《高等数学》第十章习题解答

习题10.1

1. 利用柯西收敛原理证明:

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛.

证. $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k}{k(k+1)}| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}$. 对任意$\varepsilon > 0$, 令$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当$n > N$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k}{k(k+1)}| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. 由柯西收敛原理, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛.

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

证. $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{\sqrt{k}}| \ge \frac{p}{\sqrt{n+p}}$. 无论$N$多么大, 取$n = p = N+1$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{\sqrt{k}}| \ge \sqrt{\frac{N+1}{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$. 由柯西收敛原理, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

(3) 设两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛, 且存在正整数$N$, 使当$n \ge N$时有$a_n \le u_n \le b_n$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

证. 对任意的$\varepsilon > 0$, 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛, 所以存在$N' > N$, 使得当$n > N'$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k| < \varepsilon$, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k| < \varepsilon$. 另一方面, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k$. 所以$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k| < \varepsilon$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 又知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散, 问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$是否收敛?

答: 一定发散. 否则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n = \pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$也收敛.

3. 判断下列级数是否收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. 因为部分和$\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{n+1}-1$, 在$n \to \infty$时没有极限, 所以级数发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 因为$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$, 在$n \to \infty$时有极限, 所以级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^2\frac{\pi}{n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2\frac{\pi}{n} = 1$, 所以级数发散.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.0001}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.0001}=1$, 所以级数发散.

4. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和序列为$\{S_n\}$. 若$n\to\infty$时$\{S_{2n}\}$与$\{S_{2n+1}\}$都收敛且收敛到同一个常数$A$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证. 对任意的$\varepsilon>0$, 因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=A$, 所以存在$N>0$, 使得当$n>N$时, $|S_{2n}-A|<\varepsilon$, $|S_{2n+1}-A|<\varepsilon$. 于是当$n>N$时, $|S_n-A|<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

5. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 且$u_n\ge u_{n+1}\ge 0$ $(n=1,2,\dots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

证. 对任意的$\varepsilon>0$, 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 由柯西收敛原理, 存在$N$, 使得当$n>N$时, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_n<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当$n>N$时, $(2n)u_{2n}\le 2\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k<\varepsilon$. $(2n+1)u_{2n+1}\le\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k+\sum\limits_{k=n+1}^{2n+1}u_k<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

习题10.2

1. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}/\frac{1}{2^n}=\pi$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛, 所以原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}/\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$收敛, 所以原级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, 所以级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^2+4n-3}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n^2+4n-3}/\frac{1}{n}=4$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}/\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3n+1}{n^2})^{-\frac{n+2}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以原级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\ln[\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}/\frac{1}{n^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}(3-\ln\ln n)\ln n=-\infty$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}/\frac{1}{n^2}=0$. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以原级数收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{1}{3^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\tan\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}$, 由柯西判别法, 级数收敛.

2. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}/\frac{n^5}{n!}=0$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n^2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{3n^2}=+\infty$, 级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}/\frac{3^n\cdot n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3(1+\frac{1}{n})^{-n}=3e^{-1}>1$, 由达朗贝尔判别法, 级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}/\frac{1}{n}=1$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3-\frac{1}{n})^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(3-\frac{1}{n})^n}}=\frac{1}{3}$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}}=0$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{1000^n}{n!}=0$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}/\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{1}{4}$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}}=\frac{e}{3}<1$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p>0)$. 当$p>1$时, 积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}=\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}|_2^{+\infty}$收敛, 所以级数收敛. 当$p=1$时, 积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}=\ln\ln x|_2^{+\infty}$发散, 所以级数发散. 当$0<p<1$时, 积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}=\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}|_2^{+\infty}$发散, 所以级数发散.

(11) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}$ $(q>0)$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}/\frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^{1/2}}{(\ln\ln n)^q}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1/2}}{(\ln x)^q}=+\infty$. 级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}$发散, 所以原级数发散.

3. 证明: 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$也收敛. 反之不一定成立, 试举例说明.

