
普通物理学
中山大学
余非人

第5章 机械振动

§1 弹簧振子

§2 简谐振动

§3 阻尼振动

§4 受迫振动

§5 振动叠加

§1 弹簧振子

一. 弹簧振子

- 机械振动，是一个质点围绕一个平衡位置的来回运动。
- 机械振动系统，是产生振动的系统。弹簧振子，是典型的振动系统。

质量：m

位移：x

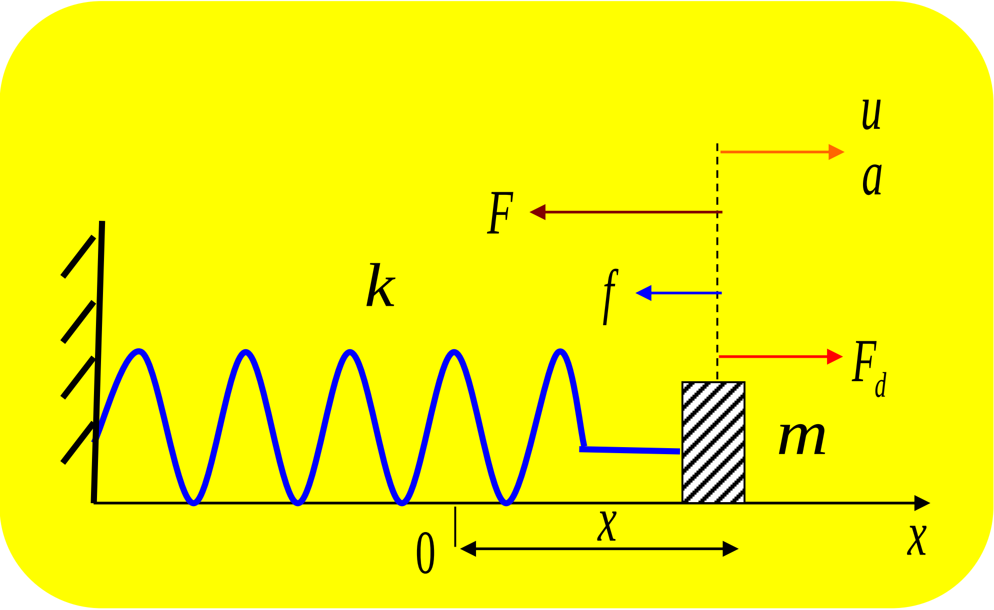
速度：$u = dx/dt$

加速度：$a = d^2x/dt^2$

弹性力：$F = kx(k:\text{弹簧系数})$

阻尼力：$f = \gamma u(\gamma:\text{阻尼系数})$

驱动力：$F_d = F_d(t)$

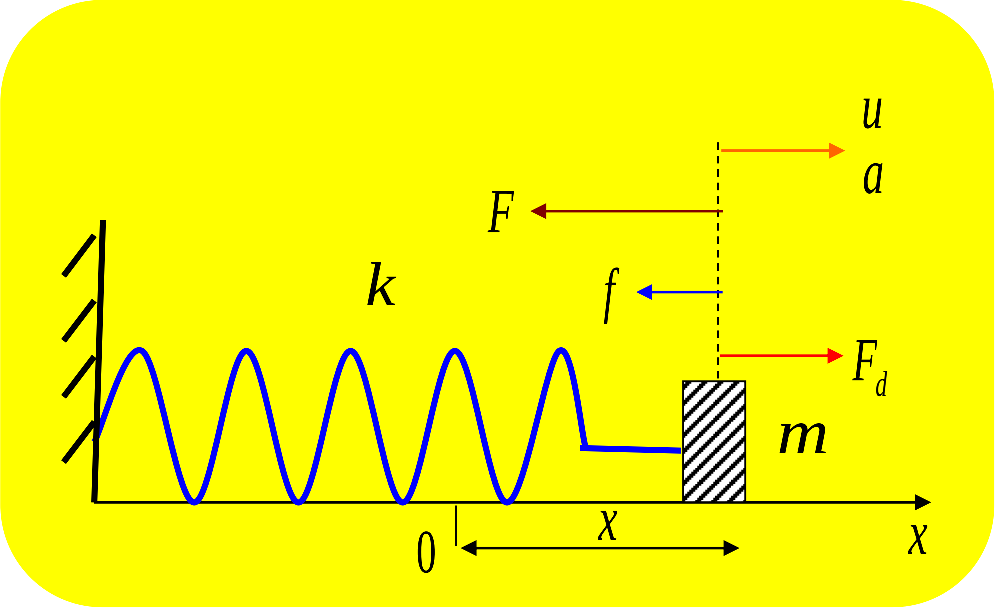


二. 弹簧振子的功能关系

- 弹簧振子的内部能量，有弹簧势能和质量块动能，势能和动能之间可以相互交换。
- 弹簧振子的外部作用，有驱动力和阻尼力。
- 驱动力对弹簧振子做功，其功可正可负，作正功则给弹簧振子提供能量，作负功则吸收弹簧振子的能量。
- 阻尼力对弹簧振子做负功，消耗弹簧振子的能量。

- 弹簧振子的功能关系为：

$$A_d - A_\gamma = \Delta V + \Delta E_k \qquad A_\gamma \geq 0$$

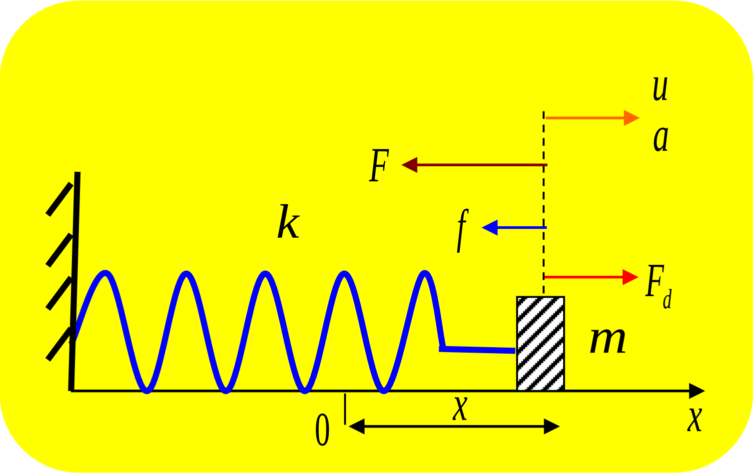


三. 弹簧振子的振动方程

- 弹簧振子的振动规律，完全由弹簧振子的振动方程和初始条件所决定。
- 弹簧振子的振动方程，由弹簧振子的力学关系所决定。

$$\because F_d - F - f = ma$$

$$\therefore F_0 \cos\omega_d t - kx - \gamma\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$



$$即: \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{\gamma}{2m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$

$$引入参数：\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \beta = \frac{\gamma}{2m},\ A_d(t) = \frac{F_d(t)}{m}$$

$$得标准振动方程: \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_d(t)\text{（线性方程）}$$

$$初始条件：x(t=0) = x_0, u(t=0) = u_0$$

§2 简谐振动

一. 弹簧振子的简谐振动

- 简谐振动，是质点围绕平衡位置按正弦规律来回运动，它是周期振动。
- 弹簧振子没有驱动力和阻尼的振动，称为弹簧振子的自由振动，它的振动规律为简谐振动。

因为：标准振动方程：$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A_d(t)$

由：$\gamma=0$和$F_d(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{\gamma}{2m}=0$，$A_d(t)=\frac{F_d(t)}{m}=0$

得自由振动方程：$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2x \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

由初始条件：$x(t=0)=x_0, u(t=0)=u_0$解方程得自由振动规律：

位移：$x = A\cos(\omega_0\, t + \varphi_0)$ （它是简谐振动）

速度：$u = \dfrac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos\left(\omega_0\, t + \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

加速度：$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = A\omega_0^2 \cos(\omega_0\, t + \varphi_0 + \pi)$

频率：ω_0（角频率）$= 2\pi\nu_0$（频率）$= \dfrac{2\pi}{T_0(\text{周期})} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

