习题10.1

1. (1) $a_n=\frac{\cos n}{n(n+1)} \le \frac{1}{n(n+1)}$. $\sum_{n+1}^{n+p} a_k \le \sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$. $\forall \varepsilon>0$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$.

(2) $\sum_{n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ 发散

(3) $n\ge N$. $\sum_{n+1}^{n+p} a_n \le \sum_{n+1}^{n+p} u_n \le \sum_{n+1}^{n+p} b_n$. $\forall p>0$.

由 $\sum a_n$. $\sum b_n$ 收敛. $\forall \varepsilon>0$. $\exists N_1$ (取 $N_1>N$). $n\ge N_1$. $|\sum_{n+1}^{n+p} a_n|<\varepsilon$. $|\sum_{n+1}^{n+p} b_n|<\varepsilon$.

$\Rightarrow |\sum_{n+1}^{n+p} u_n| \le \max(|\sum_{n+1}^{n+p} a_n|, |\sum_{n+1}^{n+p} b_n|) < \varepsilon \Rightarrow \sum u_n$ 收敛.

3. (1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1\to+\infty$. 发散.

(4) $u_n=\cos^2\frac{\pi}{n}\to\cos^2 0=1$. $u_n\not\to 0 \Rightarrow \sum\cos^2\frac{\pi}{n}$ 发散.

(5) $u_n=\frac{n}{2n-1}\to\frac{1}{2}\ne 0$ 发散

(7) $u_n=\sqrt[n]{0.0001}\to 1\ne 0$ 发散

5. 证明: 由 $\sum u_n$ 收敛. $\forall \varepsilon>0$. $\exists N$. $n\ge N$. $|\sum_{n+1}^{2n}u_k|<\varepsilon$

由 $u_n\downarrow$ 可得: $\sum_{n+1}^{2n}u_k \ge n u_{2n} \Rightarrow n u_{2n}\to 0. \Rightarrow 2n u_{2n}\to 0$.

同理 $|\sum_{n+1}^{2n+1}u_k|<\varepsilon \Rightarrow (n+1)u_{2n+1}\to 0. \Rightarrow (2n+2)u_{2n+1}\to 0$.

由 $\sum u_n$ 收敛. $\{u_n\}$ 收敛到 0. 因为有 $u_{2n+1}\to 0$. 联合上面极限, 有 $(2n+1)u_{2n+1}\to 0$

可得, 不论 n 是奇数偶数, 总有 $n u_n\to 0$.

习题 10.2

1. (2) $u_n=\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛. 由定理1(比较判别法)可得收敛.

(3) $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to 1\ne 0$ 级数发散

(4) $u_n=\frac{4n}{n^2+4n-3}$. $\frac{u_n}{\frac{1}{n}}\to 4\in(0,+\infty)$ 由定理2 及 $\sum\frac{1}{n}$ 发散可知级数发散.

(5) $u_n=\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+1}}\right)^n\cdot\frac{1}{n^2+3n+1}<1\cdot\frac{1}{n^2+3n+1}<\frac{1}{n^2}$. 级数收敛.

(6) 由于 n 充分大时有 $\ln(\ln n)>3. \Rightarrow \ln n\cdot\ln(\ln n)>3\ln n \Rightarrow (\ln n)^{\ln n}>n^3$

$u_n=\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$ 当n充分大后. $\Rightarrow$ 级数收敛.

2. (3) 用比式判别法. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{3}{e}>1$. 级数发散.

(5) 用根式判别法. $\sqrt[n]{u_n}=\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3-\frac{1}{n}}\to\frac{1}{3}<1$. 收敛.

(10) $\int_2^A\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\frac{1}{1-p}\left((\ln A)^{1-p}-(\ln 2)^{1-p}\right)$ 当 $p\ne 1$. 可得 $\begin{cases}\text{发散}. & p<1\\ \text{收敛}. & p>1\end{cases}$

当 $p=1$. $\int_2^A\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln A)-\ln(\ln 2)\to+\infty$. 发散.

3. 证明: 由 $\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow u_n\to 0$. 因为对 $\varepsilon=1$. $\exists N. n\ge N$. $u_n<1$, $u_n^2<u_n$. 由比式判别法可知 $\sum u_n^2$ 收敛. 反之, 例如 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛 但 $\sum\frac{1}{n}$ 发散.

5. (1) 用反证法. $u_n \le u_n+v_n$. $v_n \le u_n+v_n$. 若 $\Sigma(u_n+v_n)$ 收敛. 则 Σu_n. Σv_n 收敛.