证. 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 所以序列$\{u_n\}$有界. 设$u_n<M$. 则$u_n^2\le Mu_n$. 由比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

反之不一定成立, 例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^2$收敛, 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

4. 证明: 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$也收敛.

证. 由题设条件, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$收敛. 由于$|a_nb_n|\le\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$, $(a_n+b_n)^2\le$

$2(a_n^2+b_n^2)$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛. 取$b_n=\frac{1}{n}$, 即得出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛.

5. 证明: 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛, 问下列级数是否发散?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$.

答. (1) 一定发散, 因为$u_n+v_n\geq u_n$, 根据比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散. (2) 不一定, 比如$u_n=v_n=\frac{1}{n}$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$收敛到0. (3) 不一定, 比如$u_n=v_n=\frac{1}{n}$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

6. 设$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l$, 其中$0<l<+\infty$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛, 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

证. 首先$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$意味着当$n$充分大时$u_n>0$. 所以可以假设$u_n>0$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n^2/\frac{1}{n^2}=l^2$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n/\frac{1}{n}=l$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

习题10.3

1. 判断下列级数是否收敛? 条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2}$. 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$收敛, 所以原级数绝对收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^p}$ $(p>0)$. 序列$\{\frac{1}{(2n-1)^p}\}$单调趋于0, 所以该交错级数收敛. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$当且仅当$p>1$时收敛, 所以原级数当$p>1$时绝对收敛, 否则条件收敛.

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. 序列$\{\frac{1}{n\ln n}\}$单调趋于0, 所以该交错级数收敛. 但是级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散, 所以原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-1}{n}$. 原式$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 右端两个交错级数都收敛, 所以原级数收敛. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}/\frac{1}{\sqrt{n}}=1$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}$发散. 所以原级数条件收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{3^{n^2}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}}/\frac{n!}{3^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{2n+1}}=0$. 由达朗贝尔判别法, 级数绝对收敛.

(7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}/\frac{1}{n^2}=\pi$, 所以级数绝对收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}\ (-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$. 当$\varphi=0$时, 级数显然绝对收敛. 否则该级数为交错级数, 且$|\tan\frac{\varphi}{n}|$单调趋于0, 因此级数收敛. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}|\tan\frac{\varphi}{n}|/\frac{1}{n}=|\varphi|$, 级数不绝对收敛.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 因此该级数为收敛的交错级数. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}/\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$, 级数不绝对收敛.

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}\ (p>0)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}u_n$均收敛.

证. 数列$\{\frac{1}{n^p}\}$及$\{\frac{n}{n+1}\}$均单调有界, 又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 由阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}u_n$均收敛.

3. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}\ (0<\varphi<2\pi)$ 当$p>1$时绝对收敛, 当$0<p\le 1$时条件收敛.

证. (i) 当$p>1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛. 由于$|\frac{\cos n\varphi}{n^p}|\le\frac{1}{n^p}$, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$绝对收敛. (ii) 设$0<p\le 1$. 由于数列$\{\frac{1}{n^p}\}$单调趋于0, 部分和$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\varphi$有界, 由狄利克雷判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$收敛. 同理可证当$\varphi\ne\pi$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{2n^p}$收敛. 又由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$发散, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n\varphi}{2n^p}$发散. 因为$|\frac{\cos n\varphi}{n^p}|\ge\frac{\cos^2 n\varphi}{n^p}=\frac{1+\cos 2n\varphi}{2n^p}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$不绝对收敛.

5. 形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$的级数称作狄利克雷级数. 证明它有下列性质: 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛(发散), 那么当$x>x_0(x<x_0)$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$也收敛(发散).

证. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛. 当$x>x_0$时, 数列$\{n^{x_0-x}\}$单调有界. 由阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}n^{x_0-x}$收敛.

6. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}u_n$也绝对收敛.

证. $|\frac{2n-1}{n}u_n|\le 2|u_n|$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛意味着级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}|u_n|$也收敛.

