第一章　　基础: 逻辑和证明

§1.1　　命题逻辑

一. 命题:

1. 命题的定义: 一个命题(proposition)是一个陈述句, 它或者是真, 或者是假(但不允许两者都是).

2. 例子:

例 1:

(1) 华盛顿特区是美国的首都.

(2) 多伦多是加拿大的首都.

(3) $1+1=2$.

(4) $2+2=3$.

例 2:

(1) 几点钟了?

(2) 不许吸烟!

(3) 这朵玫瑰花真美呀!

(4) $x+1=2$.

(5) $x+y = z$.

3. 命题变量与真值

我们用英文字母代表命题变量(propositional variables), 通常用 p, q, r, s, …表示, 每一个变量代表某个命题. 如果一个命题为真, 则它的真值为 T, 如果一个命题为假, 则它的真值为 F.

处理命题的逻辑领域称为命题演算(proposition calculus)或命题逻辑(propositional logic).

二. 命题联结词与复合命题

(connectives of propositions and compound propositions)

1. 命题 p 的否定$\neg p$ (negation of p)

真值表:

p	$\neg p$
T	F
F	T

例 3: 求以下句子的否定:

“今天是星期五.”

否定句: “今天是星期五不成立.”或“今天不是星期五.”

例 4: 求以下命题的否定:

“今天在迈阿密至少下了 10 英吋的雨量.”

否定句: “今天在迈阿密下了少于 10 英吋的雨量.”

2. 命题 p 和 q 的合取 $p\wedge q$ (conjunction of p and q)

真值表:

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例 5: 求以下两个命题的合取.

p: 今天是星期五; q: 今天下雨.

$p \wedge q$: 今天是星期五并且今天下雨.

*有时“但是”(but)也翻译成$\wedge$.

3. 命题 p 和 q 的析取 $p \vee q$ (disjunction of p and q)

真值表:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例 6: 用析取式表示下述句子:

“今天是星期五或今天下雨.”

令 p: 今天是星期五; q: 今天下雨.

上句表示为: $p \vee q$

*注: $p \vee q$ 为真允许 p 和 q 同时为真(inclusive or), 而在自然语言里, 有时“或”表示“异或”(exclusive or): $p \oplus q$. 真值表:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例如: 餐馆的菜单上写着“Soup or salad comes with entrée (主菜)”表示或者上“soup”或者上“salad”,但不是两者都上.

注意: $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

4. 蕴涵式 $p \rightarrow q$ (conditional statement)

蕴涵式 $p \rightarrow q$ 中, p 称为假设(hypothesis)或前件(antecedent)或前提(premise), q 称为结论(conclusion)或推论(consequence).

真值表:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

*解释蕴涵式的真值.

例如: 政治家在大选中说:“如果我被选上, 我将降低税收.”

令 p: 我被选上; q: 我将降低税收.

$p \rightarrow q$ 在 p 为真 q 为假时的情形.

以下句型都被翻译成: $p \rightarrow q$

“如果 p, 那么 q” “p 蕴含 q”

“p 是 q 的充分条件” “p 仅当 q”

“当 p 时, 有 q” “无论何时 p, 有 q”

“p 的必要条件是 q” “对 p 来说, q 是必须的”

“q 除非¬ p” “q 是 p 的结果”

*取其中几个解释:

(1) p 仅当 q: 表示: 当 q 不为真时, p 不能为真. 因而是 $p \to q$.

(2) q 除非¬ p: 表示: 当¬ p 为假, 有 q 必然为真; 也就是说: 当 p 为真, q 为假时, “q 除非¬ p”为假, 否则它为真. 因而“q 除非¬ p”与 $p \to q$ 有相同的真值.

例 7: 设 p: 玛利亚学了离散数学; q: 玛利亚将找到好的工作. 将 $p \to q$ 翻译成自然语言.

(1) 如果玛利亚学了离散数学, 那么她将找到好的工作;

(2) 当玛利亚学了离散数学时, 她将找到好的工作;

(3) 对于玛利亚找到好的工作而言, 她学习离散数学是充分条件;

(4) 玛利亚将找到好的工作, 除非她不学离散数学.

*再举例:

如果今天是星期五, 那么 2+3=5.

如果今天是星期五, 那么 2+3=6.

解释这两句的真值.

*逆命题、逆否命题、反命题(converse, contraposition, inverse): 假设有条件语句: $p \to q$

(1) $q \to p$ 称为 $p \to q$ 的逆命题;

(2) $\neg q \to \neg p$ 称为 $p \to q$ 的逆否命题;

(3) $\neg p \to \neg q$ 称为 $p \to q$ 的反命题.

*$\neg q \to \neg p$ 与 $p \to q$ 等值(价); 而 $q \to p$ 和 $\neg p \to \neg q$ 与 $p \to q$ 不

等值.

