《离散数学》(上)期末考试试题(A卷)

(请将所有答案写在答题纸上，注意写清题号)

年级：2004级　　班级：A、B班　　专业：计算机科学与技术　　任课教师：周晓聪

一、求解下列有关一阶逻辑的题目(28分)

1. 令$Q(x)$表示x是汽车，$H(x)$表示x是火车，$K(x,y)$表示x比y跑得快，请在一阶逻辑中符号化：(a). 有的火车比所有的汽车跑得快；(b). 说所有的火车比所有的汽车都跑得快是不对的(6分)。

2. 在论域$D=\{a,b\}$展开公式$\forall x F(x,y) \leftrightarrow \exists y G(x,y)$中的量词(4分)。

3. 求公式$\forall x(F(x) \to G(x,y)) \to (\exists y H(y) \to \exists z L(y,z))$的前束范式(4分)。

4. 在一阶逻辑的自然推理系统中，指出下面证明中的错误(6分)：

(1)	$\exists x P(x)$	// 前提引入
(2)	$P(a)$	// (1)存在量词消除
(3)	$\exists x P(x) \to \forall y R(y)$	// 前提引入
(4)	$P(a) \to \forall y R(y)$	// (3)存在量词消除
(5)	$P(a) \to R(b)$	// (4)全程量词消除
(6)	$R(b)$	// (2),(5)假言推理
(7)	$P(a) \wedge R(b)$	// (2),(6)合取
(8)	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	// (7)存在量词引入

5. 令$F(x)$表示x是喜欢步行的人，$G(x)$表示x是喜欢骑自行车的人，$H(x)$表示x是喜欢乘汽车的人，请在一阶逻辑中符号化下面的推理，并在自然推理系统中进行验证(8分)：

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车. 每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车. 有的人不喜欢乘汽车. 因此有的人不喜欢步行.

二、设A、B、C是集合，求下列各式成立的充分必要条件，并说明原因：(12分)

1. $(A-B)\cup(A-C)=A$
2. $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$
3. $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$
4. $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

三、给定$A=\{1,2,3,4\}$上的关系R,S如下：(10分)

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$　　　$S=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

求：$R-S$,　$S\circ R$,　R^3,　$r(R)$,　$s(S)$。

四、在1到300的整数中（1和300包括在内）分别求满足以下条件的整数个数：(8分)

1. 被3或者被5整除的数（即是3的倍数或者是5的倍数的数）的个数；
2. 既不能被3和5，也不能被7整除的数的个数。

五、给定$A=\{1,2,3,4,8,9,36\}$**上的关系**$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A$**且**$y$**是**$x$**的倍数**$\}$**：**(10分)

1. 划出偏序关系R的哈斯图；
2. 求A的子集$B=\{3,4,9\}$的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界和下确界。

六、设R**和**S**是非空集合**A**上的等价关系，证明：**(10分)

$R\circ S$是等价关系当且仅当$R\circ S=S\circ R$。

七、对非空集合A**上关系**R**：**(12分)

1. 证明：$sr(R)=rs(R)$；
2. 证明：$tr(R)=rt(R)$；
3. 举例说明：$ts(R)$不一定等于$st(R)$。

八、设$f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C$**是函数，证明：**(10分)

1. 若$g\circ f$是满射，且g是单射，则f是满射；
2. 若$g\circ f$是单射，且f是满射，则g是单射。

注意：我们已经证明过的命题是：$g\circ f$是满射蕴含g是满射；$g\circ f$是单射蕴含f是单射。

《离散数学》(上) 期末考试试题参考答案(A卷)

一、求解下列有关一阶逻辑的题目(28分)

1. (6分) 解:

(a). $\exists x(H(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow K(x,y))$ (b). $\neg(\forall x \forall y(H(x) \wedge Q(x) \rightarrow K(x,y)))$

2. (4分) 解:

$$\forall x F(x,y) \leftrightarrow \exists y G(x,y) \Leftrightarrow \forall x F(x,u) \leftrightarrow \exists y G(v,y)$$
$$\Leftrightarrow (F(a,u) \wedge F(b,u)) \leftrightarrow (G(v,a) \vee G(v,b))$$

3. (4分) 解:

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x,y)) \rightarrow (\exists y H(y) \rightarrow \exists z L(y,z))$$
$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x,y)) \rightarrow (\exists u H(u) \rightarrow \exists z L(y,z))$$
$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x,y)) \rightarrow \forall u \exists z(H(u) \rightarrow L(y,z))$$
$$\Leftrightarrow \exists x \forall u \exists z((F(x) \rightarrow G(x,y)) \rightarrow (H(u) \rightarrow L(y,z)))$$

4. (6分) 解:题中的推理存在以下错误:

(a) (3)中的$\exists x$的辖域不是整个公式不能使用量词消除规则;

(b) (3)使用存在量词消除规则不能使用常量a,因为a已经在前面出现;

(c) (4)中的$\forall y$的辖域不是整个公式,不能使用量词消除规则;

(d) (8)中对(7)引入存在量词,不能用x同时去替换(7)中的x和y。

5. (8分)解:前提符号化为:

$$\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x)), \quad \forall x(G(x) \vee Q(x)), \quad \exists x(\neg Q(x))$$

结论符号化为:$\exists x(\neg F(x))$,验证该推理的证明序列如下:

(1) $\exists x(\neg Q(x))$ // 前提引入
(2) $\neg Q(c)$ // (1)存在量词消除
(3) $\forall x(G(x) \vee Q(x))$ // 前提引入
(4) $G(c) \vee Q(c)$ // (3)全称量词消除
(5) $G(c)$ // (2),(4)析取三段论
(6) $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$ // 前提引入
(7) $F(c) \rightarrow \neg G(c)$ // (6)全称量词消除
(8) $\neg F(c)$ // (5),(7)拒取式
(9) $\exists x(\neg F(x))$ // (8)存在量词消除

二、设A、B、C是集合，求下列各式成立的充分必要条件，并说明原因：(12分)

1. $(A-B)\cup(A-C)=A$
2. $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$
3. $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$
4. $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

解：

1. $B\cap C\subseteq\sim A$ 2. $A\subseteq B\cap C$ 3. $A\subseteq B\cup C$ 4. $B=C$

三、给定$A=\{1,2,3,4\}$上的关系R,S如下：(10分)

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$ $S=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

求：$R-S$, $S\circ R$, R^3, $r(R)$, $s(S)$。

解：

$$R-S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\} \qquad S\circ R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

$$R^3=\{\langle 3,3\rangle\} \qquad r(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

$$s(R)=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$

四、在1到300的整数中（1和300包括在内）分别求满足以下条件的整数个数：(8分)

1. 被3或者被5整除的数（即是3的倍数或者是5的倍数的数）的个数；
2. 既不能被3和5，也不能被7整除的数的个数。

解：令：

(i) $A=\{x\mid 1\leq x\leq 300\wedge x\text{是3的倍数}\}$；

(ii) $B=\{x\mid 1\leq x\leq 300\wedge x\text{是5的倍数}\}$；

(iii) $B=\{x\mid 1\leq x\leq 300\wedge x\text{是7的倍数}\}$。

则：

$$|A|=\lfloor 300/3\rfloor=100 \qquad |B|=\lfloor 300/5\rfloor=60 \qquad |C|=\lfloor 300/7\rfloor=42$$

$$|A\cap B|=\lfloor 300/lcm(3,5)\rfloor=\lfloor 300/15\rfloor=20$$

$$|A\cap C|=\lfloor 300/lcm(3,7)\rfloor=\lfloor 300/21\rfloor=14$$

$$|B\cap C|=\lfloor 300/lcm(5,7)\rfloor=\lfloor 300/35\rfloor=8$$

$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 300/lcm(3,5,7)\rfloor=\lfloor 300/105\rfloor=2$$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=100+60-20=140$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

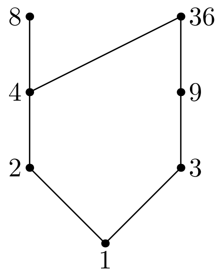
$$=100+60+42-20-14-8+2=162$$

因此，被3或者被5整除的数（即是3的倍数或者是5的倍数的数）的个数等于$|A\cup B|=140$，而既不能被3和5，也不能被7整除的数的个数等于$300-|A\cup B\cup C|=300-162=138$。

