8.1 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Lo que debe aprender

- Escribir matrices e identificar sus órdenes.
- Realizar operaciones elementales en renglones de matrices.
- Usar matrices y eliminación gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Usar matrices y eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos o más variables. Por ejemplo, en el Ejercicio 113 de la página 582 usaremos una matriz para hallar un modelo para la trayectoria de una pelota lanzada por un jugador de béisbol.

Foto Agency/PhotoLibrary

Matrices

En esta sección estudiaremos una técnica refinada para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Esta técnica comprende el uso de un arreglo rectangular de números reales llamado **matriz**.

Definición de matriz

Si m y n son enteros positivos, una matriz de $m \times n$ (léase "m por n") es un arreglo rectangular

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \cdots & \text{Columna } n \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Renglón 1} \\ \text{Renglón 2} \\ \text{Renglón 3} \\ \vdots \\ \text{Renglón } m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

en el que cada **elemento**, a_{ij}, de la matriz es un número. Una matriz de $m \times n$ tiene m renglones y n columnas. Por lo general, las matrices se denotan con letras mayúsculas.

El elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna se denota con la notación de *doble subíndice* a_{ij}. Por ejemplo, a_{23} se refiera al elemento del segundo renglón, tercera columna. Se dice que una matriz que tiene m renglones y n columnas es de **orden** $m \times n$. Si $m = n$, la matriz es **cuadrada** de orden $m \times m$ (o $n \times n$). Para una matriz cuadrada, los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ son los de la **diagonal principal**.

Ejemplo 1 Orden de matrices

Determine el orden de cada matriz.

a. $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

a. Esta matriz tiene *un* renglón y *una* columna; su orden es 1×1.

b. Esta matriz tiene *un* renglón y *cuatro* columnas; su orden es 1×4.

c. Esta matriz tiene *dos* renglones y *dos* columnas; su orden es 2×2.

d. Esta matriz tiene *tres* renglones y *dos* columnas; su orden es 3×2.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Una matriz que tiene sólo un renglón se denomina **matriz renglón**; una matriz que tiene sólo una columna recibe el nombre de **matriz columna.**

Una matriz derivada de un sistema de ecuaciones lineales (cada una escrita en forma estándar con el término constante a la derecha) es la **matriz aumentada** del sistema. Además, la matriz derivada de los coeficientes del sistema (pero que no incluye los términos constantes) es la **matriz de coeficientes** del sistema.

Tip de estudio

Los puntos verticales en una matriz aumentada separan los coeficientes del sistema lineal de los términos constantes.

Sistema:
$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x \qquad - 4z = 6 \end{cases}$$

Matriz aumentada:
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right]$$

Matriz de coeficientes:
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Observe el uso del 0 para el coeficiente faltante de la variable y en la tercera ecuación y también observe la cuarta columna de términos constantes en la matriz aumentada.

Cuando forme ya sea la matriz de coeficientes o la matriz aumentada de un sistema, debe empezar por alinear verticalmente las variables de las ecuaciones y usar ceros para los coeficientes de las variables faltantes.

Ejemplo 2 Escribir una matriz aumentada

Escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + 3y - w = 9 \\ -y + 4z + 2w = -2 \\ x - 5z - 6w = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$$

¿Cuál es el orden de la matriz aumentada?

Solución

Empiece por reescribir el sistema lineal y alinear las variables.

$$\begin{cases} x + 3y \qquad\quad - w = 9 \\ \qquad -y + 4z + 2w = -2 \\ x \qquad\quad - 5z - 6w = 0 \\ 2x + 4y - 3z \qquad\quad = 4 \end{cases}$$

A continuación, use los coeficientes y términos constantes como entradas de la matriz. Incluya ceros para los coeficientes de las variables faltantes.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

La matriz aumentada tiene cuatro renglones y cinco columnas, de modo que es una matriz de 4×5. La notación R_n se usa para designar cada renglón de la matriz. Por ejemplo, el renglón 1 está representado por R_1.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Operaciones elementales de renglones

En la sección 7.3 estudiamos tres operaciones que se pueden usar en un sistema de ecuaciones lineales para producir un sistema equivalente.

1. Intercambiar dos ecuaciones.

2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.

3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

En terminología de matrices, estas tres operaciones corresponden a **operaciones elementales de renglones**. Una operación elemental de renglón, en una matriz aumentada de un sistema determinado de ecuaciones lineales, produce una nueva matriz aumentada correspondiente a un nuevo (pero equivalente) sistema de ecuaciones lineales. Dos matrices son **equivalentes por renglones** si una se puede obtener de la otra por una sucesión de operaciones elementales de renglón.