5. 命题 p 和 q 的等值式 $p \leftrightarrow q$ (biconditional statement)

$p \leftrightarrow q$ 表示: p 当且仅当 q. 也就是: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

真值表:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

以下句子表示 $p \leftrightarrow q$:

(1) p 是 q 的充分必要条件;

(2) 如果 p 那么 q, 反之亦然;

(3) p 当且仅当 q.

例 10: 设 p: 你可以坐飞机; q: 你买机票.

$p \leftrightarrow q$ 表示: 你可以坐飞机当且仅当你买机票.

三. 复合命题的真值表 (truth table of compound proposition)

1. 复合命题: 由简单命题和命题联结词组成的命题叫做复合命题; 不能被分解成更简单的命题的命题称为简单命题或原子命题.

例 11: 构造以下复合命题的真值表

p	q	$\neg q$	$p \lor \neg q$	$p \land q$	$(p \lor \neg q) \to (p \land q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

2. 逻辑算符的优先级 (Precedence of logical operators)

*规定逻辑算符的优先级可以删除一些不必要的括号.

优先关系表: (从左至右优先级从高到低)

算符: $\neg$ $\land$ $\lor$ $\to$ $\leftrightarrow$

优先级: 1 2 3 4 5

例: $\neg p \land q$: 表示 $(\neg p) \land q$ 而不是 $\neg (p \land q)$

$p \lor q \to r$: 表示$(p \lor q) \to r$ 而不是 $p \lor (q \to r)$

3. 将自然语言表述成逻辑公式

例 12: 你可以在校园里访问互联网仅当你是计算机科学专业的学生或者你不是新生.

设 a: 你可以在校园里访问互联网; c: 你是计算机科学专业的学生; f: 你是新生.

逻辑公式: $a \to (c \lor \neg f)$

例 13: 你不能玩轮滑如果你不足 4 英尺高, 除非你 16 岁以上.

设 q: 你可以玩轮滑; r: 如果你不足 4 英尺高; s:你 16 岁以上.

公式为: $(r \land \neg s) \to \neg q$, $\neg s \to (r \to \neg q)$

例 14: 构造以下复合命题的真值表: $(p \to q) \land (\neg p \to r)$

p	q	r	$p\to q$	$\neg p$	$\neg p\to r$	$(p\to q)\wedge(\neg p\to r)$
T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F

例 15: 系统说明必须一致(相容), 是说: 其中不含能推出矛盾的要求. 判定以下系统说明是否一致:

“诊断信息存在缓冲区中或者它被重新传输”;

“诊断信息没有存在缓冲区中”;

“如果诊断信息存在缓冲区中, 那么它被重新传输”.

解: 先把系统说明表示成逻辑公式. 设 p: 诊断信息存在缓冲区中; q: 诊断信息被重新传输. 上述三句表示为:

$p\vee q$, $\neg p$, $p\to q$

要使$\neg p$为真, p 必须为假, 要使 $p\vee q$ 为真, 则 q 必须为真, 此时, $p\to q$ 也为真. 故当 p 为 F,q 为 T 时, 上述三句均为 T, 没有矛盾.

例 16: 在上例中加上系统说明语句“诊断信息不被传输”, 系统说明是否仍一致?

解: 最后一句为$\neg q$. 上述分析中, 要求 $p = F, q = T$, 三句才为真, 这时$\neg q$ 为假, 故这四句话不一致(有矛盾).

例 18: 逻辑迷语: 在一个岛上有两种居民, 一种是骑士, 他们总说真话; 另一种是无赖, 他们总说假话. 你碰到两个人 A 和 B, 如果 A 说: “B 是骑士”, B 说: “我们两个是相反的类型”, 那么 A 和 B 是什么人?

解: 设 p: A 是骑士; q: B 是骑士. 那么$\neg p$: A 是无赖;
$\neg q$: B 是无赖.

首先假设 $p = T$, 那么, A 是骑士, 因而 B 是骑士, 但由 B 说的话, 有 A 是无赖, 矛盾.

故设 $p = F$, 即 A 是无赖, 由 A 说的话知, B 是无赖. 而 B 说的话不真, 没有矛盾. 故 A 和 B 都是无赖.

§1.2　命题等值式 (Propositional equivalences)

一. 重言式 (tautology)

一个复合命题如果无论其中的简单命题取什么真值, 该复合命题的真值始终为真, 那么该复合命题称为重言式(tautology). 如果该复合命题的真值始终为假, 则该复合命题称为矛盾式(contradiction). 既不是重言式又不是矛盾式的复合命题称为或然式(contingency).

例如:

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$	$p\wedge\neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

例 1: $p\vee\neg p$ 是重言式, $p\wedge\neg p$ 是矛盾式, $p\to q$ 是或然式.

