第二章　数论与组合不等式

§1　含自然数 n 与阶乘 $n!$ 的不等式

一、　关于 n 求和或方幂的不等式

1.　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.　$c = \lim_{n\to\infty}(S_n - \ln n)$ 为 Euler 常数.

我们已知,$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,但$\{S_n\}$发散的速度很慢.例如 $n_0 = 10^6$ 时,$13 < S_{n_0} < 20$,而且当$\{p_k\}$是素数集时,仍有 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \infty$,事实上,对于给定的 n,取素数 $p_1,\cdots,p_m$,使它至少能整除一个不大于 n 的自然数,利用不等式$(1-x)^{-1} \leqslant e^{2x}$　$(0 \leqslant x \leqslant 1/2)$ 推出

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^j}\right) = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} \leqslant \exp\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{2}{p_k}\right). \tag{1.1}$$

(证明见[305]1971,78:272 − 273)

然而,若在 S_n 的表达式中去掉分母中含 9(或 5) 的各项之后,剩下的 $S_n^* < 80$.事实上,设 n 是一个 m 位数,即 $10^{m-1} \leqslant n \leqslant 10^m - 1$.当 S_n^* 中的 k 为 1 位数时,相关的 S_n^* 中留下 8 项,当 k 为 2 位数,即 $k = k_1 \times 10 + k_2$ 时,由于 k_1 不取 0 和 9,k_2 不取 9,所以,S_n^* 中形如$\frac{1}{k_1 \times 10 + k_2}$的项共有 8×9 个,$\cdots$,同理,当 k 是m 位数时,相应的 S_n^* 中留下的项至多还有 $8\times 9^{m-1}$ 项.于是,

$$S_n^* < 8\times 1 < 8\times 9\times\frac{1}{10} + 8\times 9^2\times\frac{1}{10^2} + \cdots + 8\times 9^{m-1}\times\frac{1}{10^{m-1}} < 8\times\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^j = 80.$$

此外,设自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 互不相同且都不能被大于 3 的素数整除,则

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} < 3. \tag{1.2}$$

事实上,S_k 中每项都可写成 $2^{-r}\times 3^{-s}$ 的形式.其中,r,s 为非负整数,取 $t = \max\{r, s\}$,则

$$S_k \leqslant \left(\sum_{j=0}^{t} \frac{1}{2^j}\right)\left(\sum_{j=0}^{s} \frac{1}{3^j}\right) < 2\times\frac{3}{2} = 3.$$

若 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leqslant m$,其中任意两个 n_j 的最小公倍数大于m,则

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} < \frac{7}{6} + \frac{1}{6m} < 2.$$

见[77]65,453 − 455.

我们进一步问：σ_k 的最优上界是什么？

由于 S_n 具有这些奇特的性质，这些性质常常用作各类数学竞赛的试题，例如见[99]5;62－63;[38]P446－451;459－462.另一方面，任何正有理数都可用调和序列 $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，的不同项的有限和来表示，这是因为任何正有理数可以写成既约分数 q/p 的形式，它可表示为调和序列中某项 $1/p$ 的 q 项求和：

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}.$$

右边第一项不动，而将其余 $q-1$ 项作恒等变换：$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$，进一步可把这个恒等式应用于那些重复的加数，如此下去，直到和中所有的项都成为不同为止.

在许多问题中，常常涉及 S_n 的上下界估计，但是，不同的证明方法会得出不同的估计，而同一估计也有多种证法.

(1)　　$\ln(n+1)<S_n<1+\ln(n+1)$.　　(1.3)

(Schlömilch－Lemonnier 不等式(简称为 **SL 不等式**)，见[4]P251).

事实上，利用积分

$$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=\ln n+1-S_n$$

易证　$0<I_n<\frac{1}{2}$，即

$$\frac{1}{2}+\ln n<S_n<1+\ln n.\tag{1.4}$$

1992 年，Alzer,H. 等对(1.3)作了各种不同的加细：令 $x_n=\frac{S_n}{1+\ln n}$，$y_n=\frac{S_{n+1}-S_2}{1+\ln n}$，则 x_n 严格递减收敛于 1，y_n 严格递增收敛于 1，而且 $y_n<1<x_n$.

作者进一步证明：设 $a_k>0$，令 $\sigma_m=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$，$1\leqslant m\leqslant n$，则

$$\ln\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sigma_n}{a_1}\right)\right\}<\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{\sigma_k}<\ln\left(\frac{\sigma_n}{a_1}\right).$$

左边不等式需设 $a_1\geqslant a_k$，$1\leqslant k\leqslant n$. 当 $a_k=1\leqslant k\leqslant n$ 时，就是(1.3)左边的改进.

见[301]1992.168(2):319－328.

(2)　$\frac{n}{n-1}\ln n<S_n<\ln n+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，　(Ivady).　　(1.5)

(3)　$\frac{2}{5}+\ln(n+1)<S_n<\frac{9}{11}+\ln n$(杨必成等，[347]1996，(3):1－8).　(1.6)

(4)　$n\{(n+1)^{\frac{1}{n}}-1\}<S_n<n-(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{n-1}}$.　　(1.7)

$(n>2)$ ([MCU]，见[66]P.447,452)

证　利用 AG 不等式：

$$\frac{n+S_n}{n}=\frac{(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$>\sqrt[n]{(1+1)+(1+\frac{1}{2})+\cdots+(1+\frac{1}{n})}=(n+1)^{1/n};$$

$$\frac{n-S_n}{n-1}=\frac{\sum_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k})}{n-1}>[(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})]^{1/(n-1)}=n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

(5)　$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}<S_n-\ln n-c<\frac{1}{2n}. \tag{1.5}$$

(**Franel 不等式**,见[56]Vol.2.P251)

$$\frac{1}{2n+2/5}<S_n-\ln n-c<\frac{1}{2n+(1/3)}.$$

见[305]1992,99(7):684－685.

实际上利用 Euler-Maclaurin 求和公式,我们可以得到更一般的结果:

$$S_n=\ln n+c+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}-\frac{1}{252n^6}+\cdots-\frac{B_{2(m-1)}}{2(m-1)n^{2(m-1)}}+O(\frac{1}{n^{2m}}), \tag{1.6}$$

式中 B_n 是 Bernoulli 数(定义见第 6 章 §1).(匡继昌,河西学院学报,2002,18(2):1－8)

(6)　$$\frac{1}{24(n+1)^2}<S_n-\ln(n+\frac{1}{2})-c<\frac{1}{24n^2}. \tag{1.7}$$

(Young.R.M,[325]1991,75:187－190.另见[305]1993,100(5):468)

提示:考虑 $x>0$ 时 $f(x)=-(x+1)^{-1}-\ln[x+(1/2)]+\ln[x+(3/2)]$ 的导数.

(7)　设 $a_1,\cdots,a_n$ 是互不相同的自然数,则

$$S_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}. \tag{1.8}$$

(IMO20,[38]p.459－460)(1.8)式有多种证法,如

①　用 Cauchy 不等式:

$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})^2=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right]^2\leqslant(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})\leqslant(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})$.由此得(1.8式).

②　利用第三章排序不等式(N.86),设 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $a_1,\cdots,a_n$ 的重排,使得 $b_1<b_2<\cdots<b_n$.从而有 $b_k\geqslant k$.于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

利用 Abel 变换,可将(1.8)推广为:设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的自然数,则当 $p>0$ 时,有

$$S_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{k^{p+1}}, \tag{1.9}$$

而当 $p>0,q\leqslant0$ 时有

$$\sum_{k=1}^{n}k^{(p+q)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^pb_k^q. \tag{1.10}$$

仅当 $a_k=k$ 时等号成立,见[99]1991,6－9:191－199.

(8)　$\frac{n}{2} < S_{2^n-1} < n$;　　　　(1.11)

(9)　$c < S_m + S_n - S_{mn} \leqslant 1$,　　　　(1.12)

下界 c 还可改进为$\frac{2}{2n-1} - \frac{2}{3(2n-1)^2}$.见[77]P.54.

