§2.3　函数 (Functions)

一. 函数的定义

1. 定义：设 A 和 B 是两个非空集合。f 称为从 A 到 B 的函数，是说：对于 A 中的每一个元素 a，有 B 中唯一的元素 b 与 a 对应，记作 f(a)=b. 从 A 到 B 的函数 f 记为 $f: A\to B$。

*函数有时也称为映射(mapping)或变换(transformation).

例子：一个班学生的成绩可以看作是一个函数。

（见书 P139, 图 1）

*函数常常可以用一个公式表示，例如：f(x) = x+1, 其中 A 和 B 都是实数集。

*函数也可以用一个二元关系来定义，$f: A\to B$, 则 $f\subseteq A\times B$ 是一个二元关系，使得对于每一个$a\in A$，只有唯一的一个有序对$(a,b)\in f$, 那么我们定义 f(a)=b.

2. 定义域与值域

设 $f: A\to B$为函数，那么 A 称为 f 的定义域(domain),B 称为 f 的值域(codomain)。如果 f(a)=b, 那么 b 称为 a 在 f 下的像(image), a 称为 b 在 f 下的原像(preimage)。f(A)={f(a) | a∈A} 称为 A 在 f 下的像集(range).

3. 两个函数相等的定义

两个函数 f: A→B 和 $g:C\to D$相等，当且仅当 A=C, B=D 且 $\forall x\in A=C$，有 f(x)=g(x).

4. 例子：

例 1：在前面的学生成绩的例子中，函数的定义域、值域和像集是什么？

解；函数 G: {Adams,Chou,Goodfriend,Rodriguez,Stevens}→{A,B,C,D,F}，定义域：{Adams,Chou,Goodfriend,Rodriguez, Stevens}， 值域：{A,B,C,D,F}，像集：{A,B,C,F}。

例 2：设给定研究生和他们的年龄偶对组成的二元关系 R 如下，由 R 确定的函数是什么？R={(Abdul, 22), (Brenda, 24), (Carla, 21), (Desire, 22), (Eddie, 24), (Felicia, 22)}.

解：由 R 确定的函数 f 是：

f: { Abdul, Brenda, Carla, Desire, Eddie, Felicia}→{21,22,23,24}

其中：f(Abdul)= 22, f(Brenda)= 24, f(Carla)= 21, f(Desire)= 22, f(Eddie)= 24, f(Felicia)= 22.

例 4：设函数 f: Z→Z, 其中$f(x)=x^2$. 那么 f 的定义域和值域是 Z，像集是：{0, 1, 4, 9, ⋯}.

*函数的运算：

设f_1和f_2都是 A 到 R 的函数，那么f_1+f_2和f_1f_2也是 A 到 R 的函数，定义为：

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

$$(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)$$

例 6: 设: $f_1: R\to R, f_2: R\to R$, 使得$f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x-x^2$. 问：f_1+f_2和f_1f_2是什么样的函数？

解：$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=x^2+(x-x^2)=x.$

$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$

*像：设 f 是 A 到 B 的函数，$S \subseteq A$, S 在 f 下的像 f(S)(image of S under f)定义为：$f(S) = \{t | \exists s \in S(t = f(s))\}$.

简写为：f(S)={f(s)|$s \in S$}.

例 7：设 A={a,b,c,d,e}和 B={1,2,3,4}, 函数 f: $A \to B$定义为:

f(a)=2, f(b)=1, f(c)=4, f(d)=1, f(e)=1, S={b,c,d}. 那么

f(S)={1,4}.

二． 单射、满射和双射

1. 单射：

函数$f: A \to B$称为是一一映射(one to one)或单射(injective)

当且仅当 f(a)=f(b)蕴含 a=b 对任意 a,b∈A 成立。

*$f: A \to B$ 是单射当且仅当$\forall a \forall b(f(a) = f(b) \to a = b)$为真，也可定义为$\forall a \forall b(a \neq b \to f(a) \neq f(b))$为真，其中 a, b 的论域为 A。

*这两个定义提供了证明单射的方法。

例 8：设 f: {a,b,c,d}→{1,2,3,4,5}满足：f(a)=4, f(b)=5, f(c)=1, f(d)=3. 那么 f 是一个单射函数。

*单射函数的图像（见书 P142, 图 3）

例 9：设 f: R→R 且$f(x) = x^2$, 问 f 是否单射？

解：因为 f(−1)=f(1)=1, 但$-1 \neq 1$，故 f 不是单射。

如果限制 f 的定义域：f: $Z^+ \to Z^+$且f(x)=x^2，那么 f 是单射。

例 10：设$f: R \to R$, 满足: f(x)=x+1， 问 f 是否单射？

解：f 是单射函数. 因为$\forall x, y \in R, f(x) = f(y) \Rightarrow x + 1 = y + 1$
$\Rightarrow x = y$.

