习题4-4 中山大學 本科生考试草稿纸 2011/5/19 —93

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.206.1 求下列函数的单调性区间与极值点；

(1) $y=3x^5-5x^3$ ，$(-\infty,+\infty)$

$y'=15x^4-15x^2=15x^2(x-1)\cdot(x+1)$.

令 $y'=0$，则 $x=-1,\ x=0,\ x=1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘		↘	极小	↗

单增区间 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；单减区间 $(-1,1)$；极小值 $f(1)=-2$；极大值 $f(-1)=2$.

(2) $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ ，$(x\neq 0)$

$y'=\frac{-2}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{-2+x}{x^3}=\frac{x-2}{x^3}$

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	0	+
$f(x)$	↗	↘	极小	↗

令 $y'=0$，得驻点 $x=2$

单增区间：$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$；单减区间 $(0,2)$；极小值 $f(2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$.

(3) $y=\frac{2x}{1+x^2}$ ；

$y'=\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x)\cdot(1+x)}{(1+x^2)^2}$

令 $y'=0$，则 $x=-1,\ x=1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘

单调区间 $(-1,1)$；单减区间 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；极大值 $f(1)=1$；极小值 $f(-1)=-1$.

(4) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ ；

$y'=\frac{1}{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}(2-\ln x)$

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘

令 $y'=0$，则 $\ln x=0,\ x=1$

$2-\ln x=0,\ x=e^2$

单减区间 $(0,1)\cup(e^2,+\infty)$；单增区间 $(1,e^2)$；极小值 $f(1)=0$；极大值 $f(e^2)=\frac{4}{e^2}$.