组合数学

第三章 排列与组合

主要内容

- 1. 基本的计数原理及其应用
- 2. 集合的排列与组合
- 3. 多重集的排列与组合

基本计数原理

加法原理:

设 $S = S_1 \cup \ldots \cup S_m$, 且 $S_i \cap S_j = \varnothing$ $(i \neq j)$

则 $|S| = |S_1| + \ldots + |S_m|$.

乘法原理:

设S是由(a,b)组成的集合,

其中a有p种选择,

且对a的每种选择,b有q种选择,

则 $|S| = p \times q$.

乘法原理应用

例: 确定$3^4\times5^2\times11^7\times13^8$的正整数因子的个数.

解: 其正整数因子的形式为

$$3^i\times5^j\times11^m\times13^n,$$

其中 $0\le i\le4,\ 0\le j\le2,$

$0\le m\le7,\ 0\le n\le8,$

根据乘法原理正整数因子的个数是

$$5\times3\times8\times9=1080.$$

例

例. 求1000~9999之间具有不同数字的奇数的个数

解:1.个位有 $|\{1,3,5,7,9\}|$ $= 5$ 种选择

个位取值范围是千位的子集；
千位是百位的子集；
这样的选择顺序就不存在漏选或多选

2.千位有 $|\{1,\ldots,9\}|$ -1 $= 8$ 种选择

3.百位有 $|\{0,1,\ldots,9\}|$ -2 $= 8$ 种选择

4.十位有 $|\{0,1,\ldots,9\}|$ -3 $= 7$ 种选择

总个数 $= 5\times8\times8\times7= 2240$.

换次序: 1. 百位有 $|\{0,1,\ldots,9\}|$ $= 10$ 种选择

2. 个位有 $|\{1,3,5,7,9\}|$ - ? 种选择

集合与多重集的记法

集合: 不能重复,没有次序

$$\{ a, b, b \} = \{ a, b \}$$

多重集: 可以重复, 没有次序

$$\{ a, b, b \} = \{ b, a, b \} \neq \{ a, b \}$$

多重集的记法:

$$M=\{a,a,a,b,c,c,d,d,d,d\}:=\{3\cdot a,b,2\cdot c,4\cdot d\}$$

$$N=\{\infty\cdot a, 2\cdot b, \infty\cdot c, 4\cdot d\}$$

集合的排列与组合

令S是集合, $|S| = n$, $r \geq 0$,

S的一个**r-排列**是 S中r个元素的有序摆放.

S的一个**r-组合**是 S中r个元素的无序选择,

或者说是 S的r个元素的子集.

例: S={a,b,c}

S的1-排列: a,b,c,	1-组合: {a}, {b}, {c}
S的2-排列: ab, ca,…,	2-组合: {a,b}, {b,c}, {a,c}
S的3-排列: cab,…,	3-组合: {a,b,c}
S的4-排列: ?	4-组合: ?
S的0-排列: ?	0-组合: $\varnothing$

排列数与组合数

用P(n,r)表示n元素集合的r-排列的个数

用C(n,r)表示n元素集合的r-组合的个数

定理: $0 \le r \le n$, $P(n,r) = n!/(n-r)!$

定理: $0 \le r \le n$, $C(n,r) = n!/(n-r)!/r!$

通常记C(n,r)为 $$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

定理: $C(n,r)=C(n,n-r)$.

定理: $C(n,0)+C(n,1)+\ldots+C(n,n)=2^n$.

例

例1: 平面上25个点, 无3点共线,
求他们所确定的直线数和三角形数.

例2: 排列26个字母, a,e,i,o,u两两不相邻, 求方案数.

21个字母的全排列，出现22个空，5个字母全排列后再插入22个空中

定义: 循环排列, 即沿圆圈排列.

定理: n元素集合的循环r-排列的个数是

$$P(n,r)/r.$$

例3. 8个不同颜色念珠穿成一条项链, 求方案数. P(8,8)/8

例4. 10人围坐一圆桌, 其中两个不相邻, 求方案数.
与例2比较.

多重集的排列和组合

特点: 每个元素可以出现0到多次.

例: S={2·a, b, 3·c}

S的4-排列有 abac, cacc 等

S的4-组合有 {2·a, b, c}, {a, 3·c} 等

S的6-排列有 abccac 等

S的6-组合有 {2·a, b, 3·c}

S的7-排列 无,　S的7-组合 无.

两个简单情况

定理: 设 $S = \{ \infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k \}, r \geq 0$,

则S的r-排列个数是k^r, r个位置，每个位置可以放k种饼干

S的r-组合个数是C(r+k-1,r). $n_1+n_2+\ldots+n_k=r\quad(n_i>=0)$ 解的个数即为组合数

定理: 设 $S = \{ n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k \}$,

且 $|S| = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

则 S 的全排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

例

例. 求MISSISSIPPI中字母的排列数.

例. $S = \{3\cdot a, 2\cdot b, 4\cdot c\}$, 求S的8排列的个数.

例. 一面包房生产8种炸面包圈, 若一打面包一盒, 求不同盒数. C(12+8-1, 12)

例. 不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, 其中 $x_1 \geq 3, x_2 \geq 1, x_3 \geq 0, x_4 \geq 5$, 求其整数解的数目.

令y1 = x1 - 3, y2 = x2 -1, y3 = x3, y4 = x4 - 5

则y1 + y2 + y3 + y4 = 11

解的个数C(11+4-1, 11)

本章小结

集合: 排列组合 容易

多重集: 无个数限制的排列组合 容易

有限多重集的全排列 容易

有限多重集的部分排列组合 困难