(10)　$\frac{m}{m+n} \leqslant S_{n+m} - S_n < \frac{m}{n}$.　　　　(1.13)

特别,$m = n$ 时,得$\frac{1}{2} \leqslant S_{2n} - S_n < 1$.它可改进为

$$n(2^{\frac{1}{n+1}} - 1) \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant n(1 - 2^{-\frac{1}{n}});\tag{1.14}$$

利用数学归纳法,可以证明

$$S_{2n} - S_n > \frac{13}{24}(n \geqslant 2).$$

$$S_{n^2} - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

见[38]P.447,[*MCM*].

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2.\tag{1.15}$$

提示:利用AG不等式$\sqrt{(n+1)(3n+1)} \leqslant \frac{1}{2}[(n+1)+(3n+1)]$.将(1.15)式中间式子首尾对应的两项相加,得到

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)(3n+1)} > \frac{2}{2n+1}.$$

(11)　令 $H_n(k) = S_{nk-1} - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \cdots + \frac{1}{nk-1}$.

设 $0 \leqslant a < 1, k > \frac{3+a}{1-a}$,则　$H_n(k) > 1 + a$.(**Kirov 不等式**)　　　　(1.16)

证　利用$\frac{4}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$　$(a,b > 0, a \neq b)$.

$$2H_n(k) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{nk-1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{nk-2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{nk-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$> n(k-1)\frac{4}{n(k+1)-1} > \frac{4(k-1)}{k+1} > 2(1+a).$$(见[4]P.251 - 252.)

注　我们可进一步证明

$$\ln\left(k + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn} < \ln\left(k + \frac{k}{n-1}\right).\tag{1.17}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k.$$

(12)　设 $\alpha > -1$,则

$$\ln\frac{\alpha+n}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+\alpha} < \ln\frac{\alpha+n}{\alpha+1}.\tag{1.18}$$

提示:设 $k - 1 < x < k.k \geqslant 2$,则

$$\frac{1}{\alpha+k} < \int_{k-1}^{k}\frac{dx}{\alpha+x} < \frac{1}{\alpha+k-1}.$$

然后对 k 从 2 到 n 求和.

(13)　设 $p,q,n\in N,p<q$,令

$$S_n(p,q)=\sum_{k=pn+1}^{qn+1}\frac{1}{k},\quad \sigma_n(p,q)=\sum_{k=pn+1}^{qn}\frac{1}{k},$$

Lucic-Djokovic 证明

$$\ln\frac{5}{3}=\lim_{n\to\infty}S_n(3,5)<S_n(3,5)<S_1(3,5)=\frac{37}{60}. \tag{1.19}$$

1969 年 Adamovic-Taskovic 进一步证明:

① $\sigma_n(p,q)$ 关于 n 严格递增,从而对 $n>1$,成立

$$\sigma_1(p,q)<\sigma_n(p,q)<\ln\frac{q}{p}.$$

② 若 $p<q\leqslant\frac{5}{2}p$, $p\neq 2a+1$,或 $q\neq 5a+b,a\geqslant 2,b=1,2$,则 $S_n(p,q)$ 关于 n 递减,而且 $\ln\frac{q}{p}<S_n(p,q)\leqslant S_1(p,q)$;若 $q\geqslant 3p$,则 $S_n(p,q)$ 关于 n 递增,而且,$S_1(p,q)\leqslant S_n(p,q)<\ln\frac{q}{p}$;对于 p,q 的其他值,当 n 充分大时,$S_n(p,q)$ 关于 n 严格递减.但是,对于$\frac{5}{2}p<q<3p$,或 $p=2a+1$,或 $q=5a+b,a\geqslant 2,b=1,2$,猜想 $S_n(p,q)$ 关于 n 也是严格递减的,见[331]1969,247－273:41－50.1989 年王志雄证明了上述猜想.见[345]1989,1:35－36,叶军、杨林证明:当 $p<q\leqslant 3p-1$,时,$S_n(p,q)$ 关于 n 递减,且

$$\ln\frac{q}{p}<S_n(p,q)\leqslant S_1(p,q).$$

上述上、下界都是最佳的,见[36]P183－190.形如　$S_n(p,q;\alpha,\beta)=\sum_{k=p}^{q}\sum_{j=\alpha}^{\beta}\frac{1}{nk+j}$ 的上下界估计见[355],1998,50(1－2):5－10.

(14)　令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$.则对 $1\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$\frac{1}{2k}-\frac{5}{6k^2}+\frac{1}{3(n+1)^2}-\frac{1}{n+1}\leqslant\sigma_n-\sigma_k\leqslant\frac{1}{2k}.$$

提示:$\sigma_n=S_n-\ln(n+1)$ 递增,而 $b_n=S_n-\ln n$ 递减.并注意到

$$\sigma_n-\sigma_k=S_n-S_k+\ln\left(\frac{k+1}{n+1}\right),\ \sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{1}{2j^2}-\frac{1}{3j^2}\right)\leqslant\sigma_n-\sigma_k\leqslant\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{2j^2}.$$

见[327]1978,22:223－232.

2.　设 $\{a_k\}$ 是公差为 $h>0$,首项为 $a_1>0$ 的等差数列.由 Euler-Maclaurin 公式可推出

$$S_n(a_1,h)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{h}\ln\frac{a_n}{a_1}+c_1+\frac{1}{2a_n}-\frac{h}{12a_n^2}+\frac{h^3}{120a_n^4}-\frac{h^5}{252a_n^6}+\cdots$$
$$-\frac{B_{2(m-1)}h^{2m-3}}{2(m-1)a_n^{2(m-1)}}-R_m. \tag{1.20}$$

$$\text{式中 } c_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{1}{h}\ln\frac{a_n}{a_1}\right), R_m = h^{2m}\int_n^{\infty}\frac{B_{2m} - B_{2m}(t-[t])}{(a_1+(t-1)h)^{2m+1}}\mathrm{d}t, \tag{1.21}$$

$$|R_m| \leqslant \frac{|B_{2m}|h^{2m-1}}{2ma_n^{2m}}, R_m = O\left(\frac{1}{a_n^{2m}}\right), \tag{1.22}$$

B_n 为 Bernoulli 数，$B_n(t)$ 为 Bernoulli 多项式(定义见第 6 章 §1).

特别 $S_n(1,1) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，就是(1.6) 式，

$$S_n(1,2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}\ln(2n-1) + c_2 + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{6(2n-1)^2} + \frac{1}{15(2n-1)^4}$$

$$- \frac{8}{63(2n-1)^6} + \cdots - \frac{2^{2m-4}B_{2(m-1)}}{(m-1)(2n-1)^{2(m-1)}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right), \tag{1.23}$$

式中 $c_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\ln(2n-1)\right)$.

注 在 $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ 中去掉含有数码 9 的所有项之后，剩下的和 $\sigma_n^* < 40$.

$$S_n(1,3) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2} = \frac{1}{3}\ln(3n-2) + c_3 + \frac{1}{2(3n-2)} - \frac{1}{4(3n-2)^2} +$$

$$\frac{9}{40(3n-2)^4} - \frac{27}{28(3n-2)^6} + \cdots - \frac{3^{2m-3}B_{2(m-1)}}{2(m-1)(3n-2)^{2(m-1)}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right), \tag{1.24}$$

式中 $c_3 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3}\ln(3n-2)\right)$.(匡继昌，河西学院学报，2002.18(2):1－8)

3. 设 $\{a_k\}$ 是公差为 $h>0$，首项为 $a_1>0$ 的等差数列，$0<p<\infty, p\neq 1$，由 Euler-Maclaurin 公式可推出

$$S_n(a_1,h) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^p} = \frac{1}{h(p-1)}\left(\frac{1}{a_1^{p-1}} - \frac{1}{a_n^{p-1}}\right) + c_p + \frac{1}{2a_n^p}$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1}\left(\prod_{j=0}^{2k-2}(p+j)\frac{h^{2k-1}}{a_n^{p+2k-1}}\right)\frac{B_{2k}}{(2k)!} - R_m, \tag{1.25}$$

