高等数学(I)下学期总结

第一部分．多元函数微分

第二部分．多元函数积分

第三部分．常微分方程

第四部分．级数，无穷积分

第三部分．常微分方程

- 方程类型：常微分方程，偏微分方程
- 方程解法：积分法，幂级数解法，数值解法
- 问题：解的存在唯一性，定性分析，求解方程

基本概念：方程的阶，通解，特解，通积分，初值问题

1．初等积分法.

- $y^{(n)} = f(x)$.
  解法：反复求不定积分.
- 变量分离方程：$P(x)dx = Q(y)dy$.
  解法：方程两边求不定积分.
- 全微分方程：$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,
  其中$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
  解法：求函数$u(x,y)$，使得$du = Pdx + Qdy$.
- 可降阶方程$F(x, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.
  解法：设$u = y'$，降阶.

2. 线性微分方程.

- 解的存在唯一性定理. 设函数
$$p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$$
在区间$[a,b]$上连续. 则初值问题
$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x),$$
$$y(a)=\xi_0,\ y'(a)=\xi_1, \dots,\ y^{(n-1)}(a)=\xi_{n-1}$$
在区间$[a,b]$上存在唯一的解.

- 解的结构. 通解=全部解
$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)+\psi(x).$$

- 一阶齐次方程: $y'+p(x)y=0$.
解法: 可变量分离, $\frac{1}{y}dy+p(x)dx=0$,
得$y=Ce^{-\int p(x)dx}$.

- 常系数齐次方程(二阶): $y''+ay'+b=0$.
解法: 考虑特征方程$\lambda^2+a\lambda+b=0$的根.

两不同实根λ_1,λ_2	$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
二重根λ	$y=e^{\lambda x}(C_1x+C_2)$
一对复根$\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

- 非齐次方程: 首先求解齐次方程, 然后用待定系数法或者常数变易法求特解.

- 几类典型方程.
  - 齐次(非线性)方程: $y' = f(\frac{y}{x})$.
    解法: 换元$u = \frac{y}{x}$, 化为变量分离方程.
  - 伯努利方程: $y' + p(x)y = q(x)y^n$.
    解法: 两边同除y^n, 化为线性方程,
    $\frac{1}{1-n}(y^{1-n})' + p(x)y^{1-n} = q(x)$.
  - 欧拉方程:

    $$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = q(x).$$

    解法: 换元$x = e^t$, 化为常系数线性方程.

例1. 求微分方程$xy' - y = (x-1)e^x$的通解.
解. 齐次方程的通解为$e^{\int \frac{1}{x}dx} = Cx$.
设$y = C(x)x$, 代入方程, 得$x^2C'(x) = (x-1)e^x$.
所以$C(x) = -\frac{e^x}{x} + C$, $y = -e^x + Cx$.

例2. 求微分方程$(x+2y)dx+(2x-3y)dy=0$的通积分.
解. 全微分方程, 观察可得$\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2=C$.

例3. 求微分方程$(3x+5y)dx+(4x+6y)dy=0$的通积分.
解. 方程可化为齐次方程$y'+\frac{3+5\frac{y}{x}}{4+6\frac{y}{x}}=0$.
设$u=\frac{y}{x}$, $y=xu$, 得$xu'+u+\frac{3+5u}{4+6u}=0$,
$xu'+\frac{3(u+1)(2u+1)}{2(3u+2)}=0$,
$\frac{2(3u+2)du}{(u+1)(2u+1)}+\frac{3dx}{x}=0$, $(u+1)^2(2u+1)x^3=C$,
$(x+y)^2(x+2y)=C$.

例4. 求解初值问题: $y'+\frac{y}{x}=y^3$, $y(1)=1$.
解. (i) 两边同除y^3, 得$-\frac{1}{2}(y^{-2})'+\frac{1}{x}y^{-2}=1$.
设$u=y^{-2}$, 化为线性方程$u'-\frac{2}{x}u=-2$.
(ii) 齐次方程$u'-\frac{2}{x}u=0$的通解为$e^{\int\frac{2}{x}dx}=Cx^2$.
设$u=C(x)x^2$, 代入方程得$C'(x)x^2=-2$.
于是$C(x)=\frac{2}{x}+C$, $u=2x+Cx^2$.
(iii) 代入初值$u(1)=1$, 得$C=-1$.
所以初值问题的解为$y=(2x-x^2)^{-1/2}$.

例5．求微分方程$y'' + y = 3x + 2e^{-x}$的通解．
解．(i) 齐次方程的特征根为一对复根$\pm i$，
通解为$C_1 \cos x + C_2 \sin x$．
(ii) 设$y = (ax + b) + ce^x$，代入方程，得

$$ax + b + ce^x + ce^{-x} + ce^{-x} = 3x + 2e^{-x}.$$

比较两边得$a = 3$，$b = 0$，$c = 1$．于是得到方程的一个特解$y = 3x + e^{-x}$．
(iii) 综上所述，方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x + e^{-x}.$$

例6．求微分方程$y'' - 2y' + y = 6(x + 1)e^x$的通解．
解．(i) 齐次方程的特征根为二重根1，
通解为$e^x(C_1 + C_2 x)$．
(ii) 设$y = e^x(ax^2 + bx^3)$，代入方程，得

$$\begin{aligned}&e^x(ax^2 + bx^3) + 2e^x(2ax + 3bx^2) + e^x(2a + 6bx)\\&- 2e^x(ax^2 + bx^3) - 2e^x(2ax + 3bx^2)\\&+ e^x(ax^2 + bx^3) = 6(x + 1)e^x.\end{aligned}$$

比较两边得$a = 3$，$b = 1$．于是得到方程的一个特解$y = (3x^2 + x^3)e^x$．
(iii) 综上所述，方程的通解为

$$y = e^x(C_1 + C_2 x + 3x^2 + x^3).$$

例7. 求微分方程$y''+y=\frac{1}{\sin x}$的通解.
解. (i) 齐次方程的特征根为一对复根$\pm i$,
通解为$C_1\cos x+C_2\sin x$.
(ii) 设$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$. 解方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0, \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\frac{1}{\sin x}, \end{cases}$$

得$C_1'(x)=-1$, $C_2'(x)=\cot x$.
$C_1(x)=-x+C_1$, $C_2(x)=\ln|\sin x|+C_2$.
于是方程的通解为

$$y=(-x+C_1)\cos x+(\sin x\cdot\ln|\sin x|+C_2)\cos x.$$

例8. 求微分方程$x^2y''-4xy'+6y=0$的通解.
解. 设$x=e^t$, $t=\ln x$. 则$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$,
$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(e^{-t}\frac{dy}{dt})=\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt})\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$.
原方程化为$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=0$, 通解为

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}=C_1x^2+C_2x^3.$$