第四章作业

16337341 朱志儒

思考题

4.1 群的定义：群 G 定义了一个二元运算的集合，这个二元运算可表示为·，G 中每个序偶(a, b)通过运算生成 G 中的元素$(a \cdot b)$, 并满足封闭性、结合律、单位元、逆元。

4.2 环的定义：环 R 是一个有两个二元运算的集合，这两个二元运算分别称为加法和乘法，且对于 R 中的任意元素 a、b、c 满足封闭性、结合律、单位元、逆元、交换律、乘法的封闭性、乘法的结合律、分配率、乘法的交换律。

4.3 域的定义：域 F 是有两个二元运算的集合，这两个二元运算分别称为加法和乘法，且对于 F 中的任意元素 a、b、c 满足封闭性、结合律、单位元、逆元、交换律、乘法的封闭性、乘法的结合律、分配率、乘法的交换律、乘法单位元、无零因子、乘法逆元。

4.4 对于非零 b，存在一个整数 m 使得 $a = bm$，则 b 是 a 的因子。

习题

4.1 （a）S_n 中有 n!个元素。

（b）对于 S_3 有$\{3, 2,1\} \cdot \{1,3,2\} = \{3,1,2\}$和$\{1,3,2\} \cdot \{3,2,1\} = \{2,3,1\}$，则$\{3, 2,1\} \cdot \{1,3,2\} \neq \{1,3,2\} \cdot \{3,2,1\}$，所以当 n>2 时，$S_n$ 不是交换群。

4.2 （a）

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

可以构成一个群，单位元是 0，0、1、2 的逆元分别是 0、2、1。

（b）

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

不可以构成一个群，单位元是 1，1、2 的逆元分别是 1、2，而 0 没有逆元。

4.3 S 构成环，因为 S 中的任意元素 a、b、c 满足封闭性、结合律、单位元、逆元、交换律、乘法的封闭性、乘法的结合律、分配率、乘法的交换律。

4.4 $\begin{cases} a = qn + r \quad & a > 0; 0 \le r < n; q = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \\ a = qn + r \quad & a < 0; 0 \le r < n; q = \left\lceil \frac{a}{n} \right\rceil \end{cases}$

4.6 （a）$x \equiv 2 \mod 3$ （b）$x \equiv 3 \mod 5$ （c）$x = 4 \mod 7$

4.7 （a）5 mod 3 = 2 （b）5 mod -3 = -1

（c）-5 mod 3 = -2 （d）-5 mod -3 = -2

4.8 a=b

4.10 1，2，4，6，16，12

4.12 （a）设 c = a mod n，d = b mod n，则 c = a + kn，d = b + mn，

c – d = (a – b) + (k – m)，所以(c – d) = (a – b) mod n。

（b）设 $c = a \bmod n$，$d = b \bmod n$，则 $cd = ab + n(kb + ma + kmn)$，所以 $cd = ab \bmod n$。

4.13 $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4$。

4.14 因为 $1 = 1 \bmod 9$，$10 = 1 \bmod 9$，$10^2 = 1 \bmod 9$，…，$10^{n-1} = 1 \bmod 9$，对于 $N = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \cdots + a_{n-1} 10^{n-1}$，有 $N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} (\bmod 9)$。

4.15（a）$\gcd(24140, 16762) = 34$ （b）$\gcd(4655, 12075) = 35$

4.19 （a）$1234^{-1} = 3239$

（b）24140 与 40902 不互素，所以 24140 没有乘法逆元

（c）$550^{-1} = 550$

4.20

模 5 加法

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

模 5 乘法

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

模 5 乘法逆元和加法逆元

w	-w	w^{-1}
0	0	-
1	4	1
2	3	3
3	2	2
4	1	4

4.23 （a）$9x^2+7x+7$ （b）$5x^3+7x^2+2x+6$

4.24 （a）可约，$x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$ （b）不可约

（c）可约，$x^4+1=(x+1)^2(x^2+1)=(x+1)^4$

4.25 （a）1 （b）1 （c）x + 1 （d）x + 78

4.26

加法

		000	001	010	011
	+	0	1	x	$x+1$
000	0	0	1	x	$x+1$
001	1	1	0	$x+1$	x
010	x	x	$x+1$	0	1
011	$x+1$	$x+1$	x	1	0

乘法

		000	001	010	011
	×	0	1	x	$x+1$
000	0	0	0	0	0
001	1	0	1	x	$x+1$
010	x	0	x	$x+1$	1
011	$x+1$	0	$x+1$	1	x

4.27 $(x^3+\mathrm{x}+1)^{-1}=x^2+1$

4.28

幂表示	多项式表示	二进制表示	十进制表示
0	0	0000	0

g^0 ($= g^{15}$)	1	0001	1
g^1	g	0010	2
g^2	g^2	0100	4
g^3	g^3	1000	8
g^4	$g + 1$	0011	3
g^5	$g^2 + g$	0110	6
g^6	$g^3 + g^2$	1100	12
g^7	$g^3 + g + 1$	1011	11
g^8	$g^2 + 1$	0101	5
g^9	$g^3 + g$	1010	10
g^{10}	$g^2 + g + 1$	0111	7
g^{11}	$g^3 + g^2 + g$	1110	14
g^{12}	$g^3 + g^2 + g + 1$	1111	15
g^{13}	$g^3 + g^2 + 1$	1101	13
g^{14}	$g^3 + 1$	1001	9