第三章 代数不等式

本章重点是讨论有限和与有限积的不等式.无穷和与无穷乘积的问题放在第 11 章讨论.

1. [MCM]. $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \frac{x^k}{k!} > 0.(x \in R^1)$.

证 1 若 $x \leqslant 0$,则 $P_{2n}(x)$ 的任一项 $a_k = (-1)^k \frac{x^k}{k!} \geqslant 0$.

而 $a_0 = 1$,从而 $P_{2n}(x) \geqslant 1$.

(2) 若 $x \geqslant 2n$,则 $P_{2n}(x)$ 的项可以组合成每项均非负:

$$P_{2n}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(x - 2k) \geqslant 1.$$

(3) 若 $0 \leqslant x \leqslant 2n$.则 $P_{2n}(x)$ 是$[0,2n]$上连续函数.从而在该区间上必有最小值,记为 m.若 $P_{2n}(0)$ 或 $P_{2n}(2n) = m$.则从(1)(2) 知 $m = 1$.从而 $0 < x < 2n$ 时,$P_{2n}(x) > 0$;若 $P_{2n}(x)$ 在$[0,2n]$的某一内点 x_0 达到最小值,即 $P_{2n}(x_0) = m$.则 $\exists \delta > 0$,使 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (0,2n), x \neq x_0$,有 $P_{2n}(x) > P_{2n}(x_0)$.从而 $P'_{2n}(x_0) = 0$,即

$$P'_{2n}(x_0) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \frac{x_0^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{x_0^{2n}}{(2n)!} - P_{2n}(x_0) = 0.$$

从而 $P_{2n}(x_0) = \frac{x_0^{2n}}{(2n)!} > 0$,所以,$P_{2n}(x) > P_{2n}(x_0) > 0$.证毕.

证 2 不用微分方法,也可利用组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m},$$

并考察

$$P_{2n}(x)P_{2n}(-x) = 1 + \frac{x^{2n+2}}{(2n)!(n+1)} + \frac{x^{2n+4}}{(2n)!3!(n+2)} + \frac{x^{2n+6}}{(2n)!5!(n+3)} + \cdots + \frac{x^{4n}}{((2n)!)^2}.$$

注 从(1) 可直接推出 $Q_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} > 0$ 对所有实数 x 也成立.设 $x > 0$,则

$$\sum_{k=0}^{[x]} \frac{(-1)^k(x-k)^k e^{x-k}}{k!} < 2x + 1.$$

见[305]1996,103(6),E10531.

2. 设 $x \geqslant 0, m > n$. $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$,记 $f(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$, $g(x) = x^{n-m}f(x)$.则:(1) f 在$[0,\infty)$上严格递增; (2) g 在$[0,\infty)$上严格递减;

(3) 当 $0 < x < 1$ 时,从 $f(0) < f(x) < f(1)$ 和 $g(x) > g(1)$ 得出

$$\max\{1, x^{m-n}\frac{m+1}{n+1}\} < f(x) < \frac{m+1}{n+1} < g(x);$$

当 $1 < x < \infty$ 时,从 $f(x) > f(1)$ 和 $g(\infty) < g(x) < g(1)$ 得出

$$1 < g(x) < \frac{m+1}{n+1} < f(x) < \frac{m+1}{n+1}x^{m-n}.$$

3. 设 $f_n(x) = \dfrac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{x + x^3 + \cdots + x^{2n-1}}$,

(1) 若 $x > 0, x \neq 1, n \geqslant 2$,则

$$f_n(x) > 1 + \frac{1}{n} + (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 > \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})(x + \frac{1}{x}) > (1 + \frac{1}{n}).$$

注 $f_n(x)$ 的右边头两个下界是 Taylor, C. 1868 年给出的,但没有比较两个下界的大小(转引[4]P276 – 277.)事实上,利用 $g(x) = x + 1/x$ 在 $(0, \infty)$ 上的最小值为 $g(1) = 2$. 容易推出上述三个下界的大小关系.

(2) 若 $x > 0$,则 $f_n(x)$ 关于 n 递减,即

$$f_{n+1}(x) < f_n(x).$$

4. [MCM]. 设 $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k, n \geqslant 2$. 则当 $x > 0$ 时,

(1) $\dfrac{P_n(x)}{P_n(x) - 1 - x^n} \geqslant \dfrac{n+1}{n-1}$, 仅当 $x = 1$ 时等号成立.

提示:不等式等价于

$$P_n(x) \leqslant \frac{n+1}{2}(1 + x^n).$$

将其变形为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(1 - x^k)(1 - x^{n-k}) \geqslant 0.$$

(2) $P_{2n}(x) \geqslant (2n+1)x^n$.

5. **Ross-Mahajan 不等式**:设 $|g_1(t)| \leqslant a_1 < 2$, $|g_2(t)| \leqslant a_2 < 2$, $x, t \in R^1$,

$$u(x,t) = \frac{x^2 + xg_1(t) + 1}{x^2 + xg_2(t) + 1}.$$

则

$$\frac{(4 + a_1a_2) - 2(a_1 + a_2)}{4 - a_2^2} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{(4 + a_1a_2) + 2(a_1 + a_2)}{4 - a_2^2}.$$

见[331]1979, 634 – 677:72 – 73.

(1) 当 $g_1(t) = \sin t, g_2(t) = \cos t$ 时,上式可改进为

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7}) \leqslant \frac{x^2 + x\sin t + 1}{x^2 + x\cos t + 1} \leqslant \frac{1}{3}(4 + \sqrt{7}) < 3.$$

证 不妨设 $\sin t \neq \cos t$,记

$$y = \frac{x^2 + x\sin t + 1}{x^2 + x\cos t + 1}.$$

即$(y-1)x^2+(y\cos t-\sin t)x+(y-1)=0$.该二次方程的判别式$\Delta=(y\cos t-\sin t)^2-4(y-1)^2\geqslant 0$.易知$(y\cos t-\sin t)^2-4(y-1)^2=0$的两个实根为$y_1=\dfrac{2-\sin t}{2-\cos t}$,$y_2=\dfrac{2+\sin t}{2+\cos t}$.因为判别式$\Delta\geqslant 0\Leftrightarrow\min\{y_1,y_2\}\leqslant y\leqslant\max\{y_1,y_2\}$,于是,证二元函数$u(x,t)$不等式归结为证一元函数$y_1(t)$,$y_2(t)$的不等式:

$$\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant y_1,y_2\leqslant\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}).$$

(详见[4]P328－329)

(2) 取$g_2(t)=-1,g_2(t)=1$,得到

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leqslant 3.$$

6. 设$y=f(x)=\dfrac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$, $\alpha+\beta\neq 2k\pi(k\in Z)$.

(1) 若$\sin\beta=0$,则

$$\frac{1}{2}(1+(-1)^k\cos\alpha)\leqslant y<\infty;$$

(2) 若$\sin\beta\neq 0$,则 $\min\{y_1,y_2\}\leqslant y\leqslant\max\{y_1,y_2\}$,

式中 $y_1=\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta},y_2=\dfrac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}$.

提示:用与N5(1)类似的判别式法.

7. 设$f(x)=\dfrac{x^2-2ax+b^2}{x^2+2ax+b^2}$, $p=\dfrac{b-a}{b+a}$.

(1) 若$0<|a|<|b|$,则

$$\min\{p,1/p\}\leqslant f(x)\leqslant\max\{p,1/p\}$$

(2) 若$0<|b|<|a|$,则

$$f(x)\geqslant\max\{p,1/p\}\text{ 或 }f(x)\leqslant\min\{p,1/p\}.$$

提示:用判别式法,详见[4]P267－268.

8. **Bernoulli 不等式**:设$x\geqslant -1$,则当$0<\alpha<1$时

$$(1+)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$$

而当$\alpha<0$或$\alpha>1$时,不等号反向,仅当$x=0$时等号成立.

证 利用Taylor公式:

$$(1+x)^\alpha-1-\alpha x=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2(1+\theta x)^{\alpha-2},0<\theta<1.$$

并注意到$1+\theta x>0$即可得证.

Bernoulli 不等式有许多变形、改进和推广.例如:

(1) 设$x>0,x\neq 1$,则当$0<\alpha<1$时,

$$\alpha x^{\alpha-1}(x-1)<x^\alpha-1<\alpha(x-1);$$

而当$\alpha>1$或$\alpha<0$时,两个不等号均反向.

(2) 若$\alpha=n$为自然数,则

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

对 $x \geqslant -2$ 也成立.事实上,当 $-2 \leqslant x \leqslant -1$ 时,

$(1+x)^n \geqslant -|1+x|^n \geqslant -|1+x| = 1+x \geqslant 1+nx$.

(3) 设 $x > -1, 0 < \alpha < 1$,则

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1+\frac{\alpha x}{1+(1-\alpha)x},$$

(见[305]1992,99(6):533).若 $\alpha > 1$,且 $-1 < x < \frac{1}{\alpha-1}$ 时,上述不等号反向.

(4) 设 $\alpha_k \geqslant 0, x_k > -1$,且 $\sum_{K=1}^{n}\alpha_k \leqslant 1$,则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\alpha_k} \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k$$

若 $\alpha_k \geqslant 1, x_k > 0$ 或 $\alpha_k \leqslant 0, x_k < 0$,则不等号反向.

(5) 设 $x_k > -1$ 且 x_k 同号,$n \geqslant 2$,则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) > 1+\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

(6) 利用 $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开式:$\alpha \in R^1, \alpha \notin N$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + r_n(x). \quad |x| < 1.$$

式中

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}. \quad (k \in N).$$

利用余项的积分形式:

$$|r_n(x)| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\right|\left|\alpha\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right|\right|.$$

令 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k, u_n(x) = \binom{\alpha}{n}x^n$. 1968 年,Gerber 证明:当 $u_{n+1}(x) > 0$ 时.

$$(1+x)^\alpha > S_n(x);$$

当 $u_{n+1}(x) < 0$ 时,不等号反向.见[305]1968,75:875 - 876.

(7) 设 $1 < \alpha < 2, -1 < x < M, M \geqslant 0$,则

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)(1+M)^{-2}x^2.$$

(见[378]1993,42(3):317 - 337)

当 $\alpha > 1, x > 0$ 时,成立

$$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2.$$

(8) 1999 年,薛昌兴给出了 Bernoulli 不等式的隔离和推广:

① 设 $a>0, f(k)=\frac{k}{n}(a^{1/k}-1), g(k)=\frac{n}{k}(a^k-1)+1, k=1,2,\cdots,n-1$,则

$$a^{1/n}-1\leqslant f(n-1)\leqslant f(n-2)\leqslant\cdots\leqslant f(2)\leqslant f(1)=\frac{1}{n}(a-1);$$

$$a^n\geqslant g(n-1)\geqslant g(n-2)\geqslant\cdots\geqslant g(2)\geqslant g(1)=1+n(a-1).$$

仅当 $a=1$ 或 $n=1$ 时等号成立.

② 设 $-1<x<\infty$,令 $f(m)=1+nx+\frac{n}{m}\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}x^k$,则

$$(1+x)^n\geqslant f(n-1)\geqslant f(n-2)\geqslant\cdots\geqslant f(2)=1+nx+\frac{n}{2}x^2\geqslant 1+nx,$$

仅当 $x=0$ 或 $n=1$ 时等号成立.

③ 设 $-1<x<\infty$,若 $0\leqslant\alpha\leqslant m$,则

$$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x+\frac{\alpha}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^k,$$

当 $\alpha\leqslant 0$ 或 $\alpha\geqslant m$ 时,不等号反向.

④ 设 $1<x<\infty$,则当 $-1\leqslant\alpha\leqslant 0$ 时,

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\frac{\alpha x}{1-\alpha x};$$

而当 $m\leqslant\alpha\leqslant m+1, m=1,2,\cdots$,时

$$1+\alpha x+\frac{\alpha}{m}\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}x^k\leqslant(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x+\frac{\alpha}{m+1}\sum_{k=2}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k.$$

见甘肃教育学院学报 1999,3:5－7.

(9) 2001 年文家金、罗钊证明:设 $\alpha>1$,且 $c_0=2.591121476\cdots$ 是方程 $\ln(1+c)=1+\frac{1}{1+c}$ 的惟一正实根,若 $x\leqslant -2-c_0$,则

$$(1+x)|1+x|^{\alpha-1}<1+\alpha x,$$

若 $x\geqslant -2-\frac{c_0}{\alpha}$,则

$$(1+x)|1+x|^{\alpha-1}\geqslant 1+\alpha x.$$

仅当 $x=0$ 时等号成立,见成都大学学报 2001,20(4):1－8.

(10) Alzer. H. 给出了 Bernoulli 不等式的另一种加细:设 f 是 $[0,1]$ 上正的凹函数,$x>-1$. $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$,则

$$\frac{1+\alpha x}{(1+x)^\alpha}\leqslant\frac{\left(\int_0^1(f(t))^x\mathrm{d}t\right)^\alpha}{\int_0^1(f(t))^{\alpha x}\mathrm{d}t}\leqslant 1.$$

当 $0<\alpha<1$ 时反向不等式成立. 见[307]755－26009.

9. (1) 设 $1<\alpha\leqslant 2$,则存在正的常数 c,使得 $\forall x\in R^1$,成立

$$|1+x|^\alpha\geqslant 1+\alpha x+c\,\theta(x),\tag{9.1}$$

式中 $\theta(x)=\begin{cases}|x|^2, & |x|<1,\\ |x|^\alpha, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

证 令 $f(x)=|1+x|^{\alpha}-(1+\alpha x)$, $g(x)=f(x)/\theta(x)$.
于是,问题变成要证对所有实数 x,都成立

$$g(x)\geqslant c. \tag{9.2}$$

首先,从下述两个极限

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x}{x^{2}}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x}{|x|^{\alpha}}=1.$$

可知,存在 $\sigma>0,\Delta>0,c>0$,使得 $|x|\leqslant\sigma$ 或 $|x|\geqslant\Delta$ 时

$$g(x)\geqslant c. \tag{9.3}$$

另一方面,$f'(x)=\alpha|1+x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}(1+x)-\alpha$,

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)|1+x|^{\alpha-2}\quad(x\neq-1).$$

因为 $f''(x)>0,f'(0)=0$,所以,当 $x=0$ 时 $f(x)$ 有惟一的极小值.但 $f(0)=0$,从而当 $\sigma\leqslant|x|\leqslant\Delta$ 时,$f(x)>0$,于是 $g(x)>0$.若有必要,可减少(9.3)式中找到的 c,便可认为

$\sigma\leqslant|x|\leqslant\Delta$ 时,$g(x)\geqslant c$.从而(9.2)式得证.

(2) 设 $x>0,f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+p},g(x)=(1+\frac{1}{x})^{x}(1+\frac{p}{x}),h(x)=\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1}$,则 f,g 严格递减的充要条件是 $p\geqslant\frac{1}{2}$;而存在 $x_0>0$,使得 $x>x_0$ 时,f,g 严格递增的充要条件是 $p<\frac{1}{2}$;h 严格递减的充要条件是 $0<p\leqslant2$,而存在 $x_0>0$,使得 h 严格递增的充要条件是 $p<0$ 或 $p>2$.这是 $x=n\in N$ 时 Schur 不等式(第 2 章 §1N.14)的推广(徐晓泉,[344]1993,4:78-79,91).

10. 设 $0\leqslant x\leqslant1,p>1$,则

(1) [MCU] $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^{p}+(1-x)^{p}\leqslant1$;

(2) $x^{p}(1-x^{p})\leqslant\frac{1}{4}$.

提示:为证(1),考虑 $f(x)=x^{p}+(1-x)^{p}$ 在$[0,1]$上的最大值与最小值.

(3) 设 $p,q\geqslant1,(1/p)+(1/q)=(\ln3/\ln2)$,则

$$(1+x^{p})^{1/p}(1+x^{q})^{1/q}\leqslant1+x+x^{2}$$

成立的充要条件是 $3(p+q)\leqslant8$.(**Brown 不等式**,[306]93g:28031)

11. 设 $0\leqslant x\leqslant1,1<p\leqslant2,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{q}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^{q}\leqslant\left(\frac{1+x^{p}}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}};$$

当 $2\leqslant p<\infty$ 时,不等号反向.

提示:$p=2$ 或 $x=0$ 或 1 时,不等式显然成立.当 $1<p<2,0<x<1$ 时,作变换 $x=\frac{1-t}{1+t}$.不等式变为 $(1+t)^{p}+(1-t)^{p}-2(1+t^{q})^{p-1}\geqslant0$.

然后将上式左边的每项都作 Taylor 级数展开.

注　因为$\frac{1}{p-1}=q-1$,所以,所证不等式等价于:$1<p\leqslant 2,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时成立:

$$|x+y|^q+|x-y|^q\leqslant 2(|x|^p+|y|^p)^{q-1}.$$

式中x,y可为实数或复数.

12.　令$f(x)=(1+x)^p+(1-x)^p-2^p$. $0\leqslant x\leqslant 1$,则当$p\geqslant 1$时,$f(x)\leqslant 0$,当$0\leqslant p\leqslant 1$时,$f(x)\geqslant 0$.

提示:研究f在$[0,1]$上的单调性.

13.　设$0<x<1$,则当$p\geqslant 2$时,成立

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p+\left(\frac{1-x}{2}\right)^p\leqslant\frac{1}{2}(1+x^p).$$

当$1<p\leqslant 2$时,不等号反向.

推论　设x,y为实数或复数,则当$2\leqslant p<\infty$时,

$$2(|x|^p+|y|^p)\leqslant|x+y|^p+|x-y|^p\leqslant 2^{p-1}(|x|^p+|y|^p);$$

当$1<p\leqslant 2$时不等号均反向.

14.　设$0<x<1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x^{j-1}\right)^2<(4\ln 2)\left(\sum_{k=0}^{n-1}x^{2k}\right).$$

式中$4\ln 2$是最佳常数.

15.　设$f(x)=x^n(1-x)$,则当$0<x<1$时$f(x)<\frac{1}{n\cdot e}$.

证　f在$x_0=\frac{n}{n+1}$取得最大值,于是,$f(x)\leqslant f(x_0)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{ne}$.

16.　设$0\leqslant x\leqslant n$,则$\forall m,n\in N$,成立

$$\left|x^{m-1}\prod_{k=1}^{n}(x-k)^m\right|\leqslant(n!)^m.$$

17.　设$f(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1-x)^n$,则对于$0<x<1$,

(1)　$f(x)\leqslant\frac{33}{\sqrt{n}x^{3/2}}$.

提示:用概率方法,设独立随机变量列$\{\xi_j\}$有相同的几何分布$P(\xi_j)=x^k(1-x),j=1,2,\cdots$.则$\eta_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j$具有分布

$$P(\eta_n=k)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1-x)^n.\text{令 } g(t)=\frac{t-\frac{nx}{1-x}}{\sqrt{nx}/(1-x)},\text{则}$$

$$P(\eta_n=k)=P(k-1\leqslant\eta_n\leqslant k)=P(g(k-1)\leqslant g(\eta_n)\leqslant g(k)),$$

$$\left|P(\eta_n=k)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{g(k-1)}^{g(k)}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{32}{\sqrt{n}x^{3/2}}.$$

而上式左端第二项不超过$\frac{1-x}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{nx}}$.所以,$p(\eta_n=k)\leqslant\frac{33}{\sqrt{n}x^{3/2}}$.

见[336](A),1988,9(2):237 - 238.

(2) 1994 年 Love 改进为 $f(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2e}\sqrt{n}x^{3/2}}$.并证明:

$$\left|\sum_{x<\frac{k}{n+k}}f(x)-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{4}{3\sqrt{n}x^{3/2}}.$$

(Love,E.R.,[301]1994,187(1):1 - 16)

18. **C_p 不等式**:设 a,b 为实数,$p>0$,则

$$(|a|+|b|)^p\leqslant C_p(|a|^p+|b|^p). \tag{18.1}$$

式中 $C_p=\begin{cases}1, & 0<p\leqslant 1,\\ 2^{p-1}, & p>1.\end{cases}$

提示: 当 $0<p\leqslant 1$ 时,考虑函数 $f(t)=(1+t)^p-t^p-1$ 的单调性,再令 $t=b/a(a\neq 0)$.当 $p>1$ 时,利用 $g(x)=|x|^p$ 的凸性,得到

$$\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^p\leqslant\frac{1}{2}(|a|^p+|b|^p).$$

C_p 不等式对 a,b 为复数时仍成立,它在分析与概率论中都有重要应用,该不等式已有许多推广和改进,例如

(1) $$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^p\leqslant C_p\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p. \tag{18.2}$$

式中 $C_p=\begin{cases}1, & 0<p\leqslant 1,\\ n^{p-1}, & p>1.\end{cases}$

其中等号成立的充要条件:当 $p>1$ 时是 $|a_1|=\cdots=|a_n|$;当 $p=1$ 时是 $a_1,\cdots,a_n$ 同号;当 $0<p<1$ 时是 $a_1,\cdots,a_n$ 中至多有一个不为零.

严士健等在[78]P223 用概率论方法给出了一个简单的证明.

C_p 不等式可写成下述使用方便的形式:当 $p\geqslant 1$ 时.

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^p\leqslant n^{p-1}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p,$$

当 $0<p<1$ 时,不等号全部反向.

(2) 设 $0<p<1$,$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p<\infty$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\right)^p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p.$$

(3) 设 $0\leqslant t\leqslant 1$,则当 $p\geqslant 1$ 时,成立

$$|ta+(1-t)b|^p\leqslant t|a|^p+(1-t)|b|^p.$$

更一般地,设 $t_k\geqslant 0$,且 $\sum_{k=1}^{n}t_k=1$,则当 $p\geqslant 1$ 时成立 $\left(\sum_{k=1}^{n}t_k|a_k|\right)^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}t_k|a_k|^p\right)$,当 $0<p<1$ 时不等号反向.特别,取 $t_k=\frac{1}{n}$ $(\forall k)$ 又得到(18.2)式.

(4) 设 $1\leqslant p<\infty$,$0<t<1$,则

$$(|a|+|b|)^p \leqslant t^{1-p}|a|^p + (1-t)^{1-p}|b|^p.$$

提示：不妨设 $a,b>0$，令 $f(t)=t^{1-p}a^p+(1-t)^{1-p}b^p$. 只要证 f 在 $t_0=\dfrac{a}{a+b}$ 取最小值.

(5)　设 $p \geqslant \dfrac{n}{n-1}, n \geqslant 2$，则

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^p - n(n^{p-1}-1)\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{p/n}.$$

见宁波大学学报 1989, 2:12 - 14.

(6)　**Orlicz 不等式**：设 $1<p\leqslant 2$，则存在常数 $c>0$，使得

$|a+b|^p \leqslant |a|^p + c|b|^p + p|a|^{p-1}b\,\mathrm{sgn}a$;

当 $p>2$ 时，不等号反向. 见[104]P109, 117.

(7)　设 $p>0$，a,b 为实数或复数，则

$$(|a|+|b|)^p \leqslant 2^p(\max\{|a|,|b|\})^p \leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p).$$

(8)　**Banach-Saks 不等式**：设 $2<p<\infty$. $[p]$ 表示 p 的整数部分，则存在两个正常数 c_1, c_2，使得

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + c_1|b|^p + p|a|^{p-1}b\,\mathrm{sgn}a + c_2\sum_{k=2}^{[p]}|a|^{p-k}|b|^k.$$

见[104]117.

(9)　**Hardy-Littlewood 不等式**：设 $p\geqslant 1$. $\forall a_k \geqslant 0$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leqslant p\sum_{m=1}^{n}a_m\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^{p-1}.$$

见[320]1964, 15:25 - 40 和[369]1971, 32:295 - 299.

