# 1. Теория множеств

**Определение 1.** Множество — неопределяемое понятие. В нектором приближении множество — некоторых набор объектов.

**Пример 1.** $1, 2, 5$ — множество.

Способы задания множеств:

- Перечисление $A = \{1, 2, 5\}$
- Задание свойством или *Set builder notation* $\{n \in \mathbb{N} | 2 | n\}$

*Замечание.* Будем считать, что $0 \in \mathbb{N}$

$\{n \in \mathbb{N} | x > 10, 2 | x, n$ простое$\}$ = Множество крокодилов в этой комнате = $\emptyset$

$\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

$x \in A$ — $x$ является элементом $A$.

$B \subset A$, если любой элемент $B$, лежит в $A$.

$A = B \Leftrightarrow (B \subset A) \wedge (A \subset B)$

**Утверждение.**

- $\emptyset \subset A$
- $A \subset A$
- $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

### Парадокс Рассела

Рассмотрим множество $M = A | A \notin A$. Определим, лежит ли элемент $M$ в множестве $M$. С одной стороны, если $M \in M$, то $M \notin M$ по построению. Если же $M \notin M$, то по построению $M \in M$. Получили противоречие.

### Законы де Моргана

- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

**Определение 2.** Пара — множество из двух объектов $\{a_1, a_2\}$

**Определение 3.** Упорядоченная пара — $\{\{a_1, a_2\}, a_i\}$

**Определение 4.** Декартово произведение множества $A$ на множество $B$ — множество всех упорядоченных пар с первым элементом из $A$ и вторым из $B$. $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) | \forall a_i \in A\}$

**Свойство 1.** *Декартово произведение ассоциативно.*

**Определение 5.** Соответствие между $A$ и $B$ — произвольное подмножество $A \times B$

**Определение 6.** *Отображение* или *функция* — однозначное соответствие. $\forall a \in A \; \exists! b \in B \; (a, b) \in A \times B$

**Определение 7.** *Инъекция* — несклеивающее отображение $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

**Определение 8.** *Сюръекция* — накрывающее отображение. $\forall b \in B \; \exists a \in A \; f(a) = b$

**Определение 9.** *Биекция* — взаимно-однозначное соответствие. Иначе говоря, это отображение, являющееся инъекцией и сюръекцией.

**Определение 10.** *Образ множества* $P \subset A$ при соответствии $F \subset A \times B$ — это $\{b \in B | \exists a \in P \; (a, b) \in F\}$

**Определение 11.** *Прообраз множества* $Q \subset B$ при соответствии $F \subset A \times B$ — это $\{a \in A | \exists b \in Q \; (a, b) \in F\}$

F — инъекция $\Rightarrow P = F^{-1}(F(P))$

1) $P \subset F^{-1}(F(P))$
   $a \in P \Rightarrow a \in F^{-1}(F(a))$

2) $F^{-1}(F(P)) \subset P$
   $a' \in F^{-1}(F(P)), a' \notin P.$
   $a' \in F^{-1}(F(P)) \Rightarrow F(a') \in F(P) \Rightarrow \exists a \in P \; F(a') = F(a)$. Имеем:
   $a' \neq a, F(a) = F(a')$ — противоречие с инъекцией.

**Теорема 1.** $\forall P P = F^{-1}(F(P)) \Leftrightarrow \forall x \in A \; F(x) \neq \emptyset, \forall x_1, x_2 \in A \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \cap F(x_2) = \emptyset$

**Определение 12.** Пусть $F \subset A \times B$ — соответствие. Тогда *обратное соответствие* — это $F^{-1} \subset B \times A : (b, a) \in F^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in F$

Композиция отображений и соответствий $F : A \to B$, $G : B \to C$, $H = G \circ F : A \to C, H(a) = G(F(a))$

Тождественное преобразование (identity) $\mathrm{id}_A : A \to A$.

**Утверждение.** *Если* $F : A \to B$, *то* $F \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ F = F$

**Утверждение.** $F : A \to B, G : B \to C, H : C \to D \Rightarrow H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$

**Утверждение.** $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$

**Упражнение 1.** Доказать вышеприведенные утверждения.
Когда $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_B$ ?

**Определение 13.** $|A|$ — количество элементов в множестве $A$.

**Упражнение 2.**

- $\exists$инъекция из A и B $\Leftrightarrow |A| \leq |B|$
- $\exists$сюръекция из A и B $\Leftrightarrow |A| \geq |B|$
- $\exists$биекция из A и B $\Leftrightarrow |A| = |B|$

**Определение 14.** $A$ и $B$ равномощны ($A \cong B$), если существует биекция из $A$ и $B$.

Примеры:

- $\mathbb{N} \cong \{x \in \mathbb{N} | x$ — четное$\}$
- $[0, 1] \cong [0, 2]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$

Свойства:

1) $A \cong A$ (рефлексивность)
2) $A \cong B \Leftarrow B \cong A$ (симметричность)
3) $A \cong B, B \cong C \Leftarrow A \cong C$ (транзитивность)

**Определение 15.** не более мощно чем $B$, если существует $B_1 \subset B$, такое что $A \cong B_1$. Обозначение: $A <= B$.