*单调函数和严格单调函数

设函数 f: $R \to R$，如果$\forall x, y \in R$ 且 $x < y$, 有 $f(x) \leq f(y)$，那么 f 称为单调递增函数(increasing function); 若 $\forall x, y \in R$ 且 $x < y$, 有 $f(x) < f(y)$，那么 f 称为严格单调递增函数(strictly increasing function)；如果$\forall x, y \in R$ 且 $x < y$, 有 $f(x) \geq f(y)$，那么 f 称为单调递减函数(decreasing function);
如果$\forall x, y \in R$ 且 $x < y$, 有 $f(x) > f(y)$，那么 f 称为严格单调递减函数(strictly decreasing function).

2. 满射

函数$f: A \to B$称为是映上函数(onto)或满射(surjective)当且仅当对任意$b \in B$, 存在 $a \in A$, 有 $f(a) = b$。

*函数 f: $A \to B$是满射当且仅当$\forall y \exists x (f(x) = y)$为真，y 的论域是 B，x 的论域是 A。

*这个定义提供了证明满射的方法。

例 11：设 f: {a,b,c,d}→{1,2,3}，满足：f(a)=3, f(b)=2, f(c)=1, f(d)=3, f 是否满射？

解：f 是满射。

*满射的图像见书 P143，图 4.

例 12：设 f: Z →Z 且 $f(x)=x^2$，问：f 是否满射？

解：f 不是满射，因为存在$2 \in Z$，但对任意$x \in Z, f(x) = x^2 \neq 2$.

3. 双射

函数 f: $A \to B$ 称为是一一映上的(one to one correspondence)或双射(bijection)当且仅当 f 既是满射,又是单射。

例 13：函数 f: $R \to R$且 f(x)=x+1，问 f 是否双射？

解：f 是双射。首先证明 f 是单射，在例 10 中已证明。

再证明 f 是满射。$\forall y \in R$, 存在 $x \in R$，使得 $f(x) = x + 1 = y$，即存在 $x = y - 1 \in R$, 使得 $f(x) = x + 1 = (y - 1) + 1 = y$. 所以 f 是满射。

因为 f 既是单射又是满射，故 f 是双射。

例 14：设 f: {a,b,c,d}→{1,2,3,4}且 f(a)=4, f(b)=2, f(c)=1, f(d)=3. 问：f 是否双射？

解：f 是双射，因为 f 既满足单射的定义，又满足满射的定义。

*几种函数的图像见书 P144,图 5.

例 15：恒等函数ι_A: A→A, 满足：$\iota_A(x) = x$。

解：恒等函数ι_A是 A 到 A 的双射函数。

三．反函数与函数的复合

1. 反函数(Inverse function)

设函数 f 是 A 到 B 的双射函数，那么 f 的反函数

f^{-1}: B→ A定义为$f^{-1}(b) = a$当且仅当 f(a)=b。

*函数 f 的反函数存在当且仅当 f 是双射函数。

例 16：设 f: {a,b,c}→{1,2,3}且 f(a)=2, f(b)=3, f(c)=1.求:f^{-1}。

解：因为 f 是双射函数，故f^{-1}存在。$f^{-1}(1) = c, f^{-1}(2) = a, f^{-1}(3) = b.$

例 17：设 f: $R \to R$，满足：f(x)=x+1，问 f 是否可逆？如果是，求：f^{-1}。

解：在例 13 中已证 f 是双射函数，故 f 可逆。$f^{-1}: R \to R$，满足当 f(x)=x+1=y，有$f^{-1}(y) = x = y - 1$。

例 18：设 f: $R \to R$,满足 f(x)=x^2，问 f 是否可逆的？

解：由例 9 知 f 不是单射（事实上，也不是满射），故 f 不是双射，因而不可逆。

2. 函数的复合

设$g: A \to B$和$f: B \to C$是函数，函数 f 和 g 的复合，记作$f \circ g$，定义为：$f \circ g(a) = f(g(a))$，$\forall a \in A.$

*$f \circ g$ 是 A 到 C 的函数。

*$f \circ g$ 的图像见书 P147, 图 7.

