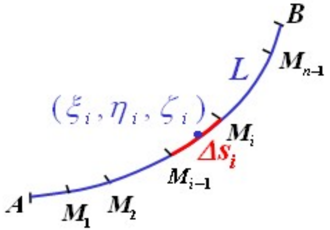
曲线积分与曲面积分

- 第一型积分
  1. 第一型曲线积分
  2. 第一型曲面积分
- 第二型积分
  1. 第二型曲线积分
  2. 第二型曲面积分

问题的提出



实例 曲线形构件的质量

$\rho(x, y, z)$是密度函数

分割 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$

取近似 取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta s_i$, $\Delta M_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i$

求和 $M \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i$ 近似值

取极限 $M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i$ 精确值

第一型曲线积分

定义 设函数$f(x,y,z)$在分段光滑曲线段L上有定义，

把曲线L任意分割成n段，设第i段的弧长为Δs_i，

在第i段上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i) $(i=1,2,\cdots,n)$

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$，若极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$对于曲线$L$

的任意分割法及中间点(ξ_i,η_i,ζ_i)的任意取法都存在，则称此极限为函数$f(x,y,z)$沿曲线L的第一型（对弧长的）曲线积分，

记作 $\int_L f(x,y,z)ds$ 即

$$\int_L f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$$

$f(x,y,z)$ 称为被积函数 L 积分曲线 ds 弧微分

注1.（可积性条件）若$f(x, y, z)$在曲线L上连续，则$f(x, y, z)$在L上是可积的；

第一型曲线积分的说明

注1.（可积性条件）若$f(x,y,z)$在曲线L上连续，则$f(x,y,z)$在L上是可积的；

注2.（弧长计算）设l是曲线L的弧长，则

$$l = \int_L 1 ds = \int_L ds;$$

第一型曲线积分的说明

注1.（可积性条件）若$f(x, y, z)$在曲线L上连续，则$f(x, y, z)$在L上是可积的；

注2.（弧长计算）设l是曲线L的弧长，则

$$l = \int_L 1 ds = \int_L ds;$$

注3. 第一型曲线积分的值与曲线的方向无关：

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y, z) ds$$

设L是平面XOY上的曲线，则可以类似地定义平面上的第一型曲线积分：

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\triangle s_i$$

第一型曲线积分的性质

$$(1)\ \int_L [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\,\mathrm{d}s = \int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \pm \int_L g(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$(2)\ \int_L C\,f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = C\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \quad (C\text{为常数})$$

$$(3)\ \int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

（L 由 L_1 , L_2 组成）

三维空间的第一型曲线积分

定理 3 设L为一空间曲线，且参数方程为

$$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta), \\ z = z(t) \end{cases}$$

并假定$x(t), y(t)$及$z(t)$在$[\alpha，\beta]$上有连续的导数，又假定$f(x, y, z)$在L上连续，则有下列公式:

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s,$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

三维空间的第一型曲线积分的计算

例

计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中L为螺旋线$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta(0\le\theta\le 2\pi)$之间的一段弧，其中$a,k$是大于0的常数。

平面上第一型曲线积分的计算

定理 1 设曲线L是有函数$y=y(x)\quad (a\le x\le b)$所给出，其中$y=y(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，又假定$f(x,y)$在$L$上连续，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

证：

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\approx\sum_{I=i}^{m} f(\xi_i,y(\xi_i))\sqrt{1+[y'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$$

$$\Delta s_i\approx\sqrt{1+[y'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i\qquad ds=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

平面上第一型曲线积分的计算

定理 2 设曲线L的参数方程为 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, 其中函数$\varphi(t)$与$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的一阶导数, 若$f(x,y)$在L上连续，则有计算公式：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

证明： $ds=\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$

例

计算$\int_L xds$，其中曲线L是抛物线$A(0,0)$与$B(1,1)$之间的一段弧由。

平面上第一型曲线积分的计算

例

计算$\int_L xds$，其中曲线L是抛物线$A(0,0)$与$B(1,1)$之间的一段弧由。

例

计算$\int_L x^2(1+y^2)ds$，其中曲线L的参数方程为$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta(0 \le \theta \le \pi)$, R是大于0的常数。

平面上第一型曲线积分的计算

例

计算$\int_L xds$，其中曲线L是抛物线$A(0,0)$与$B(1,1)$之间的一段弧由。

例

计算$\int_L x^2(1+y^2)ds$，其中曲线L的参数方程为$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta(0 \le \theta \le \pi)$, R是大于0的常数。

例

计算曲线积分$\int_L xy^2ds$，其中曲线L是以$O(0,0), A(1,0), B(1,1)$为顶点的三角形。

参数方程下的计算公式

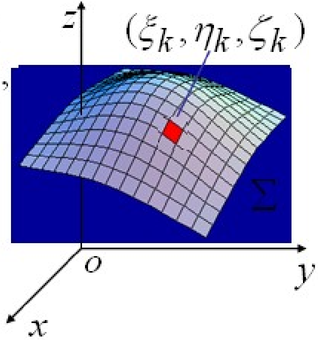
如果方程为极坐标形式:$L: r = r(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

引例： 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$，求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想，采用"大化小，常代变，近似和，求极限"的方法，可得



$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k$$

其中，λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值（曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者）.