(10)　设 $1<p<\infty$, $\varepsilon>0$，实数 x,y 满足：$|y|\leqslant 1=|x|$, $|x-y|\geqslant\varepsilon$. 则存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得

$$|x+y|^p \leqslant 2^{p-1}(1-\delta)(|x|^p+|y|^p). \tag{18.3}$$

证　因为 $\varphi(t)=|t|^p$ 严格凸，且 $|x-y|\geqslant\varepsilon>0$，所以，$x\neq y$，从而

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(y)) = \frac{1}{2}(1+|y|^p). \tag{18.4}$$

若(18.3)式不成立，则存在数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, $|y_n|\leqslant|x_n|=1$,

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{1}{2}(x_n+y_n)\right|^p}{\dfrac{1}{2}(|x_n|^p+|y_n|^p)} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{\{\dfrac{1}{2}(1+|y_n|)\}^p}{\dfrac{1}{2}(1+|y_n|^p)} \leqslant 1, \tag{18.5}$$

因为 $|y_n|\leqslant 1$，从而 $|y_n|$ 有收敛子列，即 $|y_{n_k}|\to a$, $0\leqslant a\leqslant 1$，将(18.5)式中 y_n 换成 y_{n_k}，得到

$$1\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{[\dfrac{1}{2}(1+|y_{n_k}|)]^p}{\dfrac{1}{2}(1+|y_{n_k}|^p)} = \frac{[\dfrac{1}{2}(1+a)]^p}{\dfrac{1}{2}(1+a^p)} \leqslant 1.$$

由上式和(18.4)式，仅当 $a=1$ 时上式中等号才成立. 于是 $|y_n|$ 的每个收敛子列的极限

均为 1,从而 $|y_n|\to 1$. 令 $u_n=\frac{y_n}{|y_n|}$,则

$$|u_n-y_n|=|y_n|\left(\frac{1}{|y_n|}-1\right)\to 0\quad(n\to\infty).$$

从而由 $\varepsilon\leqslant|x_n-y_n|\leqslant|x_n-u_n|+|u_n-y_n|$,推出 $\varepsilon\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}|x_n-u_n|$.

下面证明 $|x_n+u_n|\to 2.(n\to\infty)$,用反证法,若存在 $\delta_0>0$,使得当 n 充分大时 $|x_n+u_n|<2(1-\delta_0)$. 于是从 $\frac{|y_n+x_n|y_n||}{2|y_n|}<1-\delta_0$ 推出

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2}(|y_n+x_n|y_n||)\leqslant 1-\delta_0. \tag{18.6}$$

另一方面,$|y_n|\to 1$. 于是,

$$|y_n+x_n|y_n||=|(y_n+x_n)-x_n(1-|y_n|)|\geqslant|(y_n+x_n)-(1-|y_n|)|. \tag{18.7}$$

但从(18.5)式,$|y_n+x_n|\to 2$. 所以从(18.6)和(18.7)式,有

$$2\leqslant\limsup_{n\to\infty}|y_n+x_n|y_n||\leqslant 2(1-\delta_0).$$

这个矛盾表明 $|u_n+x_n|\to 2$. 于是,

$$4=\lim_{n\to\infty}(u_n+x_n)^2=\lim_{n\to\infty}(u_n^2+x_n^2+2u_nx_n)=2+2\lim_{n\to\infty}(u_nx_n).$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_nx_n)=1$,所以,$0<\varepsilon^2\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}(x_n-u_n)^2=\liminf\limits_{n\to\infty}(1+1-2u_nx_n)=0$. 这个矛盾表明(18.3)式成立. 证毕.

在(18.3)式中用 $\frac{x}{\max\{|x|,|y|\}}$, $\frac{y}{\max\{|x|,|y|\}}$ 分别代替 x,y,(x,y 不同时为零),得到:若 $1<p<\infty$,$|x-y|\geqslant\max\{|x|,|y|\}$,$x,y$ 不同时为零,则

$$|x+y|^p\leqslant 2^{p-1}(1-\delta)(|x|^p+|y|^p).$$

式中 $\delta=\delta\left(\frac{|x-y|}{\max\{|x|,|y|\}}\right)\to 0$(当 $|x-y|\to 0$ 时). 见[103]P281-282.

19. **Bohr 不等式**:设 $c>0$,a,b 为实数或复数,则

$$|a+b|^2\leqslant(1+c)|a|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|b|^2.$$

仅当 $a=cb$ 时等号成立.

证 因为 $c>0$,所以,$|a|\cdot|b|=\sqrt{c|a|^2\cdot\frac{1}{c}|b|^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(c|a|^2+\frac{1}{c}|b|^2\right)$,即 $2|a|\cdot|b|\leqslant c|a|^2+\frac{1}{c}|b|^2$. 从而 $|a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2=|a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b|\leqslant(1+c)|a|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|b|^2$.

推广:

(1) 设 $c_k>0$,且 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}=1$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k|a_k|^2.$$

(2)　设 a,b,θ 为实数,$c>0$,则

$$(a-b)^2\sin\theta+(a+b)^2\cos\theta\leqslant(1+c\mid\cos2\theta\mid)a^2+(1+\frac{1}{c}\mid\cos2\theta\mid)b^2$$
$$\leqslant(1+c)a^2+(1+\frac{1}{c})b^2.$$

(Makowski,A.,Boletin Mat,1961,34:11)

20.　**Lyons 猜想**:设 $0<\alpha<1,x,y>0$,猜想

$$(x+y)^{\alpha n}\geqslant\alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha n}{\alpha k}x^{\alpha k}y^{\alpha(n-k)},\tag{20.1}$$

式中 $\binom{a}{b}=\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}.a\geqslant b-1.$

1998 年 Love,E.R. 证明当 $\alpha=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 时(20.1)式成立严格不等式. 见[302]1998,2(3):229－233.我们问:当 $\alpha\neq\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 时,(20.1)式是否仍成立?

21.　设 x,y,p,q 为实数,$1<p<2,1/p+1/q=1$,
令 $f(x,y)=\mid x\mid^{q/p}\operatorname{sgn}x-\mid y\mid^{q/p}\operatorname{sgn}y$, $g(x,y)=\mid x\mid^{p/q}\operatorname{sgn}x-\mid y\mid^{p/q}\operatorname{sgn}y$,则

(1)　$|f(x,y)|^p\leqslant\max\{2^p;(q/p)^p\}|x-y|^p(|x|^{q-p}+|y|^{q-p})$;

(2)　$\mid g(x,y)\mid^q\leqslant2^q\mid x-y\mid(\mid x\mid^{p-q}+\mid y\mid^{p-q})$.

(Citlanadze,E.S.,Doklady Akad,Nauk SSSR,1950,71:441－444).

22.　设 a,b 为非零实数或复数,则

$$\mid a-b\mid\geqslant\frac{1}{4}(\mid a\mid+\mid b\mid)\left|\frac{a}{\mid a\mid}-\frac{b}{\mid b\mid}\right|.$$

23.(1)　设 $x,y\geqslant0,p\geqslant1$,则 $\mid x-y\mid^p\leqslant\mid x^p-y^p\mid$;若 $0<p\leqslant1$,则不等号反向.

(2)　设 a,b 为实数,$n\in N$,则 $\mid a-b\mid^{2n+1}\leqslant2^{2n}|a^{2n+1}-b^{2n+1}|$,
见[301]2002,268(1):70.

(3)　设 x,y 为非负实数,则

$$|x^p-y^p|\leqslant p|x-y|(x^{p-1}+y^{p-1}).\qquad1\leqslant p<\infty;$$

(4) 若 $x\geqslant y>0,2\leqslant p<\infty$,则

$$x^p-y^p\leqslant(p/2)x^{p-2}(x^2-y^2).$$

24.(1) **Mazur 不等式**:设 $p\geqslant1$,则

$$2^{1-p}|x-y|^p\leqslant|x|x|^{p-1}-y|y|^{p-1}|\leqslant p|x-y|(|x|^{p-1}+|y|^{p-1}).$$

证　为证左边不等式,令 $x=(1/2)+u,y=-(1/2)+u$.则偶函数

$$f(u)=(\frac{1}{2}+u)\left|\frac{1}{2}+u\right|^{p-1}+(\frac{1}{2}-u)\left|\frac{1}{2}-u\right|^{p-1}$$

当 $u>0$ 时递增,从而 f 在 $u=0$ 时取得最小值 2^{1-p}.为证右边不等式,由对称性,只要考虑 $u\geqslant0$ 的情形.若 $0\leqslant u\leqslant(1/2)$,所证不等式可写成:

$$(\frac{1}{2}+u)^p+(\frac{1}{2}-u)^p\leqslant p\{(\frac{1}{2}+u)^{p-1}+(\frac{1}{2}-u)^{p-1}\}.$$

而这对于 $u\leqslant p-\frac{1}{2}$,上式显然成立,当 $u>\frac{1}{2}$ 时,再令 $t=\frac{u-(1/2)}{u+(1/2)}$,考虑函数 $g(t)=\frac{(1+t)(1-t^{p-1})}{(1-t)(1+t^{p-1})}$ 在$[0,1]$上的单调性,得到 $g(t)\leqslant 2p-1$.此即所要证的不等式.

(2) 设 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$. $|x|=(\sum_{k=1}^n|x_k|^2)^{1/2},n\geqslant 1$, $2\leqslant p<\infty$,则

$$\left|x|x|^{p-2}-y|y|^{p-2}\right|\leqslant c_p(|x|^{p-2}+|y|^{p-2})|x-y|.$$

若 $x\neq y,x,y\neq 0$,则 c_p 的最佳值为

$$c_p=\begin{cases}1, & \text{若 } 2\leqslant p\leqslant 3;\\ (1/2)(p-1), & \text{若 } p>3.\end{cases}$$

见[394]1980,6(3):301－304.

25. **Smarzewski 不等式**:设 $1\leqslant p<2$. $t_0=t_0(p)$ 是函数 $g(t)=-t^{p-1}+(p-1)t+p-2$ 在$(1,\infty)$上的惟一零点,$t_0(2)=1$.则

$$p|x|^{p-2}x(y-x)\geqslant|y|^p-|x|^p-c_p|y-x|^p.$$

式中 $p=1$ 时,$x\neq 0$,而 c_p 定义为 $c_1=2,c_p=(p-1)(1+t_0)^{2-p},(1<p<2)$.

证明见[327]1987,49:93－98.

26. 设 a,b 为实数或复数,则

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

推广: (1) 设 a_k 为复数,则

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^n a_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^n a_k\right|}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{|a_k|}{1+|a_k|}.$$

(2) 设 a,b,c 为实数或复数,则

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|}\leqslant\frac{|a-c|}{1+|a-c|}+\frac{|b-c|}{1+|b-c|}.$$

27. **Young 不等式($p-q$ 不等式)**:设 $p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.则当 $1<p<\infty$ 时,成立

$$|ab|\leqslant\frac{1}{p}|a|^p+\frac{1}{q}|b|^q; \tag{27.1}$$

当 $0<p<1$ 时,不等号反向,仅当 $|b|=|a|^{p-1}$ 时等号成立.

证 这个不等式有多种证明方法,例如:

① 积分法:设 $y=\varphi(x)$ 是$[0,a]$上严格递增的连续函数,比较面积得

$$ab\leqslant\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^b\varphi^{-1}(y)\mathrm{d}y,a,b\geqslant 0,$$

式中 $x=\varphi^{-1}(y)$ 是 $y=\varphi(x)$ 的反函数,然后取 $\varphi(x)=x^{p-1}$.

② 考虑二元函数

$$f(x,y)=x/p+y/q-x^{1/p}y^{1/q}$$

在凸域 $D=\{(x,y):x,y\geqslant 0\}$ 上的凸性.

③　微分法:固定 $x>0$,求一元函数

$$\varphi(y)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q-xy$$

在$[0,\infty)$上的极值,φ 在 $y_0=x_0^{\alpha}$(式中 $\alpha=1/(q-1)$)时取最小值.即 $\varphi(y)\geqslant\varphi(y_0)=0$.

④　代数法:利用 Bernoulli 不等式:$x>0,0<\alpha<1.x^{\alpha}-1\leqslant\alpha(x-1)$.再取 $\alpha=1/q,x=b^q/a^p$.

Young 不等式有许多变形,改进和推广,例如:

(1)　设 $x,y>0,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,1<p<\infty$,则

$$x^{1/p}y^{1/q}\leqslant\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y;\tag{27.2}$$

$$x^{1/p}y^{1/q}\leqslant\frac{1}{p}xt^{-1/q}+\frac{1}{q}yt^{1/p},(t>0);\tag{27.3}$$

$$x^{\lambda}y^{1-\lambda}\leqslant\lambda x+(1-\lambda)y.(0<\lambda<1)\tag{27.4}$$

它们的证明见第 1 章 § 2(2.25).

(2)　(27.4)式的改进是**Gerber 不等式**:设 $0<x<cy,c\geqslant 1,M=\dfrac{c^{\lambda+1}}{2y}\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$.若 $0<\lambda<1$,或 $\lambda>2$,则

$$\frac{M}{c^3}<\lambda x+(1-\lambda)y-x^{\lambda}y^{1-\lambda}<M.$$

当 $\lambda<0$ 或 $1<\lambda<2$ 时,不等号反向.见 Alic,M,等[303]1998,1(4):507－516.

(3)　设 $r,x>0,y>-1/r$,则

$$xy\leqslant x\left(\frac{x^r-1}{r}\right)+\left(\frac{1+ry}{1+r}\right)^{1+\frac{1}{r}}.$$

(4)　设 $1<p_k<\infty,\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}=1$,则

$$\prod_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}|a_k|.$$

(5)　$\dfrac{1}{p\vee q}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\leqslant\dfrac{1}{p}x+\dfrac{1}{q}y-x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant\dfrac{1}{p\wedge q}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$,

式中 $x,y>0,1<p<\infty,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,p\vee q=\max\{p,q\},p\wedge q=\min\{p,q\}$,见[345]1990,4.此外见第 1 章 § 2(2.75) 和第 5 章 § 3N38.

28.　(1)　设 $a,b>0,0\leqslant p\leqslant m,m\in N$,则

$$0\leqslant\frac{(a+b)^p}{(a^m+b^m)^{p/m}}-1\leqslant\frac{p}{m}\left(\frac{(a+b)^m}{a^m+b^m}-1\right).$$

见[305]1992,99(9),E10257.

(2)　设 $p<0$ 或 $p>1,0<a<b$,则

$$pa^{p-1}(b-a) < b^p - a^p < pb^{p-1}(b-a).$$

当 $0 < p < 1$ 时,不等号全部反向.

提示:$f(x) = x^p$ 在 $[a,b]$ 上用微分中值定理.

29. 设 $x > y > 0, p \geqslant q > 0$,则当 $(p-q)^2 \leqslant pq(p+q)$ 时,成立

$$\left[\frac{1}{2}(x^p y^q + x^q y^p)\right]^{\frac{1}{p+q}} < \left[\frac{1}{2}(x^{pq} + y^{pq})\right]^{\frac{1}{pq}}.$$

见[305]1984,94(4):261 - 262.

30. **Dresden 不等式**:设 $0 \leqslant a \leqslant x_1 \leqslant x_2$,则

$$\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1} \leqslant \sqrt[n]{x_2 - a} - \sqrt[n]{x_1 - a} \leqslant \sqrt[n]{x_2 - x_1}.$$

提示:令 $f(x) = x^{1/n}$,则

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_1-a}^{x_2-a} f'(t)\mathrm{d}t = f(x_2 - a) - f(x_1 - a).$$

推广: 设 $0 \leqslant a \leqslant x_1 \leqslant x_2$,$\varphi$ 是 $[x_1 - a, x_2]$ 上的连续凸函数,则

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2 - a) - \varphi(x_1 - a).$$

由此推出,$0 < p < 1$ 时,

$$x_2^p - x_1^p \leqslant (x_2 - a)^p - (x_1 - a)^p.$$

见[77]P26,239 - 240.

31. **Turner-Conway 不等式**:设 $a, b > 0, p, q > 1$,则

$$(a+b)^{pq} < [(a+b)^p - a^p]^q + [(a+b)^q - b^q]^p. \tag{31.1}$$

当 $0 < p, q < 1$ 时,不等号反向.

特别,当 $b = 1 - a$, $0 < a < 1, p, q > 1$ 时,$(1 - a^p)^q + (1 - b^q)^p > 1$.

推广: 设 $a_{jk} + b_{jk} = 1, 0 < a_{jk} < 1, j = 1, \cdots, m, k = 1, \cdots, n, (m, n > 1)$,则

$$\prod_{j=1}^{m}\left(1 - \prod_{k=1}^{n} a_{jk}\right) + \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \prod_{j=1}^{m} b_{jk}\right) > 1. \tag{31.2}$$

见 SIAN Review,1968,10:107 - 108;1969,1:402 - 406.(31.2)式可用数学归纳法证明.2000 年石焕南用概率方法给出了一个新的简洁的证明.见[351]2000,5 - 6;14.

32.(1) **对称函数不等式**:设 $0 < x, y \leqslant 1/2$,p 为实数,则

$$\frac{(1-x)^p + (1-y)^p}{x^p + y^p} \leqslant \left(\frac{(1-x)(1-y)}{xy}\right)^{p/2}.$$

仅当 $p = 0$ 或 $x = y$ 时等号成立.

(王鹏飞,王挽澜,成都科技大学学报 1985,2:87 - 91)1987 年,黄践将上述不等式推广到锥上双正齐胜泛函上去,见[356]1987,2:10 - 15.

(2) **祁锋不等式**:设 $p, q \geqslant 0, 0 < x < y$,则

$$\frac{y^{p+q} - x^{p+q}}{y^p - x^p} \geqslant \frac{p+q}{p}(xy)^{q/2}.$$

而当 $p, q \geqslant 1, 0 < x < y$ 时,上式可改进为

$$\frac{y^{p+q} - x^{p+q}}{y^p - x^p} \geqslant \frac{p+q}{p}\left(\frac{x+y}{2}\right)^q.$$

见[301]1997,211(2):616 - 620.

(3)　设 $0 < x < y < 1$ 或 $1 < x < y$,则

$$\frac{y^y}{x^x} < \left(\frac{y}{x}\right)^{xy};\frac{y^x}{x^y} < \frac{y}{x} < \frac{y^{x^y}}{x^{y^x}}.$$

见[304]2000,1(2) 和[305]1995,102(8):746.

(4)　设 $0 < x,y < 1$,则

$1 + xy < x^y + y^x$.

提示:固定 y,令 $f(x) = x^y + y^x - 1 - xy$,问题变成要证 $f(x) > 0$.可用反证法,详见[345]1988,11:32.

(5)　设 $x,y > 0$,则

$x^y + y^x > 1$.

证　因为 $x \geqslant 1$ 或 $y \geqslant 1$ 时,不等式显然成立,所以,不妨设 $0 < x,y < 1$,令 $y = tx$.由对称性,只考虑 $0 < t \leqslant 1$,由于 x^x 在 $x = 1/e$ 时取得最小值 $x_0 = e^{-\frac{1}{e}}$,且 $t^x \geqslant t$,所以,

$$f(x) = x^y + y^x = x^{tx} + (tx)^x = (x^x)^t + t^x \cdot x^x \geqslant x_0^t + t \cdot x_0 \overset{\triangle}{=} g(t).$$

而 $g(t)$ 在 $t_0 = 1 - e < 0$ 时有惟一的极小值.从而 g 在 $t > t_0$ 时递增,又 $f(0) = 1, f(1) = 2t_0 > 1$,于是 $g(t) > 1$,所以 $f(x) > 1$.证毕.其他证法见[4]P384.

(6)　设 $0 < a < b$,若 $a + b > 1$,或 $e^{-1} < a < b$,则

$$a^a < b^b.$$

提示:利用 $f(x) = x^x$ 在 $x > e^{-1}$ 时的严格递增性.

(7)　[MCU].设 $0 < a < b$,则 $a^{b^a} < b^{a^b}$.　(32.1)

证　先设 $b > a > 1$,对所证不等式两边两次取对数后变成

$\ln\ln a + a\ln b < \ln\ln b + b\ln a$.

令 $x = \dfrac{\ln b}{\ln a}, y = \ln a$,则 $x > 1, y > 0$.再令 $f(x,y) = xe^y - e^{xy}$.于是只要证

$\ln x > yf(x,y)$.　(32.2)

因为 $f'_y(x,y) = xe^y - xe^{xy} < 0$.所以,$f(x,y) < f(x,0) = x - 1$.

①　若 $f(x,y) \leqslant 0$,则(32.2)式显然成立;

②　若 $f(x,y) > 0$,即 $x - e^{(x-1)y} > 0$.从而 $\ln x > (x-1)y > yf(x,y)$.

若将条件放宽为 $b > a > 0$,结论仍成立,但证明方法不同,见[305]1990,97(4):346.

(8)　**a^b 与 b^a 大小的比较**:设 a,b 为正数,若 $1 < a < e$,λ 是函数方程 $a^x = x^a$ 的实根,且 $\lambda > e$,则

①　若 $0 < a < b < e$,或 $0 < a \leqslant 1 < b$,或 $1 < a < e < b < \lambda$,则 $a^b < b^a$;

②　若 $e < a < b$ 或 $1 < a < e < \lambda < b$,则 $a^b > b^a$.

由此推出,设 $0 < x < \infty, x \neq e$,则 $x^e < e^x$,特别 $\pi^e < e^\pi$.

2001 年,文家金等对于幂平均 $M_p(a,b) = [\frac{1}{2}(a^p + b^p)]^{1/p}$　$(p \neq 0)$(见第 1 章

§3(3.43))证明：

设 $1 < a < e < b$，若 $M_0(a,b) \leqslant e$，则 $a^b < b^a$.

若 $M_{-1}(a,b) \geqslant e$，则 $a^b > b^a$. 见"大学生数学通讯"(重庆师院)1997.2.

33. [MCM] 设 $x,y,z \geqslant 0$，且 $x+y+z=1$，则

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant 7/27.$$

证 记 $f(x,y,z) = xy + yz + zx - 2xyz$，不妨设 $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$，由 $x+y+z=1$ 得，$z \leqslant 1/3$，$x+y \geqslant 2/3$，从而 $2xyz \leqslant (2/3)xy \leqslant xy$，于是 $f(x,y,z) \geqslant 0$. 为证 $f(x,y,z) \leqslant 7/27$，可令 $x+y = 2/3 + r$，则 $z = 1/3 - r$，$0 \leqslant r \leqslant 1/3$，再利用 $xy \leqslant [(x+y)/2]^2 = (1/3 + r/2)^2$ 即可得证.

推广：(1) 设 x,y,z,α,β 均为非负实数，且 $x+y+z=\alpha$，$0 \leqslant \alpha\beta \leqslant 9/4$，则

$$xy + yz + zx - \beta xyz \leqslant (9 - \alpha\beta)\alpha^2/27,$$

仅当 $x = y = z = \alpha/3$ 时等号成立.

(2) 设 n 个非负数 x_k 之和为 α，则

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} x_k\Big) - [(n-1)/\alpha]\prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant (n^2 - n + 1)\alpha^{n-1}/n^n.$$

(3) 设 $x,y,z \geqslant 0$，$x+y+z=1$，令 $S = xy + yz + zx - \beta xyz$，

当 $0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{9}{4}$ 时，$0 \leqslant S \leqslant \dfrac{9-\beta}{27}$； 当 $\dfrac{9}{4} \leqslant \beta \leqslant 9$ 时，$0 \leqslant S \leqslant \dfrac{1}{4}$；

当 $\beta > 9$ 时，$\dfrac{9-\beta}{27} \leqslant S \leqslant \dfrac{1}{4}$.

提示：用拉格朗日乘子法，令 $f(x) = \sum xy - \beta\prod x + \lambda(\sum x - 1)$.

34. 设 a,b,c 是不全等的正数. 下面利用"符号说明"中的循环和、积的缩写记号，如 $\sum a$ 表示 $a+b+c$. $\sum ab$ 表示 $ab+bc+ca$，$\prod a$ 表示 abc，$\prod(ab)$ 表示 $(ab)(bc)(ca)$ 等等.

(1) 1990 年，宋庆证明了下述不等式链：

$$\frac{9}{\sum a^{-2}} < \frac{27}{(\sum \frac{1}{a})^2} < \frac{9\prod a}{\sum a} < \frac{3\sqrt{3}\prod a}{(\sum ab)^{1/2}} < \frac{9\prod a}{\sum \sqrt{ab}} < 3(\prod a)^{2/3} < \sum a\sqrt{bc}$$
$$< \sqrt{3(\prod a)(\sum a)} < \sum ab < \frac{1}{2}\sum (a+b)\sqrt{ab} < \frac{1}{3}(\sum a)^2 < \frac{1}{3}(\sum \sqrt{a})(\sum a\sqrt{a}) < (\sum a)\frac{\sum a\sqrt{a}}{\sum \sqrt{a}} < \sum a^2.$$

(见[348]1990，12：17－19)

(2) $\sum ab < \sum (a+b-c)^2$.

(3) $\left(\dfrac{\sum a}{\prod a}\right)^{1/2} < \sum ab < \sqrt{3}\sum \dfrac{bc}{a}$.

(4) [MCM]. $\sum a^2 < \sqrt{(\sum a)(\sum a^3)}$；若 $\sum a = 1$，则 $\sum a^2 + 2\sqrt{3\prod a} \leqslant 1$.

