§2　算子与泛函不等式

1.　**线性算子范数不等式**:设 X,Y 为赋范线性空间,D 为 X 的线性子空间. $T:D\to Y$ 为有界线性算子,D 称为 T 的定义域,记为 $D(T)$,则算子 T 在 D 上的范数定义为:

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}: x\neq 0, x\in D(T)\right\}.$$

它有以下两种等价形式:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

(1)　若 T 有界,则成立**算子范数不等式**:

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|, x\in D(T).$$

(2)　若 T_1,T_2 是两个定义有乘积 T_1T_2 的算子,则算子范数有一个对计算很有用的性质:$\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\cdot\|T_2\|$. 特别 $\|T^2\|\leqslant\|T\|^2$,从而 $\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$.

下面设 X 为 Banach 空间,T,T_k 均为 X 上有界线性算子.

(3)　设 $\|T\|\leqslant|\lambda|$,则逆算子 $S=(\lambda T-T)^{-1}$ 存在且为有界线性算子,

$\|S\|\leqslant\dfrac{1}{|\lambda|-\|T\|}$. 其中 I 为恒等算子.

(4)　设 $T_2=T_1-T_3$, $\|T_3\|<\|T_1^{-1}\|^{-1}$, $T=T_1^{-1}T_3$,则

$$\|T_2^{-1}-T_1^{-1}\|\leqslant\frac{\|T\|}{1-\|T\|}\|T_1^{-1}\|;\ \|T_2^{-1}-T_1^{-1}\|\leqslant\frac{\|T_1^{-1}\|^2\|T_3\|}{1-\|T_1^{-1}\|\,\|T_3\|};$$

$$\|(T_1+T_3)^{-1}\| \leqslant \frac{\|T_1^{-1}\|}{1-\|T_3\|\cdot\|T_1^{-1}\|}.$$

这些不等式在数值分析中有重要应用.

(5) $\|T_1+T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$.(**三角不等式**).

(6) **CPR(Corach-Porta-Recht)不等式**:设 T 为自共轭算子,A,B 为可逆的自共轭算子,则

$$2\|T\| \leqslant \|ATA^{-1}+A^{-1}TA\|;\quad 2\|T\| \leqslant \|ATB^{-1}+A^{-1}TB\|;$$

$$\|A^{2m}T+TB^{2m}\| \leqslant \|A^{2m+n}TB^{-n}+A^{-n}TB^{2m+n}\|.$$

m,n 为非负整数. 证明及更多类似的范数不等式见[308]1993,118(2):827, 另见[308]2001,129(10):3009 - 3015.

(7) **Anderson 不等式**:设 X 是可分的无限维复 Hilbert 空间,$B(X)$ 表示 $X\to X$ 的算子代数.设 $A,B,T\in B(X)$. A 为正规算子且 $AB=BA$,则

$$\|B\| \leqslant \|AT-TA+B\|.$$

见[308]1973,38:135 - 140.

2001 年 Turnsek,A. 作了若干推广,例如设 A 为正规算子,B 满足 $ABA^*=B$,则

$$\|B\| \leqslant \|ATA^*-T+B\|.$$

见[301]2001,263:124 - 134. 另见[308]1998,126:2074 - 2052,1995,123:2709 - 2714.

2. **泛函不等式**:

(1) **线性泛函范数不等式**:设 X 是赋范线性空间,f 是 X 上有界线性泛函,记为 $f\in X^*$,f 的范数定义为

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

它也有两种等价形式:$\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)| = \sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|$.

① 若 $f\in X^*$,则 $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|$.

② $\|f_1+f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$.

(2) 设 $E\subset R^n$,$x,y,z^2\in L(E)$,定义泛函 f 为:$f(x)=\int_E x(t)\mathrm{d}t$.

① 若 $f(x),f(y)>0$,且 $f(x)f(yz)=f(y)f(xz)$,则

$$f(xz)f(yz)f(x+y) \leqslant f(xz^2)[f(y)]^2 + f(yz^2)[f(x)]^2;$$

$$f((x+y)z) \leqslant \frac{f(x)f(yz^2)}{f(yz)} + \frac{f(y)f(xz^2)}{f(xz)},$$

仅当 z 为常数时等号成立.

② 若 $f(x),f(y)>0$,则

$$2|f(xz)f(yz)|\sqrt{f(x)f(y)} \leqslant f(xz^2)[f(y)]^2 + f(yz^2)[f(x)]^2.$$

(Guo Baini,等[331]1999,10:27 - 29)

(3) **Helly 矩量定理**:设 $\{x_k\}$ 是赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中线性无关元.

$\{\alpha_k\} \subset K$，则存在 $f \in X^*$ 满足　(1) $f(x_k) = \alpha_k$.　(2) $\| f \| \leqslant M$ 的充要条件是 $\forall \{\beta_k\} \subset K$，成立

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k \right\|.$$

3.　**(p,q) 型算子不等式**：设算子 $T: L^p(X, \sum_1, \mu_1) \to L^q(Y, \sum_2, \mu_2)$，$0 < p, q \leqslant \infty$，若存在常数 $C(p,q)$，使得

$$\| Tf \|_q \leqslant C(p,q) \| f \|_p.$$

则称 T 为强 (p,q) 型算子，通常简称为**(p,q) 型算子**. 算子范数为

$$\| T \| = \sup_{f \neq 0} \frac{\| Tf \|_q}{\| f \|_p}.$$

若 $\mu_2\{y \in Y: |Tf(y)| > \lambda\} \leqslant \left\{\frac{c}{\lambda} \| f \|_p\right\}^q$.$(\lambda > 0, 0 < p \leqslant \infty, 0 < q < \infty)$. 则称 T 为**弱 (p,q) 型算子**.

(1)　设 $(X, \sum_1, \mu_1)$，$(Y, \sum_2, \mu_2)$，为两个测度空间，$K(x,y)$ 是 $X \times Y$ 上可测函数，积分算子 T 定义为

$$T(f,x) = \int_Y K(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu_2(y), f \in L^p(Y). \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1, 1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty,$$

若 $\int_X |K(x,y)|^q \mathrm{d}\mu_1(x) \leqslant C_1\ a.e. y \in Y$；$\int_Y |K(x,y)|^q \mathrm{d}\mu_2(y) \leqslant C_2\ a.e.. x \in X$. 则

$$\| Tf \|_q \leqslant C_1^{1/r} C_2^{1-(1/p)} \| f \|_p.$$

证明用 Hölder 不等式. 细节见[142]P10 – 11.

(2)　**Riesz-Thorin 不等式**：设 E_n 是 R^n 中阶梯函数的向量空间. $T: E_n \to L^1_{loc}(R^n)$ 为线性算子. 若 $\forall f \in E_n$. $\| Tf \|_{q_0} \leqslant C_0 \| f \|_{p_0}$；$\| Tf \|_{q_1} \leqslant C_1 \| f \|_{p_1}$，
式中 $1 \leqslant p_k, q_k \leqslant \infty$，$C_k > 0$，$k = 0, 1$，
若 $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$，$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，则

$$\| Tf \|_q \leqslant C_0^{1-t} C_1^t \| f \|_p. \forall f \in E_n.$$

证明见[73]P.266 – 272. 它的进一步推广就是著名的 **Riesz 凸性定理**. 见[65]P191 – 196.

(3)　设 $T(f,x) = \int_0^\infty K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$. $K(x,y) \geqslant 0$，w, v 为 $(0,\infty)$ 上非负权函数. f 在 $(0,\infty)$ 上非负递减或非负递增，$0 < p \leqslant q < \infty$，$0 < p \leqslant 1$. 则

$$\| T(f) \|_{q,w} \leqslant C \| f \|_{p,v}$$

中的最佳常数 C 已找出. 见[307]814 – 26011.

(4)　**HLP 不等式(Hardy-Littlewood-Polya 不等式)**：设 $K(x,y)$ 是 $(0,\infty) \times (0,\infty)$ 上的可测函数，而且满足：

①　$\forall \lambda > 0, K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} K(x,y)$；

②　$\int_0^\infty |K(x,1)| x^{-1/p} \mathrm{d}x = C < \infty, 1 \leqslant p \leqslant \infty$，

若 $f \in L^p(0,\infty), g \in L^q(0,\infty), 1/p + 1/q = 1$.

$$T_1(f,y) = \int_0^\infty K(x,y)f(x)\mathrm{d}x,\ T_2(g,x) = \int_0^\infty K(x,y)g(y)\mathrm{d}y.$$

则 $\| T_1 f \|_p \leqslant C \| f \|_p, \| T_2 g \|_q \leqslant C \| g \|_q$.

证明见[142]P.11 - 12.

这些不等式不仅有广泛的应用,而且还可用它们推出很多重要的不等式,例如:

① 当 $K(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ 时, $T(f;x)$ 就是 Hilber 积分: $T(f;x) = \int_0^\infty \dfrac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$,它满足 $\| T(f) \|_p \leqslant C_p \| f \|_p, 1 < p < \infty$,式中 $C_p = \int_0^\infty x^{-1/p}(1+x)^{-1}\mathrm{d}x = \pi\cos\dfrac{\pi}{p}$;

② 记 $E = \{(x,y): x < y\}$ 的特征函数为

$$\varphi_E(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in E, \\ 0, & (x,y) \notin E, \end{cases}$$

当 $K(x,y) = y^{-1}\varphi_E(x,y)$ 时,可推出第 13 章 Hardy 不等式.

③ Stupyalis, L. 将上述积分算子推广到多元情形:设 $f \in L^p(R^n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$,令 $T(f,x) = \int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$,其中 $x = (x_1,\cdots,x_n) = (x',x'') \in R^n, x' = (x_1,\cdots,x_m), x'' = (x_{m+1},\cdots,x_n), 1 \leqslant m \leqslant n$,

$$K(x,y) = \frac{|x-y|^{\lambda+\mu-n}}{|x'|^\lambda |y'|^\mu},\quad \lambda < m/p, \mu < m/q,\quad \lambda + \mu > 0, 1/p + 1/q = 1,$$

则

$$\| Tf \|_p \leqslant C_p \| f \|_p.$$

见 MR85h:47061.

(5) 设 $T(f,x) = \int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$.若 $1 \leqslant p, q < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1, C = \left(\int_{R^n}\left\{\int_{R^n} |K(x,y)|^q \mathrm{d}x\right\}^{p'/q}\mathrm{d}y\right)^{1/p'} < \infty$,则

$$\| Tf \|_q \leqslant C \| f \|_p.$$

(6) **Kolmogorov 不等式**:设 T 为弱(p,q)型算子,则 $\forall E \subset Y, \mu_2(E) < \infty$,成立

$$\| Tf \|_r = \left(\int_E |Tf|^r\right)^{1/r} \leqslant C\left(\frac{q}{q-r}\right)^{1/r} [\mu_2(E)]^\alpha \| f \|_p.$$

其中 $1 \leqslant p, q < \infty, 0 < r < q$.

反之,若 $0 < r < q$,及常数 $C > 0$,使得 $\forall f \in L^p(X), \forall E \subset Y, \mu_2(E) < \infty$,有 $\| Tf \|_r \leqslant C[\mu_2(E)]^\alpha \| f \|_p$.则 T 为弱(p,q)型算子.式中 $\alpha = (1/r) - (1/q)$ 证明见[142]P12 - 13.

(7) **Zygmund 不等式**:设 T 是弱(p,p)型和弱(q,q)型算子, $1 \leqslant p < q < \infty$,则 $\forall E \subset Y, \mu_2(E) < \infty, f \in L^p \ln^+ L,, Tf \in L^p(E)$,且

$$\left(\int_E |Tf|^p\right) \leqslant C\left\{\mu_2(E) + \int_X |f|^p(1 + \ln^+ |f|)\right\}.$$

见[142]P.14 - 16.

4. **卷积算子不等式**:设$(X,\sum_1,\mu)$与$(Y,\sum_2,v)$为σ有限测度空间.$K(x-y)$在$X\times Y$上可测,$f\in L^p(v)$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,则卷积算子$T$定义为

$$T(f,x)=\int K(x-y)f(y)\mathrm{d}v(y). \tag{2.1}$$

当$X=Y=R^n$时,由K在R^n上可测,可推出$K(x-y)$在$R^n\times R^n$上可测(证明见[118]P129-130).所以,只要假设f,K在R^n上可测.

$$T(f,x)=\int_{R^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y \tag{2.2}$$

就a.e.有定义.卷积算子还可定义在广义函数空间上.对于核K的若干特殊选择,就得到Stieltjes变换算子,Meijer变换算子等.下面仅就(2.2)式的情形,讨论它的基本不等式.

(1) **Young不等式**:设$K\in L^1(R^n)$,$f\in L^p(R^n)$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,则$Tf\in L^p(R^n)$且

$$\|Tf\|_p\leqslant\|K\|_1\|f\|_p \tag{2.3}$$

推论1 设$f\in L^p(R^n)$,$K\in L^q(R^n)$,$1\leqslant p,q\leqslant\infty$,$1/r=1/p+1/q-1\geqslant 0$,则

$$Tf\in L^r(R^n),\text{且 }\|Tf\|_r\leqslant\|K\|_q\|f\|_p. \tag{2.4}$$

证明见[73]P231-235,(2.4)式还可进一步改进为

$$\|Tf\|_r\leqslant(C_pC_qC_{r'})^n\|f\|_p\|K\|_q. \tag{2.5}$$

式中 $C_t=\left(\dfrac{t^{1/t}}{(t')^{1/t'}}\right)^{1/2}$,$\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t'}=1$,$t=p,q,r'$.

当$t\to 1$或∞时$C_t\to 1$.见[311]1975,102(1):159-182.(2.4)式的加权形式:例如权函数$\omega(t)=\dfrac{1}{t}$,记$\|f\|_{p,w}=\left(\int_0^1|f(t)|^pw(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}$,则

$$\|Tf\|_{r,w}\leqslant\|K\|_{q,w}\|f\|_{p,w},\text{(见[73]P369-370.)}$$

推论2 设$f\in L^p$,$g\in L^q$,$\varphi\in L^r$,$\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}-1$,则

$$\|f*g*\varphi\|_s\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\|\varphi\|_r.$$

式中 $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$.它可改进:设$f_k\in L^{p_k}(R^n)$,$1<p_k<\infty$,$\dfrac{1}{r}=\sum_{k=1}^m\dfrac{1}{p_k}$.$1\leqslant r\leqslant\infty$,$(1/r)+(1/r')=1$,则

$$\|f_1*\cdots*f_m\|_r\leqslant(C_{p_1}\cdots C_{p_m}C_{r'})^n\prod_{k=1}^n\|f_k\|_{p_k}.$$

见[311]1975,102(1):159-182.