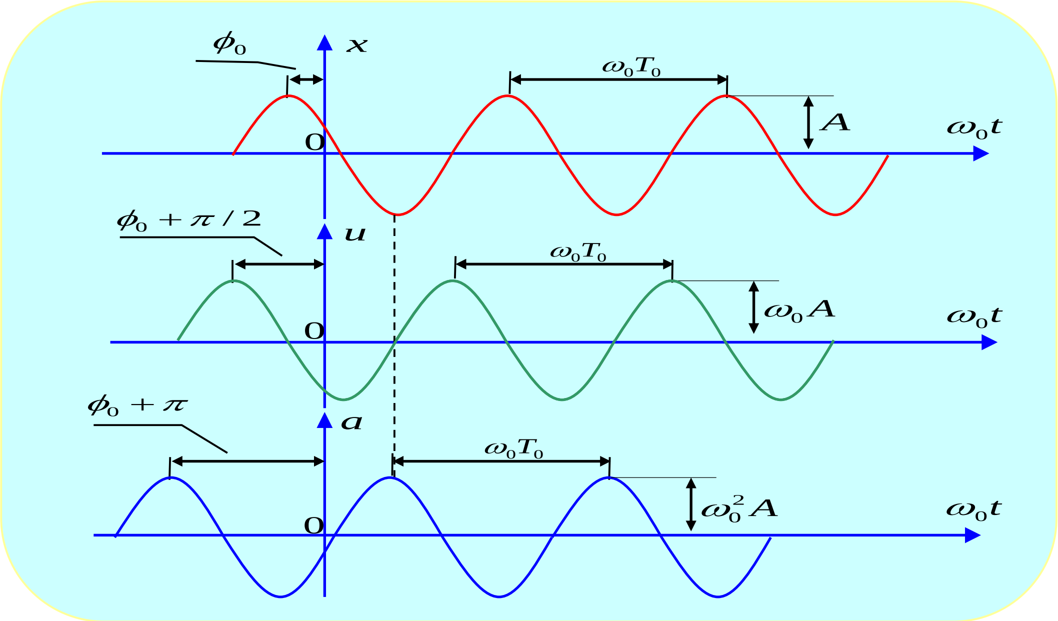
幅度：$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{u_0^2}{\omega_0^2}}$

初相：$\varphi_0 = -\tan^{-1}\dfrac{u_0}{\omega_0\, x_0}$

相位：$\varphi = \omega_0 t + \phi_0$

二. 弹簧振子简谐振动的特征

- 简谐振动的的三要素是频率、幅度和初相，它唯一确定了简谐振动。
- 弹簧振子的位移，速度和加速度都是简谐振动，其频率由弹簧振子的弹簧系数和质量决定，它称为弹簧振子的固有频率。
- 弹簧振子的位移与速度，速度与加速度之间的相位差都是90度。
- 弹簧振子的振幅和初相，由初始条件决定。



三. 弹簧振子简谐振动的势能和动能

- 弹簧振子简谐振动的势能达到最大时，动能为零；动能达到最大时势能为零，其总机械能守恒，等于初始机械能。
- 弹簧振子的振动过程，是势能和动能不断交换的过程。没有两种不同形式的能量就没有能量的交换，没有能量交换也就没有振动。

$$\because x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

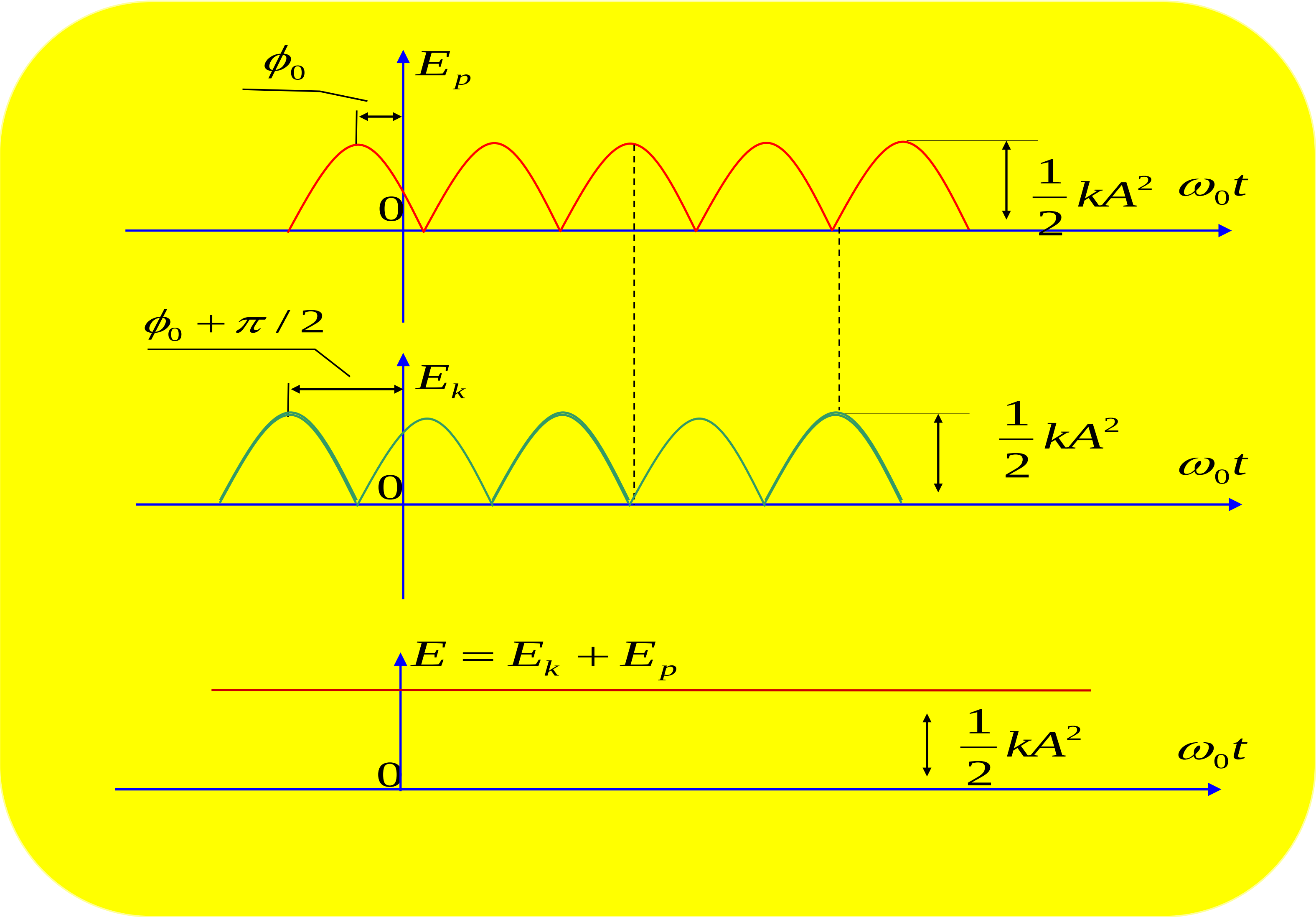
$$\therefore E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\because u = \frac{dx}{dt} = A\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore E_k = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\therefore E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

动能与势能存在90度的相位差



§3 阻尼振动

一. 弹簧振子阻尼振动方程

- 弹簧振子阻尼振动，是没有驱动力，有阻尼的振动，也称为有阻尼自由振动。
- 阻尼振动，是减幅简谐振动或减幅非周期振动，由阻尼大小决定。

因为：标准振动方程：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A_d(t)$

由：$F_d(t)=0 \quad \Rightarrow \quad A_d(t)=\dfrac{F_d(t)}{m}=0$

得阻尼振动方程：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad \omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}},\ \beta=\dfrac{\gamma}{2m}$

