
普通物理学
中山大学
余非人

第4章 刚体的运动

§1 刚体

一. 刚体的基本概念

- 刚体，是特殊的质点系，刚体中任意两个质点之间的距离不随时间变化，它是固体的理想模型。
- 刚体运动的约束条件，是由刚体中任意两个质点之间的距离不随时间变化所规定的条件。

$$\because \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\cdot\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) = C$$

$$\therefore \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\cdot\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_j}{dt}\right) = 0$$

于是有约束条件：$\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\cdot\left(\vec{v}_i - \vec{v}_j\right) = 0$

- 刚体的质心，是刚体的质量中心。

质心的位矢定义：$\vec{r}_c = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right) \Big/ m_c$　　质心的质量定义：$m_c = \sum_{i=1}^{N} m_i$

二. 刚体的一般运动定理

- 刚体，是一个特殊的质点系，刚体中任意两个质点之间的距离不随时间变化，刚体内的质点没有相对运动，内力对刚体运动不产生任何作用，所以刚体运动满足的动量定理、角动量定理和动能定理为：

动量定理：$\vec{F}^{ex}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}\quad\left(\vec{F}^{ex}=\sum\vec{F}_i^{ex},\vec{p}=\sum\vec{p}_i\right)$

角动量定理：$\vec{M}^{ex}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}\quad\left(\vec{M}^{ex}=\sum\vec{M}_i^{ex},\vec{L}=\sum\vec{L}_i\right)$

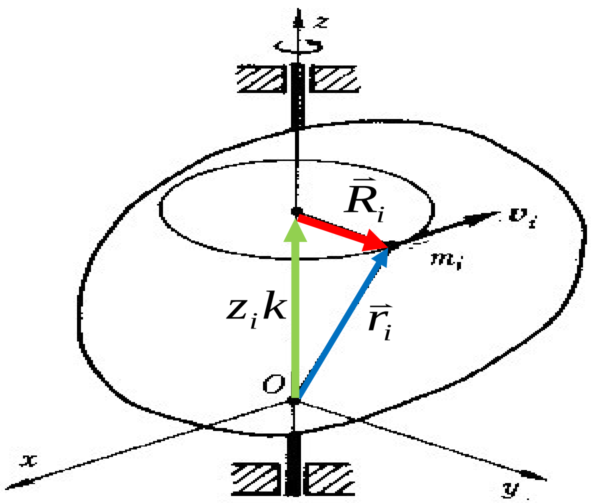
动能定理：$A^{ex}=\Delta E_k\quad\left(A^{ex}=\sum A_i^{ex},E_k=\sum E_{ik}\right)$

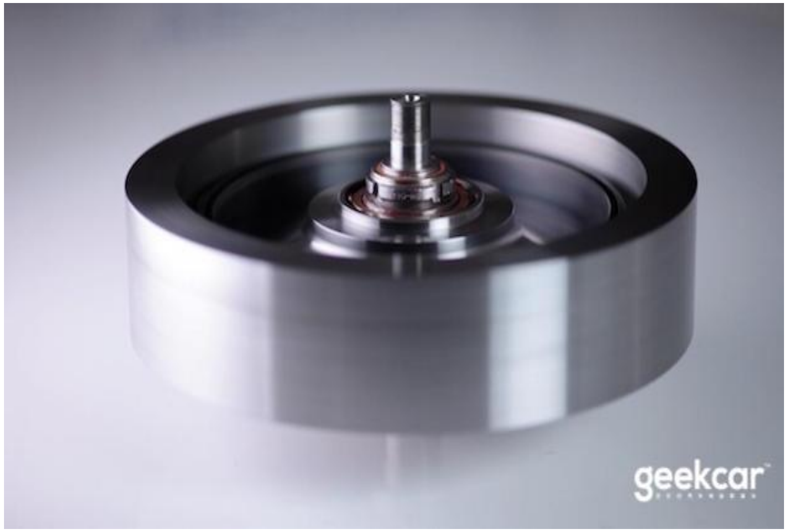
- 刚体的运动，只有整体运动，没有内部的相对运动。刚体运动可分解为平动和转动。
- 刚体平动的运动量是刚体的动量，它满足动量定理。
- 刚体转动的运动量是角动量，它满足角动量定理。

§ 2 刚体的定轴转动

一. 刚体定轴转动的描述

- 刚体定轴转动时，刚体上各点都绕同一根静止不动的直线作圆周运动，该直线称为转轴。



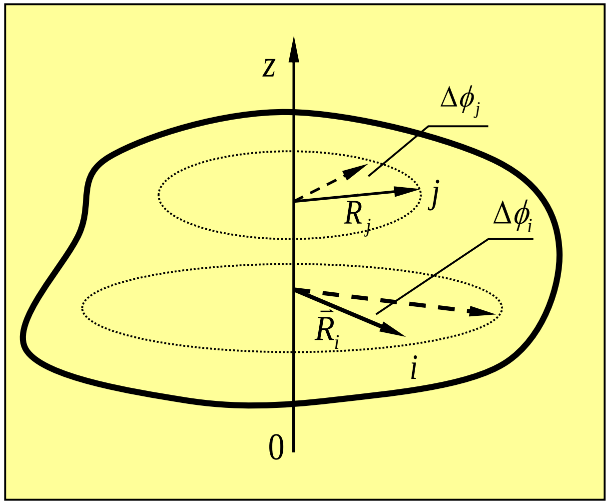


- 刚体定轴转动的位矢：

刚体上任意一点的位矢：$\vec{r}_i = \vec{R}_i + z_i k \quad \begin{cases} dr_i / dt = 0 \\ dR_i / dt = 0 \\ dz_i / dt = 0 \end{cases}$

- 刚体定轴转动时，刚体上所有质点都绕 转轴作圆周运动。在相同的时间内，任何质点绕转轴转过的角度相同，该角度称为角位移：

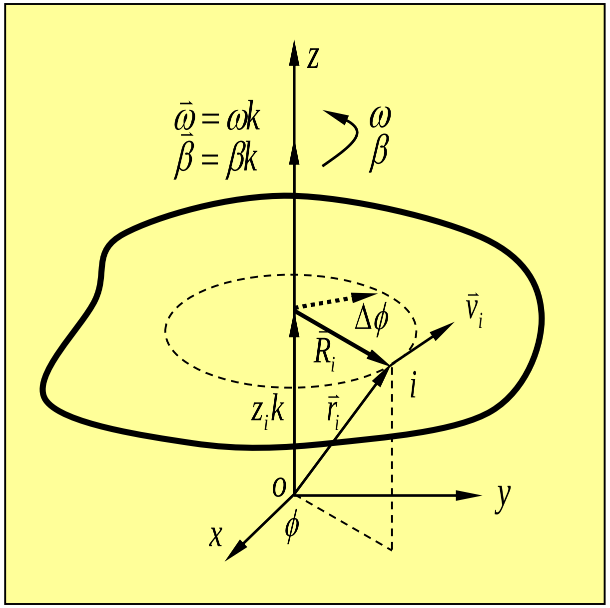
角位移：$\Delta\phi_i = \Delta\phi_j = \Delta\phi$



- 刚体定轴转动的角速度和角加速度：

$$角速度：\begin{cases} \omega = \dfrac{d\phi}{dt} \\ \vec{\omega} = \omega k \end{cases}$$

$$角加速度：\begin{cases} \beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\phi}{dt^2} \\ \vec{\beta} = \beta k \end{cases}$$