式中 $c_p = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^p} - \frac{1}{h(p-1)}\left(\frac{1}{a_1^{p-1}} - \frac{1}{a_n^{p-1}}\right)\right\}$,

$$R_m = \frac{h^{2m}}{(2m)!}\int_n^{\infty}\prod_{j=0}^{2m-1}(p+j)\frac{B_{2m} - B_{2m}(t-[t])}{(a_1+(t-1)h)^{p+2m}}\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{a_n^{p+2m-1}}\right),$$

特别地：

$$S_n(1,1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) + c_p + \frac{1}{2n^p} - \frac{p}{12n^{p+1}} + \frac{p(p+1)(p+2)}{720n^{p+3}} -$$

$$\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{30240n^{p+5}} + O\left(\frac{1}{n^{p+7}}\right), \tag{1.26}$$

式中 $c_p = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right)\right)$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{30n^5}-\frac{1}{42n^7}+O\left(\frac{1}{n^9}\right). \tag{1.27}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}=\frac{1}{(p-1)2^p}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)+\frac{c_p}{2^p}+\frac{1}{2(2n)^p}-\frac{p}{6(2n)^{p+1}}$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)}{90(2n)^{p+3}}+O\left(\frac{1}{n^{p+5}}\right). \tag{1.28}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}=\frac{1}{2(p-1)}\left(1-\frac{1}{(2n-1)^{p-1}}\right)+c_p^*+\frac{1}{2(2n-1)^p}$$
$$-\frac{p}{6(2n-1)^{p+1}}+\frac{p(p+1)(p+2)}{90(2n-1)^{p+3}}+O\left(\frac{1}{n^{p+5}}\right). \tag{1.29}$$

式中 $c_p^*=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{2(p-1)}\left(1-\frac{1}{(2n-1)^{p-1}}\right)\right)$.

杨必成证明：

$$\left(n-\frac{1}{3}\right)^{-1}<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\left(n-\frac{1}{2}\right)^{-1};$$

$$\frac{1}{n}-\left(2n+\frac{5}{2}\right)^{-1}<\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}<\left(n-\frac{5}{8}\right)^{-1}-\frac{1}{2n}.$$

见广东教育学院学报 1999,19(3):29－35.另见第 11 章 §1.N.6.

利用 $\operatorname{ctg}^2x<\frac{1}{x^2}<1+\operatorname{ctg}^2x\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$,令 $x_k=\frac{k\pi}{2n+1}$,$1\leqslant k\leqslant n$,对 k 求和,并利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\operatorname{ctg}x_k)^2=\frac{n(2n-1)}{3}$,易证:

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)<\frac{2n(n+1)}{3},$$

它给出了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 的一个初等证法.

利用 $\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}<\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}$ 对 k 从 $1,2,\cdots,m$ 求和,得到

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+m+1}<\sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}.$$

4. 设 $p\geqslant 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{p+1}(n^{P+1}-1)+\frac{1}{2}(n^p+1)$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}p(p-1)\cdots(p-2k+2)(n^{p-2k+1}-1)+R_m. \tag{1.30}$$

式中 $|R_m|\leqslant\frac{|B_{2m}|}{(2m)!}p(p-1)\cdots(p-2m+2)(n^{p-2m+1}-1)$.

当 p 为非负整数时,得到熟知的 Bernoulli 求和公式:

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}(B_{p+1}(n+1)-B_{p+1}). \tag{1.31}$$

5. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=\frac{1}{2}(\ln n)^2+c_4+\frac{\ln n}{2n}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k)n^{2k}}\Big\{\ln n-\ln(2k-1)-c-\frac{1}{2(2k-1)}+\frac{1}{12(2k-1)^2}-\frac{1}{120(2k-1)^4}+O\Big(\frac{1}{k^6}\Big)\Big\},\tag{1.32}$$

式中 $c_4=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{2}(\ln n)^2\right\}$，$c$ 为 Euler 常数.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\ln\ln n+c_5+\frac{1}{2n\ln n}+\frac{1+\ln n}{12(\ln\ln n)^2}+O\left(\frac{1}{n^4\ln n}\right).\tag{1.33}$$

式中 $c_5=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n\right)$.

$$\sum_{k=1}^{n}k\ln k=\frac{1}{2}n^2\ln n-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\ln n+\frac{1}{2}\ln n+c_6-\sum_{k=2}^{m-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)(2k-2)}\cdot\frac{1}{n^{2k-2}}+O\Big(\frac{1}{n^{2m-2}}\Big).\tag{1.34}$$

式中 $c_6=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}k\ln k-\frac{1}{2}n^2\ln n\Big)$.

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2-\frac{1}{4n}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{128n^4}+\frac{63}{16384n^6}+O\Big(\frac{1}{n^8}\Big).\tag{1.35}$$

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^p}=\frac{1}{p-1}\Big(1-\frac{1}{2^{p-1}}\Big)+\Big(1-\frac{1}{2^{p-1}}\Big)c_p-\frac{1}{2(2n)^p}+\frac{p}{4(2n)^{p+1}}-\frac{p(p+1)(p+2)}{48(2n)^{p+3}}+O\Big(\frac{1}{n^{p+5}}\Big),\tag{1.36}$$

式中 $p>0,p\neq1,c_p$ 与(1.26)式相同.利用 Catalan 恒等式:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

和(1.14),可得出

$$\ln\Big(2-\frac{1}{n+1}\Big)<\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}<\ln 2.$$

注　(1.25)～(1.36)式都由 Euler-Maclaurin 公式推出,见匡继昌,河西学院学报 2002,18(2):1－8.杨必成等用类似的方法证明了以下结果:

(1) $$\frac{1}{(2n+1)\ln n}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n-c_5<\frac{1}{(2n+(1/3))\ln n}\quad(n\geqslant2).\tag{1.37}$$

(2)　当 $p\geqslant0,p\neq1,n\geqslant3$ 时有

$$\frac{1}{2n(\ln n)^p}\Big(1-\frac{1+p}{6n}\Big)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^p}-\frac{(\ln n)^{1-p}}{1-p}-c_7\leqslant\frac{1}{2n(\ln n)^p},\tag{1.38}$$

式中 $c_7=\lim\limits_{n\to\infty}\Big\{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^p}-\frac{(\ln n)^{1-p}}{1-p}\Big\}$.

(3) $$\frac{\ln n}{2n+(1/3)}<\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{1}{2}(\ln n)^2-c_4<\frac{\ln n}{2n}.\tag{1.39}$$

(4) $$\frac{79}{1920\sqrt{n}}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-c_8<\frac{90}{1920\sqrt{n}}.\tag{1.40}$$

式中 $c_8=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\frac{1}{24\sqrt{n}}\right\}=-0.2078862249^{+}$.

见中山大学学报(自),1998,37(4):33 - 37.