阻尼振动方程，可分三种情况来解。

二. 弹簧振子阻尼振动的三种情况

1. 欠阻尼振动

- 欠阻尼振动，是阻尼比较小的振动，它是减幅简谐振动。

欠阻尼条件：$\frac{\beta}{\omega_0} < 1$

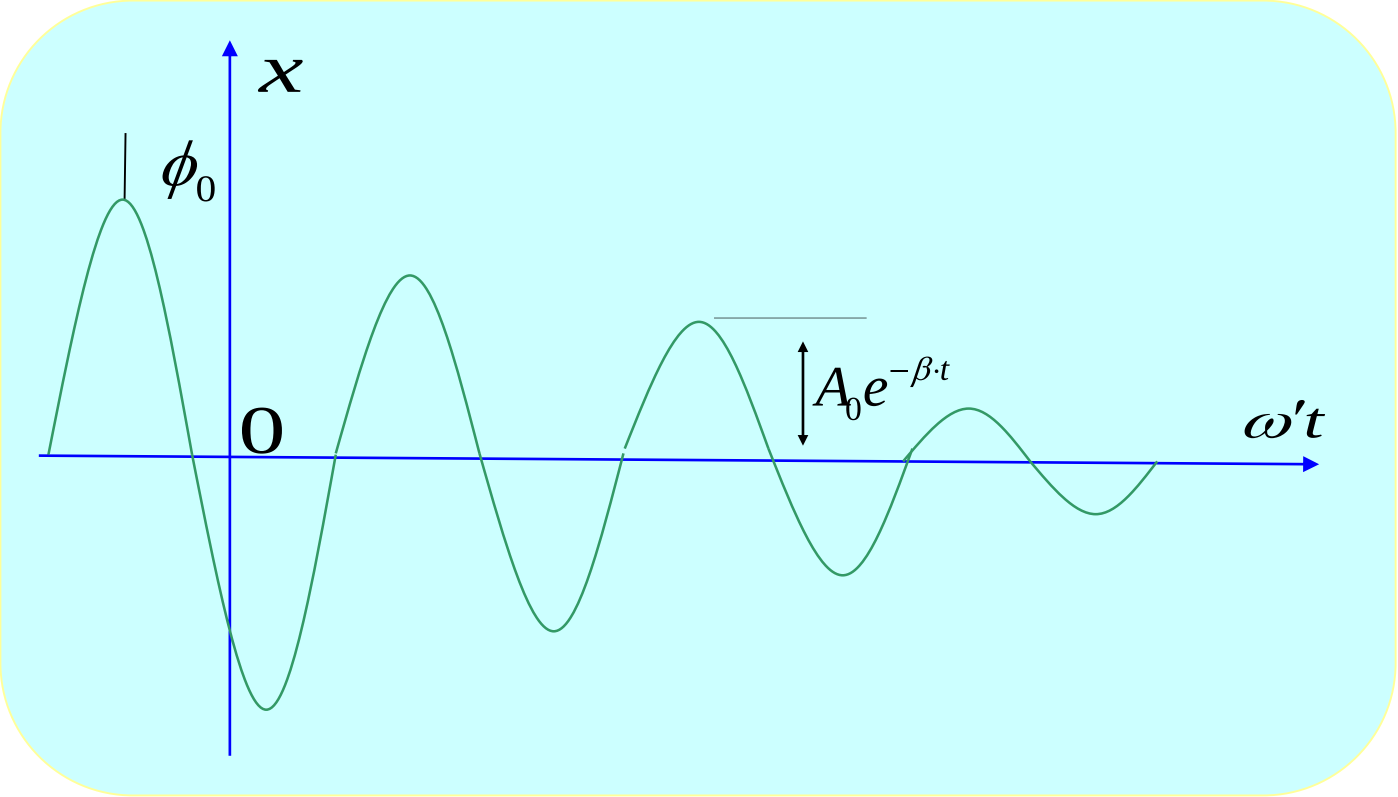
位移： $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi_0)$ （它是减幅简谐振动）

衰减： $\beta = \frac{\gamma}{2m}$

频率： $\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0$偏离固有频率

幅度A_0和初相φ_0由初始条件决定

- 阻尼不断消耗弹簧振子的能量，使振动幅度不断减小。



2. 过阻尼振动

- 过阻尼振动，是阻尼比较大的振动，它是减幅非周期振动。

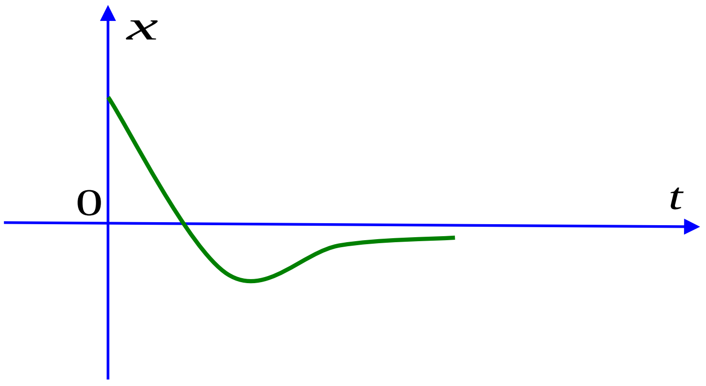
过阻尼条件：$\dfrac{\beta}{\omega_0} > 1$

位移：$x = A_1 e^{-\beta_1' \cdot t} + A_2 e^{-\beta_2' \cdot t}$　　（它是非周期减幅振动）

衰减常数：$\beta_{1,2}' = \beta\left[1 \pm \sqrt{\left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right]$

幅度A_1和A_2由初始条件决定

- 由于阻尼过大，弹簧振子的能量不到一个周期就基本就消耗完。



2. 临界阻尼振动

- **临界尼振动，是阻尼刚好达到过阻尼的振动，它是减幅非周期振动。**

过阻尼条件：$\dfrac{\beta}{\omega_0}=1$

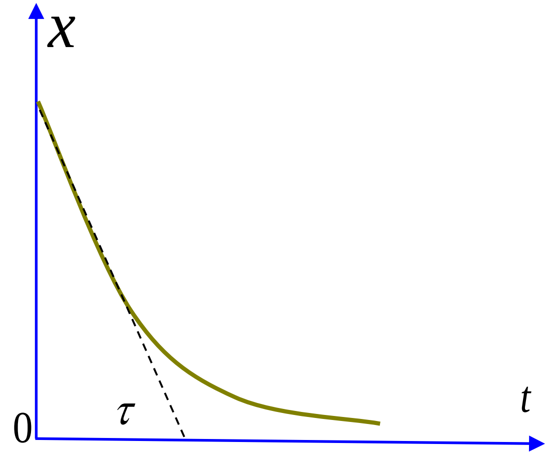
位移：$x=\left(A_1t+A_2\right)e^{-\beta\cdot t}$ （它是非周期减幅振动）

衰减常数：$\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$

幅度A_1和A_2由初始条件决定

驰豫时间：$\tau=\dfrac{1}{\beta}$（描述弹簧振子能维持振动的时间）

- **由于阻尼达到临界，弹簧振子的能量刚好一个周期就基本消耗完。**



§4 受迫振动

一. 弹簧振子受迫振动方程

- 弹簧振子受迫振动，是有驱动力，也有阻尼的振动，它是非自由振动。
- 受迫振动是一个复杂的振动，以欠阻尼和周期驱动力的振动为例说明。
- 欠阻尼自由振动是一个减幅简谐振动，振动频率接近固有频率。如果对弹簧振子施加一个频率接近固有频率的，正弦周期驱动力，给弹簧振子输入能量，那么为弹簧振子的振动就可以持续不断维持下去。

设驱动力为： $F_d(t) = F_0 \cos\omega_d t \quad \Rightarrow A_d(t) = \dfrac{F_d(t)}{m} = A_0 \cos\omega_d t,\ A_0 = \dfrac{F_0}{m}$

则受迫振动方程为：$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos\omega_d t$

固有频率： $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \qquad$ 衰减常数： $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$