Примеры:

- $\mathbb{N} <= [0,1]$. $X = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \cong \mathbb{N}$

Свойства:

1) $A <= A$ (рефлексивность)

2) $A <= B \Leftarrow B >\cong A$

3) $\emptyset <= A$

4) $A <= B, B <= C \Leftarrow A <= C$ (транзитивность)

**Теорема 2.** *Теорема Кантора-Бернштейна Если* $A <= B$ *и* $B <= A$, *то* $A \cong B$

*Доказательство.* $A \cong B_1 \subset B$. $f : A \mapsto B_1$ — биекция
$B \cong A_1 \subset A$. $g : B \mapsto A_1$ — биекция
$A_2 = g(B_1)$, $A_2 \subset A_1$. $A_1 \cong B_1 \cong A \Rightarrow A_2 \cong A$
Надо: $A \cong B$
Достаточно оказать: $A \cong A_1$
Переформулируем:
Дано: $A_2 \subset A_1 \subset A$, $A_0 \cong A_2$; доказать: $A_0 \cong A_1$
$h : A \mapsto B$ — биекция. Пусть $A_i = h(A_{i-2}$. Тогда $A_{i+1} \subset A_i$
Пусть $C_i = A_i$
$A_{i+1}\ C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\ A_j = \bigcup_{i=j} C_i \cup C$. Заметим, что ${}_i \cup C_j = \emptyset$, $C \cup C_i = \emptyset$.
$h(C_i) = h(A_i$
$A_{i+1}) = h(A_i)$
$h(A_{i+1}) = A_{i+2}/A_{i+3} = C_{i+2}$. Получили $h(C_i) = C_{i+2}$
$A_0 = \bigcup_{i=0} C_i \cup C$.
$A_1 = \bigcup_{i=1} C_i \cup C$.
Сделаем такую биекцию: Все нечетные слои оставляем на месте, все четные "сдвигаем"на один шаг.

$k(x) = h(x)$, если $x \in (C_0 \cup C_2 \cup C_4 \cup \cdots); x$ если $x \in (C_1 \cup C_3 \cup \cdots) \cup C$

□

**Определение 16.** $A$ счетно, если $A$ равномощно множеству натуральных чисел.

**Утверждение.** *Если $A$ счетно, то $A \cup a_i$ — счетно*

**Утверждение.** *Если $A$ и $B$ счетно, то $A \cup B$ — счетно*

**Следствие 1.** $\mathbb{Z}$ — *счетно.*

**Утверждение.** *Если $A$ и $B$ счетны, то $A \times B$ счетно.*

**Теорема 3.** *Объединение счетного числа счетных множеств счетно.*

*Доказательство.*
- Множества $A_0, A_1, A_2, \cdots$ попарно не пересекаются. Доказательство аналогично
- Общий случай: $A_0 \subset A_0 \cup A_1 \cup \ldots <= B_0 \cup B_1 \cup B_2$, где $B_i = A_i \times i; B_i \cong A_i, B_i \cap B_j = \emptyset$. Используй теорему Кантора-Бернштейна, Люк!

□

**Теорема 4.** *Теорема Кантора Множество всех бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно.*

*Доказательство.* Пусть оно счетно. $f_0, f_1, \ldots$ — все последовательности. Рассмотрим $d$, такое что $d[n] = f_n[n]$. Рассмотрим $\overline{d}$, такое что $\overline{d}[n] = 1 - d[n]$. С одной стороны, она должна быть в $f$ по предположению. Пусть $\overline{d} = f_k$. Тогда $f_k(k) = \overline{d}[k] = 1 - f(k)[k]$. Противоречие. Значит $d$ не лежит в $f$. Значит предположение и неверно это множество несчетно. □

**Обозначение.** $2^A = B | B \subset A$

**Обозначение.** $X < Y$, *если* $X <= Y$ *и* $X \ncong Y$

**Теорема 5.** *Теорема Кантора в общем виде* $A < 2^A$

*Доказательство.* $A <= 2^A$, т.к $A \cong B = \{\{x\} | x \in A\}$. Пусть $A$ равномощно $2^A$. Тогда есть биекция из $A$ в $2^A$. Можно рассмотреть вопрос о том, правда ли, что $x \in f(x)$. Рассмотрим $D = x \in a | x \notin f(x) \subset A$. Поскольку это биекция, то $D = f(d)$. Вопрос в том, правда ли, что $d \in f(d)$. Пусть $d \in f(d) \Rightarrow d \in D \Rightarrow d \notin f(d)$.Пусть $d \notin f(d)$. Тогда $d \in D$ по опредению $D$. Но значит $d \in f(d)$. □

## 1. Предикаты

**Определение 17.** Пусть есть множество $\alpha$. Предикатом валентности $k$ на множестве $\alpha$ называется любое подмножество $A^k$(или любая функция из $A^k$ в $\{0,1\}$).

Если $k = 1$, то предикат называют свойством.
Если $k = 2$, то предикат называют отношением.
Есть всего два

**Обозначение.** *Произвольное отношение обозначают $R$. Вместо $(x, y) \in R$ пишут $xRy$*

**Определение 18.** Свойства отношений

- Рефлексивность: $\forall x : \ xRx$
- Антирефлексивность: $\forall x : \ \neg xRx$
- Симметричность: $\forall x, y : \ xRy \Rightarrow yRx$
- Антисимметричность: $\forall x, y : \ xRy, yRx \Rightarrow x = y$
- Транзитивность: $\forall x, y, z : \ xRy, yRz \Rightarrow xRz$
- Полнота: $\forall x, y : xRy \vee yRx$

**Определение 19.** Отношение $R$ называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

**Теорема 6.** *Основная теорема отношения эквивалентности*
*Если $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве $A$, то $A$ представляется в виде непересекающихся классов эквивалентности.*

*Доказательство.* 1) $K_x = y|y \sim x$ — класс эквивалетности одного элемента.