Operaciones elementales de renglón

1. Intercambiar dos renglones.

2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.

3. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Aunque las operaciones elementales de renglón son fáciles de realizar, suponen buena cantidad de aritmética. Como es fácil cometer un error, se debe tener el hábito de observar las operaciones elementales de renglón realizadas en cada paso, de modo que se pueda regresar y revisar el trabajo.

Ejemplo 3 Operaciones elementales de renglón

a. Intercambiar los renglones primero y segundo de la matriz original.

Matriz original

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz por renglones equivalente

$$\begin{array}{r} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Multiplicar por $\frac{1}{2}$ el primer renglón de la matriz original.

Matriz original

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz por renglones equivalente

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}R_1 \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Sumar -2 veces el primer renglón de la matriz original al tercer renglón.

Matriz original

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz por renglones equivalente

$$\begin{array}{r} \\ \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

Observe que la operación elemental de renglón se escribe junto al renglón que está *cambiado*.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas pueden realizar operaciones elementales de renglón de matrices. Consulte las secuencias de tecleo específicas en la guía del usuario de su calculadora.

Una vez realizada una operación de renglón, la nueva matriz equivalente aparece en la pantalla de la calculadora de gráficas en la variable *answer* (respuesta). Usted debe usar la variable *answer* y no la matriz original para subsiguientes operaciones de renglón.

En el ejemplo 3 de la sección 7.3 usamos eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver un sistema de ecuaciones lineales. El siguiente ejemplo demuestra la versión matricial de la eliminación gaussiana; los dos métodos son iguales en esencia y la diferencia básica es que con matrices no es necesario seguir escribiendo las variables.

ATENCIÓN

Es frecuente cometer errores aritméticos al hacer operaciones elementales de renglón. Observe la operación realizada en cada paso para regresar y revisar el trabajo.

Ejemplo 4 Comparar sistemas lineales y operaciones con matrices

Sistema lineal

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

Matriz aumentada asociada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 9 \\ -1 & 3 & 0 & \vdots & -4 \\ 2 & -5 & 5 & \vdots & 17 \end{bmatrix}$$

Sume la primera ecuación a la segunda.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

Sume el primer renglón al segundo $(R_1 + R_2)$.

$$\begin{array}{r} \\ R_1 + R_2 \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 2 & -5 & 5 & \vdots & 17 \end{bmatrix}$$

Sume -2 veces la primera ecuación a la tercera.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

Sume -2 veces el primer renglón al tercero $(-2R_1 + R_3)$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

Sume la segunda ecuación a la tercera.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Sume el segundo renglón al tercero $(R_2 + R_3)$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_2 + R_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplique la tercera ecuación por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Multiplique el tercer renglón por $\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{2}R_3)$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}R_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

En este punto, se puede usar sustitución hacia atrás para hallar x y y.

$$y + 3(2) = 5 \qquad \text{Sustituir 2 por } z.$$

$$y = -1 \qquad \text{Despejar } y.$$

$$x - 2(-1) + 3(2) = 9 \qquad \text{Sustituir } -1 \text{ por } y \text{ y 2 por } z.$$

$$x = 1 \qquad \text{Despejar } x.$$

La solución es $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Tip de estudio

Recuerde que se debe verificar una solución sustituyendo los valores de x, y y z en cada una de las ecuaciones del sistema original. Por ejemplo, se puede comprobar la solución del ejemplo 4 como sigue.

Ecuación 1:
$1 - 2(-1) + 3(2) = 9$ ✓

Ecuación 2:
$-1 + 3(-1) = -4$ ✓

Ecuación 3:
$2(1) - 5(-1) + 5(2) = 17$ ✓

Se dice que la última matriz del Ejemplo 4 está en **forma escalonada por renglones**. El término *escalonada* se refiere al escalón formado por los elementos diferentes de cero de la matriz. Para estar en esta forma, una matriz debe tener las siguientes propiedades.

Forma escalonada por renglones y forma escalonada por renglones reducida

Una matriz en **forma escalonada por renglones** tiene las siguientes propiedades.

1. Cualesquier renglones formados enteramente de ceros se presentan en la parte inferior de la matriz.
2. Por cada renglón que no esté formado enteramente de ceros, la primera entrada diferente de cero es 1 (llamado **1 inicial**).
3. Para dos renglones sucesivos (diferentes de cero), el 1 inicial del reglón más alto está más a la izquierda que el 1 inicial del renglón más bajo.