二. 弹簧振子受迫振动过程

欠阻尼$\left(\frac{\beta}{\omega_0}<1\right)$条件下，受迫振动方程的解：

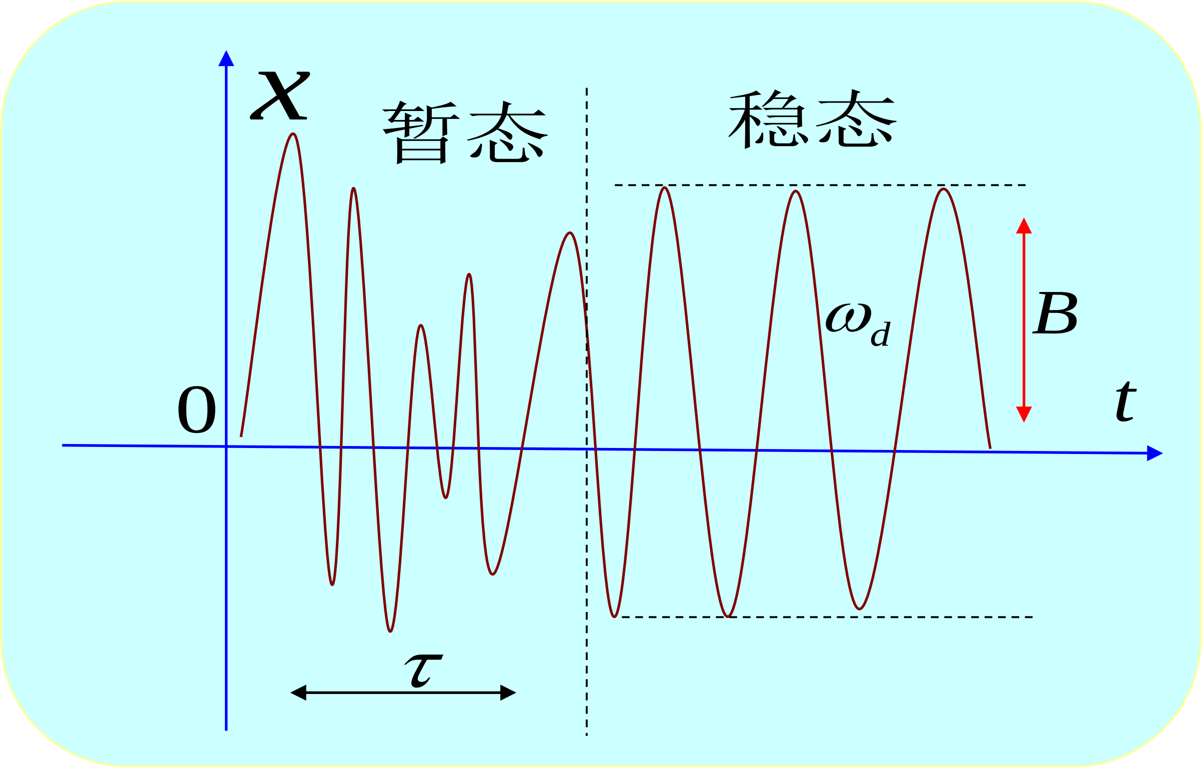
受迫振动：$x = Ae^{-\beta\cdot t}\cos(\omega' t+\varphi_0)$暂态$+B\cos(\omega_d t+\phi_d)$稳态

暂态部分：$\omega' = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0$　　A和φ_0由初始条件决定

稳态部分：$B = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_d^2-\omega_0^2)^2+(2\beta\omega_d)^2}}$　　$\phi_d = tg^{-1}\frac{2\beta\omega_d}{(\omega_d^2-\omega_0^2)}$

- 弹簧振子受迫振动，分为暂态和稳态两部分，暂态部分是减幅简谐振动，它只能维持很短暂的时间，稳态部分是等幅简谐振动，它可以一直维持下去。
- 暂态部分由振子特性和初始条件决定。稳态部分由振子特性和驱动特性决定，与初始条件无关。弹簧振子稳态振动频率等于外界驱动频率。

- 在短暂的初始阶段，受迫振动过程既含有暂态部分，也含有稳态部分，它是一个复杂的振动过程。由于暂态与稳态的叠加，可能出现巨大峰值，它具有很强的破坏性。
- 在初始短暂阶段过后，只有稳态部分存在，它是等幅简谐振动，振动频率等于驱动频率。



三. 弹簧振子受迫振动的共振

1. 稳态振幅

- 稳态频率等于驱动频率决定，稳态幅度由振子特性和驱动特新决定，其关系决定共振现象的出现。

$$B=\frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_d^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\beta\omega_d\right)^2}}=\frac{A_0}{\sqrt{\omega_d^4-2\omega_0^2\omega_d^2+\omega_0^4+2^2\beta^2\omega_d^2}}$$

$$=\frac{A_0}{\sqrt{\left\{\omega_d^2-\omega_0^2\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\omega_0}\right)^2\right]\right\}^2+\left\{\omega_0^4-\omega_0^4\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\omega_0}\right)^2\right]^2\right.}}$$

2. 品质因数和共振频率

- 为了使稳态幅度关系的物理意义更加清晰，必须引入参数来加以描述

驱动力频率： ω_d

驱动力幅度： A_0

振子固有频率： $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}},$

振子衰减常数： $\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$

定义品质因数： $Q=\dfrac{\omega_0}{2\beta}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{2m}{\gamma}=\dfrac{\sqrt{km}}{\gamma}\propto\dfrac{\text{振子储能}}{\text{振子耗能}}<<1$

定义共振频率： $\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}\approx\omega_0$（高品质因数时，两频率接近）

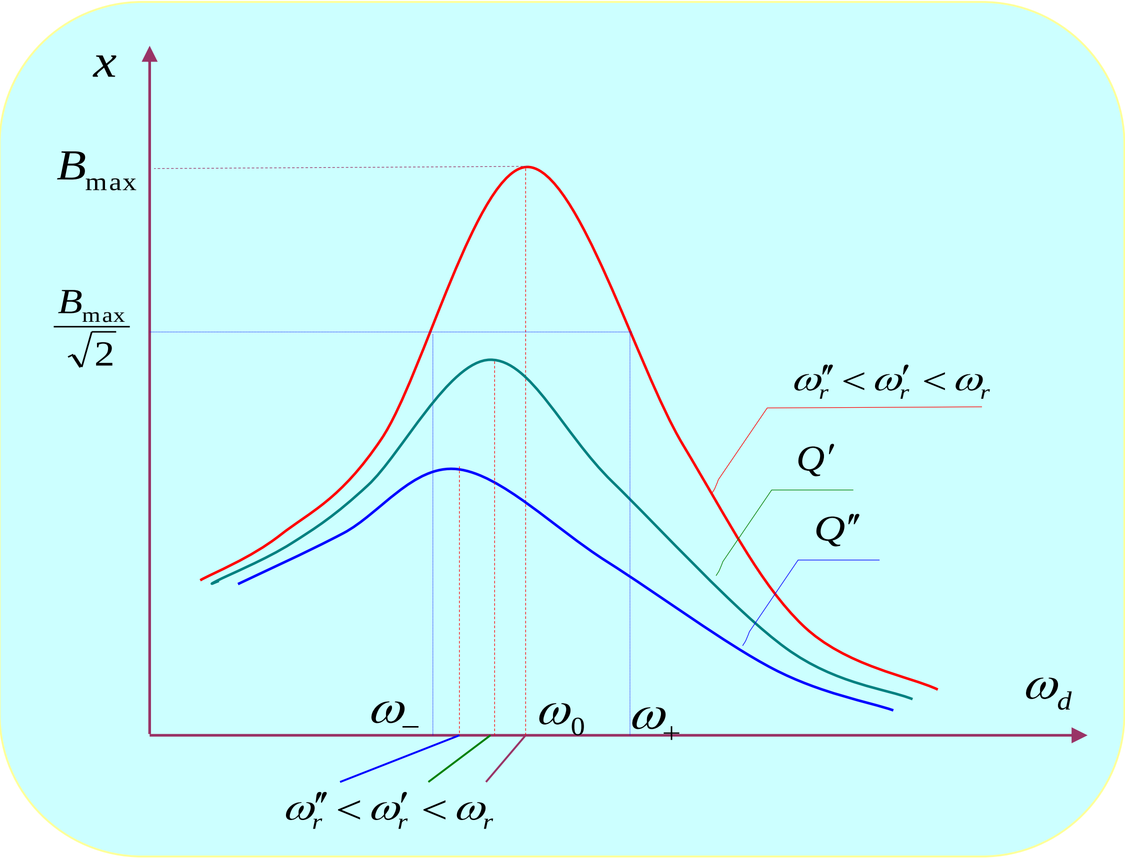
得到稳态幅度： $B=\dfrac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_d^2-\omega_r^2\right)^2+\left(\omega_0^4-\omega_r^4\right)}}$

