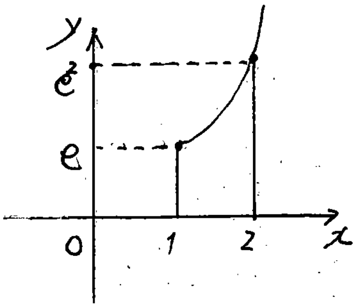
中山大學 本科生考试草稿纸 2011 7/5—13

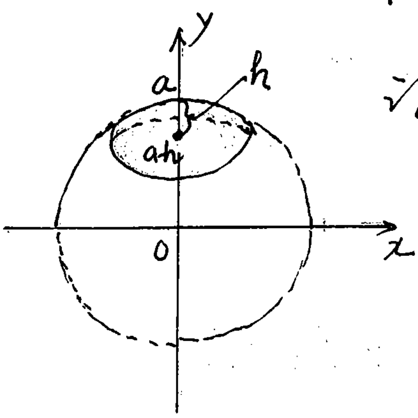
警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.165.14. $y=e^x$, $x=1$, $x=2$，求 V_y. （用13题结果）



$$V_y = 2\pi\int_1^2 x\cdot e^x\,dx = 2\pi\int_1^2 x\,de^x$$
$$= 2\pi\left[x\cdot e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx\right]$$
$$= 2\pi(2e^2 - e - e^2 + e) = 2\pi e^2.$$

P.165.15. 证明：半径为a，高为h的球缺体积为：$V=\pi h^2(a-\frac{h}{3})$.



证： $x^2+y^2=a^2 \Longrightarrow x^2=a^2-y^2$

$$V=\int_{a-h}^{a}\pi x^2\,dy = \pi\int_{a-h}^{a}(a^2-y^2)\,dy$$
$$=\pi\left(a^2y\Big|_{a-h}^{a} - \frac{y^3}{3}\Big|_{a-h}^{a}\right)$$
$$=\pi\left[a^3-a^2(a-h)-\frac{1}{3}(a^3-(a-h)^3)\right]$$
$$=\pi\left(a^3-a^3+a^2h-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3-3a^2h+3ah^2-h^3}{3}\right)$$
$$=\pi\left(a^2h-a^2h+ah^2-\frac{h^3}{3}\right)$$

P.165.16 求曲线 $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ 在 $x=1$ 到 $x=\pi$ 之间的弧长。

解： $y'=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2} = \frac{x^4-1}{2x^2}$.

$y'^2=\frac{x^8-2x^4+1}{4x^4}$，$1+y'^2=\frac{x^8+2x^4+1}{4x^4}=\frac{(x^4+1)^2}{4x^4}$

$$S=\int_1^3\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^3\frac{x^4+1}{2x^2}\,dx=\int_1^3\frac{x^2}{2}dx+\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^3-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{6}(27-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{26}{6}+\frac{2}{6}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}.$$