(2) 设非负函数$f,g\in L^p(R)\cap L^q(R)$.$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{s}$,$1\leqslant q\leqslant s\leqslant p<\infty$,则

$$\|(f^p*g^p)^{1/q}\|_p\leqslant\|f\|_s\|g\|_t\leqslant\|(f^p*g^p)^{1/p}\|_q.$$

(MR90i:62006,90j:26026)

(3) 利用本章§1,N15.可证明:设$1\leqslant p,q<\infty$,$1\leqslant r\leqslant\infty$,$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$,则

$$|T(f,x)|^r\leqslant\|f\|_p^{r-p}\|K\|_q^{r-q}\int|f(y)|^p|K(x-y)|^q\mathrm{d}y.$$

(4) 设核 K 满足:$x>y>0,K(x)\leqslant cK(y)$.式中 $c\geqslant 1$,当 $t>0$ 时,$K(t)\geqslant 0$,$t<0$ 时,$K(t)=0$. $x>0$ 时$\int_0^x K(t)\mathrm{d}t>0$. f 在$[0,\infty)$ 上非负可测,

$$T(f,x)=\frac{1}{\int_0^x K(t)\mathrm{d}t}\int_0^x K(x-t)f(t)\mathrm{d}t,\text{则}$$

$$\| Tf\|_p\leqslant\frac{cp^2}{p-1}\| f\|_p,1<p<\infty.(\text{见}[21]\text{P}173)$$

(5) 设 $f\in L_{2\pi}^1,\int_0^{2\pi}|f|\ln(1+|f|)<\infty$,$g$ 满足 $\exp(\lambda^{-1}|g|)\in L_{2\pi}^1,\lambda>1$,则

$$|f*g|\leqslant\lambda\ln\lambda\int_0^{2\pi}|f|+\lambda\int_0^{2\pi}|f|\ln(1+|f|)+\int_0^{2\pi}(\exp(\lambda^{-1}|g|)-1).$$

提示:利用第 5 章 §3N38 Young 不等式的下述形式:

$$xy\leqslant e^y+x\ln(1+x)-1.x,y\geqslant 0.$$

(6) 设 $f,K_n\in L_{2\pi}^1$. H_n 为$[-\pi,\pi]$上连续可微函数列,使得 $|K_n(x)|\leqslant H_n(x)$,$-\pi<x\leqslant\pi$;

$$C_1=\sup_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_n(x)\mathrm{d}x<\infty;C_2=\sup_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|xH'_n(x)|\mathrm{d}x<\infty,$$

令 $T(f,x)=\sup\limits_n|(f*K_n)(x)|$,则

$$T(f,x)\leqslant(C_1+2C_2)f^{\Delta}(x).$$

式中 $f^{\Delta}(x)=\max\left\{\sup\limits_{h>0}\int_0^h|f(x+t)|\mathrm{d}t,\ \sup\limits_{h>0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x-t)|\mathrm{d}t\right\}$.

证明见[73]P.387 - 392.

(7) 设 $S(R^n)$ 表示速降检验函数空间,$S'(R^n)$ 为缓增广义函数空间.(其定义见[118]P362).若 $f\in S(R^n),K\in S'(R^n)$,则 $Tf=f*K\in C^{\infty}(R^n)$,且

$|(Tf)(x)|\leqslant C(1+|x|^2)^{m/2}$. 式中 $S(R^n)=\{\varphi\in C^{\infty}(R^n):\|\varphi\|_m<\infty\}$,$\|\varphi\|_m=\sup\{(1+|x|^2)^{m/2}|D^{\alpha}\varphi(x)|:|\alpha|\leqslant m,x\in R^n\}$,$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\alpha_k$ 为非负整数. $|\alpha|=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k$. 见[83]P151.

(8) 令 $E_{\alpha}=\{x\in E:|f(x)|>\alpha\},\alpha>0$. $\omega(\alpha)=\mu(E_{\alpha})$ 称为 f 的**分布函数**,已知 $0<p<\infty$ 时,$\|f\|_p^p=\int_E|f|^p=p\int_0^{\infty}\alpha^{p-1}w(\alpha)\mathrm{d}\alpha$.(证明见[118]P.131)

定义 $[f]_p=(\sup\alpha^p w(\alpha):\alpha>0)^{1/p},0<p<\infty$

若$[f]_p<\infty$,称 $f\in WL^p$,由 Chebyshev 不等式(第 13 章 N42.),$L^p\subset WL^P$,且$[f]_p\leqslant\|f\|_p$.设 $1<p,q\leqslant\infty,\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1,r<\infty$,若 $f\in L^p,K\in WL^q$,则 $Tf\in L^r$,且

$$\|Tf\|_r\leqslant C(p,q)\|f\|_p[K]_q;$$

若 $p=1,q=r>1,f\in L^1,K\in WL^q$,则

$$Tf\in WL^q,\text{且}[Tf]_q\leqslant C_q\|f\|_1.$$

证明见[64]P.241 - 242.

注　若卷积核具有形式：$K_n(t)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos kt$，则卷积算子

$$T_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

又称为**奇异积分算子**，特别当 $K_n(t)$ 为 Dirichlet 核，Fejer 核，Jackson 核等时，相应的(2.6)式分别称为 Dirichlet 奇异积分算子，Fejer 奇异积分算子，Jackson 奇异积分算子等.

5.　**正线性算子不等式**：若 $\forall f(t)>0,\forall x\in E,L(f,x)\geqslant 0$，则称线性算子 L 为 E 上正算子.

(1)　若正线性算子 $L_n:C[a,b]\to C[a,b]$，并满足：

$$L_n(1;x)=1,L_n\left(t-\frac{a+b}{2};x\right)=x-\frac{a+b}{2}+\alpha_n(x),$$

$$L_n\left[\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2;x\right]=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\beta_n(x).$$

式中当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n(x),\beta_n(x)$ 一致趋于零，则 $\forall f\in C[a,b]$，成立

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{5}{4}w(f,\delta_n).$$

式中　$\delta_n=2[(b-a)|\alpha_n|+|\beta_n|]^{1/2}$. 证明见[82]P.344－345.

(2)　若正线性算子 $T_n:C_{2\pi}\to C_{2\pi}$，并满足：$T_n(1;x)=1;T_n(\cos t;x)=\cos x+\alpha_n(x);T_n(\sin t;x)=\sin x+\beta_n(x)$，则 $\forall f\in C_{2\pi}$，成立

$$|T_n(f,x)-f(x)|\leqslant(1+\pi^2)\omega(f,\delta_n),$$

式中　$\delta_n=\left[\dfrac{1}{2}(\|\alpha_n\|^2+\|\beta_n\|^2)\right]^{1/4}$. $\alpha_n(x)$ 与 $\beta_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时一致趋于零. 证明见[82]P348.

(3)　设多项式线性算子 $L_n(f,x)$ 将 $C_{2\pi}$ 映射为三角多项式空间，设 $T_n(x)$ 为三角多项式，$L_n(T_n,x)=T_n(x)$，则

$$\|L_n\|\geqslant\frac{1}{22}\ln n.\quad([82]\mathrm{P}122)$$

(4)　**Cauchy 不等式**：设 X,Y 为 Banach 空间，$T:X\to Y$ 为正线性算子，则

$$|T(fg,x)|^2\leqslant T(f^2,x)T(g^2,x).$$

提示：对固定的 x，考虑 λ 的二次多项式：$T((f+\lambda g)^2;x)\geqslant 0$.

(5)　**极大不等式**：设$(X,\sum,\mu)$为 σ 有限测度空间. 若测度 μ 在可测变换 φ 下不变，即 $\mu[\varphi^{-1}(A)]=\mu(A)\quad(\forall A)$，称 φ 为**保测变换**. 令 $A_nf(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k x)$，若 $T:L^1(X)\to L^1(X)$ 为正线性算子，且 $\|T\|\leqslant 1$，则 $\forall f\in L^1(X)$，成立$\int_E f\mathrm{d}\mu\geqslant 0$，式中 $E=\{x:\sup\limits_{n\geqslant 1}A_nf(x)>0\}$.

(6)　设 X 为 Hilbert 空间. T 为 X 上正线性算子，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则 Hölder-McCarty 不等式

$$(Tx,x)^\lambda\geqslant(T^\lambda x,x),\ \|x\|=1$$

与 Young 不等式：$\lambda(Tx,x)+1-\lambda\geqslant(T^\lambda x,x),\|x\|=1$　(记为 $\lambda T+I-\lambda\geqslant T^\lambda$)

等价,式中 I 为恒等算子.证明见[305]2001,108(1):68 - 69.

6. **Bernstein 算子不等式**:Bernstein 算子 B_n 定义为:

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},0\leqslant x\leqslant 1.$$

(1) 设 $f\in C[0,1]$,则

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{5}{4}w\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1960 年,Esseen 将系数 5/4 改进为

$$C=2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)[\varphi(2k+2)-\varphi(2k)]=1.045564\cdots,$$

式中 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$ 为正态分布函数.

见 Numer. Math. 1960,2:206 - 213.

(2) 设 $f\in \mathrm{Lip}_M\alpha$,$0<\alpha<1$,则

$$\|B_n(f)-f\|_c\leqslant\frac{CM}{n^{\alpha/2}}.$$

(Kac,M. [329]1938,7:49 - 51;1939,8:170)

(3) $f'\in\mathrm{Lip}_M1\Leftrightarrow|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant M\frac{x(1-x)}{2n}$,$x\in[0,1]$.

(Lorentz,G. G.,[70]P169)

(4) 设 $f''\in C[0,1]$,则

$$|B_n(f,x)-B_{n+1}(f,x)|\leqslant\frac{x(1-x)}{n+1}\left(\frac{1}{3n}\right)^{1/2}\|f''\|_2.$$

$$|B_n(f,x)-B_{n+1}(f,x)|\leqslant\frac{x(1-x)}{2n(n+1)}\|f''\|_2.$$

$x\in[0,1]$ 见[305]1986,93(4):308 - 309.

(5) 设 $1/2\leqslant a<1$,则 $\exists n_0=n_0(a)\in N$.使得 $\forall n\geqslant n_0$,成立

$$\sup_{1-a\leqslant\frac{k}{n}\leqslant a}\left|B_n\left(f,\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant Cw_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

式中常数 c 满足 $0<c<1$.

(Gonska,H. H. 等,Serdica,1995,21(2):137 - 150).我们问:c 的最佳值是多少?

Bernstein 算子已有许多变形和推广.例如:

(6) **Kantorovich 算子不等式**:

$$K_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)\mathrm{d}t\right)P_{n,k}(x),\text{式中 }P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

1975 年 Bojanic,R. 和 Shisha,O. 证明:设 $f\in L[0,1]$,则对于 $n\geqslant 2$,有

$$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,|K_n(f;x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\pi^2}{3}\omega_1\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1962 年,李文清证明:若 $f\in C[0,1]$,则

$$|K_n(f;x)-f(x)|\leqslant\frac{5}{4}\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right).$$

见[70]P.174－175.

(7) **Meyer-König-Zeller 算子(简称为 MKZ 算子)**:

$$M_n(f,x)=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+k}\right)\binom{n+k-1}{k}x^k,x\in[0,1].$$

陈文忠等用概率论方法证明:若 $f\in BV[0,1]$,则当 n 充分大时,

$$\left|M_n(f,x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5}{nx}\sum_{k=1}^{n}V_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x)+\frac{65}{2\sqrt{n}x^{3/2}}|f(x+0)-f(x-0)|,$$

式中 $$g_x(t)=\begin{cases}f(t)-f(x+0), & x<t\leqslant1,x\in(0,1),\\ 0 & t=x\\ f(t)-f(x-0), & 0\leqslant t<x,\end{cases}\tag{2.7}$$

$V_a^b(g_x)$ 是 g_x 在$[a,b]$上的全变差.(见[336]1988,9A(2):234－240.)

$M_n(f,t)$ 的推广是

$$\hat{M}_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{k}{n+k}}^{\frac{k+1}{n+k+1}}f(t)\mathrm{d}t\right)\binom{n+k+1}{k}x^k(1-x)^n.$$

相应的结果见[327]1989,56:245－255;[301]1994,187:1－16;[332]2002,18(3):99－102.

(8) **Bernstein-Bezier 算子(B-B 算子)**:

$$B_n^{(\alpha)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})[J_{n,k}^{(\alpha)}(x)-J_{n,k+1}^{(\alpha)}(x)],$$

式中 $$J_{n,k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

若 $f\in BV[0,1],n>2,x\in(0,1)$,则

$$\left|B_n^{(\alpha)}(f,x)-[\frac{1}{2^\alpha}f(x+0)+(1-\frac{1}{2^\alpha})f(x-0)]\right|\leqslant\frac{3\alpha}{nx(1-x)+1}\sum_{k=1}^{n}V_{x-(x/\sqrt{k})}^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x)$$

$$+\frac{3\alpha}{3\sqrt{nx(1-x)}+1}|f(x+0)-f(x-0)|+2h_n(x)|f(x)-f(x-0)|.$$

式中 $h_n(x)=\begin{cases}1, & x=h/n,\\ 0, & x\neq k/n.\end{cases}$ $g_x(t)$ 由(2.7)式定义.

(Alain,P.等[406],1995,321(5):575－580)

(9) **Szasz 算子.**

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}f(\frac{k}{n})\frac{(nx)^k}{n!}e^{-nx}.$$

设 $0\leqslant a<b<\infty,D=[a,b],D_1=[a+\eta,b-\eta],(\eta>0)$.若 $f\in C(D)$,且存在正常数 c_1,c_2,使得 $f(x)\leqslant c_1(x^2+1)e^{c_2x}$,则

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)}\leqslant2\omega(f,\sqrt{b/n})+(c_3/n);$$

若加上 $f' \in C(D_1)$，则

$$\| L_n(f) - f \|_c \leqslant 2\sqrt{b/n}\,\omega(f', \sqrt{b/n}) + (c_4/n);$$

式中 c_3, c_4 是依赖于 b 的正常数.

(Ditzian, Z., [327]1975, 14: 296 - 301., 1984, 40: 226 - 241)

变形 Szasz 算子定义为

$$L_n^*(f,x) = n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)P_{n,k}(t)\mathrm{d}t\right)P_{n,k}(x),$$

式中 $P_{n,k}(x) = e^{-nx}\dfrac{(nx)^k}{k!}$. 1993 年，郭竹瑞等证明：设 $f \in C[0,\infty)$ 且有界 $t > 0$，则

$$|L_n^*(f,x) - f(x)| \leqslant M(x/n + 1/n^2)^{\alpha/2}, (x \geqslant 0, 0 < \alpha < 1) \Leftrightarrow \omega_1(f,t) = 0(t^{\alpha}).$$

(10) **Baskakov 算子**：$f \in C(0,\infty)$.

$$T_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}.$$

以及更一般的广义 Lupas-Baskakov 算子

$$T_{n,\alpha}(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\Gamma((n/\alpha)+k)}{k!\,\Gamma(n/\alpha)}(\alpha x)^k(1+\alpha x)^{-\frac{n}{\alpha}-k}$$

的有关结果见[81]P.9.[70]P.189 - 190.

BBH(Bleiman-Butzer-Hahn) 算子

$$T_n(f,x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k f\left(\frac{k}{n+1-k}\right), x \in [0,\infty)$$

的有关结果及其进展见[158]P1 - 11.

(11) **多元 Bernstein 算子**. 以三角形区域 $D = \{(x,y): x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$ 上的 n 阶 Bernstein 算子为例：

$$B_n(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}x^k y^j(1-x-y)^{n-k-j},$$

有 $\quad |B_n(f;x,y) - f(x,y)| \leqslant 2\omega\left(f; \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$

见[79]P.82.

有关 Bernstein 算子的综合报告见陈文忠："关于"Bernstein 型算子逼近的几个问题." 河南大学学报 1985.2.

(12) 1989 年 Martinez, F. L. 证明：对于

$$B_{n,m}(f,x,y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{m}\right)P_{j,n}(x)P_{k,m}(y),$$

式中 $\quad P_{j,s}(t) = \dbinom{s}{j}t^j(1-t)^{s-j}, \displaystyle\sum_{j=0}^{s}P_{j,s}(t) = 1,$

若 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，则

$$|B_{n,m}(f,x,y) - f(x,y)| \leqslant 3\omega(f, 1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{m}).$$

见[327]1989, 59: 300 - 306. 此外，单纯形上的 Bernstein 算子的逼近估计见[339]1991, 2: 275 - 277. [364]1989, 6: 588 - 599. 有关专著见[70]，[81] 和 Lorentz, G.

G. ,Bernstein Polynomials, Toronto, 1953.

7. **Dirichlet 奇异积分算子(Fourier 和算子)不等式:**

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

式中 $D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 称为n 阶 Dirichlet 核. $\|S_n\|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t$ 称为$D_n(t)$ 的 Lebesgue 常数.(见[118]P.233－234)有关 $D_n(t)$ 的不等式见第 6 章 § 3 N.41.

(1)　$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)\leqslant\|S_n\|\leqslant 1+\ln(2n+1)$;

实际上, $\|S_n\|=\frac{4}{\pi^2}\ln n+R_n$. $|R_n|\leqslant 3$. 见[82]P.119－121.

