§3　其他特殊函数不等式

一、 Beta 与 Gamma 函数不等式

(一)　定义与性质

Gamma 函数 Γ 定义为

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}z>0)\tag{3.1}$$

式中 z 为复数，t^{z-1} 的多值性可由公式 $t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}$ 来消除，此处 $\ln t$ 为实数，若 $\mathrm{Re}z<0$，且 $-n-1<\mathrm{Re}z<-n$，$n=0,1,2,\cdots$，Γ 函数由 Cauchy-Saalschütz 积分表示：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}\left(e^{-t}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^k}{k!}\right)\mathrm{d}t.\tag{3.2}$$

$\Gamma(z)$ 又称为**第二类 Euler 积分.**

Beta 函数 $B(z,w)$(又称为第一类 Euler 积分) 定义为：

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t.(\mathrm{Re}z>0,\mathrm{Re}w>0).\tag{3.3}$$

$B_x(z,w)=\int_0^x t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t$，称为不完全 Beta 函数.

$$\Gamma_1(x,y)=\int_0^y t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\quad 与\quad \Gamma_2(x,y)=\int_y^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\tag{3.4}$$

称为**不完全 Gamma 函数**. 见[101]P.260,263.

$\Gamma(z)$ 与 $B(z,w)$ 的基本性质：

1. Euler 函数方程　$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.$(\mathrm{Re}z>0)$ 或

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\ (\mathrm{Re}z<0,\ -n-1<\mathrm{Re}z<-n,n=0,1,2,\cdots)\tag{3.5}$$

当 n 为正整数时，$\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(1)=1$，规定 $0!=\Gamma(1)=1$.

2. **Euler 完全化公式(余元公式)：**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.\tag{3.6}$$

特别 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. 当 n 为正整数时　$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$.

3. **Gauss 乘法公式(倍数公式)：**

$$\Gamma(nx)=(2\pi)^{(1-n)/2}n^{nx-(\frac{1}{2})}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right).\ n=2,3,4,\cdots\tag{3.7}$$

4. Weierstrass 无穷乘积表达式：

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right].$$

式中 c 为 Euler 常数.

5. 渐近展开式：设 $\mathrm{Re}z \geqslant \delta > 0$，或 $|\mathrm{Im}\ z| \geqslant \delta > 0$. 则 $\ln\Gamma(z)$ 可渐近展开为 Stirling 级数：

$$\ln\Gamma(z) = (z-\frac{1}{2})\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + O(z^{-2n-1}).$$

其中 B_{2k} 为 Bernoulli 数，由此推出

$$\Gamma(z) \fallingdotseq \sqrt{2\pi}z^{z-(\frac{1}{2})}e^{-z}[1+\frac{z^{-1}}{12}+\frac{z^{-2}}{288}-\frac{139z^{-3}}{51840}-\frac{571z^{-4}}{2488320}+O(z^{-5})].$$

特别地 $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}}, 0<\theta<1$. 而更准确的是 Sonin 公式：

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12(x+\theta)}}, 0<\theta<1/2.$$

当 $x>0$ 时，成立 Binet 公式：

$$\Gamma(x+1) = (\frac{x}{e})^x\sqrt{2\pi x}e^{\theta(x)} \text{ 式中 } \quad \theta(x) = \int_0^{\infty}(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2})\frac{1}{t}\exp(-xt)\mathrm{d}t.$$

6. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p,q>0$; $\quad B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), q>1$;

$B(p,1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}, 0<p<1$.

(二) 下面主要讨论 z,w 为正实数时 $\Gamma(x)$ 与 $B(p,q)$ 的若干不等式

1. $x>0$ 时 $\Gamma(x)>0$.

$$x^{\alpha(x-1)-c} < \Gamma(x) < x^{\beta(x-1)-c}. \tag{3.8}$$

(1) $\forall x\in(0,1)$，(3.8) 式成立的充要条件是 $\alpha \leqslant 1-c$ 和 $\beta \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-c\right)$.

(2) $\forall x\in(1,\infty)$，(3.8) 式成立的充要条件是 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-c\right)$ 和 $\beta \geqslant 1$，其中 c 为 Euler 常数. (Alzer. H. [308]2000, 128(1):141 – 147)

2. $\forall x\in R^1$, $\quad \Gamma(x)\Gamma''(x) > [\Gamma'(x)]^2 \geqslant 0$.