习题10.4

1. 求下列级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$. 当且仅当$|\ln x|<1$时级数收敛, 所以收敛域为$(e^{-1},e)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(\frac{1-x}{1+x})^n$. 当且仅当$\frac{1-x}{1+x}\in[-1,1)$时级数收敛, 所以收敛域为$(0,+\infty)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}$. 当$|x|\le\frac{1}{3}$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}\ne 0$, 所以级数发散. 当$|x|>\frac{1}{3}$时, $|\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}|\le\frac{1}{|x|^n}\frac{\pi}{3^n}$, 由比较判别法可知, 级数绝对收敛. 所以收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},+\infty)$.

2. 讨论下列函数序列在所示区间内的一致收敛性.

(1) $f_n(x)=\frac{1}{2^n+x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 由于$|f_n(x)-0|\le\frac{1}{2^n}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, 所以函数序列一致收敛.

(2) $f_n(x)=\sqrt{x^4+e^{-n}}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\sqrt{x^4}=x^2$. 由于$|f_n(x)-x^2|=\frac{e^{-n}}{\sqrt{x^4+e^{-n}}+x^2}\le\frac{e^{-n}}{\sqrt{e^{-n}}}=e^{-\frac{n}{2}}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{n}{2}}=0$, 所以函数序列一致收敛.

(3) $f_n(x)=\ln(1+\frac{x^2}{n^2})$, (a) $-l<x<+l$, (b) $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. (a) 由于$|f_n(x)-0|\le\frac{x^2}{n^2}<\frac{l^2}{n^2}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{l^2}{n^2}=0$, 所以函数序列在区间$(-l,l)$上一致收敛. (b) 取$x_n=n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-0]=\ln 2$ 所以函数序列在区间$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

(4) $f_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^2x}$, $0<x<1$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$. 取$x_n=\frac{1}{n^2}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-1]=-\frac{1}{2}$ 所以函数序列不一致收敛.

3. 讨论下列级数在所示区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}|\le\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1})$, $-1\le x\le 1$.

解. $|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1})|=|\frac{x^{n+1}}{n+1}|\le\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以级数一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{1+(x^2+n^2)^3}}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|\frac{\sin nx}{\sqrt{1+(x^2+n^2)^3}}|\le\frac{1}{n^3}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+4n^4x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $1+4n^4x^2\ge 4n^2|x|$, 所以$|\frac{x}{1+4n^4x^2}|\le\frac{1}{4n^2}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x)^n}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x)^k}=\frac{x}{(1+x)^n}\le\frac{x}{1+nx}\le\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以级数一致收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cdot\sin nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $0\le x\le 2\pi$.

解. $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\le\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以函数序列$\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\}$一致收敛到0. 因为$\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$关于$n$单调, 且$|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x\cdot\sin kx|=|\cos\frac{x}{2}\cdot[\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x]|\le 2$, 根据狄利克雷判别法, 级数一致收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^2e^{-nx^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^2e^{-kx^2}|=\frac{x^2e^{-nx^2}}{e^{x^2}+1}\le x^2e^{-nx^2}\le\frac{e^{-1}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-1}}{n}=0$, 所以级数一致收敛.

4. 证明级数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}\sin 2^nx$在$(-\infty,+\infty)$中一致收敛, 且有连续的导函数.

证. (i) $|3^{-n}\sin 2^nx|\le 3^{-n}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}\sin 2^nx$一致收敛.

(ii) $|(3^{-n}\sin 2^nx)'|=|(\frac{2}{3})^n\cos 2^nx|\le(\frac{2}{3})^n$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^{-n}\sin 2^nx)'$一致收敛. 于是$f(x)$有连续的导函数.

5. 证明级数$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$在$(-\infty,+\infty)$中不一致收敛, 但在任意闭区间$[-M,M]$ $(M>0)$上一致收敛, 并证明$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$中有连续的导函数.