(2)　设 $f\in L_{2\pi}^p, 1<p<\infty$,则

①　$\|S_n(f)-f\|_p\leqslant(1+M_p)E_n^*(f)_p$;

②　$\|S_n(f)-f\|_p\leqslant C\omega_r(f,1/n)$;

③　$\|S_n(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p$. 见[57]Vol. 1, P266.

(3)　设 $f\in L_{2\pi}$,则

①　$\|S_n(f)-f\|_1\leqslant(\ln n)\omega_r(f,1/n)$.

②　$\mu\{|S_n(f)|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1$. 即 $S_n(f)$ 是弱(1,1) 型算子.

(4)　若 $f\in L_{2\pi}^p, 1\leqslant p<\infty, \|f\|_p\leqslant 1$,则 $\mu\{|S_n(f)|>\lambda\}\leqslant C_p/\lambda^p$.

(5)　设 $f\in L_{2\pi}^{\infty}$,则

$$\|S_n(f)-f\|_\infty\leqslant(\ln n)\omega_r(f,1/n).$$

(6)　若 $f\in C_{2\pi}, \|f\|_c\leqslant 1$,则

$$\mu\{|S_n(f)|>\lambda\}\leqslant Ce^{-\lambda}.$$

(7)　设 $f\in C_{2\pi}^r, r\geqslant 1$,则

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant C\frac{\ln n}{n^r}.$$

([68] 上册 P271. 另见第 12 章 §2.N.7)

(8)　**Oskolkov 不等式:** 设 $f\in C_{2\pi}$,则存在绝对常数 c,使得

$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant c\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k-n+1}E_k^*(f)$. (证明见[71]P107－109)

(9)　**Lebesgue 不等式:**

$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant(1+\|S_n\|)E_n^*(f)$. (另见第 12 章 §2N.7)

(10)　设 $f\in \mathrm{Lip}\alpha, 0<\alpha<1$,则 $|S_n(f,x)-f(x)|\leqslant C\frac{\ln n}{n^\alpha}$.

(11)　设 $f\in BV(-\pi,\pi)$,则 $|S_n(f,x)|\leqslant\|f\|_\infty+(1/\pi)V_0^{2\pi}(f)$.

(12)　设 $f\in H^1(T)$,则

$$\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\|S_k(f)\|_{H^1}\leqslant C\|f\|_{H^1}.$$

(江寅生等.证明及其推广见[332]1990,6(2):28-37)

(13) 设 φ 是[0,1]上单调可微的凸函数,$\varphi(0)=1,\varphi(1)=0,\alpha=-\varphi'(1)$,则

$$\sup_n\|S_n\|=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left|\int_0^1\varphi(t)\cos(xt)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^1\varphi(t)\frac{\sin\pi t}{t}\mathrm{d}t+\frac{2}{\pi}c.$$

式中 $c=\begin{cases}2\alpha/\pi, & 0<\alpha\leqslant\pi/2,\\ 1+\ln(2\alpha/\pi), & \alpha\geqslant\pi/2,\end{cases}$

见 MR88b:42015.

(14) 设 $f\in C_{2\pi}$,且 f 的 Fourier 系数 c_k 递减和对数上凸.即 $c_k^2\geqslant c_{k+1}c_{k-1}$,则

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant 4eE_n^*(f).$$

(Newman-Rivlin,[71]P.119-121)

(15) 谢周在[71]P153中提出:若 $f\in C_{2\pi}$ 且 f 的 Fourier 系数 $c_k=\hat{f}(k)$ 递减,是否成立

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|S_n(f)-f\|_c}{E_n^*(f)}=0(1)?$$

8. **FC 和算子不等式:** 设 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 为 Chebyshev 多项式(见第 6 章 §2).$f\in C[-1,1]$ 的 Fourier-Chebyshev 级数的 n 阶部分和算子(FC 和算子)为

$$S_n(f,x)=\sum_{k=0}^n a_kT_k(x),$$

式中 $a_k=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^1\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,则

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant(3+\ln n)E_n(f),\quad n\geqslant 2.$$

若 $f\in C^r[-1,1],r\geqslant 1$,则

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant C\frac{\ln n}{n^r}.$$

9.(1) **FL 算子不等式:** 设 $P_n(x)=\dfrac{1}{n!2^n}[(x^2-1)^n]^{(n)}$,

$$K_n(x,t)=\sum_{k=0}^n(k+1/2)P_k(x)P_k(t),f\in L_{2\pi},\text{则}$$

$S_n(f,x)=\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)K_n(x,t)\mathrm{d}t$ 称为FL算子(Fourier-Legendre算子).$S_n(t)$ 的N-V平均定义为

$$W_n(f,x)=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^n q_k^{-1}S_k(f,x),$$

式中 $q_n>0,q_n\downarrow,q_0=1,Q_n=\sum\limits_{k=0}^n q_k\to\infty(n\to\infty)$.

若 $f\in BV[-1,1],x\in(-1,1)$,则对充分大的 n.成立

$$\left|W_n(f,x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right|\leqslant\frac{24}{Q_n}(1-x^2)^{-3/2}\sum_{k=1}^n V_{x-(1+x)/k}^{x+(1-x)/k}(g_x)$$
$$+\frac{1}{Q_n}(1-x^2)^{-1}|f(x+0)-f(x-0)|.$$

式中 $g_x(t)=\begin{cases} f(t)-f(x-0), & -1\leqslant t<x, \\ 0, & t=x, \\ f(t)-f(x+0), & x<t\leqslant 1. \end{cases}$

$V_a^b(g_x)$ 是 g_x 在$[a,b]$上的全变差.

(匡继昌,全国第五届逼近论会议论文集.1988,101.).

(2) **FF 和算子不等式**:设 $S_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x)$ 为 Fourier-Franklin 级数的 n 阶部分和算子(FF 和算子).$f\in C(0,1]$,则

$$\| S_n(f)-f\|_c\leqslant 8\omega(f,1/n).$$

f 的 Fourier-Franklin 系数 $a_n(f)$ 满足:

$$|a_n(f)|\leqslant\frac{12\sqrt{3}}{2^{m/2}}\omega\left(f,\frac{1}{2^m}\right).$$

式中 $n=2^m+k, k=1,\cdots,2^m, m=0,1,\cdots$.

若 $f\in L^p[0,1], 1<p<\infty$.令 $S(f,x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2(f)f_k^2(x)\right)^{1/p}$,则

$$C_p\| f\|_p\leqslant\| S(f)\|_p\leqslant C'_p\| f\|_p$$

(见[321]1928,100:522-529,[107]2:551).

10. **正交和算子不等式**:设$\{P_n\}$是区间(a,b)上关于权函数 $\omega(t)$ 正交的多项式系,$\forall f\in L_\omega^2(a,b)$,$f$ 关于$\{P_n\}$的 Fourier 系数为

$c_n=\int_a^b f(t)P_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t$. $S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}c_kP_k$ 称为**正交和算子**. Lebesgue 函数为

$L_n(x)=\int_a^b\left|\sum_{k=0}^{n}P_k(x)P_k(t)\right|\omega(t)\mathrm{d}t$.则成立 **Lebesgue 不等式**:

$$|S_n(f,x)-f(x)|\leqslant[1+L_n(x)]E_n(f).$$

关于无穷区间上加权正交的多项式系的 Fourier 级数,见 Nevai,P.等.[327]1986,48:3-167.

11. **FH 和算子不等式**:Haar 函数系$\{\varphi_n(t)\}$定义为:$\varphi_1(t)=1, t\in(0,1]$,记 $n=2^m+k, k=1,\cdots,2^m, m=0,1,2,\cdots$

$$\varphi_n(t)=\begin{cases} 2^{m/2}, & t\in\left[\frac{2k-2}{2^{m+1}},\frac{2k-1}{2^{m+1}},\right], \\ -2^{m/2}, & \left[\frac{2k-1}{2^{m+1}},\frac{2k}{2^{m+1}},\right], \\ 0, & t\notin\left[\frac{k-1}{2^m},\frac{k}{2^m},\right]. \end{cases}$$

若 t_0 为不连续内点,则 $\varphi_n(t_0)=\frac{1}{2}[\varphi_n(t_0-0)+\varphi_n(t_0+0)]$. $\varphi_n(0)=\lim_{t\to 0}\varphi_n(t)$, $\varphi_n(1)=\lim_{t\to 1-0}\varphi_n(t)$. f 的 Fourier-Haar 级数的 n 阶部分和算子(简称为 FH 和算子)为

$$S_n(f,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(t).$$

(1) 若 $f\in[0,1]$,则 F-H 系数 $c_n(f)$ 满足

$$|c_n(f)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}\omega(f,\frac{1}{n}),n\geqslant 2.$$

$$\|S_n(f)-f\|_c\leqslant 12\omega(f,1/n);$$

(2) 若 $f\in L^p[0,1],1\leqslant p<\infty,r=(2-p)/(2p)$,则

$$|c_n(f)|\leqslant n^r\omega(f,1/n)_p,n=1,2,\cdots,$$

$$\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}|c_k(f)|^p\right)^{1/p}\leqslant 8\times 2^r\omega(f,\frac{1}{2^n})_p,n=0,1,2\cdots;$$

$$\|S_n(f)-f\|_p\leqslant 24\omega(f,1/n)_p.$$

(3) 若 $f\in BV[0;1]$,则

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}|c_k(f)|\leqslant\left(\frac{3}{2\sqrt{2^n}}\right)V_0^1(f).n=0,1,\cdots$$

(见 Kashin,B. S. 等. Orthogonal Series,Moscow,1984. 它们在 Banach 空间中的推广,见 Singer,I. M. ,Bases in Banach spaces,1 - 2,Springer,1970 - 1981)

12. **Hilbert 变换不等式(共轭函数不等式)**:设 $f\in L(T).T=(-\pi,\pi],a_k,b_k$ 为 f 的 Fourier 系数,则复数幂级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-ib_k)z^k,\tag{2.8}$$

$(z=e^{iz})$ 的实部就是 f 的 Fourier 级数:

$$S(f,x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

而(2.8) 式的虚部

$$\widetilde{S}(f,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k\cos kx+a_k\sin kx)$$

称为 f 的**共轭 Fourier 级数.**

若(2.8) 式写成复数形式:$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$,则

$$\widetilde{S}(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-i\operatorname{sgn}k)c_ke^{ikx}.$$

共轭 Dirichlet 核为

$$\widetilde{D_n}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin kt=\frac{1}{\pi}\frac{\cos(t/2)-\cos(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}.$$

令 $\varphi_x(t)=f(x+t)-f(x-t)$,则

$$\widetilde{S_n}(f,x)=\sum_{k=1}^{n}(-b_k\cos kx+a_k\sin kx)=\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{D_n}(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_\pi(t)\left[\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{\cos nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right]\mathrm{d}t+o(1).$$

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{-f(x-t)}{2\mathrm{tg}(t/2)}\mathrm{d}t$$

称为 f 的**共轭函数**. $\widetilde{S_n}(f,x)$ 的收敛性与 $\tilde{f}(x)$ 的存在性有关. $\tilde{f}(x)$ 又称为 f 的 Hilbert 变换,记为

$$H(f,x) = \tilde{f}(x) = P.V.\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)}{2\mathrm{tg}(t/2)}\mathrm{d}t\right).$$

令 $$\tilde{f}_\delta(x) = H_\delta(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{f(x-t)}{2\mathrm{tg}(t/2)}\mathrm{d}t.$$

则 $\lim\limits_{\delta\to0}H_\delta(f,x) = H(f,x)$ a.e.

$H^*(f,x) = \sup\limits_{0<\delta\leqslant\pi}|H_\delta(f,x)|$ 称为 f 的**极大共轭函数或极大 Hilbert 变换.**

(1) **Riesz 不等式:**设 $f\in L^p(T)$, $1<p<\infty$,则

$$\|H(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p;\quad \|H^*(f)\|_p\leqslant C_p^*\|f\|_p,$$

式中 $$C_p=\begin{cases}0(\frac{1}{p-1}), & 1<p<2,\\ 0(p), & 2<p<\infty;\end{cases}\quad C_p^*=\begin{cases}0(\frac{1}{(p-1)^2}), & p\to1+0\\ 0(p), & p\to\infty.\end{cases}$$

见[87]P.117－121.

(2) **Kolmogorov 不等式:**设 $f\in L(T)$,则 $Hf\in WL(T)$,和 $H^*f\in WL(T)$,即存在常数 c,使得 $\forall\lambda>0$,成立

$$\mu\{|Hf|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1;\qquad \mu\{|H^*f|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1.$$

见[87]. P117－121.

(3) 设 $f\in L^p(T)$, $1<p<\infty$, $-1<\alpha<p-1$,则

$$\|x^\alpha H(f)\|_p\leqslant C_p\|x^\alpha f\|_p$$

(Babenko. K. I., [21]P. 305)

(4) **Zygmund 不等式:**设 $|f(x)|\leqslant\pi/2$,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_T[\cos f(x)]\exp(|H(f,x)|)\mathrm{d}x\leqslant2\cos\left(\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant2.$$

推论 1 设 $\|f\|_\infty<\pi/2$,则

$$\int_T\exp(|H(f,x)|)\mathrm{d}x\leqslant\frac{4\pi}{\cos\|f\|_\infty}.$$

推论 2 设 $\|f\|_\infty<\pi/2$,则

$$\mu\{|H(f,x)|>\lambda\}\leqslant\frac{8\pi}{\cos(\|f\|_\infty)}\exp(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}).\ \forall\lambda>0.$$

若 $\|f\|\infty\leqslant1$,则

$$\mu\{|H(f,x)|>\lambda\}>2\pi(1-\frac{4}{\cos\sqrt{2}}e^{-\lambda}).$$

见[87]P.124－125,[85]P.70.

(5) **Zygmund 不等式:**设 $f\ln^+f\in L(T)$,则存在与 f 无关的常数 $c_1,c_2>0$,使得

$$\int_T |H(f,x)|\,\mathrm{d}x \leqslant c_1\int_T |f|\ln^+|f| + c_2.$$

见[87]P122 - 123.

(6) 设 $f \in H^1(T)$,则

$$\| H(f) \|_{H^1} \leqslant C \| f \|_{H^1}.$$

(7) $\sup\limits_{|x-y|\leqslant\delta} |H(f,x) - H(f,y)| \leqslant C\left\{\int_0^\delta \frac{\omega(f,t)}{t}\mathrm{d}t + \delta\int_\delta^\infty \frac{\omega(f,t)}{t^2}\mathrm{d}t\right\}$.

(Lukashenko, T. P. MR91a:42007)

(8) $H(f)$ 与 f 在 T 上的递减重排 f^* 有密切联系(f^* 的定义见第 13 章 N.20).记 $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)\mathrm{d}u$.下面的 c 取

$$c = \left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}(1/(2k-1)^2)\right)/\left(\sum_{k=1}^\infty (1/(2k-1)^2)\right) = 0.7424537\cdots$$

① 设 $f \in L\ln^+ L$,则

$$\| H(f) \|_1 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f^*(t)\ln \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{8}\right)\mathrm{d}t,$$

式中 $2/\pi$ 是最佳常数;

② 设 $f \in L^\infty(T)$,则

$$\| (H(f))^{**}/(1 + \ln(2\pi/t)) \|_\infty \leqslant c \| f \|_\infty,$$

③ $\| H(f) \|_1 \leqslant c \| f^{**} \|_1$.

见[21]P305 - 306.

(9) 非周期函数的 Hilbert 变换定义为

$$H(f,x) = -\lim_{\delta\to0+}\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\delta}\frac{f(x-t)}{t}\mathrm{d}t, \quad f \in L^p(R^1), 1 \leqslant p < \infty.$$

若 $f \in L^p(R^1), 1 < p < \infty$,则 $\| H(f) \|_p \leqslant c_p \| f \|_p$;

详细的结果见 Andersen, K. F. [308]1976, 56:99 - 107.

