§2　变分不等式

一、 R^n 中变分不等式

设 A 为 R^n 中闭凸子集. $(R^n)^*$ 为 R^n 的共轭空间. 若 $f \in (R^n)^*$, $x \in R^n$, (f, x) 表示 f 在 x 的值, 即 $f(x)$, 若 $x, y \in R^n$, 则 (x, y) 表示 x 与 y 的内积.

若 $T:R^n\to(R^n)^*$,则对于给定的 $f\in(R^n)^*$. R^n 中的变分不等式的一般形式是:求 $x_0\in A$ 使得 $\forall x\in A$,成立

$$(Tx_0,x-x_0)\geqslant(f,x-x_0).$$

若 $T:R^n\to R^n$,则 R^n 中的变分不等式为:

求 $x_0\in A$,使得 $(Tx_0,x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A$.特别地,若 f 是 A 上可微实值函数,变分不等式变成求 $x_0\in A$,使得 $(\nabla f(x_0),x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A$.

它等价于**极小化问题**:求 $x_0\in A$,使得

$$f(x_0)=\min\{f(x):x\in A\}.$$

若 $T:A\to R^n$ 为连续映射,求 $x_0\in A$,使得

$$(Tx_0,x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A.$$

上式称为 **HSP 变分不等式**(HSP 指 Hartman, Stam, Pacchia.)

二、 赋范线性空间中的变分不等式

设$(X,\|\cdot\|)$为实赋范线性空间,X^* 是 X 的共轭空间,A 为 X 的闭凸子集.

若 $f\in X^*,x\in X,(f,x)$ 表示 f 在 x 的值,即 $f(x)$.

1. 若映射 $T:X\to X^*$,则对于给定的 $f\in X^*$,$(X,\|\cdot\|)$中的变分不等式的一般形式是:求 $x_0\in A$,使得

$(Tx_0,x-x_0)\geqslant(f,x-x_0),\forall x\in A.$

2. 若 $f:x\to R^1$ 为凸泛函,而且是加托可微的,即微分 $Df:X\to X^*$ 定义为

$$(Df(x),y)=\frac{d}{dt}f(x+ty)\bigg|_{t=0},x,y\in A.$$

则变分不等式为:求 $x_0\in A$,使得$(Df(x_0),x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in A$.
它等价于极小化问题:求 $x_0\in A$,使得 $f(x_0)=\inf\{f(x):x\in A\}$.

3. **混合变分不等式**:若泛函 f 可分解为两个凸泛函 g,h 之和:$f(x)=g(x)+h(x)$.其中 g 可微,h 不可微,但是下半连续且常态(即 $\forall x\in X,h(x)>-\infty$, $h\not\equiv\infty$).求 $x_0\in X$,使得$(Dg(x_0),x-x_0)-h(x_0)+h(x)\geqslant 0,\forall x\in X$.它等价于极小化问题:求 $x_0\in x$.使得 $f(x_0)=\inf\{f(x):x\in X\}$.

4. 设 X 为复 Hilbert 空间,$L(x,y)$ 为 X 上共轭对称的双线性泛函,A 是 X 的闭凸子集,若 $\exists c_1,c_2>0$,使得 $c_1\|x\|^2\leqslant L(x,x)\leqslant c_2\|x\|^2,\forall x\in X$.
则变分不等式为:对于给定的 $y_0\in X$,求 $x_0\in A$,使得

$$\mathrm{Re}(2L(x_0,x-x_0)-(y_0,x-x_0))\geqslant 0,\forall x\in A.$$

它等价于 $f(x)=L(x,x_0)$ 在 A 上达到最小值.

5. 设 G 为 R^n 中开集.$(a_{jk}(x))_{n\times n}$ 为正定矩阵,且 $\exists\delta>0$,使得

$\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)x_jy_k\geqslant\delta\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$.式中 $a_{jk}\in C(\overline{G})$. 设 $H^1(G)$ 为 L^2 的子空间,即 $H^1(G)=\{u:u,u'_{x_j}\in L^2(G)\}$.在 $H^1(G)$ 中定义内积

$$(u,v)_* = \int_G \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + uv \right] \mathrm{d}x .$$

则 $H^1(G)$ 按内积 $(u,v)_*$ 构成 Hilbert 空间.

若 A 为 $H^1(G)$ 中闭凸子集,则 $\forall f \in L^2(G)$. 存在惟一的 $u_0 \in A$,使得

$$\int_G \left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(u(x) - u_0(x)) \right] \mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_G f(x)[u(x) - u_0(x)]\mathrm{d}x . \ \forall u \in A .$$

若 $A = \{u \in H^1(G) : u(x) \leqslant \varphi(x), x \in G\}$. 式中 $\varphi \in C(\overline{G})$, u 表示薄膜的位移, f 表示外力, $\varphi(x)$ 表障碍,则上述变分不等式称为障碍问题变分不等式.

6. **椭圆型变分不等式**:设 X 为实 Hilbert 空间,范数为 $\| x \| = \sqrt{(x,x)}$, A 为 X 的非空闭凸子集, $f \in X^*$, $L(x,y)$ 为 X 上双线性连续泛函,满足 X- 椭圆条件,即 $\exists c > 0$,使得

$L(x,x) \geqslant c \| x \|^2, \forall x \in X$. 则存在惟一的 $x_0 \in A$,使得

$$L(x_0, x - x_0) \geqslant f(x - x_0). \ \forall x \in A .$$

上式称为**第一类椭圆型变分不等式**.