3. 共振曲线

$$
\text{共振：}\quad B=\begin{cases}\rightarrow 0 & \text{当}\ \omega_d >> \omega_r\text{时}\\ \dfrac{B_{\max}}{\sqrt{2}}(\text{共振上限}) & \text{当}\ \omega_d=\omega_+\approx\omega_r+\beta\text{时}\\ B_{\max}\left(\text{初相}\ \phi_d = tg^{-1}\dfrac{2\beta\omega_d}{\left(\omega_d^2-\omega_0^2\right)}\approx 0\right)(\text{共振}) & \text{当}\ \omega_d=\omega_r\approx\omega_0\text{时}\\ \dfrac{B_{\max}}{\sqrt{2}}(\text{共振下限}) & \text{当}\ \omega_d=\omega_-\approx\omega_r-\beta\text{时}\\ \rightarrow 0 & \text{当}\ \omega_d << \omega_r\text{时}\end{cases}
$$

$$
\text{共振幅：}\quad B_{\max}\approx\frac{A_d}{\sqrt{\omega_0^4-\omega_r^4}}=\frac{\left(A_d Q/\omega_0^2\right)}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^4}}}\approx A_d Q/\omega_0^2\left(\text{品质因数越高共振幅越大}\right)
$$

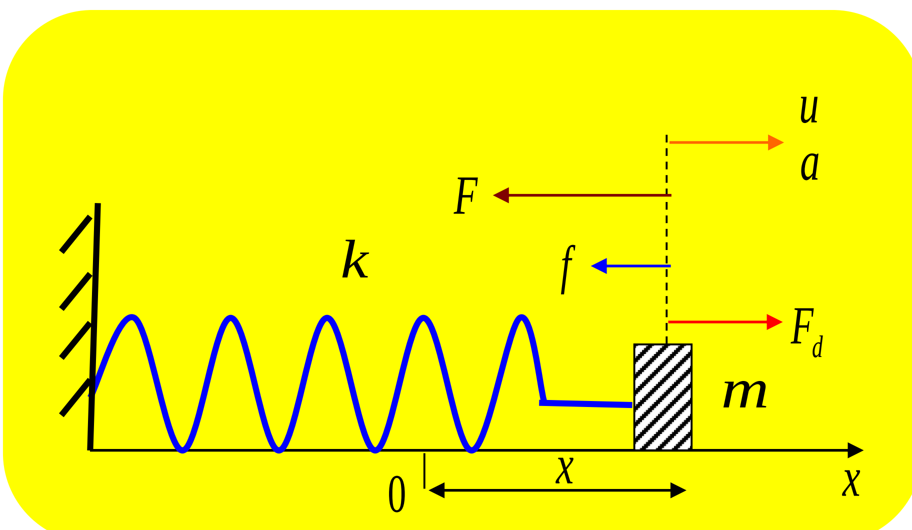
$$
\text{共振带宽}\left(\text{共振频率范围}\right)\text{：}\quad \omega_+-\omega_-\approx 2\beta=\frac{\omega_0}{Q}\left(\text{品质因数越高共振带宽越小}\right)
$$

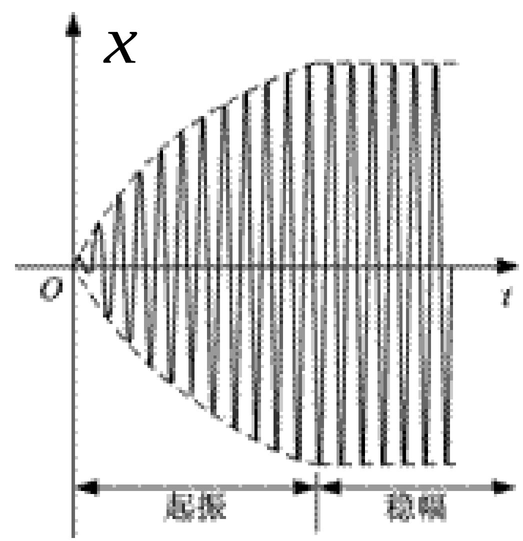


- 当驱动频率接近共振频率，即接近振子固有频率时，将产生共振现象，稳态幅度达到最大，振子产生强烈的振动。
- 品质因数越高，共振越强烈，但共振曲线越尖锐，产生共振的频率范围窄

2. 共振的能量交换

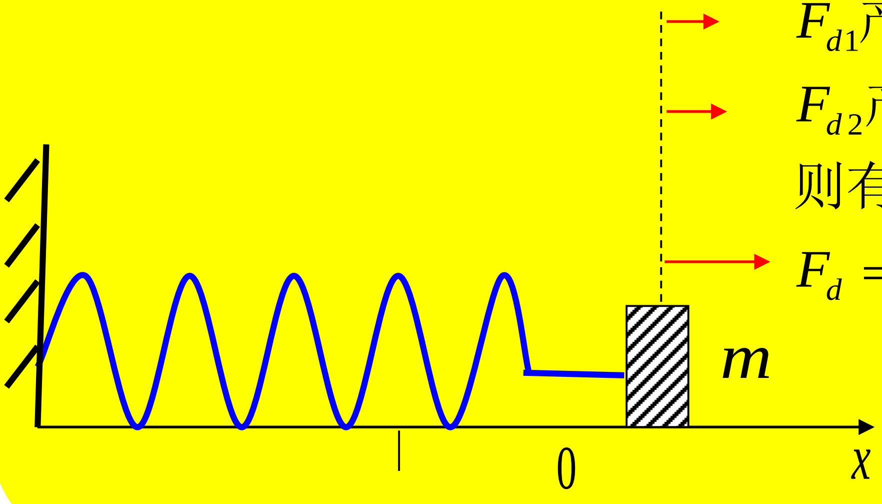
- 在共振时，不但稳态频率等于驱动频率，稳态初相也等于驱动初相，驱动力每时每刻都与振子同步，驱动力始终对振子做正功。
- 在初期阶段，振子振幅小，阻尼损耗小，驱动力不断给振子能量，振子振动幅度越来越大。但这时阻尼损耗也越来越大，因为阻尼与速度成正比。最后驱动力提供的能量与阻尼损耗的能量相等时，振子幅度不变而达到稳态。驱动力与振子同步可达到最大稳态幅度。





三. 弹簧振子受迫振动的叠加性

- 弹簧振子受迫振动方程，是一个线性微分方程，其解具有叠加性，所以振动具有叠加性。



如果：

F_{d1}产生振动$x_1(t)$

F_{d2}产生振动$x_2(t)$

则有：

$F_d = F_{d1} + F_{d2}$产生振动$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

●**振动叠加性证明：**

振动方程：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A_d(t)$

如果驱动力为$A_{d1}(t)$，振子振动为$x_1(t)$，即$\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx_1}{dt}+\omega_0^2x_1=A_{d1}(t)$

如果驱动力为$A_{d2}(t)$，振子振动为$x_2(t)$，即$\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx_2}{dt}+\omega_0^2x_2=A_{d2}(t)$

则驱动力为$A_d(t)=A_{d2}(t)+A_{d2}(t)$时，振子振动为$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