13. **Fejer 算子不等式**:设

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k(t) = \frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{2\sin(t/2)}\right), x \neq 2m\pi.$$

为 Fejer 核(见第 6 章 §3N. 42.)Fejer 算子定义为

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)]K_n(t)\mathrm{d}t.$$

(1) $\| \sigma_n(f) \|_X \leqslant \| f \|_X, X = C(T)$ 或 $L^p(T), 1 \leqslant p \leqslant \infty$;

(2) $\| f + \sigma_n(f) - 2\sigma_{2n}(f) \|_c \leqslant E_n^*(f)$.

[109]P160.

(3) 设 $f \in C_{2\pi}$,则

① $\| \sigma_n(f) - f \|_c \leqslant \left(1 + \frac{2}{n}\right)\omega\left(f, \frac{\ln n}{n}\right)$;

② $\quad \| \sigma_n(f) - f \|_c \leqslant (4 - \frac{6}{\pi}) \omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}})$.

(侯象乾,宁夏大学学报 1982,1:1992,1.)

③ $\quad \| \sigma_n(f) - f \|_c \leqslant \frac{16}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_k^*(f)$.

(Steckin,S.B.[71]P.105－107)

(4) 设 $f \in L_{2\pi}^p, 1 \leqslant p < \infty$,则

$$\| \sigma_n(f) - f \|_p \leqslant (1 + \frac{\pi}{2})^2 \omega_2(f, \frac{1}{\sqrt{n}})_p.$$

(5) 设 $f \in BV[0, 2\pi]$,则

$$\left| \sigma_n(f, x) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \right| \leqslant \frac{5}{n+1} \sum_{k=0}^{n} V_0^{(\pi/k+1)}(g_x),$$

式中

$$g_x(t) = \begin{cases} f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

(匡继昌,湖南师大学报,1985,81(4):1－4).

(6) **Bernstein 不等式**:设 $f \in C_{2\pi} \cap \mathrm{Lip}_M \alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$,则

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| \leqslant \begin{cases} c_\alpha M n^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1, \\ Mc \dfrac{\ln n}{n}, n > 1, \alpha = 1, \end{cases}$$

式中 $\quad c_\alpha < \frac{2^\alpha \cdot \pi}{1 - \alpha^2}, \quad c < \frac{7}{2}\pi$.

见[79]P57－58.[332]1994.2:68.[85]P21－22 指出 c 可改进为 2π.

(7) 设 $f \in \mathrm{Lip}_M 1$,则

$$\| \sigma_n(f) - f \|_\infty \leqslant C \frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

式中 $\quad C = \frac{\pi^2 - 4}{\pi \ln 2}$ 是最佳常数,见 Ukrain Math. Zh. 1990,42(1):75－83.

(8) **K-Z 不等式(Kaczmarz-Zygmund 不等式)**:

令 $G(f, x) = \left(\sum_{n=2}^{\infty} n \mid \sigma_n(f, x) - \sigma_{n-1}(f, x) \mid^2 \right)^{1/2}$.若 $f \in L^2[-\pi, \pi]$,则 $\| G(f) \|_2 \leqslant C \| f \|_2$.从而 $G(f, x) < a.e.$ 　见[87]P71.

(9) **Korovkin 不等式**:设 $f \in C_{2\pi}$,则 $\| \sigma_n(f) - f \|_c \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

见[79]P.61.

(10) 令 $\quad C_n = \sup\limits_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \dfrac{\| \sigma_n(f) - f \|_c}{\omega(f, \frac{\ln n}{n})}$,

则 $\quad \lim\limits_{n \to \infty} C_n = 1 + 2/\pi$ 是最佳逼近常数.(万传良,新疆大学学报,1991,2:27－31.).

14. **(C, α) 平均算子不等式**:设 $f \in L_{2\pi}, S_n(f, x)$ 为 f 的 Fourier 级数 n 阶部分和.

$\alpha>-1,(\alpha)_n=\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$，$E_n^*(f)_p$ 为 f 在 $L_{2\pi}(1\leqslant p<\infty)$ 中三角多项式的最佳逼近(见第 12 章 §2)，则

$$\sigma_n^\alpha(f,x)=\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{k=0}^{n}(\alpha-1)_{n-k}S_k(f,x)$$

称为 f 的 (C,α) 平均算子. $\alpha=1$ 时，$(C,1)$ 平均算子就是 Fejer 算子.

(1) 设 $f\in C_{2\pi}$，则当 $\alpha>0$ 时，成立

$$\|\sigma_n(f)-f\|_c\leqslant\frac{C_\alpha}{(\alpha)_n}\sum_{k=0}^{n}(\alpha-1)_{n-k}E_k^*(f).$$

(孙永生. [335]1963，6:379－387.).

(2) 设 $f\in L_{2\pi}^p,1\leqslant p<\infty,\lambda\geqslant-1$，则

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}(k+1)^\lambda[S_k(f)-f]\right\|_p\leqslant C\sum_{k=0}^{n}(k+1)^\lambda E_k^*(f)_p.$$

(Timan). 有关进一步的结果见[70]P221－223.

15. **共轭 Fejer 算子不等式**：共轭 Fejer 核定义为：

$$\widetilde{K_n}(t)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)t}{(2\sin t/2)^2}.$$

(见第 6 章 §3N45). $\varphi_x(t)=\dfrac{1}{2}[f(x+t)-f(x-t)]$ 是 f 在 x 的奇部. 设 $\widetilde{S_n}(f,x)$ 是 f 的共轭 Fourier 级数的部分和. 见本节 N.12. 则 $\widetilde{\sigma_n}(f,x)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\widetilde{S_k}(f,x)$ $=-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\varphi_x(t)\widetilde{K_n}(t)\mathrm{d}t$ 称为 f 的共轭 Fejer 算子. 若 $f\in L(T)$，则

(1) $\sup\limits_n|\widetilde{\sigma_n}(f,x)-\widetilde{f}_{\frac{1}{n}}(x)|<c\,M(f,x).$

式中 $\widetilde{f_\delta}(x)$ 由见本节 N. 12. 定义. $M(f,x)$ 是 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数. (见本节 N. 30)

(2) $\widetilde{\sigma}(f,x)=\sup\limits_n\widetilde{\sigma_n}(f,x)\leqslant c\,M(f,x).$

证明见[141]P245－246.

16. **Abel 平均算子(Poisson 积分)不等式**：f 的 Fourier 级数

$$S(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的 Abel 平均称为 f 的 Poisson 积分：

$$f(r,x)=(f*P)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)P(r,t)\mathrm{d}t,$$

式中 $P(r,t)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\cos nt$ 为周期的 Poisson 核，$0\leqslant r<1$. (见第 6 章 §2 N.47.)

(1) 若 $T=[-\pi,\pi)$，$f\in L(T)$，且 $\left|\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M$，$|h|\leqslant\pi$，则

① $|f(r,x)|\leqslant 3M\left(1+\frac{|x|}{1-r}\right)$;

② $\left|\int_0^x f(r,u)\mathrm{d}u\right|\leqslant KM|x|$. 证明见[57]Vol.1.P101.

(2) 若 $f\in \mathrm{Lip}\alpha, 0<\alpha<1$,则

$$\| f(r,\cdot)-f\|_c\leqslant (1-r)^\alpha \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)+O(1-r).$$

(3) **Natanson 不等式**:若 $f\in \mathrm{Lip}1$.则

$$\| f(r,\cdot)-f\|_c\leqslant \frac{2(1-r)}{\pi}|\ln(1-r)|+O(1-r).$$

(见[71]P.102 - 104)

17. **Jackson 算子不等式**:$J_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 称为 Jackson 算子. 式中 $K_n(t)=\frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\, nt/2}{\sin\, t/2}\right)^4$ 称为 n 阶 Jackson 核,它满足$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\mathrm{d}t=1$; $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}tK_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2.5}{n}$;$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^2K_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

(1) 设 $f\in C(T)$,则

$$|J_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{3}{2}\omega(f,\frac{\pi}{n+1}).$$

仅当 f 为常值函数时等号成立.式中系数 3/2 是最佳的.(王兴华.[334].1964,14(2):231 - 237.)

(2) 若 $f'\in C(T)$,则

$$|J_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{6\pi^2}{n}\omega(f',\frac{1}{n})+\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\| f'\|_c.$$ (见[70].P183 - 184.)

(3) 在 $f'(x+0),f'(x-0)$ 存在的点 x 上,成立

$$J_n(f,x)-f(x)=\frac{3\ln 2}{\pi n}[f'(x+0)-f'(x-0)]+o(\frac{1}{n}),(n\to\infty).$$

(吴顺唐.[335]1966,9(3):245 - 250).

(4) 设 $f'\in C2\pi$,则在 $f''(x+0),f''(x-0)$ 存在的点 x,成立

$$J_n(f,x)-(f,x)=\frac{3}{4n^2}[f''(x+0)+f''(x-0)]+o(\frac{1}{n^2}),(n\to\infty).$$

(陈文忠,逼近论会议论文集,杭州大学 1978,110 - 113).

(5) $K_n(t)$ 可推广为

$$K_{m,n}(t)=\frac{1}{\alpha_{m,n}}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2m},\text{式中}\quad \alpha_{m,n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2m}\mathrm{d}t.$$

$J_{m,n}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{m,n}(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 称为 Jackson 型算子.

Jackson 型核 $K_{m,n}(t)$ 具有下述性质:

① $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{m,n}(t)\mathrm{d}t=1$;

② 存在正的常数 c_1,c_2,使得 $c_1n^{2m-1}<\alpha_{m,n}<c_2n^{2m-1}$;

③ $\int_{\delta}^{\pi}K_{m,n}(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{c}{(n\delta)^{2m-1}}, 0<\delta<\pi.$

④ 当 $j \leqslant 2m-2$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} |t|^j K_{m,n}(t)\mathrm{d}t = 0(\frac{1}{n^j})$.(证明见[82]$P$.138 - 141.)

当 $f \in C_{2\pi}$ 时,成立 $\| J_{3,n}(f) - f \|_c \leqslant \begin{cases} (4-6/\pi)\omega(f,1/n). \\ (8-17/\pi)\omega_2(f,1/n). \end{cases}$

(见[332]1992,8(2)35 - 45.).$J_{m,n}$ 算子的进一步推广见[70]P184 - 185.[82] 第 2 章.

18. **Jackson 型算子不等式:**

$$J_p(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_p(x-t)f(t)\mathrm{d}t, \text{式中} \quad K_p(t) = \frac{96}{p^3}\left(\frac{\sin(pt/4)}{t}\right)^4.$$

若 $f \in C(R^1)$ 且有界,则

(1) $\| J_p(f) - f \|_c \leqslant 5\omega(f,\frac{1}{p})$;

(2) $\| J_p(f) - f \|_c \leqslant \left[1 + \frac{3}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{4t}{\pi}\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4\mathrm{d}t\right]\omega(f,\frac{\pi}{p})$.

(王兴华[334]1964,14(2):231 - 237;[70]P.185)

19. **A 型奇异积分算子不等式:**

$A_n(f,x) = \frac{1}{\alpha_n}\int_a^b K_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t$. 式中 $K_n(x,t) = [\varphi(x,t)]^n, \alpha_n = \int_a^b K_n(x,t)\mathrm{d}t$.

$\varphi \in C([a,b]\times[a,b])$,当 $t \neq x$ 时, $|\varphi(x,t)| < \varphi(x,x), \forall x(a,b), \exists \lambda > 0$, 使得

$$\lim_{t\to x}\frac{|\varphi(x,t)-\varphi(x,x)|}{|t-x|^{\lambda}} = \beta > 0.$$

(1) **徐利治不等式:** $\forall f \in C[a,b], f(x) \neq 0$,成立

$$|A_n(f,x) - f(x)| \leqslant C\omega(f,\frac{1}{n^{1/\lambda}}).$$

当 $\delta > 0$ 充分小时,可取 $C = 1 + (\Gamma(2/\lambda)/\Gamma(1/\lambda))(1/\beta)^{\frac{1}{\lambda}} + \delta$.

若 $f' \in C[a,b]$,则

$$A_n(f,x) - f(x) = o((1/n)^{1/\lambda}).$$

([335]1956,2(4):695 - 702)

(2) 若 $f \in \mathrm{Lip}_1\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$,,则

$$\| A_n(f) - f \|_{\infty} = (1/(\beta n))^{\alpha/\lambda}\Gamma((1+\alpha)/\lambda)/\Gamma(1/\lambda) + o((1/n)^{\alpha/\lambda}).$$

$(n\to\infty)$.([70]P186.)

20. **Vallee-Poussin 算子不等式:**

$$V_n(f;x) = \frac{2^{2n-1}}{\pi\binom{2n}{n}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\cos\frac{t-x}{2}\right]^{2n}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t.$$

(1)　若 $f \in C_{2\pi}$，则 $\| V_n(f) - f \|_c \leqslant 2\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}})$；式中系数 3 是最佳的.

(2)　若 $f \in \mathrm{Lip}_M\alpha$，$0 < \alpha < 1$，则

$$\| V_n(f) - f \|_c \leqslant \frac{3M}{\sqrt{n^\alpha}},$$

见[60]上册 P.214－215.

(3)　若 $f \in C_{2\pi}$，则

$$\| V_n(f) - f \|_c \leqslant 4E_n^*(f).$$

(4)　设 $f \in L^p(0,2\pi)$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，则

$$\| V_n(f) - f \|_p \leqslant 4E_n(f)_p.$$

式中　$E_n(f)_p = \inf\left\{ \| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} a_k \exp(ikx) \|_p : a_k \text{ 为复数} \right\}.$

见[110]Voll.1,P385－386.

$$\| V''_n(f) \|_p \leqslant n \| f \|_p (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

(5)　$V_n(f)$ 的直接推广是

$$V_{n,m}(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_{n-k}(f,x) = \frac{2}{\pi(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_{n-(m/2)} D_{m/2}(t)\mathrm{d}t;$$

当 $f \in C_{2\pi}$ 时，有

$$\| V_{n,m}(f) - f \|_c \leqslant \pi\left(2 + \log\frac{n+1}{m+1}\right) E_{n-m}^*(f).$$

算子 $V_{n,m}(f)$ 的范数为

$$\| V_{n,m} \| \leqslant \pi\left(2 + \log\frac{n+1}{m+1}\right).$$

注　从第 m 个到第 $n-1$ 个 Dirichlet 核的算术平均，称为具有指标 m 与 n 的 Vallèe-Poussin 核：

$$V_{n,m}(x) = \frac{1}{n-m}\sum_{k=m}^{n-1} D_k(x) = D_m(x) + \frac{n}{n-m}\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos kx.$$

特别，$V_{n+1,n}(x) = D_n(x)$ 为 Dirichlet 核；$V_{n,0}(x) = K_n(x)$ 为 Fejer 核.

见[82]P.126－127.[71]P.91－95.

21.　**L 插值(Lagrange 插值)算子不等式**：对 $[a,b]$ 作分划：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，令 $\omega(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$，　$l_k(x) = \dfrac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}$.

则 L 插值算子 L_n 定义为 $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$，$L_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x)$.

(1)　**Bernstein-Faber 不等式**：$\| L_n \| = \max_{x\in[a,b]}\sum_{k=1}^{n} | l_k(x) | > \dfrac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$.

证明见[62]P.156－157.另见[71]P.309－310.

若 $\{x_k\}$ 是 Chebyshev 多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点全体，则

$$\| L_n \| \leqslant 8 + \frac{4}{\pi}\ln(n+1). \quad ([71]\text{P}.311-313)$$

(2) 若 $f \in C[-1,1]$,则

$$\| L_n(f) - f \|_c \leqslant (1 + \| L_n \|)E_n(f).$$

见[71]P.306 - 307.

(3) 设 $f^{(n+1)} \in C[-1,1]$,则

$$\| L_n(f) - f \|_c \leqslant \| \omega \|_c \frac{\| f^{(n+1)} \|_c}{(n+1)!}.$$

1991 年 Howell 提出猜想:$0 \leqslant k \leqslant n$,是否成立

$$\| L_n^{(k)}(f) - f^{(k)} \|_c \leqslant \| \omega^{(k)} \|_c \frac{\| f^{(n+1)} \|_c}{(n+1)!}.$$

见[71]P.346 - 347.

