
普通物理学
中山大学
余非人

第3章 守恒定律

§1 质点系

§2 动量守恒定律

§3 角动量守恒定律

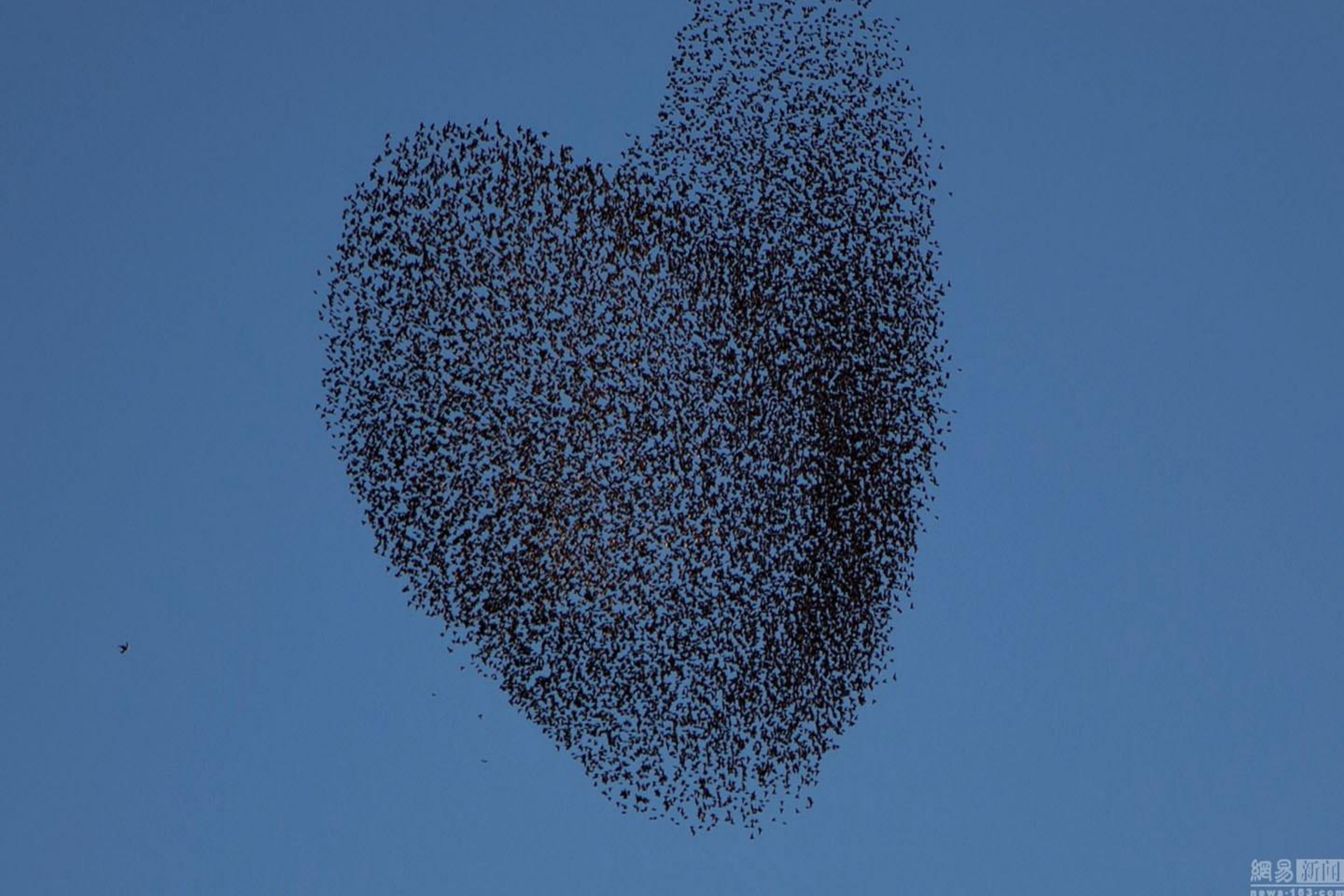
§3 能量守恒定律

§1 质点系

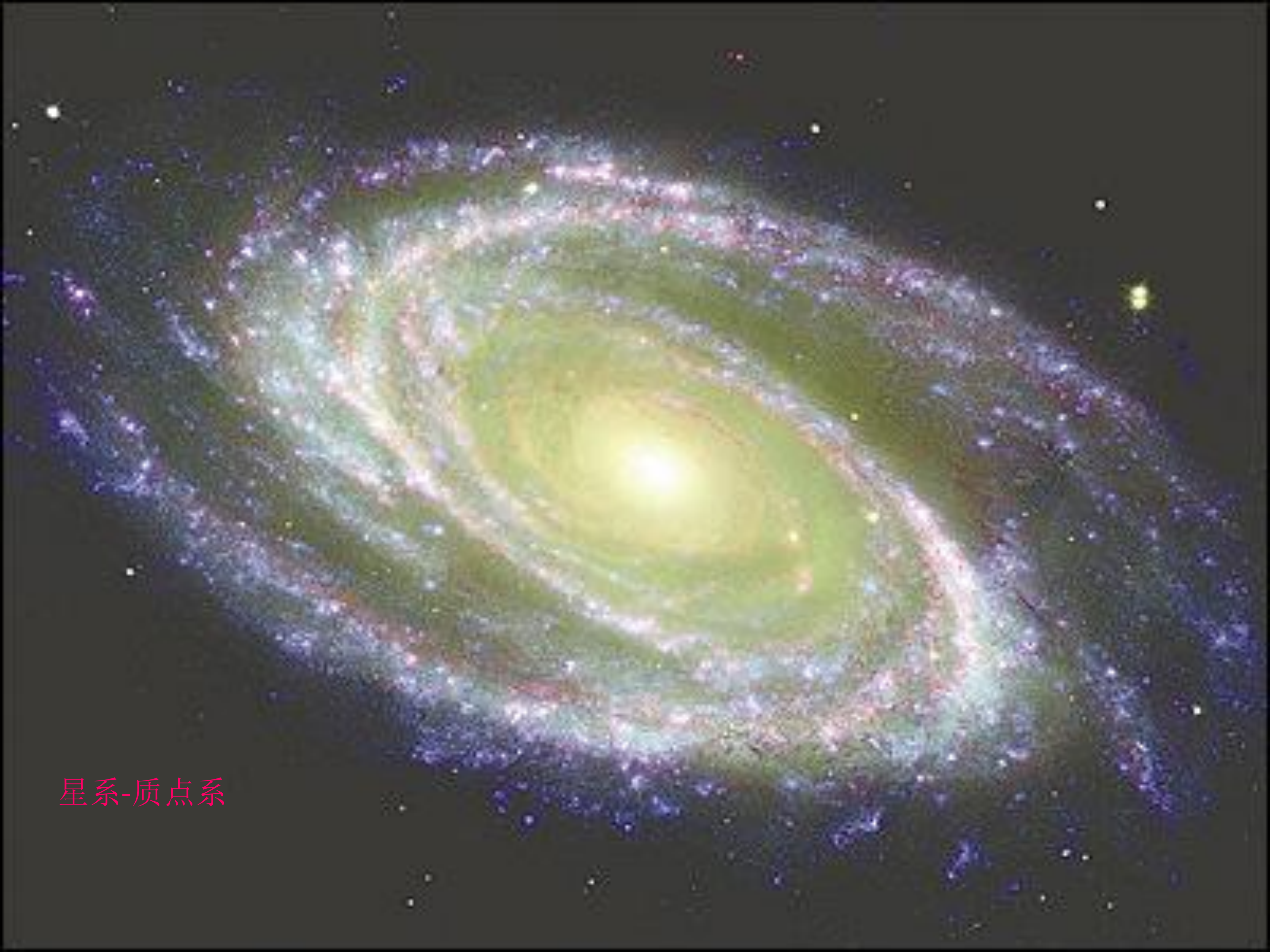
一. 质点系的概念

- 质点系，是由多个质点组成的系统。地球是质点系，一群鱼是质点系，一朵云也是质点系，任何物质系统都是质点系。
- 固体，是特殊的质点系，质点系各个质点之间的距离始终不变。
- 质点系作为一个整体，它具有质量，动量，角动量和能量。
- 质点系的相互作用，分为外界与质点系之间的相互作用，和质点系内部各个质点之间的相互作用。
- 质点系的运动，分为质点系的整体运动，和质点系各个质点之间的相对运动。质点系的整体运动，有整体平动和整体转动以及质点系的形变。质点系的运动是极其复杂的，但它也存在普遍的一般规律。

一群鸟-质点系



沙丁鱼群-质点系


星系-质点系


一团气体-质点系

地球-质点系

二. 质点系所受的力

- 质点系受的力，分为外力和内力 。
- 外力 ， 是外界对质点系各个质点的作用力，非惯性参照系中的惯性力，也可以看成是外力。
- 内力 ， 是质点系内部各个质点之间的相互作用力。
- 质点系内力之和等于零 ， 所以内力的冲量之和也为零。