(5) [MCM]. $\sum a^3 > 3\prod a + \sum (a+t)(b-c)^2$. 式中 $2t = \min\{a,b,c\}$；

(6) $3\prod a < \frac{1}{3}(\sum a)(\sum ab) < \frac{3}{8}\prod(a+b) < \frac{1}{9}(\sum a)^3 <$

$< \frac{1}{3}(\sum a)(\sum a^2) < \sum a^3.$

(7) $2\sum a^3 > \sum a^3 + 3abc > \sum ab(a+b)$;

(8) $27\prod a < (\sum a)^3 < 9\sum a^3$;

(9) $(\prod a)(\sum a) < \sum(ab)^2 < 1/2\sum a^3(b+c) < \sum a^4$;

(10) $\sum a^5 > (\prod a)(\sum a^2)$;

(11) $(\sum a)^5 - \sum(b+c-a)^5 > 80(\prod a)(\sum ab)$;

(12) [MCU]. $abc^3 < 27(1/5\sum a)^5$.

提示:考虑 $f(x,y,z) = \ln(xyz^3)$ 在区域 $D = \{(x,y,z): \sum x^2 = 5r^2\}$ 上的极大值,式中 x,y,z 均为正数.

(13) [MCU]. 设 $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 4$,令

$$f(a,b,c) = (a-1)^2 + (\frac{b}{a}-1)^2 + (\frac{c}{b}-1)^2 + (\frac{4}{c}-1)^2,$$

则 $f(a,b,c) \geqslant 4(\sqrt{2}-1)^2$. 仅当 $a=\sqrt{2}, b=2, c=2\sqrt{2}$ 时等号成立.

提示:设 $0<p<q, p\leqslant x\leqslant q$,求 $f(x) = (\frac{x}{p}-1)^2 + (\frac{q}{x}-1)^2$ 在 $[p,q]$ 上的极值.

(14) $3\min\{a,b,c\} < (\sum a) - (\sum a^2 - \sum ab)^{1/2} <$

$< \sum a + (\sum a^2 - \sum ab)^{1/2} < 3\max\{a,b,c\}$;

若加上条件:$b^2 - 4ac \geqslant 0$,则

$$\frac{9}{4}\min\{a,b,c\} \leqslant \sum a \leqslant \frac{9}{4}\max\{a,b,c\}.$$

见[38]P430 B3 - 059.

(15) [MCM]. $\sqrt{\prod(a+b)} < \sum\sqrt{ab(a+b)}$;

(16) 设 $a \neq b$,则

$$(\frac{a}{b})^b < \left(\frac{a+c}{b+c}\right)^{b+c}.$$

提示:证明 $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$ 在 $[0,\infty)$ 上严格递增.

(17) 设 $\sum a = 1$,则 $n \geqslant 2$ 时,

$$2 + \sqrt[n]{5} < \sum\sqrt[n]{4a+1} < 3^{1-\frac{1}{n}} \times 7^{1/n}.$$

其中上界估计由石焕南给出,见[351]2001,2,P7.

(18) [MCM]. 设 $\sum a = 1$,则 $\prod(1+a) \geqslant 8\prod(1-a)$. 见[38]$P445\ B3-085$.

(19) 设 $1/4 \leqslant t \leqslant 1$,则

$$\sum\frac{a}{a+tb+c} \leqslant \frac{3}{2+t};$$

若 $0 \leqslant t \leqslant 9/8$,则

$$\sum \frac{a}{a + tb + (c/2)} \leqslant \frac{3}{t + 3/2};$$

(刘保乾提出,陈胜利证明,见[351]2001,2,P7 - 8)

若 $0 \leqslant t \leqslant 1$,则

$$\sum \frac{a}{ta + b + c} \geqslant \frac{3}{t + 2}.$$

(褚小光,吴云辉,[351]2001,2:9)

但又已知 $\sum \frac{a}{2a + b + c} \leqslant \frac{3}{4}$(宿晓明).因此,我们可以进一步问:在 t_1, t_2, t_3 满足什么条件下,

$$\sum \frac{a}{t_1 a + t_2 b + t_3 c}$$

的上下界是什么?更进一步,其最优上下界是什么?2003 年肖振纲、张志华证明:设 t_k 不全为零,且 $t_2 + t_3 > 2t_1$,则

$$\sum \frac{a}{t_1 a + t_2 b + t_3 c} \geqslant \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

仅当 $t_1 = t_2 = t_3$ 或 $a = b = c$ 时等号成立.见"福建中学数学"2003,5:18 - 19,21.

(20)
$$\sum \frac{a^p}{b + c} \geqslant \frac{1}{2} \times 3^{2-p}\left(\sum a\right)^{p-1}, p \geqslant 1,$$

仅当 $a = b = c$ 时等号成立.

证 可用切比雪夫不等式和凸函数不等式,也可用等比级数求和公式和 C_p 不等式.不妨设 $\sum a = 1$ 则

$$\sum \frac{a^p}{b + c} = \sum \frac{a^p}{1 - a} = \sum a^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum a^{p+k-1}\right)$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{p+k-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{p-2}.$$

特别,当 $p = 1$ 时,得到[IMO]:

$$\sum \frac{a}{b + c} > \frac{3}{2}.$$

若 $p = 2$,且 $0 < m \leqslant a, b, c \leqslant M$,则

$$\frac{1}{2}\sum a < \sum \frac{a^2}{b + c} < \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{m + M} + \frac{m + M}{2m} - 1\right)\left(\sum a\right).$$

2001 年刘会成进一步证明,若 $\prod a = 1$,则

$$\sum \frac{a^p}{b + c} \geqslant \frac{3}{2}$$

的充要条件是 $p^2 + p - 2 \leqslant 0$ 即 $p \geqslant 1$ 或 $p \leqslant -2$($p = -3$ 时为 36 届 IMO).用级数展开式时,就不能再设 $\sum a = 1$,我们记 $S = \sum a$,则 $S \geqslant 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

若 $p \geqslant 1$,则

$$\frac{a^p}{b + c} = \frac{a^p}{S - a} = \frac{a^p}{S} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{S}\right)^k.$$

于是

$$\sum \frac{a^p}{b+c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{p+k}+b^{p+k}+c^{p+k}}{S^{k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^{k+1} 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{p+k} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2},$$

仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

若 $p \leqslant -2$,则令 $a_1 = 1/a, b_1 = 1/b, c_1 = 1/c$ 转化为 $p \geqslant 1$ 的情形.

进一步的推广是:设 $\prod a = 1$, p, q 为实数,则

$\sum \frac{1}{a^p(b^q+c^q)} \geqslant \frac{3}{2}$ 的充要条件是 $p^2 - pq - 2q^2 \geqslant 0$.(见[345]2001,12:18－19)

(21)　$\sum \frac{a+b}{c} > 4\sum \frac{a}{b+c} > 6$;　$\sum \sqrt{\frac{a}{b+c}} > 2$.

(22)　$\sqrt{(\sum a^2)+2} < \sum a < \sum \frac{ab}{c}$;

(23)　$(\sum \frac{a}{b})(\sum \frac{b}{a}) > 9$;

(24)　**Carlson 不等式:**

$$\left(\frac{1}{3}\sum ab\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\prod (a+b)\right)^{1/3}.$$(见[10]P.310－311)

(25)　**Janous 猜想:** $\sum \frac{a^2-c^2}{b+c} > 0$.

为此,黄启林给出了五种不同的证明,并进一步改进和推广为:

$$\sum \frac{a^2-bc}{b+c} > 0;\ \sum \frac{a^m-c^m}{b^n+c^n} > 0\quad (m,n \in N);$$

当 $pq>0$ 时 $\sum \frac{a^p-c^p}{(b+c)^q} > 0$,而当 $pq<0$ 时不等号反向.(见[348]2000,3:44－46).

(26)　[MCM]. $\prod(a+b-c) < \prod a$.

令 $2x = b+c-a, 2y = c+a-b, 2z = a+b-c$.得到

$$8\prod x < \prod(x+y) < \frac{8}{3}(\sum x^3).$$

(27)　$\sum (\frac{a}{b}) < \sum \left(\frac{b}{a}\right)^3$; $\prod \left(\frac{a}{b}\right)^{b/a} < 1 < \prod \left(\frac{a}{b}\right)^{a/b}$;

提示:利用 $x>0$ 时,$x^{(1/x)-1} \leqslant 1 \leqslant x^{x-1}$.

(28)　若 $a>b>c>0$,则 $\sum \frac{a}{b} > 3$;

$$\prod a^b < \prod b^a < \prod a^a;\ \prod a^{b+c} < \left(\prod a^a\right)^2;$$

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a < \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b;\quad \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c} > \frac{4}{a-c}$$

(29)　[MCM]. $\prod a^b < (\prod a)^{\frac{1}{3}\sum a} < \left(\frac{1}{3}\sum a\right)^{\sum a} < \prod a^a < \left(\frac{\sum a^2}{\sum a}\right)^{\sum a}$.

(30)　$(\sum a)^{\sum a}(\prod a^a) < \prod (a+b)^{a+b}$.

(31)　[MCM].设非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c \leqslant 3$,则

$$\sum\frac{a}{1+a^2}\leqslant\frac{3}{2}\leqslant\sum\frac{1}{1+a}.$$

见[38]P.473.B3－133.

(32) [MCM]. $\sum\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{1}{\prod a}$.

2000年,王林全等用变形技巧给出了一简捷的证明:

因为 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant(a+b)ab$,所以,

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{abc}{(a+b)ab+abc}=\frac{c}{a+b+c},$$

于是 $$\sum\frac{abc}{a^3+b^3+abc}\leqslant\sum\frac{c}{a+b+c}=1.$$

(见"中学数学思想方法概论",广州:暨南大学出版2000年,P328)

(33) $\sum\left(\frac{2}{a+b}\right)^n\leqslant\sum\frac{1}{a^n},(n\in N)$.

(34) 设 $pq\geqslant0$,则

$$\sum a^p(a^q-b^q)>0,$$

当 $pq\leqslant0$ 时不等号反向.(罗南星,[348]2000,9:29)

35. 2001年马统一证明:设 $0<a,b,c<1/2,\sum a=1$,则

$$\sum\frac{ab}{(1-2a)(1-2b)}\geqslant\sum\frac{a}{1-2a}\geqslant\sum\frac{1-2a}{a}\geqslant\sum\frac{(1-2a)(1-2b)}{ab}\geqslant3.$$

仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立.并提出猜想:设 $0<x_k<\frac{1}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=1,n\geqslant3$,则

$$\sum\frac{x_2x_3\cdots x_n}{(1-2x_2)(1-2x_3)\cdots(1-2x_n)}\geqslant(n-2)^{2-n}\sum\frac{x_1}{1-2x_1}\geqslant(n-2)^{-n}\sum\frac{1-2x_1}{x_1}$$
$$\geqslant(n-2)^{2(1-n)}\sum\frac{(1-2x_2)(1-2x_3)\cdots(1-2x_n)}{x_2x_3\cdots x_n}\geqslant\frac{n}{(n-2)^{n-1}}.$$

仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1/n$ 时等号成立.

36. 设 $0<a,b,c<1$,则

$$\sqrt{\sum a^2}+\sum\sqrt{a^2+b^2+(1-c)^2}+\sum\sqrt{a^2+(1-b)^2+(1-c)^2}$$
$$+\sqrt{\sum(1-a)^2}\geqslant4\sqrt{3}.$$

提示:构造边长为1的立方体,使得各棱的长度分为 $a,1-a,b,1-b,c,1-c$,于是分成8个小长方体,再考虑每个小长方体对角线的长,然后相加.

37. [MCM].设 $0\leqslant a,b,c\leqslant1$,则

$$\sum\frac{a}{b+c+1}+\prod(1-a)\leqslant1.$$

证 若直接通分,就会把问题弄得很复杂.不妨设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant1$.于是,不等式左边 $\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}+\prod(1-a)=1-\frac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]$.再注意 $(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)=(1-a^2)(1-b^2)\leqslant1$,不等式即可得证.特别地,若 $\sum a=1$,则

$$\frac{41}{135}\leqslant\sum\frac{a}{b+c+1}-\prod(1-a)\leqslant 1.$$

推广： 设 $0\leqslant a_k\leqslant 1, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, n\geqslant 2$，则

$$\frac{1}{2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+S_n-a_k}+\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\leqslant 1.$$

证 $1-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+S_n-a_k}-\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+S_n-a_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_n}(1-a_k)\prod_{j\neq k}(1-a_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(1-a_k)}{S_n(1+S_n-a_k)}[1-(1+S_n-a_k)\prod_{j\neq k}(1-a_j)]$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(1-a_k)}{S_n(1+S_n-a_k)}[1-\frac{1}{n}(1+S_n-a_k+1-a_1+\cdots+1-a_n)]=0.$$

左边不等式的证明见[350]1993,5:40.

38. 设 $\sum a>0$，则

$$\sum\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2}(\sum a).$$

提示：可用复数不等式：$|z_1+z_2+z_3|\leqslant|z_1|+|z_2|+|z_3|$. 式中 $z_1=a+ib, z_2=b+ic, z_3=c+ia$. 还可构造直角三角形，用勾股定理证明.

推广： 设 $\sum_{k=1}^{n}a_k>0$，记 $a_{n+1}=a_1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+a_{k+1}^2)^{1/2}\geqslant\sqrt{2}(\sum_{k=1}^{n}a_k).$$

39. 设 a,b,c 为实数，$a\neq b$，则

$$\sqrt{(a-c)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-c)^2}>\sqrt{2}|a-b|.$$

提示：可用解析几何方法证明，在平面直角坐标系中，取点 $P_1(a,b)$，$P_2(b,a)$，$P_3(c,0)$. 利用不等式 $|P_1P_2|<|P_1P_3|+|P_2P_3|$ 即可得证.

40. [MCU]. 设 a,b,c 是不全为零的整数，且每一个的绝对值均小于 10^6，则

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>10^{-21}.$$

证 令 $f_1=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$. 令 f_2,f_3,f_4 为形如 $a\pm b\sqrt{2}\pm c\sqrt{3}$ 的另外三数. 利用 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 的无理性以及 a,b,c 不全为零的条件，易证所有 f_k 都不为零，且 $f=\prod_{k-1}^{4}f_k$ 为整数，从而 $|f|\geqslant 1$. 再由 $|f_k|<10^7$，即可得出 $|f_1|\geqslant|f_2f_3f_4|^{-1}>10^{-21}$. (见[66]P.484, 487)

杨克昌通过构造新的无理数，即当 b,c 不同时为零时，记 $g_1=f_1^2, g_2=f_3f_4, g_3=f_4f_2, g_4=f_2f_3, g=g_1g_2g_3g_4$，仍有 $|g|\geqslant 1$，得到一个改进结果.

$$|f_1|>10^{-18}[(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})]^{-1}>10^{-20}.$$

见[99]5, P.26－36.

我们进一步问:在所给条件下,$|f_1|$ 和 $|\sum_k \sqrt{k}a_k|$ 的最优下界是什么?

41. **Oppenheim 不等式**:设 a,b,c 为正数,且

(1) $\min\{a,b,c\} < x,y,z < \max\{a,b,c\}$. (41.1)

(2) $\sum a \leqslant \sum x$, (41.2)

则 (3) $\prod a \leqslant \prod x$; (41.3)

(4) $\sum ab \leqslant \sum xy$. (41.4)

反之,若(41.3)中不等号反向,则(41.2)式中不等号也反向;而且还成立:

(5) $\sum a^p \geqslant \sum x^p$. $(p > 0)$;

若(41.4)中不等号反向,则(41.2)中不等号也反向.以上均仅当 a,b,c 按某一顺序分别等于 x,y,z 时等号成立,证明及其推广见[325]1965,49:160 - 162,和[331]1968,210 - 228:21 - 24 等.

42. 设 a,b,c 为任意实数,则

$$\sum(1+a^2)^2(1+b^2)^2(a-c)^2(b-c)^2 \geqslant 2[\prod(1+a^2)][\prod(a-b)^2].$$

见[305]1988,95(2),E3074.

43. [MCM].设实数 a,b,c 满足 $\sum a^2 = 1$,则

$$-1/2 \leqslant \sum ab \leqslant 1.$$

提示:利用不等式:$-\sum a^2 \leqslant 2\sum ab \leqslant 2\sum a^2$.

推论 设 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$,则 $-\frac{1}{2}S_n \leqslant \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^n a_j a_k \leqslant S_n$.

44. [MCU].设实数 a,b,c 中任意两数之和大于 3,则

$$(\sum a^3) + (\prod a) < \frac{2}{3}(\sum a)(\sum a^2).$$

提示:作代换:$2x = b+c-a$, $2y = c+a-b$, $2z = a+b-c$.

45. [MCM].设 a,b,c 满足 $\sum a > 0$, $\prod a > 0$.则 $\sum a^n > 0$.

46. **Schur 不等式**:设 x,y,z 是正数,α 为实数,则

$$\sum x^\alpha(x-y)(x-z) \geqslant 0, \tag{46.1}$$

仅当 $x = y = z$ 时等号成立.

Schur 不等式已有许多推广,例如:

(1) 设 $a_k,b_k(1\leqslant k\leqslant 3)$ 均为正数,并且

$$a_1^{1/p} + a_3^{1/p} \leqslant a_2^{1/p}; \tag{46.2}$$

$$b_1^{\frac{1}{p+1}} + b_3^{\frac{1}{p+1}} \geqslant b_2^{\frac{1}{p+1}}. \tag{46.3}$$

则当 $p > 0$ 时,成立

$$b_1a_2a_3 - b_2a_3a_1 + b_3a_1a_2 \geqslant 0. \tag{46.4}$$

若 $-1 < p < 0$ 则(46.3)与(46.4)式反向;若 $p < -1$,则(46.2)与(46.3)式反向.

在所有情形下,仅当(46.2)与(46.3)式中等号成立且

$$\frac{a_1^{p+1}}{b_1^p}=\frac{a_2^{p+1}}{b_2^p}=\frac{a_3^{p+1}}{b_3^p}$$

时(46.4)式中等号成立.

(2) 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)\right)$,对递减实数列 $\{x_k\}_{k=1}^n$,$S_n\geqslant 0$ 的充要条件是:

① $n=3$ 时是 $a_1\geqslant 0$,$a_2\leqslant(a_1^{1/2}+a_3^{1/2})^2$,$a_3\geqslant 0$; ② $n\geqslant 4$ 时是 $a_2\leqslant a_1$,$(-1)^n(a_{n-1}-a_n)\geqslant 0$,$(-1)^{k+1}a_k\geqslant 0$,$1\leqslant k\leqslant n$,$k\neq 2$,$k\neq n-1$.

证明及参考文献见[4]P157 - 161.

(3) 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$,且 $a_1\geqslant 0$,$a_3\geqslant 0$,$a_2\leqslant(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3})^2$,则

$$\sum b_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)>0,\text{(陈胜利)}$$

47. [MCM]. $\sum a(x-y)(x-z)\geqslant 0$,对任意实数 x,y,z 均成立的充要条件是 a,b,c 均非负且满足 $\sum a^2\leqslant 2\sum ab$.

48. 设 x,y,z 为实数,则

$$xy+2yz\leqslant(\sqrt{5}/2)(x^2+y^2+z^2).$$

证 引入待定参数 $\lambda_1,\lambda_2>0$,使得

$$xy+2yz\leqslant\frac{1}{2}(\lambda_1x^2+\frac{1}{\lambda_1}y^2)+\lambda_2y^2+\frac{1}{\lambda_2}z^2=\frac{1}{2}\lambda_1x^2+(\frac{1}{2\lambda_1}+\lambda_2)y^2+\frac{1}{\lambda_2}z^2.$$

令 $\frac{1}{2}\lambda_1=\frac{1}{2\lambda_1}+\lambda_2=\frac{1}{\lambda_2}$,得 $\lambda_1=\sqrt{5}$,$\lambda_2=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 于是 $xy+2yz\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}\sum x^2$. 证毕. 见[345]1991,4:48

49. 设实数 a,b,c,d 不同时为零,则

$$\frac{ab+2bc+dc}{\sum a^2}\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}<\frac{5}{4}.$$

提示:引入正的参数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 作为待定系数:$(\lambda_1a)^2+b^2\geqslant 2\lambda_1ab$, $(\lambda_2b)^2+c^2\geqslant 2\lambda_2bc$, $(\lambda_3c)^2+d^2\geqslant 2\lambda_3cd$. 变形相加得到

$$\frac{\lambda_1}{2}a^2+(\frac{1}{2\lambda_1}+\lambda_2)b^2+(\frac{1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_3}{2})c^2+\frac{1}{2\lambda_3}d^2\geqslant ab+2bc+cd.$$

令 $\frac{\lambda_1}{2}=\frac{1}{2\lambda_1}+\lambda_2=\frac{1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_3}{2}=\frac{1}{2\lambda_3}$,解得 $\lambda_1=\sqrt{2}+1$. 而上界 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 在 $a=d=1$,$b=c=1+\sqrt{2}$ 时取得.

50. 设 $a,d\geqslant 0$,$b,c>0$ 满足 $b+c\geqslant a+d$,则

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

仅当 $a=\sqrt{2}+1$,$b=\sqrt{2}-1$,$c=2$,$d=0$ 时等号成立.

提示:注意变形技巧:不妨设 $a+b\geqslant c+d$,则 $b+c\geqslant\frac{1}{2}\sum a$. 从而

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\geqslant\frac{\sum a}{2(c+d)}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a+b}{2(c+d)}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

51. [MCM].(1) 设 $a,b,c,d>0$,并记 $S=\sum\frac{a}{a+b+d}$,则 $1<S<2$.

证　$S<\sum\frac{a}{a+b}=2$.另一方面,$S>\sum\frac{a}{a+b+c+d}=1$.

注意:若引入新的变量作变形,$S>1$ 可改进为 $S>\frac{4}{3}$,即令 $x=b+c+d,y=c+d+a,z=d+a+b,u=a+b+c$,则

$$a=\frac{1}{3}(y+z+u-2x),\ b=\frac{1}{3}(z+u+x-2y),$$

$$c=\frac{1}{3}(u+x+y-2z),\ d=(x+y+z-2u).$$

然后利用 $x+1/x>2$,得到

$$S=\frac{1}{3}\left[\sum\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)-8\right]>\frac{1}{3}(6\times2-8)=\frac{4}{3}.$$

(2)　设 a,b,c,d 均为非零实数,记

$$\sigma=\sum\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

则　$1<\sigma<2$.

(3)　设 a,b,c,d 为非负实数且 $\sum ab=1$,则

$$\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geqslant\frac{1}{3}.$$

见[38]$P.478\ B3-141$.

52. [MCM].给定五个实数 a_k,总可找到五个实数 x_k,使得 a_k-x_k 恒为自然数,且

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant5}(x_j-x_k)^2<4.$$

施咸亮用抛物线技巧和抽屉原理给出了两种证法,详见娄志渊等,高中数学竞赛十八讲,浙江教育出版社,1989.

53. [MCM].设 $x_k>0,k=1,2,\cdots,5$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{5}x_k\right)^2\geqslant4\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{5}x_jx_k.$$

推广:　$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\geqslant c_n\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{n}x_jx_k$.式中 $c_2=2,c_3=3,n\geqslant4$ 时,$c_n=4$.

提示:用数学归纳法证明:若 x_n 是 $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 的最小值.令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$.则

$$S_n^2-S_{n-1}^2\geqslant4(-x_1x_{n-1}+x_1x_n+x_{n-1}x_n).$$

54.　设 $x_k(1\leqslant k\leqslant6)$ 为实数,则

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^2 - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{6} x_j x_k \geqslant \sqrt{3}\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & 1 \\ x_2 & x_5 & 1 \\ x_3 & x_6 & 1 \end{vmatrix}.$$

提示:用解析几何方法,设(x_1,x_4),(x_2,x_5),(x_3,x_6)是以a,b,c为边,面积为S的三角形的三顶点,则上述不等式等价于三角形不等式中的 Weitzenböck 不等式:

$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$. (见第四章 §1.一.N.1)

55. 设a,b,c,x,y,z为任意正数,则

$$\left(\frac{x}{a}\right)^a\left(\frac{y}{b}\right)^b\left(\frac{z}{c}\right)^c \leqslant \left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

提示:求$f(x,y,z) = x^a y^b z^c$在条件$x^p + y^p + z^p = 1$下的最大值,其中$p > 0$.

56. [MCU]. 设$a_k(1 \leqslant k \leqslant n)$为实数. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. 令$e_0 = 0, e_n = \exp e_{n-1}$,则

$$\sum_{k=1}^{n}(1 - a_k)\exp S_k \leqslant e_n.$$

仅当$a_n = e_0, a_{n-1} = e_1, \cdots, a_1 = e_{n-1}$时等号成立.

