 2011 26/6-3

P.16.7 设(a,b)为任意一个开区间，证明：(a,b)中必有有理数。

证：考虑一个集合 $A_n=\{\frac{m}{10^n} \mid m\in Z\}=\{0,\pm\frac{1}{10^n},\pm\frac{2}{10^n},\pm\frac{3}{10^n},\cdots\cdots\}$

① A_n为有理数集；

② A_n中相邻两个数的差为$\frac{1}{10^n}$；

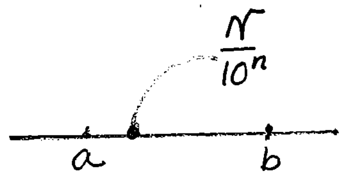
③ A_n既无上界，也无下界。即对任何正数M，A_n中有数$\frac{m}{10^n}>M$，也有数$-\frac{m}{10^n}<M$

因此，对于任何区间(a,b)，有整数N，使$\frac{N}{10^n}>a$，

当n充分大时，A_n相邻两点之差 $\frac{1}{10^n}<b-a$

因此(a,b)内必有 A_n中的点落在(a,b)内，

即(a,b)内必含有有理数。



P.16.8 设(a,b)为任意一个开区间，证明：(a,b)中必有无理数。

证：考虑一个集合 $B_n=\{\sqrt{2}+\frac{m}{10^n} \mid m\in Z\}$，~~证明：(a,b)中必有无理数~~。

$=\{\sqrt{2},\sqrt{2}\pm\frac{1}{10^n},\sqrt{2}\pm\frac{2}{10^n},\cdots\cdots,\cdots\}$

① B_n为无理数集；

② B_n中相邻两个数的差为$\frac{1}{10^n}$；

③ B_n既无上界，也无下界。

因此，对于任意区间(a,b)，有整数N，使$\frac{N}{10^n}>a$。

当n充分大时，B_n的相邻两点之差：$\frac{1}{10^n}<b-a$。

因此，必有B_n中的点落在(a,b)内。

即(a,b)内必含有无理数。