2) $x \in K_x$ (из рефлексивности)

3) Если есть $x \in K_y \Rightarrow y \in K_x$ (из симметричности)

4) $\forall y, z : y, z \in K_x \Leftrightarrow y \sim z$ (из транзитивности)

5) либо $K_x = K_y$, либо $K_x \cap K_y = \emptyset$

□

**Определение 20.** Отношение $R$ называется отношением (частичного) порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

**Определение 21.** Порядок называется линейным, если любые два элемента сравнимы.

**Определение 22.** Упорядоченное множество — пара множество и отношение порядка на нем

**Определение 23.** $(A, \leq_A)$ — упорядоченное множество.
$x \in A$ — наибольший элемент, если $\forall y : \leq_a x$
$x \in A$ — максимальный элемент, если $\forall y \in A: \ x \leq_a y \Rightarrow x = y$

# 2. Комбинаторика

**Определение 24.** Правило сложения
Если есть два набора объектов, причем в первом $N$ объектов $a_1, \ldots, a_n$, во втором $M$ объектов $b_1, \ldots, b_m$. Тогда есть $N + M$ способов выбрать объект либо из первого множества, либо из второго.

**Определение 25.** Правило умножения
Если есть два набора объектов, причем в первом $N$ объектов $a_1, \ldots, a_n$, во втором $M$ объектов $b_1, \ldots, b_m$. Тогда есть $NM$ способов выбрать объект сначала из первого множества, затем из второго.

**Определение 26.** Принцип Дирихле
Если есть $N$ ящиков и $N+1$ кролик, то для любой рассадки кроликов по ящикам найдется ящик, в котором находится не менее двух кроликов.

**Пример 2.** Возьмем квадрат на плоскости со стороной 2 и случайно кинем в него 5 точек. Тогда среди этих 5 точек есть такие две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{2}$. Рассмотрим разбиение этого квадрата на четыре непересекающихся квадрата со стороной 1. Тогда согласно принципу Дирихле, в одном маленьком квадрате есть две точки. Очевидно, что расстояние между ними не превосходит диагонали маленьком

**Пример 3.** Пусть есть множество $\mathcal{R}$, состоящее из 20 натуральных чисел от 1 до 20. Выберем 15 различных подмножеств $\mathcal{R}$ мощности 5: $M_1, M_2, \ldots$. Рассмотрим множество этим множеств $\mathcal{M} = M_1, M_2, \ldots, M_15$. Верно ли, что для любого $\mathcal{M}$ найдется такая раскраска элементов множества $\mathcal{R}$ в два цвета так, что каждое множество $M_i \in \mathcal{M}$ не одноцветно, то есть содержит оба цвета?

**Теорема 7.** *Теорема о раскраски гиперграфа*
*Ответ на поставленный вопрос положителен, то есть для любой* $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_{15}\}, |M_i| = 5, M_i \in \mathcal{R}$

*Доказательство.* Зафиксируем $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_15\}$. По правилу умножения всего двуцветных раскрасок $\mathcal{R}$ есть $2^{20}$. Раскрасок, в которой множество $M_1$ одноцветно — $2^{16}$, так как есть 15 элементов вне множества $M_1$, которые мы можем покрасить как угодно, и само множество $M_1$ мы можем покрасить двумя способами. Посчитаем количество раскрасок, в котором одноцветно хотя бы одно из $M_i$. Очевидно, что количество таких раскрасок не превосходит $152^{16} < 162^{16} = 2^{20}$ Так как плохих раскрасок меньше чем количество всего раскрасок, то надется хотя бы одна хорошая раскраска. □

### Числа размещений, сочетаний, перестановок и прочее

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Можно составлять упорядоченные последовательности элементов $A$. А можно извлекать объекты "кучами то есть без учета порядка. Если мы рассматриваем $A$ как упорядоченную последовательность, то говорят о *размещении* объектов. Если же мы извлекаем объекты без учета порядка, то говорят о *сочетании* объектов. Бывают размещения с повторениями и без повторений. Аналогично, сочетания бывают с повторениями и без повторений.

Будем говорить о $k$-сочетании и $k$-размещении, если в сочетании(размещении) ровно $k$ объектов.

Пусть дано множество объектов $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Обозначим через $\overline{A_n^k}$ число всех $k$-размезещений с повторениями и $A_n^k$ число всех $k$-размещений без повторения. Аналогично обозначим $\overline{C_n^k}$ и $C_n^k$ число $k$-размещений с повторениями и без повторений соответственно.