Una matriz en *forma escalonada por renglones* está en **forma escalonada por renglones reducida** si toda columna que tenga un 1 inicial tiene ceros en toda posición arriba y abajo del 1 inicial.

Merece la pena observar que la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Esto es, dos sucesiones diferentes de operaciones elementales de renglón pueden dar diferentes formas escalonadas por renglones, pero la forma escalonada por renglones reducida de una matriz determinada es única.

Ejemplo 5 Forma escalonada por renglones

Determine si cada matriz está en forma escalonada por renglones. Si lo está, determine si la matriz está en forma escalonada por renglones reducida.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

Las matrices en (a), (c), (d) y (f) están en forma escalonada por renglones. Las matrices en (d) y (f) están en forma escalonada por renglones *reducida* porque toda columna que tiene un 1 inicial tiene ceros en toda posición arriba y debajo de su 1 inicial. La matriz en (b) no está en forma escalonada por renglones porque un renglón formado de ceros no se presenta en la parte inferior. La matriz en (e) no está en forma escalonada por renglones porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 2 no es un 1 inicial.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Toda matriz es equivalente por renglones a una matriz en forma escalonada por renglones. Por citar un caso, en el Ejemplo 5 se puede cambiar la matriz del inciso (e) a la forma escalonada por renglones multiplicado por $\frac{1}{2}$ su segundo renglón.

Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

La eliminación gaussina con sustitución hacia atrás funciona bien para resolver sistemas de ecuaciones lineales manualmente o con computadora. Para este algoritmo, es importante el orden en el que se ejecuten las operaciones elementales de renglón. Se debe trabajar de izquierda a derecha por columnas, usando operaciones elementales de renglón para obtener ceros en todas las entradas directamente debajo de los números 1 iniciales.

Ejemplo 6 Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} y + z - 2w = -3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 4y + z - 3w = -2 \\ x - 4y - 7z - w = -19 \end{cases}.$$

Solución

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{array}\right]$$

Escribir la matriz aumentada.

$$\begin{array}{r} R_2 \\ R_1 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{array}\right]$$

Intercambie R_1 y R_2 de modo que la primera columna tenga un 1 inicial en la esquina superior izquierda.

$$\begin{array}{r} \\ \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow \\ -R_1 + R_4 \rightarrow \end{array}\left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & \vdots & -21 \end{array}\right]$$

Ejecute operaciones en R_3 y R_4 de modo que la primera columna tenga ceros debajo de su 1 inicial.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ 6R_2 + R_4 \rightarrow \end{array}\left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -39 \end{array}\right]$$

Ejecute operaciones en R_4 de modo que la segunda columna tenga ceros debajo de su 1 inicial.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{3}R_3 \rightarrow \\ -\frac{1}{13}R_4 \rightarrow \end{array}\left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{array}\right]$$

Realice operaciones en R_3 y R_4 de modo que la tercera y cuarta columnas tengan números 1 iniciales.

La matriz está ahora en forma escalonada por renglones y el sistema correspondiente es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + z - 2w = -3 \\ z - w = -2 \\ w = 3 \end{cases}.$$

Usando sustitución hacia atrás, se puede determinar que la solución es $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ y $w = 3$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

El procedimiento para usar eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás se resume a continuación.

Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Use operaciones elementales de renglón para reescribir la matriz aumentada en forma escalonada por renglones.
3. Escriba el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz en forma escalonada por renglones, y use sustitución hacia atrás para hallar la solución.

Cuando resuelva un sistema de ecuaciones lineales, recuerde que es posible que no tenga solución. Si, en el proceso de eliminación, obtiene usted un renglón todo de ceros excepto para el último elemento, no es necesario continuar. Simplemente se puede concluir que el sistema no tiene solución, o que es *inconsistente*.

Ejemplo 7 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x \phantom{{}-3y} + z = 6 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$.

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & -3 & 5 & \vdots & 4 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$ Escribir la matriz aumentada

$$\begin{array}{r} \\ -R_1 + R_2 \rightarrow \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow \\ -3R_1 + R_4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -4 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -11 \end{bmatrix}$$ Realizar operaciones de renglón

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_2 + R_3 \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -11 \end{bmatrix}$$ Realizar operaciones de renglón

Nótese que el tercer renglón de esta matriz está formado enteramente por ceros, excepto para la última entrada. Esto significa que el sistema original de ecuaciones lineales es inconsistente. Se puede ver por qué esto es cierto al convertir de nuevo a un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y - z = 2 \\ 0 = -2 \\ 5y - 7z = -11 \end{cases}$$

Como la tercera ecuación no es posible, el sistema no tiene solución.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 81.

