中山大學 本科生考试草稿纸

2012 16/4

P.223. 2.(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ $(p>0, q>0)$

解：令 $f(n) = \frac{1}{n\cdot(\ln n)^p\cdot(\ln\ln n)^q}$，则 $f(x)$ 单调递减。

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p\cdot(\ln\ln x)^q} = \int_3^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^p\cdot(\ln\ln x)^q} \xlongequal{\text{令 } u=\ln x} \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u^p(\ln u)^q}$$

① $0<q<1$，$p>1$ 时，

$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u^p(\ln u)^q} < \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$，而 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$ 收敛，所以级数收敛。

② $0<q<1$，$0<p<1$ 时，

$$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u^p(\ln u)^q} > \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u\cdot(\ln u)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{d\ln u}{(\ln u)^q}$$

而 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{d\ln u}{(\ln u)^q}$ 发散，所以级数发散。

③ $q>1$，$p=1$，$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u\cdot(\ln u)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{d\ln u}{(\ln u)^q}$ 收敛.

所以，级数收敛。

④ $0<q\le 1$，$p=1$．$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u(\ln u)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{d\ln u}{(\ln u)^q}$ 发散，

所以，级数发散。