$n = 5$时即为21届普特南数学竞赛试题.

提示:利用不等式:$(1 - x + a)e^x \leqslant e^a$.

见[66]P297,301 - 302,和[305]1982,89:453 - 454.

57. [MCU]. 设实数$a_k(1 \leqslant k \leqslant n)$满足:

$$M + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2. \ (n > 1).$$

则$M < 2a_j a_k(1 \leqslant j < k \leqslant n)$.

提示:用 Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_j a_k\right).$$

于是

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_j a_k.$$

由假设

$$M < -\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant 2a_j a_k.$$

58. [MCM]. **Chebyshev 不等式**:设$a_1 < a_2 < \cdots < a_n, b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, $(n \geqslant 2)$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) < n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right).$$

提示:$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{j\neq k} a_j b_k$.注意到

$a_j b_k + a_k b_j = = (a_j b_j + a_k b_k) - (a_j - a_k)(b_j - b_k) < a_j b_j + a_k b_k$.

而$\sum_{j\neq k}a_jb_k$中有$n(n-1)$项.于是$\sum_{j\neq k}a_jb_k<(n-1)\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$.见[38]P409.

59.　[MCM].设x_k为n个实数.$A_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$,则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+e^{x_k})\geqslant[1+\exp A_n(x)]^n.$$

仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时等号成立.

60.　[MCM].设$b_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j,1\leqslant k\leqslant n,f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k-x)^2,g_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$,则$g_n\leqslant f_n(b_n)\leqslant 2g_n$.

提示:注意到关系式$f_n(x)=n(x-b_n)^2+f_n(b_n)$,并利用数学归纳法.详见[38]P419.B3－038.

61.　(1)[MCM].设$0\leqslant a_k\leqslant 1,1\leqslant k\leqslant n$,则

$$(1+\sum_{k=1}^{n}a_k)^2\geqslant 4\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

(2)　**华罗庚不等式**:设a_k为实数,$p,q>0$,则

$$(p-\sum_{k=1}^{n}a_k)^2+q(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)\geqslant\frac{qp^2}{n+q},$$

仅当$a_1=\cdots=a_n=\frac{qp}{n+q}$时等号成立.

(转引[301]1995.196(3):1135－1138;原文见华罗庚“堆垒数论”)

1992年,王中烈借助动态规划法将华罗庚不等式中的指数2换成r,即

设$r>1,a_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant p$,则

$$(p-\sum_{k=1}^{n}a_k)^r+q^{r-1}(\sum_{k=1}^{n}a_k^r)\geqslant(\frac{q}{n+q})^{r-1}p^r.$$

而当$0<r<1$时不等号反向,仅当$a_1=\cdots=a_n=\frac{qp}{n+q}$时等号成立,见[301]1992,166:345－350.当$r<0,a_k>0,\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant p$时,Pearce,C.E.M.Pecaric,J.E.和王挽澜等各自用不同的方法证明了相应的不等式,以后,又有许多作者将其推广到复数域和抽象空间中,详见罗钊与王挽澜的综合报告:“关于华罗庚的一个不等式”(2000年12月在“纪念华罗庚九十诞辰国际数学会议”上的报告).

62.　设n个实数x_j满足$\sum_{j=1}^{n}x_j^2=1$,则对任一自然数$k>1$,存在不全为零的整数a_j,$|a_j|\leqslant k-1$,$(1\leqslant j\leqslant n)$,使得

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.\tag{62.1}$$

证　由条件和柯西不等式,有$\sum|x_j|\leqslant n^{1/2}(\sum|x_j|^2)^{1/2}=\sqrt{n}$.又由$|a_j|\leqslant k-1$可知,整数$|a_j|$只可能是$0,1,\cdots,k-1$,在这$k$个数中任取$n$个(可重复选取),记为

$b_1,b_2,\cdots,b_n$，从而 $0\leqslant b_j\leqslant k-1$，于是，

$$\sum b_j\mid x_j\mid\leqslant(k-1)\sum\mid x_j\mid\leqslant(k-1)\sqrt{n}. \tag{62.2}$$

将区间 $[0,(k-1)\sqrt{n}]$ 等分成 k^n-1 个小区间，每个小区间的长度为 $(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$. 而从不大于 $k-1$ 的 k 个非负整数中任取 n 个的重复排列数是 k^n，所以满足(62.2)式的 $\sum b_j\mid x_j\mid$ 至多有 k^n 个值，由抽屉原理，当 $\sum b_j\mid x_j\mid$ 的 k^n 个值都不相同时，必有两个(不同的) $\sum b_j\mid x_j\mid$ 和 $\sum b'_j\mid x_j\mid$ 落在同一小区间上(包括区间端点)，从而

$$\left|\sum b_j\mid x_j\mid-\sum b'_j\mid x_j\mid\right|\leqslant(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1). \tag{62.3}$$

若 $\sum b_j\mid x_j\mid$ 有取值相等的，则(62.3)式左边为零，即(62.3)式仍成立. 所以，令 $a_j=b_j-b'_j(1\leqslant j\leqslant n)$，便得(62.1)式.

63.　**Abel 不等式**：(1) 设 $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant0$，记

$S_k=\sum\limits_{j=1}^{k}a_j,m=\min\{S_1,\cdots,S_n\},M=\max\{S_1,\cdots,S_n\}$，则

$$mb_1\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant Mb_1.$$

证　利用分部求和公式：

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1}),$$

将　$m(b_k-b_{k+1})\leqslant S_k(b_k-b_{k+1})\leqslant M(b_k-b_{k+1}).\ k=1,\cdots,n-1$ 以及 $mb_n\leqslant S_nb_n\leqslant Mb_n$ 相加即可得证.

(2)　若 a_k,b_k 均为复数时，则

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\leqslant(\max_{n\leqslant k\leqslant m}\mid S_k\mid)\left(\sum_{k=n}^{m-1}\mid b_k-b_{k+1}\mid+\mid b_m\mid\right).$$

特别，若 $\{b_k\}$ 是正的递减数列，则

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\leqslant(\max_{n\leqslant k\leqslant m}\mid S_k\mid)\cdot b_n;$$

而当 $\{b_k\}$ 是正的递增数列时，有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\leqslant2b_m(\max_{n\leqslant k\leqslant m}\mid S_k\mid).$$

见[76]P.135 和[57]Vol.2.P.53.

(3)　设 $0\leqslant a_k\leqslant1,p\geqslant1,A_n(a)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}k^pa_k\geqslant(A_n(a))^{p+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^p\right),$$

仅当 $\forall a_k=1$ 时成立(Dragomir, S.S. 等) 见[301]1998,225(2):542－556：

(4)　设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,\sum\limits_{k=i}^{n}q_k\geqslant0,i=2,\cdots,n.\ Q_n=\sum\limits_{k=1}^{n}q_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\geqslant a_1Q_n+\left|\sum_{k=1}^{n}q_k\mid a_k\mid-\mid a_1\mid Q_n\right|.$$

(Dragornir, S. S. 等,见 Math, Commun, 1998, 3(1): 95 - 101).

64. **Meir 不等式**:设 $r \geqslant 1, s+1 \geqslant 2(r+1)$. $0 \leqslant p_0 \leqslant \cdots \leqslant p_n$, $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,且 $a_k - a_{k-1} \leqslant 1/2(p_k + p_{k-1})$, $k = 1, \cdots, n$,令

$\sigma_r(p,a) = \left[(r+1)\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^r\right]^{\frac{1}{r+1}}$,则 $\sigma_r(p,a) \geqslant \sigma_s(p,a)$.

特别地,当所有 $p_k = 1(k = 1, \cdots, n)$ 时,即得 Klamkin, M. S. 和 Mewman, D. J. 不等式. 见[305]1976, 83(1): 26 - 30.

65. [MCM]. 设 a_k 是 n 个正数,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sum_{j=1}^{k} a_j}\right) < 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

我们问:系数 2 是否还可改进?最佳常数是什么?

66. 设 $a_k, p > 0$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p+a_k} = S_n$, $0 < S_n < n$, $(n \geqslant 2)$,则

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \frac{npS_n}{n - S_n}$;

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant \frac{np^2S_n^2}{(n-S_n)^2}$.

67. [MCM]. 设 $a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$,且 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = 1$,则 $\forall m \in N$,成立

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^m - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^m\right) \geqslant n^{2m} - n^{m+1}.$$

提示:用数学归纳法,n = 2 时见[38]P.432 B3 - 061.

68. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是不全相等的正数,记 $A_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$,则当 $x > a_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 时,有

$$(x - A_n(a))^n > \prod_{k=1}^{n}(x - a_k).$$

提示:利用 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, \infty)$ 上的严格凹性.

推论 当 $2 < k < n$ 时,有

$$n^{k-2}(n-k)^2 < (n-2)^k.$$

见[305]1986, 93(1): 12 - 13.

69. (1) 设 a_k, b_k 均为正数,且 $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}\right)^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{b_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

提示:利用 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, \infty)$ 上的严格凹性.

(2) 设 $a_k, b_k \geqslant 0$, $a_k + b_k = 1$, $n \geqslant 3$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_{k+1}$,式中规定 $k > n$ 时 $a_k =$

$a_{k-n}.k<1$ 时,$a_k=a_{k+n}$.则

$$S_n \leqslant \frac{n}{4\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}\left[1-\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2\right]\text{(吴跃生)};\qquad S_n \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\text{(续铁权)}$$

见[305]2002.3:30.

70.　设 $a_k,b_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 均为正数,并满足条件:

(1)　$\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}b_k$;

(2)　$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|b_i-b_j|$,则　$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant(n-1)\sum_{k=1}^{n}b_k$.

式中系数$(n-1)$是最佳的,见[305]1995,102(10):935.

71.　**Keogh 猜想:**设 $a_k=\mp1,k=0,1,\cdots,n,b_k=a_na_{n-k}+a_{n-1}a_{n-k-1}+\cdots+a_ka_0$,Keogh,F.R.提出,是否成立

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2>An^2, \tag{71.1}$$

其中 A 为绝对常数,

设 $P_n(z)=\sum_{k=1}^{n}a_kz^k$,$|P_n(z)|^2=n+2\sum_{k=1}^{n}b_k\cos k\theta$.若能证明(71.1)式成立,则成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|P_n(e^{i\theta})|^4\mathrm{d}\theta\geqslant n^2(1+A). \tag{71.2}$$

见[106]P27.

72.　**Weierstrass 不等式:**　(1)设 $0<a_k<1,k=1,2,\cdots,n$,则

$$1-\sum_{k=1}^{n}a_k<\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)<\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}<\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n}a_k}; \tag{72.1}$$

(2)　设 $0<a_k<1$,且$\sum_{k=1}^{n}a_k<1$,则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n}a_k};$$

注　(72.1)式中右边不等式用到

$$1+\sum_{k=1}^{n}a_k<\prod_{k=1}^{n}(1+a_k).$$

上式实际上对 $a_k>-1$ 且 a_k 同号时也成立.此即 Bernoulli 不等式,见本章 N.8(5).

Weierstrass 不等式已有许多推广,例如,1983 年,Pecaric 证明:

(3)　设 $0<a_k<1,p_k\geqslant1$,则

$$1+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k<\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)^{p_k},\quad 1-\sum_{k=1}^{n}p_ka_k<\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^{p_k}.$$

2002 年,石焕南利用控制不等式理论(见[9]),将上述不等式推广到一般初等对称函

数上,即下述(4) ~ (8):

(4)　设 $a_k>0,1<m\leqslant n,n\geqslant 2,t>0,0\leqslant p\leqslant 1$,则

$$\binom{n-1}{m}t^{mp}+\binom{n-1}{(m-1)p}(t+\sum_{k=1}^{n}a_k)^p\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}(t+a_{i_j})^p\leqslant$$

$$\leqslant\binom{n}{m}(t+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)^{mp}.$$

当 $p=1$ 时左边不等式为严格不等式“<”.

(5)　设 $a_k>0,p_k\geqslant 1,1\leqslant m\leqslant n$,则

$$\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}\left(1+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right)<\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}(1+a_{i_j})^{p_{i_j}}$$

$$\leqslant\binom{n}{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+a_k)^{p_k}\right)^m; \tag{72.2}$$

(6)　设 $a_k>0,1<m\leqslant n,n\geqslant 2,0\leqslant p\leqslant 1,t>0$,且 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant t$,则

$$\binom{n-1}{m}t^{mp}+\binom{n-1}{(m-1)p}\left(t-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}(t-a_{i_j})^p$$

$$\leqslant\binom{n}{m}\left(t-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{mp}.$$

当 $p=1$ 时左边不等式为严格不等式“<”.

注　当 $m=2$ 或 $m=n$ 时左边不等式的条件 $\sum\limits_{k=1}^{n}\leqslant t$ 可放宽为 $0<a_k<t,1\leqslant k\leqslant n$.

(7)　设 $a_k>0,p_k\geqslant 1,\sum\limits_{k=1}^{n}p_ka_k\leqslant 1,n\geqslant 2,1\leqslant m\leqslant n$,则

$$\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right)<\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}(1-a_{i_j})^{p_{i_j}}$$

$$\leqslant\binom{n}{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^{p_k}\right)^m.$$

注　当 $m=2$ 或 $m=n$ 时,左边不等式的条件 $\sum\limits_{k=1}^{n}p_ka_k\leqslant 1$ 可放宽为 $0<a_k<1,1\leqslant k\leqslant n$.利用(72.2)式,还推出下述

(8)　设 $a_k\geqslant 1,p_k\geqslant 1,n\geqslant 2,1<m\leqslant n$,记 $Q_m=\min\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{m}p_{i_j}$.则

$$\sum_{1\leqslant j<i_1\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}(1+a_{i_j})^{p_{i_j}}\geqslant\frac{2^{Q_m}}{1+Q_m}\binom{n-1}{m-1}\left[\frac{n}{m}(1+Q_m)-Q_n+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k\right].$$

特别地,当 $m=n$ 时,上式变成

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)^{p_k}\geqslant\frac{2^{Q_n}}{1+Q_n}(1+\sum_{k=1}^{n}p_ka_k).$$

见[344]2002,32(1):132－135.

推论 1　设$0 < a_k < 1, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k < n - 1.$$

推论 2　[MCM]. 设 $a_k \geqslant 0$，且 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{2}$，则 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1 - a_k) \geqslant \frac{1}{2}$.

提示：可用数学归纳法，也可用概率论方法，考虑概率为 $a_1, \cdots, a_n$ 的相互独立的事件，它们中至少一个发生的概率最大为 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{2}$，而 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1 - a_k)$ 是它们中没有一个发生的概率，它不小于 1/2.

73.　设 $a_k > 0, G_n(a) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，则

(1)　$\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geqslant (1 + G_n(a))^n$.（**Chrystal**），

仅当　$a_1 = \cdots = a_n = G_n(a)$ 时，等号成立.

证　利用 $f(x) = \ln(1 + e^x)$ 在$(-\infty, \infty)$上的凸性，得到

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + e^{x_k}) \geqslant n \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right).$$ 再令 $x_k = \ln a_k$ 即可得证.

(2)　$\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + a_k) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{S_n^k}{k!}$.

特别，当 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$ 时，

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \leqslant \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{k!} < e.$$

(3)　$\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + a_k) \leqslant (1 + A_n(a))^n$.

仅当所有 a_k 相等时等号成立.（见[348]1993.4）

74.　设 $a_k > 0, \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$，则

(1)　$\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \geqslant (n + 1)^n$，(Klamkin)；

(2)　$\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - 1\right) \geqslant (n - 1)^n$，(Newman)；

(3)　$\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1 + a_k}{1 - a_k}\right) \geqslant \left(\frac{n + 1}{n - 1}\right)^n$，(Klamkin)；

推广：　令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, a_k > 0$，则：

①　$\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - t\right) \geqslant \left(\frac{n}{S_n} - t\right)^n, \forall t \leqslant \frac{1}{S_n}$，　②　$\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{S_n}{a_k} - \frac{1}{m}\right) \geqslant \left(n - \frac{1}{m}\right)^n$.

75. 设 $a_k > 0, k = 1, \cdots, n$，而 $i_1, \cdots, i_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的一个置换，且$(i_1, \cdots, i_n) \neq (1, \cdots, n)$，记 $S = a_{i_k}, t = a_k$，则

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{s} < \prod_{k=1}^{n} a_k^{t}. \tag{75.1}$$

提示:因为每个置换是不相交循环的乘积,因此不妨设 $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的循环置换,将数 a_k 重新排列后,我们可以假设 $a_1 > a_k(k > 1)$,$i_1 = 2,\cdots,i_{n-1} = n$,$i_n = 1$.于是,(75.1) 式变成

$$a_1^{a_2}a_2^{a_3}\cdots a_n^{a_1} < a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}. \tag{75.2}$$

下面用数学归纳法证明(75.2) 式.当 $n = 2$ 时,由 $a_1 > a_2$ 得到

$$a_1^{a_1-a_2} > a_2^{a_1-a_2} \Rightarrow a_1^{a_2}a_2^{a_1} < a_1^{a_1}a_2^{a_2}.$$

即(75.2) 式成立.设 $n = k-1$ 时,(75.2) 式成立,我们不妨设

$$a_2^{a_3}\cdots a_{k-1}^{a_k}a_k^{a_2} < a_2^{a_2}\cdots a_k^{a_k}.$$

两边乘以 $a_1^{a_1} > 0$,并利用 $a_1 > a_2, a_1 > a_k \Rightarrow a_1^{a_2}\cdot a_k^{a_1} < a_1^{a_1}a_k^{a_2}$就得到

$$a_1^{a_2}a_2^{a_3}\cdots a_{k-1}^{a_k}a_k^{a_1} < a_1^{a_1}a_2^{a_3}\cdots a_k^{a_2} < a_1^{a_1}\cdots a_k^{a_k}.$$

即 $n = k$ 时(75.2) 式也成立.

推论　设 $a > b > 0$,则 $a^b b^a < a^a b^b$.

76.　(1) 1993 年,Alzer,H.提出:设 $0 < a_k \leqslant 1/2, 1 \leqslant k \leqslant n$,则对 $n \leqslant 3$ 成立

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{1-a_k}\right) \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^n}{\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^n}.$$

当 $n \geqslant 6$ 时上式不成立,并问 $n = 4$ 和 5 时上式是否成立?见[305]1993,100(8):798.

(2)　设 $0 \leqslant a_k \leqslant 1/2$ 或 $1/2 \leqslant a_k \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

提示:用数学归纳法.

77.　[MCM].设 $\forall a_k \geqslant 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, x_k = a_k + \frac{n-3}{n-1}(S_n - a_k)$.则

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \geqslant \prod_{k=1}^{n}(S_n - 2a_k).$$

78.　**Schur 不等式**:设 $a_{jk} \geqslant 0, x_k \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} = 1$,则

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right).$$

提示:令 $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k$,利用 $\ln t$ 的凸性,有 $\ln y_j \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ln x_k$,从而

$$\sum_{j=1}^{n}\ln y_j \geqslant \sum_{k=1}^{n}\ln x_k,\text{即}\quad \prod_{j=1}^{n} y_i \geqslant \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

注　由 Schur 不等式可推出关于行列式的 Hadamard 不等式.(见第 10 章 §1.N.1)

79.　设 $a_k > 0, a_{n+k} = a_k, b_k = \sum_{j=1}^{m} a_{k+j}, k = 1,2,\cdots,n,$,则

$$m^n\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n} b_k, \tag{79.1}$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

证　不等式(79.1)等价于

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{m}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

利用几何—算术平均不等式,有

$$\frac{b_k}{m} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{k+j} \geqslant \left(\prod_{j=1}^{m} a_{k+j}\right)^{1/m}.$$

从而

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{m}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m} a_{k+j}\right)^{1/m} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^m\right)^{1/m} = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

80.　设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \sigma_n \geqslant 0$ 且满足 $(n-1)\sigma_n^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i - a_j)^2$,则

$$\min\{a_1,\cdots,a_n\} \leqslant \frac{1}{n}(S_n - \sigma_n) \leqslant \frac{1}{n}(S_n + \sigma_n) \leqslant \max\{a_1,\cdots,a_n\},$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

提示:不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,则

$$\sigma_n^2 \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}(k-1)(a_k - a_1)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_1)^2 \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_1)\right\}^2.$$

同理,有

$$\sigma_n^2 \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(a_n - a_j)^2 \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{n}(a_n - a_j)\right\}^2,$$

分别开平方,得 $na_1 \leqslant S_n - \sigma_n$, $S_n + \sigma_n \leqslant na_n$.

81.　设 $a_k \geqslant 0$,且 $A_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - (n-1)a_k \geqslant 0, k = 1,\cdots,n$,则

$$\prod_{k=1}^{n} A_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_k. \tag{81.1}$$

证　利用几何-算术平均不等式,有

$$a_k = \frac{1}{n-1}(A_1 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots A_n) \geqslant (A_1\cdots A_{k-1}\cdot A_{k+1}\cdots A_n)^{1/(n-1)}. \tag{81.2}$$

分别令 $k = 1,\cdots,n$,然后相乘即得(81.1)式.

(81.1)式中等式成立,当且仅当(81.2)式中等号成立,即 $a_1 = \cdots = a_n \geqslant 0$ 或 $a_1,\cdots,a_n$ 中除有一个为0外其他都相等.

注　$n = 3$ 时,可去掉 $A_k \geqslant 0$ 的条件,但当 $n > 3$ 时,条件 $A_k \geqslant 0$ 是必要的.

82.　设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$,则

(1)　**钟开莱不等式**:若 $\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} b_j, k = 1,\cdots,n$,则

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j^2.$$

仅当 $a_k=b_k(k=1,\cdots,n)$ 时等号成立.

提示:由条件

$$(a_k-a_{k+1})\sum_{j=1}^{k}a_j\leqslant(a_k-a_{k+1})\sum_{j=1}^{k}b_j,k=1,\cdots,n,$$

其中 $a_{n+1}=0$.对上式 k 分别令它等于 $1,\cdots,n$,然后相加,即得 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}a_jb_j$,再利用柯西不等式,得

$$(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^2\leqslant(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j)^2\leqslant(\sum_{j=1}^{n}a_j^2)(\sum_{j=1}^{n}b_j^2),\quad 即\quad \sum_{j=1}^{n}a_j^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}b_j^2.$$

(2) 若 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant 3n$, $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2>n^2$, $(n\geqslant 3)$, 则 $a_1+a_2+a_3>n$.

证 由假设 $(\sum a_k)^2\geqslant\sum a_k^2\geqslant n^2$,所以 $\sum a_k>n$,从而存在 $k\leqslant n-1$,使得 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\leqslant n$, $\sum\limits_{j=1}^{k+1}a_j>n$,不妨设 $k>2$,令 $\beta=n-\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$ 则 $0\leqslant\beta<a_{k+1}$,从而 $n^2\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2$ $=a_1^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}\beta+a_{k+1}(a_{k+1}-\beta)+a_{k+2}^2+\cdots+a_n^2\leqslant a_1(\sum\limits_{j=1}^{k}a_j+\beta)+a_{k+1}(a_{k+1}$ $-\beta+a_{k+2}+\cdots+a_n)\leqslant na_1+2na_{k+1}\leqslant na_1+n(a_2+a_3)=n(a_1+a_2+a_3)$.

(3) 1989 年陈计证明:设 $\{a_k\}$,$\{b_k\}$ 均非负递减,且满足 $\sum\limits_{j=1}^{k}a_j\leqslant\sum\limits_{j=1}^{k}b_j$ $(1\leqslant k\leqslant n)$,则当 $p>1$ 时,$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^p$,仅当 $a_k=b_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立.特别,当 $p=2$ 时,就是钟开莱不等式.见[348]1989.12.P.3.

(4) [MCM].设 $a_k,b_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为实数,则使得对任何满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 的实数,不等式 $\sum a_kx_k\leqslant\sum b_kx_k$ 都成立的充要条件是 $\sum\limits_{j=1}^{k}a_j\geqslant\sum\limits_{j=1}^{k}b_j(1\leqslant k\leqslant n-1)$,且 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$.(提示:用 Abel 变换)

83. [MCM].实数 $a_1,\cdots,a_n$ 中任意两数之和为非负的充要条件是对于满足

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=1 \tag{83.1}$$

的任意非负实数 $x_1,\cdots,x_n$,都有

$$\sum a_kx_k\geqslant\sum a_kx_k^2. \tag{83.2}$$

证 充分性:取一组特殊的 $\{x_k\}$:$x_i=x_j=1/2(i\neq j)$,$x_k=0(k\neq i,j)$,则从(83.2)式,有

$$1/2(a_i+a_j)\geqslant 1/4(a_i+a_j),即\quad a_i+a_j\geqslant 0.$$

必要性:从(83.1)式:$1-x_k=\sum\limits_{j\neq k}x_j$,所以,$\sum a_kx_k(1-x_k)=\sum a_kx_k\sum\limits_{j\neq k}x_j$ $=\sum\limits_{j\neq k}a_kx_kx_j=\dfrac{1}{2}(\sum\limits_{k\neq j}a_kx_kx_j+\sum\limits_{j\neq k}a_jx_jx_k)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j\neq k}(a_k+a_j)x_kx_j\geqslant 0$.证毕.