即不论是 $|\Gamma(x)|$ 的，还是 $\ln|\Gamma(x)|$ 的一切分支都是凸函数. 当 $x>0$ 时，$\Gamma(x)$ 在 $x_0 = 1.4616321\cdots$ 处具有惟一的极小值：$\Gamma(x_0) = 0.885603\cdots$. (见[101]P.259)

3. 设 $x>0$，则：(1) $\ln\Gamma(x)$ 是凸函数，即 $\Gamma(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}) \leqslant [\Gamma(x)]^{\frac{1}{p}}(\Gamma(y))^{\frac{1}{q}}$，式中 $\quad 1<p<\infty, (1/p)+(1/q)=1$.

(2) $\ln\Gamma(x+1) - \ln\Gamma(x+\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}\ln(x+\frac{8x+3}{8(4x+1)})$.

(Alzer, H., [301]2000, 252(1):353 – 363)

4. 令 $f(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, $\quad x>0$，则

$f(x+\frac{1}{2}) - f(x) > \dfrac{2x+1}{x(4x+1)}$. $\quad f(x) = \ln x - \dfrac{1}{2x} + O(\dfrac{1}{x^2}) \quad (x\to\infty)$.

见[101]P259, 260.

5. 设 $x_k>0, k=1,\cdots,n$ 则

$$[\Gamma(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k)]^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}\Gamma(x_k).$$

6. $\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32(n+1)}\right)^{1/2}<\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+(1/2))}<\frac{n+(1/2)}{\left(n+\frac{3}{4}+\frac{1}{32n+48}\right)^{1/2}}$.

7. **Gautschi 不等式：**

$$n^{1-\alpha}\leqslant\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)}\leqslant(n+1)^{1-\alpha},(0\leqslant\alpha\leqslant1).$$

8. 设 $\alpha>0,\alpha-2\beta>0$，则成立 **Gurland 不等式：**

$$\frac{\alpha+\beta^2}{\alpha}\leqslant\frac{\Gamma(\alpha-2\beta)\Gamma(\alpha)}{(\Gamma(\alpha-\beta))^2}.$$

当 $\beta=0$ 或 -1 时等号成立.[4]P.393

9. 设 $\alpha>-1,\beta>-1$，则

$$\Gamma(\alpha+\beta+n+1)<cn^{\beta}\Gamma(\alpha+n+1),$$

式中 c 是与 α,β 有关的常数. 见[60] 中册 P117.

10. $n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}\geqslant\frac{\alpha}{n!}\Gamma(n+\alpha),(0<\alpha<1)$.

11. 设 $x>1$，则

(1) $0<\ln\Gamma(x)-\left[(x-\frac{1}{2})\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right]<\frac{1}{x}$（左边不等式对 $x>0$ 成立）.

(2) $\frac{1}{2x}<\ln x-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}<\frac{1}{x}$（左边不等式对 $x>0$ 成立）.

(3) $\frac{1}{x}<\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\Gamma(x)<\frac{1}{x-1}$.

12. $x>0$ 时，

$$0\leqslant\ln\Gamma(x)-\ln\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right]\leqslant x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

由此推出

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

提示：利用 $\ln\Gamma(x)$ 的凸性.

13. $\left|\ln\Gamma(z)-(z-\frac{1}{2})\ln z+z-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}\right|$

$$\leqslant\frac{|B_{2n+2}|}{(2n+1)(2n+2)|z|^{2n+1}}\sup_{t\geqslant0}\left|\frac{z^2}{t^2+z^2}\right|$$

式中 B_n 为 Bernoulli 数，见[101]P.257.

14. 不完全 Gamma 函数 $\Gamma_1(x,y),\Gamma_2(x,y)$ 不等式：

(1) 设 $x>0,a>0$，则

$$\frac{\Gamma_1(x+a,x+a)}{\Gamma_1(x,x)}<\frac{(x+a)^{x+a-1}}{x^{x-1}e^a}.$$

(Merkle, M. J., [306]MR93c:26018)

(2) 设$\int_x^{x+1} e^{-t}t^x \mathrm{d}t < \left(\frac{x}{e}\right)^x$,则$\frac{\Gamma_1(x+1,x+1)}{\Gamma_1(x,x)} < \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$,$\frac{\Gamma_1(x,x)}{\Gamma(x)} > \frac{1}{2}$.(见[21]P526)

(3) 当$y>0$时,$\Gamma_1(x,y)$是x的对数凹函数,见[301]1998,223(1):151-157.

15. 设$a_k>0,q_k>0,1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 2$.