**Теорема 8.** $\overline{A_n^k} = n^k$

*Доказательство.* На первую позицию нашего размещения можно поставить любой и $n$ объектов. Как, впрочем, и на все остальные. Тогда по правилу умножения получаем $n^k$ □

**Теорема 9.** $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

*Доказательство.* На первую позицию нашего размещения можно поставить любой и $n$ объектов. На вторую — все, кроме того, который мы

поставили на первую позицию, то есть любой из $n-1$ объектов. Иначе говоря, на $i$-тую позицию можно поставить объект $n-i$ способами. То есть $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} n-i = \frac{n!}{(n-k)!}$ □

**Теорема 10.** $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

*Доказательство.* Каждому $k$-сочетанию без повторений соответствует $k!$ различных размещений без повторения. То есть $k!C_n^k = A_n^k$, откуда следует, что $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ □

**Теорема 11.** $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

*Доказательство.* Рассмотрим исходное множество объектов $a_1, \dots, a_n$. Каждому $k$-сочетанию с повторениями поставим в соответствие некоторую последовательность из нулей и единиц. Ставить в соответствие последовательность из нулей и единиц мы будем по следующему алгоритму: пусть дано $k$-сочетание с повторениями. Рисуем в нашу последовательность столько единиц, сколько раз нам встретился элемент $a_i$, после этого рисуем ноль, если это не была последний, $n$-ный объект, и так делаем последовательно $n$ раз для каждого $i$ от 1 до $n$. Всего у нас в нашей последовательности $k$ единиц, так как каждому элементу, входящему в наше сочетание с повторениями соответствует ровно одна единица и $n-1$ единиц. Утверждается, что между такими $0,1$ векторами длины $n-k+1$ с $k$ единицами и сочетаниями с повторениями установилась биекция. Но количество таких последовательностей и нулей и единиц это число способов зафиксировать ровно $k$ позиций среди $n-k+1$, а как известно, это количество равно $C_n^k$ □

**Упражнение 3.** Есть $n$ символов из которых $n_i$ раз встречается символ $a_i$. Сколько существует различных последовательностей символов?

**Определение 27.** $P(n_1, \dots, n_k)$ — число различных последовательностей, которые можно составить из наших символов, если задействовать их все.

**Теорема 12.** $P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

*Доказательство.* У нас есть всего $n$ позиций. Для $a_1$ нужно $n_1$ позиций и есть $C_n^{n_1}$ способов зафиксировать нужны позиции. Для символа $a_2$ нужно $n_2$ позиций и осталось $n-n_1$ свободных позиций, То есть $P(n_1, \dots, n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} + \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} + \dots = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ □

**Теорема 13.** *Бином Ньютона* $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} = C_n^k x^k y^{n-k}$

*Доказательство.* $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$. Из каждой скобки надо взять либо $x$, либо $y$. Пусть из $k$ скобок мы взяли $x$, то есть из остальных $n-k$ скобок мы взяли $y$. Но мы выбрать $k$ скобок можем выбрать $C_n^k$ способами, то есть $x^k y^{n_k}$ встречается $C_n^k$ раз, то есть $(x+y)^n = \sum\limits_k C_n^k x^k y^{n-k}$ □

*Замечание.* $C_n^k$ также называются биномиальными коэффициентами и в западной традиции пишут $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

**Теорема 14.** *Полиномиальная формула*
$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum\limits_{(n_1,n_2,\dots,n_k):n_i\in\mathbb{N},\sum n_i=n} P(n_1,n_2,\dots,n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$

*Доказательство.* Возьмем $n_1$ скобок из которых извлекается $x_1$, $n_2$ из которых извлекается $x_2$, …, $n_k$ скобок, из которых извлекается $x_k$. Очевидно, что $x_i \in \mathbb{N}, \sum n_i = n$. Тогда в произведении получится $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$. Этот моном встретится в $P(n_1,n_2,\dots,n_k)$ раз в качестве слагаемого, т.к. число способов выбрать скобки для $x_1$ равно $C_n^{n_1}$, для $x_2$ остается $n-n_1$ свободных скобок, то есть количество способов выбрать $x_2$ равно $C_{n-n_1}^{n_2}$, и так далее. А как известно, произведение таких биномимиальных коэффициэнтов равно $P(n_1,n_2,\dots,n_k)$. □

*Замечание.* Числа $P(n_1,n_2,\dots,n_k)$ называются *полиномиальными* коэффициентами

Комбинаторные тождества:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
- $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

  *Доказательство.* $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = (1+1)^n = 2^n$ □
- $\sum\limits_{(n_1,n_2,\dots,n_k):n_i\in\mathbb{N},\sum n_i=n} P(n_1,n_2,\dots,n_k) = k^n$

- $\sum\limits_{i=0}^{n}(C_n^i)^2 = C_{2n}^n$

  *Доказательство.* $A = \{a_1, \ldots, a_{2n}\}$. $V$ — множество всех $n$ - сочетаний из $A$. $|V| = C_{2n}^n$. $V = \bigsqcup\limits_{i=0}^{n} V_i$, где $V_k$- множество тех $n$-сочетаний, которые содержат ровно $k$ из первых $n$ элементов, то есть $C_n^k$ способов выбрать $k$ элементов из первых $n$ элементов и $C_n^{n-k}$ способов выбрать оставшиеся $n-k$ элементов из последних $n$ элементов. То есть $|V_k| = C_n^k C_n^{n-k} = (C_n^k)^2$. $|V| = \sum |V_i| \Leftrightarrow C_{2n}^n = \sum\limits_{i=0}^{n}(C_n^i)^2$ □