84.　设 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0, \prod_{j=1}^{k} b_j \geqslant \prod_{j=1}^{k} a_j (k = 1, \cdots, n)$，则

(1)　$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$

(2)　$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k - a_k}{a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k - a_k}{a_n}$.

(3)　令 $A_k = \ln a_k, B_k = \ln b_k$，若 $\sum_{j=1}^{n} A_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} B_j, k = 1, \cdots, n$，且 f 为递增的连续凸函数，则

$$\sum_{j=1}^{k} f(A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(B_j), k = 1, \cdots, n.$$

85.　设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0, 0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n, 0 < p \leqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (b_k - b_{k-1}) \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p (b_k^p - b_{k-1}^p) \right\}^{1/p}.$$

提示：用数学归纳法，详见[65]P193 - 194.

86.　[MCM]. **排序不等式**：设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, k_1, \cdots, k_n$ 是 $\{1, \cdots, n\}$ 的任一排列，则

(1)　$\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j b_{k_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$；

(2)　$\prod_{j=1}^{n} a_j^{b_{n-j+1}} \leqslant \prod_{j=1}^{n} a_j^{b_{k_j}} \leqslant \prod_{j=1}^{n} a_j^{b_j}$，

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$ 时取等号.

证　令 $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{k_j}$，下面以证(211)式右边的不等式为例，要证 $k_j = j\ (j = 1, \cdots, n)$ 时，S_n 达到最大值 $\sum a_j b_j$. 若 $k_n \neq n$，则存在某个 $j_0 \neq n$，使得 b_n 与 a_{j0} 搭配，于是，$a_n b_n + a_{j0} b_{k_n} - a_{j0} b_n - a_n b_{k_n} = b_n (a_n - a_{j0}) - b_{k_n} (a_n - a_{j0}) = (b_n - b_{k_n})(a_n - a_{j0}) \geqslant 0$，

即　$a_{j0} b_n + a_n b_{k_n} \leqslant a_{j0} b_{k_n} + a_n b_n$，

上式表明，当 $k_n \neq n$ 时，调换 S_n 中 b_n 和 b_{k_n} 的位置(其余 $n-2$ 项不变)，会使 S_n 增加. 同理可证其他 a_k 必须和 b_k 搭配($k = 1, \cdots, n-1$).

注　排序不等式可简记为：反序和 $\leqslant$ 乱序和 $\leqslant$ 同序和，可由此证明几何 - 算术平均不等式，Cauchy 不等式，Chebyshev 不等式等许多著名的不等式和几何不等式.

推论 1　设 $a_j > 0, j = 1, \cdots, n$，而 $k_1, \cdots, k_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的任一排列，则

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_{k_j}} \geqslant n, \text{ 特别地，} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k+1}}{a_k} \geqslant n,$$

仅当 $a_{k_j} = a_j$ 时等号成立.

证　不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，则

$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{a_n}$. 故由排序不等式，有 $n = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \frac{1}{a_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{a_{k_j}}$.

推论 2 设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n, y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n, z_1, \cdots, z_n$ 为 $y_1, \cdots, y_n$ 的任一排列,则

$$\sum (x_k - y_k)^2 \leqslant \sum (x_k - z_k)^2.$$

提示:注意到 $\sum y_k^2 = \sum z_k^2$,所以,只要证 $\sum x_k z_k \leqslant \sum x_k y_k$,这个不等式恰好就是排序不等式.

推论 3 设 $k_1, \cdots, k_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的任一重排,则

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j \cdot k_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(n-j+1)}.$$

(3) 1991 年韦韬证明了**积排序不等式**:设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 均为递增数列,$k_1, \cdots, k_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的任一排列,则

$$\prod_{j=1}^{n} (a_j + b_j) \leqslant \prod_{j=1}^{n} (a_j + b_{k_j}) \leqslant \prod_{j=1}^{n} (a_j + b_{n+1-j}),$$

即:同序积 $\leqslant$ 乱序积 $\leqslant$ 反序积. 见中学数学(江苏)1991,5:42.

(4) 1980 年 Minc, H. 证明更一般的**重排不等式**:设 $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{t_j j})$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ 是长为 t_j 的序列,$a_{ij} \geqslant 0, n = \sum_{j=1}^{k} t_j, a_{ij}$ 的递增重排记为 $a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \cdots \leqslant a'_n$,递减重排记为 $a_1^* \geqslant a_2^* \geqslant \cdots \geqslant a_n^*$,记

$$(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n) = (a'_{11}, a'_{21}, \cdots, a'_{t_1 1}, \cdots, a'_{1k}, a'_{2k}, \cdots, a'_{t_k k}),$$

$$(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*) = (a_{11}^*, a_{21}^*, \cdots, a_{t_1 1}^*, \cdots, a_{1k}^*, a_{2k}^*, \cdots, a_{t_k k}^*),$$ 则

$$\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}\right) \leqslant \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} (1 + a_{2i-1}^* a_{2i}^*), & \text{若 } 2 \mid n \\ \prod_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} (1 + a_{2i-1}^* a_{2i}^*)(1 + a_{n-2}^* a_{n-1}^* a_n^*), & \text{若 } 2 \nmid n. \end{cases}$$

同年,他推广了这个结果,证明

① 设 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_k \geqslant 1$,

若 $a_{ij} \leqslant 1$,则 $\sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{t_j} a_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{t_j} a'_{ij}$;

若 $a_{ij} \geqslant 1$,则 $\sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{t_j} a_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}^*$.

若 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_k$,则(217),(218)中 a'_{ij} 与 a_{ij}^* 对调.

② 设 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_k \geqslant 1$,则 $\prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{t_j} a_{ij} \geqslant \prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{t_j} a_{ij}^*$,而且

若 $a_{ij} \leqslant 1$,则 $\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}\right) \leqslant \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \prod_{i=1}^{t_j} a'_{ij}\right)$;

若 $a_{ij} \geqslant 1$,则 $\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}\right) \leqslant \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}^*\right)$.

1987 年魏万迪将 Minc 的上述重排不等式作了统一处理,证明:设 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_k$

$\geqslant 1$,若 $a_{ij} \leqslant 1$,则 $\prod\limits_{j=1}^{k}(1-\prod\limits_{i=1}^{t_j} a_{ij}) \geqslant \prod\limits_{j=1}^{k}(1-\prod\limits_{i=1}^{t_j} a'_{ij})$;若 $a_{ij} \geqslant 1$,则

$$\prod_{j=1}^{k}\left|(1-\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij})\right| \geqslant \prod_{j=1}^{k}\left|(1-\prod_{i=1}^{t_j} a_{ij}^{*})\right|.$$

见[339]1987,7(3):505 - 510.

(5)2001 年,倪仁兴、张森国证明了**幂指和的排序不等式**:设 $1/e \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,则

① $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{a_{k+1}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{a_k}, (a_{n+1}=a_1)$;

② $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{a_{k_j}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{a_k}$.

③ 若 $\{k_1,\cdots,k_n\}$ 与 $\{m_1,\cdots,m_n\}$ 是 $\{1,\cdots,n\}$ 的任意两个排列,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{a_{n-k+1}} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_j}^{a_{m_j}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{a_k}.$$

作者们提出猜想:③ 对满足 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 的 $\{a_k\}$ 也成立. 证明上述不等式的基本工具是利用下述结论:若 $a \geqslant b > 0, a \geqslant 1$,则 $f(x) = a^x - b^x$ 是 $(0,\infty)$ 上的递增函数;而当 $e^{-1} < b \leqslant a \leqslant 1$ 时,$f(x) = a^x - b^x$ 是 $(1/e,1]$ 上的递增函数,细节见"常德师范学院学报"(自)2002,14(1):7 - 8,18.

87.　**微微对偶不等式**:设 $0 \leqslant a_{j1} \leqslant a_{j2} \leqslant \cdots \leqslant a_{jn}, j=1,\cdots,m$,而 $b_{j1},\cdots,b_{jn}$ 是 $a_{j1},\cdots,a_{jn}$ 的一个排列,则

(1)　$\sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m} b_{jk} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m} a_{jk}$,

(2)　$\prod\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} b_{jk} \geqslant \prod\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jk}$,

由 $\{a_{jk}\}$, $\{b_{jk}\}$ 可构造两个矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$S(A) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\prod\limits_{j=1}^{m} a_{jk})$ 是 A 的各列的数相乘然后相加,称为 A 的列积和;$T(A) = \prod\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jk})$ 是 A 的各列的数相加然后相乘,称为 A 的列和积. 于是(1)与(2)式可分别表示为

$$S(B) \leqslant S(A), T(B) \geqslant T(A).$$

张运筹在[348]1980.4.证明了这些不等式,又在[99]4(1989)P.48 - 63 详细讨论了它们在证明不等式中的许多应用,证明的关键在于把要证的不等式归结为构造一个矩阵 A,再设计出一个适当的乱序阵 B.

88.　[MCM]. $a_k \geqslant 0, 0 \leqslant b_k \leqslant p, 1 \leqslant k \leqslant n, \frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1, \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k\prod_{j\neq k}a_j\right)\leqslant p(n-1)^{1-p}.$$

(32 届 IMO 预选试题,见“中等数学”(天津),1992,1:32)

89. **Landau 不等式**:设 $a_k\geqslant 0.k=0,1,\cdots,n,S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n}S_k\right)^2\leqslant\frac{4}{45}(S_n-S_0)^2.$$

见[354]1935,39:742 - 744.

90. [MCM].设自然数 p,q,n 均大于1,A_{n-1},A_n 是p进制数系中的数,B_{n-1},B_n 是 q 进制数系中的数,它们的 p,q 进制的位置表示分别为

$$A_{n-1}=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0,A_n=a_na_{n-1}\cdots a_0,$$

$$B_{n-1}=b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0,B_n=b_nb_{n-1}\cdots b_0.$$

其中 a_n,a_{n-1},b_n,b_{n-1} 均不为 0,则当 $p>q$ 时,

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

提示:令 $g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k,h(x)=g(x)+a_nx^n$,证明 $f(x)=g(x)/h(x)$ 严格递减.证 2 见[38]P.453.

91. 设$\sum_{k=1}^{n}x_k=a,\sum_{k=1}^{n}x_k^2=b,\sum_{k=1}^{n}x_k^3=\frac{3abn-2a^3}{n^2}$,则$\sum_{k=1}^{n}x_k^4>\frac{a^4}{n^3}$ 且 $b\geqslant\frac{a^2}{n}$.

92. [MC]. 设 $0<p\leqslant a_k\leqslant q,1\leqslant k\leqslant n$,则

$$n^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqslant n^2+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

证明见[345]1985,1:47 - 48.应注意将多元函数极值转化为一元函数极值的证明技巧.

推广: 设 $a_{jk}>0,1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant j\leqslant r$ 或s, r,s 为自然数,则

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}\cdots a_{sk})^r\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a_{1k}\cdots a_{rk})^s}\right]\geqslant\binom{n}{r}\binom{n}{s}.$$

仅当 $\forall a_{jk}$ 相等时等号成立.

2000 年宋庆、宋光提出猜想:设 $a_k>0,1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geqslant n^2+2n\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\left[\left(\frac{a_k}{a_j}\right)^{\frac{1}{2n}}-\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^{\frac{1}{2n}}\right]^2.$$

并且对于 $1\leqslant k\leqslant 5$ 证明成立.见[100]P.119 - 120.

93. 设 $0<p\leqslant a_k\leqslant q,1\leqslant k\leqslant n$,则

(1) $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqslant n^2\frac{(p+q)^2}{4pq}$.

(Schweitzer,P. ,Math. phys. Lapok 1914,23:257 - 261.)

(2) **Kantorovich 不等式**:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k}\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^2.$$

(该不等式的一般形式见下面 N.95)

(3) [MCM]. 若$\{b_k\}$是$\{a_k\}$的任一重排,则

$$n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \leqslant n + \left[\frac{n}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$$

(4) 设 $0 < a_k \leqslant 1, n \geqslant 2$ 则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - n + 1\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} - n + 1\right) \leqslant 1.$$

仅当 $a_1, \cdots, a_n$ 中至少有 $n-1$ 个数取 1 时等号成立见[345]2002.2:47.

94. 以下两个不等式等价:

(1) 设 $0 < p \leqslant a_k \leqslant q, \sum_{k=1}^{n} q_k = 1, q_k > 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n} q_k a_k + pq \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{a_k} \leqslant p + q.$$

(Rennie, B. C., [373]1963, 3;442 − 448)

(2) 设 $p \leqslant \frac{b_k}{a_k} \leqslant q, a_k \neq 0, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + pq \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \leqslant (p+q) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

仅当 $b_k = pa_k$ 或 $b_k = qa_k$ 时等号成立.

(Diaz-Metcalf, [376]1963, 69:415 − 418)

95. **Kantorovich 不等式:**设 $a_k > 0, \sum_{k=1}^{n} a_k = 1, \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.$$

该不等式可用数学归纳法,极值方法和凸函数不等式等多种方法证明. 例如见[344]1986, 1:54 − 57,王松桂等在[30]P145 − 147 中用变形技巧给出一个巧妙的证明:为此,先用下式定义 u_k 和 v_k:

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda_1 u_k + \lambda_n v_k \\ \dfrac{1}{\lambda_k} = \dfrac{u_k}{\lambda_1} + \dfrac{v_k}{\lambda_n}. \end{cases}$$

再记 $u = \sum_{k=1}^{n} u_k a_k, \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k a_k$. 易证 $u_k, v_k \geqslant 0$,并且从

$$1 = \frac{1}{\lambda_k}\lambda_k = \left(\frac{u_k}{\lambda_1} + \frac{v_k}{\lambda_n}\right)(\lambda_1 u_k + \lambda_n v_k) = (u_k + v_k)^2 + u_k v_k \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$$

可知 $u_k + v_k \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$,从而 $u + v = \sum_{k=1}^{n} a_k(u_k + v_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) = (\lambda_1 u + \lambda_n v)\left(\frac{u}{\lambda_1} + \frac{v}{\lambda_n}\right) = (u+v)^2 + uv\frac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$$

$$= (u+v)^2\left[1 + \frac{4uv}{(u+v)^2} \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}\right] \leqslant 1 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.$$ 证毕.

由于 Kantorovich 不等式在矩阵计算和最优化理论中有重要应用，所以，该不等式有多种推广形式，例如：

(1) 设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, p_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n, t > 0$，则

$$1 \leqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^t\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k b_k^t\right)}{\left[\sum_{k=1}^{n} p_k (a_k b_k)^{t/2}\right]^2} \leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}\right)^{t/4} + \left(\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}\right)^{t/4}\right]^2.$$

特别，取 $a_1 = m_1 = \lambda_1^{1/2}, m_2 = \lambda_n^{-\frac{1}{2}}, \lambda_1 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_n, a_k = b_k^{-1} = \lambda_k^{1/2}, t = 2, m_1 M_2 = m_2 M_1 = 1$. 得到

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2} \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.$$

（施恩伟，陈永林，[344]1985,4;1987,4:78 – 79）

(2) 设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$，$f$ 是 $[\lambda_n, \lambda_1]$ 上的凸函数. $t \in [\lambda_n, \lambda_1]$，$tf(t) \geqslant 1$，$c > 0$，令 $F(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k f(\lambda_k)\right)$；$g_k = c\lambda_k + \frac{1}{c} f(\lambda_k)$. 则

$$1 \leqslant F(a) \leqslant \max\{g_1, g_n\}.$$

特别地，若 $f(t) = \frac{1}{t}, c = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}}$，则

$$1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{1/2} + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{1/2}\right]^2,$$

仅当 $a_1 = a_n = 1/2, a_k = 0 (k \neq 1, n)$ 时，右边不等式中的等号成立，见[12]$P144$.

96. 设 $a_1 > \cdots > a_n > 0$，则

(1) $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + k) a_k\right) - 4\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k\right)^2 > 0.$

(2) $5\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k\right)^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right) > 0.$

见[4]P.272.

97. [MCM]. 设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 均为递增数列，$\lambda_k > 0$，且 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k b_k;$$

若 $\{b_k\}$ 改为递减数列，则不等号反向.

98. 若 $\sum_{j \neq k} a_j a_k > 0$，则 $\left(\sum_{j \neq k} a_j b_k\right)^2 \geqslant \left(\sum_{j \neq k} a_j a_k\right)\left(\sum_{j \neq k} b_j b_k\right), j, k = 1, \cdots, n.$

见[305]1987,94(7).

99. **Beesack 不等式**：设 $p \geqslant 1, p + q \geqslant 1, a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^q \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{p+q}.$$

详细讨论见[323]1969,21:222－234.

100.　(1) 设 $a_{jk}\geqslant 0, 0<p<q<\infty$,则

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{jk}^{q}\right)^{p/q}\right]^{1/p}\leqslant c(p,q)\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}^{p}\right)^{q/p}\right]^{1/q}.$$

式中系数 $c(p,q)=(\min\{m,n\})^{\alpha}$ 是最佳的,式中 $\alpha=1/p-1/q$.

(Toyama,H.[380]1948,24(9):10－12)

(2)　**Mikolas 不等式**:设 $a_{jk}>0$,若 $q\leqslant 1$ 且 $pq\leqslant 1$,则

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}^{q}\right)^{p}\leqslant m^{1-pq}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}^{q}\right)^{1/q}\right]^{pq}\leqslant m^{1-pq}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{jk}\right)^{q}\right]^{p}.$$

若 $q\geqslant 1$ 且 $pq\geqslant 1$,则不等号均反向.(Alzer,[372]1991:34;1992:137－138)

101.　**Jensen 不等式**:设 $a_k>0, 1\leqslant k\leqslant n, 0<p_1<p_2, f(p)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{p}\right)^{1/p}$,则

$$f(p_1)\geqslant f(p_2).$$

证　因为所证不等式两端均为 a_k 的一次齐次式,所以,两端乘以适当的 λ 并将 λa_k 换写成新的 a_k 时,总可使 $\sum_{k=1}^{n}a_k^{p_1}=1$.(称为标准化过程),于是从 $a_k^{p_1}\leqslant 1$,得到

$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{p_2}\right)=\sum_{k=1}^{n}(a_k^{p_1})^{p_2/p_1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^{p_1}=1$.从而

$$f(p_2)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{p_2}\right)^{1/p_2}\leqslant 1=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{p_1}\right)^{1/p_1}=f(p_1).$$

推论　设 $0<p<q$,正数列 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足 $a_k^{1/q}\leqslant b_k^{1/p}, 1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/q}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^{1/p}.$$

102.　**Aczel 不等式**:设实数列 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足

$$a_1^2-\left(\sum_{k=2}^{n}a_k^2\right)>0,\quad 或\ b_1^2-\left(\sum_{k=2}^{n}b_k^2\right)>0,则$$

$$\left(a_1^2-\sum_{k=2}^{n}a_k^2\right)\left(b_1^2-\sum_{k=2}^{n}b_k^2\right)\leqslant\left[a_1b_1-\left(\sum_{k=2}^{n}a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=2}^{n}b_k^2\right)^{1/2}\right]^2\leqslant\left(a_1b_1-\sum_{k=2}^{n}a_kb_k\right)^2,$$

仅当 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 成比例时等号成立.

证　在[4]P.75 证上述不等式的两端时,若 $b_1^2-\sum_{k=2}^{n}b_k^2>0$,且 a_k 与 b_k 不成比例.令 $f(x)=(b_1x-a_1)^2-\sum_{k=2}^{n}(b_kx-a_k)^2$.由于 f 中 x^2 的系数为正,且 $f\left(\frac{a_1}{b_1}\right)<0$.而 $x\to-\infty$ 或 ∞ 时,$f(x)\to\infty$,所以 $f(x)=0$ 有实根,由 f 的判别式非负就可得证.

Aczel 不等式已有许多推广,例如,设 $a_k,b_k\geqslant 0, a_1^p-\left(\sum_{k=2}^{n}a_k^p\right)>0$ 或 $b_1^p-\left(\sum_{k=2}^{n}b_k^p\right)>0$.则

(1)　**Popoviciu 不等式**:当 $0<p\leqslant 2$ 时,成立

$$\left(a_1^p-\sum_{k=2}^{n}a_k^p\right)\left(b_1^p-\sum_{k=2}^{n}b_k^p\right)\leqslant\left(a_1b_1-\sum_{k=2}^{n}a_kb_k\right)^p,$$

仅当 $p=2$ 且 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立.

注 Popoviciu 的原文和[4]P. 76 定理 2 中都设 $p\geqslant 1$, 1999 年李康海举出反例:

$a_1=2, a_2=a_3=1, b_1=1, b_2=b_3=\frac{1}{2}, n=3, p=3$, 说明 $p>2$ 时不等式不成立, 上述 $0<p\leqslant 2$ 的情形是李康海给出的证明, 并提出猜想: 当 $p>2$ 时, 成立

$$(a_1^p-\sum_{k=2}^n a_k^p)(b_1^p-\sum_{k=2}^n b_k^p)>(a_1b_1-\sum_{k=2}^n a_kb_k)^p.$$

见[351]1999, 1:6-7.

(2) **Bellman 不等式**: 对于 $p>1$, 有

$$(a_1^p-\sum_{k=2}^n a_k^p)^{1/p}+(b_1^p-\sum_{k=2}^n b_k^p)^{1/p}\leqslant\Big[(a_1+b_1)^p-\sum_{k=2}^n(a_k+b_k)^p\Big]^{1/p}.$$

(3) 设 a, b, a_k, b_k 均为非负实数, $p>1$, 且 $\sum_{k=1}^n p_ka_k^p\leqslant a^p$, $\sum_{k=1}^n p_kb_k^p\leqslant b^p$, 则

$$0\leqslant\Big[\Big(\sum_{k=1}^n p_ka_k^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{k=1}^n p_kb_k^p\Big)^{1/p}\Big]^p$$

$$\leqslant(a+b)^p-\sum_{k=1}^n p_k(a_k+b_k)^p-\Big[\Big(a^p-\sum_{k=1}^n p_ka_k^p\Big)^{1/p}+\Big(b^p-\sum_{k=1}^n p_kb_k^p\Big)^{1/p}\Big]^p.$$

(Matic, M. 等, Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2000, 5(1):85-91)

103. 记 $S_n(a)=\sum_{k=1}^n a_k^2$, $S_n(b)=\sum_{k=1}^n b_k^2$, $S_n(ab)=\sum_{k=1}^n a_kb_k$, $\sigma_n(a,b)=S_n(a)S_n(b)-[S_n(ab)]^2$, 设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 不成比例, 即是 $a_ib_j\neq a_jb_i(i\neq j)$,

(1) 若 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是满足

$$\sum a_kx_k=0, \sum b_kx_k=1 \tag{103.1}$$

的任一实数列, 则

$$S_n(x)\geqslant S_n(a)/\sigma_n(a,b), \tag{103.2}$$

仅当 $x_k=y_k$ 时等号成立, 其中 $S_n(x)=\sum_{k=1}^n x_k^2$,

$$y_k=\frac{b_kS_n(a)-a_kS_n(b)}{\sigma_n(a,b)}, k=1,\cdots,n. \tag{103.3}$$

证 设 $\{y_k\}$ 由 (103.3) 式定义, 则 $\{y_k\}$ 满足条件 (103.1) 式, 而且 $\sum x_ky_k=S_n(a)/\sigma_n(a,b)$, 特别, $\sum y_k^2=S_n(a)/\sigma_n(a,b)$, 故有

$$\sum x_k^2-\sum y_k^2=\sum(x_k-y_k)^2\geqslant 0$$

由此得到, $S_n(x)\geqslant S_n(y)=S_n(a)/\sigma_n(a,b)$.

注 当 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{x_k\}$ 为复数列时, 只要将条件 (103.1) 式改成 $\sum a_k\bar{x}_k=0$, $\sum b_k\bar{x}_k=1$, $S_n(a)=\sum|a_k|^2$, $S_n(ab)=\sum a_k\bar{b}_k$, 则不等式(103.2) 仍成立.