22. **HF 插值算子不等式(Hermite-Fejer 插值多项式算子不等式)**:

$$H_n(f,x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})(1 - x \cdot x_{k,n})\left(\frac{T_n(x)}{x - x_{k,n}}\right),$$

式中 $x_{k,n} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), k = 1,2,\cdots,n$,是第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 的零点. $x \in [-1,1]$.

(1) **Moldovan 不等式**:

$$| H_n(f,x) - f(x) | \leqslant 2\pi\omega(f, \frac{\ln n}{n}). \ ([70]\text{P}.193)$$

(2) **王仁宏不等式**:若 $f \in \text{Lip}\alpha, 0 < \alpha < 1$,则

$$| H_n(f,x) - f(x) | \leqslant 4\left(2 + \frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

若 $f \in \text{Lip}\,1$,则

$$| H_n(f,x) - f(x) | \leqslant 4\pi\left(1 + \frac{2}{\ln 2}\right)\frac{\ln n}{n} \leqslant 48.8342\frac{\ln n}{n}.$$

([333]1979,7:292 - 295).进一步的结果见[71]P.330 - 333.

23. **Fourier 积分算子不等式**:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t. \text{式中} \quad K_n(t) = \frac{\sin nt}{t}.$$

设 $f \in BV(R^1) \cap L^p(R^1), 1 < p \leqslant 2$,则

(1) $\| S_n(f) - f \|_p \leqslant C\omega(f, \frac{1}{n})_p$;

(2) $\| S_n(f) - f \|_p \leqslant \frac{c}{n^{1/p}}[V(f)]^{1/p}\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)^{1/q}$.

式中 $V(f)$ 是 f 在 R^1 上的全变差,$1/p + 1/q = 1$,(见[70]P.201.)

24. **GW 算子不等式(Gauss-Weierstrass 算子不等式)**:GW 算子定义为:

$$G_t(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y. \text{式中} \quad K_t(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right).$$

若 $f\in C[a,b],E=[a_1,b_1]\subset[a,b]$,且 $\exists\,\eta>0$,使得

$$[a_1-\eta,b_1+\eta]\cap((-\infty,\infty)-[a,b])=\phi,\text{则}$$

(1) $\|G_t(f)-f\|_{C(E)}\leqslant 2\omega\left(f,\sqrt{\frac{2}{n}}\right)+\frac{c_1}{n}$;

(2) 若 $f'\in C[a,b]$,则

$\|G_t(f)-f\|_{C(E)}\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{n}}\omega\left(f',\sqrt{\frac{2}{n}}\right)+\frac{c_2}{n}$.式中 c_1,c_2 是与 a,b,η 有关的常数.
(Ditzian,Z.,[327]1975,14:296 - 301.)问题:能否给出(1)(2)中常数 c_1,c_2 的估计?

25. **Gamma 算子不等式**:

(1) 设 f 在$(0,\infty)$上有界连续.$G_n(f,x)=\int_0^\infty K_n(x,t)f(nt)\mathrm{d}t$ 称为 Gamma 算子,式中 $K_n(x,t)=\frac{1}{t}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{t}\right)^n\exp\left(-\frac{x}{t}\right)$.则

$$|G_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{c}{2x^2}+o(1),x\in(a,b)\subset(0,\infty)$$

成立的充要条件是

$$|y^2f'(y)-x^2f'(x)|\leqslant\frac{C}{xy}|y-x|,x,y\in[a,b].$$

(Berens,H.[327]1972,6(2)135 - 146.)

(2) **Gamma 型算子**定义为:

$$T(f,x)=\frac{1}{\Gamma([tx]+1)}\int_0^\infty f\left(\frac{u}{t}\right)u^{[tx]}t^{-u}\mathrm{d}u,$$

式中 $x\geqslant 0,t>a,f\in C[0,\infty),|f(x)|\leqslant Ce^{ax}$,

$$\Delta_h^1f(x)=f(x+h/2)-f(x-h/2),x\geqslant h/2\geqslant 0,$$

$$\Delta_h^2f(x)=\Delta_h^1(\Delta_h^1f)(x),\varphi(x)=\sqrt{x},x\geqslant 0.$$

定义如下光滑模:$\delta>0$.

$$\omega^1(f,\delta)_\infty=\sup\left\{|\Delta_h^1f(x)|:x\geqslant\frac{h}{2},0\leqslant h\leqslant\delta\right\},$$

$$\omega_\varphi^2(f,\delta)_\infty=\sup\{|\Delta_{h\varphi}^1f(x)|:x\geqslant h^2,0\leqslant h\leqslant\delta\}.$$

若 $\omega^1(f,\delta)_\infty<\infty,\omega_\varphi^2(f,\delta)_\infty<\infty,a\geqslant 1,t>0$,则

① $\|Tf-f\|_\infty\leqslant(1+\sqrt{[a]+2})\omega^1(f,\frac{1}{t})_\infty+$

$$+\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{[a]}+2\sqrt{\frac{1}{[a]}+1}\right)\omega_\varphi^2\left(f,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)_\infty;$$

② $\omega^1\left(f,\frac{1}{t}\right)_\infty+\omega_\varphi^2\left(f,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)_\infty\leqslant 105\|Tf-f\|_\infty$.

(Adell,J.A.等.[328]1999,15(4):537 - 555)我们问:(1)(2)中的最佳常数是多少?

26. **B- 郑算子不等式(Bohman- 郑维行算子不等式)**:

$$B_\sigma(f,x)=\int_{-\infty}^\infty K_\sigma(x-t)f(t)\mathrm{d}t\text{ 称为 B- 郑算子},$$

式中 $K_\sigma(t)=\dfrac{4\pi}{[\pi^2-(\sigma t)^2]^2}\left(\cos\dfrac{\sigma t}{2}\right)^2.$

郑维行不等式:设$\dfrac{f(x)}{1+x^4}\in L(R^1)$,则

(1) $|B_\sigma(f,x)-f(x)|\leqslant(5-\dfrac{4}{\pi})\omega(f,\dfrac{1}{\sigma})$;

(2) $|B_\sigma(f,x)-f(x)|\leqslant 9\omega_2(f,\dfrac{1}{\sigma})$;

(3) 若 $\omega_2(f,\delta)\leqslant C\delta^2$,则 $\|B_\sigma(f)-f\|_c\leqslant\dfrac{C\pi^2}{2\sigma^2}$.

(见[334]1965,15(1):54-62).

27. **BR 算子(Bernstein-Rogosinski 算子)不等式**:

$$B_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t-x)f(t)\mathrm{d}t \quad \text{称为 BR 算子,}$$

式中

$$K_n(t)=\left(\cos\frac{(2n+1)}{2}t\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\pi}{4n+2}\right)}\right].\tag{2.9}$$

设 $f\in C_{2\pi}$,则

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(2\pi+1)E_n^*(f)+\omega\left(f,\frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

(见[60]).

28. **Bernstein 求和算子不等式**:Bernstein 求和算子定义为:

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{2n}K_n(x_{k,n}-x)f(x_{k,n}),$$

式中 $K_n(t)$ 由(2.9)式定义,$x_{k,n}=\dfrac{2k\pi}{2n+1}$,$k=0,1,\cdots,2n$.

$$|B_n(f,x)-f(x)|<(1+2\pi+4\pi^2)E_n^*(f)+\omega\left(f,\frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

(见[60]和[70]219)

29. **BS 算子(Bojanic-Chisha 算子)不等式**:BS 算子定义为:

$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{m_n+2}f(t_{k,n})K_n(t_{k,n}-x).\tag{2.10}$$

式中 $K_n(t)=\dfrac{2}{m_n+2}\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{m_n}r_{k,n}\cos kt\right)$, $t_{k,n}=\dfrac{2k\pi}{m_n+2}$,$k=1,2,\cdots,m_n+2$.

(1) 若 $f\in C_{2\pi}$,则

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(1+\pi)\omega\left(f,\sqrt{\frac{1-r_{1,n}}{2}}\right).$$

(2) 取 $m_n=2n-2$,则 $t_{k,n}=k\pi/n$.

$$K_n(t)=\frac{3}{2n^2(2n^2+1)}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4.$$

这时(2.10)式中 $B_n(f,x)$ 成为离散的 Jackson 算子.从而

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(1+\pi)\omega\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

(3)　取 $m_n=2n-2$.

$$K_n(t)=2\left(\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right)^2\left(\frac{\cos(nt/2)}{\cos t-\cos(\pi/n)}\right)^2.$$

这时(2.10)式中 $B_n(f,x)$ 成为离散的 Korovkin 算子,从而

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant(1+\pi)\omega(f,\pi/(2n)).$$

(见[70]P220－221.[327]1974,11:231－235.)

30.　**H-L 极大算子不等式**:设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$,$Q$ 是包含 x 的任一方体,其边平行于坐标轴,则

$$M(f,x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}\mu(y)$$

称为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数,我们简称为 **H-L 极大函数**,M 称为 **H-L 极大算子**.

设 $0<r<\infty$,定义　$M_r(f,x)=[M(|f|^r,x)]^{1/r}$.

(1)　设　$f\in L^p(R^n)$,$1<p\leqslant\infty$,则 $M(f)\in L^p(R^n)$,且

$$\|M(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

式中　$C_p=2\left(\dfrac{pc}{p-1}\right)^{1/p}$.证明见[137]P.3－4.或[118]P137.

(2)　设 $f\in L(R^n)$,则 M 为弱(1,1)型算子,即 $\forall\lambda>0$,

$$\mu\{x:M(f,x)>\lambda\}\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

证明见[118]P.136.

(3)　设 $f\in L(R^n)$,$A_\alpha=\{x\in R^n:M(f,x)>\alpha\}$,则

$$\frac{1}{2^n\alpha}\int_{A_\alpha}|f|\leqslant\mu(A_\alpha)\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_{A_\alpha}|f|.$$

证明见[86]P45－46.

(4)　$\|M(f)\|_{p,w}\leqslant C\|f\|_{p,\omega}(1<p<\infty)\Leftrightarrow\omega\in A_p$

(见第 13 章).([309]1972.165:207－226.)

推广　$\displaystyle\int_{R^n}G(M(f,x))\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant c\int_{R^n}G(|f(x)|)\omega(x)\mathrm{d}x.$

式中 ω 为 R^n 上非负权函数,$G(t)=\displaystyle\int_0^t g(u)\mathrm{d}u$ 为 Young 函数.

见[329]1981/82,71(3):277－284.

(5)　设 $f_k\in L^p(R^n)$,$1<p<\infty$.$\left(\displaystyle\sum_{k=1}^\infty|f_k(x)|^2\right)^{1/2}\in L^p(R^n)$,则

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^\infty|M(f_k)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leqslant C_p\left\|\left(\sum_{k=1}^\infty|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

式中　$c_p=\begin{cases}0\left(\dfrac{1}{p-1}\right),(p\to1)\\0(p^{1/2}),(p\to\infty)\end{cases}$是最佳的.(见[72]P.29)

(6)　设 $f\in L^p(R^n)$, $1<p<\infty$, ω 为 R^n 上非负权函数. 则

$$\| M(f)\|_{p,\omega}\leqslant C(n,p)\left(\int_{R^n}|f|^p M(\omega)\right)^{1/p}.$$

证明见[310]1971.92:107－115.

(7)　$\| M(f)\|_p\leqslant C(p,n)\left[\int_Q |f|(\ln^+|f|)^{n-1}+1\right]$, $0<p<1$,

$\| M(f)\|_1\leqslant C(n)\left[\int_Q |f|(\ln^+|f|)^n+1\right]$.(见[57]Vol.2.P306)

(8)　设 $1<r<p$, 则 $\| M_r(f)\|_p\leqslant C(p,r)\| f\|_p$.

(9)　设 $f\in L^1(R^n)$, $0<p<1$, $\lambda>0$. $E_\lambda=\{x\in R^n:M(f,x)>\lambda\}$, 则

$$\mu(E_\lambda)\leqslant\frac{C}{(1-p)\lambda}\int_{E_\lambda}|f|.$$

(10)　设 $0<p<1$, E 为 R^n 中可测集, f 为 R^n 上非负可测函数, 则

$$\int_E M(f,x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}\mu(E)+\frac{c}{1-p}\int_{R^n}(f\ln^+ f).$$

(11)　设 $1\leqslant p<\infty$, $\lambda>0$. 若 $\mu\{x\in R^n:M(f,x)>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda^p}\| f\|_p^p$, 则 $\forall$ 方体 Q, 成立

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f|\mathrm{d}\mu\leqslant C\left\{\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f|^p\mathrm{d}\mu\right\}^{1/p}.$$

(12)　设 f 是 $(0,\infty)$ 上非负局部可积函数, 则 $\forall x>0$, 成立

$$x\int_x^\infty\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant 2M(f,\xi),\ 0<\xi\leqslant x.$$

(13)　设 $\alpha>0$, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$, 则存在正常数 $C(\alpha)$, 使得 $\forall Q_0=Q(x_0,r)$(中心在 x_0, 边长为 r 的方体), 成立

$$\int_{R^n}\frac{|f(x)|}{r^{n+\alpha}+|x-x_0|^{n+\alpha}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{c}{r^\alpha}\{\inf_{x\in Q_0}M(f,x)\}.$$

(14)　设 Q 为 R^n 中方体, x_0 为 Q 的中心, 令

$$T(f,x)=\int_{Q^c}\frac{|x-x_0|}{|y-x_0|^{n+1}}|f(y)|\mathrm{d}y,\ x\in Q, \text{则}$$

$$|T(f,x)|\leqslant CM(f,x).$$

(15)　设 $0<\alpha<n$, $\beta>0$, $\delta>0$, 则存在常数 $C=c(n)$, 使得

① $\int_{B(x,\delta)}\frac{|f(y)|\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-\alpha}}\leqslant C\delta^\alpha M(f,x)$;　② $\int_{B(x,\delta)^c}\frac{|f(y)|\mathrm{d}y}{|x-y|^{\beta+n}}\leqslant\frac{c}{\delta^\beta}M(f,x)$.

证明见[117]P85－86.

(16)　设 $\varphi\in L^1(R^n)$, $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, φ 的最小径向递减控制函数 $g(x)=\sup_{|y|\geqslant|x|}|\varphi(y)|\in L^1(R^n)$.

则　$\sup_{\varepsilon>0}|(f*\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant\| g\|_1 M(f,x)$, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$.

证明及其改进见[132]P.261－270.[142]P59－61.

注　(16)表明,用 H-L 极大算子可以控制许多我们常见的算子.

(17)　**加权 Hardy 不等式**:设 $g^*(y)$ 是 g 在 $(0,\infty)$ 上的递减重排,$\omega(x)$ 为非负权函数,$1 \leqslant q < \infty$,令

$$\| g \|_{\Lambda_q(w)} = \left(\int_0^\infty (g^*(x)^q) w(x) \mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

则古典的 Lorentz 空间 $\Lambda_q(w)$ 定义为

$$\Lambda_q(w) = \{g : \| g \|_{\Lambda_q(w)} < \infty\}.$$

特别当 $w(x) = \left(\frac{q}{p}\right)x^{(q/p)-1}$ 时,$\Lambda_q(w)$ 就是 $L(p,q)$ 空间. $M(g,x)$ 为 g 的 H-L 极大函数. 1990 年 Arino, M. A. 等证明:

①　若 $1 \leqslant q < \infty, n \geqslant 1, w(x)$ 为非负函数,则 $\forall g \in \Lambda_q(w)$,

$$\| M(g) \|_{\Lambda_q(w)} \leqslant c \| g \|_{\Lambda_q(w)} \tag{2.11}$$

成立的充要条件是对 $(0,\infty)$ 上所有非负递减函数 f,有 **Hardy 不等式**

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \right|^q w(x)\mathrm{d}x \leqslant c\int_0^\infty | f(x) |^q w(x)\mathrm{d}x; \tag{2.12}$$

而(2.12 式)成立的充要条件是

$$\int_r^\infty w(x)/x^q \mathrm{d}x \leqslant c r^{-q}\int_0^r w(x)\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

对所有正数 r 成立.