据牛顿第三定律：$\vec{F}_{AB}^{in} = -\vec{F}_{BA}^{in} \Rightarrow \vec{F}_{AB}^{in} + \vec{F}_{BA}^{in} = 0$

因为质点系各个质点之间的内力是成对出现的

所以质点系的内力之和为零：$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{in} = 0$

所以质点系的内力冲量之和也为零：$\sum_{i=1}^{N} I_i^{in} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{in} dt = 0$

- 质点系内力矩之和等于零，所以内力矩的角冲量之和也等于零。

据牛顿第三定律：$\vec{F}_{AB}^{in}=-\vec{F}_{BA}^{in}$

$$\vec{M}_{AB}^{in}+\vec{M}_{BA}^{in}=\vec{r}_A\times\vec{F}_{AB}^{in}+\vec{r}_B\times\vec{F}_{BA}^{in}=\vec{r}_A\times\vec{F}_{AB}^{in}-\vec{r}_B\times\vec{F}_{AB}^{in}=\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B\right)\times\vec{F}_{AB}^{in}$$

质点系的内力是成对出现的,并且有:$\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B\right)//\vec{F}_{AB}^{in}\Rightarrow\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B\right)\times\vec{F}_{AB}^{in}=0$

即：$\vec{M}_{AB}^{in}+\vec{M}_{BA}^{in}=\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B\right)\times\vec{F}_{AB}^{in}=0$

所以质点系内力矩之和为零:$\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i^{in}=0$

所以质点系内力矩的角冲量之和也为零:$\sum_{i=1}^{N}K_i^{in}=\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_i^{in}dt=0$

- 质点系内力所作的功之和不等于零。质点系的内力可分为保守力和非保守力。所以质点系各个质点所受的力由外力、保守内力和非保守内力构成。

$$\begin{aligned}\vec{F}_i&=\vec{F}_i^{ex}\left(\text{外力}\right)+\vec{F}_i^{in}\left(\text{内力}\right)\\&=\vec{F}_i^{ex}\left(\text{外力}\right)+\vec{F}_{ic}^{in}\left(\text{保守内力}\right)+\vec{F}_{id}^{ex}\left(\text{非保守内力}\right)\end{aligned}$$

§ 2 动量守恒定律

一. 质点系动量定理

由：$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ex} + \vec{F}_i^{in} = \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad$ 有：$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ex} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{in} = \dfrac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

因为：$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{in} = 0$ 所以：$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ex} = \dfrac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

由：$\vec{I}_i = \vec{I}_i^{ex} + \vec{I}_i^{in} = \vec{p}_{i2} - \vec{p}_{i1} \quad \Rightarrow \quad$ 有：$\sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i^{ex} + \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i^{in} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{i2} - \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{i1}$

因为：$\sum_{i=1}^{N} I_i^{in} = 0$ 所以：$\sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{i2} - \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{i1}$

质点系动量定理：$\begin{cases} \vec{F}^{ex} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{I}^{ex} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \end{cases} : \begin{cases} \vec{F}^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ex} \\ \vec{I}^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{ex} dt \\ \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \end{cases}$

二. 动量守恒定律

由于：$\vec{F}^{ex}=\dfrac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$

所以当质点系所受外力为零时，质点系的动量守恒：

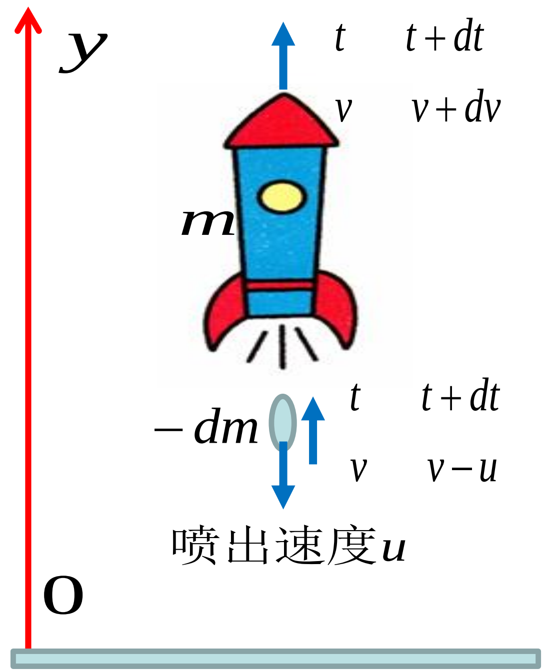
$$\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_{i2}-\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_{i1}=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_{i2}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_{i1}$$