$\sum_{k=1}^n q_k=1$. $M_r(a,q)=(\sum_{k=1}^n q_k a_k^r)^{1/r}$,$0<|r|<\infty$,$M_0(a,q)=\prod_{k=1}^n a_k^{q_k}$是$a=(a_1,\cdots,a_n)$的$r$阶加权幂平均,则

$$\Gamma(M_r(a,q))\leqslant M_r(\Gamma(a_k),q_k)$$

成立的充要条件是$0.01317\cdots\leqslant r\leqslant 11.29416\cdots$.

(Alzer,H.,Monatsh. Math.,2000,131(3):179-188)

16. 设$a,b>0$,$M_p(a,b)=\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$,则

$M_p(\Gamma(x),\Gamma(\frac{1}{x}))\geqslant 1$,$x\in(0,\infty)$成立的充要是$p\geqslant\frac{1}{c}-\frac{\pi^2}{6c^2}$.式中$c$为Euler常数.(Alzer,H.,[308]2000,128(1):141-147)

17. $$\sqrt{\frac{2n-3}{2n-2}}<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}<\sqrt{\frac{2n-2}{2n-1}},$$

当n是大于3的奇数时,下界可改进为$(n/2)[(2n-2)(2n+1)]^{1/2}$.

18. $$\sqrt{\frac{4n-3}{4n-2}}<2^{2n-1}\sqrt{\frac{2n-1}{2\pi}}B(n,n)<\sqrt{\frac{4n-2}{4n-1}}.$$

19. 设$\frac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)}=(x+\theta(x))^{-1/2}$,则当$x\geqslant-\frac{1}{2}$时,$1/4\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$,而当$x\geqslant 0$时,$1/4\leqslant\theta(x)\leqslant 1/\pi$.

20. 设$p,q>0$,令$\alpha=\frac{p}{p+q}$,则$\int_0^\alpha x^p(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x<\frac{1}{2}B(p+1,q)$.(见[107]MR86b:26031)

21. 对于充分大的$|z|$和正数ε,有

$$\frac{1}{|\Gamma(x)|}<\exp\left[|z|\log\frac{|z|}{e}+\frac{\pi^2|z|}{2\log|z|}(1+\varepsilon)\right].$$

注意上式中的正数ε不能换成负数.证明见A.И.马库雪维奇,解析函数论,黄正中等译,高等教育出版社,1957.p.467-470.

22. 设$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_x^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$,当$t$从$0\to\infty$时,$\varphi$从0递增到1/2.见[305]1990,97(10):929.

23. 设$0\leqslant\alpha\leqslant 1,x\geqslant 0$,则存在常数$c$(只依赖于$\alpha$),使得

$[\Gamma(x+1)]^{1-\alpha}[\Gamma(x+2)]^\alpha\leqslant c\Gamma(x+\alpha+1)$.

见[336]1991,12A(6):649.

24. $B(p,n+1)=\frac{n!\Gamma(p)}{\Gamma(n+p+1)}=O(n^{-p})$,$p>0$.

[324]1992,66(3):443 - 467.

25. 设 $a_k > 0, \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$,则

$\prod_{k=1}^{n} \Gamma(a_k)^{\Gamma(a_k)} \geqslant \exp\{n\Gamma(\sigma_n) - 1\}$,见[305]1996,103(8):695.

二、 Riemann-zeta 函数不等式

Riemann zeta 函数 $\zeta(z)$ 是由下述 Dirichlet 级数定义:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad z = x + iy.$$

当 $x > 1$ 时,有 Euler 乘积表示:

$$\zeta(z) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}.$$

式中 p 遍历全体素数,$\zeta(z)$ 还可解析延拓到整个复变面上.

著名的 Riemann 猜想是:$\xi(z)$ 的所有非平凡零点均位于直线 $x = 1/2$ 上,($\xi(z)$ 有负偶数 $-2, -4, \cdots$,的零点称为平凡零点).通过计算机的计算已知 Riemann 猜想对于 2×10^{20} 以内的零点成立,但仍然是 2000 年 Clay 数学促进会公布的七个新千年数学奖问题之一.

1. $\limsup_{y \to \infty} \frac{|\zeta(1+iy)|}{\ln\ln y} \geqslant e^c$; $\quad \limsup_{y \to \infty} \frac{|\zeta(1+iy)|^{-1}}{\ln\ln y} \geqslant \frac{6}{\pi^2} e^c$.

