中山大學 本科生考试草稿纸

2012 16/4

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P. 235. 1 (5) $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$

解：① $S_n=\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$

$=1+\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-\cdots\cdots+(1)^{n-1}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$

$=1+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，所以，级数收敛。

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\right|$ 发散。

由①、②可知，给定级数条件收敛。

P. 235. 1-(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{3^{n^2}}$；

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{3^{n^2}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n^2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{3^{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2n+1}\ln 3\cdot 2}=0<1$

由比值判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{3^{n^2}}\right|$ 收敛。

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n!}{3^{n^2}}$ 绝对收敛。