例 20：设 g: {a,b,c}→{a,b,c},满足 g(a)=b, g(b)=c, g(c)=a;

f: {a,b,c}→{1,2,3}，满足 f(a)=3, f(b)=2, f(c)=1，求：$f \circ g$.

解：$(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) = f(b) = 2$，$(f \circ g)(b) = f\big(g(b)\big) = f(c) = 1$，$(f \circ g)(c) = f\big(g(c)\big) = f(a) = 3.$

注意：$g \circ f$没有定义，因为 f 的值域不是 g 的定义域。

例 21：设 f: $Z \to Z$且 f(x)=2x+3, g: $Z \to Z$且 g(x)=3x+2，求：$f \circ g$和$g \circ f$.

解：$f \circ g$和$g \circ f$都有定义，因为 f 和 g 的定义域和值域都是 Z。

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(3x+2)=2(3x+2)+3=6x+7$$

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(2x+3)=3(2x+3)+2=6x+11$$

*注意：一般情况下，$f\circ g\neq g\circ f$.

*函数 f: $A\to B$与反函数$f^{-1}: B\to A$的复合：

设 f(a)=b，那么$f^{-1}(b)=a$.

$$(f^{-1}\circ f)(a)=f^{-1}\big(f(a)\big)=f^{-1}(b)=a,\quad \forall a\in A \text{ 成立。}$$

$$(f\circ f^{-1})(b)=f\big(f^{-1}(b)\big)=f(a)=b,\quad \forall b\in B \text{ 成立。}$$

所以 $f^{-1}\circ f=\iota_A,\quad f\circ f^{-1}=\iota_B$.

注意有：$(f^{-1})^{-1}=f$

例子：设 g: A→B, f: B→C. 证明：

(1) 如果 f 和 g 是满射，则 f∘g 是满射；

(2) 如果 f∘g 是单射，则 g 是单射。

证明：(1) 对任意的 z∈C,因为 f 是满射，故存在 y∈B，使得 f(y) = z。又因为 g 是满射，存在 x∈A，使得 g(x) = y。故存在 x∈A，使得 f∘g(x) = f(g(x)) = f(y) = z。从而 f∘g 是满射。

(2) 设 f∘g 是单射。若存在 y∈B 和 a, b ∈A，使得 g(a) = g(b) = y，那么 f∘g(a) = f(g(a)) = f(y) = f(g(b)) = f∘g(b)，由于 f∘g 是单射，故 a = b。从而，由 g(a) = g(b)，有 a = b。故 g 是单射。

四． 函数的图像

设 f: $A\to B$为函数，那么函数 f 的图像定义为$\{(a,b)|a\in A \text{ 且 } b=f(a)\}\subseteq A\times B$.

例 22：设 f: $Z\to Z$且 f(n)=2n+1，展示 f 的图像。

解：f 的图像为$\{(n, 2n+1)|n \in Z\}$，图示见书 P148，图 8.

例 23：设 f: $Z \rightarrow Z$且 $f(x)=x^2$，展示 f 的图像。

解：f 的图像为$\{(x, x^2)|x \in Z\}$，图示见书 P148，图 9.

*当 f: $R \rightarrow R$且 $f(x)=x^2$的图像。

五．几个重要的函数

1. 下取整函数和上取整函数(floor function and ceiling function)

实数 x 的下取整函数是不大于 x 的最大整数，记为$\lfloor x \rfloor$；实数 x 的上取整函数是不小于 x 的最小整数，记为$\lceil x \rceil$.

*$\lfloor x \rfloor$有时记为$[x]$.

2. 例子：

例 24：$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor=0$，$\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil=1$，$\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor=-1$，$\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil=0$，$\lfloor 3.1 \rfloor=3$，$\lceil 3.1 \rceil=4$，$\lfloor 7 \rfloor=7$，$\lceil 7 \rceil=7$.

*下取整和上取整函数的图形见书 P149，图 10.

