中 山 大 学 软 件 学 院 **2010** 级 软 件 工 程 专 业 (2010 学年秋季学期)

《SE-103 线性代数》期末试题参考答案(B)

1.（每小题 4 分）

(1)10; **(2)** $\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$; **(3)** $-\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda-6$; **(4)** $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -3 & 0\\-3 & 3 & 4\\0 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

2.（判断正确 2 分，说理充分 2 分）

(1)错误，当 m=n 时才是一对一的映射。

(2)错误，因为矩阵的行阶梯形式并不唯一。

(3)错误，因为例如令 A 和 B 为两个不同的 2 阶置换矩阵，则（A+B）不可逆。

(4)正确，因为两者有相同的特征多项式。

(5)错误，例如单位矩阵是对称的，但是没有不同的特征值。

3.

(1)（过程正确 5 分，计算正确 2 分）

S 的面积是 $\left|\det\begin{pmatrix}1 & 5\\3 & 1\end{pmatrix}\right|=14$**, det A=2, 所以根据第 3 章定理 10 可知，线性变换后 S 的面积是 2×14=28.**

(2)（各个基 3 分，其中过程正确 2 分，结果正确 1 分）

根据题意可知，有 T(1)=3+5t, T(t)=-2t+4t^2**, T(**t^2**)=**t^2**, 所以它对应以 B 为底的变换矩阵为**

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\5 & -2 & 0\\0 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

(3)（特征值求解 6 分，其中每个特征值 1 分，对应特征向量 2 分；矩阵对角化分解 2 分；最后计算结果 2 分，没有化简则只给 1 分）

根据题意可知，由于原矩阵是下三角阵，所以其特征值为主对角线上的元素，即 a 和 b。

代入后分别计算得其对应特征向量为 $v_a=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, v_b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$**,所以原矩阵可以对角化为**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3(a-b) & b \end{pmatrix} = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

所以有

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3(a-b) & b \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 3(a^k-b^k) & b^k \end{pmatrix}$$

(4) (计算过程正确 5 分，计算结果正确 2 分)

根据最小二乘法可知，方程 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的最小二乘解满足方程

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$$

又因为

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \qquad A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解得 $x_1 = 0.9$， $x_2 = 0.4$，即为所求方程的最小二乘解。

4. (1)（充分性与必要性证明各占 5 分）

证：记线性变换 **T** 的标准矩阵为 **A**，则由于 **T** 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的满射，所以 **A** 可逆是其充分必要条件。根据第二章定理 **9** 可知，线性变换 **T** 可逆也是 **A** 可逆充分必要条件。

(2)（判断 3 分，理由说明 6 分，课本 **270** 页习题 **19**）

解：一定有解。因为记原线性方程组的系数矩阵为 **A**，则由题意可知 **A** 是一个 **5×6** 的矩阵且原线性方程组的非平凡解中只有一个变量非零；所以 **dim Nul A = 1**。因此根据秩定理可知 **dim Col A = rank A = 6 – 1 = 5**，而 $\mathbf{R}^5$ 中只有它本身作为子集时维数才是 **5**。这表示 **Col A** 就是 $\mathbf{R}^5$，即 **A** 为系数矩阵的任意一个线性方程组都是相容的。

5.证：

记矩阵 A 的特征值 λ 对应的特征向量是 $\vec{v}$，则根据定义可知 $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$，所以有

$$p(A)\vec{v} = (c_0 + c_1A + \cdots + c_nA^n)\vec{v} = (c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_n\lambda^n)\vec{v} = p(\lambda)\vec{v}$$

这表示 $p(\lambda)$ 就是 $p(A)$ 的一个特征值。

（8 分）