第一型曲面积分

定义 设函数$f(x,y,z)$在分片光滑的曲面S上有定义,

把S任意分成n个互不重叠的小片$\Delta S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,

(同时也用它表示小块的面积),

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i$的直径$\}$, 在$\Delta S_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$,

若无论对曲面S怎样的分割及中间点(ξ_i,η_i,ζ_i)怎样的选取, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \quad 总存在,$$

则称此极限为函数$f(x,y,z)$在曲面S上的**第一型曲面积**

记作
$$\iint_S f(x,y,z)dS.$$

其中S称为积分曲面, $f(x,y,z)$称为被积函数.

第一型曲面积分的说明

注1.（可积性条件）若$f(x,y,z)$在曲面S上连续，则$f(x,y,z)$在S上是可积的；

第一型曲面积分的说明

注1.（可积性条件）若$f(x,y,z)$在曲面S上连续，则$f(x,y,z)$在S上是可积的；

注2.（曲面面积计算）设s是曲面S的弧长，则

$$s = \iint\limits_{S} 1 dS = \iint\limits_{S} dS;$$

第一型曲面积分的说明

注**1.**（可积性条件）若$f(x,y,z)$在曲面S上连续，则$f(x,y,z)$在S上是可积的；

注**2.**（曲面面积计算）设s是曲面S的弧长，则

$$s=\iint_S 1dS=\iint_S dS;$$

注**3.** 第一型曲面积分的值与曲面取向的方向无关，或者说第一型曲面积分是无方向性的。

第一型曲面积分的性质

(1) 若$f(x,y,z)$与$g(x,y,z)$在分片光滑曲面S上可积，则对任意常数 C_1与C_2,函数C_1f+C_2g也在S上可积, 且有

$$\iint_S \left[C_1 f(x,y,z)+C_2 g(x,y,z)\right]dS$$

(2) 若S由m个互不重叠的光滑曲面$S_i\ (i=1,2,\cdots,m)$所合并组成，并假定f在S及每个S_i上可积，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\sum_{i=1}^{m}\iint_{S_i} f(x,y,z)dS$$

曲面的表达：

- 隐式表达：$F(x,y,z)=0$；
- 显示表达：$z=f(x,y)$；
- 参数方程：$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$。

曲面的法向量

曲面的表达：

- 隐式表达：$F(x, y, z) = 0$；
- 显示表达：$z = f(x, y)$；
- 参数方程：$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$。

对应的法向量：

- 隐式表达：$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$；

曲面的法向量

曲面的表达：

- 隐式表达：$F(x,y,z)=0$；
- 显示表达：$z=f(x,y)$；
- 参数方程：$x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$。

对应的法向量：

- 隐式表达：$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$；
- 显示表达：$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$；

曲面的表达:

- 隐式表达: $F(x, y, z) = 0$;
- 显示表达: $z = f(x, y)$;
- 参数方程: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$。

对应的法向量:

- 隐式表达: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$;
- 显示表达: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$;
- 参数方程: $\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = (A, B, C)$。

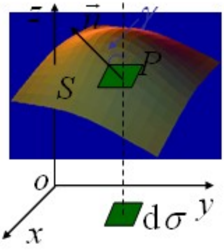
第一型曲面积分的计算

设光滑曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$

则面积 S 可看成曲面上各点 $P(x, y, z)$

处小切平面的面积 $\mathrm{d}S$ 无限积累而成.

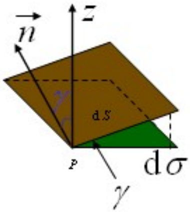
设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$,



令 γ 为法向量与z轴正方向的夹角，则

$$\mathrm{d}\sigma = |\cos\gamma| \cdot \mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$



第一型曲面积分的计算

$$dS=\frac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma$$

$$dS=\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\,d\sigma$$

（1）设有光滑曲面

$$S: z=g(x,y),\ (x,y)\in D$$

函数$g(x,y)$在区域D上连续可微，则有计算 公式

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,d\sigma.$$

第一型曲面积分的计算

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

$$\mathrm{d}S = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C}\mathrm{d}\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{dudv}$$

$$= \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{dudv}$$

其中 $\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \end{cases}$

第一型曲面积分的计算

2) 当曲面 S **由参数方程** $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in D$

给出时，

$$\therefore \iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_S f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