(5) 设 $p\neq 1,p<0$ 或 $p>0,[p]$ 为奇数,则

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^{p}-\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{1}{2}n^{p}\leqslant\frac{p}{12}n^{p-1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}-\frac{p}{12}\right). \quad (1.41)$$

特别地,

$$-\frac{1}{24}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{35}{24}<0;$$

$$-\frac{1}{384}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(4n+1-\frac{1}{12n}\right)+\frac{560}{384}<0;$$

$$-\frac{1}{1920}<\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}-\left(\frac{2}{5}n^{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{8}\right)\sqrt{n}+\frac{48}{1920}<0;$$

$$-\frac{1}{24}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\frac{1}{6}<0;$$

$$-\frac{1}{1920}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\left(\frac{2n^{2}}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{24}\right)\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{399}{1920}<0;$$

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^{5/2}-\left(\frac{2}{7}n^{2}+\frac{n}{2}+\frac{5}{24}\right)n\sqrt{n}-\frac{16}{2688}<\frac{7}{2688}.$$

若 $p>0,[p]$ 为偶数,则

$$\frac{p}{12}(n^{p-1}-1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^{p}-\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{n^{p}}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\leqslant 0. \quad (1.42)$$

见中山大学学报(自),1997,36(4):21 - 26. 1979 年 Matic,B 将

$$2(\sqrt{n+1}-1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$$

改进为

① 若 $n\geqslant 2,\alpha\leqslant 7/16$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{n+1-\alpha}-\sqrt{1-\alpha});$$

② 若 $n\geqslant 1,1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{n+1-\alpha}-\sqrt{1-\alpha}).$$

见 Publ,Inst,Math,1979,26(40):171 - 173. 1999 年杨必成又改进为

$$2\sqrt{n+1}-1.76<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1.12. \quad (n>1),$$

见广东教育学院学报,1999,19(3):29 - 35. 用数学归纳法或 AG 不等式,易证:

$$\frac{1}{2}n(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}<\frac{n(n+2)}{2} \qquad [\text{MCM}];$$

$$\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\sqrt{2n+1}-1.$$

利用其他方法,可以证明 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ 的其他估计式,如:

(1) $f(x)=\frac{1}{p+1}x^{p+1}$ 在 $[k,k+1]$ 上用微分中值定理或 Bernoulli 不等式(见第 3 章 N.8.),易证:

① 当 $p>0$ 时,成立

$$\frac{n^{p+1}}{p+1}<\sum_{k=1}^{n} k^p<\frac{1}{p+1}[(n+1)^{p+1}-1];$$

② 当 $-1<p<0, n>m$,成立.

$$\frac{1}{p+1}\{(n+1)^{p+1}-m^{p+1}\}<\sum_{k=m}^{n} k^p<\frac{1}{p+1}\{n^{p+1}-(m-1)^{p+1}\}.$$

③ 当 $p<-1$ 时,成立

$$\frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}<\sum_{k=1}^{n} k^p<\frac{n^{p+1}+p}{p+1}.$$

(2) $\frac{3n+1}{2n+2}<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n<\frac{e}{e-1}<2-\frac{1}{n+1}$. [MCU]

提示:下界对 $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ 用梯形法作近似计算,上界估计利用不等式 $1-x\leqslant e^{-x}$,从而

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\leqslant e^{-k};\quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\leqslant\sum_{k=1}^{n} e^{-k}\leqslant\frac{e}{e-1}.\quad ([66]P326)$$

(3) [MCM] $\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

6. 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$. 则

$$\frac{1}{2(2n+1)}<\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{1}{2(2n-1)};\tag{1.43}$$

$$\frac{1}{4(n+1)}<\left|\sigma_n-\frac{1}{2}\ln 2\right|<\frac{1}{4(2n-1)}.\tag{1.44}$$

见[305]1955,62:726-727.杨必成等改进为:

$$\frac{1}{4n+1}<\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{1}{4n};$$

$$\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n-1)^2}-\frac{1}{15(2n-1)^4}<\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n-1)^2}+\frac{16}{15(2n-1)^4};$$

$$\frac{1}{4n+8/3}<\left|\sigma_n-\frac{1}{2}\ln 2\right|<\frac{1}{4n+2};$$

$$\frac{1}{4(n+1)}+\frac{1}{8(n+1)^2}-\frac{1}{15(n+1)^4}<\left|\sigma_n-\frac{1}{2}\ln 2\right|<\frac{1}{4n}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{15n^4}.$$

见[347]1996,(3):1-8 和"广东教育学院学报",1999.19(3):29-35.

7. **Agostini 不等式**:设 p,q 为非负整数,$p+q\leqslant 10$,令 $m=p+q+1$,则

$$(n-1)^m<\frac{m!}{p!q!}\sum_{k=1}^{n-1}k^p(n-k)^q<(n+1)^m.\tag{1.45}$$

见[4]P261.

8. **Ryll-Nardzewski 不等式**:设

$$f_n(p) = \frac{p}{n(n+1)^{p-1}}\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}.$$

则当 $1 < p < 2$ 时,$f_n(p) > 1$;而当 $0 < p < 1$ 或 $p > 2$ 时,$0 < f_n(p) < 1$.

9. (1) $$n + \ln\left(\frac{n+2}{3}\right) < \sum_{k=1}^{n} k^{1/k} < 2n - \ln(n+1),\ (n \geqslant 2). \tag{1.46}$$

证 $$n + \ln\left(\frac{n+2}{3}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left\{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\right\}$$

$$< 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \leqslant 1 + \frac{4}{3} + \sum_{k=3}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant 1 + \left(\frac{16}{9}\right)^{1/2} + \sum_{k=3}^{n}\left(1 + \frac{\ln k}{k}\right)$$

$$< 1 + \sqrt{2} + \sum_{k=3}^{n}\exp\left(\frac{\ln k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^{1/k} = \sum_{k=1}^{n}(1 + k - 1)^{1/k}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1 + \frac{k-1}{k}\right)^k\right\}^{1/k} = \sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\left\{2 - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\} = 2n - \ln(n+1).$$

(当 $n = 2$ 时,从 3 到 n 求和应理解为 0)

(2) 利用 Euler-Maclaurin 求和公式,可得

$$n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 < \sum_{k=1}^{n} k^{1/k} < n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + 1. \tag{1.47}$$

见[305]1986,93(4):302 - 303.

(3) [MCM] $\sum_{k=1}^{n} k^{-k} < 2 - \frac{1}{2^n}$; $\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-k} < \frac{1}{n(n+1)^2}$; $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^m} \leqslant \frac{2^{m+n}m!}{(n+1)^m}$.

(4) 令 $\sigma_n = \sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n^2+k}$, 则 $\sigma_{n+1} < \sigma_n$.

(5) $\frac{3\pi^2}{32} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} \leqslant \frac{3\pi^3}{64}$.

提示:利用积分表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\frac{x(\pi - x)}{\sin x}\mathrm{d}x, \int_0^{\pi}\frac{x(\pi - x)}{\sin x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2}\frac{x(\pi - x)}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

再利用 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\pi}{2}$.

10. [MCU] $$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}},\ n \geqslant 8. \tag{1.48}$$

证 1 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,则 $x > e$ 时,$f'(x) < 0$,从而 f 在 (e,∞) 上严格递减,于是对于 $e < x_1 < x_2$,$f(x_1) > f(x_2)$,即 $x_2^{x_1} < x_1^{x_2}$,取 $x_1 = \sqrt{n}$,$x_2 = \sqrt{n+1}$,$n \geqslant 8$,即可得证.

证 2 利用积分的单调性,由 $e < a \leqslant x \leqslant b$,

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln(e/x)}{x^2} < 0.$$

从而 $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} = \int_a^b \mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 0$. 即

$$b^a < a^b. \tag{1.49}$$

取 $a = \sqrt{n}, b = \sqrt{n+1}, n \geqslant 8$,即可得证.

由(1.49)式可证明许多数学竞赛题,如从(1.49)式可得 $999^{992} < 992^{999}$;

又如要判别 31^{11} 与 17^{14} 哪个较大?则要作一些变形:$17^{14} > 16^{14} = 2^{56} > 2^{55} = 32^{11} > 31^{11}$.

11. (1) $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdots\sqrt{n}}} < k+1, (2 \leqslant k \leqslant n-1)$. (1.50)

(2) $\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n}+1$. (1.51)

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时 $a_n = \sqrt[n]{n}$ 和 $b_n = \sqrt[(n-1)]{n}$ 严格递减.但 $a_2 < a_3$,从而$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$;

$(n+1)^{1/(n+1)} < n^{1/n} < 1 + \sqrt{2/n}, (n \geqslant 3)$; (1.52)

$(n+1)^{(1/n)} < n^{1/(n-1)} < 2, (n > 2)$.

(4) 设 $n > m \geqslant 1$,则

$$m^{n^m} < n^{m^n}. \tag{1.53}$$

提示:利用 $f(x) = x^{1/x}$ 在$(0,e)$内严格递增,在(e,∞)内严格递减.