Eliminación de Gauss-Jordan

Con la eliminación gaussiana se aplican operaciones elementales de renglón a una matriz para obtener una forma escalonada por renglones (equivalente de renglón) de la matriz. Un segundo método de eliminación, llamado **eliminación de Gauss-Jordan**, en honor a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan (1842-1899), continúa el proceso de reducción hasta obtener una forma escalonada por renglones *reducida*. Este procedimiento se demuestra en el Ejemplo 8.

TECNOLOGÍA

Para una demostración de un planteamiento gráfico de la eliminación de Gauss-Jordan en una matriz de 2×3, vea el programa de visualización de operaciones de renglones, disponible para varios modelos de calculadoras de gráficas, en el sitio web para este texto en *academic.cengage.com*.

Ejemplo 8 Eliminación de Gauss-Jordan

Use eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4. \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$

Solución

En el Ejemplo 4 se utilizó eliminación gaussiana para obtener la forma escalonada por renglones del sistema lineal citado líneas antes.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora, aplique operaciones elementales de renglón hasta obtener ceros arriba de cada uno de los 1 iniciales, como sigue.

$$\begin{array}{r} 2R_2 + R_1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & \vdots & 19 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Realizar operaciones en R_1 de modo que la segunda columna tenga un cero arriba de su 1 inicial.

$$\begin{array}{r} -9R_3 + R_1 \rightarrow \\ -3R_3 + R_2 \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Realizar operaciones en R_1 y R_2 de modo que la tercera columna tenga ceros arriba de su 1 inicial.

Esta matriz está ahora reducida a forma escalonada por renglones. Convirtiendo de nuevo a un sistema de ecuaciones lineales, tenemos

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \\ z = 2 \end{cases}$$

Ahora se puede simplemente leer la solución, $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$, que se puede escribir como la terna ordenada $(1, -1, 2)$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Tip de estudio

La ventaja de usar eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales es que la solución del sistema se encuentra fácilmente sin usar sustitución hacia atrás, como se ilustra en el Ejemplo 8.

Los procedimientos de eliminación descritos en esta sección a veces resultan en coeficientes fraccionarios. Por ejemplo, en el procedimiento de eliminación para el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y + 5z = 17 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \\ -3x + 3y = -6 \end{cases}$$

uno puede estar inclinado a multiplicar el primer renglón por $\frac{1}{2}$ para producir un 1 inicial, lo cual resulta en trabajar con coeficientes fraccionarios. A veces se pueden evitar fracciones si se selecciona juiciosamente el orden en el que se aplican operaciones elementales de renglones.

Recuerde del Capítulo 7 que cuando hay menos ecuaciones que variables en un sistema de ecuaciones, entonces éste no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 9 Un sistema con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 0 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & \vdots & 0 \\ 3 & 5 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 5 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3R_1 + R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$-R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2R_2 + R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

El correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 5z = 2 \\ y - 3z = -1 \end{cases}.$$

Despejando x y y en términos de z, tenemos

$$x = -5z + 2 \qquad \text{y} \qquad y = 3z - 1.$$

Para escribir una solución del sistema que no use ninguna de las tres variables del sistema, con a represente cualquier número real y sea

$$z = a.$$

A continuación sustituya a por z en las ecuaciones para x y y.

$$x = -5z + 2 = -5a + 2$$

$$y = 3z - 1 = 3a - 1$$

Entonces, el conjunto solución se puede escribir como una terna ordenada con la forma

$$(-5a + 2, 3a - 1, a)$$

donde a es cualquier número real. Recuerde que un conjunto solución de esta forma representa un número infinito de soluciones. Trate de sustituir valores para a para obtener algunas de ellas. A continuación verifique cada una de las soluciones en el sistema original de ecuaciones.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 79.

Tip de estudio

En el Ejemplo 9, x y y se despejan en términos de la tercera variable, z. Para escribir una solución del sistema que no use ninguna de las tres variables del sistema, con a represente cualquier número real y sea $z = a$. Entonces despeje x y y. La solución se puede escribir en términos de a, que no es una de las variables del sistema.

