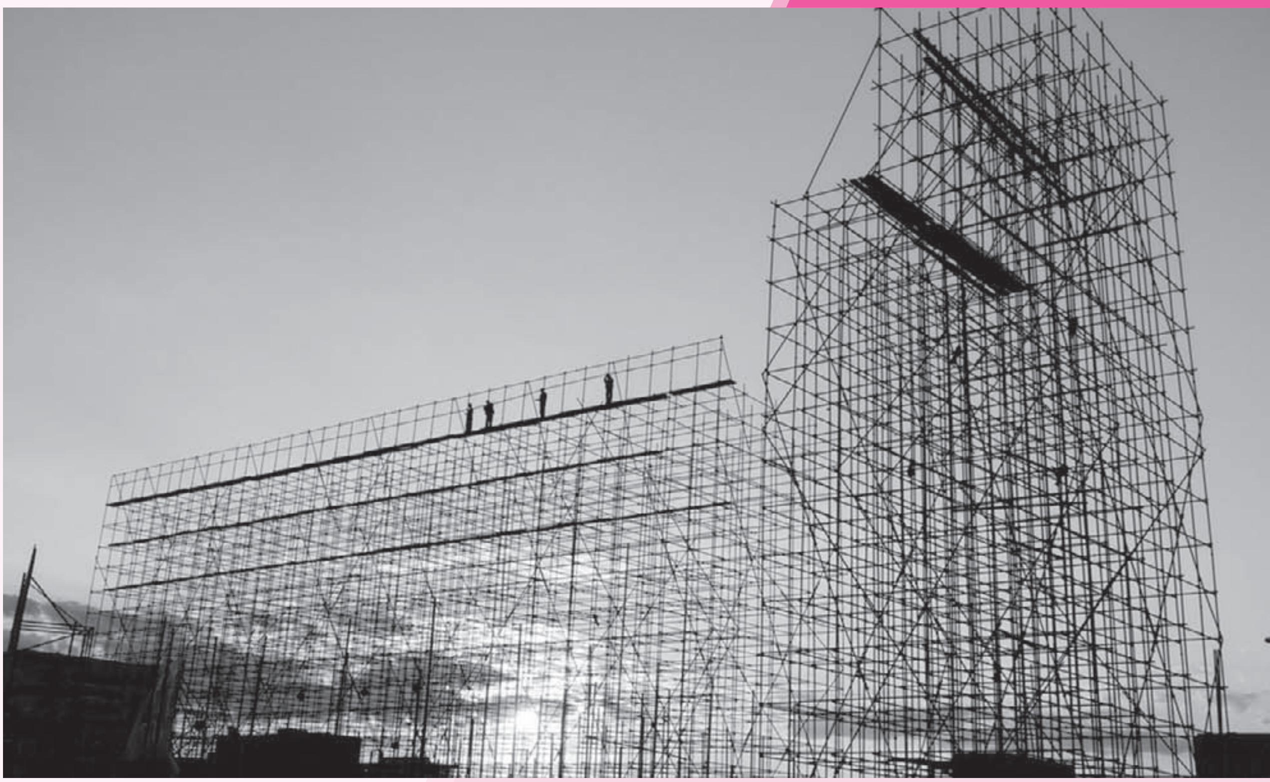
Contenido

Capítulo

1

Sistemas de ecuaciones lineales



▲ En ingeniería civil, al diseñar y analizar estructuras se resuelven sistemas de ecuaciones que describen los esfuerzos que tendrá que soportar la construcción.

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Recordará algunos conceptos asociados con rectas en el plano y un método de solución de ecuaciones algebraicas simultáneas con dos variables (sección 1.1).
- Estudiará el método de la reducción gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas, junto con términos que se usarán a lo largo del texto (sección 1.2).
- Se familiarizará con el programa Matlab, a fin de resolver problemas relacionados con sistemas de ecuaciones (sección 1.3).
- Aprenderá los sistemas homogéneos y las características de su solución (sección 1.4).

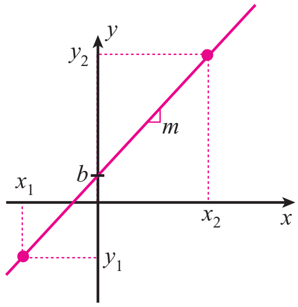


Figura 1.1
Descripción de una recta.

Este libro trata del álgebra lineal. Al buscar la palabra "lineal" en el diccionario se encuentra, entre otras definiciones, la siguiente: lineal: (del lat. *linealis*). **1.** adj. Perteneciente o relativo a la línea.[1] Sin embargo, en matemáticas la palabra "lineal" tiene un significado mucho más amplio. Una gran parte de la teoría de álgebra lineal elemental es, de hecho, una generalización de las propiedades de la línea recta. A manera de repaso se mencionan algunas propiedades fundamentales sobre las líneas rectas:

i) La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

ii) Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es **indefinida**.[2]

iii) Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir con su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen (el valor de y en el punto en el que la recta cruza el eje y).

iv) Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

v) Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$, $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente la pendiente m, como $m = -a/b$.

vi) Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$ y L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = -1/m_1$.

vii) Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero.

viii) Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

En la siguiente sección se ilustrará la relación que existe entre resolver sistemas de ecuaciones y encontrar los puntos de intersección entre pares de rectas.

1.1 Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Nota

De forma breve también suele referirse al sistema (1.1.1) como un sistema de 2×2.

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Cualquier par de números reales (x, y) que satisface el sistema (1.1.1) se denomina como **solución**. Las preguntas que surgen en forma natural son: ¿tiene este sistema varias soluciones y, de ser así, cuántas? Se responderán estas preguntas después de ver algunos ejemplos, en los cuales se usarán propiedades importantes del álgebra elemental:

Propiedad A Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
Propiedad B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.

La propiedad A establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. La propiedad B establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una

[1] *Diccionario de la Lengua Española*, vigesimasegunda edición, Real Academia Española. Madrid: Espasa Calpe, 2001.
[2] Indefinida o infinita, como también se le denomina en otros libros.

constante se obtiene una segunda ecuación válida. Los casos más interesantes de la propiedad B se presentan cuando $c \neq 0$, ya que aunque la ecuación $0 = 0$ es correcta, no es muy útil.

EJEMPLO 1.1.1 Sistema con una solución única

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 5x + 2y &= 12 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por la propiedad A, la siguiente ecuación: $8x = 16$ (es decir, $x = 2$). Entonces, si se despeja de la segunda ecuación, $2y = 12 - 5x = 12 - 10 = 2$, entonces $y = 1$. Así, el par (2, 1) satisface el sistema (1.1.2) y la forma en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace. Es decir, el sistema (1.1.2) tiene una **solución única**.

