

关于双重积分计算概率，由于双重积分涉及较多内容，且不知道你们数学分析讲到哪里了，所以在当前这个阶段，请大家按以下 3 步骤：1. 确定区域，积分范围就是区域。2. 决定先对 x 还是 y 积分，3. 假设先对 y 积分， y 的上下限通过垂直穿云箭确定，与区域上下边界有两个交点，下边是下限，上边是上限，上下限写成 x 的函数（常数也可以认为是函数） x 则取积分区域左右区间，因为 y 的上下限已经描述了曲线范围， x 取值范围是数值，而不是 y 的函数；如果先对 x 积分，则水平穿云箭，看左右两交点，其他与 y 同理。这样，就相当于把一个平面区域通过 x, y 的上下限描述出来了。在这个区域上计算积分，实际上就是以这个区域为底，以概率密度函数为高的立体的体积。

二重积分容易让人困惑的关键问题：为啥有时候能拆开变成两个积分相乘，而有时候必须分步，先积分一个，得到另一个变量的函数再积分？

先参见二重积分如何变成二次积分：

<http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5309/530902.htm>

那么到底什么时候可以变成两个定积分相乘呢：

条件：

(1) 积分区域为常量，边界平行于两条坐标轴

(2) 被积函数 $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ (可以拆分成两个函数互不包含)，比如 xy

如果 $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ 或者 $\ln(x+y)$ 之类则显然不能拆分了。

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} A e^{-(2x+y)} dx dy = A \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy$$

这里借用一下数学课本的图☺

那么又是什么时候不能拆分成两个积分相乘呢？（不满足以上 2 条件的都不能拆分，老老实实做 2 次积分），比如下面这个例子（右下角图）：积分区域的部分边界是由一个自变量表达成另一个自变量的函数的，就不能直接拆成两个积分相乘。

其中 $\int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} 6e^{-(2x+3y)} dy$ 的二次积分记作方法，按照积分的步骤来说，应该写成

这样：

(3) (X, Y) 落在三角形区域 $D: x \geq 0, y \geq 0, 2x+3y \leq 6$

内的概率。

$$\begin{aligned} \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} 6e^{-(2x+3y)} dy &= \int_0^3 \left[\int_0^{2-\frac{2x}{3}} 6e^{-(2x+3y)} dy \right] dx \\ &= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} 6e^{-(2x+3y)} dy \\ &= 1 - 7e^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{解 } P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D 6e^{-(2x+3y)} dx dy$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2x}{3}} 6e^{-(2x+3y)} dy$$

$$= 1 - 7e^{-6}$$