(5) $\min\{\sqrt[n]{m}, \sqrt[m]{n}\} \leqslant \sqrt[3]{3}$.

12. **Gruss 不等式**:令

$$f(m,n) = \frac{1}{m+n+1} - \frac{1}{(m+1)(n+1)}.$$

则 $f(m,n) \leqslant \frac{4}{45}$. (1.54)

证 $f(1,1) = f(1,2) = f(2,1) = \frac{1}{12}$.令 $k = m+n+2, g(k) = \frac{1}{k-1} - \frac{4}{k^2}$,

则 $k \geqslant 6$ 时,$f(m,n) \leqslant g(k)$,且 $g(k)$ 严格递减.于是,$f(m,n) \leqslant g(6) = 4/45$. 见[354]1935,39:742-744.

13. **Guy 不等式**:设

$$f(m,n) = n \cdot m^n\{n^m - (n-1)^m\},$$

则当 $m > n > 1$ 时, $f(n,m) < f(m,n)$. (1.55)

见[305]1986,93(4):279-280.将 m、n 分别换成实数x,y,即 $f(x,y) = xy^x(x^y - (x-1)^y)$,则 $x > y > 1$ 时,成立 $f(y,x) < f(x,y)$.

14. **Schur 不等式**:设 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}, y_n = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{\alpha}{n})$.则 x_n, y_n 严格递减的充要条件是 $\alpha \geqslant 1/2$.

证 利用对数的级数展开式:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad |x| < 1,$$

取 $x = \frac{1}{2n+1}$,得到

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}(\frac{1}{2n+1})^{(2k-1)}.$$

从而

$$\ln x_n = \left(1+\frac{\alpha-(1/2)}{n+(1/2)}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{(2k-1)},$$

$$\ln x_{n+1}-\ln x_n = \frac{(1/2)-\alpha}{(n+(1/2))(n+(3/2))}+0\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

于是,x_n 严格递减 $\Leftrightarrow \alpha \geqslant 1/2$.若 $\alpha < 1/2$,则 n 充分大时,x_n 严格递增.

类似可得 $\ln y_n - \ln y_{n+1} = \dfrac{4\alpha-2}{4\alpha^2}+0\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

注　x_n 递增 $\Leftrightarrow \alpha \leqslant c_1 = \dfrac{-1+\ln 3-\ln 2}{2\ln 2-\ln 3} = 0.409\cdots$.

(Fischer,P.等,[404],1994,12(3):119 - 124)

15.　设 $x_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n, y_n = \left(1+\dfrac{b}{n}\right)^{n+1}$.

(1) 当 $a > 0$ 和 $a = -1$ 时,x_n 严格递增,即 $x_{n-1} < x_n$;而当 $0 < b \leqslant 2$ 时,y_n 严格递减,即 $y_{n-1} > y_n$.

除了可用上述类似方法外,还可用 AG 不等式证,如 $a > 0$ 时,

$$x_n^{\frac{1}{n+1}} = \left\{1\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1+n\times[1+(a/n)]}{n+1} = 1+\frac{a}{n+1},$$

从而 $x_n < \left(1+\dfrac{a}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$.当 $a = -1$ 时,

$$x_n^{\frac{1}{n+1}} = \left\{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1+n\times[1-(1/n)]}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1},\text{所以},$$

$x_n < \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$.

(2)　当 $-n \leqslant a \leqslant -1$ 时,利用 $1-x < e^{-x}$,得到 $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leqslant e^a$;当 $a \geqslant -1$ 时,有

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \geqslant 1+a+\frac{n-1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2\left(n+\frac{n-2}{3}a\right),$$

特别地,

$$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{e}.$$

16.　关于 $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 和 e 的不等式.

我们已知,x_n 严格递增收敛于 e.但常常需要 x_n 和 e 的不等式的改进.

(1)　$\dfrac{e}{2n+2} < e - x_n < \dfrac{e}{2n+1} < \dfrac{3}{n}$.　(1.56)

(2)　$x_n\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right) < e < x_n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$,(Schur),它可改进为:

$$x_n\left(1+\frac{1}{n+(1/5)}\right)^{1/2} < e < x_n\left(1+\frac{1}{n+1/6}\right)^{1/2}, \tag{1.57}$$

见[375]1987,3(2):94 或[301]1999,240:290 - 293.

(3)　[MCU]　记 $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, z_n = \dfrac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$,则

$$z_n < z_{n+1}. \tag{1.58}$$

提示：z_n 可化为

$$z_n = \frac{2(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)}.$$

于是可考虑 $g(x)=\ln 2+(x+1)\ln(x+1)-x\ln x-\ln(2x+1)$ 在 $(0,\infty)$ 上的单调性，见[66]P82,89.

(4)　1998 年徐晓泉，杨应谦证明：

$(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{an})<e<(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{2n})$ 成立的充要条件是 $a>\frac{2}{e-2}$.

见江西师大学报 1998,22(1):10－11,38.

(5)　[MCU]　$$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant(1+\frac{1}{n})^{n+\beta}. \tag{1.59}$$

式中 α 的最大值 $\alpha=\frac{1}{\ln 2}-1$，β 的最小值 $\beta=\frac{1}{2}$. 见[63]P43,129 或[305]1974,81E2406.

证　令

$$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x},\quad 0<x\leqslant 1.$$

则 f 在 $(0,1]$ 上严格递减，于是 α 的最大值为 $\alpha=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$，而 β 的最小值为

$$\beta=\lim_{x\to+0}f(x)=\frac{1}{2}.$$

注　(1.59) 式等价于

$$\frac{1}{n+(1/2)}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n+(1/\ln 2)-1}. \tag{1.60}$$

(6)　$$\frac{1}{(n+1)!}<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{(n+1)!}(\frac{n+2}{n+1})<\frac{1}{n\cdot n!}. \tag{1.61}$$

(7)　$$\frac{n^n}{3n!}<\frac{e^n}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{n^k}{k!})<\frac{n^n}{2n!}. \tag{1.62}$$

见[307]1986,573－574.

(8)　利用连分式理论易求出

$$\frac{1}{1-n}<e^n<\frac{2+n}{2-n};\frac{6+2n}{6-4n+n^2}<e^n<\frac{12+6n+n^2}{12-6n+n^2}, \tag{1.63}$$

(9)　$$x_n<e(1-\frac{1}{2(1+n)}-\frac{1}{24(1+n)^2}-\frac{1}{48(1+n)^3}). \tag{1.64}$$

(见[301]2001,253:691－694)

事实上，我们可以进一步证明.(见第 5 章 §3N.14)

$$x_n=e(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(1+n)^k}). \tag{1.65}$$

式中 $\{b_k\}$ 由递推式确定：

$$b_1=\frac{1}{2},b_{n+1}=\frac{1}{n+1}(\frac{1}{n+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{n+2-k}),\ n=1,2,\cdots. \tag{1.66}$$

17.　$$\frac{1}{2^{\alpha/2}}\sum_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{k^\alpha}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|k+ij|^\alpha}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{(k^2+1)^{\alpha/2}}, \tag{1.67}$$

式中 $i^2=-1$.由此推出 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(k+ij)^{\alpha}}$ 绝对收敛的充要条件是 $\alpha>2$.

18.　设 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 是集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不同的元素，对每对 $a_i+a_j\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$.必存在 k, $1\leqslant k\leqslant m$，使得 $a_i+a_j=a_k$.则

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}a_k\geqslant\frac{1}{2}(1+n). \tag{1.68}$$

证　不妨设 $a_1>a_2>\cdots>a_m$，先证明 $\forall i:1\leqslant i\leqslant m$，成立

$$a_i+a_{m-i+1}\geqslant n+1. \tag{1.69}$$

下面用反证法，若 $\exists i:1\leqslant i\leqslant m$，有

$$a_i+a_{m-i+1}\leqslant n.$$

则　$a_i<a_i+a_m<a_i+a_{m-1}<a_i+a_{m+1-i}\leqslant n$.