第一型曲面积分的计算

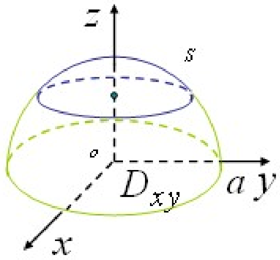
例

计算曲面积分$\iint\limits_S x^2y^2dS$，其中曲面S是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le R^2$。

第一型曲面积分的计算

例

计算曲面积分 $\iint\limits_S x^2y^2dS$，其中曲面S是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le R^2$。



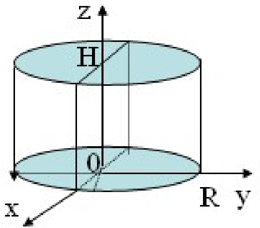
第一型曲面积分的计算

例

计算曲面积分$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$，其中曲面$S$是圆柱面$x^2+y^2=R^2$，$0 \le z \le H$。

例

计算曲面积分 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中曲面$S$是圆柱面$x^2+y^2=R^2$，$0\le z\le H$。



第一型曲面积分的计算

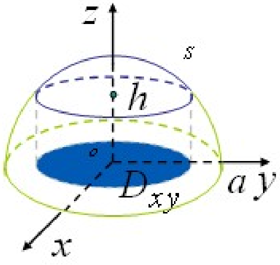
例

计算曲面积分$\iint\limits_{S}\frac{dS}{z}$，其中曲面$S$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$被$z=h(0<h<R)$截出的顶部。

第一型曲面积分的计算

例

计算曲面积分$\iint\limits_{S}\frac{dS}{z}$，其中曲面$S$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$被$z=h(0<h<R)$截出的顶部。



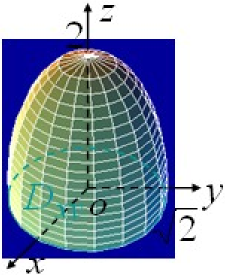
例

已知球面壳$z = 3 - x^2 - y^2$的面密度为$\rho = x^2 + y^2 + z$，求此球壳在平面$z = 1$以上的质量。

第一型曲面积分的计算

例

已知球面壳$z = 3 - x^2 - y^2$的面密度为$\rho = x^2 + y^2 + z$,求此球壳在平面$z = 1$以上的质量。



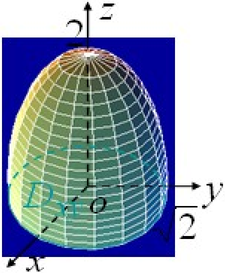
例

求抛物面$z = 2 - x^2 - y^2$在XOY上方部分图形的面积。

第一型曲面积分的计算

例

求抛物面$z = 2 - x^2 - y^2$在XOY上方部分图形的面积。



问题提出：变力沿曲线做功：

变力$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$沿曲线$L$从$A$到$B$所做的功。首先将曲线很多小弧段，取代表的一段弧$\widehat{M_{i-1}M_i}$，然后取任意一点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{M_{i-1}M_i}$，则变力在这段弧做功近似为$W_i \approx \vec{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \bullet \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$。总功$W = \sum_i W_i \approx \sum_i \vec{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \bullet \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \sum_i P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\triangle y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\triangle z_i$。当最大弧长长度$\lambda \to 0$时，$\approx$成为$=$，极限为变力做的功。

第二型曲线积分

$W=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_i \vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\bullet\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=$
$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_i P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle z_i$。其中$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=(\triangle x_i,\triangle y_i,\triangle z_i)=(x_i-x_{i-1},y_i-y_{i-1},z_i-z_{i-1})$。

第二型曲线积分：定义

L是空间中从A到B的一条有向分段光滑曲线，向量函数$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$在$L$上有定义。任给$L$一个分法：$A = M_0, \cdots, M_n = B, M_i = (x_i, y_i, z_i)$，记$\widehat{M_{i-1}M_i}$弧长为$\triangle s_i$，$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$，$\triangle y_i = y_i - y_{i-1}$，$\triangle z_i = z_i - z_{i-1}$，任取$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{M_{i-1}M_i}$，做和$\sigma = \sum_i P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\triangle y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\triangle z_i$，若当$\lambda = \mathbf{max}_i \triangle s_i \to 0$时，$\sigma$ 极限存在，则称该极限为$\vec{F}(x,y,z)$沿曲线L从A到B的第二型曲线积分。记为$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$或者$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \bullet d\vec{r}$，$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$。有向线段$\widehat{AB}$称为积分路径。

注1.（可积性条件）若$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在曲线L上连续，
则$\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$在$L$上的第二型曲线积分存在（可积）；

第二型曲线积分的说明

注**1.**（可积性条件）若$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在曲线L上连续，

则$\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$在$L$上的第二型曲线积分存在（可积）；

注**2.**（有方向性）第二型曲线积分的值与曲线的方向相关，曲线指向改变时，积分的值的符号发生改变：

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=-\int_{\widehat{BA}} Pdx+Qdy+Rdz$$

注3.（坐标积分）根据定义可知：

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_{\widehat{AB}} Pdx + \int_{\widehat{AB}} Qdy + \int_{\widehat{AB}} Rdz,\end{aligned}$$

其中$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle x_i$称为对坐标$x$的第二型曲线积分，

$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y,z)dy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle y_i$称为对坐标$y$的第二型曲线积分，

$\int_{\widehat{AB}} R(x,y,z)dz = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle z_i$称为对坐标$z$的第二型曲线积分.