(2) **Fan-Todd 不等式**:

$$\frac{S_n(a)}{\sigma_n(a,b)} \leqslant \binom{n}{2}^{-2} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left(\frac{a_j}{a_j b_k - a_k b_j} \right) \right]^2.$$

提示:令 $x_k = \binom{n}{2}^{-1} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{a_j}{a_j b_k - a_k b_j} \right], (1 \leqslant k \leqslant n)$. 在二重和

$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \binom{n}{2}^{-2} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{a_k a_j}{a_j b_k - a_k b_j} \right]$中,它的 $n(n-1)$ 项可以按以下成对形式分组:

$$\binom{n}{2}^{-1} \left(\frac{a_k a_j}{a_j b_k - a_k b_j} + \frac{a_j a_k}{a_k b_j - a_j b_k} \right),$$

每一对这样的和等于 0,因而 $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$,同理,可证 $\sum b_k x_k = 1$. 因而可用(1)的结论导出所要证的不等式.

注　这些不等式的进一步推广见[4] §2.12. 另见[2]P.45.

104.　设 $\sum x_k^2 = 1, \sum a_k^2 > 0, \sum a_k x_k = 0, (k = 1, \cdots, n)$,则

$$\left(\sum b_k x_k \right)^2 \leqslant \left(\sum a_k^2 \right)^{-1} \sum_{j<k} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

105.　(1) 设实数列 $\{a_k\}$ 满足 $\sum a_k = 0, \sum |a_k| = 1$,则对于任意实数 $\{x_k\}, k = 1, \cdots, n$,有

$$\left| \sum a_k x_k \right| \leqslant (M - m)/2.$$

式中　$M = \max\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}, m = \min\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

证　不妨设　$m = x_1, M = x_n$,从 $\sum a_k = 0$,得到

$$\left| \sum a_k x_k \right| = \frac{1}{2} \left| \sum (2x_k - x_n - x_1) a_k \right| \leqslant \frac{1}{2} \sum |2x_k - x_n - x_1| |a_k|$$

$$\leqslant (x_n - x_1) \cdot \frac{1}{2} \sum |a_k| = \frac{1}{2}(M - m).$$

推论　取 $x_k = 1/k$,得 1989 年全国高中数学竞赛题:

$$\left| \sum (a_k/k) \right| \leqslant (1 - (1/n))/2.$$

推广:　设实数列 $\{a_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S, \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sigma$,则对于任意实数 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$,有

$$\left| \sum a_k x_k \right| \leqslant (1/2)(M - m)\sigma + (1/2) |M + m| \cdot |S|.$$

式中 M, n 分别是 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 中的最大值和最小值.

证　不妨设　$m = x_1 \leqslant x_k \leqslant x_n = M$. 于是

$$|2x_k - (x_1 + x_n)| = |(x_n - x_k) + (x_1 - x_k)| \leqslant |x_n - x_k| + |x_1 - x_k|$$

$$= (x_n - x_k) + (x_k - x_1) = x_n - x_1 = M - m.$$

从而 $\left| \sum a_k x_k \right| = \frac{1}{2} \left| \sum 2a_k x_k \right| = \frac{1}{2} \left| \sum 2a_k x_k - (x_n + x_1)\left(\sum a_k - S \right) \right|$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum |2x_k - x_n - x_1| |a_k| + \frac{1}{2} |M + m| \cdot |S|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(M-m)\sigma+\frac{1}{2}\mid M+m\mid\cdot\mid S\mid.$$

(2) **Lakshmanamurti 不等式**:设 m 为整数,n 个实数x_k 满足条件$\sum x_k=0,\sum x_k^2=n$.令 $S_m=\frac{1}{n}\sum x_k^m$,则

① $S_{2m}\geqslant S_{m+1}^2+S_m^2$;

② $S_m\leqslant\dfrac{(n-1)^{m-1}+(-1)^m}{n(n-1)^{m/2-1}}$.

仅当 $x_1=\sqrt{n-1},x_k=-\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$ $(2\leqslant k\leqslant n)$时等号成立.见 Math. Student (1950),18:111-116.

106. **F T T(Fan—Taussky—Todd)不等式**:设 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$为实数,$S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$.

(1) 若$\sum\limits_{k=1}^n a_k=0,a_{n+1}=a_1$,则

$$\sum_{k=1}^n(a_k-a_{k+1})^2\geqslant 4S_n(\sin\frac{\pi}{n})^2,$$

仅当$a_k=c_1\cos t+c_2\sin t$(式中 $t=2k\pi/n,1\leqslant k\leqslant n$)时等号成立.(**Wirtinger 不等式**)

(2) 若 $a_1=0$ 则

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})^2\geqslant 4S_n(\sin\frac{\pi}{2(2n-1)})^2,$$

仅当 $a_k=\sin\dfrac{(k-1)\pi}{2n-1}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$时等号成立.

(3) 若 $a_0=a_{n+1}=0$,则

$$2S_n(1-\cos\frac{\pi}{n+1})\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-a_{k-1})^2\leqslant 2S_n(1+\cos\frac{\pi}{n+1}),$$

仅当 $a_k=c\sin t$ 时左边等号成立,而仅当 $a_k=c(-1)^{k-1}\sin t$ 时右边等号成立,式中 $t=k\pi/(n+1),1\leqslant k\leqslant n$.

(4) 若 $a_0=0$,则

$$2S_n(1-\cos\frac{\pi}{2\pi+1})\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})^2\leqslant 2S_n(1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}),$$

仅当 $a_k=c\sin t$ 时左边等号成立,而仅当$a_k=c(-1)^{k-1}\sin 2t$ 时右边等号成立,式中 $t=k\pi/(2n+1),1\leqslant k\leqslant n$.

(5) 若 $a_0=a_{n+1}=0$,令 $\Delta^2a_k=a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}$,则

$$16S_n(\sin\frac{\pi}{2(n+1)})^4\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\Delta^2a_k)^2\leqslant 16S_n(\cos\frac{\pi}{2(n+1)})^4,$$

仅当 $a_k=c\sin(k\pi/(n+1))$ $(1\leqslant k\leqslant n)$时等号成立.

(6) 若$a_0=0,0<t<\pi/n$, $\mu=2(1+\cos t)$, $\lambda_k=1+\dfrac{\sin(k+1)t}{\sin(kt)}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$,则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})^2+\lambda_n a_n^2\leqslant\mu S_n,$$

仅当　$x_k a_k+y_{k-1}a_{k-1}=0$, $2\leqslant k\leqslant n$, 时等号成立, 式中 $x_k=(\mu-1-\lambda_k)^{1/2}$, $y_{k-1}=(\lambda_{k-1}-1)^{1/2}$.

(7)　$a_1^2+\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})^2+\lambda a_n^2\geqslant\mu S_n$, 仅当存在 t: $0\leqslant t\leqslant\pi/n$, 使得 $\mu\leqslant2(1-\cos t)$, $\lambda\geqslant1-\dfrac{\sin(n+1)t}{\sin(nt)}$.

FTT 不等式由 Fan, K., Taussky, O. 和 Todd, J. 给出, 见 Monatsh Math., 1955, 59: 73 - 90. 而(3)(4) 中右边的不等式和(6) 是 Alzer. H. 1990 年证明的. 见[301]1991, 161: 142 - 147. 1994, 182(3): 654 - 657.

2001 年, 卢小宁、肖振纲证明了一个包括(3)(4) 的一个更一般的结果, 即下述(8):

(8)　设 $0<t<\pi/n$, $n>1$, 则存在常数 c, 使得

$$\frac{\sin(n+1)t}{\sin nt}a_n^2\pm2\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{k+1}\leqslant2(\cos t)S_n.$$

式中取"+"号时仅当 $a_k=c\sin kt$ 时等号成立; 取负号时, 仅当 $a_k=c(-1)^{k-1}\sin kt$ 时等号成立.

证　因为 $t\in(0,\frac{\pi}{n})$, 所以 $\sin kt>0$, $k=1,2,\cdots,n-1$. 于是

$$\frac{\sin(k+1)t}{\sin kt}a_k^2+\frac{\sin kt}{\sin(k+1)}a_{k+1}^2\geqslant\pm2a_k a_{k+1},$$

仅当　$a_{k+1}\sin kt\pm a_k\sin(k+1)t=0$ 时等号成立.

在不等式两边分别加上　$\dfrac{\sin(n+1)t}{\sin nt}a_n^2$, 得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k-1)t+\sin(k+1)t}{\sin kt}a_k^2\geqslant\frac{\sin(n+1)t}{\sin nt}a_k^2\pm2\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{k+1},$$

再利用和差化积公式 $\sin(k-1)t+\sin(k+1)t=2\sin kt\cos t$　即可得证.

见[348]2001, 11: 24 - 25.

107.　设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 为实数列, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$, 则

(1)　$\sum\limits_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}a_j a_k\leqslant0$;

(2)　$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^3\right|\leqslant\dfrac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{3/2}$;

(3)　$\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_k a_j\mid b_k-b_j\mid\leqslant0$.

108.　设 $a_k>0$, b_k 为任意实数, 若 $\sum\limits_{k\neq j}a_k b_j=0$, 则 $\sum\limits_{k\neq j}b_k b_j\leqslant0$, $(1\leqslant k,j\leqslant n)$.

证　由条件, $(\sum a_k)(\sum b_k)=\sum(a_k b_k)+\sum\limits_{k\neq j}a_k b_j=\sum(a_k b_k)$. 利用柯西不等式, 得:

$$\left(\sum a_k\right)^2\left(\sum b_k\right)^2=\left(\sum a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right)\leqslant\left(\sum a_k\right)^2\left(\sum b_k^2\right).$$

于是,从

$$\left(\sum b_k\right)^2\leqslant\sum b_k^2=\left(\sum b_k\right)^2-2\sum_{k\neq j}b_kb_j,\quad \text{即得}\quad \sum_{k\neq j}b_kb_j\leqslant 0.$$

109. **Redheffer 递归(recurrent)不等式**:设 $f_k=f_k(a_1,\cdots,a_k)$ 和 $g_k=g_k(a_1,\cdots,a_k)$ 定义在集 $D=D_1\times\cdots\times D_k$ 上,则

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_kf_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}g_k$$

称为递归不等式,当且仅当存在函数 $F_k(\lambda)$,使得 $\sup\{\lambda f_k-g_k : a_k\in D_k\}=F_k(\lambda)f_{k-1}$. $(k=1,\cdots,n,f_0=1)$ 成立.

1967 年 Redheffer, R. 证明,上述递归不等式对所有 $a_k\in D_k$ 成立,当且仅当存在一个实数序列 σ_k,使得 $\sigma_1\leqslant 0,\sigma_{n+1}=0$,且 $\lambda_k=F_k^{-1}(\sigma_k)-\sigma_{k+1},k=1,\cdots,n$,其中 $F_n^{-1}(\sigma)$ 表示方程 $F_k(\lambda)=\sigma$ 的一个解.

提示:用数学归纳法证明.详见[318]1967,17(3):683 - 699.

利用递归不等式可以证明许多著名的不等式,例如前面 N106(FTT 不等式),及下面的 N.110 - 111.

110. 设 $a_k>0,1\leqslant k\leqslant n,p>1,a=(a_1,\cdots,a_n),\|a\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}$, $A_k=\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j$,则

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^p\leqslant\frac{p}{p-1}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^{p-1}\cdot a_k$.

证 利用 Young 不等式(见本章 N.27),

$$A_k^{p-1}A_{k-1}\leqslant\frac{1}{p}\left[(p-1)A_k^p+A_{k-1}^p\right].$$

从而

$$\begin{aligned}A_k^p-\frac{p}{p-1}A_k^{p-1}a_k&=A_k^p-\frac{p}{p-1}A_k^{p-1}\left[kA_k-(k-1)A_{k-1}\right]\\&=A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)+\frac{(k-1)p}{p-1}A_k^{p-1}A_{k-1}\\&\leqslant A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)+\frac{k-1}{p-1}\left[(p-1)A_k^p+A_{k-1}^p\right]=\frac{1}{p-1}\left[(k-1)A_{k-1}^p-kA_k^p\right].\end{aligned}$$

由此即可得证.

(2) **Hardy-Landau 不等式**:

$$\|A\|_p<\frac{p}{p-1}\|a\|_p.$$

即 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^p\right)^{1/p}<\frac{p}{p-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}$.

证 从(1) 和 Hölder 不等式,得到

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^p<\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n}A_k^{p-1}a_k\leqslant\frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}A_k^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

式中 $1/p+1/q=1$,再注意到 $q(p-1)=p$,即可得证.

Hardy-Landau 不等式有以下推广:

(3)　设 a_j,b_j,c_j 均为非负实数,$1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant m\leqslant n$,

①　若 $1\leqslant s\leqslant r$ 时,$\sum_{k=1}^{m}a_k\left(\sum_{j=1}^{k}b_j\right)^r\leqslant\left(\sum_{j=1}^{k}b_k\right)^s$,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{j=1}^{k}b_jc_j\right)^r\leqslant\kappa(r,s)\left(\sum_{k=1}^{n}b_kc_k{}^{r/s}\right)^s,$$

式中　$\kappa(r,s)=\left(\frac{r}{r-s}\right)^r$.特别,取 $s=1,b_k=1,a_n=\frac{1}{n^r}$.又得到 Hardy-Landau 不等式,见[320]1987,38:401－425.

②　若 $0<r<s\leqslant1$ 时,$\sum_{k=1}^{m}a_k\left(\sum_{j=1}^{k}b_j\right)^{\frac{r}{r-s}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{m}b_k\right)^{\frac{1-r}{s-r}}$,则

$$r^r\left(\sum_{k=1}^{n}a_kc_k{}^{r/s}\right)^s\leqslant\sum_{k=1}^{m}b_k\left(\sum_{j=k}^{n}a_jc_j\right)^r.$$

特别,取 $s=1,p=r,b_k=1,a_k=k^q,c_k=k^{-q}x_k,1\leqslant k\leqslant n$,式中 $q=\frac{r}{1-r}$,就得到 **Copson 不等式**.见[320]1988,39(2):385－400.

(4)　若 $0<p<1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^{\frac{1}{p}}+\frac{n}{1-p}A_n^{1/p}<\frac{1}{(1-p)^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}a_k^{1/p}.$$

见[4]P.174.

(5)　$\sum_{k=1}^{n}A_k^2+\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\|a\|_1^2\leqslant4\|a\|_2^2$.(见[386]1998,270:275－286.)

111.　**Carleman 不等式**:设 $a_k>0,1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1\cdots a_k)^{1/k}<e\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right).$$

证　利用 N.109(递归不等式),细节见[4]P.173－174,而 Hardy 等([1]P280－281)利用 AG 不等式的变形给出了一个巧妙的简洁证明:选取正数列$\{c_k\}$,使得

$\left(\prod_{k=1}^{n}c_k\right)^{1/n}=n+1$.此处我们选取 $c_k=\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.于是

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1\cdots a_k)^{1/k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(c_1a_1)(c_2a_2)\cdots(c_ka_k)}{c_1c_2\cdots c_k}\right)^{1/k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(c_1\cdots c_k)^{1/k}}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}c_ja_j\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}c_ka_k\left(\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m(c_1\cdots c_m)^{1/m}}\right)=\sum_{k=1}^{n}c_ka_k\left(\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}c_ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{c_ka_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e\sum_{k=1}^{n}a_k.$$证毕.

1963 年,Bruijn 将上述系数 e 改进为渐进式

$$\lambda_n=e-\frac{2\pi^2e}{(\ln n)^2}+0\left(\frac{1}{(\ln n)^3}\right).$$

2001 年匡继昌与 Rassias,Th. M. 证明 Carleman 不等式的一种加权推广和改进形式:

设 $0 < q_{n+1} \leqslant q_n$，$Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$，则 $\forall\, n > 1$，成立

$$\sum_{k=1}^{n} q_{k+1}\Big(\prod_{j=1}^{k} a_j^{q_j}\Big)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e\sum_{k=1}^{n}\left[1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m q_k^m}{(Q_k+q_k)^m}\right]q_k a_k.$$

式中 $\{b_k\}$ 由下述递推式确定：

$$b_1 = \frac{1}{2},\ b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{n+2-k}\right).$$

Carleman 不等式的级数形式第 11 章 §2.N.38.

112.　设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$，

(1)　**Weinberger 不等式**：若 $r \geqslant 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k^r \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\Big)^r.$$

(2)　**Bellman 不等式**：若 $f(0) = 0.\ f'(0) \geqslant 0$，$f'(x)$ 递增连续，则

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(a_k) \geqslant f\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\Big).$$

提示：利用函数图形面积的比较，见[8]P.152－153 或转化为比较导数的积分.

113.　**Laguerre 不等式**：设 $\sum_{k=1}^{n} x_k = p$，$\sum_{j<k} x_j x_k = q$，$n > 2$，则对于所有 $k = 1,\cdots,n$，有

$$\left|x_k - \frac{p}{n}\right| < \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\sqrt{p^2 - \frac{2n}{n-1}q}.$$

提示：根据假设，$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = p^2 - 2q$，因此，从 $\sum_{j<k}(x_j - x_k)^2 \geqslant 0 \Rightarrow p^2 - \frac{2n}{n-1}q \geqslant 0$. 将这个关系式用于其余 $n-1$ 个 $x_j (j \neq k)$，得到

$$(p - x_k)^2 - \frac{2(n-1)}{n-2}(q - px_k + x_k^2) \geqslant 0.$$

即 $nx_k^2 - 2px_k + 2(n-1)q - (n-2)p^2 \leqslant 0$，由于此式左边的判别式 $(n-1)^2\big(p^2 - \frac{2n}{n-1}q\big) \geqslant 0$，故 x_k 必介于其两实零点之间.

114.　设 $\sum_{k=1}^{n} x_k = b$，$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{b^2}{n-1}$　$(b > 0, n \geqslant 2)$，则

$$0 \leqslant x_k \leqslant \frac{2b}{n},\ (k = 1,\cdots,n) \tag{114.1}$$

证　由假设，有 $\sum x_k^2 = \frac{b^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\big(\sum x_k\big)^2$. 于是

$(n-2)\sum x_k^2 = 2(x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n)$，从而

$$(n-2)x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_2 - x_n)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \cdots + (x_3 - x_n)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 = 2x_1(x_2 + \cdots + x_n). \tag{114.2}$$

若 $x_1 < 0$，则从(114.2)式，有 $x_2 + \cdots + x_n < 0$，于是，$b = x_1 + (x_2 + \cdots + x_n) < 0$，这与假设矛盾. 因此，必须 $x_1 \geqslant 0$. 同理可证 $x_k \geqslant 0$，$k = 2,\cdots,n$. 为证(114.1)式右端，可令

$y_k=\frac{2b}{n}-x_k$,则 $\sum y_k=b,\sum y_k^2=\frac{b^2}{n-1}$,从而 $y_k\geqslant 0$,即 $x_k\leqslant 2b/n,k=1,\cdots,n$.证毕.

115. **Kalajdžic 不等式**:设 $x_j\geqslant 0,j=1,\cdots,n$,且 $\sum_{j=1}^{n}x_j=na$,则对于 $k\geqslant 1$,有

$$\sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{k}\frac{x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m_1!\cdots m_n!}\leqslant n(n^k-1)\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}\quad(\text{式中}\sum_{j=1}^{n}m_j=k+1).$$

证　多项式展开可以写成

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_n=k+1\\0\leqslant m_j\leqslant k}}\frac{(k+1)!}{m_1!\cdots m_n!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^{k+1}-\sum_{j=1}^{n}x_j^{k+1}=(na)^{k+1}-\sum_{j=1}^{n}x_j^{k+1}$$

$$\leqslant(na)^{k+1}-na^{k+1}=n(n^k-1)a^{k+1}.$$ (见[4]P.289)

116. 设 $\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=a_n\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$,其中 $a_n\neq 0$.则

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k|\cdot|x|^k\leqslant|a_n|\prod_{k=1}^{n}(|x|+|x_k|).$$

117. [IMO].设 $a_k=c+\sum_{j=k}^{n-1}a_{j-k}(a_j+a_{j+1})$, $1\leqslant k\leqslant n-1,a_0=a_n=1$,则

$$c\leqslant\frac{1}{4n}.$$

118. [MCM].设 $p>1,n$ 个正数 a_k 满足 $(n-1)^{p-1}(\sum a_k^p)<(\sum a_k)^p$, $(n>3)$,则对任何 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$,都有

$$2^{p-1}(a_i^p+a_j^p+a_k^p)<(a_i+a_j+a_k)^p.$$

提示:利用带参数的 Hölder 不等式:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k|a_k|)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{\lambda_k}\right)^q\right)^{1/q},$$

式中 $\lambda_k>0(1\leqslant k\leqslant n),p,q$ 为共轭指数:$(1/p)+(1/q)=1,p>1$.见[99](2)P.32－37.

119. [MCM].设 k 个正数 $x_1,\cdots,x_k$ 满足

$$\prod_{j=1}^{k}x_j=\sum_{j=1}^{k}x_j,\ 1<k\leqslant n,\text{则}\quad\sum_{j=1}^{k}x_j^{n-1}\geqslant kn.$$

仅当 $k=n$ 且所有的 x_j 相等时等号成立.见[99](2)P.80.(提示:利用 A-G 不等式)

120. 设 p,q 为自然数,$p\geqslant q,x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为正数,则

$$\left(\sum x_k^p\right)/\left(\sum x_k^q\right)\geqslant\left(\prod x_k\right)^{\frac{p-q}{n}},$$

仅当所有 x_k 相等时等号成立.

121. **Opial 型离散不等式**:设 $\{a_k\}$ 为实数列,$\Delta a_k=a_k-a_{k-1}$, $\Delta b_k=b_k-b_{k-1}$, $a_0=b_0=0$.

(1)　$2S_n\left(\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\Delta a_k\leqslant 2S_n\left(\cos\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2$,式中 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$,更

一般形式见[369]1984,47:413 - 417;

(2) 设$\{a_k\}$为非负递增实数列,$p \geqslant 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p \Delta a_k \leqslant \frac{(n+1)^p}{p+1} \sum_{k=1}^{n} (\Delta a_k)^{p+1}.$$

见 Canad. Math. Bull. 1967,10:115 - 118. 更一般形式为

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p |\Delta a_k|^q \leqslant c_n(p,q) \sum_{k=1}^{n} |\Delta a_k|^{p+q}.$$

式中 $c_n(p,q)$ 的表达式见 Canad. Math. Bull. 1968,11:73 - 77. 1992 年杨国胜等证明:若 $a_0 = a_n = 0, p, q \geqslant 1$,则当 n 为奇数时,$c_n(p,q) = \dfrac{q(n+1)^p}{2^p(p+q)}$;当 n 为偶数时,$c_n(p,q) = \dfrac{q(n+2)^p}{2^p(p+q)}$. 见[330]1992,23(1):67 - 78.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \Delta b_k + b_k \Delta a_k) \leqslant \dfrac{n}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} [(\Delta a_k)^2 + (\Delta b_k)^2]$.

若加上 $a_n = b_n = 0, p, q \geqslant 1$,则

$$(p+q)\sum_{k=1}^{n} (|a_k|^p |b_k|^q) \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{p+q} \sum_{k=1}^{n} (p|\Delta a_k|^{p+q} + q|\Delta b_k|^{p+q}).$$

(Pachpate, B. G. [301]1987,127(2):470 - 474.)

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n} (|a_k||\Delta a_k| + |b_k||\Delta b_k|) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right) \sum\limits_{k=1}^{n} (|\Delta a_k|^2 + |\Delta b_k|^2)$.

(Pachpatte, B. G., An. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect, I a Mat. (N. S)1990, 36(3):237 - 240.).

(5) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\Delta a_k) a_{n+1-k}^p\right)^{1/p} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} (\Delta a_k) a_{n+1-k}^{1/p}$, $p \geqslant 1$,

(Alzer, H. [358]1994,133(1 - 3):279 - 283.)