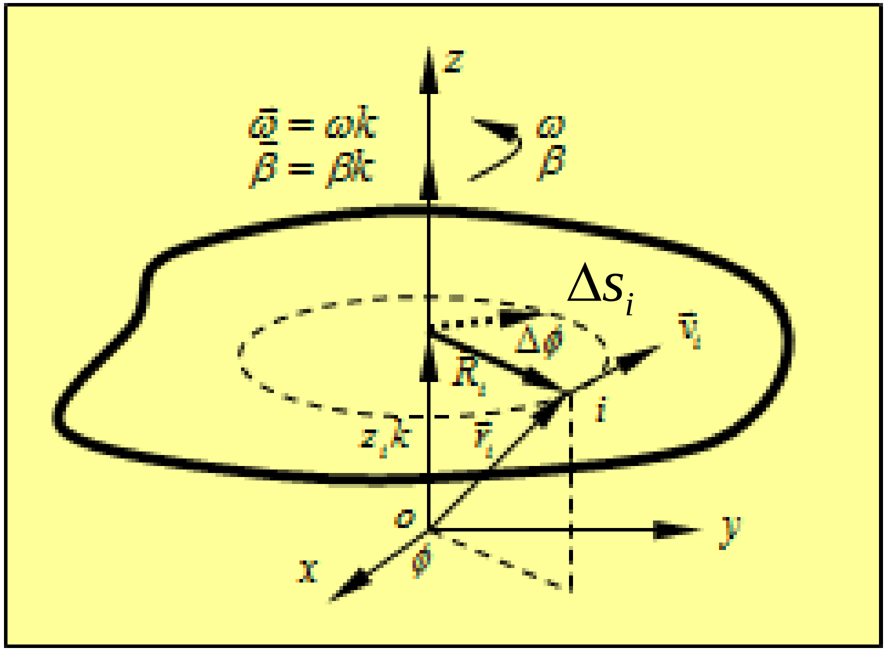
- 刚体定轴转动时，刚体的所有质点，都具有共同的角位移、角速度和角加速度，它们就是刚体整体转动的角位移、角速度和角加速度。

- 刚体定轴转动时，刚体各个质点具有共同的角位移、角速度和角加速度，但各个质点没有共同的位移，速度和加速度，所以刚体没有整体的平动。
- 刚体定轴转动时，各个质点速度与刚体角速度的关系：

$$\because ds_i = R_i d\phi_i = R_i d\phi$$

$$\therefore v_i = \frac{ds_i}{dt} = R_i \frac{d\phi}{dt} = R_i \omega$$

$$\therefore \begin{cases} v_i = \omega R_i \\ \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i \quad \because \vec{v}_i \perp \vec{R}_i \perp \vec{\omega} \end{cases}$$

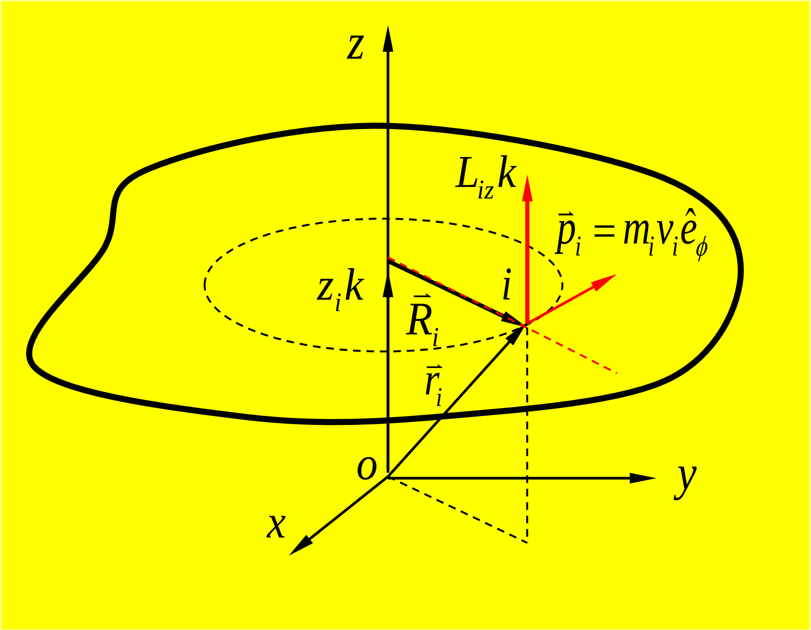


- 刚体定轴转动时，各个质点切向加速度与刚体角加速度的关系：

$$\because a_{it} = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d\omega R_i}{dt} = R_i \frac{d\omega}{dt} = R_i \beta \quad \Rightarrow \quad \therefore a_{it} = \beta R_i$$

二. 刚体定轴转动定理

- 刚体定轴转动时，角动量定理的应用



$$\because \vec{M} = d\vec{L} / dt$$

$$\therefore M_z = dL_z / dt$$

其中$M_z = k \cdot \vec{M} \qquad L_z = k \cdot \vec{L}$

$$\because L_z = k \cdot \vec{L} = k \cdot \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum R_i p_i$$

$$\therefore L_z = \sum R_i p_i = \sum R_i m_i v_i = \sum R_i m_i \cdot \omega R_i = \left(\sum m_i R_i^2\right)\omega$$

$$\therefore M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i R_i^2\right)\omega = \left(\sum m_i R_i^2\right)\frac{d\omega}{dt} = \left(\sum m_i R_i^2\right)\beta$$

- 刚体定轴转动时的转动定理：

定义刚体转动惯量：$J_z = \sum m_i R_i^2$（与刚体的转轴有关）

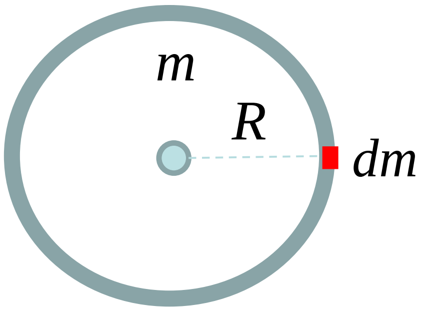
角动量：$L_z = J\omega$

转动定理：$M_z = \dfrac{dL_z}{dt} = \dfrac{dJ_z\omega}{dt} = J_z\beta$（$J$不随时间变化时）

● 均匀圆环，转轴过中心与盘环垂直的转动惯量

$$\lambda = m/2\pi R$$

$$J_z = mR^2$$



$$dm = \lambda dl$$

$$J_z = \oint R^2 dm = \oint R^2 \lambda dl = R^2 \lambda \oint dl = R^2 \times (m/2\pi R) \times 2\pi R = mR^2$$

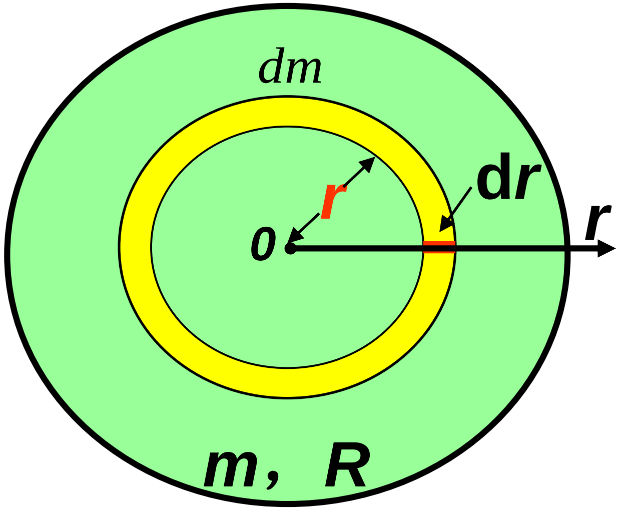
● 均匀圆盘，转轴过中心与盘面垂直的转动惯量

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \cdot \mathrm{d}s = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2} r\,\mathrm{d}r$$

$$dJ_z = (dm) r^2 = \frac{2m}{R^2} r\,\mathrm{d}r \cdot r^2 = \frac{2m}{R^2} r^3\,\mathrm{d}r$$