Solución única

EJEMPLO 1.1.2 Sistema con un número infinito de soluciones

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 14 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Se puede ver que estas dos ecuaciones son equivalentes. Esto es, cualesquiera dos números, x y y, que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, y viceversa. Para comprobar esto se multiplica la primera ecuación por 2, esto está permitido por la propiedad B. Al ser ambas ecuaciones equivalentes, lo único que podemos hacer es despejar una incógnita en términos de cualquiera otra de las dos ecuaciones. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$. Así, el par $(x, x - 7)$ es una solución al sistema (1.1.3) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (1.1.3) tiene un **número infinito de soluciones**. Para este ejemplo, los siguientes pares son soluciones: (7, 0), (0, −7), (8, 1), (1, −6), (3, −4) y (−2, −9).

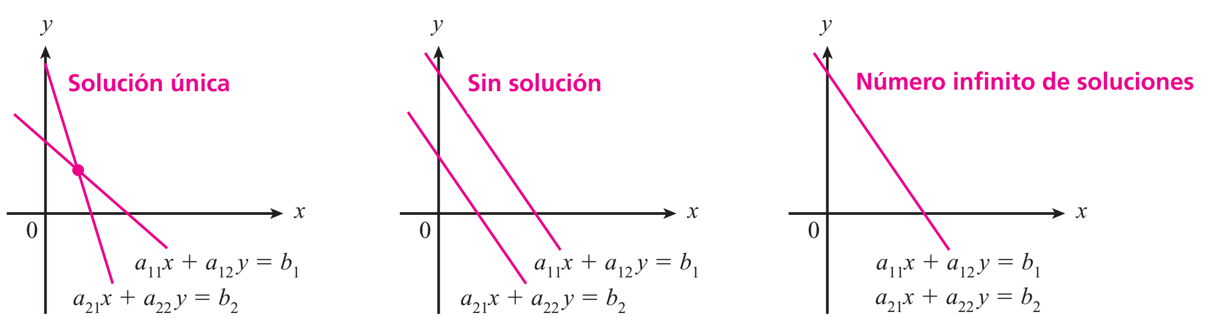
Número infinito de soluciones

EJEMPLO 1.1.3 Sistema sin solución

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 (que de nuevo está permitido por la propiedad B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación. Por lo tanto, el sistema (1.1.4) **no tiene solución**.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Figura 1.2

Dos rectas se intersecan en un punto, en ninguno o (si coinciden) en un número infinito de puntos.

Sistema inconsistente

Un sistema que no tiene solución se dice que es **inconsistente**.

Geométricamente es fácil explicar lo que sucede en los ejemplos anteriores. Primero, se repite que ambas ecuaciones del sistema (1.1.1) son de líneas rectas. Una solución a (1.1.1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas. Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersecan en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se intersecan (es decir, no tienen puntos en común) o son la misma recta (esto es, tienen un número infinito de puntos en común). En el ejemplo 1.1.1 las rectas tienen pendientes de $\frac{3}{2}$ y $-\frac{5}{2}$, respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un solo punto en común (2, 1). En el ejemplo 1.1.2, las rectas son paralelas (tienen pendiente 1) y coincidentes. En el ejemplo 1.1.3, las rectas son paralelas y distintas. Estas relaciones se ilustran en la figura 1.2.

Ahora se procederá a resolver el sistema (1.1.1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Se deben analizar los siguientes casos:

Caso I Si $a_{12} = a_{22} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es x.

Caso II Si $a_{11} = a_{21} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es y.

Caso III Si $a_{12} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_1}{a_{11}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Caso IV Si $a_{22} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_2}{a_{21}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Caso V Si $a_{11} = 0$ y $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_1}{a_{12}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar x.

Caso VI Si $a_{21} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_2}{a_{22}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar x.

El último caso necesita un desarrollo más detallado, de modo que consideremos que todos los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son diferentes a cero.

Si se multiplica la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

Sistemas equivalentes

Antes de continuar observe que los sistemas (1.1.1) y (1.1.5) son **equivalentes**. Esto quiere decir que cualquier solución del sistema (1.1.1) es una solución del sistema (1.1.5) y viceversa. Ello se concluye directamente de la propiedad B, suponiendo que la constante c sea diferente de cero. Después, si en (1.1.5) se resta la segunda ecuación de la primera, se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

Observe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1.1.1) para despejar y, y así se habrá encontrado la solución única del sistema.

Se ha demostrado lo siguiente:

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces el sistema (1.1.1) tiene una **solución única**.

¿Cómo se relaciona esta afirmación con lo que se analizó anteriormente? En el sistema (1.1.1) se puede ver que la pendiente de la primera recta es $-\frac{a_{11}}{a_{12}}$ y que la pendiente de la segunda es $-\frac{a_{21}}{a_{22}}$. En los problemas 41, 42 y 43 se pide al lector que demuestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ si y sólo si las rectas son paralelas (es decir, tienen la misma pendiente). De esta manera se sabe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, las rectas no son paralelas y el sistema tiene una solución única.

Lo que se acaba de analizar puede formularse en un teorema. En secciones posteriores de este capítulo y los siguientes se harán generalizaciones de este teorema, y se hará referencia a él como el "teorema de resumen" conforme se avance en el tema. Una vez que se hayan demostrado todas sus partes, se podrá estudiar una relación asombrosa entre varios conceptos importantes de álgebra lineal.

T **Teorema 1.1.1** Teorema de resumen (punto de vista 1)

El sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i) Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii) No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas se estudian en la sección 1.2 y se verá que siempre ocurre lo mismo con respecto a su solución, es decir, que no tienen solución, o que tienen una solución única o un número infinito de soluciones.

A **Autoevaluación 1.1**

I) De las siguientes afirmaciones con respecto a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, ¿cuál de ellas no es verdadera?

a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
b) Su gráfica consiste en el (los) punto(s) de intersección de las gráficas de las ecuaciones.
c) Su gráfica es la abscisa de las gráficas de las ecuaciones.
d) Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

II) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales?

a) No existe una solución.
b) La gráfica del sistema está sobre el eje y.
c) La gráfica de la solución es una recta.
d) La gráfica de la solución es el punto de intersección de dos líneas.

III) ¿Cuál de las aseveraciones que siguen es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$3x - 2y = 8$$
$$4x + y = 7$$

a) El sistema es inconsistente.
b) La solución es $(-1, 2)$.
c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.
d) Las ecuaciones son equivalentes.

