学　　号________________　　　　　评定成绩________________(分)
学生姓名________________　　　　　担任教师 线性代数课程组

（下述一 ～ 四题全作 100 分，两小时完卷）

试　题　全　文

1. **填空题**　（将正确答案填在题中括号内。每小题 2 分，共 10 分）

1. 已知 4 阶行列式 D 的第三行元素分别为 $-1,0,2,4$; 第四行元素对应的余子式依次是 $5,10,a,4$. 则 $a=$ (　　　　　).

2. 设方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}=0$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为互不相等的实常数, 则方程的全部解是 (　　　　　).

3. 设四阶矩阵 $A=[\alpha,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4]$, $B=[\beta,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4]$ 其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4×1 列矩阵, 且已已知行列式 $|A|=4,|B|=1,$ 则行列式 $|A+B|=$ (　　　　　).

4. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, 则 r (　　　) s.

5. 已知 n 阶矩阵满足关系式 $A^2+2A-3I=0,$ 则 $(A+4I)^{-1}=$ (　　　　　).

二. **单项选择题**　（每小题仅有一个正确答案，将正确答案的番号填入下表内. 每小题 2 分，共 20 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案番号										

1. 设 A 为方阵, 则 $|A|=0$ 的必要条件是 (　)

(A) 两行(列)元素对应成比例;

(B) 任一列为其它列的线性组合;

(C) 必有一列为其它列的线性组合;

(D) A中至少有一列元素全为零.

2. 设A为m阶方阵, B为n阶方阵, $C=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$, 则$|C|=$(　　　);

(A) $|A||B|$;　　　　(B) $-|A||B|$;

(C) $(-1)^{m+n}|A||B|$;　　　　(D) $(-1)^{mn}|A||B|$.

3. 行列式$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=$(　　).

(A) 1000;　　　　(B) -10000;

(C) 2000;　　　　(D) -2000.

4. 设A,B为n阶方阵, 则下列结论成立的是(　　　)

(A) $AB\neq 0 \Leftrightarrow A\neq 0$且$B\neq 0$;　(B) $|A|=0 \Leftrightarrow A=O$;

(C) $|AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$或$|B|=0$;　(D) $A=I \Leftrightarrow |A|=1$.

5. 设A为n阶可逆矩阵, 则(　　　)

(A) A总可以只经过初等行变换变为I;

(B) 对分块矩阵$(A \quad I)$施行若干次初等变换, 当子块变为I时, 相应地I变为A^{-1};

(C) 由$AX=BA$.得$X=A$;

(D) 以上三个结论都不正确.

6. 设A是$m\times n$矩阵, 其秩为r, C是n阶可逆阵, 且$AC=B$的秩为r_1, 则(　　)正确.

$(A)\quad r > r_1$;　　(B)　$r < r_1$;

$(C)\quad r = r_1$;　　(D)　r 与 r_1 的关系依 C 而定.

7. 设 A,B 为同阶可逆方阵, 则(　　)成立.

(A)　$AB = BA$;

(B)　存在可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = B$;

(C)　存在可逆阵 C, 使 $C^T AC = B$;

(D)　存在可逆阵 P,Q, 使 $PAQ = B$.

8. 设 A,B 为 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩(　　).

(A)　必有一个等于零;　　(B)　都小于 n;

(C)　一个小于 n, 一个等于 n;　　(D)　都等于 n.

9. 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 则(　　).

(A)　存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 成立;

(B)　存在一组不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 成立;

(C)　存在一组全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使等式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 成立;

(D)　对 β 的线性表达式唯一.

10. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为两个 n 维向量组,

且秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$=秩$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) = r$, 则(　　).

(A)　两向量组等价, 也即可相互线性表示;

(B)　秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) = r$;

(C)　当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 被向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示时, 两向量组等价;

(D)　当 $s = t$ 时, 两向量组等价.

3、**计算题** （每小题 9 分，共 54 分）

1. 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}$$

2. 计算下列n阶行列式的值：

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, 且 $R(A)=3$, 则 k 为什么?

4. 考虑向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}7\\0\\14\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}5\\1\\6\\2\end{bmatrix},\alpha_5=\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\1\end{bmatrix}$$

(1) 求向量组的秩;

(2) 求此向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

5. 已知矩阵 $A=PQ$, 其中 $P=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}2, & -1, & 2\end{bmatrix}$, 求矩阵 A, A^2, A^{100}.

6. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 其中 I 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B.

四、证明题 （每小题 8 分，共 16 分）

1. 设 A,B 是 n 阶正交矩阵, 且 $|A||B|=-1$, 证明 $|A+B|=0$.

2. 设 A 为 n 阶非奇异矩阵, α 为 n 元列, b 为常数, 记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix},$$

(1) 计算并化简 PQ;

(2) 证明:矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.