五、给定$A=\{1,2,3,4,8,9,36\}$上的关系$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A$且$y$是$x$的倍数$\}$：(10分)

解：

1. 偏序关系的哈斯图如下：



2. B的极大元是4, 9，极小元是3, 4, 最大元和最小元不存在，上界有36, 下界有1, 上确界是36, 下确界是1。

六、设R和S是非空集合A上的等价关系，证明：(10分)

$R\circ S$是等价关系当且仅当$R\circ S=S\circ R$

证明 1. ($\Rightarrow$)：如果$R\circ S$是等价关系，则：

$$
\begin{aligned}
R\circ S &= (R\circ S)^{-1} && // \quad R\circ S\text{是对称关系} \\
&= S^{-1}\circ R^{-1} && // \quad \text{复合与逆的性质} \\
&= S\circ R && // \quad R,S\text{都是对称关系，从而}R^{-1}=R, S^{-1}=S
\end{aligned}
$$

2. ($\Leftarrow$)：如果$R\circ S=S\circ R$，则首先由R,S是自反关系得$R\circ S$是自反关系，而

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R=R\circ S$$

因此$R\circ S$也是对称关系。最后：

$$(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ S=R\circ R\circ S\circ S\subseteq R\circ S$$

因此$R\circ S$也是传递关系。综上有$R\circ S$是等价关系。 □

七、对非空集合A上关系R：(12分)

1. 证明：$sr(R)=rs(R)$；
2. 证明：$tr(R)=rt(R)$；
3. 举例说明：$ts(R)$不一定等于$st(R)$。

证明 1. $sr(R)=s(Id_A\cup R)=(Id_A\cup R)\cup(Id_A\cup R)^{-1}=Id_A\cup R\cup Id_A^{-1}\cup R^{-1}=Id_A\cup R\cup R^{-1}=Id_A\cup s(R)=rs(R)$。

2. 先证明$tr(R)\subseteq rt(R)$，由于$R\subseteq t(R)$，因此$r(R)\subseteq rt(R)$，而由$t(R)$是传递的，从而$rt(R)$也是传递的，由$tr(R)$是$r(R)$的传递闭包，得$tr(R)\subseteq rt(R)$。

其次证明$rt(R)\subseteq tr(R)$，由于$R\subseteq r(R)$，因此$t(R)\subseteq tr(R)$，而由$r(R)$是自反的，从而$tr(R)$也是自反的，由$rt(R)$是$t(R)$的自反闭包，得$rt(R)\subseteq tr(R)$。

3. 令$A=\{1,2\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle\}$，从而：

$$
\begin{aligned}
s(R) &= \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}, & ts(R) &= \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}\\
t(R) &= \{\langle 1,2\rangle\}, & st(R) &= \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}
\end{aligned}
$$

显然$st(R)$不等于$ts(R)$。 □

八、设$f:A\to B, g:B\to C$**是函数，证明：**(10分)

1. 若$g\circ f$是满射，且g是单射，则f是满射；
2. 若$g\circ f$是单射，且f是满射，则g是单射。

证明　1. 显然$B\neq\varnothing$，因此由g是单射，存在$g':C\to B$使得$g'\circ g=id_B$，从而$g'\circ g\circ f=f$，因此对任意的$h_1,h_2:B\to D$，若$h_1\circ f=h_2\circ f$，则$h_1\circ g'\circ g\circ f=h_2\circ g'\circ g\circ f$，由$g\circ f$是满射，得$h_1\circ g'=h_2\circ g'$，由$g'$存在右逆$g$，因此$g'$也是满射，从而有$h_1=h_2$，这就表明$f$也是满射。

2. 类似可证。即由f是满射，从而存在f'使得$f\circ f'=id$，从而$g=g\circ f\circ f'$。因此对任意的h_1,h_2，若$g\circ h_1=g\circ h_2$，则$g\circ f\circ f'\circ h_1=g\circ f\circ f'\circ h_2$，从而由$g\circ f$是单射得$f'\circ h_1=f'\circ h_2$，再由$f'$是单射得$h_1=h_2$，这就表明$g$是单射。 □