②　若 $w(x)$ 为非负函数,$1 \leqslant q < \infty$,且

$$\sup_{r>0} \frac{1}{r}\left(\int_0^r w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_0^r w(x)^{-q'/q}\mathrm{d}x\right)^{1/q'} < \infty, \tag{2.14}$$

则对所有非负递减函数 f,(2.12)式成立,或等价地(2.11)式成立. 当 w 是递增函数时,其逆也成立.

见[309]1990,320(2):727 - 735.

(18)　**Kakeya 极大算子不等式(F-S 不等式)**:设 δ 为小参数,记为 $0 < \delta \ll 1$,$f \in L_{loc}(R^n), n \geqslant 2$,定义

$$T_{h,\delta}(f,x) = \sup_D \frac{1}{\mu(D)}\int_D | f(y) | \mathrm{d}y.$$

式中管状域 D 包含 $x \in R^n$,D 的长为 h,截面积的半径为 $h\delta$. 于是 **Kakeya 极大算子**定义为

$$T_\delta(f,x) = \sup_{h>0} T_{h,\delta}(f,x).$$

若 $n = 2, 1 < p \leqslant 2$,则 $\forall \varepsilon > 0$,成立 **Fefferman-Stein 型不等式**:

$$\left(\int_{R^2} [T_\delta(f,x)]^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant c(p,\varepsilon)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{p}-1+\varepsilon}\left(\int_{R^2} | f(x) |^p T_\delta(w,x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

记为

$$\| T_\delta(f) \|_{p,w} \leqslant c(p,\varepsilon)(1/\delta)^{\frac{2}{p}-1+\varepsilon} \| f \|_{p,T_\delta w},$$

而当 $n\geqslant 3, 1<p\leqslant\dfrac{n^2-2}{2n-3}$ 时,成立

$$\|T_\delta(f)\|_{p,w}\leqslant c(n,p)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n}{p}-1}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha(n)}\|f\|_{p,T_\delta w}.$$

见 Tanaka. H.,[308]2001,129(8):2373－2378.我们问:上述 p 的范围能否再改善?

(19) H-L 极大算子的推广是 **H-L 分数次极大算子**:

$$M(f,x,\alpha)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{(\mu(Q))^{1-\alpha/n}}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}\mu(y).$$

① 若 φ 是非负递减径向函数,$0<\alpha<n,\int_{R^n}\frac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x<\infty$.则

$$\left|\int_{R^n}f(x-n)\frac{1}{t^{n-\alpha}}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\right|\leqslant c_\alpha M(f,x,\alpha).$$

② $\alpha>0, 1\leqslant p<n/\alpha, 1/q=1/p-\alpha/n$,则 $M(f,x,\alpha)$ 为弱(p,q)型算子,即 $\forall\lambda>0$,成立

$$\mu\{x\in R^n:M(f,x,\alpha)>\lambda\}\leqslant\left\{\frac{c}{\lambda}\|f\|_p\right\}^q.$$

特别地,$\|M(f,\alpha)\|_\infty\leqslant\|f\|_p$.

③ 令 $E_\lambda=\{x\in R^n:M(f,x,\alpha)>\lambda\}$,若 μ 为双倍测度.即存在常数 c,使得对任意方体 Q,有 $\mu(2Q)\leqslant c\mu(Q)$.则 $\forall f\in L^1(R^n),\forall\lambda>0$,成立

$$\mu(E_\lambda)\leqslant\frac{c}{\lambda}\int_{E_\lambda}|f|\mathrm{d}\mu.$$

④ 设 $0<\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-n\alpha<\infty, w\in A_{pq}$,则

$$\left(\int_{R^n}[M(f,x,\alpha)]^q[w(x)]^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant c\left(\int_{R^n}[|f(x)|w(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

见[87]P257.

(20) H-L 极大算子的另一方向推广是 Lorentz 空间 $L(p,q)$,齐性空间,Riemann 流形和各种加权空间等.例如,设 $f:R^n\to R$ 是可测函数,令
$\lambda_f(y)=\mu\{x\in R^n:|f(x)|>y\},\ y>0$. Lorentz 空间 $L(p,q)$ 中 f 的范数定义为

$$\|f\|_{p,q}=\begin{cases}\int_0^\infty[\lambda_f(y)]^{q/p}d(y^q)^{1/q}, & 1\leqslant q<\infty,\\ \sup\limits_{y>0}y\lambda_f(y)^{1/p}, & q=\infty.\end{cases}\qquad M_{p,q}(f,x)=\sup_{x\in Q}\frac{\|f\varphi_Q\|_{p,q}}{[\mu(Q)]^{1/p}},$$

式中 φ_Q 为 Q 的特征函数.特别,$M_{1,1}(f,x)$ 就是上述 H-L 极大算子 $M(f,x)$.见[308]1987,101(1):272－276.

(21) **H-L(Hardy-Littlewood)嵌入不等式**:设 $\Gamma(x)=\{(y,t)\in R_+^{n+1}:|x-y|<t\}$ 是以 x 为顶点的角形区域,u 的非切向极大函数定义为

$$N(u,x)=\sup\{|u(y,t)|:(y,t)\in\Gamma(x)\}.$$

若 F 定义在 R_+^{n+1} 上,$N(F)\in L^p(R^n), 0<p<\infty$.则当 $p<q<\infty$ 时成立

$$\left(\int_{R^{n+1}} t^{n\left(\frac{q}{p}-1\right)} |F(x,t)|^q \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \leqslant c \| N(F) \|_p.$$

见[315]1975,16:1－64.

邓一韩在[137]P138提出:径向极大函数与非切向极大函数在 $L^p(0<p\leqslant 1)$ 范数意义下相互控制的最弱条件是什么?我们问,将 L^p 范数换成 H^p 范数时又如何?

31.　**Fourier 变换不等式**:设 $f\in L^1(R^n)$,则 f 的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(x)=\int_{R^n} f(t)e^{-2\pi ixt}\mathrm{d}t.$$

式中 $xt=\sum_{k=1}^{n} x_k t_k$ 为向量 x,t 的内积.

(1)　**HY 不等式(Housdorff-Young 不等式)**:设 $f\in L^p(R^n),1\leqslant p\leqslant 2,1/p+1/q=1$,则

$$\hat{f}\in L^q(R^n),且\ \|\hat{f}\|_q\leqslant\|f\|_p. \tag{2.15}$$

特别地,$f\in L^1(R^n)$ 时,$\hat{f}\in L^\infty(R^n)$,且 $\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$.而 $f\in L^2(R^n)$ 时,$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$.(2.15)式的精确形式是下述 **Babenko 不等式**:

$$\|\hat{f}\|_q\leqslant c_p^n\|f\|_p.\ 1<p\leqslant 2.$$

式中 $c_p=\left(\frac{p^{1/p}}{q^{1/q}}\right)^{1/2}$.见[311]1975,102(1):159－182.注意(2.15)式对于 $p>2$ 不成立.

(2)　**Pitt 不等式**:设 $1<p\leqslant q<\infty,0\leqslant\beta<1/q,0\leqslant\alpha=\beta+1-(1/p)-(1/q)$.若 $|y|^\alpha f\in L^p(R^n)$,则

$$|x|^{-\beta}\hat{f}\in L^q(R^n),\quad 且\quad \||x|^{-\beta}\hat{f}\|_q\leqslant\||y|^\alpha f\|_p.$$

证明及其推广见[368]1984,33(2):257－270.

(3)　**HLP 不等式(Hardy-Littlewood-Paley 不等式)**:

令　$$w_p(x)=|x|^{(p-2)n},\ \|f\|_{p,w}=\left(\int_{R^n}|f|^p w\right)^{1/p}.$$

①　若 $1<p\leqslant 2,f\in L^p(R^n)$,则存在常数 c_p,使得

$$\|\hat{f}\|_{p,w_p}\leqslant c_p\|f\|_p;$$

②　若 $2\leqslant q<\infty,f\in L^q_{w_q}$,则 $\exists c_q>0$,使得

$$\|\hat{f}\|_q\leqslant c_q\|f\|_{q,w_q}.$$

提示:用 Marcinkiewicz 插值定理.

③　若 $0<p\leqslant 1$,则

$$\|\hat{f}\|_{p,w_p}\leqslant c_p\|f\|_{H^p}.\quad (见[87]P.370)$$

32.　**分数次积分算子不等式**:α 阶分数次积分算子 I_α 定义为

$$I_\alpha(f,x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t, \tag{2.16}$$

式中 $\alpha > 0, x \geqslant 0$. 而

$$I_{\alpha}(f,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}(t-x)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t \tag{2.17}$$

称为 **α 阶 Weyl 积分.**

下面的不等式中, $I_{\alpha}(f,x)$ 由(2.16)或(2.17)式定义均成立:

(1) **HLS(Hardy-Littlewood-Sobolev)不等式**: 设 $f \in L^{p}(0,\infty), f \geqslant 0, p > 1, 0 < \alpha < \frac{1}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$. 则 $I_{\alpha}(f) \in L^{q}(0,\infty)$ 且 $\| I_{\alpha}(f) \|_{q} \leqslant C_{p,q} \| f \|_{p}$.
见[1]P.324 - 325.[87]P.151 - 152.

2000 年许明用小波分析方法,证明了 I_{α} 的交换子的 H^{1} 有界性,即

$$\| fI_{\alpha}(g) - gI_{\alpha}(f) \|_{H^{1}} \leqslant c \| f \|_{p} \| g \|_{q}.$$

式中 $1 < p, q < \infty, (1/p) + (1/q) = 1 + \alpha, 0 < \alpha < 1$,

见中山大学学报 2000,39(4):10 - 14.

(2) **HL 不等式(Hardy-Littlewood 不等式)**: 设 $p > 1, 0 \leqslant \alpha < 1/p$, $p \leqslant q \leqslant p/(1-\alpha p)$, 或 $p > 1, \alpha \geqslant (1/p), p \leqslant q, f \in L^{p}(0,\infty)$, 则

$$\| I_{\alpha}(f) \|_{q,\omega} \leqslant C \| f \|_{p},$$

式中 $\omega(x) = x^{t}, t = -(p - q + pq\alpha)/p$.

我们问: $c = c(p,q,\alpha)$ 的表达式是什么? c 的最佳值是什么?

(见[1]P335,定理 402.证明见[354]1928,27:565 - 606.).

(3) 设 $a, b > 0, p > 1, r \geqslant 0, l > (1/p) - 1$,

当 $r = 0$ 时, ① $0 < a < \frac{1}{p}, p \leqslant q \leqslant \frac{1}{(1/p) - a}$; 或 ② $a = \frac{1}{p}, p \leqslant q < \infty$; 或 ③ $a > \frac{1}{p}, p \leqslant q \leqslant \infty$; 而当 $r > 0$ 时, ① $0 < a < r, \frac{1}{(1/p) + r} < q < \frac{1}{(1/p) + r - a}$; 或 ② $r \leqslant a < r + \frac{1}{p}, \frac{1}{(1/p) + r} < q \leqslant \frac{1}{1/p + r - a}$; 或 ③ $a \geqslant r + \frac{1}{p}, \frac{1}{(1/p) + r} < q \leqslant \infty$, 则

$$\left(\int_{0}^{\infty} | x^{-(r+l)}e^{-bx}I_{a}(f,x) |^{q}\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_{0}^{\infty} | x^{-l}e^{-bx}f(x) |^{p}\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

式中 $c = c(a,b,q,p,l,r), I_{a}(f,x)$ 由(32.1)定义.

(Kochneff, E., [327]1997,91(1):84 - 102.)

我们问:常数 c 的表达式及最佳值是什么?

$I_{\alpha}(f)$ 的变形见 Nonlinear Stud, 1999,6(2):207 - 230.

(4) 令 $J_{\alpha}(f,x) = x^{-\alpha}I_{\alpha}(f,x)$, 式中 $I_{\alpha}(f,x)$ 由(2.16)式定义. $1 < p \leqslant \infty$, 则

$$\| J_{\alpha}(f) \|_{p} \leqslant \frac{\Gamma(1 - 1/p)}{\Gamma(\alpha + 1 - 1/p)} \| f \|_{p}.$$

(5) R^{n} 上的分数次积分算子又称为 **Riesz 位势算子**:

$$I_{\alpha}(f,x) = \frac{1}{c(\alpha)}\int_{R^{n}} | x - y |^{\alpha - n}f(y)\mathrm{d}y.$$

相应地有截断 Riesz 位势算子：

$$J_\alpha(f,x)=\frac{1}{c(\alpha)}\int_{|y|\leqslant 2|x|}|x-y|^{\alpha-n}f(y)\mathrm{d}y.$$

式中 $0<\alpha<n, c(\alpha)=\pi^{n/2}2^\alpha\Gamma(\frac{\alpha}{2})/\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2})$.

① 设 $f\in L^p(R^n), 1<p<n/\alpha$,则

$I_\alpha(f,x)\leqslant c\|f\|_p^{\alpha p/n}[M(f,x)]^{1-\alpha p/n}$;

$\|I_\alpha(f)\|_q\leqslant c(\alpha,p,q)\|f\|_p$,式中 $1/q=(1/p)-(\alpha/n)$;

② 若 $f\in L^1(R^n),(1/q)=1-(\alpha/n)$,则 $\forall\lambda>0$,成立

$$\mu\{x\in R^n: I_\alpha(f,x)>\lambda\}\leqslant c\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_1\right)^q.$$

证明见[142]P.68－71.

③ 设 μ 为R^n 上正的 Boral 测度.若 $0<\alpha<n, 1<p<\infty, 1/p+(1/q)=1, Q$ 为 R^n 中方体,则

$$\int|I_\alpha(f,x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\leqslant c\int|f|^p\mathrm{d}x\quad(f\geqslant 0)$$

$$\Leftrightarrow\int_Q[I_\alpha(\varphi_Q\mathrm{d}\mu,x)]^q\mathrm{d}x\leqslant c\int_Q\mathrm{d}\mu<\infty;$$

若 $\alpha>(n/p), 1<p<\infty, f\geqslant 0, E=\{x\in R^n: r\leqslant|x|\leqslant 2r\}$,

则 $\displaystyle\int|J_\alpha(f,x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\leqslant c\int|f|^p\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sup_{r>0}r^{p\alpha-n}\int_E\mathrm{d}\mu(x)<\infty.$

见[368]1984,33(3):353－366.

④ 设 $0<\alpha,\delta<1, 1<p<q<\infty, \frac{1}{r}=\frac{1-\delta}{p}+\frac{\delta}{q}, f(x)\geqslant 0$,则

$$\|I_{\alpha\delta}(f)\|_r\leqslant c\|f\|_p^{1-\delta}\|I_\alpha(f)\|_q^\delta.$$

[142]P.75.另见 Appl. Anal. 2000,76(3－4):249－260.

⑤ **加权不等式**:设 $1<p<\infty, 0<q<\infty, f$ 是R^n 上径向非负递减(或递增)函数. u,v 为R^n 上非负局部可积权函数,则 $\|I_\alpha(f)\|_{q,u}\leqslant c\|f\|_{p,v}$.

(Rakotondratsimba, Y., Z. Anal. Anwendungen1996,15(1):75－93)

(6) 周期 $T=(-\pi,\pi]$ 函数 f 的分数次积分算子

$$I_\alpha(f,x)=\int_T|t|^{\alpha-1}f(x-t)\mathrm{d}t, x\in T.$$

$$M_\alpha(f,x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{[\mu(Q)]^{1-\alpha}}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y, 0<\alpha<1.$$

① **Welland 不等式**:设 $f\in L(T), 0<\delta<\alpha<\alpha+\delta<1$,则

$|I_\alpha(f,x)|\leqslant c[M_{\alpha-\delta}(f,x)M_{\alpha+\delta}(f,x)]^{1/2}$.