$$J_z = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} mR^2$$



$$J_z = \frac{1}{2} mR^2$$

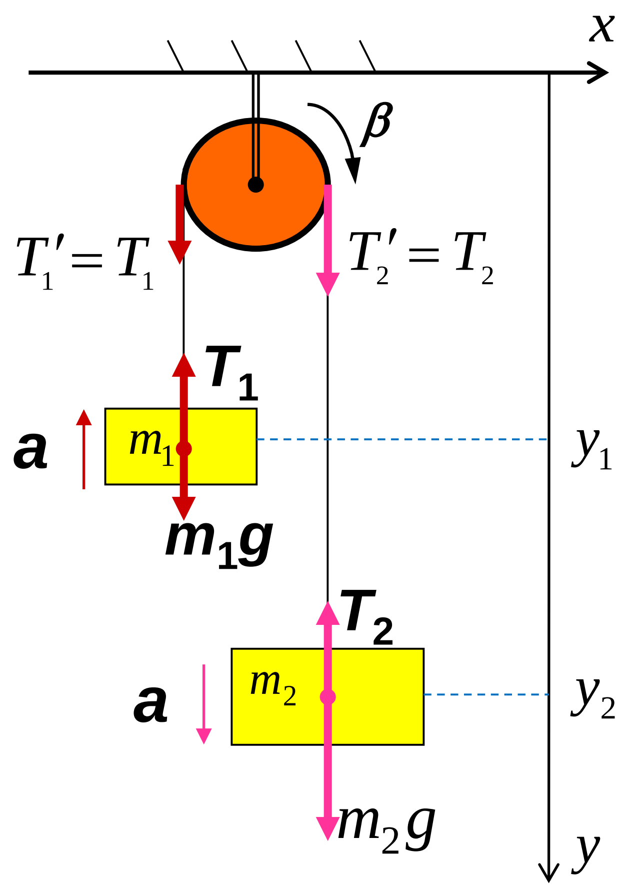
滑轮转动问题（滑轮质量m,半径R）

$$\because \text{转动方程：} \quad M_z = J_z\beta \qquad \begin{cases} J_z = \dfrac{1}{2}mR^2 \\ \beta = a/R \\ M_z = RT_2 - RT_1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m\text{方程：} \quad RT_2 - RT_1 = \left(\dfrac{1}{2}mR^2\right)a/R \\ m_1\text{方程：} \quad T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2\text{方程：} \quad m_2 g - T_2 = m_2 a \end{cases}$$

$\therefore a, T_1, T_2$ 3个未知量,3个方程，问题可定解

$$T_2 - T_1 = \frac{(m_2 - m_1)mg}{m + m_1 + m_2} \begin{cases} = 0 & \text{当} m = 0 \text{时} \\ \neq 0 & \text{当} m \neq 0 \text{时} \end{cases}$$



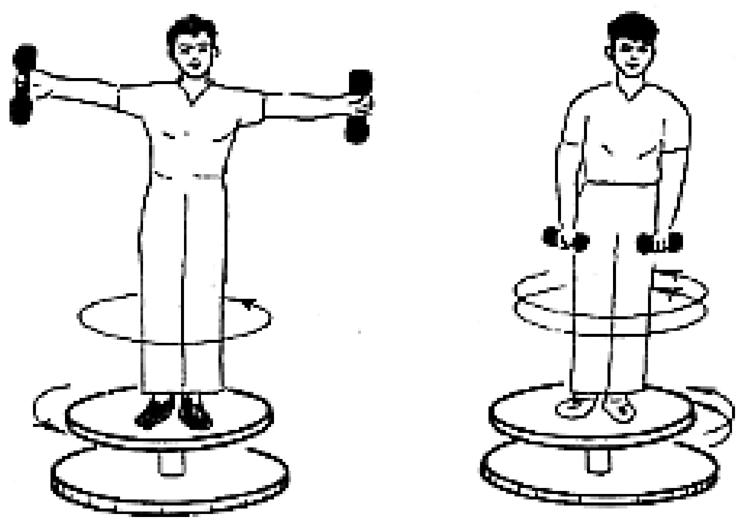
（$m_2 > m_1$）

三. 刚体定轴转动的角动量守恒

$$\because M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{dJ_z\omega}{dt} = J_z\beta \left(J\text{不随时间变化时}\right)$$

$$\therefore M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad L_z = J_z\omega = C \quad \Rightarrow \quad \omega = C / J_z$$

- 刚体定轴转动时，如果刚体所受力矩为零，则刚体的角动量守恒。所以，当刚体的转动惯量变化时，刚体的角速度也将随之变化。



(a) 角动量守恒演示 (b)

- 手臂伸缩，是内力作用，没有外力矩作用，人体系统角动量守恒。
- 手臂伸展时，转动惯量大，角速度小。
- 手臂收缩时，转动惯量小，角速度增加。

$$\omega = C / J_z$$

四. 刚体定轴转动的动能和力矩的功

● 刚体的动能

$$\because v_i = \omega R_i \qquad J_z = \sum m_i R_i^2$$

$$\therefore E_k = \sum E_{ik} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega R_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

$\therefore$ 刚体的动能： $E_k = \dfrac{1}{2} J_z \omega$

● 力矩所作的功

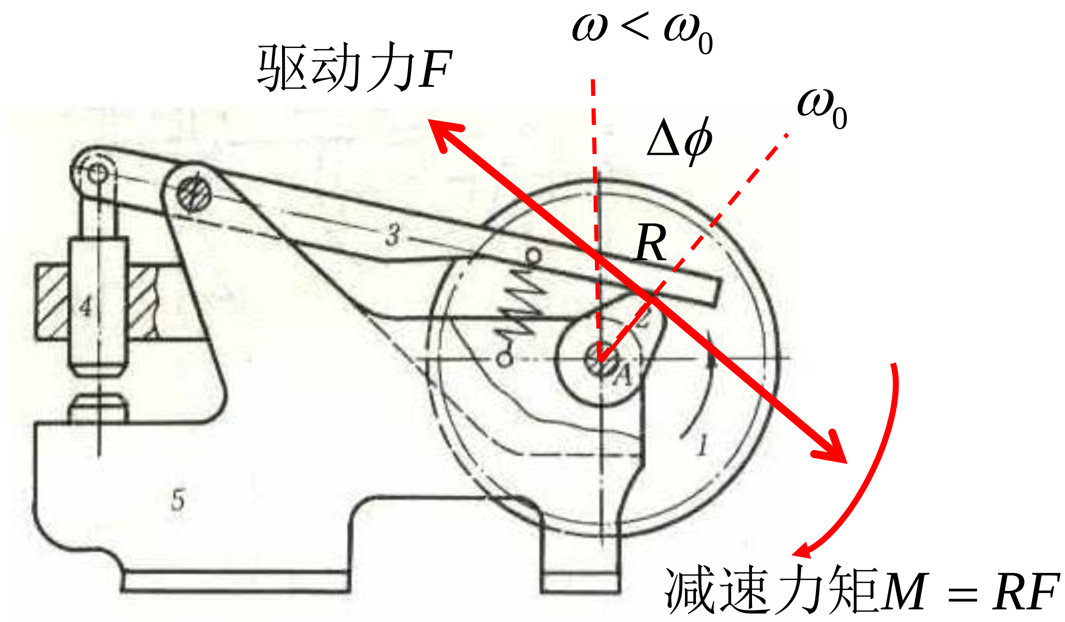
$$\because M_z = J_z \beta = J_z \frac{d\omega}{dt} \qquad E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \qquad A = E_{k2} - E_{k1}$$

$$\therefore \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_z d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} J_z \beta d\phi = J_z \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\omega}{dt} d\phi = J_z \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{dt} d\omega$$

$$= J_z \int_{\phi_1}^{\phi_2} \omega d\omega = \frac{1}{2} J_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1} = A$$

$\therefore$ 力矩所做的功： $A = \displaystyle\int_{\phi_1}^{\phi_2} M_z d\phi = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2} J_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_1^2$