8.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un arreglo rectangular de números reales que se puede usar para resolver un sistema de ecuaciones lineales se denomina ________.
2. Una matriz es ________ si el número de renglones es igual al número de columnas.
3. Para una matriz cuadrada, los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ son los ________ de la ________.
4. Una matriz con sólo un renglón se llama matriz ________ y una con sólo una columna se llama matriz ________.
5. La matriz derivada de un sistema de ecuaciones lineales se llama matriz ________ del sistema.
6. La matriz derivada de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales se llama matriz ________ del sistema.
7. Dos matrices se llaman ________ si una de ellas se puede obtener de la otra por una sucesión de operaciones elementales de renglón.
8. Una matriz en forma escalonada por renglones está en ________ ________ ________ si toda columna que tenga un 1 inicial tiene ceros en toda posición arriba y abajo de su 1 inicial.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, determine el orden de la matriz.

9. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 \\ 36 \\ 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -3 & 7 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 33 & 45 \\ -9 & 20 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -7 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 15-20, escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones lineales.

15. $\begin{cases} 4x - 3y = -5 \\ -x + 3y = 12 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 7x + 4y = 22 \\ 5x - 9y = 15 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 10y - 2z = 2 \\ 5x - 3y + 4z = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x - 8y + 5z = 8 \\ -7x - 15z = -38 \\ 3x - y + 8z = 20 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 7x - 5y + z = 13 \\ 19x - 8z = 10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x + 2y - 3z = 20 \\ -25y + 11z = -5 \end{cases}$

En los Ejercicios 21-26, escriba el sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada. (Use variables x, y, z y w, si es aplicable.)

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 2 & -3 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 7 & -5 & \vdots & 0 \\ 8 & 3 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & \vdots & -12 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 7 \\ 6 & 3 & 0 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 & \vdots & 18 \\ -11 & 0 & 6 & \vdots & 25 \\ 3 & 8 & 0 & \vdots & -29 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ -2 & 18 & 5 & 2 & \vdots & 10 \\ 1 & 7 & -8 & 0 & \vdots & -4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & \vdots & -10 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & -5 & \vdots & -25 \\ -1 & 0 & 7 & 3 & \vdots & 7 \\ 4 & -1 & -10 & 6 & \vdots & 23 \\ 0 & 8 & 1 & -11 & \vdots & -21 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 27-34, llene los espacios en blanco usando operaciones elementales de renglón para formar una matriz equivalente de renglones.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & \square & -1 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & \square & \frac{8}{3} \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \square & -1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 18 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \square \\ 18 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \square & \square \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \square \\ 0 & 0 & 1 & \square \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & \square & \square \\ 0 & 3 & \square & \square \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 3 & \square & \square \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & \square & \square & \square \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & \square & -7 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \square & \square \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 35-38, identifique la(s) operación(es) elementales de renglón que se realizan para obtener la nueva matriz equivalente de renglón.

	Matriz original	*Nueva matriz equivalente por renglones*
35.	$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$
36.	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$
37.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -27 & 27 \end{bmatrix}$
38.	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 & -11 \\ 0 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

39. Realice la secuencia de operaciones de renglón en la matriz. ¿Qué llevaron a cabo las operaciones?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Sume -2 veces R_1 a R_2.
(b) Sume -3 veces R_1 a R_3.
(c) Sume -1 veces R_2 a R_3.
(d) Multiplique R_2 por $-\frac{1}{5}$.
(e) Sume -2 veces R_2 a R_1.

40. Realice la secuencia de operaciones en la matriz. ¿Qué llevaron a cabo las operaciones?

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Sume R_3 a R_4.
(b) Intercambie R_1 y R_4.
(c) Sume 3 veces R_1 a R_3.
(d) Sume -7 veces R_1 a R_4.
(e) Multiplique R_2 por $\frac{1}{2}$.
(f) Sume los múltiplos apropiados de R_2 a R_1, R_3 y R_4.

En los Ejercicios 41-44, determine si la matriz está en forma escalonada por renglones. Si así es, determine si también está en forma escalonada por renglones reducida.

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **42.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **44.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 45-48, escriba la matriz en forma escalonada por renglones. (Recuerde que la forma escalonada por renglones de una matriz no es única.)

45. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & -10 \\ 3 & 6 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ **46.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -5 & 14 \\ -2 & -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 8 & 18 & 0 \end{bmatrix}$ **48.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -7 \\ -3 & 10 & 1 & 23 \\ 4 & -10 & 2 & -24 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 49-54, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para escribir la matriz en forma escalonada por renglones *reducida*.

49. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ **50.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 15 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & -9 \\ -2 & -4 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & 11 & -14 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 8 & -10 & -30 \end{bmatrix}$

53. $\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **54.** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 10 & -32 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 55-58, escriba el sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada. A continuación, use sustitución hacia atrás para resolver. (Use variables *x*, *y* y *z*, si es aplicable.)

55. $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$ **56.** $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

57. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$ **58.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 59-62, una matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones lineales (con variables x, y y z, si es aplicable) ha sido reducido usando eliminación de Gauss-Jordan. Escriba la solución representada por la matriz aumentada.

59. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$ **60.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix}$

61. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$ **62.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 63-84, use matrices para resolver el sistema de ecuaciones (si es posible). Use eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás o eliminación de Gauss-Jordan.

63. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ **64.** $\begin{cases} 2x + 6y = 16 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

65. $\begin{cases} 3x - 2y = -27 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$ **66.** $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - 4y = -34 \end{cases}$

67. $\begin{cases} -2x + 6y = -22 \\ x + 2y = -9 \end{cases}$ **68.** $\begin{cases} 5x - 5y = -5 \\ -2x - 3y = 7 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 8x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ **70.** $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$ **72.** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 24 \\ 2y - z = 14 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases}$

73. $\begin{cases} -x + y - z = -14 \\ 2x - y + z = 21 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$ **74.** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ x - 3y + z = -28 \\ -x + y = 14 \end{cases}$

75. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -28 \\ 4y + 2z = 0 \\ -x + y - z = -5 \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 15 \\ -x + y + 2z = -10 \\ x - y - 4z = 14 \end{cases}$

77. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ **78.** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

79. $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 7y + 6z = 26 \end{cases}$ **80.** $\begin{cases} x + y + 4z = 5 \\ 2x + y - z = 9 \end{cases}$

81. $\begin{cases} -x + y = -22 \\ 3x + 4y = 4 \\ 4x - 8y = 32 \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 6 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 3x + 2y - z + w = 0 \\ x - y + 4z + 2w = 25 \\ -2x + y + 2z - w = 2 \\ x + y + z + w = 6 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x - 4y + 3z - 2w = 9 \\ 3x - 2y + z - 4w = -13 \\ -4x + 3y - 2z + w = -4 \\ -2x + y - 4z + 3w = -10 \end{cases}$

En los Ejercicios 85-90, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para reducir la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones, y resuelva el sistema.

85. $\begin{cases} 3x + 3y + 12z = 6 \\ x + y + 4z = 2 \\ 2x + 5y + 20z = 10 \\ -x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$ **86.** $\begin{cases} 2x + 10y + 2z = 6 \\ x + 5y + 2z = 6 \\ x + 5y + z = 3 \\ -3x - 15y - 3z = -9 \end{cases}$

87. $\begin{cases} 2x + y - z + 2w = -6 \\ 3x + 4y + w = 1 \\ x + 5y + 2z + 6w = -3 \\ 5x + 2y - z - w = 3 \end{cases}$

88. $\begin{cases} x + 2y + 2z + 4w = 11 \\ 3x + 6y + 5z + 12w = 30 \\ x + 3y - 3z + 2w = -5 \\ 6x - y - z + w = -9 \end{cases}$

89. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y + z - 2w = 0 \\ 3x + 5y + z = 0 \end{cases}$

90. $\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 0 \\ x - y + w = 0 \\ y - z + 2w = 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 91-94, determine si los dos sistemas de ecuaciones lineales dan la misma solución. Si es así, encuéntrela usando matrices.

91. (a) $\begin{cases} x - 2y + z = -6 \\ y - 5z = 16 \\ z = -3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ y + 3z = -8 \\ z = -3 \end{cases}$

92. (a) $\begin{cases} x - 3y + 4z = -11 \\ y - z = -4 \\ z = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 4y = -11 \\ y + 3z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

93. (a) $\begin{cases} x - 4y + 5z = 27 \\ y - 7z = -54 \\ z = 8 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 6y + z = 15 \\ y + 5z = 42 \\ z = 8 \end{cases}$

94. (a) $\begin{cases} x + 3y - z = 19 \\ y + 6z = -18 \\ z = -4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y + 3z = -15 \\ y - 2z = 14 \\ z = -4 \end{cases}$

En los Ejercicios 95-98, use un sistema de ecuaciones para hallar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaga las ecuaciones. Resuelva el sistema usando matrices.

