中山大學 本科生考试草稿纸

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.95.9.(3) $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

解: $x'(t)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}=\dfrac{t}{|t|(\sqrt{1+t^2})^2}=\dfrac{t}{|t|(1+t^2)}$

$y'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}}\cdot\dfrac{1\cdot\sqrt{1+t^2}-t\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{(1+t^2)}=\dfrac{1}{1+t^2}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{|t|(1+t^2)}}=\dfrac{|t|}{t}=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}=\operatorname{sgn} t$。 $t\neq 0$

P.95.11 求椭圆周：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 (x_0,y_0) 处的切线方程与法线方程。

并证明：从椭圆的一个焦点向椭圆周上任一点 $M(x,y)$ 发射的光线，其反射线必通过椭圆的另一个焦点。

解：(1) $\dfrac{2x\,dx}{a^2}+\dfrac{2y\,dy}{b^2}=0\Longrightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}\Longrightarrow K\big|_{(x_0,y_0)}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$

过 (x_0,y_0) 切线：$y-y_0=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)\Longrightarrow\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

过 (x_0,y_0) 法线：$y-y_0=\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}(x-x_0)\Longrightarrow a^2y_0x-b^2x_0y=(a^2-b^2)x_0y_0$.