平面中，令$\vec{F}=(P(x,y),Q(x,y))$，$d\vec{r}=(dx,dy)$，则可类似地定义第二型曲线积分：

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{\widehat{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\\ &= \int_{\widehat{AB}}P(x,y)dx+\int_{\widehat{AB}}Q(x,y)dy,\end{aligned}$$

其中$\int_{\widehat{AB}}P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i$称为对坐标$x$的第二型曲线积分，

$\int_{\widehat{AB}}Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\triangle y_i$称为对坐标$y$的第二型曲线积分。

第二型曲线积分的性质

$\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$指$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)$

或$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,

$d\vec{r}=(dx,dy)$或$d\vec{r}=(dx,dy,dz)$.

(1) $\int_L\left[k_1\vec{F}(M)+k_2\vec{G}(M)\right]\cdot d\vec{r}=k_1\int_L\vec{F}(M)\cdot d\vec{r}+k_2\int_L\vec{G}(M)\cdot d\vec{r}$

其中k_1,k_2为任意常数.

(2) 曲线AB由AC,CB组成,且三者走向一致 则

$$\int_{AB}\vec{F}(M)\cdot dr=\int_{AC}\vec{F}(M)\cdot dr+\int_{CB}\vec{F}(M)\cdot dr$$

(3) $\int_{AB}\vec{F}\cdot dr=-\int_{BA}\vec{F}\cdot dr$ **即:第二型曲线积分与曲线方向有关.**

第二型曲线积分的计算

定理1 设曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$当参数$t$单调地由$\alpha$变到$\beta$时,$L$上的点由$A$变到$B$, $\varphi(t),\psi(t)$有连续的一阶导数,若函数$P(x,y),Q(x,y)$在曲线L上连续, 则有

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt$$

证明: $\int_{AB} P(x,y)dx=\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$$

第二型曲线积分的计算：注意

特别注意：

对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.因此下限应是起点的坐标，上限是终点的坐标.不必要考虑两端点对应的参数值的大小关系

特殊情形

(1) $L: y = y(x)$ x起点为a, 终点为b

则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)]y'(x)\}\mathrm{d}x$$

(2) $L: x = x(y)$ y起点为c, 终点为d

则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_c^d \{P[x(y),y]x'(y) + Q[x(y),y]\}\mathrm{d}y$$

第二型曲线积分的计算：推广

推广 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$ t起点α, 终点β

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

例

计算曲线积分$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中积分路径$L$为:（*1*）折线段$OAB$;（*2*）直线段$OB$;（*3*）半圆弧$OAB$，这里$O=(0,0)$，$A=(1,1)$，$B=(2,0)$；$O$始终是起点，$B$始终是终点。

例

计算曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中积分路径$L$为:（1）折线段$OAB$;（2）直线段$OB$;（3）半圆弧$OAB$，这里$O=(0,0)$，$A=(1,1)$，$B=(2,0)$；$O$始终是起点，$B$始终是终点。

积分与起点终点相关，也与路径相关。

例

计算曲线积分$\int_L (x+y^3)dx + 3xy^2dy$，其中积分路径$L$为:（1）折线段$AOB$;（2）折线段$ACB$;（3）以原点为圆心的单位圆周上的劣圆弧$AB$，这里$O=(0,0)$，$A=(0,1)$，$B(1,0)$，$C=(1,1)$；$O$始终是起点，$B$始终是终点。

例

计算曲线积分$\int_L (x+y^3)dx + 3xy^2dy$，其中积分路径$L$为:（1）折线段$AOB$;（2）折线段$ACB$;（3）以原点为圆心的单位圆周上的劣圆弧$AB$，这里$O=(0,0)$，$A=(0,1)$，$B(1,0)$，$C=(1,1)$；$O$始终是起点，$B$始终是终点。

有些第二型曲线积分，只与起点终点相关，与路径无关。

例

计算曲线积分$\int_L ydx - xdy + (x+y+z)dz$，其中积分路径$L$为：

（1）螺旋线$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$;

（2）直线$x = a, y = 0, z = t, 0 \le t \le 2\pi b$。

积分曲线为封闭曲线时，积分符号一般用$\oint$表示；

例

计算空间第二型曲线积分$\oint_L xydx + yzdy + zxdz$，其中积分路径$L$为椭圆周$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ 积分方向：从z轴正方向看为逆时针方向