四. 刚体定轴转动动能应用



电动机的作用力矩很小，在作用期间，电动机的作用力矩可以忽略。

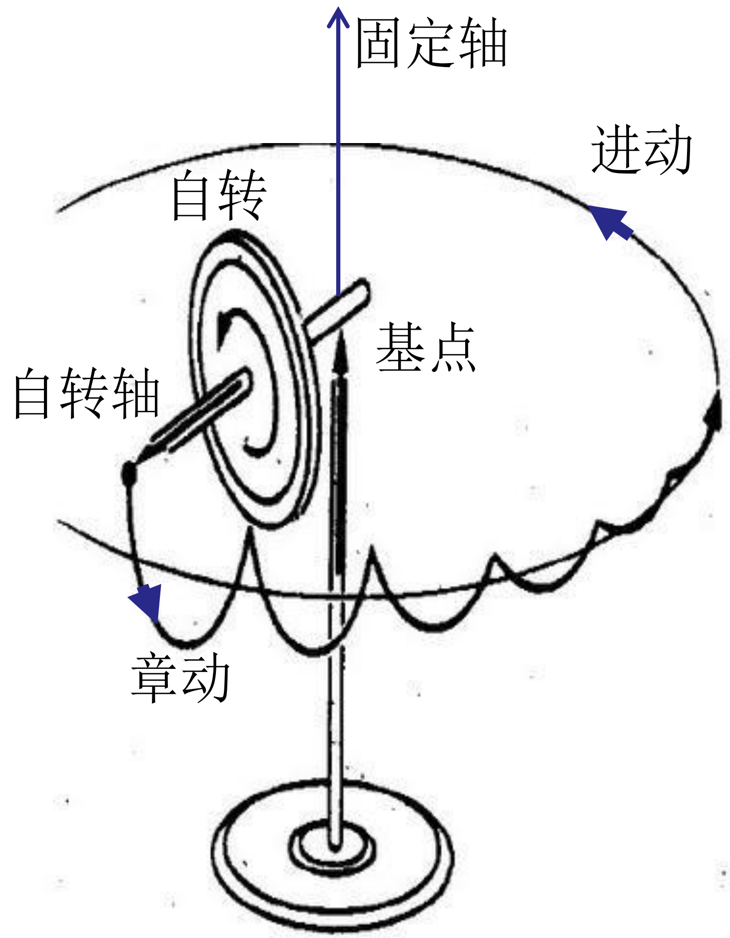
$$-dA = -Md\phi = -FRd\phi = -dE_k = -d\left(\frac{1}{2}J_z\omega^2\right) = -J_z\omega d\omega$$

$$F = \frac{J_z\omega}{R}\left(-\frac{d\omega}{d\phi}\right) = \frac{J_z\omega_0}{R}\left(-\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\phi}\right) = \frac{J_z\omega_0}{R}\left(\frac{\omega_0-\omega}{\Delta\phi}\right)$$

§3 刚体的定点转动

一. 刚体定点转动的描述

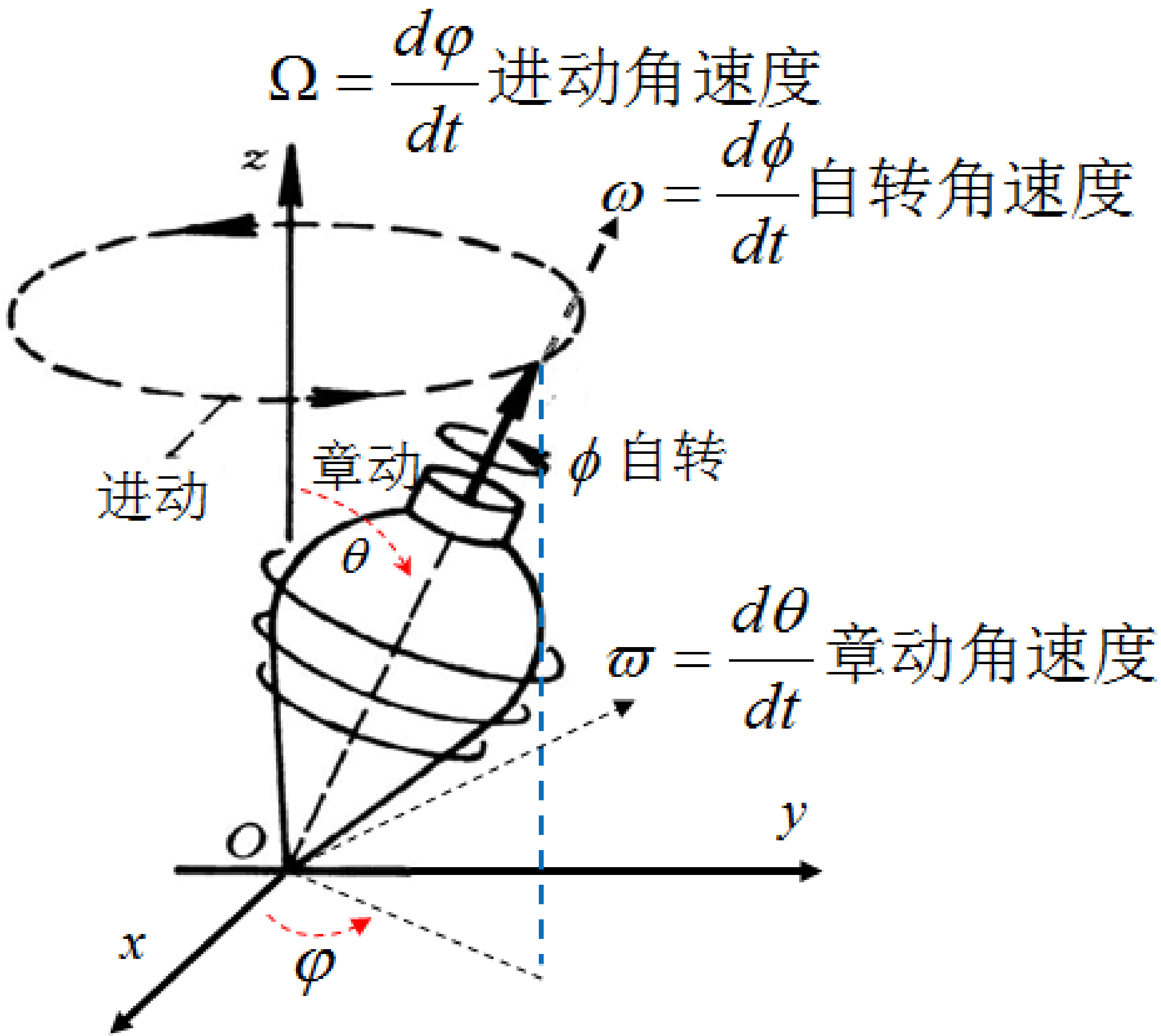
- 刚体定点转动时，刚体上各点都绕同一根静止不动的点作球面运动，该点称为基点。
- 刚体定点转动时，也存在一根通过基点的转轴，在任何时候，刚体上各点都绕该转轴做圆周运动，不过该转轴还会绕基点转动，该转轴也可称为自转轴。



- 刚体定点转动，可分解为自转、进动和章动三种运动。自转是刚体绕转轴的转动；进动是转轴绕某一固定轴的转动；章动是转轴偏离该固定轴的转动。
- 刚体定点转动满足角动量定理：$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

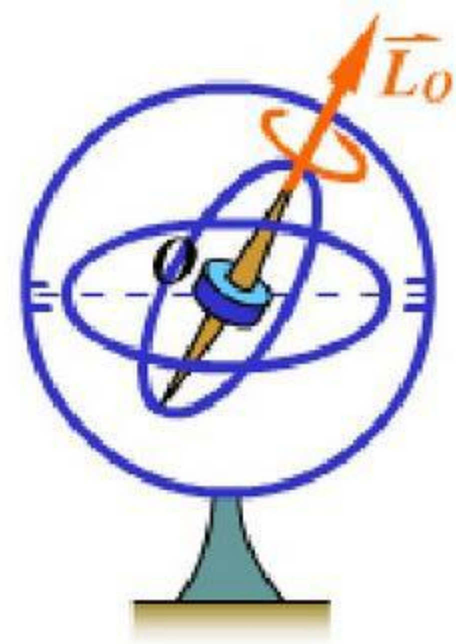
二. 陀螺

- 陀螺，是轴对称的刚体，陀螺的转轴通过其质心。
- 陀螺的运动，是刚体的定点转动，它有自转，进动和章动，其自转角速度很大。



三. 自由陀螺的转动

- 自由陀螺，是由一个规定圆环中的两个可以转动的圆环支持的陀螺。
- 自由陀螺的质心不运动，它由一个固定，两个可运动的圆环保证。
- 当忽略摩擦力时，自由陀螺所受的力矩为零，因为质心是不动的基点，重力和基座的振动等外界力都作用在基质心上。



$$\because \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\therefore \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_0 \text{角动量守恒}$$

