4.31

4.31 解：要证明二维情形，先证一维情形。
令：

$$\mathrm{H(u)} = \mathrm{e}^{-u^2/2\sigma^2}$$

则对应有：

$$\mathrm{h(t)} = \Gamma^{-1}(H(u))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi ut} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2 - j4\pi\sigma^2 ut}{2\sigma^2}} du$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u^2 - j4\pi\sigma^2 ut - (2\pi)^2\sigma^4 t^2\right)} du$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u - j2\pi\sigma^2 t\right)^2} du$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

$$= \sqrt{2\pi}\sigma \mathrm{e}^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr\right)$$

$$= \sqrt{2\pi}\sigma^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}$$

于是，对应于二维情况：

$$\mathrm{h(t,z)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\, e^{-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi(ut+vz)} dudv$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi ut} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi vz} dv$$

$$= \sqrt{2\pi}\sigma^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}\sqrt{2\pi}\sigma^{-2\pi^2\sigma^2 z^2}$$

$$= A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2 + z^2)}$$

令 $A = 1, \rho^2 = 1/2$，则有：

$$\mathrm{H(u,v)} = \mathrm{e}^{-(u^2 + v^2)}$$

$$\mathrm{h}(t,z)=\pi e^{-\pi^2(t^2+z^2)}$$

证毕。

4.38

（a）经过有限次数的滤波后，图像将不再发生变化。

已知高斯低通滤波器 $H(\mu,\nu)=e^{-D^2(\mu,\nu)/2{D_0}^2}$, 经过 K 次迭代的高斯高通滤波器（GHPF）的传递函数为$H_K(\mu,\nu)=1-e^{-KD^2(\mu,\nu)/2{D_0}^2}$。

当 K 足够大时，有 $H_K(\mu,\nu)=\begin{cases}0，当(\mu,\nu)=(0,0)\\1，当(\mu,\nu)=其他\end{cases}$，只有(0, 0)的时候不通过，也就是$H_K(\mu,\nu)$保持不变，因此后续经过滤波的图像将不再发生变化。

（b）

答：假设c_{min}是计算机能表示的最小的正数，当一个数小于$\frac{1}{2}c_{min}$的时候将会视为 0，因此最小的迭代数 K 需要满足$e^{-KD^2(\mu,\nu)/2{D_0}^2}<\frac{1}{2}c_{min}$，从而有 $K>-\frac{ln(\frac{1}{2}c_{min})}{D^2(\mu,\nu)/2{D_0}^2}>-\frac{2{D_0}^2ln(\frac{1}{2}c_{min})}{D^2(\mu,\nu)}$