(6) 设 $k_j \in N, D_j = \{1,2,\cdots,k_j+1\}, D = \prod\limits_{j=1}^{m} D_j = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$,对于 f: $N^n \to R^1$,定义差分算子:$x = (x_1,\cdots,x_n), \Delta_j f(x) = f(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j+1,x_{j+1},\cdots,x_n) - f(x), \Delta_j \Delta_i f(x) = \Delta_j[\Delta_i f(x)]$,若 $f: D \to R^1$ 满足条件:

$f(x_1,\cdots,x_{j-1},1,x_{j+1},\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots,x_{j-1},k_j+1,x_{j+1},\cdots,x_n) \equiv 0, j = 1,2, \cdots, n$,则称 $f \in F(D)$. 若 $f \in F(D), p \geqslant 1, q > 0$,则

$$\sum_{r_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{r_n=1}^{k_n} |f(r_1,\cdots,r_n)|^p |\Delta_n \cdots \Delta_1 f(r_1,\cdots,r_n)|^q \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{2^n}\right)^p \sum_{r_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{r_n=1}^{k_n} |\Delta_n \cdots \Delta_1 f(r_1,\cdots,r_n)|^q;$$

(杨恩浩等,暨南大学学报,2000,21(3):1 - 7)

122. **Wirtinger 型离散不等式:**

$$\sum_{r_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{r_n=1}^{k_n} |f(r_1,\cdots,r_n)|^p \leqslant \left(\frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{2^n}\right)^p \sum_{r_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{r_n=1}^{k_n} |\Delta_n \cdots \Delta_1 f(r_1,\cdots,r_n)|^p.$$

它包含了 Pachpatte,G.B. 当 $n=2,3$ 时的一系列结果.

杨恩浩等还建立了更为广泛的类似不等式. 见暨南大学学报,2000,2(3):1-7.

123.　**幂和的乘积不等式**:1985 年 Zsolt,P. 证明:设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$, $x_k>0$, $1\leqslant k\leqslant n$, $\sum a_k=0$ (a_k 为实数), $a=(a_1,\cdots,a_n)$. 记 $M(x,a)=\sum x_k^{a_k}$,则

$\prod[M(x,a)]^{a_k}\geqslant 1$ 成立的充要条件是 $\sum a_k\mid b_k-b_m\mid\geqslant 0$ 对所有 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 成立. 这个不等式包含了 Lyapunov 不等式和 Daroczy,Z.,Losonczi,L. 的结果. 见 Monatsh Math. 1985,100(2):137-144.

124.　$$\left(\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{k}\right)^2\leqslant\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{a_ja_k}{j+k-1},$$

仅当 $a_2=\cdots=a_n=0$ 时等号成立.

证　令 $b_k=\dfrac{k-1}{k}a_k$, $k=1,\cdots,n$,则

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{a_ja_k}{j+k-1}-\left(\sum_{j=1}^n\frac{a_k}{k}\right)^2=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{b_jb_k}{j+k-1}$$
$$=\int_0^1\left(\sum_{j=1}^n\sum_{j=1}^n b_jb_kx^{j+k-2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^n b_kx^{k-1}\right|^2\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

125.　设 p,q,m,n 都是自然数, $f(x)>0$ 且递增,则

(1)　$$\sum_{k=1}^p f\left(\frac{p}{k}\right)+\sum_{k=1}^q f\left(\frac{q}{k}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{p+q}f\left(\frac{p+q}{k}\right);$$

(2)　$$\sum_{k=p+1}^{p+m}f\left(\frac{p}{k}\right)+\sum_{k=q+1}^{q+n}f\left(\frac{q}{k}\right)\leqslant\sum_{k=p+q+1}^{p+q+m+n}f\left(\frac{p+q}{k}\right).$$

见[1]定理 396.

126.　$$\left|\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}-\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\mid a_k-b_k\mid,$$

推导弧长公式时用到这个不等式.

127.　设 a_k,b_k 是正数, $k=1,\cdots,n$. $p\geqslant 1$, Q 表示集合 $\{1,\cdots,n\}$ 的全部置换的集合,则

$$\left|\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}-\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\right|\leqslant\min\left\{\sum_{k=1}^n\mid a_k-b_{t(k)}\mid: t\in Q\right\}.$$

见[4]P. 384-385.

128.　设 $\mid x_k\mid\leqslant 1$, $\mid y_k\mid\leqslant 1$, $k=1,\cdots,n$,则

$$\sum\sqrt{1-(x_k^2+y_k^2)}\leqslant n\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\sum x_k\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum y_k\right)^2}.$$

提示:构造 R^n 中"单位球"模型.

129.　设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,则

(1)　$$\sum_{k=1}^n\mid x-a_k\mid\geqslant\begin{cases}\sum\limits_{j=p}^n a_j-\sum\limits_{j=1}^{p-1}a_j, & \text{当 } n \text{ 为偶数}, a_{p-1}\leqslant x\leqslant a_p,\\ \sum\limits_{j=q}^n a_j-\sum\limits_{j=1}^{q-1}a_j, & \text{当 } n \text{ 为奇数,且 } x=a_q,\end{cases}$$

式中 $p = (n/2) + 1, q = (n+1)/2$.

(2) $$\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(a_j - a_k)^r \geqslant c_r(n)\min_{1\leqslant k<n}(a_{k+1}-a_k)^r,$$

式中 $r>0$, $c_r(n)$ 的最大值为

$$c_r(n) = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(j-k)^r.$$

特别,当 $r=2$ 时,$c_2(n) = \sum_{k=1}^{n}(n-k)k^2 = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12}$.

见[305]2000,107(6).

130. 设 $a_k>0$,并记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,则

(1) $$\ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{S_n}{a_1}\right)\right) < \sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_k} < \ln\frac{S_n}{a_1}.$$

其中左边不等式成立还要求 $a_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$,由 Alzer,H. 与 Brenner,J. L. 于 1992 年证明;右边不等式由 Linkovskii,Z. B. 于 1979 年证明.

(2) $$\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{a_k}{S_k}\right)^j < \ln\frac{S_n}{a_1}.$$

证 设 $k\geqslant 2$,则

$$\ln\frac{S_{k-1}}{S_k} = \ln\left(1-\frac{a_k}{S_k}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{a_k}{S_k}\right)^j < -\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\left(\frac{a_k}{S_k}\right)^j.$$

于是

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\left(\frac{a_k}{S_k}\right)^j < \sum_{k=2}^{n}\ln\frac{S_k}{S_{k-1}} = \ln\frac{S_n}{a_n}.$$

见[301]1992,168(2):319 - 328.

131. **Volenec 不等式**:设 $a_k>0$, $\sum_{k=1}^{n}a_k = 1$, $p>0$,则

(1) $$\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}\right) \leqslant \left(\frac{k}{n}\right)^{\binom{n}{k}};$$

(2) $$\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left[\sum_{j=1}^{k}(1-a_{i_j})\right] \leqslant \left(\frac{(n-1)k}{n}\right)^{\binom{n}{k}};$$

(3) $$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left[\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{a_{i_j}}-1\right)\right]^p \leqslant \binom{n}{k}(n-1)^{pk};$$

(4) $$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-a_{i_j}}\right)^p \geqslant \binom{n}{k}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{pk};$$

(5) $$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{a_{i_j}}\right)\right)^p \geqslant \binom{n}{k}n^{pk},$$

以上均仅当 $a_1 = \cdots = a_n = 1/n$ 时等号成立. 见[4]P.473.

132. **初等对称多项式不等式**:设 $a_k>0$, $a = (a_1,\cdots,a_n)$,我们在第 1 章 §3(3.139)

式定义了 a 的 k 次对称函数 $E_n(a,k)$，此处继续讨论它的有关不等式，为了简化记号，将 $E_n(a,k)$ 改记为 $S_k(a)$ 或 S_k. $B_k = B_k(a) = S_k(a)\Big/\binom{n}{k}$，$P_k(a) = (B_k(a))^{1/k}$ 就是 a 的 k 次对称平均(见第 1 章 §3(3.140)). $S_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_2 = \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n} a_{k_1}a_{k_2}, \cdots, S_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

(1)　$\dfrac{S_n}{S_{n-1}} < \cdots < \dfrac{S_3}{S_2} < \dfrac{S_2}{S_1} < S_1$;

这个不等式有多种证明，见[1]P53 - 60. 1983 年堵秀凤利用判定实系数多项式正根个数的 Descartes 定理给出了一个新的证明，见[345]1983，11:27.

(2)　$[S_k(a)]^{1/k} + [S_k(b)]^{1/k} \leqslant [S_k(a+b)]^{1/k}$;

(3)　**Marcus-Lopes 不等式：**

$$\frac{S_k(a)}{S_{k-1}(a)} + \frac{S_k(b)}{S_{k-1}(b)} \leqslant \frac{S_k(a+b)}{S_{k-1}(a+b)};\ (S_0(a) = S_0(b) = 1).$$

推广：　设 $1\leqslant m < k < n$，则

$$\left(\frac{S_k(a)}{S_{k-m}(a)}\right)^{1/m} + \left(\frac{S_k(b)}{S_{k-m}(b)}\right)^{1/m} \leqslant \left(\frac{S_k(a+b)}{S_{k-m}(a+b)}\right)^{1/m}.$$

(朱宗毅，[344]1988，1:51 - 54)

(4)　$S_k(a) > 0 \Leftrightarrow a_k > 0$.

(5)　**Newten 不等式(对数凸性不等式)：**$B_{k-1}(a)\cdot B_{k+1}(a) \leqslant (B_k(a))^2$.

仅当 $\forall a_k$ 相等时等号成立. (见[12]P. 139)

推广：　**立方不等式：**设 $n\geqslant 3, k = 0,1,\cdots,n-3$，则

$$6B_kB_{k+1}B_{k+2}B_{k+3} - 4B_kB_{k+2}^3 - B_k^2B_{k+3}^2 - 4B_{k+1}^3B_{k+3} + 3B_{k+1}^2B_{k+2}^2 \geqslant 0.$$

证明见[305]1989，96(9):815 - 819.

(6)　$(3S_3 - S_1S_2)^2 \leqslant 2[1-1/n](S_1^2 - 2S_2)(2S_2^2 - 3S_1S_3)$，

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

(7)　[MCM]. 设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2a_1$. $n\geqslant 3$，p 为素数且 p^k 能整除 $S_n(a)$，则 $S_n(a) > p^k\cdot n!$. (提示：用反证法)

(8)　[MCM]. 设 $a_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$，则当 $n\geqslant 4$ 时，

$$S_2(a) \leqslant \frac{1}{4}.$$

提示：$0 \leqslant \sum_{j\neq k}(a_j - a_k)^2 = 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2S_2(a)$. 这表明 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - S_2(a) = 0$ 时 $S_2(a)$ 最大，因为这时 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，又已知 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$，所以 $a_k = \dfrac{1}{n}$. 从而 $S_2(a)$ 的最大值 $= \sum_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{n})^2 = \dfrac{1}{n}$. 即　$S_2(a) \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

(9)　设 $1\leqslant k\leqslant n-1$，则

$$4(S_{k-1}S_{k+1}^3+S_{k-1}^2S_{k+2}^2+S_k^3S_{k+2})\leqslant 3(S_{k-1}S_{k+2}+S_kS_{k+1})^2.$$

Briggs,W.E.在证明了上述结果后,进一步问下述两个不等式是否成立:

① $S_{k+1}(S_{k-1}S_{k+3}+2S_kS_{k+2})<S_{k-1}S_{k+2}^2+S_k^2S_{k+3}+S_{k+1}^3$;

② $S_{k-1}^2(S_{k+1}^2-S_kS_{k+2})<S_k^2(S_k^2-S_{k-1}S_{k+1})$.

见[305]1991,98(9),E6629.

(10) $S_n\leqslant\dfrac{1}{n^2}S_1S_{n-1}\leqslant\dfrac{1}{n^2}S_1^n$.(王振,陈计,[348]1994,1:34)

133. **欧氏空间 R^n 中 n 维向量不等式**:设 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$. $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标,其中 α_k 是非负整数. $|\alpha|=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k$, $x^\alpha=\prod\limits_{k=1}^n(x_k^{\alpha_k})$, $|x|=\left(\sum\limits_{k=1}^n|x_k|^2\right)^{1/2}$, c,c_1,c_2 为正的常数,

(1) $c_1|x|^{2m}\leqslant\sum\limits_{|\alpha|=m}|x^\alpha|^2\leqslant c_2|x|^{2m}$;

(2) $c_1(1+|x|^2)^m\leqslant\sum\limits_{|\alpha|=m}|x^\alpha|^2\leqslant c_2(1+|x|^2)^m$;

(3) $\dfrac{1+|x-y|^{n/r}}{1+|z|^{n/r}}\leqslant c(1+|x-y-z|^{n/r})$,　$r>0$;

(4) 设 $|\alpha|\leqslant m,\delta=\min\left\{\sum\limits_{k=1}^n|x|^m:|x|=1\right\}>0$,则

$$|x^\alpha|\leqslant(1+|x|)^m\leqslant 2^m(1+|x|^m)\leqslant\frac{2^m}{\delta}\sum_{|\alpha|=m}|x^\alpha|;$$

(5) 若 $|x|>2|y|$,则

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|\leqslant\sqrt{2}\left|\frac{y}{x}\right|.$$

证　我们用平面几何方法来证明这个高维空间中的不等式,作以 $|x|,|y|,|x-y|$ 为边长的直角三角形 $OA'B'$(斜边长为 $|x|$).在 OB' 上取 $\overline{OB}=\dfrac{x-y}{|x-y|}$,在 OA' 上取 $\overline{OA}=\dfrac{x}{|x|}$,则 $|\overline{OB}|=|\overline{OA}|=1$,记 $\angle AOB=\theta$,则 $\angle ABO=\angle BAO=\alpha=\dfrac{\pi-\theta}{2}$. $|\overline{AB}|=|\overline{OB}-\overline{OA}|=\left|\dfrac{x-y}{|x-y|}-\dfrac{x}{|x|}\right|$,$\sin\theta=\left|\dfrac{y}{x}\right|$,$\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}\right)=\cos\dfrac{\theta}{2}=\left(\dfrac{1+\cos\theta}{2}\right)^{1/2}=\left[\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{|x-y|}{|x|}\right)\right]^{1/2}$.再利用正弦定理:$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha}$,得到

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|=\left|\frac{y}{x}\right|\cdot\left(\frac{2|x|}{|x|+|x-y|}\right)^{1/2}\leqslant\sqrt{2}\left|\frac{y}{x}\right|.$$

(6) **Peetre 不等式**:$\left(\dfrac{1+|x|^2}{1+|y|^2}\right)^t\leqslant 2^{|t|}(1+|x-y|^2)^{|t|}$,$t\in R^1$.

134. **Beckenbach 不等式**:设 $a_k,b_k>0,k=1,\cdots,n,1<p\leqslant 2$,令 $S_n(a,p)=\sum\limits_{k=1}^n a_k^p,S_n(a+b,p)=\sum\limits_{k=1}^n(a_k+b_k)^p$,则

$$\frac{S_n(a+b,p)}{S_n(a+b,p-1)} \leqslant \frac{S_n(a,p)}{S_n(a,p-1)} + \frac{S_n(b,p)}{S_n(b,p-1)}.$$

当 $0 \leqslant p \leqslant 1$ 时,不等号反向.

提示:利用 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式,详见[2]P.27 - 28.

1985 年,王挽澜,王鹏飞利用拟线性化方法和基本不等式,建立了类似于上述不等式的结果:若 $1 < p < 2$.则

(1) $$\sum a_k b_k \leqslant \frac{S_n(a,p)}{S_n(a,p-1)} \cdot \frac{\left[S_n\left(b,\frac{p}{p-1}\right)\right]^{p-1}}{\left[S_n\left(b;\frac{p-1}{p-2}\right)\right]^{p-2}};$$

(2) $$\frac{\left[S_n\left(a+b,\frac{p}{p-1}\right)\right]^{p-1}}{\left[S_n\left(a+b,\frac{p-1}{p-2}\right)\right]^{p-2}} \leqslant \frac{\left[S_n\left(a,\frac{p}{p-1}\right)\right]^{p-1}}{\left[S_n\left(a,\frac{p-1}{p-2}\right)\right]^{p-2}} + \frac{\left[S_n\left(b,\frac{p}{p-1}\right)\right]^{p-1}}{\left[S_n\left(b,\frac{p-1}{p-2}\right)\right]^{p-2}};$$

(3) $$\left(\frac{S_n(a+b,p)}{S_n\left(a+b,\frac{(p-1)^2}{p-2}\right)}\right)^{2-p} \leqslant \frac{S_n(a,p)}{S_n(a,p-1)} + \frac{S_n(b,p)}{S_n(b,p-1)}.$$

作者提出,(3) 中左边与 $\frac{S_n(a+b,p)}{S_n(a+b,p-1)}$ 能否比较大小?见"成都科技大学学报 1987,4:121 - 124."1991 年毛经中证明;若 $p \geqslant 2$,则

$$\frac{S_n(a,1)+[S_n(a,p)]^{1/p}}{S_n(a,p)\cdot S_n(a,1-p))} \leqslant \frac{n+n^{1/p}}{n^2};$$

若 $p,q \geqslant 2$,则对所有非负实数 c_1,c_2,有

$$\frac{c_1[S_n(a,p)]^{1/p}+c_2[S_n(a,q)]^{1/q}}{S_n(a,p)S_n(a,q)S_n(a,1-p-q)} \leqslant \frac{c_1 n^{1/p}+c_2 n^{1/q}}{n^3},$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立,这是 Malfatti 不等式的推广.作者还推广了 Beckenbach 不等式,见[333]1991,36(15):1194.

135. **Adamoviĉ 不等式**:设 $a_k > 0, k = 1,\cdots,n$,则

$$\binom{n}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{a_i a_j} \geqslant 4\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{a_i+a_j}\right)^2,$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.[4]P290.

136. **伪平均不等式**:设: (1) $a_k,b_k,c_k,d_k(k=1,\cdots,n)$ 都是正数;

(2) $\sum a_k \geqslant \sum c_k$;

(3) $a_k - c_k = b_k - d_k, k = 1,\cdots,n$,则

$$\frac{(\sum a_k)(\sum b_k)}{(\sum c_k)(\sum d_k)} \leqslant \max\left\{\frac{a_1 b_1}{c_1 d_1},\cdots,\frac{a_n b_n}{c_n d_n}\right\}.$$

当条件(2) 中不等号反向时,上述不等式也反向.见[305],1961,68:670 - 671.

137. 设 n 个正数 a_k 不全相等,则

$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^{x+1}\right)/\left(\sum_{k=1}^n a_k^x\right)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上严格递增函数.见[348]1989,3:6.

138. 设 $a_k \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n, p > 0$,则

$$n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1/a_k\right).$$

证 对于任意实数 $p, q, f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{x-q}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p-x}\right)$是凸函数,且关于 $x_0 = \frac{1}{2}(p + q)$ 对称,所以,在 x 离开 x_0 时,f 递增. 特别,取 $q = 0$,就得到所需要的不等式

$$f(p) \leqslant f(p+1).$$

139. 设:(1) $a_k > 0, k = 1, \cdots, n,\ 0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,

(2) $(a_{k+1})/(b_{k+1}) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)/\left(\sum_{j=1}^{k} b_j\right),\ k = 1, \cdots, n-1.$

则 $$\sum (a_k / b_k) \geqslant n\left(\sum a_k\right)\left(\sum b_k\right)^{-1},$$

仅当 $a_k = c \cdot b_k, k = 1, \cdots, n$ 时等号成立. 当条件(2) 中不等号反向时,上式中不等号也反向.

注 条件(2) 可换成$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \leqslant \frac{a_k}{b_k}, k = 1, \cdots, n-1$,或 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$,

证 用数学归纳法,见[350]1985,6:17 - 19.

140. (1) 设 $a_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$,且 $a_{n+1} = a_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^n.$$

提示:令 $b_k = \frac{a_k}{a_{k+1}},\ b_{n+1} = 1$,则 $\prod_{k=1}^{n+1} b_k = 1$,问题变成证明 $\sum_{k=1}^{n+1} b_k^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} b_k^n$.

利用几何 — 算术平均不等式,有

$$b_k^{-1} = b_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n+1} b_j\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^n - b_k^n\right).\ \text{因此},\ \sum_{k=1}^{n+1} b_k^{-1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j^n\right) - b_k^n\right\} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k^n.$$

(2) 设 $p, a_k, b_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 均为正数,则

$$\sum (a_k^{p+1}/a_k^p) \geqslant (p+1)\sum a_k - p\sum b_k,$$

仅当 $a_k = b_k$ 时等号成立.

推论 1 Radon 不等式:

$$\sum (a_k^{p+1}/b_k^p) \geqslant \left(\sum a_k\right)^{p+1}/\left(\sum b_k\right)^p,$$

仅当所有 a_k/b_k 相等时等号成立.

推论 2 $\sum (a_k/b_k^p) \geqslant \sum (p + 1 - pb_k) a_k$,

仅当 $\forall\, b_k = 1$ 时等号成立.

推论 3 $\sum (a_k/b_k^p) \geqslant \left(\sum a_k\right)^{p+1}/\left(\sum a_k b_k\right)^p$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. 见[305]1952,59:687 - 688,[348]1989,1:3 - 5,1989,8:21.

(3) 设正数 $a_k, b_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k = A, \sum_{k=1}^{n} b_k = B$,则当 $p > 0, \beta$ 为实数时,有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^\beta}{a_k^p}\geqslant n\left(\frac{n}{A}\right)^p B^{\beta/n}.$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n, b_1=\cdots=b_n$ 时等号成立.

推论　设 $a_k>a_{k+1}, b_k>0$ 且 $\prod_{k=1}^{n-1}b_k=b_n^{n-1}$,则

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{a_k-a_{k+1}}+\frac{(n-1)^2b_n}{a_n-a_1}\geqslant 0.$$

见[348]1987,8:29.

(4)　[MCM]. 设 $a_k,b_k>0$, $\sum_{k=1}^{n}a_k=A$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=B$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\leqslant\frac{AB}{A+B}.$$

(5)　设 a_k,b_k,p,q 均为正数,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^{p+q}}{b_k^p}\right)^q\geqslant\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^q\right)^{p+q}}{\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^p},$$

仅当 $\forall\, a_k/b_k$ 相等时等号成立.(安振平,[345]1994,6:43).

(6)　[MCM]. 设 $|a_k|\leqslant 1, a_{n+1}=a_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_ka_{k+1}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k^2}.$$

141.　[MCM].设正数 $a_k,b_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 满足

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$,则　$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k.$

提示:$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k+b_k}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=0$.从而

$$4\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}-2\sum_{k=1}^{n}a_k=2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k}-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)^2}{a_k+b_k}\geqslant 0.$$

142.　[IMO]. 设 $x_k>0, x_ky_k-z_k^2>0, 1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\frac{n^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_ky_k-z_k^2},$$

仅当 $x_1=\cdots=x_n, y_1=\cdots=y_n, z_1=\cdots=z_n$ 时等号成立.

提示:用数学归纳法,$n=2$ 时的证明见[38]P.452.

143.　设 $a_k>0, 1\leqslant k\leqslant n, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, n>2, 0<\beta\leqslant 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{S_n-a_k}{a_k}\right)^\beta\geqslant(n-1)^{2\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{S_n-a_k}\right)^\beta.$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立.

证　令

$$A=\sum_{k=1}^{n}(\frac{S_n-a_k}{a_k})^{\beta}=(n-1)^{\beta}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-\beta}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_j\right)^{\beta},$$

由于 $f(x)=-x^{\beta}$ 当 $x>0$ 时为凸函数,所以,由 Jensen 不等式,对于 $k=1,\cdots,n$,有

$$-\left(\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_j\right)^{\beta}\leqslant-\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_j^{\beta},\text{即}\quad(\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq k}^{n}a_j)^{\beta}\geqslant\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq k}^{n}a_j^{\beta},$$

仅当 $a_1=\cdots=a_{k-1}=a_{k+1}=\cdots=a_n$ 时等号成立. 所以

$$A\geqslant(n-1)^{\beta}\sum_{\substack{j\neq k\\j,k=1}}^{n}\frac{1}{n-1}a_j^{\beta}a_k^{-\beta}$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立. 将上式变为

$$A\geqslant(n-1)^{\beta}\sum_{j=1}^{n}a_j^{\beta}(\frac{1}{n-1})\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_k^{-\beta}.$$

又由于 $f(x)=x^{-\beta}$ 当 $x>0$ 时为凸函数,再由 Jenscn 不等式,得到

$$A\geqslant(n-1)^{\beta}\sum_{j=1}^{n}a_j^{\beta}(\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_k)^{-\beta}=(n-1)^{\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-1)^{\beta}a_j^{\beta}}{(S_n-a_j)^{\beta}},\quad\text{所以}$$

$$A\geqslant(n-1)^{2\beta}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j}{S_n-a_j}\right)^{\beta}.$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立. 证毕. 见[305]1986.93(7):573.

144. 设 $a_k>0,1\leqslant k\leqslant n,n>1$,令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,则

(1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{S_n}{S_n-a_k}\geqslant\frac{n^2}{n-1}$;

(2) $n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_n-a_k}\right)^{-1}\leqslant n-1\leqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{S_n-a_k}{a_k}\right)$;

(3) $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{a_k^p})\geqslant\left[1+\left(\frac{n}{S_n}\right)^p\right]^n,(p>0)$;

(4) 若 $S_n\leqslant n,p>0$,则

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^p+\frac{1}{a_k^p})\geqslant\left[(\frac{n}{S_n})^p+(\frac{S_n}{n})^p\right]^n,$$

以上均仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立.