若 Riemann 猜想成立,则上述两个上极限分别不超过 $2e^c$ 和 $\frac{12}{\pi^2}e^c$,其中 c 为 Euler 常数.(见 Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, 1986)

2. 令 $f(x) = \limsup_{y \to \infty} \frac{\ln|\zeta(x+iy)|}{\ln y}$, $-\infty < x < \infty$.则

$$f(x) \leqslant (1/2)(1-x), 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Lindelöf 猜想:

$$f(x) = \begin{cases} (1/2) - x, x < 1/2. \\ 0 \qquad x \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Lindelöf 猜想比 Riemann 猜想要弱.([97]Vol.1.P46 - 49).

3. 当 $x > 1$ 时,$\zeta(x)$ 是 x 的递减函数,而且当 $x \geqslant 2$ 时,$\zeta(x) \leqslant \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.(见[301]1986,118(1):84)

4. $\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n (z-1)^n$.式中 $c_n = \lim_{m \to \infty}\left\{\sum_{k=1}^{m} \frac{(\ln k)^n}{k} - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1}\right\}$ 称为**广义 Euler 常数**.特别地 c_0 就是通常的 Euler 常数.(见[101]p.807)

5. 设 $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+x}}, S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1+x}}, R_n(x) = S(x) - S_n(x), x > 0$,则

(1) $(1/2) + (1/x) < S(x) < 1 + (1/x)$;

(2) $\dfrac{2n-x}{2xn^{(1+x)}} < R_n(x) < \dfrac{2n-x}{2xn^{(1+x)}} + \dfrac{1+x}{2n^{(2+x)}}$.

见[345]1991,11:36 - 37.

三、 指数积分不等式

指数积分定义为:

$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{1}{t} e^{-t} \mathrm{d}t, (|\arg z| < \pi). E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} \mathrm{d}t, \mathrm{Re}z > 0, n = 0,1,2,\cdots,$

则当 $x > 0$,对于 $n = 1,2,3\cdots$,有

1. $\dfrac{n-1}{n} E_n(x) < E_{n+1}(x) < E_n(x)$.
2. $E_n^2(x) < E_{n-1}(x) E_{n+1}(x)$.
3. $\dfrac{1}{x+n} < e^x E_n(x) < \dfrac{1}{x+n-1}$.
4. $(1/2)\ln((1+(2/x)) < e^x E_1(x) < \ln(1+(1/x))$.
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{E_n(x)}{E_{n-1}(x)}\right) > 0$.

以上见[101]P.229.

四、 Bessel 函数不等式

第一类 Bessel 函数 $J_\alpha(z)$ 定义为

$$J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\alpha+2k}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}, z = x + iy.$$

1. $|J_\alpha(x)| \leqslant c_\alpha[\exp(\pi|\mathrm{Im}\alpha|)]x^{-1/2}, (x > 0, \mathrm{Re}x > -1/2)$;
2. $|J_\alpha(x)| \leqslant \begin{cases} c_\alpha x^{-1/2}, x \geqslant 1 \\ c_\alpha x^\alpha, 0 < x < 1, \end{cases}$
3. $|J_\alpha(x)| \leqslant 1, (\alpha \geqslant 0)$.
4. $|J_\alpha(x)| \leqslant 1/\sqrt{2}, (\alpha \geqslant 1)$.
5. $0 < J_\alpha(x) < \dfrac{2^{1/3}}{3^{2/3}\alpha^{1/3}\Gamma(2/3)}, (\alpha > 0)$.
6. $|J_\alpha(z)| \leqslant \dfrac{\left|\frac{1}{2}z\right|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \exp|\mathrm{Im}z|, (\alpha \geqslant -\dfrac{1}{2})$ 式中 $\mathrm{Im}z = y$.
7. $|J_n(nz)| \leqslant \left|\dfrac{z^n \exp(n \cdot \sqrt{1-z^2})}{(1+\sqrt{1-z^2})^n}\right|$.

(以上见[101]P362)

8. **Cauchy 不等式:** $|J_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{n!}\left|\dfrac{1}{2}z\right|^n \exp(\dfrac{1}{4}|z|^2)$.
9. 设 $\alpha > -1, x > \dfrac{\pi}{16(\alpha+2)}\{\pi + [\pi^2 + 32(\alpha+2)]^{1/2}\}$,则

$$(x+1)^{\alpha+1}J_\alpha\left(\frac{\pi}{x+1}\right)-x^{\alpha+1}J_\alpha\left(\frac{\pi}{x}\right)>\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

(Mahajan,A.,[331]1979,634 - 677:70 - 71)

10.　设 $\alpha>0,0\leqslant x\leqslant 1$,则

$$1\leqslant x^{-\alpha}\frac{J_\alpha(\alpha x)}{J_\alpha(\alpha)}\leqslant \exp[\alpha(1-x)].$$

证明见[385]1984,15:203 - 205.