二. 逻辑等值式

两个在所有情形下真值都相同的复合命题称为逻辑等值的(logically equivalent).

对任意两个复合命题 p 和 q, 若 $p\leftrightarrow q$ 是重言式, 那么称 p 和 q 是逻辑等值的, 记为 $p\equiv q$ 或 $p\Leftrightarrow q$.

例 2: 证明$\neg(p\vee q)$与$\neg p\wedge\neg q$ 是逻辑等值的(德•摩根律)

解: 用真值表证明:

p	q	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T

例 3: 证明: $p\to q$ 与$\neg p\vee q$ 等值. 用真值表证明:

p	q	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$p\to q$	$(\neg p\vee q)\leftrightarrow(p\to q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

例 4: 证明:$p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ (析取对合取的分配律)

解: 用真值表证明:

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

*德•摩根律的推广:

$\neg(p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n)\Leftrightarrow(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\cdots\wedge\neg p_n)$

$\neg(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n)\Leftrightarrow(\neg p_1\vee\neg p_2\vee\cdots\vee\neg p_n)$

三. 一些重要的逻辑等值式

1. $p\wedge T\Leftrightarrow p$　　同一律

   $p\vee F\Leftrightarrow p$　　(Identity laws)

2. $p\vee T\Leftrightarrow T$　　零律

   $p\wedge F\Leftrightarrow F$　　(Domination laws)

3. $p\vee p\Leftrightarrow p$　　幂等律

   $p\wedge p\Leftrightarrow p$　　(Idempotent laws)

4. $\neg(\neg p)\Leftrightarrow p$　　双重否定律(Double negation law)

5. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	交换律
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	(Commutative laws)
6. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	结合律
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	(Associative laws)
7. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	分配律
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(Distributive laws)
8. $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	德•摩根律
$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	(De Morgan's laws)
9. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	吸收律
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	(Absorption laws)
10. $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$	排中律(Negation laws)
11. $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	矛盾律(Negation laws)

*包含蕴涵式的等值式:

12. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	蕴涵等值式
13. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	假言易位

14. $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

15. $p \wedge q \Leftrightarrow \neg (p \rightarrow \neg q)$

16. $\neg (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

17. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$

18. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

19. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$

20. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

*包含逻辑等值的等值式:

21. $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ 等价等值式

22. $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow\neg p\leftrightarrow\neg q$ 等价否定等值式

23. $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

24. $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow p\leftrightarrow\neg q$

四. 利用基本等值式证明新的逻辑等值式

例 6: 证明: $\neg(p\rightarrow q)\Leftrightarrow p\wedge\neg q$

证: $\neg(p\rightarrow q)\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow\neg(\neg p)\wedge\neg q$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow p\wedge\neg q$ 双重否定律

例 7: 证明: $\neg(p\vee(\neg p\wedge q))\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$

证: $\neg(p\vee(\neg p\wedge q))\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg(\neg p\wedge q)$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow\neg p\wedge[\neg(\neg p)\vee\neg q]$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow\neg p\wedge(p\vee\neg q)$ 双重否定律

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge p)\vee(\neg p\wedge\neg q)$ 分配律

$\Leftrightarrow F\vee(\neg p\wedge\neg q)$ 矛盾律

$\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$ 同一律

例 8：证明：$p\wedge q\rightarrow p\vee q$ 是重言式。

证：$p\wedge q\rightarrow p\vee q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee(p\vee q)$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee(p\vee q)$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\vee(\neg q\vee q)$ 交换律，结合律

$\Leftrightarrow T\vee T$ 排中律

$\Leftrightarrow T$ 零律

例子：证明：$(p\vee q)\rightarrow r\Leftrightarrow(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$

证：从右边开始演算：

$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee r$ 分配律，交换律

$\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\vee r$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow(p\vee q)\rightarrow r$ 蕴涵等值式

五．范式

1. 简单合取式：

$p\wedge q$, $p\wedge\neg q$, $\neg p\wedge q$, $\neg p\wedge\neg q$, $p\wedge q$ 为真当且仅当 p 和 q 都为真, $\neg p\wedge q$ 为真当且仅当 p 为假 q 为真,$\neg p\wedge\neg q$ 为真当且仅当 p 为假 q 为假。