第二型曲线积分的计算

积分曲线为封闭曲线时，积分符号一般用$\oint$表示；

例

计算空间第二型曲线积分$\oint_L xydx + yzdy + zxdz$，其中积分路径$L$为椭圆周$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ 积分方向：从z轴正方向看为逆时针方向

当积分曲线为三维空间中封闭曲线时，通常规定的曲线正方向为：沿L行走时，L所围成的区域总在行走者的左边。

当L用参数方程$x=x(t), y=y(t), z=z(t), a\le t\le b$表示时，该曲线的切向量为$\vec{T}=(x'(t), y'(t), z'(t))$，切向量的方向余弦$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=(\frac{x'(t)}{|\vec{T}|}, \frac{y'(t)}{|\vec{T}|}, \frac{z'(t)}{|\vec{T}|})$，其中$|\vec{T}|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$，所以

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int_a^b (P,Q,R)\cdot(x'(t),y'(t),z'(t))dt$$

$$=\int_a^b (P,Q,R)\cdot(\frac{x'(t)}{|\vec{T}|}, \frac{y'(t)}{|\vec{T}|}, \frac{z'(t)}{|\vec{T}|})|\vec{T}|dt$$

$$=\int_{\widehat{AB}} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

两种曲线积分的关系

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\widehat{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$$

其中第二型曲线积分的方向性体现在切向量的方向余弦$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{x'(t)}{|\vec{T}|}, \frac{y'(t)}{|\vec{T}|}, , \frac{z'(t)}{|\vec{T}|})$,
其中$|\vec{T}| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$

积分曲线为封闭曲线时，积分符号一般用$\oint$表示；

积分曲线为封闭曲线时，积分符号一般用$\oint$表示；

例

计算曲线积分$\oint_L \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中积分路径$L$为圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$，按逆时针方向。

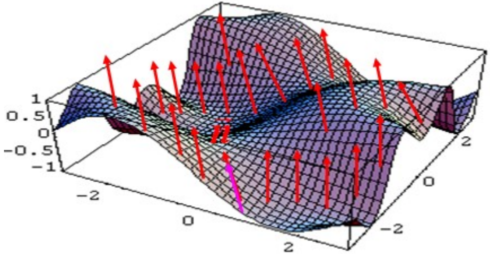
积分曲线为封闭曲线时，积分符号一般用$\oint$表示；

例

计算曲线积分$\oint_L \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中积分路径$L$为圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$，按逆时针方向。

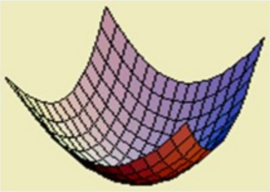
当积分曲线为二维空间中封闭曲线时，通常规定逆时针为曲线正方向。

双侧曲面和单侧曲面：曲面S上一点P沿任意路线在S上连续移动时（不跨越S的边缘），当P回到初始点时，其法向量的指向没有改变，这样的曲面称为双侧曲面。否则称为单侧曲面。典型的双侧曲面如下：

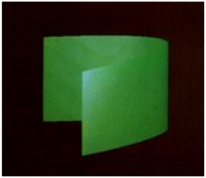


双侧曲面的侧

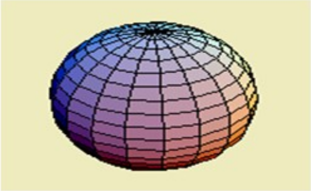
双侧曲面



曲面分上侧和下侧



曲面分左侧和右侧



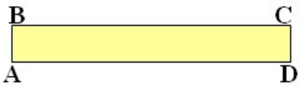
曲面分内侧和外侧

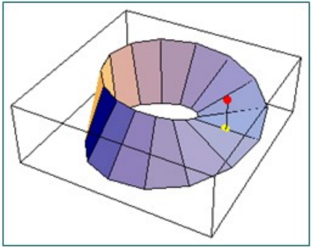
典型的单侧曲面

典型单侧曲面：麦比乌斯带

麦比乌斯(Möbius,1790~1868)

一张长方形纸条ABCD.设想让AB 端保持不动，而将CD 端扭转180°，再将B 与D，A与C粘合起来，AB与CD 上的点也对应粘合起来.这样就得到一条带子，称作麦比乌斯带.





