P.249.2. 求出螺旋线 $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \\ z=bt \end{cases}$ $(R>0,\ b>0,\ 0\le t\le 2\pi)$ 在任意一点处的切线的方向余弦。 2010 2/12 —6 2011 24/5 —126

并证明曲线上任意一点的切线与 z 轴的夹角为常数。

解: $\vec{\gamma}(t) = (R\cos t,\ R\sin t,\ bt)$

$\vec{\gamma}'(t) = (-R\sin t,\ R\cos t,\ b)$

$$\vec{\gamma}'^{0}(t) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{|\vec{\gamma}'(t)|} = \frac{(-R\sin t,\ R\cos t,\ b)}{\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2+b^2}} = \left(\frac{-R\sin t}{\sqrt{R^2+b^2}},\ \frac{R\cos t}{\sqrt{R^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$$

$\cos\alpha = -\frac{R\sin t}{\sqrt{R^2+b^2}}$, $\cos\beta = \frac{R\cdot\cos t}{\sqrt{R^2+b^2}}$, $\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{R^2+b^2}}$. $\gamma = \arccos\frac{b}{\sqrt{R^2+b^2}}$ = 常数.

P.249.3 设 $\vec{a}=\vec{a}(t)$, $\vec{b}=\vec{b}(t)$ 是两个可导的向量函数. $\alpha<t<\beta$.

证明: $\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t) = \vec{a}'(t)\cdot\vec{b}(t)+\vec{b}'(t)\cdot\vec{a}(t)$

证: $$\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)\cdot\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)]\cdot\vec{b}(t+\Delta t)+\vec{a}(t)\cdot[\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{b}(t)]}{\Delta t}$$

$$= \vec{a}'(t)\cdot\vec{b}(t)+\vec{a}(t)\cdot\vec{b}'(t)$$

证. $\vec{\gamma}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$
$|\vec{\gamma}(t)|=C$. 则 $\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}=C$
$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=C^2$

P.249.4 设 $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}(t)$ $(\alpha<t<\beta)$ 是一条光滑曲线, 且 $|\vec{\gamma}(t)|=C$ (常数)

$2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)+2z(t)z'(t)=0$
$\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)=0$

证明: $\vec{\gamma}(t)$ 与切线垂直。即 $\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)=0$

设 $\vec{\gamma}(t)=(x(t),\ y(t))$ 二维空间!!

证: 1) 由 $|\vec{\gamma}(t)|=C$, 从而 $\vec{\gamma}(t)$ 是一条圆周曲线, 即 $x^2+y^2=C^2$

$\begin{cases} x(t)=C\cos t \\ y(t)=C\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, $\vec{\gamma}(t)=(R\cos t,\ R\sin t)$

$\vec{\gamma}'(t)=(-R\sin t,\ R\cos t)$

从而 $\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) = (R\cos t,\ R\sin t)\cdot(-R\sin t,\ R\cos t)$

$= -R^2\sin t\cdot\cos t+R^2\sin t\cos t = 0$

证: 由 $|\vec{\gamma}(t)|=C$. 即 $\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}(t)=|\vec{\gamma}(t)|^2=C^2$

两边求导. $\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}(t)+\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)=0$

$2\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)=0$, $\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)=0$