由题设，这 i 个数 $a_i+a_m, a_i+a_{m-1},\cdots,a_i+a_{m+1-i}$ 都大于 a_i 而且都属于集 A，但集 A 中只有 $i-1$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 大于 a_i，得到矛盾，于是，从(1.69)式，有

$$2\sum_{k=1}^{m}a_k=(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots+(a_m+a_1)\geqslant m(n+1).$$ 证毕.

(IMO,35,1994,7)

19.　设 $m_1,m_2,\cdots m_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列，则

(1)　[MCM] $\sum_{k=1}^{n}|m_k-k|\leqslant[\frac{n^2}{2}]=\begin{cases}\frac{n^2}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{n^2-1}{2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{k}\geqslant n$; $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{m_k}\geqslant n$.

20.　[MCU].设 $a_{m,n}$ 是 $(1+x+x^2)^m$ 的展开式中 x^n 的系数，则 $\forall k\in N$，成立

$$0\leqslant\sum_{j=0}^{[2k/3]}(-1)^j a_{k-j,j}\leqslant 1.$$

(1997 年 58 届 Putnan 数学竞赛，[305]1998,105:744－755)

二、　关于 n 的乘积不等式

1.　若 $m\leqslant n$，则

$$1-\frac{m(m+1)}{2n}\leqslant\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{k}{n})\leqslant 1-\frac{m(m+1)}{2n}(1-\frac{m^2-1}{4n}). \tag{1.70}$$

提示：左边不等式用数学归纳法，右边不等式用 A-G 不等式和二项展开式.

特别取 $m=25$, $n=365$，即为 MCU1975：

$$\prod_{k=1}^{25}(1-\frac{k}{365})<\frac{1}{2}.$$

2.　(1)[MCM] 令 $a_n=n(n+1)/2$，则

$$(\frac{n+2}{2})^{a_n}<\prod_{k=1}^{n}k^k<(\frac{2n+1}{3})^{a_n}. \tag{1.71}$$

(2) $\prod_{k=1}^{n} k^{-k^2} < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)^2}{4}}$.(杨永平.[345]1998,6)

3. $\prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{2k-1}) \geqslant \frac{4\sqrt{5}}{15}\sqrt{2n+1} > \frac{\sqrt{6n+3}}{3}$. (1.72)

4. (1) $\frac{1}{3\sqrt{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(\frac{4k-3}{4k-1}) \leqslant \frac{5}{3(4n+1)}(\frac{2n+1}{3})^{1/2}$;

(2) $\frac{1}{4}\left(\frac{11}{12n-1}\right)^{1/2} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(\frac{6k-5}{6k-2}) \leqslant \frac{7}{3(6n+1)}(\frac{12n+5}{17})^{1/2}$;

(1)(2) 见杨克昌,[345]2000,7:30 – 31.

(3) $(\frac{1}{3n+1})^{1/2} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(\frac{3k-2}{3k-1}) \leqslant (\frac{1}{3n+1})^{1/3}$; (1.73)

5. $f(n) = \prod_{k=1}^{n}(\frac{4k-1}{4k+3}) < \left(\frac{3}{4n+3}\right)^{1/2}$. (1.74)

证 令 $g(n) = \prod_{k=1}^{n}(\frac{4k+1}{4k+3})$.

则 $0 < f(n) < g(n) \Rightarrow (f(n))^2 \leqslant f(n)g(n) = \frac{3}{4n+3}$.

6. 令 $S_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k}), \sigma_n = \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\alpha}{k})$. $0<\alpha<1$, c 为 Euler 常数,则

(1) $\left\{n\exp[c-\frac{\alpha\pi^2}{12}+\frac{\alpha}{2(n+1)}]\right\}^{\alpha} < S_n < \{(n+1)e^c\}^{\alpha}$. (1.75)

(2) $\{n\exp(c+\frac{1}{1-\alpha})\}^{-\alpha} < \sigma_n < \{n\exp(c+\frac{\alpha}{2(1-\alpha)})\}^{-\alpha}$. (1.76)

见[344]1983,1:52 – 55.

(3) 对任意 $\alpha > 0$,有

$$S_n \leqslant \exp\{\alpha(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})\} \leqslant cn^{\alpha}. \tag{1.77}$$

见[74]Vol 1. Ch9 § 5.

7. **Minc 不等式**:对于任意 m 个自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_m$,有

$$(\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{n_j})(\prod_{k=1}^{m}\frac{n_k}{n_k+1}) \leqslant 1, \tag{1.78}$$

仅当 $k \leqslant 2$ 且 n_1 或 n_2 等于 1 时等号成立. 见[376]1963,69:789 – 791.

8. 设 $n \geqslant 2, \alpha > 0$,则

$$[\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)](\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\alpha+j}) < (n+1)\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k-\frac{1}{2}), \tag{1.79}$$

证明见[305],1988,95(2):148.

9. [MCM]. 设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < 2n_1$,令

$f(k) = \prod_{j=1}^{k} n_j, k \geqslant 3$,若 r 为素数,且 r^m 能整除 $f(k)$,即 $r^m \mid f(k)$,则

$$f(k) \geqslant r^m \cdot n!. \tag{1.80}$$

10. [MCM].设 $f:N\to N$ 是严格递增的,且 $\forall n, f[f(n)]=kn$,则

$$\frac{2k}{k+1}n\leqslant f(n)\leqslant\frac{k+1}{2}n. \tag{1.81}$$

证 因为 $f:N\to N$ 严格递增,所以,$f(n)\geqslant n$,以及当 $m\geqslant n$ 时,$f(m)\geqslant f(n)+m-n$.于是可令 $f(n)=n+m$(m 为非负整数),从而 $kn=f[f(n)]=f(n+m)\geqslant f(n)+m=f(n)+[f(n)-m]$,由此得出 $f(n)\leqslant\frac{1}{2}(k+1)n$. $kn=f(f(n))\leqslant\frac{1}{2}(k+1)f(n)$,即 $f(n)\geqslant\frac{2kn}{k+1}$.

三、 含 n!的不等式

我们先注意以下几个关系式:

$n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdot n$;

$(2n)!!=2\cdot4\cdot\cdots(2n-2)(2n)=2^n\cdot n!$;

$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot\cdots(2n-3)(2n-1)$;

$(2n)!=(2n)!!(2n-1)!!$;规定 $0!!=1,(-1)!!=1$.

1. $n!$的基本估计式是著名的 Stirling 公式:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right),0<\theta_n<1. \tag{1.82}$$

令 $r_n=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. 1997 年,徐利治证明:

$$n!=r_n\exp\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(j-1)}{2j(j+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^j\right\}. \tag{1.83}$$

并由此推出

$$r_n<n!<r_n\left(1+\frac{1}{12n-1}\right),n>10. \tag{1.84}$$

见[339],1997,17(1):5 - 7.随后,徐利治等利用(1.83)式又给出 $n!$的双边不等式:

$$r_n\left(1+\frac{1}{12n}\right)<n!<r_n\left(1+\frac{1}{12n-0.5}\right). \tag{1.85}$$

它可写成渐近式:

$$n!\approx r_n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}\right).(n\to\infty).$$

并指出(1.83)式中的二重级数可用下式替代:

$$n!=r_n\exp\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]\right\}. \tag{1.86}$$

见[339]1999,19(3):491 - 494.

关于 Stirling 公式,已有大量的文献,其中 20 世纪 70 年代以前的有关文献见[4]P243 - 248,常用的其他估计式有:

(1) $r_n<n!<r_n\left(1+\frac{1}{4n}\right)$;

(2) $\frac{e^{7/8}}{\sqrt{2\pi}}r_n<n!<e\cdot r_n$; (1.87)

(3) $r_n \exp(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}) < n! < r_n \exp(\frac{1}{12n} - \frac{1}{(360+\alpha_n)n^3})$. (1.88)

式中 $\alpha_n = 30 \cdot \frac{7n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}$ (Beesack);

(4) $\exp(-\frac{n+(1/2)}{24}) < \frac{n!}{\sqrt{2\pi}(n+(1/2))^{n+\frac{1}{2}}\exp\{-(n+(1/2))\}} < 1$; (1.89)

(5) $(\frac{n}{3})^n < n! < (\frac{n}{2})^n, (n \geqslant 6)$; (1.90)

$(\frac{n+1}{e})^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

(6) $\ln(n-1)! < n\ln n - n + 1 < \ln n! < (n+(1/2))\ln n - n + 1. \quad (n > 1)$ (1.91)

于是 $\ln n! \approx n(\ln n - 1)$.

