P.115.5 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $|f(x)|\le L$. $(\forall x\in[a,b])$ due 9/7-42.

其中 L 为常数。证明：$F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 在 $[a,b]$ 上满足李普希兹条件,

即 $|F(x_1)-F(x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

证: $F(x_1)-F(x_2)=\int_a^{x_1}f(t)dt-\int_a^{x_2}f(t)dt=\int_{x_2}^{x_1}f(t)dt=f(c)\cdot(x_1-x_2)$

$|F(x_1)-F(x_2)|=|f(c)|\cdot|x_1-x_2|\le L|x_1-x_2|$.

P.115.6 设知 $g(x)=\int_0^x(e^t\int_0^t \sin z\,dz)dt$ ，求 $g''(x)$.

解:
$$g'(x)=e^x\cdot\int_0^x \sin z\,dz$$
$$g''(x)=e^x\cdot\int_0^x\sin z\,dz+e^x\cdot\sin x$$
$$=e^x\cdot[-\cos z]_0^x+e^x\cdot\sin x$$
$$=e^x(-\cos x+1)+e^x\cdot\sin x$$
$$=e^x(\sin x-\cos x+1).$$

习题2-8. P.120.3. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k}{n}=\int_0^1\sin x\,dx=1-\cos1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^3\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1x^3dx=\frac14$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac1n=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln2$.

P.120.4 (4) $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}|\sin x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx=[-\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{2\pi}$
$=-(-2)+2=4$.

(5) $\int_0^2(x-[x])dx=\int_0^2x\,dx-\int_0^2[x]dx=[\frac{x^2}{2}]_0^2-\int_0^1[x]dx-\int_1^2[x]dx$
$=\frac42-\int_0^1 0\,dx-\int_1^2 1\,dx=2-0-1=1$

P.120.5 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数 $F'(x)$.

证明：存在一点 $c\in[a,b]$, 使 $F(b)-F(a)=F'(c)\cdot(b-a)$

证: $\int_a^bF'(x)dx=F'(c)(b-a)$ ，$c\in[a,b]$

又 $\int_a^bF'(x)dx=\int_a^b dF(x)=F(b)-F(a)$, 从而 $F(b)-F(a)=F'(c)\cdot(b-a)$, $c\in[a,b]$