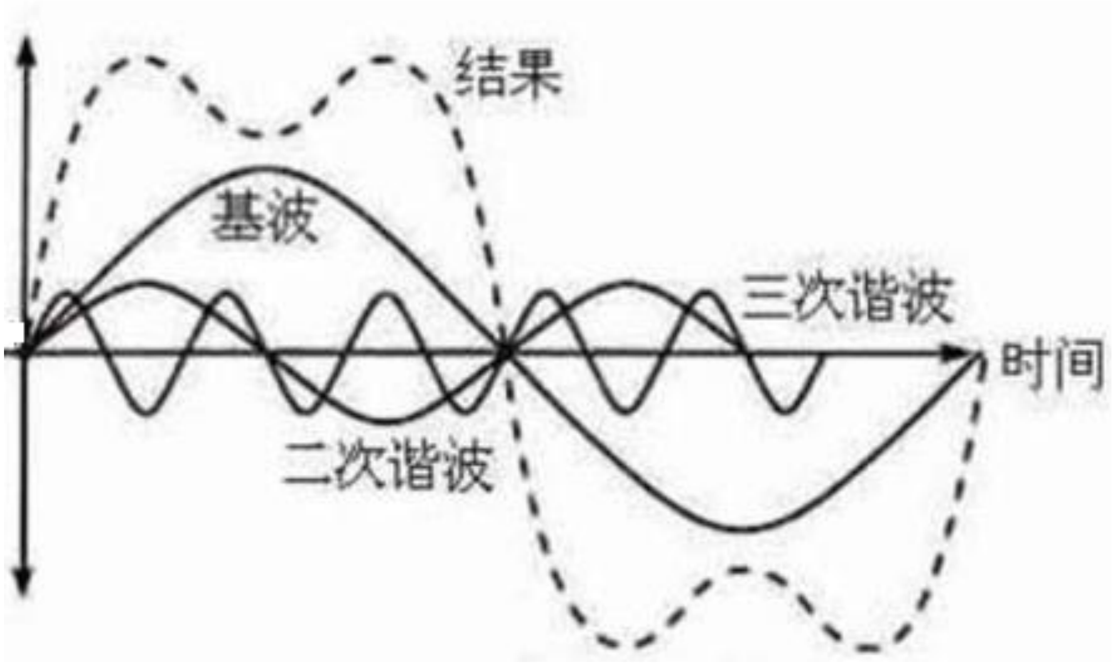
因为：$\dfrac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}+2\beta\dfrac{d(x_1+x_2)}{dt}+\omega_0^2(x_1+x_2)=A_{d1}(t)+A_{d2}(t)$

即：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\beta\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A_d(t)$

●任何周期驱动力，都可分解为多个不同幅度、频率和相位简谐驱动力的叠加。其中每个简谐力产生的稳态振动都是同频简谐振动，所以任何周期驱动力产生的稳态振动，都是各个驱动力简谐分量产生的简谐振动叠加。

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\cos(n\Omega t+\varphi_n) \qquad T=2\pi/\Omega\text{是}F(t)\text{的基波周期}$$

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\cos(n\Omega t+\phi_n) \qquad T=2\pi/\Omega\text{是}x(t)\text{的基波周期}$$

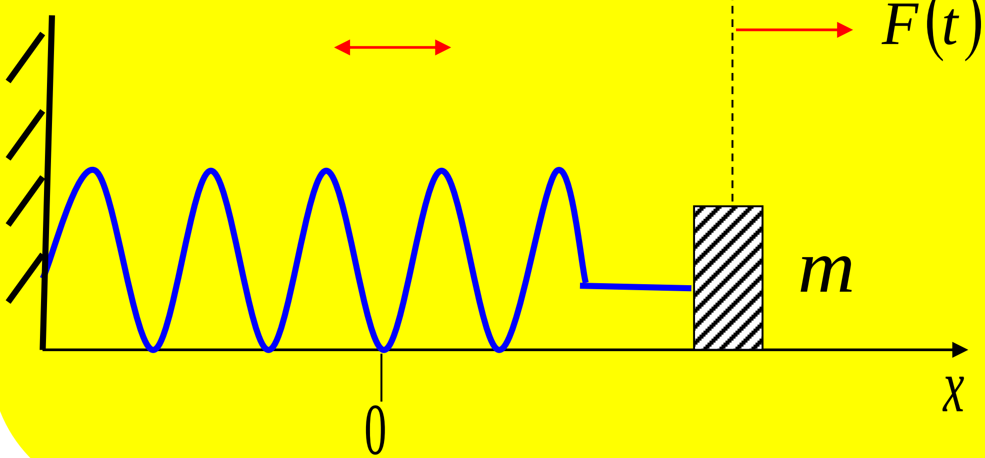


●共振具有频率选择作用：高品质因数的弹簧振子，只选择共振频率的简谐驱动力分量作用，产生共振频率的强烈振动，其他驱动力分量产生的振动很小。

高品质因数的频率选择性

$$x(t) = x_{\max}\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

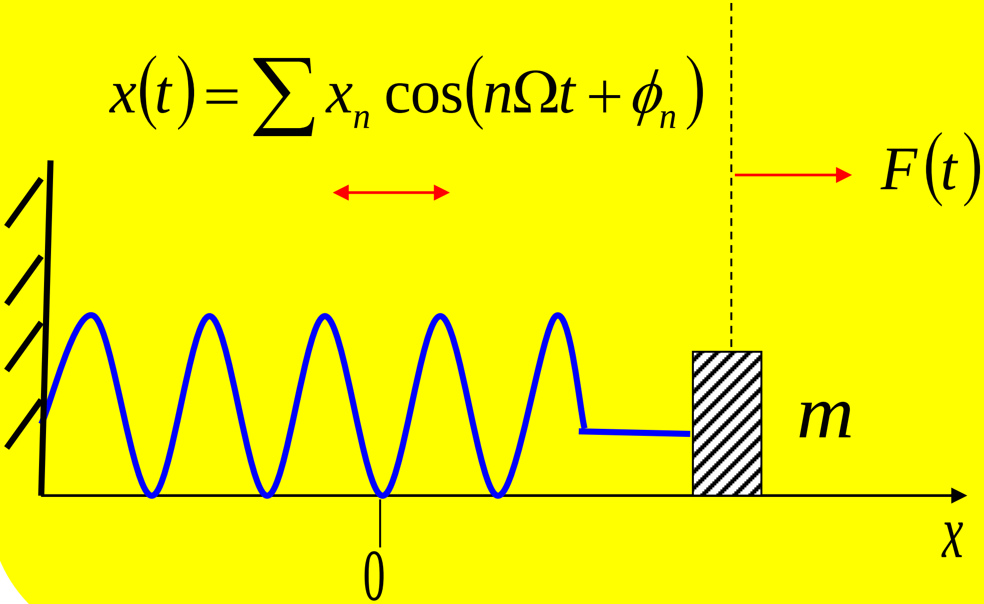


- 当品质因数减小，共振的频率选择作用也减小，各种驱动力分量产生的振动在弹簧振子中都存在，总振动是各种幅度、频率和相位简谐振动的叠加。

低品质因数的弹簧振子的振动

$$x(t)=\sum x_n\cos(n\Omega t+\phi_n)$$

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$



§5 振动叠加

一. 简谐振动的叠加

- 一般弹簧振子的受迫振动，都是多个简谐振动的叠加。
- 简谐振动的叠加，可以用波形直接叠加方法实现，也可以用矢量叠加方法实现。
- 每一个简谐振动都可以用一个矢量表示，简谐振动的叠加，就是矢量的叠加。