IV) De las siguientes ecuaciones que se presentan, ¿cuál de ellas es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$ *b*) $6x - 3y = -15$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ *d*) $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

V) ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas?

a) $3x - 2y = 7$
$4y = 6x - 14$

b) $x - 2y = 7$
$3x = 4 + 6y$

c) $2x + 3y = 7$
$3x - 2y = 6$

d) $5x + y = 1$
$7y = 3x$

Respuestas a la autoevaluación

I) *c*) **II)** *a*) **III)** *c*) **IV)** *a*) **V)** *b*)

Problemas 1.1

En los problemas 1 a 18 encuentre las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas dados. En cada caso calcule el valor de $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

1. $x + y = 3$
$x + 2y = -8$

2. $2x + 3y = 3$
$-2x - 3y = -3$

3. $4x + 5y = 0$
$-2x - y = 3$

4. $-2x = 1$
$4x - 3y = 0$

5. $7x + 3y = 0$
$-5x + 10y = 0$

6. $3x - 7y = -5$
$4x - 3y = -2$

7. $7x + 4y = 1$
$-7x - 4y = -3$

8. $7x + 4y = 0$
$-7x - 4y = 0$

9. $-13x + 3y = 7$
$5x + 22y = 9$

10. $9x - 3y = -3$
$-2x + 4y = 1$

11. $-2x + 3y = 3$
$2x - 3y = -3$

12. $x + 2y = 5$
$3x + 4y = 6$

13. $y = -3$
$-2x + 4y = 8$

14. $-7x + 2y = -9$
$2y = -6$

15. $-5x + 7y = 3$
$\quad -4x = -8$

16. $ax + by = c$
$ax - by = c$

17. $ax + by = c$
$bx + ay = c$

18. $ax - by = c$
$bx + ay = d$

19. Encuentre las condiciones sobre a y b tales que el sistema en el problema 16 tenga una solución única.

20. Encuentre las condiciones sobre a, b y c tales que el sistema en el problema 17 tenga un número infinito de soluciones.

21. Encuentre las condiciones sobre a, b, c y d tales que el sistema en el problema 18 no tenga solución.

En los problemas 22 a 28 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

22. $-x + 2y = 1; \quad 3x - 5y = 1$

23. $-4x + 2y = 1; \quad 4x - 2y = 1$

24. $-4x + 2y = -1; \quad 4x - 2y = 1$

25. $7x - 3y = -3; \quad -9x + 5y = -2$

26. $-2y - 3x = 7; \quad -9y + 5y = -2$

27. $\pi x + y = 0; \quad \sqrt{2}x - 5y = -1$

28. $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 1; \quad \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 0$

Sea L una recta y $L_\perp$ la recta perpendicular L que pasa a través de un punto P. La **distancia** de la recta L al punto P se define como la distancia* entre P y el punto de intersección de L y $L_\perp$ (ver figura 1.2).

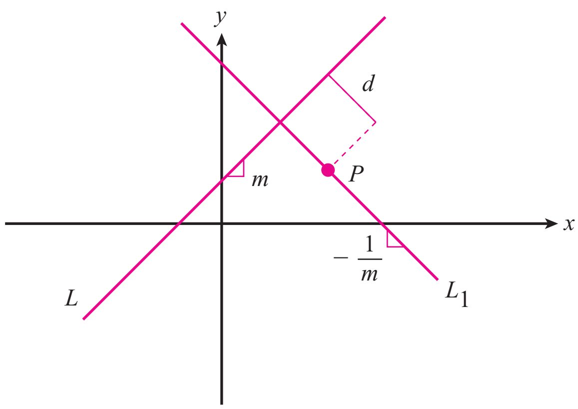


Figura 1.3
Distancia de la recta L al punto P.

En los problemas 29 a 34 encuentre la distancia entre la recta dada y el punto.

29. $2x - 3y = 4; \quad (-7, -2)$

30. $-5x + 6y = 2; \quad (1, 3)$

31. $2x - 4y = -42; \quad (7, -21)$

32. $7x + 5y = 6; \quad (0, 0)$

33. $3x + 7y = 0; \quad (-2, -8)$

34. $11x - 12y = 5; \quad (0, 4)$

35. Encuentre la distancia entre la recta $2x - y = 6$ y el punto de intersección de las rectas $3x - 2y = 1$ y $6x + 3y = 32$.

* Recuerde que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano xy, entonces la distancia d entre ellos está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

36. Encuentre la distancia entre la recta paralela a $-3x + 4y = -5$ y que pasa por el punto $(-1, -1)$, y el punto de intersección de las rectas $-7x + 2y = 4$ y $2x - 8y = -1$.

***37.** Pruebe que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $ax + by = c$ está dada por

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

38. Suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Demuestre que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones (1.1.1) son paralelas. Suponga que $a_{11} \neq 0$ o $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ o $a_{22} \neq 0$.

39. Si existe una solución única al sistema (1.1.1), muestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

40. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ demuestre que el sistema (1.1.1) tiene una solución única.

41. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y bestias viven en él?

42. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? [***Sugerencia:*** 1 cuarto = 32 onzas, 1 galón = 4 cuartos.]

43. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material para una taza cuesta ¢25 y el material para un plato cuesta ¢20. Si se asignan $44 diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente $44 en materiales?

44. Conteste la pregunta del problema 43 si los materiales para una taza y un plato cuestan ¢15 y ¢10, respectivamente, y se gastan $24 en 8 horas de trabajo.

45. Conteste la pregunta del problema 44 si se gastan $25 en 8 horas de trabajo.

1.2 *m* ecuaciones con *n* incógnitas: eliminación de Gauss-Jordan y gaussiana

En esta sección se describe un método para encontrar todas las soluciones (si es que existen) de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Al hacerlo se verá que, igual que en el caso de 2×2, estos sistemas o bien no tienen solución, tienen una solución única o tienen un número infinito de soluciones. Antes de llegar al método general se verán algunos ejemplos sencillos. Como variables, se usarán x_1, x_2, x_3, etc., en lugar de x, y, z, . . . porque la generalización es más sencilla si se usa la notación con subíndices.

