P.215.3. 作图 $y=x^2\cdot e^{-x}$, $(-\infty,+\infty)$.　　　　$2011\frac{21}{7}$ —102.

解：$y'=2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1)$

$=e^{-x}(2x-x^2)=e^{-x}\cdot x\cdot(2-x)$

令 $y'=0$，得驻点 $x=0$, $x=2$.

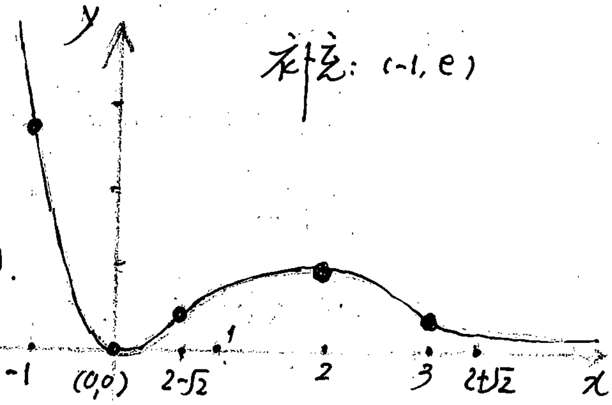
$y''=-e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}\cdot(2-2x)$

$=e^{-x}\cdot(x^2-4x+2)$

$=e^{-x}(x-2-\sqrt{2})\cdot(x-2+\sqrt{2})$

令 $y''=0$，则 $x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2},0)$	2	$(2,2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小 $(0,0)$	↗	拐点	↗	极大 $(2,\frac{4}{e^2})$	↘	拐点	↘



补点：$(-1,e)$

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0.$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$

所以，$y=0$ 是水平渐近线。

P.215.7 设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数 $f''(x)$，且在 (a,b) 内 $f(x)$ 上凸.

证明：$f''(x)<0$

证：由条件 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $f''(x)$，对 $x_0\in(a,b)$，$x\in(a,b)$，$x\neq x_0$

由泰勒公式有：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$，　ξ 在 x_0 与 x 之间，

又因为 $f(x)$ 是上凸的，所以 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$　　ξ 是一个定数。

必有 $f''(\xi)<0$。又由于 $f'(x)=f'(x_0)+f''(\xi)\cdot(x-x_0)$

所以 $f''(x)=f''(\xi)<0$.

方法二. 任取 $x_1, x_2\in(a,b)$，并 $x_1<x_2$.

由 $f(x)$ 上凸 $\Longrightarrow$ $f(x_1)\le f(x_2)+f'(x_2)\cdot(x_1-x_2)$ ---①

$f(x_2)\le f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$ ……②

①+②　$f(x_1)+f(x_2)\le f(x_2)+f(x_1)+[f'(x_2)-f'(x_1)]\cdot(x_1-x_2)$

$\Longrightarrow (x_1-x_2)\cdot[f'(x_2)-f'(x_1)]\ge0$ 所以，当 $x_1<x_2$ 时，$f'(x_2)-f'(x_1)\le0$

$f'(x_2)\le f'(x_1)$ 即 $f'(x)$ 递减，所以 $f''(x)<0$.