- 自由陀螺的对称自转轴的方位，始终保持不 变，因为角动量守恒。
- 自由陀螺的对称自转轴的方位始终保持不变，它可以作为导航的参考方位。自由陀螺即没有进动，也没有章动，

四. 陀螺的进动

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{W}$$

$$\vec{L} = J\omega\hat{e} \qquad L = J\omega$$

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{进动角速度}$$

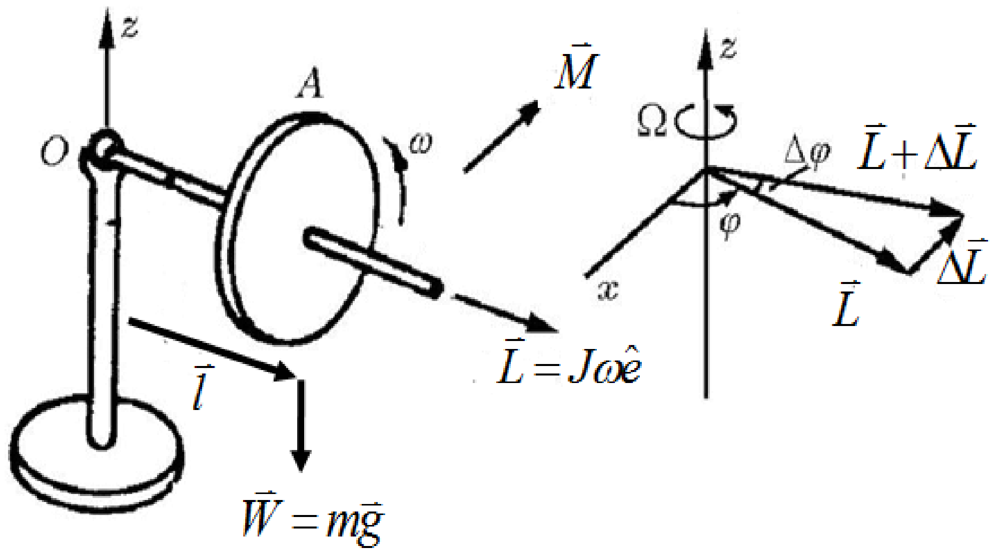
$$\because \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$

$$\therefore M \approx \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\approx \frac{\Delta\varphi L}{\Delta t}$$

$$\approx \frac{d\varphi}{dt} J\omega = \Omega J\omega$$

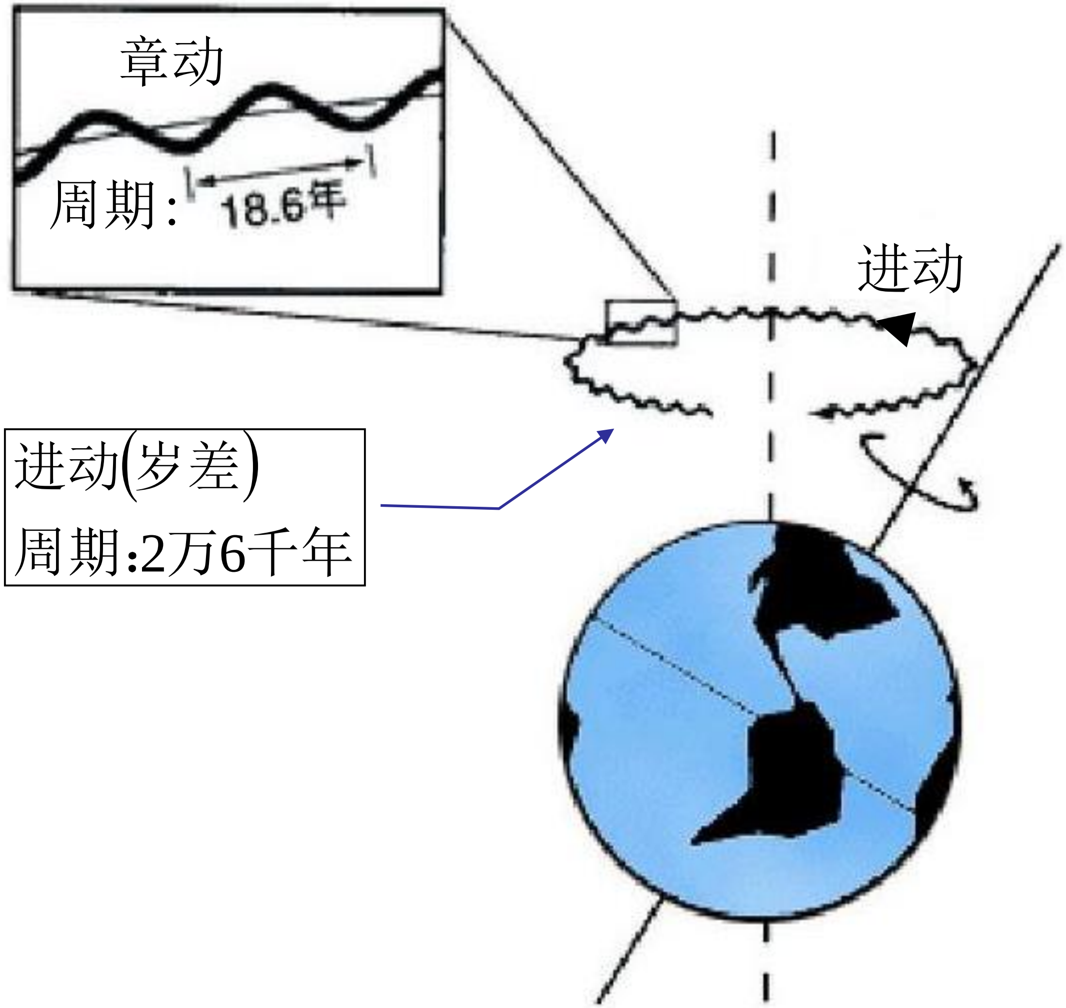
$$\therefore \Omega = \frac{M}{J\omega}$$



