第十二章 微分不等式

我们在第六章已讨论了多项式的导数不等式，本章讨论一般函数的微分不等式，为了叙述方便，我们还讨论与之有关的连续模和最佳逼近不等式，这些不等式中，也涉及一些积分不等式.

§1 连续模不等式

一、 基本概念

设 Q 是赋范线性空间$(X, \|\cdot\|)$中的凸集，则 f 的**连续模**定义为

$$\omega(f,\delta)=\sup\{\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|:\|h\|<\delta\}.$$

特别，若 $f\in C(Q)$，则

$$\omega(f,\delta)_c=\sup\{\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_c:\|h\|<\delta\}. \tag{1.1}$$

下面将 $\omega(f,\delta)_c$ 简记为$\omega(f,\delta)$. 若 $f\in L^p(Q), 1\leqslant p<\infty$，则

$$\begin{aligned}\omega(f,\delta)_p&=\sup\left\{\left(\int_Q|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/P}:\|h\|<\delta\right\}\\&=\sup\{\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_p:\|h\|<\delta\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

称为 f 的**积分连续模**.

还可以考虑高阶连续模. 取 $Q=[a,b]$ 或 $T=[0,2\pi]$，并认为 f 可从Q 延拓到全实数轴，例如当 $x\in R^1-[a,b]$ 时，规定 $f(x)=0$.

$$\Delta_h^m(f,x)=\sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+kh) \tag{1.3}$$

是 f 在x 点的以h 为步长的m 阶差分.

$$\omega_m(f,\delta)=\max\{\|\Delta_h^m(f)\|_c:|h|<\delta\} \tag{1.4}$$

称为 f 的 m 阶连续模，2 阶连续模常称为**光滑模**.

$$\omega_m(f,\delta)_p=\sup\{\|\Delta_h^m(f)\|_p:|h|\leqslant\delta\},1\leqslant p<\infty \tag{1.5}$$

称为 f 的m 阶积分连续模，若将(1.5)式中 $L^p(Q)$ 范数换成 $H^p(0<p\leqslant 1)$ 范数，则称为 f 的 m 阶 **H^p 连续模**，若将(1.3)中有限和换成无穷和，即

$$\omega_\alpha(f,\delta)=\sup\left\{\left|\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x+kh))\right|:|h|\leqslant\delta,x\in Q\right\} \tag{1.6}$$

$(\alpha>0)$称为 f 的**分数阶连续模**，这时 $\alpha>0$ 不一定为整数.

与 f 的连续模有密切联系的是f 的K 泛函：

$$K_r(f,t)=\inf\{\|f-g\|_p+t^r\|g^{(r)}\|_p:g^{(r)}\in L^p(Q)\}, \tag{1.7}$$

式中 $t>0, r>0, 1 \leqslant p \leqslant \infty, p=\infty$ 时指 $C(Q)$.

更一般地,设$(X, \|\cdot\|)$为赋范线性空间,A 为 X 的稠密子空间,且具有半范数 $|\cdot|_A$,则

$$K_A(f, t)=\inf\{\|f-g\|+t|g|_A: g \in A\}$$

称为 X 上的K- 泛函,它刻画了用 A 中元素 g 去逼近 X 中元素 f 的逼近程度.

通过 X, A 的各种不同选取,就得到各种不同形式的 K- 泛函. 例如,1972 年,Johnen, H. 引入 Sobolev 范数 $\|g\|_{pr}=\|g\|_p+\|g^{(r)}\|_p$,使得

$$K_{pr}(f, t)=\inf\{\|f-g\|_p+t^r\|g\|_{pr}: g^{(r)} \in L^p(Q)\}$$

成为范数,它与 $K_r(f, t), \omega_r(f, t)$ 的关系是:

(1)　$K_r(f, t) \sim \omega r(f, t)_p$. 即存在两个正常数 c_1, c_2,使得

$c_1 \omega_r(f, t)_p \leqslant K_r(f, t) \leqslant c_2 \omega_r(f, t)_p$.(**Peetre-Johnen 不等式**)

(2)　$K_{pr}(f, t) \sim \min\{1, t^r\}\|t\|_p+\omega_r(f, t)$.