证. (i) 取$x_n=3^{n+1}$, 则$|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}2^k\sin\frac{x_n}{3^k}|\ge 2^{n+1}\sin 1>\sin 1$, 所以级数在$(-\infty,+\infty)$中不一致收敛.
(ii) 当$x\in[-M,M]$时, $|2^n\sin\frac{x}{3^n}|\le|2^n\cdot\frac{x}{3^n}|\le M(\frac{2}{3})^n$. 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$在闭区间$[-M,M]$上一致收敛.

(iii) $|(2^n\sin\frac{x}{3^n})'|=|(\frac{2}{3})^n\cos\frac{x}{3^n}|\le(\frac{2}{3})^n$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n\sin\frac{x}{3^n})'$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. 于是$g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上有连续的导函数.

6. 证明级数$\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在任意区间$[1+\delta,+\infty)$中一致收敛$(\delta>0)$, 并证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在任意区间$[1+\delta,+\infty)$中一致收敛$(\delta>0)$, 从而导出函数$\zeta(x)$在$(1,+\infty)$中有连续的导函数.

证. (i) 当$x \in [1+\delta, +\infty]$时, $\frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^{1+\delta}}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$在区间$[1+\delta, +\infty)$中一致收敛.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\delta/2}} = 0$, 所以存在$M > 0$, 使得$\frac{\ln n}{n^{\delta/2}} < M$. 于是当$x \in [1+\delta, +\infty]$时, $\frac{\ln n}{n^x} \le \frac{\ln n}{n^{1+\delta}} \le \frac{M}{n^{1+\delta/2}}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$在区间$[1+\delta, +\infty)$中一致收敛.

(iii) 综上所述, 在任意区间$(1+\delta, +\infty)$上, $\zeta(x)$有连续的导函数$\zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^x})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$. 所以$\zeta'(x)$在区间$(1, +\infty)$上连续.

8. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$在$[0, +\infty)$中一致收敛, 并有$\lim\limits_{x\to 0+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

证. 当$x \in [0, +\infty)$时, $\frac{1}{n^x}$关于n单调, 且$\frac{1}{n^x} \le 1$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 根据阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$在$[0, +\infty)$中一致收敛. 于是$\lim\limits_{x\to 0+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

习题10.5

1. 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} / \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2}$, 收敛半径为2.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)!} / \frac{n^k}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^k \cdot \frac{1}{n+1} = 0$, 收敛半径为$+\infty$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} / \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n} = e^{-1}$, 收敛半径为$e$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} / \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}$, 收敛半径为4.

2. 求下列幂级数的收敛区间与收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} / \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1$, 故收敛区间为$(-1, 1)$. 又$x = 1$时级数发散, $x = -1$时交错级数收敛, 所以收敛域为$[-1, 1)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{na^n}$ $(a > 0)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{na^n}} = \frac{1}{a}$, 故收敛区间为$(-a, a)$. 又$x = a$时级数发散, $x = -a$时交错级数收敛, 所以收敛域为$[-a, a)$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)\cdot(2n+3)!} / \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} = 0$, 故收敛区间和收敛域皆为$(-\infty, +\infty)$.

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$. 等比级数, 当且仅当$x^2 < 1$时收敛, 故收敛区间和收敛域皆为$(-1,1)$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^{-n}+5^{-n})x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{-n}+5^{-n}} = \frac{1}{3}$, 故收敛区间为$(-3,3)$. 又$x = \pm 3$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(3^{-n}+5^{-n})x^n \neq 0$, 级数发散, 所以收敛域为$(-3,3)$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+e^{-n})x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}+e^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}(1+\frac{n}{e^n})} = 1$, 故收敛区间为$(-1,1)$. 当$x = 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}$发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}x^n$收敛, 所以原级数发散. 当$x = -1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}x^n$均收敛, 所以原级数收敛. 所以收敛域为$[-1,1)$.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$. $1 \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leq n$, 由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$, 故收敛区间为$(-1,1)$. 又$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n = \infty$, 级数发散, 所以收敛域为$(-1,1)$.