- 重力矩作用，使陀螺产生进动，不产生章动。
- 如果底座有振动，则陀螺将产生章动。
- 自转角速度越大，进动角速度越小；转动惯量越大，进动角速度也越小。

五. 子弹的进动（在子弹质心参照系中）

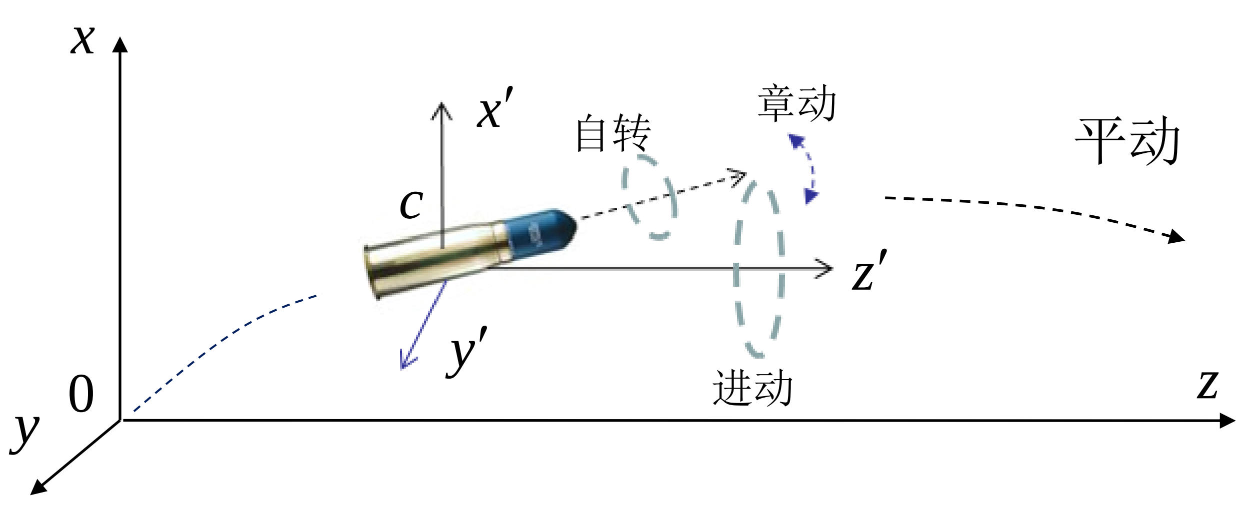
六. 地球的进动与章动（在地球质心坐标系中）



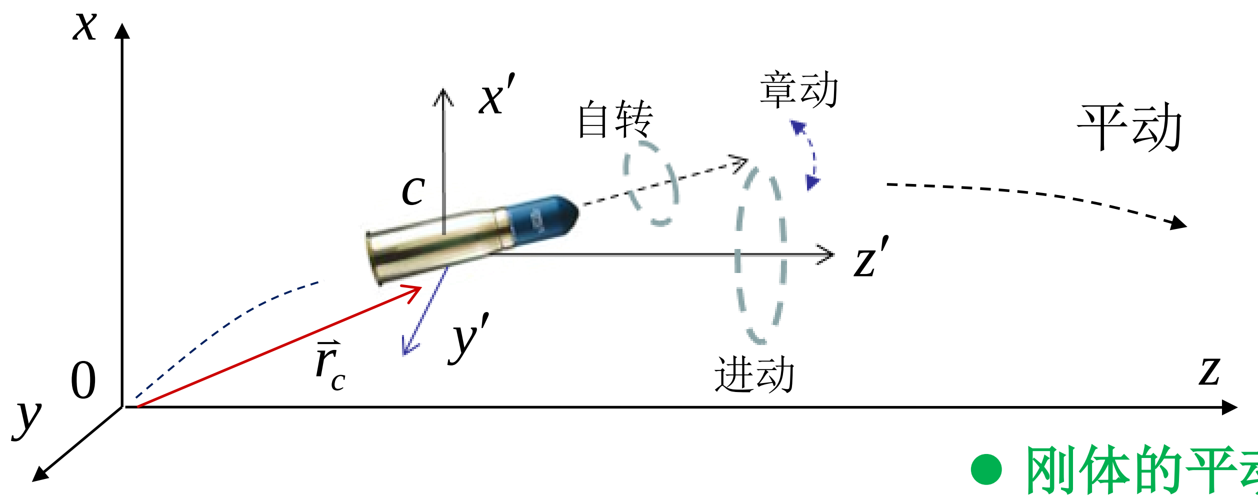
§4 刚体的一般运动

一. 刚体的一般运动

- 刚体的一般运动，可分解为平动和转动。刚体的平动，是刚体各质点跟随质心的运动。刚体的转动，是在质心参照系中，刚体各质点绕质心的转动。
- 刚体的平动，满足动量定理：$\vec{F} = d\vec{p}/dt$
- 刚体转动，满足角动量定理：$\vec{M} = d\vec{L}/dt$
- 外力对刚体的作用，其一外力使刚体跟随质心产生平动加速，其二外力对质心形成的力矩使刚体绕质心加速转动。



二. 刚体的质心运动



- 刚体质心运动描述

质心质量：$m_c = \sum m_i$

质心位矢：$\vec{r}_c = \left(\sum m_i \vec{r}_i\right) / m_c$

质心速度：$\vec{v}_c = d\vec{r}_c / dt = \left(\sum m_i \vec{v}_i\right) / m_c$

质心加速度：$\vec{a}_c = d\vec{v}_c / dt = \left(\sum m_i \vec{a}_i\right) / m_c$

质心动量：$\vec{p}_c = m_c \vec{v}_c = m_c \left(\sum m_i \vec{v}_i\right) / m_c = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{p}$

- 刚体的平动，就是质心运动，它与内力无关，只与外力有关。

质心运动定理：

$\vec{F}^{ex} = d\vec{p} / dt = d\vec{p}_c / dt$

三. 质心非惯性参照系

- 在质心参照系中，质心位矢为零，所以质心是刚体的质量中心。

$\because$ 在质心参照系中，各质点位矢：$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$

$\therefore$ 在质心参照系中，质心的位矢：

$$r_c' = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \Big/ m_c = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c)\right) \Big/ m_c = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i)\right) \Big/ m_c - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_c)\right) \Big/ m_c$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) \Big/ m_c - \vec{r}_c \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \Big/ m_c = \vec{r}_c - \vec{r}_c = 0$$

- 在质心参照系中，质心动量或刚体总动量为零，所以质心是刚体的动量中心。

$\because$ 在质心参照系中，质心的位矢：$r_c' = 0$

$\therefore$ 在质心参照系中，质心的动量：

$$\vec{p}_c' = \vec{p}' = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{dr_i'}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i' = m_c \frac{d}{dt} r_c' = 0$$

- 质心参照系是非惯性参照系，质心参照系中，刚体各质点要受惯性力矩的作用，这些惯性力矩之和为零，即刚体在质心参照系中所受的惯性力矩为零，所以质心是惯性力的作用中心。

$\because$ 在质心参照系中，质心的位矢 $r_c' = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \Big/ m_c = 0$

而 $\vec{M}_{Ic}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Ici}' = -\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_c\right) = -m_c \left[\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \Big/ m_c\right] \times \vec{a}_c = -\vec{r}_c' \times m_c \vec{a}_c$

$\therefore \vec{M}_{Ic}' = 0$

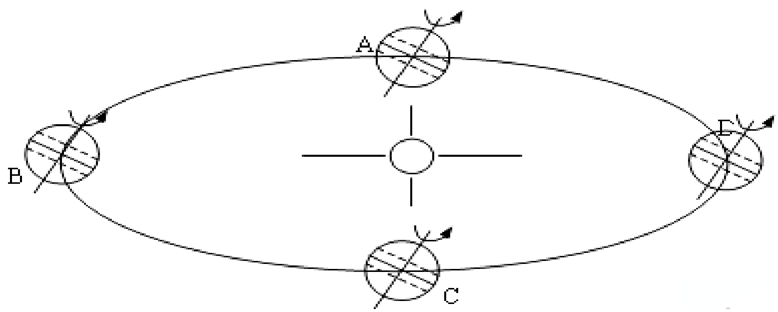
- 质心参照系虽然是非惯性系，由于其惯性力矩为零，所以惯性参照系中的角动量定理，在质心参照系中仍然成立。