EJEMPLO 1.2.1 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: solución única

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Solución En este caso se buscan tres números x_1, x_2, x_3, tales que las tres ecuaciones en (1.2.1) se satisfagan. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 1.1, de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.2}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \qquad \textbf{(1.2.2}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.2}\boldsymbol{c}\textbf{)}$$

Como se vio en la sección 1.1, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación equivalente. Esta nueva ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que se usaron para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (1.2.2) multiplicando ambos lados de la ecuación (1.2.2*a*) por -4 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación (1.2.2*b*). Esto da

$$\begin{array}{rcl} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 &=& -36 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &=& 24 \\ \hline -3x_2 - 6x_3 &=& -12 \end{array}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva ecuación (1.2.2*b*) y el sistema ahora es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Nota

Como se puede ver por el desarrollo anterior, se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

Entonces, la ecuación (1.2.2*a*) se multiplica por -3 y se suma a la ecuación (1.2.2*c*), lo que da por resultado:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.3}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$-3x_2 - 6x_3 = -12 \qquad \textbf{(1.2.3}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \qquad \textbf{(1.2.3}\boldsymbol{c}\textbf{)}$$

Observe que en el sistema (1.2.3) se ha eliminado la variable x_1 de las ecuaciones (1.2.3*b*) y (1.2.3*c*). Después se divide la ecuación (1.2.3*b*) por -3:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.4}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.4}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \qquad \textbf{(1.2.4}\boldsymbol{c}\textbf{)}$$

Se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por -2 y se suma a la ecuación (1.2.4*a*); después se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por 5 y se suma a la ecuación (1.2.4*c*):

$$x_1 - x_3 = 1 \qquad \textbf{(1.2.5}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.5}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

$$x_3 = -3 \qquad \textbf{(1.2.5}\boldsymbol{c}\textbf{)}$$

Ahora se multiplica la ecuación (1.2.5*c*) por -1:

$$x_1 - x_3 = 1 \qquad \textbf{(1.2.6}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.6}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

$$x_3 = 3 \qquad \textbf{(1.2.6}\boldsymbol{c}\textbf{)}$$

Por último, se suma la ecuación (1.2.6c) a la ecuación (1.2.6a) y después se multiplica la ecuación (1.2.6c) por -2 y se suma a la ecuación (1.2.6b) para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1.2.1):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \qquad\quad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma (4, -2, 3). El método que se usó se conoce como **eliminación de Gauss-Jordan**.[3]

Eliminación de Gauss-Jordan

Antes de seguir con otro ejemplo es conveniente resumir lo que se hizo en éste:

i) Se dividió la primera ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x_1 igual a 1.

ii) Se "eliminaron" los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se eliminaba.

iii) Se dividió la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para "eliminar" los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

iv) Se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para "eliminar" los términos de x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

Cabe resaltar el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas equivalentes. Es decir, cada sistema tenía el mismo conjunto de soluciones que el precedente. Esto es una consecuencia de las propiedades A y B de la página 2.

Matriz

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones es conveniente introducir una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento mediante el concepto de **matriz**. Una matriz es un arreglo rectangular de números y éstas se estudiarán con gran detalle al inicio de la sección 2.1. Por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 en el sistema (1.2.1) se pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada **matriz de coeficientes** del sistema:

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.2.7)}$$

Matriz de $m \times n$

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una **matriz de $m \times n$**. El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". El estudio de matrices constituye gran parte de los capítulos restantes de este libro. Por la conveniencia de su notación para la resolución de sistemas de ecuaciones, las presentamos aquí.

Matriz aumentada

Al usar la notación matricial, el sistema (1.2.1) se puede escribir como la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \qquad \textbf{(1.2.8)}$$

[3] Recibe este nombre en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y del ingeniero alemán Wilhelm Jordan (1844-1899). Vea la semblanza bibliográfica de Gauss en la página 21. Jordan fue un experto en investigación geodésica tomando en cuenta la curvatura de la Tierra. Su trabajo sobre la solución de sistemas de ecuaciones apareció en 1888 en su libro *Handbuch der Vermessungskunde* (Manual de geodesia).

Ahora es posible introducir cierta terminología. Se ha visto que multiplicar (o dividir) los dos lados de una ecuación por un número diferente de cero da por resultado una nueva ecuación equivalente. Más aún, si se suma un múltiplo de una ecuación a otra del sistema se obtiene otra ecuación equivalente. Por último, si se intercambian dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones se obtiene un sistema equivalente. Estas tres operaciones, cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, se denominan **operaciones elementales por renglones**.

Operaciones elementales por renglones

Operaciones elementales por renglones

Las tres operaciones elementales por renglones aplicadas a la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones son:

Operaciones elementales por renglones

i) Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii) Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

Reducción por renglones

Notación

1. $R_i \to cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.
3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".
4. $A \to B$ indica que las matrices aumentadas A y B son **equivalentes**; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

Matrices aumentadas equivalentes

En el ejemplo 1.2.1 se vio que al usar las operaciones elementales por renglones i) y ii) varias veces, se puede obtener un sistema cuyas soluciones estén dadas en forma explícita. Ahora se repiten los pasos del ejemplo 1.2.1 usando la notación que se acaba de introducir:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

EJEMPLO 1.2.2 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: número infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1.2.1, esto es, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 2 & 7 & 12 & | & 30 \end{pmatrix}$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 2 & 7 & 12 & | & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2 y x_3, y por lo tanto existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige a x_3 como parámetro y se despejan a x_1 y x_2 en términos de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución (1, 4, 0). Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución (11, −16, 10), y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

EJEMPLO 1.2.3 Sistema inconsistente

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Solución La matriz aumentada para este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

El elemento 1,1 de la matriz no se puede hacer 1 como antes porque al multiplicar 0 por cualquier número real el resultado es 0. En su lugar se puede usar la operación elemental por renglones iii) intercambiar dos renglones, para obtener un número distinto a cero en la posición 1,1. Se puede intercambiar el renglón 1 con cualquiera de los otros dos; sin embargo, al intercambiar los renglones 1 y 3 queda un 1 en esa posición. Al hacerlo se obtiene lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Es necesario detenerse aquí porque, como se ve, las últimas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} -2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

lo cual es imposible (si $-2x_2 - 3x_3 = -5$, entonces $2x_2 + 3x_3 = 5$, no 4), por lo que no existe alguna solución. Se puede proceder como en los últimos dos ejemplos para obtener una forma más estándar:

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora la última ecuación es $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo cual también es imposible ya que $0 \neq -1$. Así, el sistema (1.2.9) no tiene solución. En este caso se dice que el sistema es **inconsistente**.

Definición 1.2.1

Sistemas inconsistentes y consistentes

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución. Se dice que un sistema que tiene al menos una solución es **consistente**.

Se analizarán de nuevo estos tres ejemplos. En el ejemplo 1.2.1 se comenzó con la matriz de coeficientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En el proceso de reducción por renglones, A_1 se "redujo" a la matriz

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 1.2.2 se comenzó con

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 1.2.3 se comenzó con

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices R_1, R_2, R_3 se denominan **formas escalonadas reducidas por renglones** de las matrices A_1, A_2 y A_3, respectivamente. En general, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.2

Forma escalonada reducida por renglones y pivote

Una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Nota

La condición iii) se puede reescribir como "el pivote en cualquier renglón está a la derecha del pivote del renglón anterior".

EJEMPLO 1.2.4 **Cinco matrices en la forma escalonada reducida por renglones**

Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **iv)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices i) y ii) tienen tres pivotes; las otras tres matrices tienen dos pivotes.