11.　设 $\alpha\geqslant 1,\alpha>\beta>-\frac{1}{2}$,则

$$\int_0^\infty\frac{|J_\alpha(t)|}{t^{\beta+1}}\mathrm{d}t\leqslant ce^{-(\beta+\frac{1}{2})}.$$

见[301]1993,179:507 - 511.

五、　上、下确界不等式

设函数 f,g 定义在集 A 上,则

1.　$\inf\{f(x)\}+\inf\{g(x)\}\leqslant\inf\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\{f(x)\}+\sup\{g(x)\}\leqslant\sup\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup\{f(x)\}+\sup\{g(x)\}$;

2.　若 f,g 在集 A 上非负,则

$\inf\{f(x)\}\cdot\inf\{g(x)\}\leqslant\inf\{f(x)g(x)\}\leqslant\inf\{f(x)\}\sup\{g(x)\}\leqslant\sup\{f(x)\cdot g(x)\}\leqslant\sup\{f(x)\}\cdot\sup\{g(x)\}$.

3.　单调性:设 $f(x)\leqslant g(x),\forall x\in A$,则

$$\inf\{f(x)\}\leqslant\inf\{g(x)\},\sup\{f(x)\}\leqslant\sup\{g(x)\}.$$

上述上、下确界均在集 A 上取.

4.　设 $A_1\subset A_2$,则

$$\inf\{f(x):x\in A_1\}\geqslant\inf\{f(x):x\in A_2\};$$
$$\sup\{f(x):x\in A_1\}\leqslant\sup\{f(x):x\in A_2\}.$$

5.　设 f 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$m(x)=\inf\{f(t):a\leqslant t\leqslant x\}\text{ 在}[a,b]\text{上递减}$$
$$M(x)=\sup\{f(t):a\leqslant t\leqslant x\}\text{ 在}[a,b]\text{上递增}.$$

六、　上、下极限不等式

1.　1984 年,匡继昌证明:设 f 定义在 (α,∞) 上且在 (α,∞) 的任何有限子区间上均有界,g 在 (α,∞) 上严格递增到 ∞,则对任意常数 $c>0$,成立

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x+c)-f(x)}{g(x+c)-g(x)}\leqslant\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x+c)-f(x)}{g(x+c)-g(x)}.$$

由此可以推出,若 f 定义在 $(0,\infty)$ 上且在 $(0,\infty)$ 的任一有限子区间上有界,则

(1)　$\liminf\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]\leqslant\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\leqslant\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\leqslant\limsup\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(2) 当 $f(x)\geqslant c>0$,(c 为常数,$x>0$),则

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}\leqslant\liminf_{x\to\infty}[f(x)]^{1/x}\leqslant\limsup_{x\to\infty}[f(x)]^{1/x}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

见湖南师院学报 1984,3:105 – 112,MR88m:26001.

2. $\liminf\limits_{x\to x_0}f(x)+\liminf\limits_{x\to x_0}g(x)\leqslant\liminf\limits_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\liminf\limits_{x\to x_0}f(x)+\limsup\limits_{x\to x_0}g(x)$ $\leqslant\limsup\limits_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\limsup\limits_{x\to x_0}f(x)+\limsup\limits_{x\to x_0}g(x)$.

3. 设 $f,g\geqslant 0$,则

$\liminf\limits_{x\to x_0}f(x)\liminf\limits_{x\to x_0}g(x)\leqslant\liminf\limits_{x\to x_0}\{f(x)g(x)\}\leqslant\liminf\limits_{x\to x_0}f(x)\limsup\limits_{x\to x_0}g(x)$ $\leqslant\limsup\limits_{x\to x_0}\{f(x)g(x)\}\leqslant\limsup\limits_{x\to x_0}f(x)\limsup\limits_{x\to x_0}g(x)$.