若存在 X 上常态的下半连续的凸泛函 g(常态指 $g(x) > -\infty, \forall x \in X, g(x) \not\equiv \infty$).

则存在惟一的 $x_0 \in X$,成立**第二类椭圆型变分不等式**:

$$L(x_0, x - x_0) + g(x) - g(x_0) \geqslant f(x - x_0), \forall x \in X .$$

若将上述 $g(x)$ 改为 $g(x,y)$,上式变成

$$L(x_0, x - x_0) + g(x_0, x) - g(x_0, x_0) \geqslant f(x - x_0). \ \forall x \in X .$$

则称为**拟变分不等式**,记为 QVI.

椭圆型变分不等式在弹性薄膜界面的流动问题(障碍问题),弹塑性柱体的扭转问题,粘塑性流体在柱形管道中的流动问题,地下水的开发利用中的轴对称水井问题等有广泛应用.这类变分不等式的常用解法有逐次逼近法、惩罚法、正则化法、对偶方法、数值解法等.此外,还有 Ⅰ、Ⅱ 型抛物型变分不等式,双曲型变分不等式等,张石生[116]用 Fan Ky 极大极小原理,KKM 技巧,分别用拓扑方法,变分方法,半序方式和不动点方法,研究了变分不等式解的存在性、惟一性及解集的性状,并给出其对偏微分方程的边值问题,非线性规划问题,鞍点问题及经济数学中的 Nash 限制平衡问题等的应用,还研究了随机变分不等式,向量变分不等式,Fuzzy 映象变分不等式等.

注 KMM 定理:设 X 为 Hausdorff 线性拓扑空间. $\sum \subset X$ 为 $n-1$ 维单形, $A_1, \cdots, A_n$ 为 $\sum$ 的顶点, $F_1, \cdots, F_n$ 为 X 中的 n 个闭集,若对 $\sum$ 的任意一组顶点 $(A_{i_1}, \cdots, A_{i_m})$, $1 \leqslant m \leqslant n$,有 $\{A_{i_1}, \cdots, A_{i_m}\} \subset \bigcup_{k=1}^{m} F_{i_k}$. 则存在点 $x_0 \in \sum$,使得 $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} F_k$.

7. **广义变分不等式**:设 X 为实 Hilbert 空间, A 为 X 中闭凸集, $(,)$ 为内积.

$T, g : X \to X$ 为非线性算子,求 $u \in X$. $g(u) \in A$,使得

$$(Tu, g(v) - g(u)) \geqslant 0, \forall g(v) \in A. \tag{2.1}$$

这是 Noor 于 1988 年引入并研究的,见[399]1988,1:119 - 121.

特别当 $g = I$(恒等算子)时,(2.1)就等价于求 $u \in A$ 使得$(Tu, v-u) \geqslant 0, \forall v \in A$.这是 1964 年由 Stampacchia 引入并研究的古典变分不等式.(见 C. R. Acad. Sci. Paris, 1964,258:4453 - 4416.)

2000 年 Noor-Rassias 进一步研究了(2.1)的性质,例如设 $u \in X, g(u) \in A$ 是(2.1)的解的充要条件是 $u \in X$ 满足

$$g(u) = P_A[g(u) - rTu].$$

式中 $r > 0$ 为常数,$g: A \to A$,P_A 是X 在A 上的投影算子.

细节及进一步的结果见[301]2002,268(1):334 - 343.268(2):602 - 614(抛物变分不等式)和 629 - 646;2003,277(2):379 - 394.

三、 拓扑空间中的变分不等式

1. 设 X 为拓扑空间,D 为X 中任一非空子集,f 为D 上常态泛函(即 $\forall x \in D$. $f(x) > -\infty, f(x) \not\equiv \infty$).$\varphi$ 为$D \times D$ 上泛函,而且取有限值,$\varphi(x,x) \geqslant 0, \forall x \in D$,则

$$\varphi(x,y) \geqslant f(x) - f(y) \quad \forall y \in D.$$

称为**变分不等式**,若 $x_0 \in D$ 满足上式,则 x_0 称为该不等式的解.

2. **Fan Ky 变分不等式**:设 X 为局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间.A 为X 中非空紧凸集,$f: A \to X$ 为连续映射.求 $x_0 \in A$ 和X 上连续半范数p,使得

$$p(f(x_0) - x) - p(f(x_0) - x_0) \geqslant 0, \forall x \in A.$$

3. 利用本章 § 1 定义 17 关于 T-γ- 对角拟凸的概念还可证明以下变分不等式:

设 X, Y 为 Hausdorff 拓扑线性空间,$A \subset X$.$B \subset Y$ 分别为非空紧凸和非空凸集,f, $g: A \times B \to R^1$ 满足:

(1) $\forall y \in B, g(x,y)$ 关于 $x \in A$ 是上半连续的;

(2) $\forall x \in A, f(x,y)$ 关于 $y \in B$ 是 T-γ- 对角拟凸的;

(3) $\forall (x,y) \in A \times B, f(x,y) \leqslant g(x,y)$,则存在 $x_0 \in A$,使得 $g(x_0,y) \geqslant \gamma$, $\forall y \in B$,从而有 $\inf\{g(x_0,y): y \in B\} \geqslant \gamma$.

见[340]1991,11(3):346 - 352.

变分不等式理论在控制论、对策论、经济数学等领域中都起着十分重要的作用.