对于多元函数的连续模可类似地定义,如:设 G 为R^n 中开集,使得 $\forall x \in G, x+\lambda e \in G$,式中,$e=(e_1, \cdots, e_n)$ 为 R^n 中单位向量,$\lambda>0,1 \leqslant p<\infty . f \in L^p(G)$,则

$$\omega_e(f, \delta)_p=\sup\{\|f(x+\lambda e)-f(x)\|_p: 0<\lambda \leqslant \delta\}$$

称为 f 沿方向e 的积分连续模,而 $\omega(f, \delta)_p=\sup\{\omega_e(f, \delta)_p: e \in R^n\}$ 称为 f 的积分连续模.

二、　连续模不等式

1.　$\omega(f, \delta)$ 是$[0, \infty)$上非负(关于 δ) 递增函数,即 $0<\delta_1<\delta_2$ 时,

$$\omega(f, \delta_1) \leqslant \omega(f, \delta_2).$$

2.　$\omega(f, \delta)$ 满足次可加性:

$$\omega(f, \delta_1+\delta_2) \leqslant \omega(f, \delta_1)+\omega(f, \delta_2).$$

特别地,　$\omega(f, n \delta) \leqslant n \omega(f, \delta)$,

当 $t, \lambda>0$ 时,$\omega(f, \lambda t) \leqslant([\lambda]+1) \omega(f, t) \leqslant(\lambda+1) \omega(f, t)$;

$$\omega(f,(n+\alpha) \delta) \leqslant n \omega(f, \delta)+\omega(f, \alpha \delta), \quad 0 \leqslant \alpha<1, \delta>0.$$

3.　$\forall t_1, t_2: 0<t_1<t_2$,存在 $\lambda: 0<\lambda \leqslant 1$,使得

$$\lambda \frac{\omega(f, t_2)}{t_2} \leqslant \frac{\omega(f, t_1)}{t_1}.$$

当 f 不是常值函数时,$\liminf\limits_{t \rightarrow 0+} \dfrac{\omega(f, t)}{t}>0$.

4.　设 $1 \leqslant p \leqslant q<\infty$,则

$$\omega(f, \delta)_p \leqslant \omega(f, \delta)_q \leqslant \omega(f, \delta).$$

5.　$\omega(f+g, \delta)_p \leqslant \omega(f, \delta)_p+\omega(g, \delta)_p, 1 \leqslant p<\infty$.

6.　设 $\omega:[0, \infty) \rightarrow R^1$ 满足:

(1)　$\omega(t)$ 递增且 $\omega(0)=0$;

(2)　$\omega(t)$ 满足次可加性：$\omega(t_1+t_2)\leqslant\omega(t_1)+\omega(t_2)$；

(3)　$\omega(t)$ 在 $t=0$ 右连续，则称 $\omega(t)$ 为**连续模函数**.

例如 $\omega:[0,b)\to R^1$ 为递增的连续凹函数且 $\omega(0)=0$，则 $\omega(t)$ 为连续模函数. 反之，虽然连续模函数不一定都是凹的，但是对每个连续模函数 $\omega(t)$，$0\leqslant t\leqslant b$，都存在凹的连续模函数 $\omega_1(t)$，使得

$$\omega(t)\leqslant\omega_1(t)\leqslant 2\omega(t).0\leqslant t\leqslant b.$$

事实上，可取

$\omega_1(t)=\sup\left\{\dfrac{(t-x)\omega(y)+(y-t)\omega(x)}{y-x}:0\leqslant x\leqslant t\leqslant y\leqslant b\right\}$，并称之为连续模 $\omega(t)$ 的最小凹优函数.

有关连续模不等式的证明可参看[61]P.160－167，或[82]P.157－216. 单调凸函数的连续模的性质见[326]1995，18(3)：443－446.

7.　**Bojanic 不等式**：设 $\omega(t)$ 是 $[0,\pi]$ 上的连续模，则 $\forall n\geqslant 2$，成立

$$\frac{\pi}{n}\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega\left(\frac{k+1}{n}\pi\right)}{k^2}\leqslant\frac{8\pi}{n}\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

三、　光滑模不等式

1.　若 $f\in C(Q)$，则 $\omega_m(f,\delta)$ 是 δ 的递增函数.

2.　$\omega_m(f,\lambda\delta)\leqslant[\lambda+1]^m\omega_m(f,\delta)\leqslant(\lambda+1)^m\omega_m(f,\delta)$，

式中 $\lambda>0$，特别 $\omega_m(f,n\delta)\leqslant n^m\omega_m(f,\delta)$.

3.　$0<\delta_1<\delta_2$ 时，$\omega_m(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega_m(f,\delta_1)+m2^m\omega_m(f,\delta_2)$.