Definición 1.2.3

Forma escalonada por renglones

Una matriz está en la forma escalonada por renglones si se cumplen las condiciones i), ii) y iii) de la definición 1.2.2.

EJEMPLO 1.2.5 Cinco matrices en la forma escalonada por renglones

Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

$$\text{i)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \text{ii)}\begin{pmatrix}1&-1&6&4\\0&1&2&-8\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{iii)}\begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&0&1&2\end{pmatrix}\qquad \text{iv)}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\qquad \text{v)}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

En el siguiente ejemplo se muestra cómo dos matrices en forma escalonada por renglones son equivalentes entre sí. Sean

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&1&3&6\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\0&1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B.$$

Esto significa que cualquier matriz que sea equivalente por renglones a la matriz A también lo es a la matriz B.

Como se vio en los ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, existe una fuerte relación entre la forma escalonada reducida por renglones y la existencia de la solución única para el sistema. En el ejemplo 1.2.1 dicha forma para la matriz de coeficientes (es decir, en las primeras tres columnas de la matriz aumentada) tenían un 1 en cada renglón y existía una solución única. En los ejemplos 1.2.2 y 1.2.3 la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes tenía un renglón de ceros y el sistema no tenía solución o tenía un número infinito de soluciones. Esto siempre es cierto en cualquier sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Pero antes de estudiar el caso general se analizará la utilidad de la forma escalonada por renglones de una matriz. Es posible resolver el sistema en el ejemplo 1.2.1 reduciendo la matriz de coeficientes a esta forma.

Nota

Por lo general, la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Es decir, una matriz puede ser equivalente, en sus renglones, a más de una matriz en forma escalonada por renglones.

Observación 1

La diferencia entre estas dos formas debe ser evidente a partir de los ejemplos. En la forma escalonada por renglones, todos los números abajo del primer 1 en un renglón son cero. En la forma escalonada reducida por renglones, todos los números abajo y arriba del primer 1 de un renglón son cero. Así, la forma escalonada reducida por renglones es más exclusiva. Esto es, en toda matriz en forma escalonada reducida por renglones se encuentra también la forma escalonada por renglones, pero el inverso no es cierto.

Observación 2

Siempre se puede reducir una matriz a la forma escalonada reducida por renglones o a la forma escalonada por renglones realizando operaciones elementales por renglones. Esta reducción se vio al obtener la forma escalonada reducida por renglones en los ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3.

EJEMPLO 1.2.6 Solución de un sistema mediante eliminación gaussiana

Resuelva el sistema del ejemplo 1.2.1 reduciendo la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones.

Solución

Se comienza como antes:

$$\left(\begin{array}{rrr|r}2&4&6&18\\4&5&6&24\\3&1&-2&4\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&3&9\\4&5&6&24\\3&1&-2&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Hasta aquí, este proceso es idéntico al anterior; pero ahora sólo se hace cero el número (-5) que está debajo del primer 1 en el segundo renglón:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Sustitución hacia atrás

Eliminación gaussiana

La matriz aumentada del sistema (y los coeficientes de la matriz) se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la **sustitución hacia atrás** para despejar primero x_2 y después x_1. La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ o $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución $(4, -2, 3)$. El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**.

Se cuenta con dos métodos para resolver los ejemplos de sistemas de ecuaciones:

i) Eliminación de Gauss-Jordan
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento descrito en la página 10.

ii) Eliminación gaussiana
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

¿Cuál método es más útil? Depende; al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales por renglones. De hecho, como se verá en el apéndice C, para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la eliminación de Gauss-Jordan se requieren aproximadamente $\frac{n^3}{2}$ sumas y multiplicaciones, mientras que la eliminación gaussiana requiere sólo $\frac{n^3}{3}$ sumas y multiplicaciones. La solución numérica de los sistemas de ecuaciones se estudiará en el apéndice D. Por otro lado, a veces es esencial obtener la forma escalonada reducida por renglones de una matriz (una de éstas se estudia en la sección 2.4). En estos casos la eliminación de Gauss-Jordan es el método preferido.

Ahora estudiaremos la solución de un sistema general de m ecuaciones con n incógnitas. La mayor parte de las soluciones de los sistemas se hará mediante la eliminación de Gauss-Jordan debido a que en la sección 2.4 esto se necesitará. Debe tenerse en mente, sin embargo, que la eliminación gaussiana suele ser un enfoque más conveniente.

El sistema general $m \times n$ (de m ecuaciones con n incógnitas) está dado por

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.2.10}$$

En el sistema (1.2.10) todos los coeficientes a_{ij} y b_i son números reales dados. El problema es encontrar todos los conjuntos de n números, denotados por $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, que satisfacen cada una de las m ecuaciones en (1.2.10). El número a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la i-ésima ecuación.

Es posible resolver un sistema de m ecuaciones con n incógnitas haciendo uso de la eliminación de Gauss-Jordan o gaussiana. En seguida se proporciona un ejemplo en el que el número de ecuaciones e incógnitas es diferente.

EJEMPLO 1.2.7 Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada y reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$.

Al resolver muchos sistemas, es evidente que los cálculos se vuelven fastidiosos. Un buen método práctico es usar una calculadora o computadora siempre que las fracciones se compliquen. Debe hacerse notar, sin embargo, que si los cálculos se llevan a cabo en una computadora o calculadora pueden introducirse errores de “redondeo”. Este problema se analiza en el apéndice C.

EJEMPLO 1.2.8 Un problema de administración de recursos

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento A, 20 000 unidades del alimento B y 55 000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Si utilizamos la información del problema, se observa que x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades del alimento A, x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades del alimento A y x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$ unidades del alimento A. Entonces,

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25\,000$ = suministro total por semana de alimento A. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

Utilizando reducción de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nota

El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3 001 enteros en el intervalo [5 000, 8 000]. (Por ejemplo, no puede haber 5 237.578 peces.)

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5\,000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 &\leq x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

Análisis de insumo y producto (opcional)

Los siguientes dos ejemplos muestran la forma en la cual pueden surgir los sistemas de ecuaciones en el modelado económico.

EJEMPLO 1.2.9 El modelo de insumo-producto de Leontief

Modelo de insumo-producto de Leontief

Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief**.[4] Suponga un sistema económico que tiene n industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: la primera, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segunda, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

[4] Así llamado en honor del economista estadounidense Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" en *Review of Economic Statistics* 18(1936). Leontief ganó el Premio Nobel de Economía en 1973 por su desarrollo del análisis de insumo-producto.