$$x_n(t) = x_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

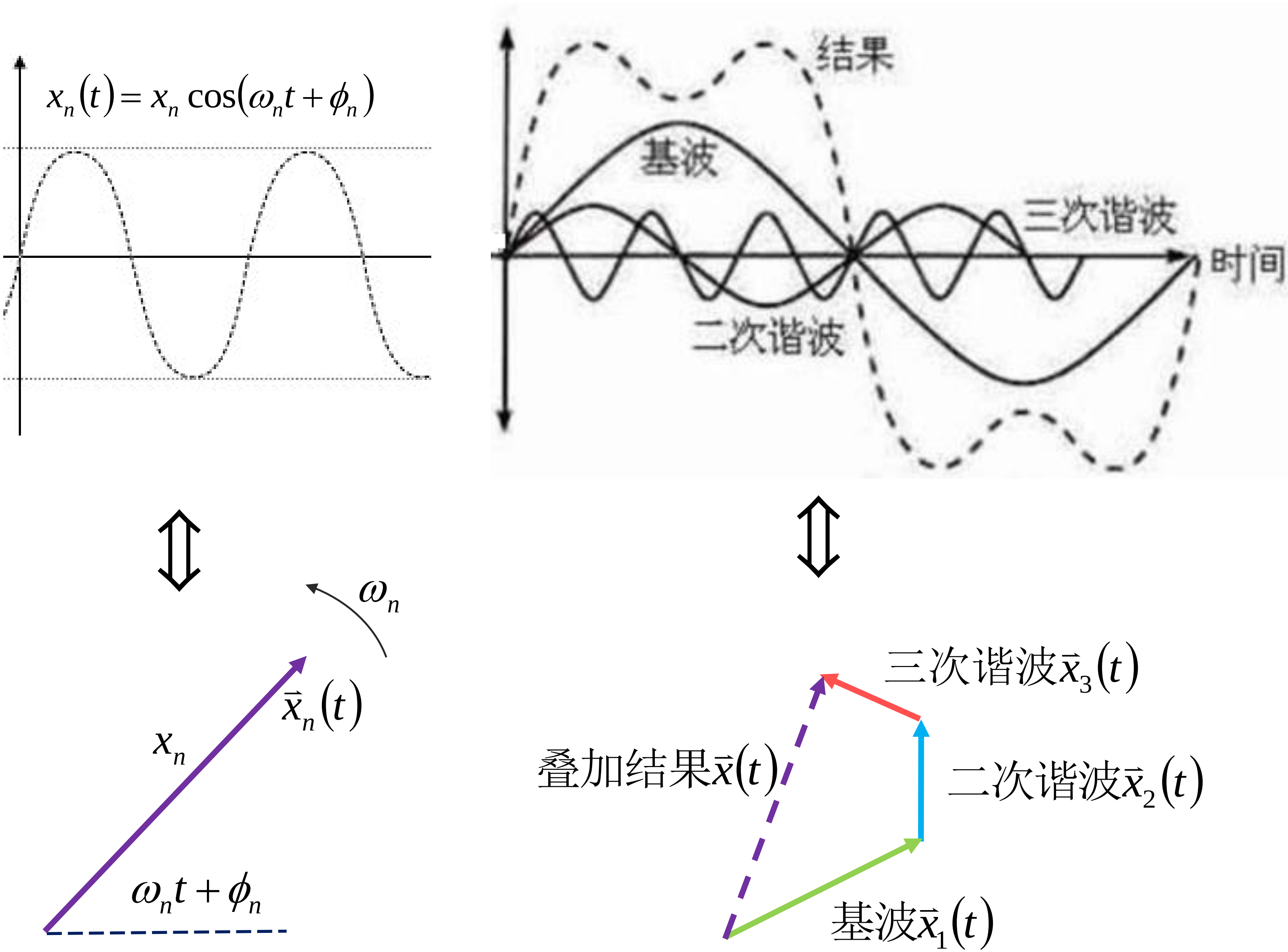
$$\Updownarrow$$

$$\vec{x}_n(t) = x_n\left[\cos(\omega_n t + \phi_n)i + \sin(\omega_n t + \phi_n)j\right] = x_n\angle(\omega_n t + \phi_n)$$

$$\sum x_n(t) = \sum x_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum \vec{x}_n(t) = \sum x_n\left[\cos(\omega_n t + \phi_n)i + \sin(\omega_n t + \phi_n)j\right] = \sum x_n\angle(\omega_n t + \phi_n)$$



$x_n(t)=x_n\cos(\omega_n t+\phi_n)$
结果
基波
三次谐波
时间
二次谐波
ω_n
$\bar{x}_n(t)$
x_n
$\omega_n t+\phi_n$
三次谐波$\bar{x}_3(t)$
叠加结果$\bar{x}(t)$
二次谐波$\bar{x}_2(t)$
基波$\bar{x}_1(t)$

二. 同方向简谐振动的叠加

- 振动，有一维振动，二维振动和三维振动三种。以上谈论的都是一维振动，二维振动可以看成是两个一维振动在空间上的合成。三维振动可以看成是三个一维振动在空间上的合成。
- 同方向简谐振动的叠加是多个一维振动的叠加。

1. 同方向和同频率简谐振动的叠加

- 叠加振动：

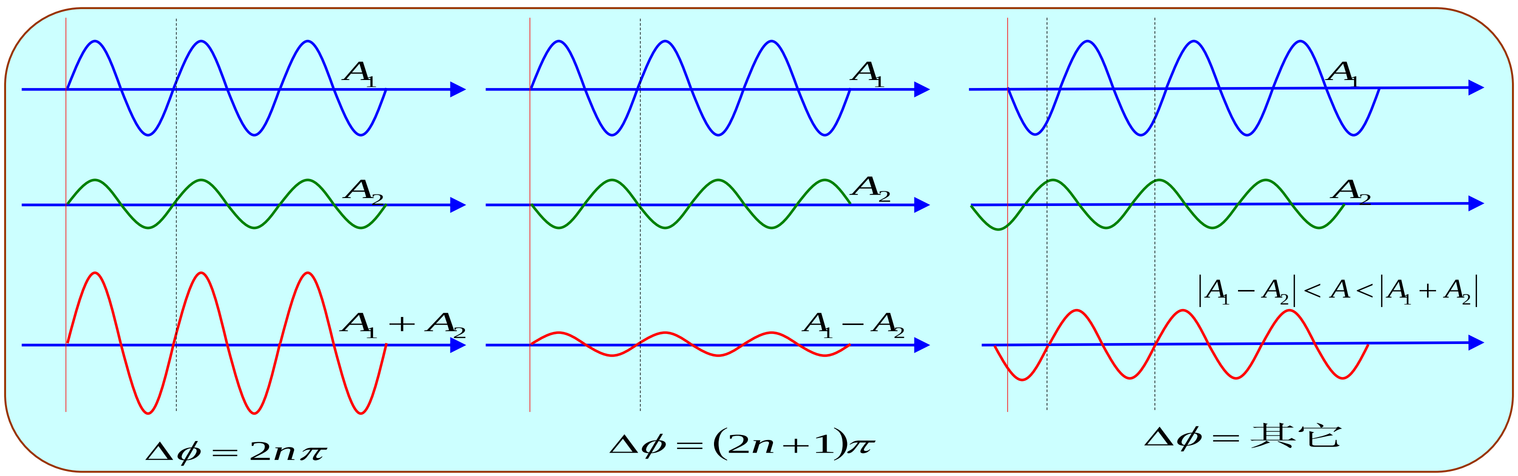
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10})$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

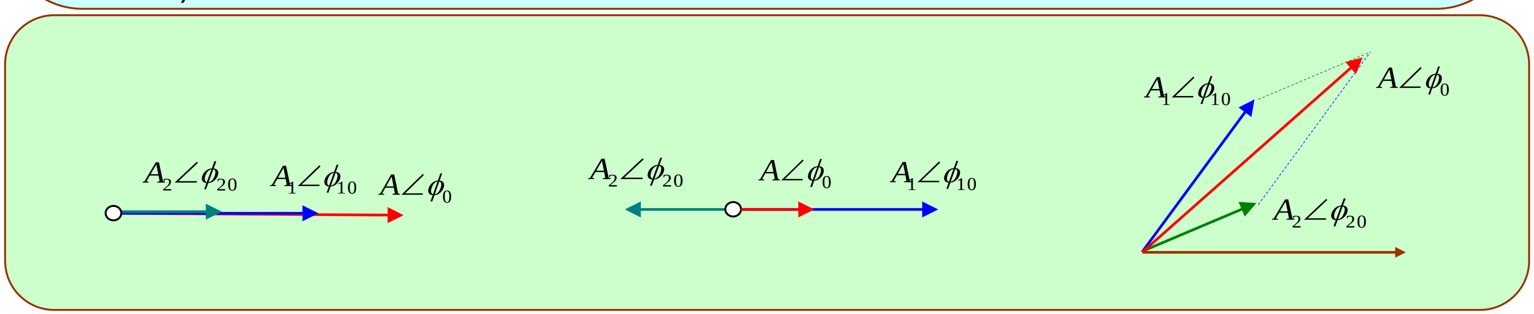
$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