95. $f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = -5$

96. $f(1) = 2, f(2) = 9, f(3) = 20$

97. $f(-2) = -15, f(-1) = 7, f(1) = -3$

98. $f(-2) = -3, f(1) = -3, f(2) = -11$

En los Ejercicios 99-102, use un sistema de ecuaciones para hallar la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga las ecuaciones. Resuelva el sistema usando matrices.

99. $f(-1) = -5$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 11$

100. $f(-1) = 4$, $f(1) = 4$, $f(2) = 16$, $f(3) = 44$

101. $f(-2) = -7$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -4$, $f(2) = -7$

102. $f(-2) = -17$, $f(-1) = -5$, $f(1) = 1$, $f(2) = 7$

103. Use el sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ x + 5y + 5z = 1 \\ 2x + 6y + 3z = 8 \end{cases}$$

para escribir dos matrices diferentes en forma escalonada por renglones que den la misma solución.

104. RED ELÉCTRICA Las corrientes en una red eléctrica están dadas por la solución del sistema

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 3I_1 + 4I_2 = 18 \\ I_2 + 3I_3 = 6 \end{cases}$$

donde I_1, I_2 e I_3 se miden en amperes. Resuelva el sistema de ecuaciones usando matrices.

105. FRACCIONES PARCIALES Use un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Resuelva el sistema usando matrices.

$$\frac{4x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

106. FRACCIONES PARCIALES Use un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Resuelva el sistema usando matrices.

$$\frac{8x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

107. FINANZAS Una pequeña fábrica de calzado solicitó en préstamo $1 500 000 para expandir su línea de calzado. Parte del dinero se pidió al 7%, parte al 8% y parte al 10%. Use un sistema de ecuaciones para determinar cuánto fue solicitado en préstamo a cada una de las tasas, si el interés anual fue de $130 500 y la cantidad obtenida en préstamo al 10% fue 4 veces la obtenida al 7%. Resuelva el sistema usando matrices.

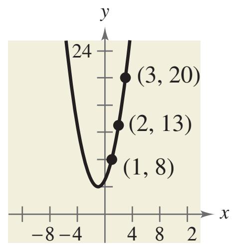
108. FINANZAS Una pequeña corporación fabricante de software solicitó en préstamo $500 000 para expandir su línea de programas. Parte del dinero se pidió al 9%, parte al 10% y parte al 12%. Use un sistema de ecuaciones para determinar cuánto fue solicitado en préstamo a cada una de las tasas, si el interés anual fue de $52 000 y la cantidad obtenida en préstamo al 10% fue $2\frac{1}{2}$ veces la cantidad obtenida al 9%. Resuelva el sistema usando matrices.

109. PROPINAS Un empleado de restaurante examina la cantidad de dinero ganada en propinas después de trabajar un turno de 8 horas. El empleado tiene un total de $95 en billetes de denominaciones de $1, $5, $10 y $20. El número total de billetes es de 26. El número de billetes de $5 es 4 veces el número de billetes de $10 y el número de billetes de $1 es 1 menos que el doble del número de billetes de $5. Escriba un sistema de ecuaciones lineales para representar la situación. A continuación, use matrices para hallar el número de cada denominación.

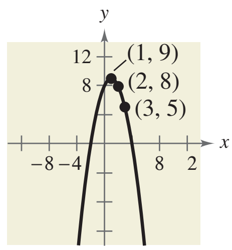
110. BANCA Una cajera de un banco está contando la cantidad total de dinero en cada cajón de dinero al final de un turno. Hay un total de $2600 en billetes de denominaciones de $1, $5, $10 y $20. El número total de billetes es 235. El número de billetes de $20 es el doble de los de $1 y el número de billetes de $5 es 10 más que el número de billetes de $1. Escriba un sistema de ecuaciones lineales que represente la situación. A continuación, use matrices para hallar el número de cada denominación.

En los Ejercicios 111 y 112, use un sistema de ecuaciones para hallar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por los puntos. Resuelva el sistema usando matrices. Use una calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

111.



112.

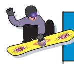


113. MODELAJE MATEMÁTICO Un vídeo de la trayectoria de una pelota lanzada por un jugador de béisbol es analizado con una cuadrícula que cubre la pantalla del monitor. La cinta fue sometida a pausa tres veces y la posición de la pelota se midió en cada una de ellas. Las coordenadas obtenidas se muestran en la tabla. (x y y se midieron en pies.)