Suponga que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la *i*-ésima industria. Suponga que a_{ij} representa la demanda interna que la *j*-ésima industria ejerce sobre la *i*-ésima industria. De forma más concreta, a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria *i* que se necesitan para producir una unidad de la industria *j*. Sea x_1 la producción de la industria *i*. Ahora suponga que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de demandas internas y externas. Por ejemplo, para calcular la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Si la producción de la industria 1 es x_1, entonces $a_{21}x_1$ se trata de la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. De esta forma, la demanda interna total sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$.

Al igualar la demanda total a la producción de cada industria se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad &\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

O bien, reescribiendo el sistema (1.2.11) en la forma del sistema (1.2.10) se obtiene

$$\begin{aligned} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n &= e_n \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

El sistema (1.2.12) de *n* ecuaciones con *n* incógnitas es de fundamental importancia en el análisis económico.

EJEMPLO 1.2.10 El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias

Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Suponga que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda.

Solución En este caso $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$ y el sistema (1.2.12) es

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10 \\ -0.4x_1 + 0.9x_2 - 0.3x_3 &= 25 \\ -0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Si se resuelve el sistema por método de eliminación de Gauss-Jordan en una calculadora o computadora, trabajando con cinco decimales en todos los pasos, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 110.30442 \\ 0 & 1 & 0 & 118.74070 \\ 0 & 0 & 1 & 125.81787 \end{array}\right)$$

Se concluye que la producción necesaria para que la oferta sea (aproximadamente) igual a la demanda es $x_1 = 110$, $x_2 = 119$ y $x_3 = 126$.

La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (opcional)

En la figura 1.2, de la página 3, se observó que se puede representar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante dos líneas rectas. Si las rectas tienen un solo punto de intersección, el sistema tiene una solución única; si coinciden, existe un número infinito de soluciones; si son paralelas, no existe una solución y el sistema es inconsistente.

Algo similar ocurre cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas.

Como se verá en la sección 4.5, la gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ en el espacio de tres dimensiones es un plano.

Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} ax - by - cz &= d \\ ex - fy - gz &= h \\ jx - ky - lz &= m \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.13)}$$

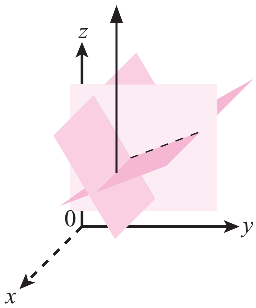


Figura 1.4
Los tres planos se intersecan en un solo punto.

en donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l$ y m son constantes y al menos una de ellas en cada ecuación es diferente de cero.

Cada ecuación en (1.2.13) es la ecuación de un plano. *Cada* solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe ser un punto en *cada uno* de los tres planos. Existen seis posibilidades:

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto. Por lo que existe una solución única para el sistema (vea la figura 1.4).
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta, por lo que cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 1.5).
3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 1.6).
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos, por lo que ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 1.7).
6. Dos de los planos coinciden en una recta L. El tercer plano es paralelo a L (y no contiene a L), de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros. No existe una solución y el sistema es inconsistente (vea la figura 1.8).

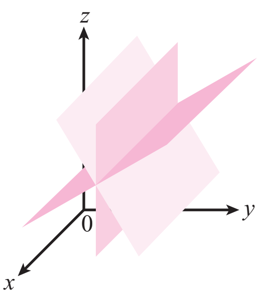


Figura 1.5
Los tres planos se intersecan en la misma recta.

En todos los casos el sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o es inconsistente. Debido a la dificultad que representa dibujar planos con exactitud, no ahondaremos más en el tema. No obstante, es útil analizar cómo las ideas en el plano xy se pueden extender a espacios más complejos.

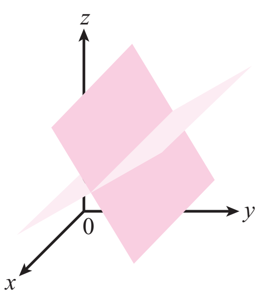


Figura 1.6
Dos planos se intersecan en una recta.

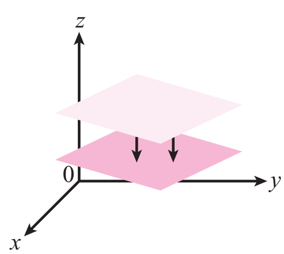


Figura 1.7
Los planos paralelos no tienen puntos en común.

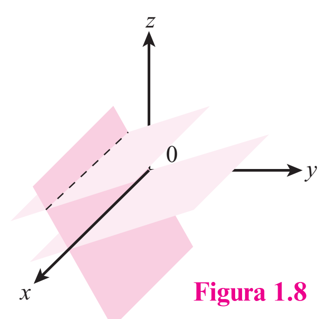


Figura 1.8
El plano 3 es paralelo a L, la recta de intersección de los planos 1 y 2.

Semblanza de...

Carl Friedrich Gauss
(Library of Congress)

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Carl Friedrich Gauss es considerado el matemático más grande del siglo XIX, además de uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos (Arquímedes y Newton son los otros dos).

Gauss nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Su padre, un obrero amante del trabajo, era excepcionalmente obstinado y no creía en la educación formal, e hizo todo lo que pudo para evitar que Gauss fuera a una buena escuela. Por fortuna para Carl (y para las matemáticas), su madre, a pesar de que tampoco contaba con educación, apoyó a su hijo en sus estudios y se mostró orgullosa de sus logros hasta el día de su muerte a la edad de 97 años.

Gauss era un niño prodigio. A los tres años encontró un error en la libreta de cuentas de su padre. Hay una anécdota famosa de Carl, cuando tenía apenas 10 años de edad y asistía a la escuela local de Brunswick. El profesor solía asignar tareas para mantener ocupados a los alumnos y un día les pidió que sumaran los números del 1 al 100. Casi al instante, Carl colocó su pizarra boca abajo con la palabra "listo". Después, el profesor descubrió que Gauss era el único con la respuesta correcta, 5 050. Gauss había observado que los números se podían arreglar en 50 pares que sumaban cada uno 101 ($1 + 100$, $2 + 99$, etc.) y $50 \times 101 = 5\,050$. Años más tarde, Gauss bromeaba diciendo que podía sumar más rápido de lo que podía hablar.

A la edad de 15 años, el Duque de Brunswick se fijó en él y lo convirtió en su protegido. El duque lo ayudó a ingresar en el Brunswick College en 1795 y, tres años después, a entrar a la Universidad de Göttingen. Indeciso entre las carreras de matemáticas y filosofía, Gauss eligió las matemáticas después de dos descubrimientos asombrosos. Primero inventó el método de mínimos cuadrados una década antes de que Legendre publicara sus resultados. Segundo, un mes antes de cumplir 19 años, resolvió un problema cuya solución se había buscado durante más de dos mil años: Gauss demostró cómo construir, con tan sólo una regla y un compás, un polígono regular cuyo número de lados no es múltiplo de 2, 3 o 5.*

El 30 de marzo de 1796, fecha de este descubrimiento, comenzó un diario que contenía como primera nota las reglas de construcción de un polígono regular de 17 lados. El diario, que contiene los enunciados de 146 resultados en sólo 19 páginas, es unos de los documentos más importantes en la historia de las matemáticas.