- 动量守恒定律，是力学的基本定律，它比牛顿定律更具有普遍性。无论是经典力学，还是相对论力学和量子力学，动量守恒定律都普遍成立。而牛顿定律只在经典力学中才成立。
- 动量是状态量，动量守恒定律说明，如果系统与外界没有相互作用，则系统的运动状态不会改变，但系统内部各个质点的运动状态可以改变，不过这种改变，只是系统内部各个质点相互进行动量交换。
- 内力，是系统内部各个质点相互进行动量交换的原因，一个质点动量的增加，其他质点就有等量的动量减少。

四. 动量守恒定律应用

1. 火箭问题

- 火箭在高空飞行时，重力可以忽略不计，这时火箭与喷出的气体组成的质点系满足动量守恒定律。
- 火箭问题是减质量问题，可以通过分析一个微小时间内的动量守恒，来求出火箭的运动方程。



火箭质量m在减少，所以$dm<0$，喷出的气体元为$-dm>0$

气体$-dm$喷出前t时刻，系统总动量：$mv+(-dmv)$

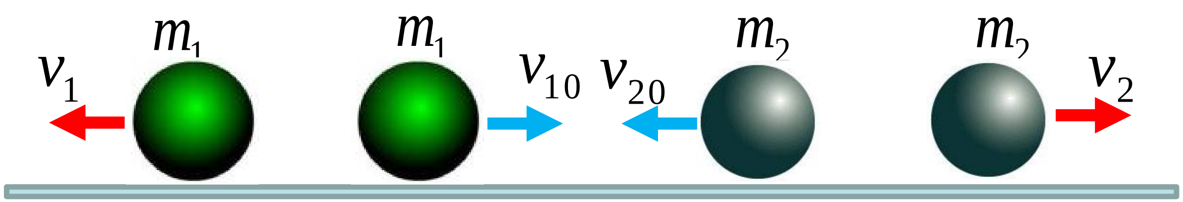
气体$-dm$喷出后$t+dt$时刻，系统总动量：$m(v+dv)+(-dm)(v-u)$

t时刻与$t+dt$时刻系统动量守恒：$mv+(-dm)v=m(v+dv)+(-dm)(v-u)$

即：$mdv=-udm \quad \Rightarrow \quad dv=-u\dfrac{dm}{m} \quad \Rightarrow \quad v-v_0=u\ln\dfrac{m_0}{m}$

所以火箭的速度，随火箭质量的减少而增加：$v=v_0+u\ln\dfrac{m_0}{m}$

2. 碰撞问题



动量守恒方程： $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_{10} + m_2v_{20}$

碰撞实验方程： $e = \dfrac{\text{分离速度}}{\text{接近速度}} = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = \text{恢复系数}$

方程组联立解：
$$\begin{cases} v_1 = v_{10} - \dfrac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1+m_2} \\ v_2 = v_{20} - \dfrac{(1+e)m_1(v_{10} - v_{20})}{m_1+m_2} \end{cases}$$

§3 角动量守恒定律

一. 质点系角动量定理

由：$\vec{M}_i = \vec{M}_i^{ex} + \vec{M}_i^{in} = \dfrac{d\vec{L}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad$ 有：$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{ex} + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{in} = \dfrac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$

因为：$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{in} = 0$ 所以：$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{ex} = \dfrac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$

由：$\vec{K}_i = \vec{K}_i^{ex} + \vec{K}_i^{in} = \vec{L}_{i2} - \vec{L}_{i1} \quad \Rightarrow \quad$ 有：$\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i^{ex} + \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i^{in} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{i2} - \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{i1}$

因为：$\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i^{in} = 0$ 所以：$\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{i2} - \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{i1}$

质点系动量定理：$\begin{cases} \vec{M}^{ex} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \\ \vec{K}^{ex} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \end{cases} : \begin{cases} \vec{M}^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{ex} \\ \vec{K}^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i^{ex} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_i^{ex} dt \\ \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \end{cases}$

二. 角动量守恒定律

由于：$\vec{M}^{ex}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

所以当质点系所受外力矩为零时，质点系的角动量守恒：

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{i2}-\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{i1}=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{i2}=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{i1}$$