- $\forall n, m:\ C_{n+m}^n = \sum\limits_{i=n-1}^{n+m-1} C_i^{n-1}$

  *Доказательство.* Рассмотрим $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. $V$ — множество всех $m$-сочетаний с повторениями из $A$. $|V| = C_{n+1+m-1}^m = C_{n+m}^m$. Пусть $V_k$ это те сочетания из $V$, в которые объект $a_1$ входит ровно $k$ раз. Осталось оценить $|V_k|$. В любое сочетание из $V_k$ $k$ раз встречается элемент $a_1$ и в этом сочетании еще есть $m-k+1$ "свободных"мест, на котором стоят остальные $n$ элементов. То есть количество элементов в $V_k$ равно количеству $cm-k+1$-ссочетаний с повторениями их $n$ элементов. То есть $|V_k| = C$ □

  **Следствие 2.** *Если мы возьмем $n = 1$ и подставим в тождество, то мы получим $C_{m+1}^1 = C_m^0 + C_{m-1}^0 + \ldots + C_0^0$*

  **Следствие 3.** *Если $n = 2$, то $C_{m+2}^2 = C_{m+1}^1 + C_m^1 + \ldots + C_1^1 \Leftrightarrow \frac{(m+2)(m+1)}{2} = (m+1) + m + (m-1)\ldots 1$*

  **Следствие 4.** *Если $n = 3$, то $C_{m+3}^3 = C_{m+2}^2 + C_{m+1}^2 + \ldots + C_2^2 \Leftrightarrow \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} = \frac{9(m+1)(m+2)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \ldots + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \ldots + (m+1)^2) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \ldots + (m+1)) \Rightarrow \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \ldots + (m+1)^2) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - \frac{1}{4}(m+1)(m+2) = \frac{1}{12}(m+1)(m+2)(2m+3)$*

## 1. Формула включения-исключения

Рассмотрим произвольное $N$ объектов $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Выделим некоторые свойства $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, которые могут быть присущи некоторым объектам.

**Обозначение.** *Пусть $N(\alpha_i)$ — количество объектов, обладающих свойством $\alpha_i$, $N(\alpha_i, \alpha_j)$ — количество объектов, обладающих свойствами $\alpha_i$ и $\alpha_j$ одновременно.*

**Обозначение.** $\alpha_i'$ — *отрицание свойства* $\alpha_i$

**Теорема 15.** $N(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_3') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \ldots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{N-1}\alpha_N) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \ldots\ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

*Доказательство.* Докажем индукцией по $n$
База индукции: $\forall N\ \forall\ a_1, \ldots, a_N\ \forall\ \alpha_i N(\alpha_i') = N - N(\alpha_i)$
Предположение: $\forall N\ \forall\ a_1, \ldots, a_N\ \forall\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выполняется утверждение теоремы.
Шаг индукции: $\forall N\ \forall\ a_1, \ldots, a_N\ \forall\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ выполнено утверждение теоремы.
Зафиксируем произвольные $N$, $a_1, \ldots, a_N$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Рассмотрим все из наших объектов, которые обладают свойством $\alpha_{n+1}$. Обозначим их $\{b_1, b_2, \ldots, b_M\} \subset \{a_1, \ldots, a_N\}$, где $M = N(\alpha_{n+1})$. Применим предположение индукции к объектам $\{b_1, \ldots, b_M\}$ и свойствам $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. $M(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') = M - M(\alpha_1) - \ldots - M(\alpha_n) + M(\alpha_1\alpha_2) + \ldots + (-1)^n M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
$N(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n', \alpha_{n+1}) = N(\alpha_{n+1}) - \ldots - N(\alpha_1, \alpha_{n+1}) - \ldots - N(\alpha_n, \alpha_{n+1}) + \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$. Применим предположение индукции к множеству $\{a_1, \ldots, a_N\}$ и свойствам $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') = N - N(\alpha_i) - \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Вычтем полученные утверждения: $N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') - N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \alpha_{n+1}) = N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \alpha n + 1') = N - N(\alpha_1) - \ldots - N(\alpha_n) - N(\alpha_{n+1}) + \ldots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$
□

Еще один вариант формулы включения-исключения. Рассмотрим множества $S_1, \ldots, S_n$. Тогда $|S_1 \cup \ldots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \ldots + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|$

### Пара занкопеременных тождеств

- $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ для всех $n \geq 1$, и равно 0 при $n = 0$
- Рассмотрим множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $m < n$. Пусть $V$ - множество всех $m$-размещений с повторениями из $A$. $|V| = n^m$. Скормим множество $V$ со $m$ свойствами "не содержать $i$-й символ. $N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') = 0$, так как $m < n$. $N(\alpha_i) = (n-1)^m$, $N(\alpha_i, \alpha_j) = (n-2)^m$. В итоге получаем тождество: $0 = C_n^0 n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 n - 2^m + \ldots + (-1)^n C_n^n (n-n)^m$

**Циклические последовательности и формула обращения Мебиуса**

Есть алфавит $X = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — алфавит. Назовем обычное слово $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составленным из символов алфавита линейным и будем обозначать его $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$. Циклическое слово $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — это циклическое слово. Все повороты циклического слова превращают его в себя. Спрашивается, сколько есть различных циклических слов. Обозначим его $T(n)$ — число различных циклических комбинаций.