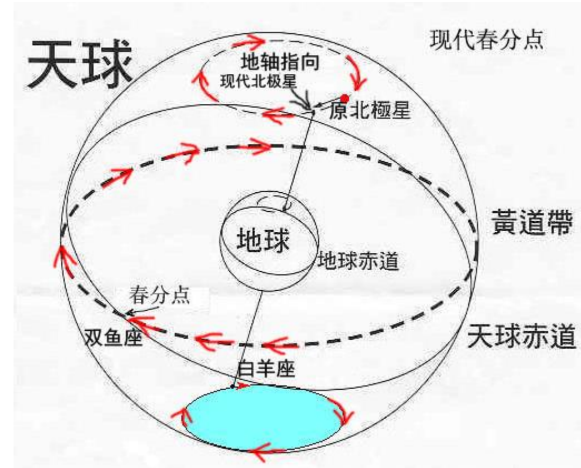
$$\vec{M} = d\vec{L} / dt$$

- 质心参照系中，刚体没有平动，只有绕质心的转动，质心是刚体转动中心，是以质心为基点的定点转动。

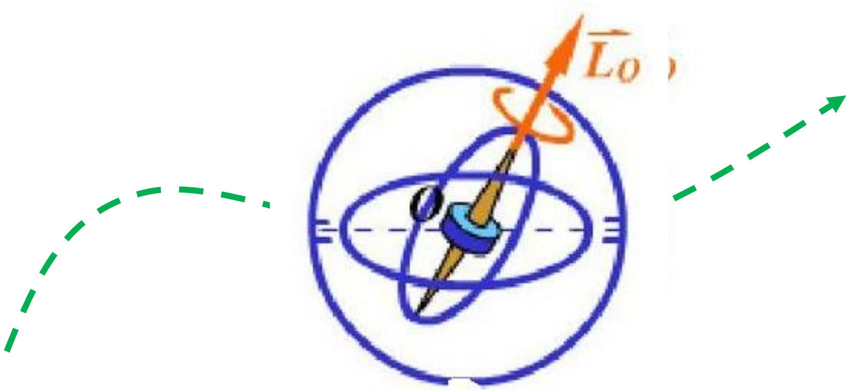
四. 刚体一般运动举例

1. 地球的运动





2. 自由陀螺的运动



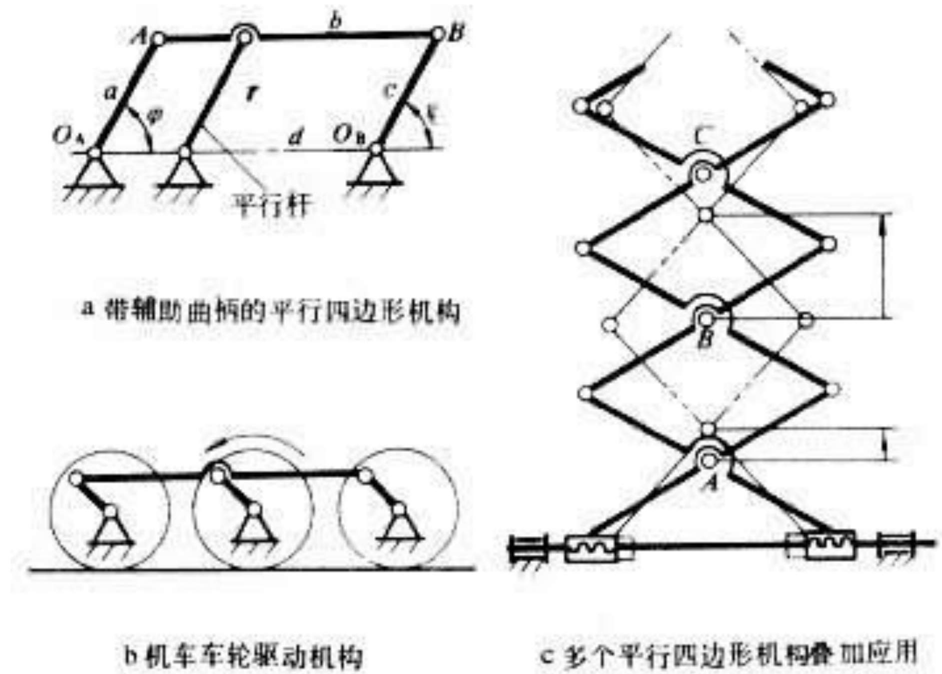
- 在质心参照系中，重力作用在质心上，重力矩为零，陀螺角动量守恒。
- 自由陀螺，在重力场中无论怎么运动，其角动量方向不变，该方向可以作为导航参考方向。

- 刚体的一般运动，可分解为刚体随基点的平动，和绕基点的转动，基点一般选质心，但也可以选其他质点，但这时要考虑惯性力矩的作用。

五. 平面平行运动

1. 平面平行运动

- 刚体作平面平行运动时，刚体上各质点都作平行平面运动。
- 刚体作平面平行运动时，可在刚体上任选一点作为基点，基点是平面运动，该平面称为参考面，通过基点，且与参考面垂直的直线称为转轴。刚体的运动可以分解为刚体随基点的平动和刚体绕转轴的定轴转动。



平行四边形机构

2. 平面平行运动的速度

- 刚体作平面平行运动时，刚体上各质点既绕转轴转动，由随基点平动，刚体上各质点的运动是其转动与平动的合成运动。

在基点运动坐标系中，刚体各质点的速度：$\vec{R}_i = x_i' i + \bar{y}' j$

在基点运动坐标系中，刚体绕基点的角速度：$\vec{\omega} = \omega k$

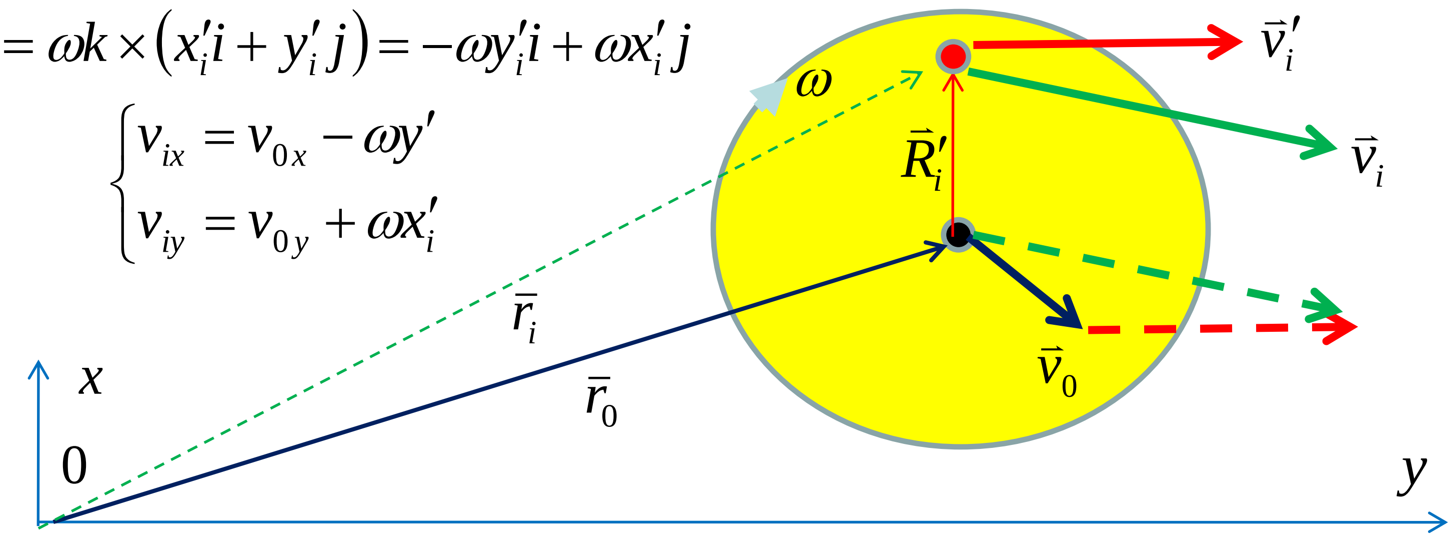
在基点运动坐标系中，刚体各质点的速度：$\vec{v}_i' = v_{ix}' i + v_{iy}' j$

在惯性静止坐标系中，基点运动速度：$\vec{v}_0 = v_{0x} i + v_{0y} j$

在惯性静止坐标系中，刚体各质点的速度：$\vec{v}_i = v_{ix} i + v_{iy} j$

$$\because \vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{R}_i' = \omega k \times \left(x_i' i + y_i' j \right) = -\omega y_i' i + \omega x_i' j$$

$$\therefore \vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}_i' \qquad \begin{cases} v_{ix} = v_{0x} - \omega y' \\ v_{iy} = v_{0y} + \omega x_i' \end{cases}$$