② **Adam 不等式**:设 $\alpha>0, 0<\delta<1, 1<p<\delta/\alpha, 1\leqslant q\leqslant\infty, f\in L^p(T)$, $M_{\alpha/p}(f)\in L^q(T)$,则 $I_\alpha(f)\in L^r(T)$ 且

$$\|I_\alpha(f)\|_r\leqslant\|M_{\alpha/p}(f)\|_q^{\alpha p/\delta}\|f\|_p^{1-\alpha p/\delta}.$$

③ **$I_\alpha(f)$ 的好 λ 不等式**：设 $\lambda,\varepsilon,\delta$ 为正的常数，$D\subset T=(-\pi,\pi]$，令

$E=\{x\in D: I_\alpha(f,x)>\varepsilon\lambda, M_\alpha(f,x)\leqslant\delta\lambda\}$.

则存在只依赖于 α 的常数 ε_0 和 β，使得 $\forall f\geqslant 0$，成立

$D\cap\{x\in T: I_\alpha(f,x)\leqslant\lambda\}\neq\phi.\ \mu(E)\leqslant\beta(\delta/\varepsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}}\mu(D),\ \forall\varepsilon>\varepsilon_0.$

见[87]P.163 – 166.

注 当 D 换成 R^n 中方体时，不等式右边的指数 $\frac{1}{1-\alpha}$ 应换成 $\frac{n}{1-\alpha}$. 见[142]P.76.

(7) 设 $\omega:(0,\infty)\to(0,\infty)$，$B_0=B(0,1)$ 是中心在原点的单位球，φ_{B_0} 为 B_0 的特征函数，于是广义分数次积分算子定义为

$$I_\omega(f,x)=\int_{R^n}\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y$$

及其变形：

$$\tilde{I}_\omega(f,x)=\int_{R^n}\left[\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n}-\frac{\omega(|y|)(1-\varphi_{B_0}(y))}{|y|^n}\right]f(y)\mathrm{d}y.$$

Nakai, Eridani 先后证明了 $I_\omega,\tilde{I}_\omega$ 在广义 Morrey 空间之间的有界性，

见[330]2002,33(4):335 – 340.

33. **C-Z(Calderon-Zygmund) 奇异积分算子不等式：**

定义 1 设算子 $T:L^2(R^n)\to L^2(R^n)$，$\sigma\in L^\infty(R^n)$，若

$$(\widehat{Tf})(x)=\sigma(x)\hat{f}(x).$$

则称 T 是 L^2 上的乘子(算子)，$\sigma(x)$ 称为 T 的符号.

例如 Hilbert 变换是 $L^2(R^n)$ 上的乘子，其符号 $\sigma(x)=-i\,\mathrm{sgn}x$.

定义 2 C-Z 奇异积分算子定义为

$$T(f,x)=P.V.\int_{R^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y=(K*f)(x). \tag{2.18}$$

特别当 $K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$，其中 $\Omega(x)$ 是零次齐次函数，即 $\Omega(\lambda x)=\Omega(x)$，$\lambda>0$，且 $\Omega(x)$ 在单位球面 $\sum_n$ 上的平均值为零，即 $\int_{\sum_n}\Omega(x')\mathrm{d}x'=0$，则称(2.18)式为经典C-Z奇异积分算子，而

$$R_j(f,x)=C_nP.V.\int_{R^n}\frac{y_i}{|y|^{n+1}}f(x-y)\mathrm{d}y$$

称为 f 的 **Riesz 变换**，式中 $C_n=\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

$$T_\varepsilon(f,x)=\int_{|x-y|>\varepsilon>0}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y,\ f\in C_0^\infty(R^n),$$

称为截断 C – Z 算子.

定义 3 设 $K(x)$ 在 $R^n-\{0\}$ 上局部可积，且存在常数 c_1,c_2,c_3，使得

① $\left|\int_{\delta<|x|<N}K(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant c_1$； $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{\delta<|x|<N}K(x)\mathrm{d}x$ 存在；

② $\int_{|x|<r} |x||K(x)|dx \leqslant c_2 r$;

③ $\int_{|x|\geqslant 2|y|} |K(x-y)-K(x)|dx \leqslant c_3, y \neq 0$.(Hörmander 条件)

则称 $K(x)$ 为 C-Z 核,记 $K_{\varepsilon,N}(x)=K(x)\varphi_E(x)$,式中 $E=\{x:\varepsilon<|x|<N\}$,$\varphi_E$ 为 E 的特征函数.

(1) **Calderon-Zygmund 不等式(C-Z 不等式)**:设 K 为C-Z核,则 $\forall f\in C_0^\infty(R^n)$,成立

$$\| T_\varepsilon f\|_p \leqslant C_p \| f\|_p, 1<p<\infty.$$

证明见[142]P.135 - 137.

(2) $T^*(f,x)=\sup_{0<\varepsilon<N}|(K_{\varepsilon,N}*f)(x)|$ 称为极大 C-Z 奇异积分算子.若 C-Z 核 $K(x)$ 还满足

$$|K(x_1-y)-K(x_2-y)|\leqslant c_4\frac{|x_1-x_2|}{|x_3-y|^{n+1}}.$$

式中 $|x_k-x_j|\leqslant r/2$, $|x_k-y|\geqslant r, r>0, k,j,=1,2,3$,则

① 当 $0<\alpha<1$ 时,成立 **Cotlar 不等式**:

$$T^*(f,x)\leqslant c\{[M(|Tf|^\alpha,x)]^{1/\alpha}+M(f,x)\}, f\in C_0^\infty(R^n).$$

② $\| T^*(f)\|_p \leqslant c\| f\|_p, 1<p<\infty$.

③ $\mu\{x\in R^n: T^*(f,x)>\lambda\}\leqslant \frac{c}{\lambda}\| f\|_1, \lambda>0$.

证明见[142]P140 - 143.

(3) C-Z 奇异积分算子的推广是振荡积分算子和 Fefferman 算子,广义 C-Z 算子等,例如:振荡积分算子 T 定义为

$$T(f,x)=\mathrm{P.V.}\int_{R^n}\exp(iB(x,y))K(x-y)f(y)dy,\ f\in C_0^\infty(R^n).$$

式中 B 为 R^n 上非退化线性变换,$B(x,y)=(Bx)\cdot y$ 是双线性型.$K(x)\in C^\infty(R^n\setminus\Omega)$ 且在原点的一个邻域内重合于一个 μ 阶齐次函数,还具有消失性;$\int_{|x|=\varepsilon}K(x)dx=0$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, 当 $B=0,\mu=n$ 时,T 就是通常的奇异积分.

(1) 1986 年,Stein,E.M.,Phong,D.H. 证明:当 $1<p<\infty$ 时,若 $\mu\geqslant n$,则

$$\| Tf\|_p\leqslant c_1\| f\|_p.$$

若 $0<\mu<n$,且 $|(1/2)-(1/p)|\leqslant \mu/(2n)$,则 $\| Tf\|_p\leqslant c_2\| f\|_p$.
式中常数 c_2 与 n,p,μ,B 有关,而 c_1 与 B 无关.

(2) 1987年,胡伟将上述结果推广到加权情形.设 $\mu\geqslant n$,则对于 $w(x)\in A_p$ $(1<p<\infty)$,有

$$\int |T(f,x)|^p w(x)dx\leqslant c_3\int |f(x)|^p w(x)dx;$$

若 $0<\mu<n$,则对于 $w(x)\in A_p, 1<p<\infty, \alpha=2n|(1/2)-(1/p)|\leqslant\mu$,成立

$$\int_{R^n}|T(f,x)|^p[w(x)]^r dx\leqslant c\int_{R^n}|f(x)|^p[w(x)]^r dx;$$

式中 $r = \frac{\mu - \alpha}{n - \alpha}$. 当 $p = 1, \mu > n, w \in A_1$ 时,有

$$w\{x \in R^n: |T(f,x)| > \lambda\} \leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{R^n} |f(x)| w(x)\mathrm{d}x, (\lambda > 0).$$

常数 c 与 f, B 无关. 见[352]1988,15,(3):256 - 266.

(4) 在 C-Z 算子的推广中,下述 BCP 不等式起着十分重要的作用:

BCP 不等式(Benedek-Calderon-Panzone 不等式):设 T 为 $C_0^\infty(R^n)$ 上次线性算子并满足:

① $\mu\{|Tf| > \lambda\} \leqslant \left(\frac{c}{\lambda}\|f\|_r\right)^r, 1 < r < \infty$;(即 T 为弱(r,r) 型).

② 设 $f \in L(R^n)$, $\mathrm{supp} f \subset B(x_0, r) = B_0$, ($B_0$ 是以 x_0 为中心, r 为半径的球), 且存在常数 $c_1, c_2 > 1$, 使得

$$\int_{R^n - C_1 B_0} |T(f,x)| \mathrm{d}x \leqslant c_2 \|f\|_1.$$

式中 $c_1 B_0$ 是以 x_0 为中心, $c_1 r$ 为半径的球. 则 T 为弱$(1,1)$ 型算子,即

$$\mu\{|Tf| > \lambda\} \leqslant \frac{c_3}{\lambda}\|f\|_1.$$

证明见[87]P280 - 281.

C-Z 奇异积分算子的各种推广及在 $L^p(R^n)$. $BMO(R^n)$, $H^p(R^n)$, Lipα, Besov 空间上的相应不等式见[87]、[142]、[137]、[136]、[129]、[92]、[88]、[86] 等.

34. **L-P(Littlewood-Paley) g 函数不等式**:设 $u(x,t) = (P_t * f)(x)$ 为 f 的 Poisson 积分.

$$|\nabla u(x,t)|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2.$$

则 L-P g 函数定义为

$$g(f,x) = \left(\int_0^\infty |\nabla(u,x)|^2 t \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

另两个基本的算子是面积函数 $S(f,x)$ 和 $g_\lambda(f,x)$:

$$S(f,x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} |\nabla u(y,t)|^2 t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

$$g_\lambda^*(f,x) = \left(\iint_{R_+^{n+1}} |\nabla u(y,t)|^2 \left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^{\lambda n} t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

式中 $\Gamma(x) = \{(y,t) \in R_+^{n+1}: |y - x| < t\}, t > 0$.

(1) 设 $1 < p < \infty, \lambda > 2/p, f \in L^p(R^n)$, 则

$$g(f,x) \leqslant CS(f,x) \leqslant C_\lambda g_\lambda^*(f,x).$$

而且 $\|g_\lambda^*(f)\|_p \leqslant C(p,\lambda)\|f\|_p$.

(2) 当 $0 < p \leqslant 1, p > 2/\lambda$ 时 $\|g_\lambda^*(f)\|_p \leqslant C(p,\lambda)\|f\|_{H^p}$.

(3) 设 $f \in L^p(R^n), 1 < p < \infty$, 则 $g(f) \in L^p(R^n)$, 且

$$C_p\|f\|_p \leqslant \|g(f)\|_p \leqslant C_p^*\|f\|_p.$$

(4) 在上述平方积分函数 g, S, g_λ^* 中的 Poisson 积分 $(P_t * f)(x)$ 可换成 $(f * \varphi_t)(x)$，式中 $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$，$\int \varphi = 0$，$\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(\frac{x}{t})$，$t > 0$，例如，

$$S_\varphi(f, x) = \left(\int_{|x-y|<t} |(f * \varphi_t)(y)|^2 \frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{n+1}}\right)^{1/2}.$$

我们可以建立这些函数的加权范数不等式，例如，设 $w^*(x) = M(w, x)$ 表示 w 的 H-L 极大函数，则

① $\| S_\varphi(f) \|_{2,w} \leqslant C(n, \varphi) \| f \|_{2,\omega^*}$.

② $1 < p \leqslant 2$ 时，$\| S(f) \|_{p,w} \leqslant C(n, p) \| f \|_{p,w^*}$.

③ $2 < p < \infty$ 时，$\| S(f) \|_{p,w} \leqslant C(n, p) \| f \|_{p,v}$,

式中 $v(x) = [w^*(x)]^{p/2}[w(x)]^{-(\frac{p}{2}-1)}$.

②③ 中 $S(f)$ 换成 $S_\varphi(f)$ 时仍成立. 细节见[368]1987,36(2):277 − 294.

加权 Sobolev 空间及其他空间中的 L-P 不等式见彭立中[335]1985.2. 和专著[87]. [137]. [142] 等.

(5) 设 $S_n(f, x)$ 是 $f \in L_{2\pi}^p(1 < p < \infty)$ 的 Fourier 级数的 n 阶部分和，则 f 的 L-P g 函数定义为

$$G(f, x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |S_{n_k}(f, x) - S_{n_{k-1}}(f, x)|^2\right)^{1/2}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1,$$

这时成立 **Littlewood-Palty 不等式**：

$$C_p \| f \|_p \leqslant \| G(f) \|_p \leqslant C_p^* \| f \|_p.$$

式中 $$C_p^* = \begin{cases} O(p), & p \to \infty, \\ O\left(\left(\frac{1}{p-1}\right)^{3/2}\right), & p \to 1+0, \end{cases}$$

1990 年，Pichorides 证明，$f \in H^p(1 < p < \infty)$，$C_p^* = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$，$p \to 1+0$，$C_p^{-1} = O(p\ln p)(p \to \infty)$. 并猜想 $C_p^{-1} = O(p^{1/2})$，$p \to \infty$.
见 Collog. Math. 1990,60/61(2):687 − 691 和[308]1992.114(3):787 − 789.

35. **Stieltjes 变换不等式**：f 的 **Stieltjes 变换定义为**：

$$S_\lambda(f, x) = \int_0^\infty (x+t)^{-\lambda} f(t)\mathrm{d}t.$$

设 u, v 为非负权函数，$\lambda > 0$，$1 \leqslant q < p \leqslant \infty$，$1/r = 1/q - 1/p$，$p', q'$ 分别为 p，q 的共轭指数，则 $\| S_\lambda(f) \|_{q,u} \leqslant C \| f \|_{p,v}$ 成立的充要条件是：

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{v(x)}{(x+t)^{\lambda q}}\mathrm{d}x\right]^{r/q} \left[\int_0^\infty \frac{u(x)^{1-p'}}{(1+(s/t))^{\lambda p'}}\mathrm{d}s\right]^{r/q'} u(t)^{1-p'}\mathrm{d}t < \infty.$$

(Gordon, S. [392]1988,110(1 − 2):73 − 78)

36. **几何平均算子不等式**：设 $f(x) > 0$ a.e. $x \in (0, \infty)$，f 的几何平均算子定义为

$$T(f, x) = \exp\left(\frac{k+1}{x^{k+1}}\int_0^\infty t^k \ln f \mathrm{d}t\right).$$

设 $1 < p \leqslant \infty, 0 < q < p$,则

$$\| T(f) \|_{q,u} \leqslant c \| f \|_{p,v}.$$

(Jain,P.,Singh,A.P.,[399],2000,13(8):63 - 67).更一般的平均算子定义为

$$T_t(f,x) = \frac{1}{g(t)}\int_0^t f[g^{-1}(g(x)+g(u))]\mathrm{d}g(u), x \in [-1,1].$$

式中 g 是 $[-1,1]$ 上绝对连续的奇函数且 $g'(x) > 0$ $a.e.$

见[323]1999,51(3):546 - 565.另见[301]2001,263(1):135 - 152.

37.　设 $H^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 为通常的 Hardy 类,$f \in H^\infty$,

$$G(f) = \sup_{|\theta|\leqslant\pi} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{|f(\exp i(\theta+t)) - f(\exp i(\theta-t))|}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t.$$

则

(1)　$G(f) \leqslant \pi \| f' \|_{H^1}$;

(2)　$\sup\limits_{|\theta|\leqslant\pi}\int_0^1 |f'(re^{i\theta})| \mathrm{d}r \leqslant \frac{\pi}{2}(\| f \|_{H^\infty} + G(f))$.

(Stoilov,Reyo,Math. and Math. Education,1985)

38.　**算子的分数幂不等式**:设 T_1, T_2 分别是 Hilbert 空间 X, Y 上正自共轭算子,T 是 X 到 Y 上的有界线性算子.

若　$\| T_2 Tx \| \leqslant M \| T_1 x \|$,则成立 **Heinz 不等式**:

$\| T_2^\alpha Tx \| \leqslant M^\alpha \| T \|^{1-\alpha} \| T_1^\alpha x \|, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.　(见[107]2:547.)

