中山大學 本科生考试草稿纸 2011 3/1-25

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.75.6 $g(r)=\begin{cases}\dfrac{GMr}{R^3}, & r<R,\\ \dfrac{GM}{r^2}, & r\geq R\end{cases}$

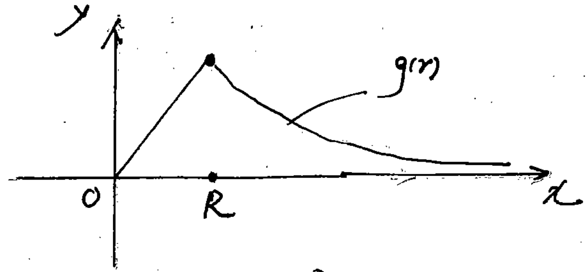
(1) $g(r)$ 是否连续？ $g(R)=\dfrac{GM}{R^2}$； $r<R$ 时，$g(r)=\dfrac{GMr}{R^3}$ 连续；

$r>R$ 时，$g(r)=\dfrac{GM}{r^2}$ 连续.

$$\lim_{r\to R-0} g(r)=\lim_{r\to R-}\frac{GMr}{R^3}=\frac{GM}{R^2},\quad \lim_{r\to R+0} g(r)=\lim_{r\to R+0}\frac{GM}{r^2}=\frac{GM}{R^2}$$

$$\lim_{r\to R-0} g(r)=\lim_{r\to R+0} g(r)=\frac{GM}{R^2}=g(R)$$ ，从而 $g(r)$ 在 $r=R$ 也连续。

(2) 作 $g(r)$ 的草图；



(3) $g(r)$ 是否可导？

$r<R$ 时，$g'(r)=\dfrac{GM}{R^3}$，$g(r)$ 可导；

$r>R$ 时，$g'(r)=\dfrac{-2GM}{r^3}$，$g(r)$ 也可导；

$$g'(R+0)=\lim_{r\to R+0}\frac{g(r)-g(R)}{r-R}=\lim_{r\to R+0}\frac{\frac{GM}{r^2}-\frac{GM}{R^2}}{r-R}=\lim_{r\to R+0}\frac{GM\,\frac{R^2-r^2}{r^2\cdot R^2}}{r-R}$$

$$=\lim_{r\to R+0}\frac{-GM(r+R)}{r^2R^2}=-\frac{2GM}{R^3}$$

$$g'(R-0)=\lim_{r\to R-0}\frac{g(r)-g(R)}{r-R}$$

$$=\lim_{r\to R-0}\frac{\frac{GMr}{R^3}-\frac{GM}{R^2}}{r-R}=\lim_{r\to R-0}GM\frac{r-R}{R^3\cdot(r-R)}=\frac{GM}{R^3}$$

$g'(R+0)\neq g'(R-0)$ ，从而 $g(r)$ 在 $r=R$ 不可导。

P.75.7 求二次函数 $p(x)$，使得：点 $(1,3)$ 在曲线 $p(x)$ 上，且 $p'(0)=3$，$p'(2)=1$.

解：设 $p(x)=ax^2+bx+c$.

则 $p'(x)=2ax+b$

$$\begin{cases}p(1)=3\\ p'(0)=3\\ p'(2)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=3\\ b=3\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=3\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$p(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}.$$