注　$m\geqslant 2$，$\omega_m(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega_m(f,\delta_1)+\omega_m(f,\delta_2)$ 不成立，即 $m2^m$ 不能换成 1.

4.　$\omega_m(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant 2^m[\omega_m(f,\delta_1)+\omega_m(f,\delta_2)]$.

5.　$0<\delta_1<\delta_2$ 时，$\dfrac{\omega_m(f,\delta_2)}{\delta_2^m}\leqslant\dfrac{2^m\omega_m(f,\delta_1)}{\delta_1^m}$.

6.　设 $0\leqslant m<n$，则　$\omega_n(f,\delta)\leqslant 2^{n-m}\omega_m(f,\delta)$，　即　$\dfrac{\omega_n(f,\delta)}{2^n}\leqslant\dfrac{\omega_m(f,\delta)}{2^m}$.

7.　设 f 在 $[a,b]$ 上有 m 阶连续导数，则

$$\omega_m(f,\delta)\leqslant\delta^m\|f^{(m)}\|_{C(a,b]};\omega_{m+n}(f,\delta)\leqslant\delta^m\omega_n(f^{(m)},\delta).$$

N.6－7 说明，可用低阶连续模来估计高阶连续模，反之，也可用高阶连续模来估计低阶连续模，即下述 N8－9.

8.　$\omega_m(f,\delta)\leqslant C_m\delta^m\left\{\displaystyle\int_\delta^c\frac{\omega_{m+1}(f,u)}{u^{m+1}}\mathrm{d}u+\|f\|_c\right\}$，

式中 c,c_m 是与 f,δ 无关的正数，$\|f\|_c=\max\{|f(x)|:a\leqslant x\leqslant b\}$.

特别，$\omega(f,\delta)\leqslant c\omega_2(f,\sqrt{\delta})$.

9.　**Marchaud 不等式**：设 $f\in C[a,b]$，则对 $m\leqslant n$，成立

$$\omega_m(f,\delta)\leqslant C_n\delta^m\left[\int_\delta^p\frac{\omega_{n+1}(f,t)}{t^{m+1}}\mathrm{d}t+\frac{\|f\|_{C[a,b]}}{(b-a)^m}\right\},$$

式中 C_n 是仅依赖于 n 的常数,例如 $C_1=12, p=\frac{b-a}{2m}$. 证明见[82]$P.176-179$.

若 $f\in L^p[a,b]$,则

$$\omega_m(f,\delta)_p\leqslant Ct^m\left(\|f\|_p+\int_t^\delta\frac{\omega_n(f,u)}{u^{m+1}}\mathrm{d}u\right).$$

式中 $m=1,2,\cdots,n-1, 0<t<\delta, 1\leqslant p\leqslant\infty$.

另一方面,若对某个 $\delta>0, \int_0^\delta\frac{\omega_n(f,u)_p}{u^{1+m}}\mathrm{d}u<\infty, 1\leqslant p<\infty$.

则 $f^{(m-1)}$ 在$[a,b]$上绝对连续和 $f^{(m)}\in L^p[a,b]$,而且

$$\omega_{n-m}(f^{(m)},t)_p\leqslant C_1\int_0^t\frac{\omega_n(f,u)_p}{u^{m+1}}\mathrm{d}u.$$

式中 $0<t<\delta$,常数 C_1 仅依赖于 a,b,m,p.(见[55]P57－59)

10. $\omega(f,\delta)_q\leqslant(b-a)^s\omega_m(f,\delta)_p$. 式中 $s=1/p-1/q, 1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$;

11. $\omega_m(f,\delta)_p\leqslant\delta^m\|f^{(m)}\|_p$.

12. **逆定理**,给定连续模函数 $\omega(t)(t\geqslant0)$,当 $r=0$ 时满足下述四个条件:

① $\omega(t)$ 连续; ② $\omega(t)$ 递增; ③ $\omega(0)=0$,

④ 对所有 $t>0$,有 $\omega(2t)\leqslant c\omega(t)$, c 为常数,当 $r\geqslant1$ 时还满足第五个条件:

⑤ $\int_0^1\omega(t)/t\mathrm{d}t<\infty$.