这是在统计与力学等领域用得较多的估计式.

(7) $\sum_{k=1}^{n}(km+p-1)! > n + \frac{n}{2}\{(m+p-1)[\ln(m+p-1)] + (mn+p-1)[\ln(mn+p-1)-1]\}$,

式中, $m \geqslant 1, n \geqslant 2, p \geqslant 0$;

$$\sum_{k=1}^{n}(km+p-1)!\ \ln(km+p-1)! \geqslant n[\Gamma(\frac{m(n+1)}{2}+p)-1].$$

式中 $m, n \geqslant 1, p \geqslant 0$;

$$\ln n! + \sum_{k=1}^{n}\ln[n(n-1)-(n-k+1)] \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\ln n.$$

(Starc, Z. F., Math. Morav, 1997, 1:101 - 104)

(8) $\frac{n^n}{3^{n-1}} < \frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < (\frac{n+1}{2})^n, (n \geqslant 4)$; (1.92)

取 $n = 73$, 得 $73! < 37^{73}$ [MCM].

2. $n^{n/2} < n! < n^n < \begin{cases} (n!)^2, & n \geqslant 3 \\ (n!)! < n^{n^n} < [(n!)!]! \end{cases}$, (1.93)

右边不等式见[305]1967, 74:862 - 863.

3. $(n!)! > \{(n-1)!\}^{n!}e(\frac{n}{e})^{n!}, (n > 1)$. (1.94)

证 从 $\sum_{k=2}^{m}\ln k > \int_1^m \ln x\,dx \quad (m > 2)$ 推出 $m! > m^m e^{1-m}$, 从而 $n^m m! > m^m e(\frac{n}{e})^m$. 取 $m = n!$, 即得(1.93)式.

4. $\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot k! < n! < \{\prod_{k=1}^{n}(2 - \frac{2k-1}{n})\}^{-1}, (n > 1)$. (1.95)

证 左边不等式利用 $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, 而右边不等式等价于

$(2n-1)!! > \frac{n^n}{n!}$. (1.96)

5. $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot \frac{1}{k!k} < \frac{1}{2} \quad (n \geqslant 2).$ (1.97)

6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!(k+1)-k!} < \frac{1}{2}.$ (1.98)

7. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{2}{n!}.$ (1.99)

证 $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} = \frac{2}{n!}.$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} < 1.$ [MCM]. (1.100)

提示:令 $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!} x^{k-2}$ 逐项积分求出 $f(x) = \frac{1}{x^2}[e^x(x-1)+1]$.

9. [MCM].令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$.则当 $n > 3$ 时,成立

$$\frac{100}{120} < S_n < \frac{101}{120}. \tag{1.101}$$

提示:$\left(1-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}\right) < S_n < 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}$.

10. [MCU]. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{1}{2}e^n$.实际上,还可证明

$$\frac{1}{3} < \frac{n!}{n^n}\left(\frac{1}{2}e^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}\right) < \frac{1}{2}. \tag{1.102}$$

11. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \geqslant e^{n-1}.$ (1.103)

提示:利用 Taylor 公式:

$$e^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = \frac{e^n}{(n-1)!}\int_0^n e^{-t} t^{n-1} \mathrm{d}t.$$

然后用数学归纳法证明

$$\int_0^n e^{-t} t^{n-1} \mathrm{d}t \leqslant (n-1)!\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

12. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{k}{e}\right)^{2k} \leqslant n.$ (1.104)

提示:利用复变函数 $F(z)$ 在单位圆盘 $|z| < 1$ 内单叶的性质,见[375]1986,2(3);127 - 130.

13. 设 $f(n) = 1 + \frac{n!}{2}\left(\frac{e}{n}\right)^n - \frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$, 则

$$1/3 < f(n) < 1/2. \tag{1.105}$$

实际上,当 n 从 0 递增到 ∞ 时,f 从 1/2 严格递减到 1/3. Karamata, J., 见 Indian Math. Soc. 1960, 24:343 - 365.

14. [MCM].对任意实数 a_1, a_2, a_3,总可找一个自然数 n_0,使得 $\forall n > n_0$,有

$$n! > a_1 n^2 + a_2 n + a_3. \tag{1.106}$$

提示:利用 $n!\geqslant n(n-1)(n-2)$.只要证明

$$f(n)=n(n-1)(n-2)-(a_1n^2+a_2n+a_3)>0.$$

它可变形为 $f(n)=n^3-(b_1n^2+b_2n+b_3)$.所以,只要取 $n_0>\max\{b_1,b_2,b_3\}$.

推论 对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m,m<n$.总存在 n_0,使得 $\forall n>n_0$,有

$$n!>a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+\cdots+a_{m-1}n+a_m.$$

15. [MCM].设 m 个自然数 n_k 满足 $\sum_{k=1}^{m}n_k<n$, 则 $n!>\prod_{k=1}^{m}n_k!$. (1.107)

证 从阶乘 $n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$ 中分出前 n_1 个因子,可得 $n_1!$,若 $m>1$,则当 $1<k\leqslant m$ 时,在 $n!$的展开式中,前面 $n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}$ 个因子后面的 n_k 个因子依次大于 $1,2,\cdots,n_k$,这 n_k 个因子之积大于 $n_k!$,于是

$$\prod_{k=1}^{n}n_k!\leqslant(n_1+n_2+\cdots+n_m)!<n!.$$

16. $\sqrt[n]{n!}\leqslant\prod_{p\mid n}p^{\frac{1}{p-1}}$, (1.108)

式中求积对象遍及所有可整除 n 的正素数 p.

提示:首先证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]\leqslant\frac{n}{p-1}. \tag{1.109}$$

由此可以证明素数有无穷多个.

17. 设 $m>n>1$,则 $(n!)^{m-1}<(m!)^{n-1}$. (1.110)

证 令 $m=n+k$,则 $(n!)^{m-1}=(n!)^{n+k-1}=(n!)^{n-1}(n!)^k$,再利用 $(n!)^k\leqslant(n^{n-1})^k=(n^k)^{n-1}<\{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)\}^{n-1}$ 即可得证.

18. $\{(n+1)!\}^n<\prod_{k=1}^{n}(2k)!,(n>1)$. (1.111)

提示:用数学归纳法.

19. $\frac{(n!)^{n+1}}{1!2!\cdots n!}\leqslant(\frac{2n+1}{3})^{\frac{n(n+1)}{2}}$. (1.112)

20. **Khinchin 不等式**:设 n_k 为非负整数,且 $\sum_{j=1}^{k}n_j=n$,则

$$\prod_{j=1}^{k}n_j!\leqslant(\frac{1}{2})^n\prod_{j=1}^{k}(2n_j)!. \tag{1.113}$$

见[354]1923,18:109 - 116.

21. [MCU].设 $f_1(n)=n,f_2(n)=n^{f_1(n)},\cdots,f_{k+1}(n)=n^{f_k(n)},n>2$,则

$$f_k(n)<n!!\cdots!<f_{k+1}(n), \tag{1.114}$$

中间的项表示 n 的 k 级阶乘.

提示:令 $g_1(n)=n!,g_{k+1}(n)=\{g_n(n)\}!$,则(1.114)变成

$$f_k(n)<g_k(n)<f_{k+1}(n),n>2. \tag{1.115}$$

上式可用数学归纳法,下面以证左边不等式为例.

当 $p \geqslant 2n^2$ 时，$p! > (n^2)^{p-n^2} = n^p \cdot n^{p-2n^2} \geqslant n^p$.