(2) 不一定. 举反例. 令 $u_n=\frac{2}{n}$. $v_n=\frac{1}{n}$. $\Sigma(u_n-v_n)$ 发散.

令 $u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}$. $v_n=\frac{1}{n}$. $\Sigma(u_n-v_n)$ 收敛.

(3) 不一定. 举反例. 令 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. $v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\Sigma u_n v_n=\Sigma\frac{1}{n}$ 发散

令 $u_n=\frac{1}{n}$. $v_n=\frac{1}{n}$ $\Sigma u_n v_n=\Sigma\frac{1}{n^2}$ 收敛.

习题 10.3

1. (2) 交错项级数. $u_n=\frac{1}{(2n-1)^p}$ 当 $p>0$. $u_n\downarrow,\to 0$. 级数收敛.

$\frac{1}{2^p n^p}<\frac{1}{(2n-1)^p}<\frac{1}{2^p(n-1)^p}$ $\Rightarrow$ 当 $p\le 1$. 条件收敛. 当 $p>1$. 绝对收敛.

(4) 易证 $n>4$ 后. 有 $\frac{\sqrt{n}-1}{n}\downarrow$ (导数小于零) 且 $\frac{\sqrt{n}-1}{n}\to 0$. 级数收敛.

另外易知 $n>4$ 后有 $\frac{\sqrt{n}-1}{n}>\frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ 条件收敛.

(6) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{3\cdot 9^n}\to 0$ (洛比塔法则) 由比式判别法. $\Sigma\frac{n!}{3^{n^2}}$ 收敛

$\Rightarrow \Sigma(-1)^{n+1}\frac{n!}{3^{n^2}}$ 绝对收敛.

(8) $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. $\tan\frac{\varphi}{n}\downarrow,\to 0$. $\Sigma(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}$ 收敛.

又 $\frac{\tan\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}}\to 1$. $\Rightarrow \Sigma\tan\frac{\varphi}{n}$ 发散. $\Sigma(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}$ 条件收敛.

(9) $\frac{1}{n^t(\ln n)^s}\downarrow,\to 0$. $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{n^t(\ln n)^s}$ 收敛.

当 $t>1$. n 足够大时 有 $\frac{1}{n^t(\ln n)^s}<\frac{1}{n^t 2^s}$. $\Sigma\frac{1}{n^t 2^s}$ 收敛 $\Rightarrow$ 绝对收敛

当 $t<1$. 取 t_0. $0<t<t^0<1$. $\frac{\frac{1}{n^t(\ln n)^s}}{\frac{1}{n^{t^0}}}=\frac{n^{t^0-t}}{(\ln n)^s}$ 极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

用洛比塔法则. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{t^0}}}=\frac{(t^0-t)n^{t^0-t-1}\cdot n}{s(\ln n)^{s-1}}=\frac{(t^0-t)n^{t^0-t}}{s(\ln n)^{s-1}}$

若 $s<1$. 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{t^0}}}=\infty$.

若 $s>1$. 再设 $k\le s<k+1$. 可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{t^0}}}=\frac{(t^0-t)^{k+1}n^{t^0-t}}{s(s-1)\cdots(s-k)(\ln n)^{s-k-1}}=+\infty$.

当 $t=1$. 用积分判别法. $\int_2^A\frac{1}{n(\ln n)^s}dn=\frac{1}{1-s}[(\ln A)^{1-s}-(\ln 2)^{1-s}]$ $(s\ne 1)$

当 $s>1$. 无穷积分收敛. 当 $s<1$. 无穷积分发散.

当 $s=1$. $\int_2^A\frac{1}{n\ln n}dn=\ln|\ln A|-\ln|\ln 2|\to+\infty$ 无穷积分发散.

因此 $t>1$ 时 绝对收敛. $t<1$ 时 条件收敛. $t=1$ 且 $s>1$ 时 绝对收敛.

$t=1$ 且 $0<s\le 1$ 时 条件收敛.

4. $u_n=\frac{\cos n\varphi}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$

已知 $\sum v_n=\sum\frac{\cos n\varphi}{n^p}$ 在 $\varphi\in(0,2\pi)$ 收敛（由狄利克雷判别法）

$\frac{u_n}{v_n}=(1+\frac{1}{n})^n\to e\in(0,+\infty)$ 由比较判别法知 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同时收敛.

