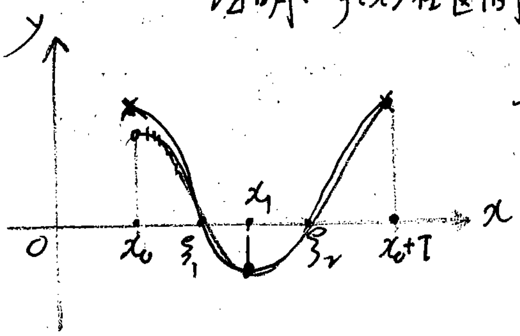
中山大學 本科生考试草稿纸 2011 5/7 -67

P.154.25. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，$f(x_0)\neq 0$，且 $\int_0^T f(x)dx = 0$.

证明：$f(x)$ 在区间 (x_0, x_0+T) 内至少有两个实根。



证：由条件 $f(x)=f(x+T)$，和 $\int_0^T f(x)dx=0$

从而 $\int_0^T f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx = f(c)\cdot T = 0$

$c\in[x_0, x_0+T]$

即 $f(c)=0$，　$c\in[x_0, x_0+T]$

也即 $f(x)$ 在 (x_0, x_0+T) 内有零点。（或 $f(x)=0$ 有根。）

如果 $f(x_0)>0$，则 $f(x_0+T)>0$

如果在 $[x_0, x_0+T]$ 上，$f(x)$ 恒大于 0；则 $\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx>0$ 与条件矛盾。

从而在 $[x_0, x_0+T]$ 上，$f(x)$ 有正、有负；必有（至少）一点 x_1，使 $f(x_1)<0$；

这样在 $[x_0, x_1]$、$[x_1, x_0+T]$ 上，应用零点定理，有 ξ_1, ξ_2，$x_0<\xi_1<x_1$，$x_1<\xi_2<x_0+T$

使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

即 $f(x)$ 在 (x_0, x_0+T) 内至少有两个实根。