曲面的法向量

曲面的表达：

- 隐式表达：$F(x, y, z) = 0$；
- 显示表达：$z = f(x, y)$；
- 参数方程：$x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$，$z = z(u, v)$。

曲面的法向量

曲面的表达：

- 隐式表达：$F(x, y, z) = 0$；
- 显示表达：$z = f(x, y)$；
- 参数方程：$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$。

对应的法向量：

- 隐式表达：$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$；

曲面的法向量

曲面的表达：

- 隐式表达：$F(x, y, z) = 0$；
- 显示表达：$z = f(x, y)$；
- 参数方程：$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$。

对应的法向量：

- 隐式表达：$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$；
- 显示表达：$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$；

曲面的表达:

- 隐式表达: $F(x,y,z)=0$;
- 显示表达: $z=f(x,y)$;
- 参数方程: $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$。

对应的法向量:

- 隐式表达: $\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$;
- 显示表达: $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)$;
- 参数方程: $\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)=(A,B,C)$。

有向曲面

通常遇到的曲面都是双侧曲面。指定了侧的曲面叫有向曲面，其方向用法向量的指向表示

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

有向曲面

通常遇到的曲面都是双侧曲面。指定了侧的曲面叫有向曲面，其方向用法向量的指向表示

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

例如，当双侧曲面由方程$z = f(x, y)$表示时，曲面法向量$\vec{N} = (f'_x, f'_y, -1)$或者$\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1)$，用前者表示法向量时表示我们取定了曲面的下侧，用前者表示法向量时表示我们取定了曲面的上侧。

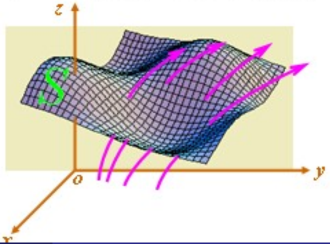
第二型曲面积分的概念

实例：流向曲面一侧的流量.

设有一河道，并假定河道中每一点的水流速度与时间无关，只与点的位置有关.设河道中每一点(x,y,z)处的水流速度向量为

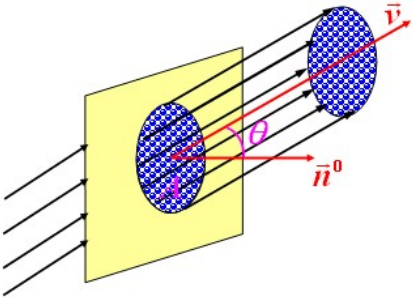
$$\vec{v}(x,y,z)=(p(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)).$$

由假定在河道中有一双侧曲面S，并在S上选定一侧.求在单位时间内水流沿选定一侧的质量即流量m.



第二型曲面积分的概念

如果流体通过平面上面积为A的一个闭区域且速度为常数,又设$\overrightarrow{n^0}$为该平面上的单位法向量,则单位时间内通过这闭区域的流体组成一个底面积为A,斜高为$|\vec{v}|$的柱体如图.



流量

$$m = A|\vec{v}|\cos\theta$$

$$= A\vec{v}\cdot\vec{n}^0$$

第二型曲面积分的概念

现在考虑的不是平面闭区域而是一片曲面，且流速是变量．解决办法:“分割”“近似代替“求和”“取极限”

1. 分割 把曲面S分成 n 个小曲面 $\Delta S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,

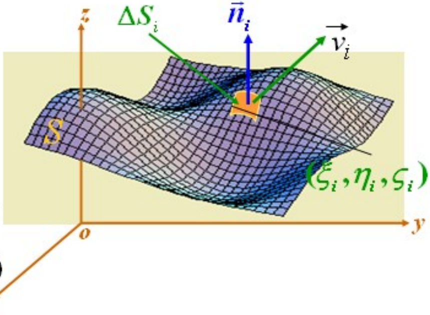
(ΔS_i 同时也表示第 i 小块曲面的面积)

2.近似替代

在 ΔS_i 上任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$,

则该点流速为 $\vec{v}(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$

单位法向量为 $\vec{n}(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$



第二型曲面积分的概念

通过Δs_i流向指定侧的流量的近似值为

$$\Delta m_i \approx \vec{v}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i.$$

3. 求和 通过S流向指定侧的流量的近似值

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{v}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i.$$

4. 求极限 令$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i$的直径$\}$,

当$\lambda \to 0$时，对上式取极限即得到:

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{v}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i.$$

第二型曲面积分的定义

定义 设S是一个分片光滑的双侧曲面，在S上选定了一侧,记选定一侧的单位法向量为 $\vec{n}(P)$. 将S分割成n个不相重叠的小曲面片 $\Delta S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，假设在S上给定了一个向量函数 $\vec{F}=(x,y,z)$，在 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i,$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i\text{的直径}\}$，若和式对 S 的任意一种分割及中间点 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ 的任意的选取，当 $\lambda\to 0$ 时 总

第二型曲面积分的定义

有极限，则称此极限为向量函数 $\vec{F}(x,y,z)$ 在 S 所指指定一侧上的**第二型曲面积分**，也称为对坐标的曲面积分，并记作

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,dS \qquad 或$$

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} \qquad \left(d\vec{S}=\vec{n}(x,y,z)\,dS\right)$$

注1.（可积性条件）若$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在曲面S上连续，则$\vec{F}=(P,Q,R)$在S上的第二型曲面积分存在（可积）；