3. 求下列幂函数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

解. 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$的和函数为$\frac{x}{1-x}$, 收敛半径为1. 所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'$的和函数为$(\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)x^n = \infty$, 级数发散. 所以级数的收敛域为$(-1,1)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}$的和函数为$\frac{x}{1+x^2}$, 收敛半径为1. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^{2n-1})'$的和函数为$(\frac{x}{1+x^2})' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} = \infty$, 级数发散. 所以级数的收敛域为$(-1,1)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数为$\ln(1+x)$, 收敛半径为1. 当$x = 0$时原级数为0, 所以原级数的和函数为$\int_0^x \ln(1+t)dt = (1+x)\ln(1+x) - x$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, 级数绝对收敛, 所以收敛域为$[-1,1]$. 和函数在$x = -1$时补充定义为它在该点的右极限1.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$的和函数为$xe^{x^2}$, 收敛半径为$+\infty$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n+1}}{n!})'$的和函数为$(xe^{x^2})'=(1+2x^2)e^{x^2}$, 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

习题10.6

1. 利用已知的初等函数的展开式, 求下列函数在$x=0$处的幂级数展开式, 并指出收敛域.

(1) $\frac{x}{16+x^2}=\frac{x}{16}\frac{1}{1+\frac{x^2}{16}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{16^{n+1}}$, $x\in(-4,4)$.

(2) $e^{x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\frac{1}{a+x}$ $(a\neq 0)$. $\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{a^{n+1}}$, $x\in(-|a|,|a|)$.

(4) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1,1)$.

(5) $(1+x)e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1-n}{n!}x^n$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(6) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{x^n-(-x)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(8) $\sin(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}]$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(9) $\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n+(2x)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n$, $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(10) $\frac{5x-12}{x^2+5x-6}=\frac{6}{6+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+\frac{x}{6}}+\frac{1}{1-x}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+(-6)^{-n})x^n$, $x\in(-1,1)$.

2. 利用逐项微分法和逐项积分法, 求下列函数在$x=0$处的幂级数展开式.

(1) $\arctan x$.

解. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$, 收敛半径为1. 又因为$\arctan 0=0$, 所以$\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 收敛半径为1. 当$x=\pm1$时级数收敛, 所以收敛域为$[-1,1]$.

(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解. $\frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^{2n}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, 收敛半径为1. 又因为$\ln(0+\sqrt{1+0^2})=0$, 所以$\ln(x+$

$\sqrt{1+x^2}) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 收敛半径为1. 因为序列$\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\}$单调递减, 又序列$\{\frac{1}{2n+1}\}$单调递减趋于0, 所以当$x = \pm 1$时级数为收敛的交错级数, 所以收敛域为$[-1,1]$.

3. 证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x}(e^x-1)$ $(x \neq 0)$, 并证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$.

证. 当$x \neq 0$时, $\frac{1}{x}(e^x-1) = \frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$. 于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x}) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$. 代入$x=1$, 得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$.

第十章总练习题

3. 设有$\alpha > 0$使得$n \geq N$时$\ln\frac{1}{a_n} \geq (1+\alpha)\ln n$, 其中$a_n > 0$. 试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证. 当$n \geq N$时, 因为$\ln\frac{1}{a_n} \geq (1+\alpha)\ln n$, 所以$\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha}$, 所以$a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

9. 设$y = f(x)$在(x_0-a, x_0+a) $(a > 0)$中有定义, 有任意阶导数, 且$|f^{(n)}(x)| \leq M$ (M为常数). 证明: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ $(x_0 - a < x < x_0 + a)$.

证. $f(x)$在$x = x_0$点的泰勒级数的拉格朗日余项为$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}$. 于是当$x \in (x_0-a, x_0+a)$时, $|R_n(x)| \leq \frac{Ma^n}{(n+1)!}$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 所以$f(x)$的泰勒级数收敛到$f(x)$.