若对周期函数 f,存在 n 阶三角多项式序列 $T_n(x)$,满足

$$|f(x)-T_n(x)|\leqslant(A/n^r)\omega(1/n), \tag{1.8}$$

r 为非负整数,则 $f\in C^r$,且 $\forall k\in N, f^{(r)}$ 的 k 阶连续模 $\omega_k(f^{(r)},x)$ 满足

$$\omega_k(f^{(r)},x)\leqslant\begin{cases}A_1Ax^k\int_x^1\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t, & r=0,\\ A_1A\left\{x^k\int_x^1\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{\omega(t)}{t}\mathrm{d}t\right\}, & r\geqslant1\end{cases}$$

式中 A_1 为常数. 证明见[82]P.250－254.

注 在函数逼近论中,凡是由函数的最佳逼近值趋于零的速度推出函数(或函数类)光滑阶数的定理,称为逆定理,上述不等式就是最基本的逆定理.

推论 1 设 $\omega(x)$ 为 k 阶连续模,则当 $r=0$ 时,在 N.12 的条件下,而当 $r\geqslant1$ 时,在补充条件

$$\int_0^x\omega(t)/t\mathrm{d}t\leqslant C\omega(x)$$

下,有 $\omega_{k+1}(f^{(r)},x)\leqslant A_1\omega(x)$ (A_1 为常数).

推论 2 设 $\omega(x)=x^\alpha(0<\alpha<1)$,则在 N.12. 的条件下,$f\in C^r$,且对任意整数 $r\geqslant0$,有

$$\omega(f^{(r)},x)\leqslant At^\alpha, \quad 即 \quad f\in W^rH^\alpha.$$

推论 3 设 $\omega(x)=x$,则在 N.12 条件下,$f\in C^r$,且对任意整数 $r\geqslant0$,有

$$\omega_2(f^{(r)},x)\leqslant Ax.$$

注 对于$[a,b]$上的非周期函数f,只要将(1.8)式换成:存在n阶代数多项式序列$\{P_n(x)\}$,使得

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant C[\xi_n(x)]^r\omega(f^{(r)},\xi_n(x)),\forall x\in[a,b],$$

式中$\xi_n(x)=\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{(b-x)(x-a)}+\frac{1}{n^2}$,常数$C$与$x,n$无关,则逆定则仍成立.见[82]P.286-289,276-277.

四、 K- 泛函不等式

1. 关于t的拟半可加性.

$$K_r(f,t_1+t_2)\leqslant 2^{r-1}[K_r(f,t_1)+K_r(f,t_2)].$$

2. 关于f的半可加性:

$$K_r(f_1+f_2,t)\leqslant K_r(f_1,t)+K_r(f_2,t).$$

3. $K_r(f,t)$关于t递增.

4. $K_r(f,t)\leqslant \|f\|_p$.

5. $K_r(f,t)\leqslant t^r\|f^{(r)}\|_p$.

6. **Marchaud 型不等式**:设$1\leqslant p<\infty,0<t\leqslant 1$,则对于$f\in L^p[a,b]$,有

$$K_j(f,t)\leqslant ct^j\left(\|f\|_p+\int_t^1 s^{-1-j}K_r(f,s)\mathrm{d}s\right),1\leqslant j\leqslant r-1;$$

若加上条件 $\int_0^1 s^{-1-j}K_r(f,s)\mathrm{d}s<\infty$,则 $f^{(j)}\in L^p[a,b]$,

$$\|f^{(j)}\|_p\leqslant C\left(\|f\|_p+\int_0^1 s^{-1-j}k_r(f,s)\mathrm{d}s\right),$$

而且

$$K_{r-j}(f^{(j)},t)\leqslant c\int_0^t s^{-1-j}K_r(f,s)\mathrm{d}s.$$ (证明见[55]P60-69)

§2 最佳逼近不等式

设(X,d)为距离空间,A为X的非空子集,对于$x\in X$,若存在$y_0\in A$,使得

$$d(x,y_0)=\inf\{d(x,y):y\in A\}.\tag{2.1}$$

则称y_0是x在集A中的最佳逼近元,在赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$中,(2.1)式变成

$$\|x-y_0\|=\inf\{\|x-y\|:y\in A\}.\tag{2.2}$$

设$P_n(x)$与$T_n(x)$分别表示n阶代数多项式和n次三角多项式,若$f\in C[a,b]$,记

$$E_n(f)=\inf_{\{P_n\}}\{\|f-P_n\|_c\}=\|f-P_n^*\|_c;\tag{2.3}$$

若$f\in C_{2\pi}$,记