**Определение 28.** Число $p$ называется простым, если $p \neq 1$ и у него нет делителей, кроме 1 и $p$.

**Теорема 16.** *Основная теорема арифметики*
*Пусть $n \geq 2$. Тогда существует единственное разложение числа $n$ на простые. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ ($p_i$ — попарно различные простые).*

**Определение 29.** Функция Мёбиуса $\mu(n)$

**Обозначение.** *$d|n \Leftrightarrow d$ делит $n$*

**Лемма 1.** $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = 1, n = 1, 2, n \geq 2$

*Доказательство.*

- Если $n = 1$, то $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = 1$
- $n \geq 2 \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$
  $d|n \Leftrightarrow d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}, \forall i : \ \beta_i \leq \alpha_i$
  $\sum\limits_{d|n} = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\beta_s=0}^{\alpha_s} \mu p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s} = \sum_{\beta_1=0}^{1} \sum_{\beta_2=0}^{1} \cdots \sum_{\beta_s=0}^{1} \mu p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s} =$
  $\sum_{\beta_1=0}^{1} \sum_{\beta_2=0}^{1} \cdots \sum_{\beta_s=0}^{1} (-1)^{\sum \beta_i} = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \forall i \beta_i \in \{0,1\}} (-1)^{\sum \beta_i} = C_n^0 -$
  $C_n^1 + \ldots = 0$

□

**Теорема 17.** *Формула обращения Мебиуса*
*Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) = \sum\limits_{d|n} g(d)$. Тогда $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$.*

*Доказательство.* $g(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) (\sum\limits_{d'|\frac{d}{n}} g(d')) = \sum\limits_{d|n} g(d) \cdot (\sum\limits_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')) = g(n) \cdot$
$\sum\limits_{d'|1} \mu(d') + \sum\limits_{d|n, d<n} g(d) \cdot (\sum\limits_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d')) = g(n) + 0 = g(n)$ □

**Обозначение.** $T_r(n)$ — *количество циклических последовательностей длины $n$ над алфавитом из $r$ символов.*

**Теорема 18.** $T_r(n) = \sum\limits_{d|n} \frac{1}{d}(\sum\limits_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') r^{\frac{d}{d'}})$

**Определение 30.** Назовем циклическим сдвигом линейного слова $a_1 a_2 \dots a_n$ назовем $a_2 a_3 \dots a_n a_1$.

*Замечание.* Если применить циклический сдвиг к данному линейному слову $n$ раз, то получится то же самое линейное слово.

**Определение 31.** Период линейного слова — это минимальное число $d > 1$: после $d$ циклических сдвигов слово переходит в себя.

**Лемма 2.** *Период любой линейной последовательности длины $n$ является делителем $n$.*

**Лемма 3.** *Любая линейная последовательность длины $n$ и периода $d$ имеет вид $a_1 a_2 a \dots a_d a_1 a_2 \dots a_d \dots a_1 a_2 \dots a_d$.($\frac{n}{d}$ одинаковых блоков по $d$ символов)*

*Замечание.* Каждый из $\frac{n}{d}$ блоков — это множество слов длины $d$ и периодом $d$.

*Замечание.* Между множеством всех слов длины $n$ и периода $d$ и множеством всех слов длины $d$ и периода $d$ есть биекция.

Пусть $V$ — множество всех линейных слов длины $n$ над алфавитом $X$. $|V| = r^n$. Пусть $d_1, d_2, \dots, d_m$ — все делители $n$. Тогда $V = V(d_1) \sqcup V(d_1) \sqcup \dots \sqcup V(d_n)$. Тогда $|V| = |V(d_1)| + |V(d_2)| + \dots + |V(d_m)|$.

Пусть $W(d_i)$ — множество всех линейных слов длины $d_i$ и периода $d_i$. $r^n = |W(d_1)| + |W(d_2)| + \dots + |W(d_m)|$

$U(d_i)$ — множество всех различных циклических слов, которые получаются из линейных слов $W(d_i)$. $|U(d_i)| = \frac{|W(d_i)|}{d_i}$. Тогда $r^n = d_1|U(d_1)| + d_2|U(d_2)| + \dots + d_n|U(d_m)|$. $r^n = \sum\limits_{d|n} d|U(d_i)|$. Обозначим $f(n) = r^n$, $g(n) = n|U(d_i)|$. Тогда $f(n) = \sum\limits_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) \Leftrightarrow n|U(n)| = \sum\limits_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}} \Leftrightarrow |U(n)| = \frac{1}{n} \sum\limits_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}}$.

Но $|U(n)|$ — это число циклических слов, полученных из линейных с периодом $n$. Следовательно $T_r(n) = \sum\limits_{d|n} |U(d)| = \sum\limits_{d|n} \frac{1}{d}(\sum\limits_{d'|d} \mu(d') r^{\frac{d}{d'}})$

## 2. Общая теория обращения Мёбиуса

Рассмотрим частично упорядоченное множество $\mathcal{P} = p_1, p_2, \ldots,$ с отношением порядка $\preceq$, такое что $\forall i | \{x, x \preceq p_i \mid |\} < \infty$

**Пример 4.**

1) $\mathcal{P} = (\mathbb{N}, " \preceq -" \leq ")$
2) $\mathcal{P} = (\mathbb{N}, "x \preceq y - "x|y")$
3) $\mathcal{P} = (2^{1,2,\ldots,n}, " \preceq -" \subseteq ")$

**Определение 32.** *Общая функция Мёбиуса*:

1) $\forall x \in \mathcal{P} : \ \mu(x,x) = 1$
2) $\forall x, y \in \mathcal{P}, x \prec y : \ \mu(x,y) = -\sum\limits_{z: x \preceq z \prec y} \mu(x,z)$