2. 平面平行运动的运动定理

- 刚体作平面平行运动时，如果选质心为基点，则其平动和转动定理为：

平动：$\vec{F} = d\vec{p}_c / dt$（质心运动）

转动：$M_z = dJ_z\omega / dt = J_z\beta$（绕过质心的转轴转动）

3. 平面平行运动的动能和功

- 刚体作平面平行运动时，如果选质心为基点，则其动能等于平动动能，加转动动能，如果不是选质心为基点，则动能不等于平动动能加转动动能。

$$\because v_i = v_c + v_i' \qquad v_i' = \omega' R_i' \qquad \sum p_i' = 0$$

$$\therefore E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (v_c + v_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(v_c^2 + 2v_c v_i' + v_i'^2\right)$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \left(v_c^2 + 2v_c v_i' + \omega'^2 R_i'^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) v_c^2 + v_c \sum m_i v_i' + \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i'^2\right)\omega'^2$$

$$= \frac{1}{2} m_c v_c^2 + v_c \sum p_i' + \frac{1}{2} J_{cz}' \omega'^2 = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz}' \omega'^2$$

$$\therefore E_k = E_{k\text{平动}} + E_{k\text{转动}} = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz}' \omega'^2$$

- 刚体作平面平行运动时，外力外力对刚体所作的功等于，外力对质心所作的功，加外力对质心所形成的力矩所作的功。

在静止惯性参照系中，质心力对质心所作的功：

$$A_{\text{平动}} = \int_{l_{12}} \vec{F}_c \cdot dr_c = \int_{l_{12}} \frac{d\vec{p}_c}{dt} \cdot dr_c = \int_{l_{12}} m_c \frac{d\vec{v}_c}{dt} \cdot d\vec{r}_c = \int_{l_{12}} m_c \frac{d\vec{r}_c}{dt} \cdot d\vec{v}_c$$

$$= \int_{l_{12}} m_c \vec{v}_c \cdot d\vec{v}_c = \int_{\vec{r}_{c1}}^{\vec{r}_{c2}} d\left(\frac{1}{2} m_c v_c^2\right) = \frac{1}{2} m_c v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m_c v_{c2}^2 = \Delta E_{k\text{平动}}$$

在运动质心参照系中，力矩对刚体转动所作的功：

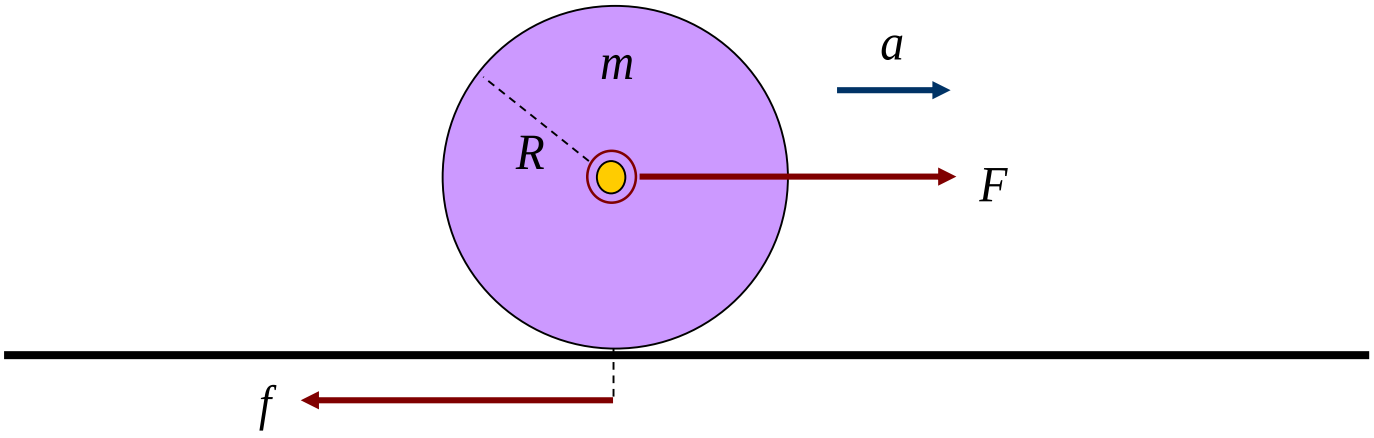
$$A'_{\text{转动}} = \int_{\phi_{12}} M'_{cz} d\phi' = \int_{\phi_{12}} \frac{dL'_{cz}}{dt} d\phi' = \int_{\phi_{12}} J'_{cz} \frac{d\omega'}{dt} d\phi' = \int_{\phi_{12}} J'_{cz} \frac{d\phi'}{dt} d\omega'$$

$$= \int_{\phi_{12}} m_c \omega' d\omega' = \int_{\vec{r}_{c1}}^{\vec{r}_{c2}} d\left(\frac{1}{2} J'_{cz} \omega'^2\right) = \frac{1}{2} J'_{cz} \omega'^2 - \frac{1}{2} J'_{cz} \omega'^2 = \Delta E'_{k\text{转动}}$$

所以，在静止惯性参照系中，外力对刚体所作的功：

$$A = A_{\text{平动}} + A'_{\text{转动}} = \Delta E_{k\text{平动}} + \Delta E'_{k\text{转动}} = \Delta E_k$$

4. 平面平行运动应用（平面平行运动是应用最广泛的运动）



平动：$F - f = ma$

转动：$Rf = J\beta = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)a/R \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2}ma$

所以：$F = f + ma = \frac{1}{2}ma + ma = \left(1 + \frac{1}{2}\right)ma > ma$

§5 刚体的自由度

一. 自由度

- 刚体自由度，是描述一个力学系统的位置所需要的独立坐标变量数。独立坐标变量随时间的变化，是该力学系统的运动方程，其独立方程的数目等于它的自由度
- 一个质点的自由度是3，因为一个质点的位置可由一个位矢确定，共有3个独立变量，所以其自由度是3，它具有3个独立运动方程。
- 两个质点组成的刚体的自由度是5：两个质点的位置可由它们的两个位矢确定，共有6个变量，但这两个质点的位矢还要满足一个刚体的约束方程，在6个变量中只有5个独立变量，所以它的自由度是5，它具有5个独立运动方程。

- 三个质点组成的刚体的自由度是6：三个质点可由它们的三个位矢确定，共有9个变量，但这三个质点的位矢还要满足刚体的约束方程，约束方程数为3，在9个变量中只有6个独立变量，所以它的自由度是6，它具有6个独立运动方程。
- 三个以上质点组成的刚体的自由度还是6，因为刚体每增加一个质点，其位置就要增加一个位矢的3个变量确定，不过同时也增加了3个独立的约束方程，其独立变量数不会再增加，所以其自由度还是6，独立运动方程数也还是6。由此可见，刚体上任意三个不共线的质点的位置就可以确定该刚体的位置。

二. 几种刚体的自由度

(1)定轴转动刚体的自由度是1,

其运动可用1个独立变量描述：

$\phi = \phi(t)$

(2)定点转动刚体的自由度是3,

它要用3个独立变量描述：

$\theta = \theta(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad \phi = \phi(t)$

(3)一般运动刚体的自由度是6,

它要用6个独立变量描述：

$x_0 = x_0(t) \quad y_0 = y_0(t) \quad z = z_0(t)$

$\theta = \theta(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad \phi = \phi(t)$

(4)平行平面运动刚体的自由度是4,

其运动可用4个独立变量描述：

$x_0 = x_0(t) \quad y_0 = y_0(t) \quad z = z_0(t)$

$\phi = \phi(t)$

(5)刚体平动自由度是3,

一般转动自由度也是3

刚体转动的3个自由度

并不是一定要用 $\theta\varphi\phi$

来描述，也可以用其

变量描述，比如 $\varphi_x\varphi_y\varphi_z$

它们分别是刚体 xyz

③根轴的转动角。