一、填空题 （每小题 2 分，共 10 分）

1. 10.5；　　2. $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$；　　3. 40；

4. ≤；　　5. $\frac{2}{5}I - \frac{1}{5}A.$

二、单项选择题 （每小题 2 分，共 20 分）

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案番 号	C	D	C	C	B	C	A	C	A	C

3、**计算题** （每小题 9 分，共 54 分）

1. 解：

$$\begin{vmatrix} o & o & \vdots & o & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n)} 1\cdot 2\cdots 1997\cdot 1998 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1998!$$

2. 解：

按第一列展开得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \beta \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

按第一行展开得

$$= (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$\because \quad D_1 = \alpha+\beta,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2,$$

$$\therefore \quad D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$$

$$=\beta^{n-2}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-\alpha(\alpha+\beta))$$

$$=\beta^n$$

$$\therefore \quad D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \qquad (1)$$

由α与β的对称性　得

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \qquad (2)$$

由$(2)\times\alpha-(1)\times\beta$　得

$$(\alpha-\beta)D_n=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$$

当　$\alpha\neq\beta$

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

3．解：　因$R(A)=3$,　所以$|A|=0.$

$$|A|=\begin{vmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_1,c_3+c_1,c_4+c_1.}\begin{vmatrix}k+3&1&1&1\\k+3&k&1&1\\k+3&1&k&1\\k+3&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=\!=\!=\!=\!=$$

$$(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&k+1&0&0\\0&0&k+1&0\\0&0&0&k+1\end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0$$

$$\Rightarrow k=1,k=-3.$$

当$k=1$时，　$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$,　　$R(A)=1$,

不合题意，　故$k=-3$.

4. 解: $A=\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_2,-2r_4+r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\3&3&0&3&0\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-3r_1+r_2,-2r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&12&0&4&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&1&1\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&1&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$

所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3;$

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 为极大无关组

$\alpha_2=\alpha_1+0\alpha_3+3\alpha_5;\qquad \alpha_4=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5.$

5. 解: $A=PQ=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2,&-1,&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix},\qquad QP=\begin{bmatrix}2,&-1,&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2$

$A^2=PQ\cdot PQ=P(QP)Q=2PQ=2A,$

$A^3=A^2A=2AA=2A^2=2^2A,$

一般地, 设 $A^{k-1}=2^{k-2}A,$ 则

根据数学归纳法, 有 $A^k=2^{k-1}A,$ 于是

$$A^{100}=2^{99}A=2^{99}\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix}.$$

6. 解: $|A^*|=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-3&0&8\end{vmatrix}=8,$ 因 $|A^*|=|A|^{n-1},$

$|A|^3=8\Rightarrow|A|=2,$

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I\Rightarrow(A-I)BA^{-1}=3I\Rightarrow(A-I)B=3I$$

$$\Rightarrow A^{-1}(A-I)B=3I\Rightarrow(I-A^{-1})B=3I\Rightarrow(I-\frac{1}{|A|}A^{*})B=3I$$

$$(I-\frac{1}{|A|}A^{*}\quad 3I)=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0&3&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&0&3&0&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0&0&3&0\\0&\frac{3}{2}&0&-3&0&0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_i\,(i=1,2,3,4)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&6&0&0&0\\0&1&0&0&0&6&0&0\\-1&0&1&0&0&0&6&0\\0&3&0&-6&0&0&0&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&6&0&0&0\\0&1&0&0&0&6&0&0\\-1&0&1&0&0&0&6&0\\0&0&0&-6&0&-18&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&6&0&0&0\\0&1&0&0&0&6&0&0\\0&0&1&0&6&0&6&0\\0&0&0&-6&0&-18&0&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{6}r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&6&0&0&0\\0&1&0&0&0&6&0&0\\0&0&1&0&6&0&6&0\\0&0&0&1&0&3&0&1\end{pmatrix}=(I\quad B)$$

$$B=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&6&0\\0&3&0&1\end{pmatrix}$$

四、证明题 （每小题 8 分，共 16 分）

1. 证明：因为 A,B 为正交矩阵，所以

$$AA^{T}=A^{T}A=I,BB^{T}=B^{T}B=I\qquad 且|A||B|=-1$$

于是

$$|A+B|=|(A+B)^{T}|=|A^{T}+B^{T}|=-|A||A^{T}+B^{T}||B|=-|AA^{T}B+AB^{T}B|=-|A+B|$$

$$\Rightarrow 2|A+B|=0\Rightarrow|A+B|=0$$

2. (1). 解

$$PQ=\begin{bmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha+b|A| \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ O & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{bmatrix}$$

(2). 证明:

$$|PQ|=|A|^2(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)$$

$|PQ|=|P||Q|$, 因 $|P|=|A|\neq 0$,

$$|Q|=|A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)$$

由此可知, $|Q|\neq 0$ 的充分必要条件为 $\alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$, 即矩阵 Q 可逆的充分必要条件为 $\alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$,