Tras un corto periodo en Göttingen, Gauss fue a la Universidad de Helmstädt y, en 1798, a los 20 años, escribió su famosa disertación doctoral. En ella dio la primera demostración matemática rigurosa del teorema fundamental del álgebra que indica que todo polinomio de grado n tiene, contando multiplicidades, exactamente n raíces. Muchos matemáticos, incluyendo a Euler, Newton y Lagrange, habían intentado probar este resultado.

Gauss hizo un gran número de descubrimientos en física al igual que en matemáticas. Por ejemplo, en 1801 utilizó un nuevo procedimiento para calcular, a partir de unos cuantos datos, la órbita del asteroide Ceres. En 1833 inventó el telégrafo electromagnético junto con su colega Wilhelm Weber (1804-1891). Aunque realizó trabajos brillantes en astronomía y electricidad, la que resultó asombrosa fue la producción matemática de Gauss. Hizo contribuciones fundamentales al álgebra y la geometría y en 1811 descubrió un resultado que llevó a Cauchy a desarrollar la teoría de la variable compleja. En este libro se le encuentra en el método de eliminación de Gauss-Jordan. Los estudiantes de análisis numérico aprenden la cuadratura gaussiana: una técnica de integración numérica.

Gauss fue nombrado catedrático de matemáticas de Göttingen en 1807 e impartió clase hasta su muerte en 1855. Aún después de su muerte, su espíritu matemático siguió acosando a los matemáticos del siglo XIX. Con frecuencia, un importante resultado nuevo ya había sido descubierto por Gauss y se podía encontrar en sus notas inéditas.

En sus escritos matemáticos Gauss era un perfeccionista y tal vez sea el último gran matemático que conocía prácticamente todo acerca de su área. Al afirmar que una catedral no era una catedral hasta que se quitara el último de los andamios, ponía todo su empeño para que cada uno de sus trabajos publicados fuera completo, conciso y elegante. Usaba un sello en el que se veía un árbol con unas cuantas frutas y la leyenda *pauca sed matura* (pocas pero maduras). Gauss creía también que las matemáticas debían reflejar el mundo real. A su muerte, Gauss fue honrado con una medalla conmemorativa que llevaba la inscripción "George V, Rey de Hanover, al príncipe de los matemáticos".

* De manera más general, Gauss probó que un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n es de la forma $n = 2^k p_2 \cdot p_3 \ldots p_m$ donde $k \geq 0$ y las p_i son números primos de Fermat distintos. Los números primos de Fermat son aquellos que toman la forma $2^{2^n} + 1$. Los primeros cinco números primos de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65 537.

Resumen 1.2

- La **matriz de coeficientes** de un sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

  es la matriz (p. 10)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior se puede escribir utilizando la **matriz aumentada** (p. 10)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

  También se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde (p. 87)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Una matriz está en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las cuatro condiciones dadas en la página 14. (p. 14)
- Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se cumplen las primeras tres condiciones de la página 15. (p. 15)
- Un **pivote** es el primer componente diferente de cero en el renglón de una matriz. (p. 14)
- Las tres **operaciones elementales por renglones** son (p. 11)

  1. Multiplicar el renglón i de una matriz por c: $R_i \to cR_i$, donde $c \neq 0$.
  2. Multiplicar el renglón i por c y sumarlo al renglón j: $R_j \to R_j + cR_i$.
  3. Permutar los renglones i y j: $R_i \rightleftarrows R_j$.

- El proceso de aplicación de operaciones elementales con renglones a una matriz se denomina **reducción por renglones**. (p. 11)

- La **eliminación de Gauss-Jordan** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante la reducción por renglones de la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones, usando el proceso descrito en la página 11. (pp. 10, 16)
- La **eliminación gaussiana** es el proceso de resolver un sistema de ecuaciones al reducir por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y utilizando la **sustitución hacia atrás**. (p. 16)
- Un sistema lineal que tiene una o más soluciones se denomina **consistente**. (p. 13)
- Un sistema lineal que no tiene solución se denomina **inconsistente**. (pp. 4, 13)
- Un sistema lineal que tiene soluciones cuenta con, ya sea, una **solución única** o un **número infinito de soluciones**. (p. 3)

AUTOEVALUACIÓN 1.2

I) ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la matriz de coeficientes dada a la derecha?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $3x + 2y = -1$
$y = 5$
$2x = 1$

b) $3x + 2z = 10$
$2x + y = 0$
$-x + 5y + z = 5$

c) $3x = 2$
$2x + y = 0$
$-x + 5y = 1$

d) $3x + 2y - z = -3$
$y + 5z = 15$
$2x + z = 3$

II) ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental por renglones?

a) Reemplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.
b) Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.
c) Intercambiar dos columnas.
d) Reemplazar un renglón con una suma de renglones y una constante diferente de cero.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre la matriz dada?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.
b) No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón 1 no es 1.

c) No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 1 es 3.
d) No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un cero.

IV) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema dado?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

a) Tiene una solución única $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.
b) Es inconsistente.
c) Tiene un número infinito de soluciones.

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *a*) **III)** *c*) **IV)** *b*)

Problemas 1.2

En los problemas del 1 al 27 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones de los sistemas dados.

1.
$$\begin{aligned} 9x_1 + 9x_2 - 7x_3 &= 6 \\ -7x_1 \qquad - x_3 &= -10 \\ 9x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 45 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 9x_2 - 7x_3 &= 2 \\ - x_3 &= -2 \\ -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 \qquad + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} -1x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 \qquad &= -3 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 14x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 14x_2 - 4x_3 - 7x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad &= -2 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 21 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 12 \end{aligned}$$

21. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ -3x_1 + x_4 &= 1 \\ 5x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} -2x_1 + x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -3 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned}$

En los problemas 28 a 39 determine si la matriz dada se encuentra en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

28. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 40 a 48 utilice las operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

40. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -14 & -1 \end{pmatrix}$

49. En el ejemplo 1.2.8 suponga que cada semana se suministran al lago 15 000 unidades del primer alimento, 10 000 del segundo y 44 000 del tercero. Considerando que todo alimento se consume, ¿qué población de las tres especies puede coexistir en el lago? ¿Existe una solución única?