145. **Shapiro 不等式:** 设 $0\leqslant a_k<1.1\leqslant k\leqslant n$. 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\geqslant\frac{nS_n}{n-S_n}.$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.

证 1 用 Cauchy 不等式:

$$n^2=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-a_k}\right)^{1/2}(1-a_k)^{1/2}\right]^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)\right).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_k}\right)-n\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-a_k)}-n=\frac{n^2}{n-S_n}-n=\frac{nS_n}{n-S_n}.$$

证 2　不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则 $1-a_1\geqslant 1-a_2\geqslant\cdots\geqslant 1-a_n$. 从而 $\frac{a_1}{1-a_1}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_n}{1-a_n}$. 由 Chebyshev 不等式(见第 1 章 §3N.9)，

$$\frac{1}{n}S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1-a_k)}(1-a_k)\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)$$
$$=\left(\frac{n-S_n}{n^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\right).$$

证 3　用幂级数展开式和 C_p 不等式(见本章 N.18)：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_k^m\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^m\right)\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^m=S_n\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^{m-1}$$
$$=\frac{S_n}{1-(S_n/n)}=nS_n/(n-S_n).$$

用证 3 的办法可类似地证明它的下述推广形式：

(1)　设 $a_k\geqslant 0, M>a_k, 1\leqslant k\leqslant n, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则当 $p>0$ 时，成立

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{M-a_k}\geqslant\frac{n^{2-p}S_n^p}{nM-S_n}.$$

特别，取 $M=2S_n, p=1$，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2S_n-a_k}\geqslant\frac{2n}{2n-1}\quad[\text{MCM}];$$

若取 $M=\frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, m<n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n-ma_k}\geqslant\frac{n^{2-p}S_n^{p-1}}{n-m};$$

若取 $M=S_n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n-a_k}\geqslant\frac{n^{2-p}S_n^{p-1}}{n-1};\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{M+a_k}\leqslant\frac{nS_n}{nM+S_n}.$$

(2)　设 $a_k>0, m,n,p\in N, m\geqslant 2p, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^m}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^p\right)-a_k^p}\geqslant\frac{n^{1+p-m}S_n^{m-p}}{n-1}.$$

(胡道煊，[345]1993，9:43 - 45)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^m}{(S_n-a_k)^p}\geqslant\frac{n^{1+p-m}S_n^{m-p}}{(n-1)^p}$$

(申建春[345]1993，4:32 - 34)

(3)　设 $a_k>0, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, S_n(q)=\sum_{k=1}^{n}a_k^q, n\geqslant 3, \prod_{k=1}^{n}a_k=1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n-a_k}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

成立的充要条件是　$p^2+(n-2)p-(n-1)\geqslant 0$;而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{S_n(q)-a_k^p}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

成立的充要条件是　$p^2+(n-2)pq-(n-2)q^2\geqslant 0$.(郭要红,[345]2002.7;19)

146.　**MD 不等式(Mitrinovic-Djokovic 不等式)**:设 $a_k>0, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, n\geqslant 2$. 1988 年,陈计证明当 $p>-1, S_n\leqslant n-2+2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 时,成立

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+\frac{1}{a_k})^p\geqslant n(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n})^p. \tag{146.1}$$

见宁波大学学报 1988,2(1):115 - 117.

当 $p=2$ 时,可用 Cauchy 不等式证明,当 $p\neq 2$ 时,可用拉格朗日乘数法求函数

$$f(a_1,\cdots,a_n;\lambda)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+\frac{1}{a_k})^p+\lambda S_n$$

的极值,同一年,余红兵等将上述对 S_n 的限制条件减弱为 $S_n\leqslant 2\sqrt{3}$.(见中国科技大学学生学报 1988,4(1)11 - 12.).李再湘利用 $f(x)=(x+\frac{1}{x})^p$,当 $p>0$ 与 $x>0$ 时的凸性,证明 $p>0, S_n\leqslant 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 时 MD 不等式成立,而当 $p\geqslant 1$ 时,对 S_n 的限制条件可去掉,见[350]1988,6:26 - 27. 1998 年庞跃辉利用幂平均的单调性(见第 1 章 § 3) 给出了一个简捷的证明:因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geqslant\frac{n^2}{S_n},\text{ 所以,}\sum_{k=1}^{n}(a_k+\frac{1}{a_k})=S_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geqslant S_n+\frac{n^2}{S_n}=n(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n}).$$

由幂平均的单调性,当 $p\geqslant 1$ 时,成立

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+\frac{1}{a_k})^p\geqslant n(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n})^p.$$

且仅当所有 a_k 相等时等号成立. 见"数学教学研究"1998,2:42. 王振与陈计证明. 当 $-1\leqslant p<1, S_n\leqslant n-2+\left(\frac{2-p+\sqrt{5-4p}}{1-p}\right)^{1/2}$ 时,MD 不等式成立. 见[342]1992,7(4):95 - 99.

我们问:使(146.1) 式成立的关于 p 与 n 的充要条件是什么?

147.　设 $b, a_k>0, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, a_{n+1}=a_1$,则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{b^\alpha}{a_k+a_{k+1}}\geqslant\frac{n^2}{2S_n}$,式中 $\alpha=a_k-a_{k+1}$. 证明见[348]1990,11:34.

148.　设 $a_k\geqslant 0, 0\leqslant x_k\leqslant 1, \sum_{k=1}^{n}a_k=1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+x_k}\leqslant\left(1+\prod_{k=1}^{n}x_k^{a_k}\right)^{-1}.$$

仅当 $x_1=\cdots x_n$ 时等号成立.

提示：令 $y_k=\ln x_k$，$f(y)=(1+e^y)^{-1}$，由凹函数的 Jensen 不等式 $\sum_{k=1}^{n}a_kf(y_k)\leqslant f(\sum_{k=1}^{n}a_ky_k)$ 即可得证.

149.　设 $a_k>0,\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，则

(1)　$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{a_ja_k}{a_j+a_k}\leqslant\frac{n-1}{4}$.

(2)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+\cdots+a_k}{a_1\cdots a_k}\geqslant k\binom{n}{k}n^{k-1}$.

仅当 $\forall a_k=1/n$ 时,(1)(2) 中等号成立. 见[4]P.282.

150.　[MCM]. 设 $a_k>0,\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，则

(1)　$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}}{\sqrt{n-1}}\leqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{1-a_k}}$.

证 1　用 Cauchy 不等式和 AGH 不等式；

证 2　用 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ 在(0,1)上的凸性；

证 3　用逐步调整原理. 见[99]4:64－72.

1991 年叶国祥用排序原理和幂平均不等式，将上式推广为：设 $p\geqslant1,p\geqslant q>0,n\geqslant2,S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{(S_n-a_k)^q}\geqslant\frac{1}{(n-1)^q}\sum_{k=1}^{n}a_k^{p-q}.$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. 由上式推出：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{(\sum_{k=1}^{n}a_k^p)-a_k^p}\geqslant\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}a_k^{p-q}.$$

证明见[350]1991,6:15－17.

(2)　$\frac{1}{2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+a_{k+1}}<1\quad(a_{n+1}=a_1)$.

问：$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^p}{a_k+a_{k+1}}$ 当 $p>0$ 时的最优上下界是什么？

151.　设 $a_k,x>0$，令

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{\prod_{j=1}^{k}(x+a_j)}\text{，其中第一项理解为}\frac{1}{x+a_1}\text{，则 }S_n(x)<\frac{1}{x}.$$

证明见[305]1991,98(1):54 - 55.

152. 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0, k_1, \cdots, k_n$ 与 $j_1, \cdots, j_n$ 分别是 $1, \cdots, n$ 的任意两个排列,则

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{k_r}b_{j_s}}{r+s} \leqslant \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_r b_s}{r+s}.$$

提示:令 $d_r = \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{b_{j_s}}{r+s}, r = 1, \cdots, n$,则 $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_n$,由排序不等式,有

$\sum d_r a_{k_r} \leqslant \sum d_r a_r$,再注意到 $d_r = \sum\left(b_{j_s} \cdot \frac{1}{r+s}\right) \leqslant \sum \frac{b_r}{r+s}$,即可得证.

153. **Laplace 不等式**:设 $a_n > \cdots > a_1 > 0,\ b_n > \cdots > b_1 > 0,\ n > 1$,则

$$\frac{\sum a_k^2}{\sum a_k} < \frac{\sum a_k^2 b_k}{\sum a_k b_k}.$$

提示:用数学归纳法.

154. 1967 年 Marshall 等证明:若 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0, a_1/b_1 \geqslant a_2/b_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n/b_n > 0, \lambda_k > 0\ (1 \leqslant k \leqslant n)$,则

$$F(r) = \frac{\sum \lambda_k a_k^r}{\left(\sum \lambda_k b_k^r\right)^{1/r}}$$

关于 r 递增,特别,有 $\left(\prod a_k/b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\sum a_k\right)/\left(\sum b_k\right)$,仅当所有的比 a_k/b_k 相等时等号成立. 1987 年,王挽澜等证明,在上述条件下,$F_n(a)/F_n(b)$ 关于 n 递增,即

$$F_{n-1}(a)/F_{n-1}(b) \leqslant F_n(a)/F_n(b).$$

仅当所有 a_k/b_k 相等时等号成立. 式中

$$F_r(x) = \prod\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}x_{k_j}\right)^{a}, a = \binom{n}{r}^{-1},$$ $\prod$ 号对 $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r \leqslant n\ (1 \leqslant r \leqslant n)$ 求积,特别地,对于 $a_k \geqslant 0\ (1 \leqslant k \leqslant n)$,有 $F_{n-1}(a) \leqslant F_n(a)$,

仅当所有 a_k 相等时等号成立,见"成都科技大学学报"1988,6:83 - 88.

155. 令 $H_r(x) = \sum\limits_{k_1+k_2=r} x_1^{k_1}x_2^{k_2}, k_1, k_2 \geqslant 0, r \geqslant 1$. 1987 年王挽澜等证明:当 $b_1 \geqslant b_2 > 0, a_1/b_1 \geqslant a_2/b_2 \geqslant 0$ 时,$\left(\frac{H_r(a)}{H_r(b)}\right)^{1/r}$ 关于 r 递增,仅当 $a_1/b_1 = a_2/b_2$ 时等号成立. 特别地,当 $0 \leqslant a_1, a_2 \leqslant 1/2$ 时,$(H_r(a)/H_r(1-a))^{1/r}$ 关于 r 递增,仅当 $a_1 = a_2$ 时等号成立. 而当 $b_1 = b_2 = 1$ 时,即为 Detemple-Robertson 不等式,见"成都科技大学学报"1988,6:83 - 88.

156. **循环不等式**:设 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k + x_{k+1}}, g_m(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1} + \cdots + x_{k+m}}$,式中 $x_k \geqslant 0, k = 1, \cdots, n, (n \geqslant 3), x_{n+j} = x_j, j = 1, \cdots, m$,所有分母均大于 0. $g_m(x_1, \cdots, x_n)$ 称为循环和,$f(x_1, \cdots, x_n)$ 称为修正循环和(modified cyclic

sum),则

(1)　[IMO]　$1 < f(x_1,\cdots,x_n) < n-1$;

(2)　$g_m(x_1,\cdots,x_n) \geqslant \frac{1}{m}\left[\frac{n+m-1}{m}\right] \geqslant \frac{n}{m^2}$,$(x_k > 0)$,

特别,当 $m=2$ 时,就是1969年的第3届全苏数学奥林匹克试题:$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} > \frac{n}{4}$.

但是,若将下界改为 $n/2$,就是Shapiro在1954年提出的著名猜想:

当 $n \geqslant 3$ 时,$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{2}$,仅当所有 x_k 相等时等号成立,其中所有 $x_k \geqslant 0$ 且 $x_k + x_{k+1} > 0$,$x_{n+j} = x_j$,$j = 1,2$.

经过许多学者几十年的努力,到上世纪70年代,才证明上式对于 $n \leqslant 12$ 成立而对于所有不小于14的偶数和不小于25的奇数不成立. Troesch, B. A. 在1985年证明上式在 $n = 13$ 时成立,在1989年又证明上式对于满足 $15 \leqslant n \leqslant 23$ 的奇数也成立.才将问题全部解决. 1971年,Drinfeld还证明 $\inf_n\{S_n/n\} = 0.4945668$. 见 Math. comp. 1989,53(188):657-664. Math. Notes. 1971,9:68-71,中学数学教学1992,3,4.

(3)　若 $n \mid m+2$ 或 $2m$ 或 $2m+1$ 或 $2m+2$,从而当

$\sin\frac{r}{n}\pi \geqslant \sin(2m+1)\frac{r}{n}\pi$,$r = 1,\cdots,[n/2]$ 时,有

$g_m(x_1,\cdots,x_n) \geqslant \frac{n}{m}$,以及 $(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2 \geqslant \frac{n}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k(x_{k+1}+\cdots+x_{k+m})$.

(4)　$\frac{x_1+\cdots+x_k}{x_{k+1}+\cdots+x_n} + \frac{x_2+\cdots+x_{k+1}}{x_{k+2}+\cdots+x_1} + \cdots + \frac{x_n+x_1+\cdots x_{k-1}}{x_k+\cdots+x_{n-1}} \geqslant \frac{nk}{n-k}$.

$(1 \leqslant k < n)$,其中 $x_k > 0$,$k = 1,\cdots,n$.

(5)　设 $p,q,x_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 均为正数,则 $\sum(x_k^{p+q}/x_{k+1}^q) \geqslant \sum x_k^p$.

提示:用Hölder不等式,见[348]1989,9:9.

特别取 $p = q = 1$,即得1984年全国数学联赛第二试的试题:

$\sum(x_k^2/x_{k+1}) \geqslant \sum x_k$. 不等式左边分母 $\{x_{k+1}\}$ 可换成它的任一排列.

(6)　$\sum x_k^2/(x_k^2 + x_{k+1}x_{k+2}) \leqslant n-1$;

(7)　$\sum\left[\frac{x_k^{n-1}}{x_k^{n-1}+\prod_{j\neq k}x_j}\right]^{1/2} > 1 \quad (n \geqslant 2)$;

(8)　$\sum(x_kx_{k+1}/x_{k+2}) \geqslant \sum x_k$;

(9)　$\frac{(\sum x_k)^2}{2\sum(x_k^2)} \leqslant \sum\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}$.

以上(5)—(9)中所有 x_k 均为正数. 且均为[*MCM*].

(10)　[MCM]. 设 $\alpha = \min\{x_1,\cdots,x_n\}$,则

$\sum(1+x_k)/(1+x_{k+1}) \leqslant n + (1+\alpha)^{-2}\sum(x_k-\alpha)^2$.

仅当所有 x_k 相等时等号成立. 见[348]1992.4.

(11)　设 $x_k > 0$,则

$$\sum x_k^{x_{k+1}} > 1 + (n-2)\min\{x_1^{x_2}, x_2^{x_3}, \cdots, x_{n-1}^{x_n}, x_n^{x_1}\}.$$

(Cater, F. S., [305]1980, 87(4):302 - 303)

(12)　1996 年,杨定华提出猜想:当 $x_k > 0$ 时,证明或否定:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+2}^m}{x_k + x_{k+1}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^m}{x_k + x_{k+1}} \quad (m \in N).$$

仅当所有 x_k 相等时等号成立. 见数学教学通讯,1996.2.

(13)　令 $S_n = \dfrac{x_1}{x_1 + \cdots + x_{n-1}} + \dfrac{x_2}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_n + x_{n-2} + \cdots + x_1}$,
则当 $n \geqslant 4$ 时,$1 < S_n < n - 2$.

157. **Hilbert 不等式**:设 $a_k \geqslant 0, b_k \geqslant 0, k = 0, 1, \cdots, n$, $\| a \|_p = \left(\sum_{k=0}^{n} | a_k |^p\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$,则

(1) $$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \pi \| a \|_2^2;$$

(2) $$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1} \leqslant \pi \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{(j+k)!}{j!k!} \cdot \frac{a_j a_k}{2^{j+k+1}};$$

(3) $$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_j b_k}{2j+2k+1} \leqslant (n+1)\sin\frac{\pi}{2(n+1)} \| a \|_2 \| b \|_2.$$

注　Hilbert 不等式(1) 可求用函数的极值方法证明,见[1]P.308 - 309,而且(1) 中的常数 π 还可以减小,见[4]Ex3 · 9 · 36. 此外,我们还可以用复变函数的积分理论得到一个简捷的证明:设 C 是由单位圆、实轴从正数 ε 到 1 的两边沿以及圆心为原点、半径为 $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$ 的小圆组成,$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 为复多项式,而 $P_n(x)$ 是实多项式,则由柯西积分定理,有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C \log z[P_n(z)]^2 dz = \int_\varepsilon^1 \log x[P_n(x)]^2 dx \\ &\quad + \int_0^{2\pi} i\theta[P_n(e^{i\theta})]^2 ie^{i\theta} d\theta - \int_\varepsilon^1 (\log x + 2\pi i)[P_n(x)]^2 dx \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (i\theta + \log\varepsilon)[P_n(\varepsilon e^{i\theta})]^2 i\varepsilon e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$,得到

$$\begin{aligned} 2\pi\int_0^1 P_n^2(x)dx &= \left|\int_0^{2\pi} \theta P_n^2(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \theta P_n(e^{i\theta}) P_n(e^{-i\theta}) d\theta \\ &= \sum a_k^2 \int_0^{2\pi} \theta d\theta + \sum_{j\neq k} a_j a_k \int_0^{2\pi} \theta\cos(j-k)\theta d\theta = 2\pi^2 \sum a_k^2. \end{aligned}$$

再注意到 $\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_j a_k}{j+k+1} = \int_0^1 [P_n(x)]^2 dx$,不等式(1) 即可得证.

(4) $$\sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{a_j b_k}{j-k} \leqslant \pi \| a \|_2 \| b \|_2.$$ 见[29]P.39.

(5)　1996 年胡克证明：设 $0<\lambda<1$，$\forall a_k$ 为复数，则

$$\frac{\lambda}{\lambda\pi-\sin(\lambda\pi)}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+\lambda}\sin(\lambda\pi)-\pi a_0\right|^2+(\sin(\lambda\pi))\left(\sum_{m,k=0}^{n}\frac{a_m\bar{a}_k}{m+k+\lambda}\right)\leqslant\pi\|a\|_2^2.$$

证　令　$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\sin(k+\frac{\lambda}{2})\pi$. 由 Cauchy 不等式，有

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+\lambda}\sin(\lambda\pi)-\pi a_0\right|=\left|\int_0^{\pi}f(x)\sin(\frac{\lambda x}{2})\mathrm{d}x\right|\leqslant\left\{\int_0^{\pi}(\sin\frac{\lambda x}{2})^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\left\{\int_0^{\pi}|f|^2\right\}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\pi-\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\right\}^{1/2}\left\{\pi\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2-(\sin\lambda\pi)\sum_{m,k=0}^{n}\frac{a_m\bar{a}_k}{m+k+\lambda}\right\}^{1/2}.$$

见[339]1996,4:521－525，另见[338]1998,18(2):192－199.

(6)　1998 年，印度 Pachpatte, B. G. 对 Hilbert 不等式作了另一种形式的推广：设 $p,q\geqslant1,a_k,b_j\geqslant0,A_m=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k,B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_k^pB_j^q}{k+j}\leqslant\frac{1}{2}pq\sqrt{mn}\left\{\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)(A_k^{p-1}a_k)^2\right\}^{1/2}$$

$$\times\left\{\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)(B_j^{q-1}b_j)^2\right\}^{1/2}.$$

（见[301]1998,226:166－179）随后，赵长键和 Debnath 对上式作了进一步的改进和推广. 见[340]2000,20(4):413－416 和[301]2001,262:411－418.

(7)　[107]第二卷 P866－867 指出：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_kb_j}{k+j}\leqslant c(p,q)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{1/q},$$

$(1/p)+(1/q)=1,1<p<\infty$，式中常数 $c(p,q)$ 的渐近性态问题至今(1988)尚未解决，只知道 $c(2,2)=\pi-\frac{1}{2}\pi^5(\ln n)^{-2}+O(\ln\ln(n(\ln n)^{-3})),(n\to\infty)$.（见[376]1962,68:70－73）

2000 年匡继昌—Debnath, L. 给出了一般形式的有限和的估计，作为特例，得出

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{a_kb_j}{k+j+1}<\left\{\sum_{k=0}^{n}2(\arctan\sqrt{\frac{2n+2}{2k+1}})a_k^2\right\}^{1/2}\times\left\{\sum_{k=0}^{n}2(\arctan\sqrt{\frac{2n+2}{2k+1}})b_k^2\right\}^{1/2}$$

$$<2\arctan\sqrt{2(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}.$$

见[301]2000,245(1):248－265.

Hilbert 不等式的无穷级数和积分形式分别见第 11 章 § 2 和第 13 章.

158.　设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 为正数序列，它的算术平均 $A_n=A_n(a)\leqslant1$. 调和平均 $H_n=H_n(a)>1$，则对所有实数 p，有

$$\prod_{k=1}^{n}\left(a_k^p+\frac{1}{a_k^p}\right)\geqslant\begin{cases}(A_n^p+A_n^{-p})^n,\\(H_n^p+H_n^{-p})^n,\end{cases}\tag{158.1}$$

见数学教学通讯 1991,5:28.

记　$a^p + a^{-p} = (a_1^p + \frac{1}{a_1^p}, \cdots, a_n^p + \frac{1}{a_n^p})$. 则(158.1)式可改记为

$$G_n(a^p + a^{-p}) \geqslant A_n^p + A_n^{-p} \text{ 和 } G_n(a^p + a^{-p}) \geqslant H_n^p + H_n^{-p}.$$

当 $p = 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant n + 3$ 时,李文志等证明

$$G_n(a + a^{-1}) \geqslant A_n + A_n^{-1}. \tag{158.2}$$

而当 $n = 2$ 时,桂香分证明,使(158.2)式成立的充要条件是 $0 < S_2 \leqslant 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$,见[345]1987,10:49;当 $n = 3$ 时,陈计证明 $S_3 = 3/2$ 或6时,(158.2)式成立,见[348]1988,12:36,14. 当 $n \geqslant 3$,王振证明,当 $S_n \leqslant n(n + \sqrt{4n-3})$ 时,(158.2)式成立. 见[348]1995.5.

作者在本书第二版中提出,当 $n \geqslant 3$ 时,使(158.2)式成立,S_n 应满足什么样的充要条件?(作为100个未解决问题中的34),该问题于1994年由续铁权解决,解决该问题的基本思路是:考虑函数

$$f(x) = n\ln(A_n - x + \frac{1}{A_n - x}) + \ln(A_n + nx + \frac{1}{A_n + nx})$$

当 A_n 取什么值时在 $x = 0$ 取最小值,再证明 $\forall n \geqslant 2$,存在两个正数 T_n, L_n 满足

$$1 \leqslant T_n < L_n < \sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

于是(158.2)式成立的充要条件是 $A_n \leqslant L_{n-1}$. 详见青岛教育学院学报1994,3;38 - 44.

159.　设 $\alpha, \beta, p, a_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 均为正数,则

$$\prod_{k=1}^{n} (\alpha a_k^p + \beta a_k^{-p}) \geqslant (n^2+1)^n \left(\frac{\alpha^n \beta^{n^3} S_n^q}{n^{2n^3+q}}\right)^{A_n},$$

特别地,

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k + a_k^{-1}) \geqslant (n + \frac{1}{n})^n S_{n^n}^{B_n},$$

式中　$q = np - n^3 p,\ A_n = \frac{1}{n^2+1},\ B_n = \frac{n(1-n^2)}{n^2+1}$.

160.　**王挽澜不等式**:设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 为正数序列,$G_n(a)$ 为 a 的几何平均.

(1)　设 $0 < p < 1$,则

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (a_k + 1)^p - 1\right]^{1/n} \leqslant (G_n(a) + 1)^p - 1,$$

当 $p > 1$ 时不等号反向,仅当所有 a_k 相等时等号成立;

(2)　设 $p > 0$,则

$$(G_n(a) + 1)^p + 1 \leqslant \left\{\prod_{k=1}^{n} [(a_k + 1)^p + 1]\right\}^{1/n},$$

当 $p < 0, 0 < a_k < \frac{1}{|p|}$ 时不等号反向. 仅当所有 a_k 相等时等号成立.

(见宁波大学学报1995,8(3):27 - 29)