- 叠加振动的振幅，它对相位差很敏感。

$$A=\sqrt{A_1+A_2+2A_1A_2\cos\Delta\phi}=\begin{cases} A_1+A_2 & \Delta\phi=\pm 2n\pi \\ \left|A_1-A_2\right| & \Delta\phi=\pm(2n+1)\pi \\ \left(A_1+A_2\right)>A>\left|A_1-A_2\right| & \text{其他} \end{cases}$$

相位差：$\Delta\phi=\left(\phi_{20}-\phi_{10}\right)$





- 叠加振动的相位，它对相位差不敏感。

$$\phi_0 = \tan^{-1}\frac{A_1 \sin\phi_{10} + A_2 \sin\phi_{20}}{A_1 \cos\phi_{10} + A_2 \cos\phi_{20}}$$

2. 同方向和不同频率简谐振动的叠加–拍

- 叠加振动：

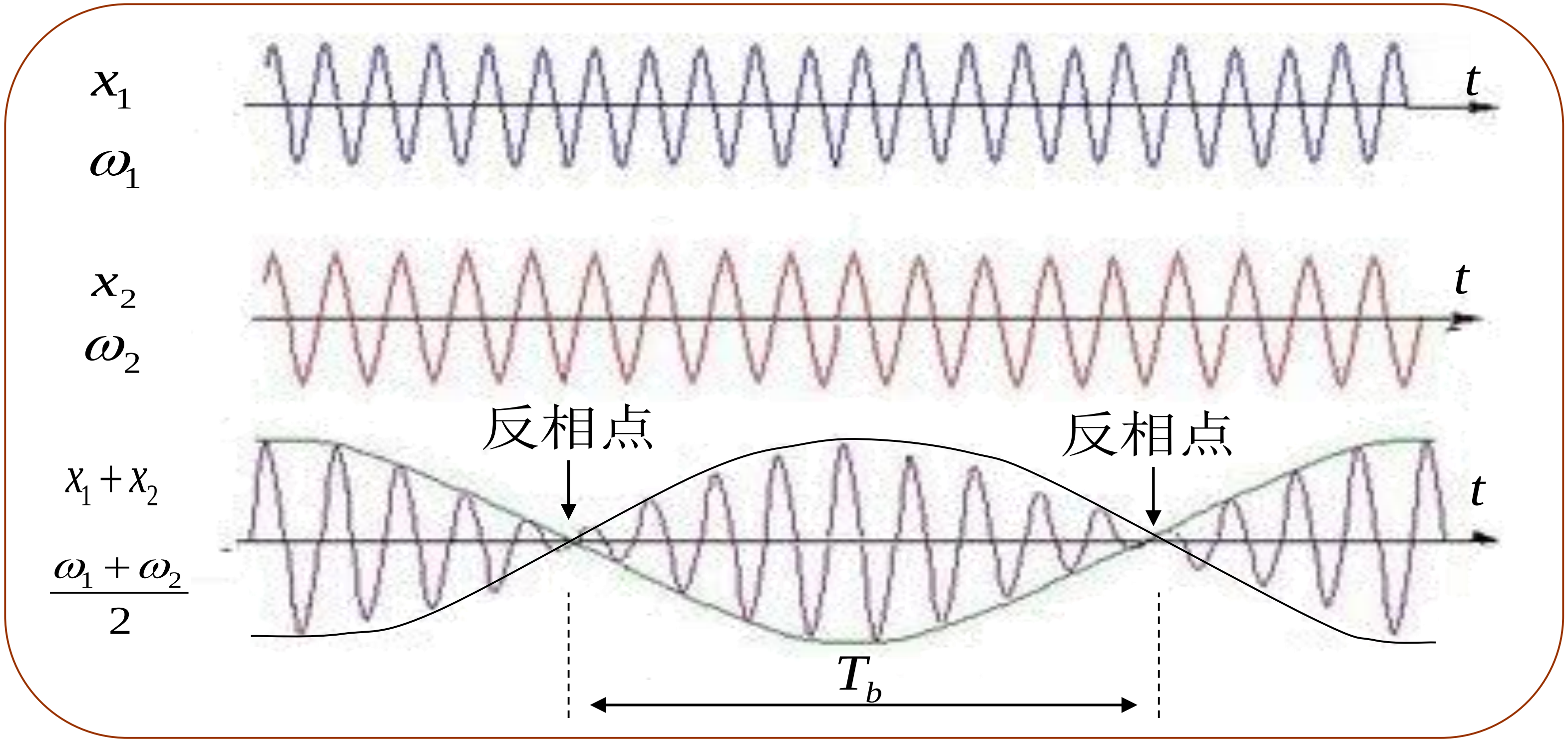
$$x_1 = A\cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A\cos(\omega_2 t)$$

$$x = x_1 + x_2 = \left[2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)\cdot t}{2}\right]\cos\frac{(\omega_2 + \omega_1)\cdot t}{2}$$

- 拍的振动。

拍的条件(频率差很小): $|\omega_2-\omega_1| << \omega_2+\omega_2$

拍频率: $\nu_b=\dfrac{1}{T_b}=2\times\dfrac{(\omega_2-\omega_1)/2}{2\pi}=\dfrac{(\omega_2-\omega_1)}{2\pi}$



三. 垂直方向简谐振动的叠加

1. 同频率简谐振动的叠加

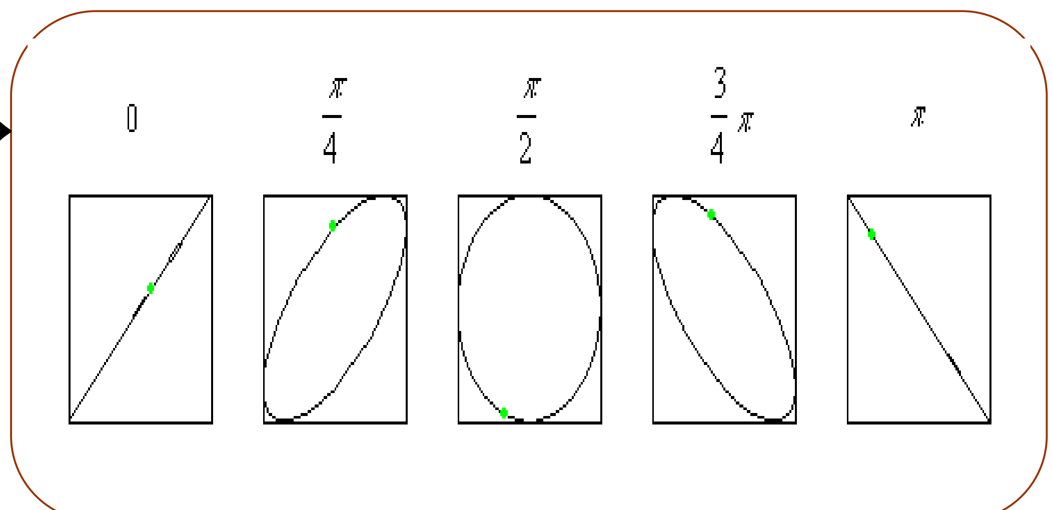
- 垂直方向简谐振动的叠加是二维振动的叠加。
- 相互垂直同频率的简谐振动，叠加后的振动为椭圆运动，也称椭圆振动。

x方向的振动：$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10})$

y方向的振动：$y = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$

xoy平面的振动：$\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} - \dfrac{2xy}{A_1 A_2}\cos\Delta\phi = \sin^2\Delta\phi \qquad \Delta\phi = (\phi_{20} - \phi_{10})$

$\Delta\phi \rightarrow$



2. 不同频率简谐振动的叠加

- 相互垂直不同频率的简谐振动，如果两个频率之比为有理数，则叠加后的振动为闭合曲线运动，其轨迹为李萨茹图，形状与频率比和相位有关。

- 如果两个频率之比为无理数，则叠加后的振动为非闭合曲线运动，其轨迹将走遍整个二维区域