50. En el modelo de insumo-producto de Leontief del ejemplo 1.2.9 suponga que se tienen tres industrias. Más aún, suponga que $e_1 = 10$, $e_2 = 15$, $e_3 = 30$, $a_{11} = \frac{1}{3}$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{13} = \frac{1}{6}$, $a_{21} = \frac{1}{4}$, $a_{22} = \frac{1}{4}$, $a_{23} = \frac{1}{8}$, $a_{31} = \frac{1}{12}$, $a_{32} = \frac{1}{3}$, $a_{33} = \frac{1}{6}$. Encuentre la producción de cada industria tal que la oferta sea igual a la demanda.

51. Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones pertenecen a tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's, y que hace dos días su valor bajó \$350 pero que ayer aumentó \$600. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó \$1 por cada una, mientras que las de Hilton Hotels bajaron \$1.50, pero que el precio de las acciones de McDonald's subió \$0.50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió \$1.50 por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros \$0.50 por acción y las de McDonald's subieron \$1. Demuestre que el corredor no cuenta con la información suficiente para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice tener 200 acciones de McDonald's, el corredor pueda calcular el número de acciones que posee en Delta y en Hilton.

52. Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó \$30 diarios en Inglaterra, \$20 diarios en Francia y \$20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó \$20 diarios en Inglaterra, \$30 diarios en Francia y \$20 diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de \$10 diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de \$340 en hospedaje, \$320 en comida y \$140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

53. Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión, radio y revista, se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de anuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un coste de \$250 000, en radio \$5 000 y en revista \$30 000. En el segundo presupuesto \$310 000, \$4 000 y \$15 000 y en el último presupuesto \$560 000, \$10 000 y \$35 000. Los totales por presupuesto son los siguientes: \$21 795 000, \$31 767 000 y \$61 225 000. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

54. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe, además, un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero sólo 2. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base (es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo o muestre que la información del agente es incorrecta debido a su inconsistencia.

55. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 &= a \\ -6x_1 - 11x_2 - 21x_3 &= b \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= c \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

56. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

***57.** Considere el sistema general de las tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a_{ij} para que el sistema tenga una solución única.

1.4 Sistemas homogéneos de ecuaciones

Sistemas lineales homogéneos y no homogéneos

Un sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales [sistema (1.2.10), página 16] se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots b_m$, son cero; si alguna o algunas de las constantes $b_1, \ldots,$ b_m es o son diferentes de cero, decimos que el sistema lineal es **no homogéneo**. Es decir, el sistema general homogéneo está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Los sistemas homogéneos surgen de diferentes formas. Se estudiará un sistema homogéneo en la sección 5.3. En dicha sección se resolverán algunos sistemas homogéneos, de nueva cuenta, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Como se vio en la sección 1.2, con respecto a las soluciones de los sistemas lineales no homogéneos existen tres posibilidades: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga un número infinito de soluciones. Para el sistema general homogéneo la situación es más sencilla.

Solución trivial o solución cero

Para sistemas generales no homogéneos, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), por lo que sólo se tienen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o existe un número infinito de soluciones además de ésta. Las soluciones distintas a la solución cero se llaman **soluciones no triviales**.

Soluciones no triviales

EJEMPLO 1.4.1 Sistema homogéneo que tiene únicamente la solución trivial

Resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Ésta es la versión homogénea del sistema del ejemplo 1.2.1 en la página 8. Al reducir en forma sucesiva, se obtiene (después de dividir la primera ecuación entre 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial.

EJEMPLO 1.4.2 Un sistema homogéneo con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Al hacer uso de la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz aumentada está en la forma escalonada reducida por renglones, y, como tenemos un reglón de ceros, esto nos indica que existe un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3\right)$. Si, por ejemplo, $x_3 = 0$, se obtiene la solución trivial. Si $x_3 = 1$ se obtiene la solución $\left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right)$. Si $x_3 = 9\pi$ se obtiene la solución $(\pi, 5\pi, 9\pi)$.

EJEMPLO 1.4.3 Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene un número infinito de soluciones

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Solución Al reducir por renglones, utilizando el método de Gauss-Jordan se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right)$$

En esta ocasión tenemos más incógnitas que ecuaciones, por lo que hay un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{-5}{6}x_3, \frac{11}{6}x_3, x_3\right)$.

En términos generales, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo (1.4.1) siempre tendrá un número infinito de soluciones. Para ver esto observe que si sólo tuviera la solución trivial, la reducción por renglones conduciría al sistema

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ \vdots \qquad & \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

y, posiblemente, algunas ecuaciones adicionales de la forma $0 = 0$. Pero este sistema tiene al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Puesto que la reducción por renglones no cambia ni el número de ecuaciones ni el número de incógnitas, se tiene una contradicción en la suposición de que había más incógnitas que ecuaciones. Entonces se tiene el teorema 1.4.1.

T Teorema 1.4.1 Sistemas homogéneos: condición para tener un número infinito de soluciones

El sistema homogéneo (1.4.1) tiene un número infinito de soluciones si $n > m$.

R Resumen 1.4

- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma (p. 38)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial** (o **solución cero**) (p. 38)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homogéneo diferentes de la trivial se denominan **soluciones no triviales**. (p. 38)
- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones ($n > m$). (p. 40)

A AUTOEVALUACIÓN 1.4

I) ¿Cuáles de los siguientes sistemas deben tener soluciones no triviales?

a) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

II) ¿Para qué valores de k tendrá soluciones no triviales el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

a) 1 ***b)*** 2 ***c)*** 3 ***d)*** 4 ***e)*** -3 ***f)*** 0

Respuestas a la autoevaluación

I) *c*) **II)** *e*)

Problemas 1.4

En los problemas 1 a 20 encuentre todas las soluciones a los sistemas homogéneos.

1. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -8x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 7x_2 \qquad\quad + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 \qquad\quad + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + \qquad\quad 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} -2x_1 \qquad\qquad\qquad + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 \qquad\quad - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 12x_2 &= 0 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -7x_1 + 21x_2 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 20x_3 - 8x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_2 - 10x_4 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 9x_2 - 9x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 0 \\ -x_1 - 6x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$

21. Muestre que el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

22. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

***23.** Considere el sistema homogéneo de 3×3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre condiciones sobre los coeficientes a_{ij} tales que la solución trivial sea la única solución.

24. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para qué valores de K el sistema tiene solución única; justifique su solución.

$$\begin{aligned} Kx + y + z &= 1 \\ x + Ky + z &= 1 \\ x + y + Kz &= 1 \end{aligned}$$

25. En el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y - Kz &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ -x + 2z &= K \end{aligned}$$

determine para qué valores de K el sistema:

a) No tiene solución.
b) Tiene un número infinito de soluciones.
c) Tiene solución única.