}) = S_{ij}$. $f^i = \sum S_{ij} f'^j$, т.е. $\mathcal{F} = S\mathcal{F}'$ $\square$

$V^{**} = (V^*)^*$**.** $\forall v \in V : v^{**} \in V^{**} v^{**}(f) = f(v)$

v^{**} **— действующая линейная функция.** $v^{**}(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) = v^{**}(f_1) + v^{**}(f_2)$

Теорема 39. $V^{**} \cong V$*, причем* $v \to v^{**}$ *как раз и реализует этот изоморфизм.*

Замечание. Этот изоморфизм называется каноническим изоморфизмом между V и V^{**}.

Доказательство. $(v_1 + v_2)^{**} = v_1^{**} + v_2^{**}$, $(\alpha v_1)^{**} = \alpha v1^{**}$, то есть наш изоморфизм сохраняет операции.

Далее, если $v_1, \dots, v_k$ — линейно независимы, то и $v_1^{**}, \dots, v_k^{**}$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^{**} = 0$, не все α_i — нули. $0 = \sum\limits_{i=1}^{n}(f) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(v_i) = f(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_i v_i)$ для любой функции f. Но вектор $v = \sum\limits_{i} \alpha_i v_i \neq 0$. Тогда $\exists f \in V^* : f(v) \neq 0$. Противоречие.

Итак, если $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V, то $e_1^{**}, \dots, e_n^{**}$ — линейно независимы в V^{**}. При этом $\dim V^{**} = n$. Значит, $e_1^{**}, \dots, e_n^{**}$ — базис V^{**}.

Итак, мы доказали что наше отображение — биекция. $\square$

Мы будет отождествлять V и V^{**}.

Определение 69. V — пространство, $U \subseteq V$ — его подпространство.
$f_1(u) = 0, f_2(u) = 0, \dots, f_k(u) = 0$ задает U, если пространство её решений — U, т.е. $U = \{v \in V | f_i(v) = 0, i = 1, 2, \dots, k\}$

Замечание.

Определение 70. Пусть $W \subseteq V^{**}$. Тогда его *аннулятором* называется подпространство $W^0 = U = \{v \in V | f(v) = 0 \forall f \in W\}$
Пусть $W \subseteq U$. Его аннулятор $W^0 = \{f \in V^* : f(v) = 0 \forall v \in W\}$

Теорема 40. *Пусть* $W \subseteq V$. *Тогда* $\dim W + \dim W^0 = \dim V$

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_k)$ — базис в W, дополним его до базиса пространства V $(e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n) = 0$. Пусть $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ — взаимный базис пространства V. Тогда $W^0 = \langle e_{k+1}^*, \dots, e_n^* \rangle$.
Действительно, $e_{k+1}^*, \dots, e_n^* \in W^0$. Если $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \in W^0$, то $f(e_i) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$, а значит $\alpha_i = 0$. Значит, $\dim W + \dim W^0 = k + (n-k) = n$. ☐

Следствие 18. $W^{00} = W$

Доказательство. Повторим наши рассуждения из предыдущего доказательства, получаем, что $W^{00} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle = W$, так как взаимный базис взаимного базиса — он сам. ☐

Пространство W задается СЛУ, можно взять просто базис пространства W^0

Теорема 41. *Пусть* $U \subseteq V$, $W \subseteq V$

1) $U \subseteq W \Rightarrow W^0 \subseteq U^0$

2) $W = U \Leftrightarrow W^0 = U^0$

3) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$

4) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$

Доказательство.

- $f \in W^0 \Rightarrow f(W) = 0 \Rightarrow f(U) = 0 \Rightarrow f \in U_0$

- $U = W \Rightarrow U^0 = W^0 \Rightarrow U^{00} = W^{00} \Rightarrow U = W$

- $f \in (W+U)^0 \Rightarrow f \in U^0, f \in W^0 \Rightarrow f \in U^0 \cap W^0$
  Наоборот если $f \in (U^0 \cap W^0)$, то $\forall u \in U, w \in W \, f(u) = 0, f(w) = 0$, $f(u+w) = f(u) + f(w) = 0$

- Возьмем аннулятор от третьего равенства. Получим $U' + W' = (U'^0 + W'^0)^0$. Подставим $U' = U^0$, $W' = W^0$. Получим что надо,

$\square$