Рассмотрим $\mu(1,n)$ при $\mathcal{P} = (\mathbb{N}, "x \preceq y - "x|y")$

- $\mu(1,1) = 1 = \mu(1)$
- $p$ — простое. Тогда $\mu(1,p) = -\sum\limits_{z: x \preceq z \prec y} \mu(1,z) = -\sum\limits_{d: \ d|n} \mu(1,d) = -1.$
- $\mu(1, p_1 p_2 \ldots p_s = -\sum_{d: \ d|n} \mu(1,d) = -\sum_{d: \ d|p_1 \ldots p_s, d \neq p_1 \ldots p_s} \mu(1,d) = 1 - C_s^1 + C_s^2 \ldots + (-1)^{s-1} C_s^{s_1} = (-1)^(s+1) C_s^s = (-1)^{s+1}$
- $\mu(1,p^2) = -(\mu(1,1) + \mu(1,p)) = 0$
- $\mu(1,p^k) =$

**Теорема 19.** *Формула обращения Мёбиуса Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество, пусть $g : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{X}$, и $f(y) = \sum\limits_{x \prec y} g(x)$. Тогда* $g(y) = \sum\limits_{x \preceq y} \mu(x,y) f(x)$

Рассмотрим $S_1, \ldots, S_n$. Тогда чум $\mathcal{P} = \left\{ \bigcap\limits_{i \in I, I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} S_i \right\}$. Пусть $P_i = \bigcap\limits_{i \in I_1} S_i$, $P_2 = \bigcap\limits_{i \in I_2} S_i$ $P_i \preceq P_j \Leftrightarrow I_1 \supseteq I_2$.

$g(P) := |P|$
Определим $f(P)$ как количество элементов множества $P$, которые не принадлежат ни одному $P'$, такому что $P' \prec P$.

$g(p) = \sum\limits_{P' \preceq P} f(P')$
Применим формулу обращения Мёбиуса $f(p) = \sum\limits_{P' \preceq P} \mu(p', p)|p'|$.
В качестве $P$ возьмем $S_1 \cup \ldots \cup S_n$. $f(S_1, \ldots, S_n) = 0$
$P' \preceq P \Leftrightarrow P' = \cap_{i\ inI} S_i; I \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
$\mu(S_i, P) = -\sum\limits_{S_i \preceq P' \prec P} \mu(S_i, P') = -\mu(S_i, S_i) = -1$
$|I| = 2$. Тогда $\mu(S_i \cap S_j, P) = -(\mu(S_i \cap S_j, S_i) + \mu(S_i \cap S_j, S_j) + \mu(S_i \cap S_j, S_i \cap S_j)) = -(-1 + (-1) + 1) = 1$.
Аналогично можно доказать по индукции $\mu(\bigcap\limits_{i \in I} S_i, P) = (-1)^{|I|}$
Формула включения-исключения!!!1111

## 3. Разбиения чисел на слагаемые

**Определение 33.** $f(N; n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — количество попоечных разбиений числа на слагаемые, т.е. таких которые учитывают порядок слагаемых.

**Определение 34.** $F(N; n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — количество попоечных разбиений числа на слагаемые, которые не учитывают порядок слагаемых.

**Теорема 20.** $f(N; n_1, \ldots, n_k) = \sum\limits_i f(N - n_i; n_1, \ldots, n_k)$

**Определение 35.** Количество разбиений числа $N$ на слагаемые обозначается $\varphi(N)$ и равно $f(N, 1; 2, 3, \ldots, N)$

**Теорема 21.** $\varphi(N) = 2^{N-1}$

*Доказательство.* Доказательство по индукции: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(N+1) = f(N+1, 1, \ldots, N+1) = f(N; 1, \ldots, N+1) + \ldots + f(1; 1, \ldots, N+1) + f(0; 1, \ldots, N+1) + f(0; 1, \ldots, N+1) = \varphi(N) + \ldots + \varphi(1) + \varphi(0) = 2^{N-1} + \ldots + 2^1 + 2^0 + 1 = 2^N$ □

**Теорема 22.** $F(N; n_1, \ldots, n_k) = F(N - n_1; n_1, \ldots, n_k) + F(N, n_2, \ldots, n_k)$

**Определение 36.** $p(N) = F(N; 1, \ldots, N)$

**Теорема 23.** *Теорема Харди и Рамануджана* $p(N) \cong \frac{1}{4N\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}N}}$

**Определение 37.** Диаграммы Юнга
$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Можно считать, что $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$

**Теорема 24.** *Количество разибиений $N$ на не более чем $k$ слагаемых равно количеству разбиений $N + k$ на ровно $k$ слагаемых*

**Теорема 25.** *Количество разибиений $N$ на не более чем $k$ слагаемых равно количеству разбиений $N + \frac{k(k-1)}{2}$ на ровно $k$* различных *слагаемых*

*Доказательство.* Сольем каждую диаграмму с диаграммой $1 + 2 + 3 + \ldots + k$. В новой диаграмме $k$ строк и $N + \frac{k(k-1)}{2}$ точек. □

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$

**Теорема 26.** *Если $N = \frac{3k^2 \pm k}{2}, k \in \mathbb{N}$, то коэффициент при $x$ равен $(-1)^k$. Если $N \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$, то коэффициент при $x^N$ равен нулю.*

**Теорема 27.** *Пусть $N_{чет}$ — число помидорных разбиений на четное число различных слагаемых. $N_{nechet}$ определяется аналогично. Если $N = \frac{3k^2 \pm l}{2}$, то ;;*

## 4. Формальные степенные ряды

**Определение 38.** Назовем $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots$ формальным степенным рядом с коэффициентами $\{a_i\} \in \mathbb{R}$.