Distancia horizontal, x	Altura, y
0	5.0
15	9.6
30	12.4

(a) Use un sistema de ecuaciones para hallar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los tres puntos. Resuelva el sistema usando matrices.
(b) Use calculadora de gráficas para graficar la parábola.
(c) Gráficamente, aproxime la altura máxima de la pelota y el punto en el que ésta toca el suelo.
(d) Analíticamente, encuentre la altura máxima de la pelota y el punto en el que toca el suelo.
(e) Compare sus resultados de los incisos (c) y (d).

114. ANÁLISIS DE DATOS: PATINADORES EN NIEVE La tabla siguiente muestra el número y de personas (en millones), en Estados Unidos, que participaron en patinaje sobre nieve en años seleccionados de 2003 a 2007. (Fuente: National Sporting Goods Association)

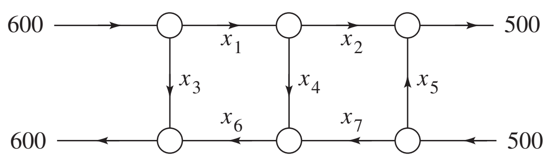


Año	Número, y
2003	6.3
2005	6.0
2007	5.1

(a) Use un sistema de ecuaciones para hallar la ecuación de la parábola $y = at^2 + bt + c$ que pasa por los tres puntos. Con t represente el año, con $t = 3$ correspondiente a 2003. Resuelva el sistema usando matrices.
(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola.
(c) Use la ecuación del inciso (a) para estimar el número de personas que participaron en pruebas de patinaje sobre nieve en 2009. ¿La respuesta le parece razonable? Explique.
(d) ¿Piensa usted que la ecuación se puede usar para los años mucho después de 2007? Explique.

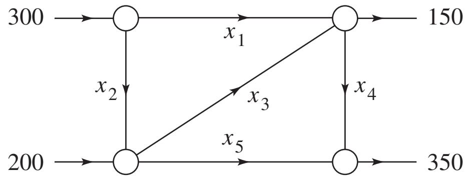
ANÁLISIS DE REDES **En los Ejercicios 115 y 116, conteste las preguntas acerca de la red especificada. (En una red se supone que la corriente total que entra en cada unión es igual a la corriente total que sale de ella.)**

115. El agua que entra en una red de tubos (en miles de metros cúbicos por hora) se muestra en la figura.



(a) Resuelva este sistema usando matrices para el caudal de agua representado por x_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$.
(b) Encuentre el patrón de caudal de agua cuando $x_6 = 0$ y $x_7 = 0$.
(c) Encuentre el patrón de caudal de agua cuando $x_5 = 400$ y $x_6 = 500$.

116. El flujo de tráfico (en vehículos por hora) que pasa por una red de calles se muestra en la figura.



(a) Resuelva este sistema usando matrices para el flujo de tráfico representado por x_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$.
(b) Encuentre el flujo de tráfico cuando $x_2 = 200$ y $x_3 = 50$.
(c) Encuentre el flujo de tráfico cuando $x_2 = 150$ y $x_3 = 0$.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 117 y 118, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

117. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz de 4×2.

118. El método de eliminación gaussiana reduce una matriz hasta obtener una forma escalonada por renglones reducida.

119. PIÉNSELO La matriz aumentada siguiente representa el sistema de ecuaciones lineales (con variables x, y y z) que se ha reducido usando eliminación de Gauss-Jordan. Escriba un sistema de ecuaciones con coeficientes diferentes de cero que esté representado por la matriz reducida. (Hay numerosas respuestas correctas.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

120. PIÉNSELO
(a) Describa la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada que corresponda a un sistema de ecuaciones lineales que sea inconsistente.
(b) Describa la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada que corresponda a un sistema de ecuaciones lineales que tenga un número infinito de soluciones.

121. Describa las tres operaciones elementales de renglones que puedan efectuarse en una matriz aumentada.

122. TOQUE FINAL Verbalmente, describa la diferencia entre una matriz en forma escalonada por renglones y una matriz en forma escalonada por renglones reducida. Incluya un ejemplo de cada una para apoyar su explicación.

123. ¿Cuál es la relación entre las tres operaciones elementales de renglones realizadas en una matriz aumentada, y las operaciones que llevan a sistemas equivalentes de ecuaciones?