- 角动量守恒定律，是力学的基本定律，它具有普遍性。无论是经典力学，还是相对论力学和量子力学，角动量守恒定律都普遍成立。
- 角动量守恒定律说明，如果系统与外界没有相互作用，则系统的角动量不会改变，但系统内部各个质点的角动量可以改变，不过这种改变，只是系统内部各个质点相互进行角动量交换。
- 内力矩，是系统内部各个质点相互进行角动量交换的原因，一个质点角动量的增加，其他质点就有等量的角动量减少。

§ 4 能量守恒定律

一. 质点系的功能原理

由于：$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ex}$(外力)$+\vec{F}_{ic}^{in}$(保守内力)$+\vec{F}_{id}^{in}$(非保守内力)

由功能原理：A_i^{ex}(外力功)$+A_{ic}^{in}$(保守内力功)$+A_{id}^{in}$(非保守内力功)$=\Delta E_{ki}^{in}$(内部)

得：A_i^{ex}(外力功)$=\Delta E_{ki}^{in}$(内部)$-A_{ic}^{in}$(保守内力功)$-A_{id}^{in}$(非保守内力功)

所以：A_i^{ex}(外力功)$=\Delta E_{ki}^{in}$(内部)$+\Delta E_{pi}^{in}$(内部)$-A_{id}^{in}$(非保守内力功)

所以：$\sum A_i^{ex}$(外力功)$=\Delta E_{ki}^{in}$(内部)$+\sum \Delta E_{pi}^{in}$(内部)$+\sum\left[-\vec{F}_{id}^{in}\right.$(非保守内力功)$\left.\right]$

质点系功能原理：$A^{ex} = \Delta E^{in} + \Delta W^{in} =:$
$$\begin{cases} A^{ex} = \sum A_i^{ex} \text{(外力功)} \\ E_k^{in} = \sum E_{ki}^{in} \text{(内部动能)} \\ E_p^{\ in} = \sum \Delta E_{p_i}^{\ in} \text{(保守内力势能)} \\ E^{in} = \left(E_k^{in} + E_p^{in}\right) \text{(内部机械能)} \\ \Delta W^{in} = \sum\left(-\vec{F}_{id}^{in}\right) \text{(非保守内力功)} \end{cases}$$

一般功能原理：$A^{ex} + N^{ex}$(外来其它能)$=\Delta E^{in} + \Delta W^{in}$(内部其它能)

二. 能量守恒定律

由于：$A^{ex}+N^{ex}(外来其它能)=\Delta E^{in}+\Delta W^{in}(内部其它能)$

所以，当系统没有外力做功，也没有其他能量输入时，则系统内部能量守恒。

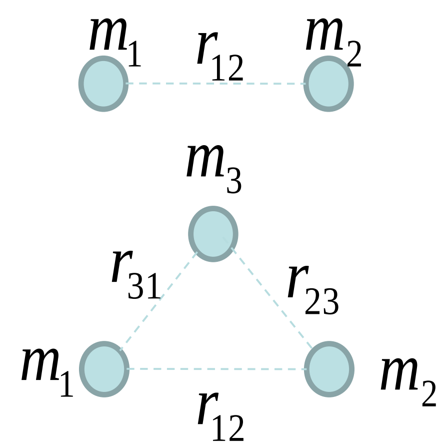
即：$\Delta E^{in}+\Delta W^{in}(内部其它能)=0$

或：$\sum E_{ki}^{in}+\sum V_i^{in}+\sum W_i^{in}=C$

或：$E^{in}+V^{in}+W^{in}=C$

- 能量守恒定律，是力学的基本定律，它具有普遍性。无论是经典力学，还是相对论力学和量子力学，能量守恒定律都普遍成立。
- 能量守恒定律说明，如果系统与外界没有能量交换，则系统的能量不会改变，但系统内部各种能量之间可以改变，不过这种改变，只是系统内各种能量之间的相互交换。

三. 质点系的势能



- 质点系的引力势能

两质点：$V_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}} = -\dfrac{G}{2}\left(\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}} + \dfrac{m_2 m_1}{r_{21}}\right)$

三质点：
$$V_{123} = -\frac{G}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_1}{r_{21}}\right) - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$
$$= -\frac{G}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_1}{r_{21}} + \right) - \frac{G}{2}\left(\frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}\right) - \frac{G}{2}\left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_2}{r_{32}}\right)$$
$$= -\frac{G}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_1}{r_{21}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_2}{r_{32}}\right)$$

N质点：$V_{123} = -\dfrac{G}{2}\displaystyle\sum_{i \neq j}^{N} \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}}$

- 任何质点系的势能，只与质点系中各个质点之间的相对位矢有关，与各个质点的绝对位矢无关。