$\forall x \in [n, n+1), \lfloor x \rfloor = n; \quad \forall x \in (n, n+1], \lceil x \rceil = n+1.$

*下取整、上取整函数出现在实际应用中的例子。

例 25：计算机磁盘上的数据在网络传输中是以字节为单位的，一个字节占 8 位二进制位。问：要传输 100 位二进制位的数据，要多少字节？

解：它的字节数应为大于等于 100/8 的最小整数，即$\lceil 100/8 \rceil=\lceil 12.5 \rceil=13$ 个字节。

3. 下取整和上取整函数的一些性质：

(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $n \le x < n+1$

(1b) $\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $n-1 < x \le n$

(1c) $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $x-1 < n \le x$

(1d) $\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $x \le n < x+1$

(2) $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

(4a) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(4b) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

*我们选其中一个式子证明。

证明：（4a）假设$\lfloor x \rfloor = m$, 其中 m 是一个整数。由性质(1a), $m \le x < m+1$,在此不等式两边加上 n，得$m+n \le x+n < m+n+1$，再由性质(1a), 有$\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$，这就完成了证明。

* 在考虑$\lfloor x \rfloor$和$\lceil x \rceil$时，若$\lfloor x \rfloor = n$, 我们把 x 看作 x=n+ε $(0 \le \varepsilon < 1)$; 若$\lceil x \rceil = n$, 我们把 x 看作 x=n−ε $(0 \le \varepsilon < 1)$.

例 29：证明：如果 x 是实数，那么$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor$.

解：设$x = n+\varepsilon$, 其中 n 是整数且 $0 \le \varepsilon < 1$。分两种情形讨论：

情形 1：$0 \le \varepsilon < \frac{1}{2}$. 在这种情况下，2x=2n+2ε，因为$2\varepsilon < 1$, 有 $\lfloor 2x \rfloor = 2n$，而 $x+\frac{1}{2} = n+(\varepsilon+\frac{1}{2})$，因为$\varepsilon+\frac{1}{2} < 1$，有$\left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n+(\varepsilon+\frac{1}{2}) \right\rfloor = n$, 故 $\lfloor 2x \rfloor = 2n = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2} \right\rfloor =$

$n + n = 2n$。

情形 2：$\frac{1}{2} \leq \varepsilon < 1$. 这时，$2x = 2n + 2\varepsilon = 2n + 1 + (2\varepsilon - 1)$. 因为 $0 \leq 2\varepsilon - 1 < 1$，所以 $\lfloor 2x \rfloor$ =2n+1. 因为 $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n + (\frac{1}{2} + \varepsilon) \right\rfloor = \left\lfloor n + 1 + (\varepsilon - \frac{1}{2}) \right\rfloor$，并且$0 \leq \varepsilon - \frac{1}{2} < 1$，所以 $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$=n+1. 结果$\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1 = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + n + 1$，这就完成了证明。

例 28：证明或否证：$\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$对任意实数 x 和 y 成立。

解：这个公式看起来很合理，但它却为假。当 x=$\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$时，是个反例。因为$\left\lceil \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil = 1 \neq \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1 + 1 = 2$。

2. n 阶乘函数(factorial function)

f: N→ Z^+，其中 f(n)=n!=$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ 。

注意：约定 f(0)=0!=1

例 29：我们有 f(1)=1!=1,　f(2)=2!=1·2=2,

f(6)=6!=1·$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$,

$f(20) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 20 = 2{,}432{,}902{,}008{,}176{,}640{,}000$

n!随 n 增长的速度极快，这可由 Stirling 公式更清楚地看出。

Stirling 公式：$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

$f(n) \sim g(n)$表示:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

作业：

1. 设$f: R \to R, f(x) = x^2 - 2$; $g: R \to R, g(x) = x + 4; h: R \to R$, $h(x)=x^3 - 1$.

(1) 求$f \circ g$和$g \circ f$;

(2) 问$f \circ g$和$g \circ f$是否为单射、满射或双射？

(3) f, g, h 中哪些函数有反函数？如果有，求出这些反函数。

2. 设$f: A \to B, g: B \to C$且$g \circ f: A \to C$是双射。

证明：

(1) $f: A \to B$ 是单射；

(2) $g: B \to C$ 是满射。

3. 给出一个函数的显式表达式，该函数是从整数集合到正整数集合的函数，且满足以下性质：

(1) 是单射但不是满射；

(2) 是满射但不是单射；

(3) 是双射；

(4) 既不是单射又不是满射；

4. 设 x 是一个实数。证明：$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$.