中山大學 本科生考试草稿纸 2012 16/4

P.223.5. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，问下列级数是否发散？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\cdot v_n$.

解：① $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 一定发散。

因为 $v_n\geq 0$ ， $u_n\leq u_n+v_n$ ，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，

由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散。

② $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ 不一定发散。

例如： $v_n=\frac{1}{n}$ ， $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})$ 都发散.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

③ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot v_n$ 不一定发散。

例如： 取 $u_n=\frac{1}{n}$ ， $v_n=\frac{1}{n}$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

P.223.6. 设 $\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n=l$ ，其中 $0<l<+\infty$ ，证明： $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛；而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

证(2) 因为 $\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n=l$ ，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=l$ ，$(0<l<+\infty)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法的极限形式可知， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散。

(1) 又因为 $\lim_{n\to\infty} n^2\cdot u_n^2=l^2$ ，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^2}{\frac{1}{n^2}}=l^2$ ， $0<l^2<+\infty$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 也收敛。