第二型曲面积分的说明

注**1.**（可积性条件）若$P(x, y, z)$**,** $Q(x, y, z)$**,** $R(x, y, z)$在曲面S上连续，则$\vec{F} = (P, Q, R)$在S上的第二型曲面积分存在（可积）;

注**2.**（有方向性）第二型曲面积分的值依赖曲面的定向，即曲面法向量的指向，当法向量的指向改变时，积分的值的符号发生改变。

第二型曲面积分的第一型曲面积分形式

设$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$,

若单位法向量$\vec{n}(x,y,z)$的方向余弦为

$\cos\alpha(x,y,z),\cos\beta(x,y,z),\cos\gamma(x,y,z)$,

第二型曲面积分可写成

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\underbrace{\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS}_{\text{第一型曲面积分}}.$$

第二型曲面积分的坐标形式

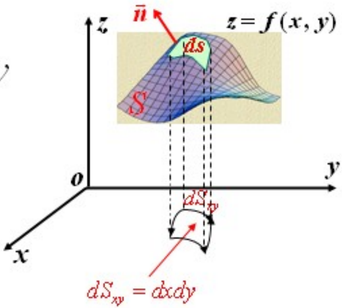
第二型曲面积分的坐标形式，首先看

$\cos\gamma dS$ 的几何意义：

$\cos\gamma dS$ 为 dS 在 xOy 平面上的有向投影面积.

记为 $dxdy$，即

$$dxdy = \cos\gamma dS$$



$$\begin{cases} >0, & \text{当} 0 \le \gamma < \pi/2; \\ <0, & \text{当} \pi/2 \le \gamma < \pi; \end{cases}$$

第二型曲面积分的坐标形式

$\cos\beta\, dS$ 为 dS 在 zOx 平面上的有向投影面积.

记为 $\cos\beta dS = dzdx.$

$\cos\alpha\, dS$ 为 dS 在 yOz 平面上的有向投影面积.

记为 $\cos\alpha dS = dydz.$ 所以有

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_S pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

第二型曲面积分的坐标形式

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_S (p\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

与二重积分的区别

区别$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$与二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

与二重积分的区别

区别$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$与二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

曲面积分中积分在曲面上，且$dxdy$表示曲面上的面积微元dS在Oxy上的有向投影面积，可正可负，取决于法向量的方向。

第二型曲面积分的性质

$$(1)\iint_{S^+}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=-\iint_{S^-}\vec{F}\cdot\vec{n}dS,$$

其中 S^+ 与 S^- 为同一个曲面的两个相反的定向.

(2)若积分 $\iint_S \vec{F}_1\cdot d\vec{S}$ 与 $\iint_S \vec{F}_2\cdot d\vec{S}$ 存在，则

$$\iint_S\left(k_1\vec{F}_1+k_2\vec{F}_2\right)\cdot d\vec{S}=k_1\iint_S\vec{F}_1\cdot d\vec{S}+k_2\iint_S\vec{F}_2\cdot d\vec{S},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

$$(3)\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}.$$

其中 S 由互不重叠的两个曲面 S_1,S_2 组成.

第二型曲面积分的计算

第二型曲面积分的计算

将上面讨论中的公式概括如下:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,dS$$

$$= \underbrace{\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS}_{\text{第一型曲面积分}}$$

$$= \underbrace{\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy}_{\text{第二型曲面积分的坐标形式}}$$

由公式告诉了我们第二型曲面积分与第一型曲面积分的关系，同时给出了计算方法之一，化为第一型曲面积分.

第二型曲面积分计算一：两类曲面积分的联系

例

计算曲面积分$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$，其中$\vec{F}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$，$S$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧。

第二型曲面积分的计算二：化为二重积分

将第二型曲面积分直接化成二重积分的关键是正确理解曲面S的面积元dS在坐标平面上的有向投影.

例如 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y,z) 处的法向量为

$$\pm(-f_x,-f_y,1),$$

法向量指向上侧时取正，指向下侧时取负.

单位法向量的方向余弦是:

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1),$$

第二型曲面积分的计算二：化为二重积分

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

$$= \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS$$

$$= \pm\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left[P\left(-f_x\right)+Q\left(-f_y\right)+R\right]dS$$

$$\because ds = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$$

$$= \pm\iint_D \left[P\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\left(-f_x\right)\right.$$

$$\left.+Q(x,y,f(x,y))(-f_y)+R(x,y,f(x,y))\right]dxdy$$

(8.10)

第二型曲面积分的计算二：化为二重积分

上述就是把第二型曲面积分化为二重积分的公式，其中正负号由S的定向决定：法向量指向上侧取正号，指向下侧取负号.

公式表明将第二型曲面积分化为二重积分，只需把P，Q，R中的z换成f(x,y,),再将P，Q，R分别乘以$-f_x$，$-f_y$，1 然后相加，就构成二重积分的被积函数.而二重积分的积分区域D是曲面S在oxy平面上的投影.再根据S的指向，确定取“+”还是取“-”.