5. 证明: $x>x_0$ 时，若 $\sum\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛. $\sum\frac{a_n}{n^x}=\sum\frac{1}{n^{x-x_0}}\cdot\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 由阿贝尔判别法知收敛.

$x<x_0$ 时，若 $\sum\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 发散. $\frac{a_n}{n^{x_0}}<\frac{a_n}{n^x}$ 易知 $\sum\frac{a_n}{n^x}$ 发散.

7. 证明: $v_k=\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}>\frac{2}{\sqrt{4k}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{k}}$.

$\sum v_k$ 发散. $\Rightarrow S_{3k}\to+\infty$. $\Rightarrow S_{3k+1}=S_{3k}+\frac{1}{\sqrt{4k+1}}\to+\infty$. $S_{3k+2}=S_{3k+1}+\frac{1}{\sqrt{4k+3}}\to+\infty$.

$S_k\to+\infty$. 发散.

习题10.4

2. (2) $f_n(x)\to x^2$. $f_n(x)-x^2=\sqrt{x^4+e^{-n}}-x^2=\frac{e^{-n}}{\sqrt{x^4+e^{-n}}+x^2}<e^{-\frac{n}{2}}$. 一致收敛.

(4) $f_n(x)\to1$. 取 $x_n=\frac{1}{n^2}$. $f_n(x_n)-1=-\frac{1}{2}$. 不一致收敛.

(5) (a) $f_n(x)\to0$. $f_n(x)-0<\frac{x^n}{3+x^n}<\frac{(1-\delta)^n}{3+(1-\delta)^n}$. 一致收敛.

(b) $f_n(x)\to0$. 取 $x_n=\sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}$. $f_n(x_n)-0=\frac{\sin(1-\frac{1}{n})}{4-\frac{1}{n}}\to\frac{1}{4}\sin1\neq0$ 不一致收敛

3. (2) $S_n(x)=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\to x=S(x)$. $|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x^{n+1}|}{n+1}\le\frac{1}{n+1}$ 一致收敛.

(4) $u_n(x)=\frac{x}{1+4n^4x^2}\le\frac{1}{4n^2}$ 由强级数判别法. 一致收敛.

(6) 设 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$. 给定 x. $a_n(x)$ 关于 $n\downarrow$. $|a_n(x)|<\frac{1}{n}\Rightarrow a_n(x)\rightrightarrows0$.

$b_n(x)=\sin x\cdot\sin nx$. $B_n(x)=\sin x\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin x\cdot\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}[\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x]$

$=\cos\frac{x}{2}[\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x]$

$|B_n(x)|\le2$. $\sum b_n(x)$ 部分和序列一致有界.

由狄利克雷判别法. 一致收敛.

5. 在 $(-\infty,+\infty)$. $u_n(x)=2^n\sin\frac{x}{3^n}\to0$. 取 $x_n=3^n$. $u_n(x_n)=2^n\sin1\to+\infty$

$u_n(x)\not\rightrightarrows0$. $\Rightarrow\sum2^n\sin\frac{x}{3^n}$ 不一致收敛.

在 $[-M,M]$ $|u_n(x)|=2^n|\sin\frac{x}{3^n}|\le(\frac{2}{3})^n|x|\le M\cdot(\frac{2}{3})^n$ 由强级数判别法知一致收敛.

在 $[-M,M]$. $\sum u_n(x)$ 一致收敛 $\Rightarrow\sum u_n(x)$ 收敛. $u_n'(x)=(\frac{2}{3})^n\cos\frac{x}{3^n}$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 连续.

$|u_n'(x)|\le(\frac{2}{3})^n\Rightarrow\sum u_n'(x)$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 一致收敛. $\Rightarrow S(x)=\sum u_n(x)$ 在 $[-M,M]$ 可导.

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. 取 M_x, $x\in[-M_x,M_x]$, $S(x)$ 在 x 可导且导函数连续.

8. 令 $a_n(x)=\frac{1}{n^x}$, $x\in[0,+\infty)$. 对任一 $x\in[0,+\infty)$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 且 $|a_n(x)|\le 1$.

$b_n(x)=a_n$. 由 $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum b_n(x)$ 一致收敛.

由阿贝尔判别法, $\sum \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛. 又 $\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, $\sum \frac{a_n}{n^x}$ 连续.

$$\therefore \lim_{x\to 0+0}\sum \frac{a_n}{n^x}=\sum \lim_{x\to 0+0}\frac{a_n}{n^x}=\sum a_n$$