**Определение 39.** Пусть $A$ и $B$ два формальных степенных ряда. Назовем их суммой формальный степенной ряд $C$ с коэффициентами $c_i = a_i + b_i$.

**Определение 40.** Пусть $A$ и $B$ два формальных степенных ряда. Назовем их произведением формальный степенной ряд $C$ с коэффициентами $c_i = \sum\limits_{j=0}^{i} a_j \cdot b_{i-j}$.

**Определение 41.** Пусть $A$ и $B$ два формальных степенных ряда. Назовем их отношением формальный степенной ряд $C$, если $A = BC$.

$b_0c_0 = a_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$
$b_1c_0 + b_0c_1 = a_1 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - b_1c_0}{b_0}$
$\ldots$

## 5. Производящая функция

**Определение 42.** Пусть есть последовательность чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Её производящая функция — ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$. Хочется научиться понимать какой смысл принимает это выражение

**Обозначение.** $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_n x^n$

**Определение 43.** Ряд $A(x)$ имеет значение $A$ в точке $x \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} a_n x^n = A$.

Вопрос — при каких условиях на $x \in \mathbb{R}$ такой предел существует.

**Теорема 28.** *Положим* $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при всех* $x: \ |x| < \rho$.

**Теорема 29.** *Пусть* $A(x) = \frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}{c_0+c_1x+c_2x+\ldots}$, $c_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, *и выполнены два следующих условия: все корни знаменателя лежат в* $\mathbb{R}$ *(то есть нет комплесных корней) и множество корней числителя и корней знаменателя не пересекается. Тогда ряд* $A(x)$ *сходится для всех* $x$, *таких что* $|x|$ *меньше наименьшего значения модуля корня знаменателя.*

**Теорема 30.** *Если* $|x| < \rho$. $A'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

**Пример 5.** Найти $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k (\frac{1}{3})^k$

Возьмем $\left\{C_n^k(\frac{1}{3})^k\right\}$ и составим её производящую функцию.

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(\frac{1}{3})^k = (1 + \frac{x}{3})^n$

$f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k(\frac{1}{3})^k x^{k-1}$

$xf'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k(\frac{1}{3})^k x^k$

$(xf'(x))' = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k(\frac{1}{3})^k x^{k-1}$

$x(xf'(x))' = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k(\frac{1}{3})^k x^k$

$x(xf'(x))' = x(x\frac{n}{3}(1 + \frac{n}{3})^{n-1})'$

**Пример 6.** $F_0 = 1, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Найдем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(\frac{1}{2})^n$.
$xf(x) = F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \ldots$
$x^2f(x) = F_0x^2 + F_1x^3 + F_2x^4 + \ldots$
$xf(x) + x^2f(x) = F_1x + (F_0 + F_1)x^2 + \ldots + (F_{n-2} + F_{n-1})x^n + \ldots = F_1x + F_2x^2 + \ldots = f(x) - F_0$
$xf(x)+x^2f(x) = f(x)-1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ Корни знаменателя: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
По теореме о сходимости $|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

### Линейные реккурентные зависимости

Линейная зависимость порядка $k$: $x_n = a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_{n-k}x_{n-k}$.

**Для**$k = 2 \quad a_2y_{n+2} + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0$

**Определение 44.** Характеристическое уравнение для линейной зависимости порядка 2 есть $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

**Теорема 31.** *Пусть у характеристического уравнения есть решение $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда*

- *любая последовательность $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ являются решениями зависимости.*
- *если $y_n$ — решение. Тогда $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{C}: \ y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$*

*Доказательство.*

- Подставим и получим равносильность утверждения и характеристического уравнения.
- Пусть $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$. Рассмотрим уравнения $c_1 + c_2 = y_0$, $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y_1$ с неизвестными $c_1, c_2$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то у этой системы есть решения. Пусть $c_1^*, c_2^*$ — решения этой системы. Рассмотрим последовательность $y_n^* = c_1^*\lambda_1^n + c_2^*\lambda_2^n$.

□

**Теорема 32.** *Пусть у характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда для любое решение представимо в виде $y_n = (c_1n + c_2)\lambda^n$, и для любых $c_1, c_2$ $y_n = (c_1n + c_2)\lambda^n$ есть решение*

*Доказательство.* Доказательство аналогично. □

**Общий случай** $a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_0 = 0$ — характеристическое уравнение

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ (основная теорема алгебры).

Обозначим все различные корни через $\mu_1, \ldots, \mu_l$. Пусть

**Теорема 33.** *Пусть $P_1(n), \ldots P_l(n)$, таких что $P_i(n)$ — многочлен с произвольными коэффициентами из $\mathbb{C}$, имеющий степень $n_i - 1$. Тогда любое $y_n = P_1(n)\mu_1^n + \ldots + P_l(n)\mu_l^n$ — решение и любое решение представимо в таком виде.*