例 9：已知某公式的真值表如下表，求具有该真值表的公式。

p	q	?
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

根据上述讨论，该公式为：$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

*这种公式称为主析取范式，$(p\wedge q)$，$(p\wedge\neg q)$，$(\neg p\wedge\neg q)$等称为极小项。

2. 极小项与主析取范式（minterms and disjunctive normal

form）

简单合取式的析取式，其中在每一个简单合取式中，每一个变量或它的否定出现一次且仅一次，称为主析取范式，其中每一个简单合取式称为极小项。

例子：

极小项	p	q	r	p	q	r	?
$p\wedge q\wedge r$	T	T	T	T	T	T	T
$p\wedge q\wedge \neg r$	T	T	F	T	T	F	F
$p\wedge \neg q\wedge r$	T	F	T	T	F	T	F
$p\wedge \neg q\wedge \neg r$	T	F	F	T	F	F	T
$\neg p\wedge q\wedge r$	F	T	T	F	T	T	T
$\neg p\wedge q\wedge \neg r$	F	T	F	F	T	F	F
$\neg p\wedge \neg q\wedge r$	F	F	T	F	F	T	F
$\neg p\wedge \neg q\wedge \neg r$	F	F	F	F	F	F	F

公式（右侧 p q r ? 四列）

该表对应的公式的主析取范式为：

$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge \neg q\wedge \neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

其中: $(p\wedge q\wedge r)$，$(p\wedge \neg q\wedge \neg r)$，$(\neg p\wedge q\wedge r)$称为极小项。

3. 极大项与主合取范式

简单析取式的合取式，其中在每一个简单析取式中，每一个变量或它的否定出现一次且仅一次，称为主合取范式，其中每一个简单析取式称为极大项。

极大项：

	p	q	r
┐p∨┐q∨┐r	T	T	T
┐p∨┐q∨r	T	T	F
┐p∨q∨┐r	T	F	T
┐p∨q∨r	T	F	F
p∨┐q∨┐r	F	T	T
p∨┐q∨r	F	T	F
p∨q∨┐r	F	F	T
p∨q∨r	F	F	F

极大项：┐p∨┐q∨r 为假当且仅当 p 为真，q 为真，r 为假;

p∨┐q∨r 为假当且仅当 p 为假，q 为真，r 为假。

上述公式的主合取范式为：

（┐p∨┐q∨r）∧（┐p∨q∨┐r）∧（p∨┐q∨r）∧（p∨q∨┐r）∧（p∨q∨r）

其中：（┐p∨┐q∨r），（┐p∨q∨┐r），（p∨┐q∨r），（p∨q∨┐r），（p∨q∨r）称为极大项。

例 10：求公式 p→q 的主析取范式和主合取范式。

解：真值表为：

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

主析取范式为：（p∧q）∨(┐p∧q)∨(┐p∧┐q)

主合取范式为：┐p∨q

例 11： 求公式（p→q）↔r 的主析取范式和主合取范式。

解：真值表为：

p	q	r	p→q	（p→q）↔r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

主析取范式：

（p∧q∧r）∨(p∧┐q∧┐r)∨(┐p∧q∧r)∨ (┐p∧┐q∧r)

主合取范式：

(┐p∨┐q∨r)∧(┐p∨q∨┐r)∧(p∨┐q∨r)∧ (p∨q∨r)

例 12：求 $p\rightarrow q$ 的主析取范式和主合取范式。

解：（1）主析取范式：

$p\rightarrow q$

$\Leftrightarrow \neg p\vee q$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge(\neg q\vee q))\vee((\neg p\vee p)\wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

(2) 主合取范式：

$p\rightarrow q\Leftrightarrow \neg p\vee q$

例 13：求（$p\rightarrow q$）$\leftrightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。

解：（1）主析取范式：

（$p\rightarrow q$）$\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow$（$\neg p\vee q$）$\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow(\neg p\vee q))$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q))$

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(r\wedge\neg r)\vee (\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)\vee((p\vee\neg p)\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

(2)主合取范式：

$(p\to q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow((\neg p\vee q)\to r)\wedge(r\to(\neg p\vee q))$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q))$

$\Leftrightarrow((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\vee(q\wedge\neg q)\vee r)\wedge((\neg p\wedge p)\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

作业：

1. 判断以下句子哪个是命题：

（1）北京是中国的首都。

（2）纽约是美国的首都。

（3）起步走！

（4）2+3=5。

（5）5+7=10.

（6）x+2=11.

（7）你好吗？

（8）这个小孩多可爱呀！

2. 将以下句子用命题公式表示：

（1）刘晓月跑得快，跳得高。

（2）老王是山东人或河北人。

（3）因为天气冷，所以我穿了羽绒服。

（4）李辛和李未是兄弟。

（5）只有天下大雨，他才乘车上班。

（6）除非天下大雨，否则他不乘车上班。

（7）2 和 4 都是素数，这是不对的。

（8）今天是星期一当且仅当明天是星期二。

3. 求以下公式的真值表，其中哪个是重言式？

(1) $p\rightarrow(\neg q\vee r)$

(2) $(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)\rightarrow((p\vee q)\rightarrow r)$

(3) $(p\rightarrow q)\vee(\neg q\leftrightarrow r)$

4. 用等值演算证明以下命题等值式:

(1) $p\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

(2) $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\Leftrightarrow p\rightarrow(q\wedge r)$

(3) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$