4. 求函数 $z = x\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。 D-2

解 由于 $v = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|PQ|} = \dfrac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = (v_1, v_2)$，且 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{2y}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x\mathrm{e}^{2y}$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{v}} = \dfrac{\partial z}{\partial x}v_1 + \dfrac{\partial z}{\partial y}v_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5. 要做一个容积为 1 立方米的有盖铝圆桶，什么样的尺寸才能使用料最省？

解 假设圆桶的底面半径为 r，高为 h，则圆桶的容积为 $\pi r^2 h = 1$，表面积为 $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$。令 $L(r,h,\lambda) = 2\pi rh + 2\pi r^2 - \lambda(\pi r^2 h - 1)$，

求偏导，得到 $\begin{cases} L_r = 2\pi h + 4\pi r - 2\pi rh\lambda = 0, \\ L_h = 2\pi r - \pi r^2\lambda = 0, \end{cases}$

解得 $h = 2r$，再代入约束条件 $\pi r^2 h = 1$，得到 $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$， $h = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$

根据题意，目标函数必有最小值，所以可知当底面半径为 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$，高为 $\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ 时用料最省。

6. 证明函数 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

的偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续，但它在该点可微。

解 由定义，$f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x^2 + 0^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$，

当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时， $f_x(x,y) = 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$， $x^2+y^2 \neq 0$。

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=y}} f_x(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x}\cos\dfrac{1}{2x^2})$，

极限不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续。同理 $f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 也不连续。但由于 $f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$

$= (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$，所以函数在 $(0,0)$ 可微。

$(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$