第二型曲面积分的计算二：化为二重积分

小结： 曲面 $S: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$ 上侧,下侧

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \pm\iint_{D_{xy}} [P(x,y,z(x,y))(-z_x) + Q(x,y,z(x,y))(-z_y) + R(x,y,z(x,y))]dxdy.$$
（上侧正下侧负）

曲面 $S: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$ 前侧,后侧

$$I = \iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \pm\iint_{D_{yz}} [P(x(y,z),y,z) + Q(x(y,z),y,z)(-x_y) + R(x(y,z),y,z)(-x_z)]dydz$$
(前侧正后侧负)

曲面 $S: y = y(z,x), (z,x) \in D_{zx}$ 右侧,左侧

$$I = \pm\iint_{D_{zx}} [P(x,y(x,z),z)(-y_x) + Q(x,y(x,z),z) + R(x,y(z,x),z)(-y_z)]dzdx.$$
(右侧正左侧负)

第二型曲面积分的计算二：化为二重积分

例

计算曲面积分$\iint\limits_S yzdzdx + zxdxdy$，其中$S$为上半球面$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$的上侧。

第二型曲面积分的计算二：化为二重积分

例

计算曲面积分$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中$S$为顶点为$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$的三角形的下侧。

第二型曲面积分的计算三：坐标形式

小结：光滑曲面 $S: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$ 上侧 下侧

（单值）

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（上侧正下侧负）

光滑曲面 $S: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$ 前侧 后侧

（单值）

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前侧正后侧负)

光滑曲面 $S: y = y(z,x), (z,x) \in D_{zx}$ 右侧 左侧

$$\iint_S Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右侧正左侧负)

第二型曲面积分的计算三：坐标形式

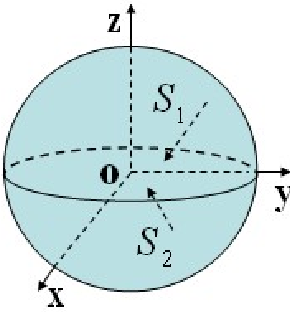
例

计算曲面积分$\iint\limits_S xyzdxdy$，其中S为球面$x^2+y^2+z^2=1$在$x\geq 0, y\geq 0$部分的内侧。

第二型曲面积分的计算三：坐标形式

例

计算曲面积分$\iint\limits_S xyzdxdy$，其中S为球面$x^2+y^2+z^2=1$在$x\geq 0, y\geq 0$部分的内侧。



第二型曲面积分的计算三：坐标形式

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+zx)dxdy,$$

其中S是立方体:$0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$的边界的外侧。

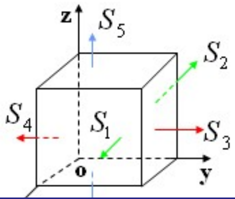
第二型曲面积分的计算三：坐标形式

例

计算曲面积分

$$I = \oiint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+zx)dxdy,$$

其中S是立方体:$0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$的边界的外侧。



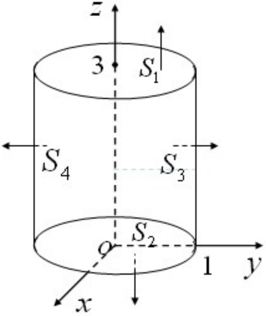
第二型曲面积分的计算三：坐标形式

例

计算曲面积分$I = \oiint_S (y-z)xdydz + (x-y)dxdy$, 其中$S$是柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0, z=3$所围立体之边界曲面的外侧。

例

计算曲面积分$I=\oiint_S (y-z)xdydz+(x-y)dxdy$，其中$S$是柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0, z=3$所围立体之边界曲面的外侧。



第二型曲面积分的计算四：参数方程形式

曲面S参数方程为$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D$，则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

$$= \pm \iint_S \frac{(P,Q,R)\bullet(A,B,C)}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}dudv$$

$$= \pm \iint_S (P,Q,R)\bullet(A,B,C)dudv$$

$$= \pm \iint_S (P,Q,R)\bullet\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv$$

正负号视曲面的上下左右前后侧而定。

坐标形式如下：

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = R(x,y,z)\cos\gamma dS$$

$$= \pm\iint_S R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{|C|}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}dud$$

$$= \pm\iint_S R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|C|dudv$$

$$= \pm\iint_S R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

上侧取正号，下侧取负号。

第二型曲面积分的计算四：参数方程形式

同理，

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_S P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

前侧取正号，后侧取负号；

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint\limits_S Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

右侧取正号，左侧取负号。

第二型曲面积分的计算四：参数方程形式

例

计算曲面积分$I = \iint\limits_S x^3 dzdx + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，其中$S$是椭球面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$的外侧。