中山大學 本科生考试草稿纸

2011/5/19 − 91.

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.200.5. 当 x 较小时，可用 $\sin a + x\cdot\cos a$ 近似代替 $\sin(a+x)$，其中 a 为常数。试证其误差不超过 $\frac{1}{2}|x|^2$。

证：设 $f(x)=\sin(a+x)$，$f(0)=\sin a$

则 $f'(x)=\cos(a+x)$，$f'(0)=\cos a$

$f''(x)=-\sin(a+x)$，$f''(0)=-\sin a$.

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$\sin(a+x)=\sin a+x\cdot\cos a+\frac{-\sin(a+\xi)}{2!}\cdot x^2$$

$$|R_2(x)|=\left|\frac{-\sin(a+\xi)}{2!}\cdot x^2\right|\le\frac{|x|^2}{2}.$$

P.200.6 设 $0<x\le\frac{1}{3}$，按公式 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ 计算 e^x 的近似值时，试证其误差不超过 8×10^{-4}。

证：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{e^\xi}{4!}\cdot x^4$，　$0<\xi<x$

$$|R_3(x)|=\frac{e^\xi}{4!}|x|^4<\frac{3^{\frac{1}{3}}}{4!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{\sqrt[3]{3}}{4!\times81}=\frac{1.4422}{1944}=0.00074$$

$$<0.0008=8\times10^{-4}.$$