令 $n = 3$ 或 4 而 $k \geqslant 2$，则 $g_k(n) \geqslant g_2(3) = 6! = 720 > 32 \geqslant 2n^2$.

若 $n \geqslant 5, k \geqslant 1$，则 $g_k(n) \geqslant n! \geqslant n(n-1)(n-2) > 2n^2$. 于是，当 $n \geqslant 3$ 时，$f_1(n) < g_1(n), f_2(3) < f_2(4) = 256 < 720 = g_2(3) < g_4(4)$;

设 $n \geqslant 3$ 时，$f_k(n) < g_k(n)$. 则由 $g_k(n) > 2n^2$ 和 $p! \geqslant n^p$ 得到

$$f_{k+1}(n) = n^{f_k(n)} < n^{g_k(n)} < \{g_k(n)\}! = g_{k+1}(n).,$$

类似可以证明右边不等式，这只要注意到 $g_{k+1}(n) = g_k(n!)$，并用归纳法证明

$$\varphi_k(n) < n^{\varphi_{k-1}(n)}, (k \geqslant 1, n > 2), \text{式中 } \varphi_k(n) = g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n).$$

见[66]P315,322-323.

22.(1) $(2n)!! < (n+1)^n$; $2^n \cdot n! < (2n)!$;

(2) $n^{n+1} \leqslant \prod_{k=n}^{2n} k \leqslant (2n)! \leqslant 2 \cdot n^{2n} < (n+\frac{1}{2})^{2n} < \{n \cdot (n+1)\}^n \quad (n > 1)$.

见[305]1986,93(7):561;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}$;

(4) $\prod_{k=1}^{n} (2k-1)! \geqslant (n!)^n$;

(5) $(2n-1)^{n/2} < (2n-1)!! < (\frac{3n+1}{4})^n < n^n \quad (n > 1)$;

(6) [MCU]. $\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{n-\frac{1}{2}} < (2n-1)!! < \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

提示：$\int_1^{2n-1} \ln x \, dx < 2\ln(2n-1)!! < \int_3^{2n+1} \ln x \, dx$.

(7) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1} \quad (n > 5)$.

23. 设 $f(n) = (n!)^{1/n}. n > 1$，则

(1) $f(n)$ 严格递增，即 $f(n) < f(n+1)$;

(2) $g(n) = \frac{f(n+1)}{f(n)}$ 严格递减，而且

$$1 < g(n) < 1 + \frac{1}{n} \text{ (Minc-Sathre 不等式)}; \tag{1.116}$$

$$ng(n) - (n-1)g(n-1) > 1. \tag{1.117}$$

(3) 设 $n_1, \cdots, n_m$ 都是大于 1 的自然数，且 $m \leqslant n_k, (k = 1, \cdots, m)$，则

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{f(n_k - 1)} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \frac{f(n_k)}{f(n_k - 1)}. \tag{1.118}$$

仅当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = m$ 时等号成立. 见 Proc. Edinburgh Math. Soc. 1964/65,14(2): 41－46.

令 $\varphi(n) = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p)^{1/p}$，1993 年，Alzer, H 对(1.116)作了加细：

$$g(n) \leqslant (1+\frac{1}{n})\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \leqslant 1+\frac{1}{n}. \tag{1.119}$$

见[301]1993,179(2):396 - 402. 1994 年,Alzer,H. 又对(1.117)作了加细:

$$ng(n)-(n-1)g(n-1) > 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} > 1+g(n-1)-g(n) > 1,(n\geqslant 3), \tag{1.120}$$

见 Period Math. Hungar 1994,28(3):229 - 233. Alzer,H. 还进一步证明:

$$(f(n))^2 - f(n-1)f(n+1) > e^{-2}, n \geqslant 2. \tag{1.121}$$

式中下界 e^{-2} 是最佳的.(见 MR96m:26020 或 Acta Math. Univ. Comenian(N. S.)1995, 64(2):283 - 285)

(4) $f(n) < \frac{4}{9}(n+2)$.(陈计,[348]1994,2:12 - 34) (1.122)

(5) Alzer,H. 证明

$$1+\frac{a}{n+1} \leqslant g(n) < 1+\frac{b}{n+1} \tag{1.123}$$

$\forall n \geqslant 1$ 成立的充要条件是 $a \leqslant 2(\sqrt{2}-1)$ 和 $b \geqslant 1$,(ZbI. Math. 826 - 26005).

(6) 1999 年匡继昌证明了(1.116)式新的加细:

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} < g(n) < \frac{h(n+1)}{h(n)} < 1+\frac{1}{n}, \tag{1.124}$$

式中 $h(n) = (\frac{(2n)!}{n!})^{1/n}$. $n \geqslant 2$. 见[325]1999,83(496):123 - 127.

24. 设 B_n 为 n 阶 Bernoulli 数,E_n 为 Euler 数(定义见第 6 章 § 1),则

(1) $$\frac{(4n)!(4n-2)!}{\{(2n)!\}^4} \leqslant \left|\frac{B_{4n}B_{4n-2}}{B_{2n}^4}\right|, (n \geqslant 2). \tag{1.125}$$

(**Bernoulli 不等式**,见[305]1988,95(8),$E3160$)

(2) $$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} < (-1)^{n-1}B_{2n} \leqslant \frac{\pi^2(2n)!}{3(2\pi)^{2n}}. \tag{1.126}$$

注 (1.126)右边可换成 $\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n+1}}\frac{1}{1-2^{1-2n}}$. 见[101]$P$805.

(3) $$\frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\frac{1}{1+3^{-(1+2n)}} < (-1)^n E_{2n} < \frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}}. \text{见[101]}P.805. \tag{1.127}$$

25. **Wallis 不等式**:设 $P_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,则

(1) $$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+(1/2))}} < P_n < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+(1/4))}} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}. (n > 1). \tag{1.128}$$

注 上述 P_n 的不同上下界都是文献中经常引用的,其中 P_n 的最小上界和最大下界是Kazarinoff在1956年所得到的结果(见 Edinburgh Math. Notes 1956,40:19 - 21),P_n 的下界还可改进为 $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\exp(-\frac{1}{8n})$.(1.128)式也是各类数学竞赛试题的来源之一,例如$\frac{1}{15}$

$< \frac{99!!}{100!!} < \frac{1}{10}$.

(2) $$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{2}{\pi} < P_n < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{2}{\pi}; \tag{1.129}$$

(3) $$\sqrt{\frac{8(n+1)}{(4n+3)(2n+1)\pi}} < P_n < \sqrt{\frac{4n+1}{2n(2n+1)\pi}}, \tag{1.130}$$

提示:$(\sin x-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \geqslant 2\sin x-(\sin x)^2$,分别用$(\sin x)^{2n-1}$,$(\sin x)^{2n}$乘不等式两边,然后从 0 到$\frac{\pi}{2}$积分.

(4) 当 $-1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{4}$ 时,$P_n < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\alpha)}}$,而当 $\alpha \geqslant \frac{n+1}{4n+3}$ 时,不等号反向.

(5) P_n 的渐近式:$$P_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left(1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}+0\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),(n \to \infty). \tag{1.131}$$

(6) Wallis 不等式可推广如下:当 $m \geqslant 2$ 时,成立

$$\frac{m-1}{m\cdot\sqrt[m]{n}} \leqslant \frac{(m-1)(2m-1)\cdots(nm-1)}{m(2m)\cdots(nm)} \leqslant \frac{m-1}{\sqrt[m]{n(m+1)+m-1}}; \tag{1.132}$$

$$\frac{m}{(m+1)n^{1/m}} \leqslant \frac{m(2m)\cdots(nm)}{(m+1)(2m+1)\cdots(nm+1)} \leqslant \frac{m}{(n(m+1)+m+4)^{1/m}}. \tag{1.133}$$

这两个不等式常用于研究二项式级数和超几何级数在收敛区间端点的收敛性,其证明见[345]1981,3:26 - 27.