39.　**高丁(Garding)不等式**:设 $P(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$ 是定义在区域 G 上的椭圆型微分算子,其主部 $P_{2m}(x,D)$ 所对应的多项式记为 $P_{2m}(x,y)$,若存在正常数 c_0,使得 $\forall x \in G, y \in R^n$,成立

$$\mathrm{Re}P_{2m}(x,y) \geqslant c_0 |y|^{2m}.$$

则存在正常数 c_1, c_2,使得 $\forall u \in C_0^\infty(G)$,成立

$$\mathrm{Re}(P(x,D)u,u) \geqslant c_1 \| u \|_m^2 - c_2 \| u \|_0^2.$$

见 Hörmander,L., The analysis of linear partial differential operators,3. Springer-Verlag,1985.

40.　**强制性不等式**:是指对某个双线性形式给出下界估计的不等式,或者用已知函数的范数和边界数据的范数给出某个椭圆型方程解的范数的上界估计的不等式.例如,设 W_2^m 是 Sobolev 空间. W_0^m 是 W_2^m 的具有紧支集的元(即在域 G 的边界附近为零的元)的子空间. $W_0^m \subset X \subset W_2^m$,则

$$\mathrm{Re}D(u,v) \geqslant c \| u \|_m^2 - \lambda \| u \|_0^2 \quad (\lambda \geqslant 0, c > 0)$$

就是　$D(v,u) = \sum\limits_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\|\beta|\leqslant m}} (\partial^\alpha v, a_{\alpha\beta}\partial^\beta u)$ 的**强制性不等式**.

若方程 $L(u) \triangleq \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)\partial^\alpha(u) = f$ 的解在区域 G 的边界 ∂G 上满足条件 $M_j(u) = 0, j = 0,\cdots,m-1, M_j$ 为 j 阶微分算子,则

$$\|u\|_{2m} \leqslant c_1\|L(u)\|_0 + \lambda_1\|u\|_0, c_1 > 0, \lambda_1 \geqslant 0.$$

是椭圆型方程边值问题的强制性不等式.更一般情形见[107]1:637－638.

41. **NH(von Neumann-Heinz)不等式**:设 T 为谱算子,$p(T)$ 表示多项式算子,则

$$\|p(T)\| \leqslant \max\{|p(y)|: |y| \leqslant \|T\|\}.$$

它是函数演算中的基本不等式,而函数演算则是谱分析和 Banach 代数理论的基本工具之一.详见[107]2:496－598.

42. **耗散算子不等式**:设 X 为复 Hilbert 空间.$T: X \to X$ 为有界线性算子

$$\mathrm{Re}T = \frac{1}{2}(T + T^*), \mathrm{Im}T = \frac{1}{2i}(T - T^*),$$

T^* 为 T 的共轭算子,I 为恒等算子,若 $\mathrm{Im}T > 0$,即 $\mathrm{Im}T$ 为可逆的正算子,则称 T 为严格耗散算子.记　$T_0 = (T - iI)(T + iI)^{-1}$,若 $\|T_0\| < 1$,则

(1)　$\pm(I - T^*T) \leqslant \dfrac{2\|T_0\|}{1 - \|T_0\|^2}(I - T^*)(I - T)$;

(2)　$\pm \mathrm{Re}T \leqslant \dfrac{2\|T_0\|}{1 - \|T_0\|^2}I$;

(3)　$\dfrac{1 - \|T_0\|}{1 + \|T_0\|}I \leqslant \mathrm{Im}T \leqslant \dfrac{1 + \|T_0\|}{1 - \|T_0\|}I$;

(4)　$2\dfrac{1 - \|T_0\|}{1 + \|T_0\|}\mathrm{Im}T \leqslant (I + T^*)(I + T) \leqslant 2\dfrac{1 + \|T_0\|}{1 - \|T_0\|}\mathrm{Im}T$.

(Fan Ky[386]1988,105:237－248)

43. **收缩算子不等式**:设 X 为复 Hilbert 空间.$T: X \to X$ 为有界线性算子,T^*,I,$\mathrm{Re}T$,$\mathrm{Im}T$ 的定义见 N.42.若 $\|T\| < 1$,则

(1)　$\dfrac{T^*T - \|T\|I}{1 - \|T\|} \leqslant \mathrm{Re}T \leqslant \dfrac{T^*T + \|T\|I}{1 + \|T\|}$;

(2)　$\dfrac{T^*T - \|T\|I}{1 - \|T\|} \leqslant \mathrm{Im}T \leqslant \dfrac{T^*T + \|T\|I}{1 + \|T\|}$;

(3)　$\dfrac{1 - \|T\|}{1 + \|T\|}(I - T^*)(I - T) \leqslant I - T^*T \leqslant \dfrac{1 + \|T\|}{1 - \|T\|}(I - T^*)(I - T)$;

(4)　$\pm \mathrm{Re}T \leqslant \dfrac{\|T\|}{1 - \|T\|^2}(T^* - iI)(T + iI)$;

(5)　$\pm \mathrm{Im}T \leqslant \dfrac{\|T\|}{1 - \|T\|^2}(I - T^*)(I - T)$.

(Fan Ky[386]1988,105:237－248).另见第 9 章 §2N.16.

44. **Ascoli 不等式**:设 X 为赋范线性空间.E 为 X 中闭凸集,则 $\forall x_0 \in X - E$,存在 X 上有界线性泛函 f,(记为 $f \in X^*$),和 $\alpha \in R^1$,使得

$$f(x) < \alpha < f(x_0), \forall x \in E.$$

提示:这是泛函分析中凸集分离定理的推论.

45. **线性算子的谱半径 $r_\sigma(T)$ 不等式**:设 X 是复 Banach 空间,则复平面 C 上以原点为中心包含 T 的谱 $\sigma(T)$ 的最小闭圆盘的半径 $r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(T)\}$ 称为 T 的谱半径.

(1) $r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$; (2) $r_\sigma(T_1+T_2)\leqslant r_\sigma(T_1)+r_\sigma(T_2)$;

(3) $r_\sigma(T_1T_2)\leqslant r_\sigma(T_1)r_\sigma(T_2)$; (4) $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$.

式中 $T_1,T_2\in B(X)$,且 $T_1T_2=T_2T_1$.见[118]P.358.

46. **Hardy 算子不等式:**设 $K(x,y)$ 非负,关于 x 递增而关于 y 递减,而且存在常数 $c>0$,使得 $K(x,y)\leqslant c[K(x,z)+K(z,y)]$,$0<y<z<x$.则

$$T_\alpha(f,x)=\int_0^x[K(x,y)]^\alpha f(y)\mathrm{d}y$$

称为广义 Hardy 算子(GHO),$T_1(f,x)$ 记为 $T(f,x)$.

设 $r,q\geqslant1$,$1<p\leqslant q+r$,$\alpha>1$,w,v 为非负权函数.

$\|f\|_{p,v}=\left(\int_0^\infty|f(x)|^pv(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\infty$,则成立 **Opial 型不等式:**

$$\left(\int_0^\infty|T(f,x)|^q|T_\alpha(f,x)|^rw(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q+r}}\leqslant c\|f\|_{p,v}.$$

细节见 Steven,B. [329]1997,126(1):27 - 50. 此外见 Kerman,R,Function Spaces. Pozman,1998:269 - 278,[308]1998,126(6):1739 - 1746.

47. 设 T 为 Hilbert 空间 X 上有界线性算子,I 为恒等算子,若 $0<m<M$,$0<mI\leqslant T\leqslant MI$,$0<r<p$.令

$$K(m,M,p)=\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{(M^p-m^p)^p}{(M-m)(mM^p-Mm^p)^{p-1}}.\text{则}$$

(1) $(T^px,x)^{1/p}\leqslant K(m^r,M^r,p/r)^{1/p}(T^rx,x)^{1/r}$;

(2) 若 $T_1\geqslant T_2\geqslant0$,$0<mI\leqslant T_k\leqslant MI$,$k=1,2$.则

$$T_1^p-T_2^p\geqslant\frac{-(mM^p-Mm^p)}{M-m}[K(m,M,p)^{1/(p-1)}-1],p>1.$$

(Takeaki,Y.[303]2000,3(1):89 - 96.)

48. **Marcus 不等式,**设 T_k,A_k 为 Hilbert 空间 X 上算子,其中 A_k 为正的可逆算子,T_k^* 为 T_k 的共轭算子.则

$$\sum_{k=1}^nT_k^*A_k^{-1}T_k\geqslant\left(\sum_{k=1}^nT_k\right)^*\left(\sum_{k=1}^nA_k\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^nT_k\right).$$

Ritsuo,N.等.Math.Japan 1999,50(1):35 - 39.

49. 设 f 是 R^{n+1} 中单位球面 $\sum_n$ 上的平方可积函数,它的球形调和展开为

$$f=\sum_{k=0}^\infty Y^{(k)}.$$

Pf 是它的单位球上的调和延拓.P_rf 是 Pf 在球面 $|x|=r$ 上的限制,于是 $P_rf=\sum\limits_{k=0}^\infty r^kY^{(k)}$.$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$,则

$$\|P_rf\|_q\leqslant\|f\|_p\Leftrightarrow r^2<(p-1)/(q-1).$$

有关概念见[65]P146 - 162.

50. **H-S 范数不等式:**设 $B(X)$ 是可分复 Hilbert 空间 X 上所有有界线性算子的 C^* 代

数. $\{e_k\}$ 为 X 的正交基,若 $T\in B(X)$, $\sum_{k=1}^{\infty}\|Te_k\|^2<\infty$,则称 T 为 H-S(Hilbert-Schmidt)类. T 的 HS 范数定义为

$$\|T\|_2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|Te_k\|^2\right)^{1/2}.$$

设 $T,T_k\in B(X),k=1,2$, 令 $A_n=|T_1|^nT+T|T_2|^n$;

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}T_1^{n-k}TT_2^k;\quad G_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}T^{n-k}TT_2^k;\quad H_n=T_1^nT-TT_2^n,$$

式中 $|T|=(T^*T)^{1/2}$ 为 T 的绝对值,则

(1) $2\|A_n\|_2\leqslant\|B_n\|_2+\|G_n\|_2$;

推论 若 T_1,T_2 还是正算子,则

$$\|A_n\|_2\leqslant\|B_n\|_2;$$

(2) 若 T_1,T_2 还是正规算子,则

$$\|B_n\|_2\leqslant 2^{n-1}\|A_n\|_2;\quad \|G_n\|_2\leqslant\|H_n\|_2.$$

(3) 若 T_1,T_2 还是自共轭算子,则

$$\|G_{2n+1}\|_2\leqslant 2^{2n}\|H_{2n+1}\|_2.$$

证明及更多的类似不等式见[301]2002,268(1):67－73.

51. 设 A,B,T 为 Hilbert 空间 X 上有界线性算子.若 A,B 为自共轭算子,$A\leqslant B$ 表示 $B-A$ 为半自定算子.

(1) **Furuta 不等式**:若 $0\leqslant A\leqslant B,r\geqslant 0,0\leqslant p\leqslant q$,令 $t=(p+r)/(q+r)$,则

$$A^{r/2}B^pA^{r/2}\leqslant(A^{r/2}B^qA^{r/2})^t;\quad (B^{r/2}A^qB^{r/2})^t\leqslant B^{r/2}A^pB^{r/2}.$$

2001 年 Vshiyama,M. 推广了上述结果.即下述(2)(3):

(2) 若 f 是区间 D 上连续函数,若

$$A\leqslant B\Rightarrow f(A)\leqslant f(B).$$

称 f 是算子单调函数;若 $\forall\lambda\in[0,1]$. $f(\lambda A+(1-\lambda)B)\leqslant\lambda f(A)+(1-\lambda)f(B)$. 则称 f 是**算子凸函数**.

若 $A\geqslant 0,\|B\|\leqslant 1,f$ 是$[0,\infty)$上算子单调函数,则

$$B^*f(A)B\leqslant f(B^*AB).$$

(3) **L-H(Löwner-Heinz) 不等式**:$0\leqslant A\leqslant B\Rightarrow A^\alpha\leqslant B^\alpha,0<\alpha\leqslant 1$.更一般地,若 $0\leqslant A\leqslant B,p,r\geqslant 0,q\geqslant 1$,且$(1+2r)q\geqslant p+2r$,令 $\beta=(p+2r)/q$,则

$$B^\beta\leqslant(B^rA^pB^r)^{1/q};(A^rB^pA^r)^{1/q}\leqslant A^\beta.$$

以上见[308]1987,101(1):85－88 和 2001,129(11):3339－3344.

52. **正线性泛函的 AC(Aczel-Chebyshev) 不等式**:设 f 是非负函数空间 X 上正线性泛函,且 $f(1)=1$,若 $x(t),y(t)$ 同为递增或同为递减,则

(1) $f(x)f(y)\leqslant f(xy)$.

(2) 若 $f(x)\geqslant 0,f(y)\geqslant 0,x_0-f(x)\geqslant 0,y_0-f(y)\geqslant 0$,则

$$\frac{x_0y_0 - f(xy)}{(x_0 - f(x))(y_0 - f(y))} \geqslant 1.$$

(孙燮华,[301]2000,245(2)393 - 403)

53.　**正算子不等式**:给定函数集$\{u\}$,它们满足某些单边条件,算子L作用在这些函数上,如何从$L(u) \geqslant 0$推出$u \geqslant 0$?它们往往与微分方程的解有密切联系.例如:

Cahlygin 不等式:设$t \geqslant 0$时,$u'' + p(t)u' - q(t)u > 0, v'' + p(t)v' - q(t)v = 0$;$q(t) \geqslant 0, u(0) = v(0), u'(0) = v'(0)$,则$u(t) > v(t), \forall t \geqslant 0$.

在有限区间$[0,a]$上,还可以得到更精确的结果,这是个庞大的课题,[2]用了一章(第4章)的篇幅专门讨论算子的正性.

54.　**极小极大不等式**:设X, Y为实赋范线性空间.A, B分别是X, Y中非空紧凸集.泛函$f: A \times B \to R^1$满足:

(1)　$\forall y \in B, f(\cdot, y)$是$A$上的凹泛函且上半连续;

(2)　$\forall x \in A, f(x, \cdot)$是$B$上凸泛函且下半连续,则存在$(x_0, y_0) \in A \times B$,使得

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant f(x_0, y), \forall (x, y) \in A \times B.$$

提示:利用泛函分析中凸集分离定理(Hahn-Banach 泛函延拓定理的几何形式).

上述不等式称为 Von Neumann 极小极大定理(鞍点安理),是对策论的基本定理,它在非线性泛函分析及最优化理论中也有重要应用.上述不等式已有许多推广,特别是 Fan Ky 对此作了系统的研究,例如,他证明:

设D是 Hausdorff 拓扑线性空间X中紧凸集,f定义在$D \times D$上,并满足:

(1)　$\forall x \in X, f(x, y)$是y在D上的下半连续函数;

(2)　$\forall y \in X, f(x, y)$是x在D上拟凹函数,则

$$\min_{y \in D} \sup_{x \in D} f(x, y) \leqslant \sup_{x \in X} f(x, x).$$

见[5]3:103 - 113;Proc. Nat. Acad. Sci.,1952,38:121 - 126;1953,39(1):42 - 47;[354]1987,194:7 - 13.此外,还可见 Sion, M.[313]1958,8:171 - 176 等.

55.　**Banach 极限不等式**:设$c = \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots): \lim\limits_{n \to \infty} x_n$存在$\}, l^\infty = \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots): \sup\limits_n |x_n| < \infty\}$.若$x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in c$,定义$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = f(x)$.则$f$是空间$c$上的线性泛函,而且$f$可以延拓成$l^\infty$上的泛函$F$,使得

$$\liminf_{n \to \infty} x_n \leqslant F(x) \leqslant \limsup_{n \to \infty} x_n.$$

这时$F(x)$称为x在l^∞中的Banach 极限.