七、 Zygmund 函数类不等式

Zygmund 函数类定义为 $Z=\{f:f\in C[-1,1],\ |f(x_1)-2f(\frac{x_1+x_2}{2})+f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|,x_1,x_2\in[-1,1],f(-1)=f(1)=0\}$,

令 $\|f\|_c=\sup\{|f(x)|:-1\leqslant x\leqslant 1\}$,$K=\sup\{\|f\|_c:f\in Z\}$

1951 年 Timan 证明:$K<4/3$,随后 Abramov, L. M. 证明 $K\leqslant(4/3)-(1/288)$,1976 年,Sokolova. I. P. 证明:

$$K\leqslant(4/3)-(4/381).$$

问题:K 的最好上界是什么?

八、 其他[MCM]

1. 设函数 f,g 定义在整个实轴上,且对于所有实数 x,y,成立

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

若 $f(x)\not\equiv 0$,且对于所有实数 x,有 $|f(x)|\leqslant 1$,则对于所有实数 y,成立 $|g(y)|\leqslant 1$.

证 用反证法.反设存在 y_0,使得

$|g(y_0)|=1+\alpha(\alpha>0)$,令 $M=\sup|f(x)|$,则对于所有 x,有

$2|f(x)|\cdot|g(y_0)|=|f(x+y_0)+f(x-y_0)|\leqslant|f(x+y_0)|+|f(x-y_0)|\leqslant 2M$.

所以

$$|f(x)|\leqslant\frac{M}{|g(y_0)|}=\frac{M}{1+\alpha}=M-\beta,\text{式中 }\beta=\frac{M\alpha}{1+\alpha}>0$$

这与 M 的定义相矛盾.

2. 设 $g(x)$ 是方程 $[x+g(x)]^p+|x-g(x)|^p=2x$ 的惟一非负解,$1<p<2$,$0\leqslant x\leqslant 1/2$,则

$$[1-x+g(x)]^p+|1-x-g(x)|^p\leqslant 2(1-x).\tag{3.9}$$

证 令 $y=1-x$,从条件知 $x\leqslant g(x)\leqslant y$.

(3.9) 式左边 $=[1+(g(x)-x)]^p+[1-(x+g(x))]^p$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(g(x)-x)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}(g(x)+x)^k$$

$$\leqslant 2 - 2px + 2x \cdot \sum_{k=2}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^k = 2(1-x).$$

3. [MCU] 设函数 f 在区间$[0,1]$上有 m 阶连续导数,当 $k = 0,1,\cdots,m-1$ 时,$f^{(k)}(x)$ 在区间$[0,1]$上都不取零值,而对于区间$[0,1]$中所有 x,有 $|f^{(m)}(x)|\geqslant M$,令 $\|f\| = \max\{|f(x)|:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 则 $\|f\|\geqslant\dfrac{M}{m!}$

见[63]P.77 - 78.

4. [MCU]. 设函数 f,g 定义在实数集 R^1 上,则存在 x,y,使得 $0\leqslant x,y\leqslant 1$,且

$$|xy - f(x) - g(x)|\geqslant 1/4.$$

提示:利用三角不等式;有

$$1 = |[1-f(1)-g(1)] + [f(1)+g(0)] + [f(0)+g(1)] - [f(0)+g(0)]|$$

$$\leqslant |1-f(1)-g(1)| + |f(1)+g(0)| + |f(0)+g(1)| + |f(0)+g(0)|,$$

上式右边四个绝对值中至少有一个不小于 1/4. 因此在$(0,0)$,$(0,1)$,$(1,0)$ 及$(1,1)$ 四个点中,至少有一点的坐标满足所要证的不等式.

5. [MCU]. 设函数 f 在区间$[0,1]$ 上可积,且对于 $k = 0,1,\cdots,n-1$,都有 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0$,而$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1$. 则在区是$[0,1]$ 的某个正测度集内,有

$$|f(x)|\geqslant 2^n(n+1).$$

提示:用反证法. 设除区间$[0,1]$ 的零测度子集外,恒有 $|f(x)| < 2^n(n+1)$,则

$$1 = \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x < 2^n(n+1)\int_0^1 |x-1/2|^n\mathrm{d}x = 1,$$

这是不可能的,故不等式得证.

6. **Lyapunov 不等式**:设曲面(S) 的方程为 $z = f(x)$,其中 $x = (x_1,x_2)\in D$,$\theta(x,y)$ 为曲面(S) 在 $x,y(\in D)$ 两点的法线之间的夹角,$d(x,y)$ 为点 x 与 y 之间的距离,若 D 为有界闭域,f 在 D 内存在有界的二阶导数,则 $\theta(x,y) < cd(x,y)$. 式中 c 为常数.