第一章总练习题

1.求解下列不等式:

(1) $\left|\dfrac{5x-8}{3}\right| \geq 2.$

解 $\dfrac{|5x-8|}{3} \geq 2. |5x-8| \geq 6, 5x-8 \geq 6$或$5x-8 \leq -6, x \geq \dfrac{14}{5}$或$x \leq \dfrac{2}{5}.$

(2) $\left|\dfrac{2}{5}x-3\right| \leq 3,$

解 $-3 \leq \dfrac{2}{5}x-3 \leq 3, 0 \leq x \leq 15.$

(3) $|x+1| \geq |x-2|$

解 $(x+1)^2 \geq (x-2)^2, 2x+1 \geq -4x+4, x \geq \dfrac{1}{2}.$

2.设$y=2x+|2-x|$,试将x表示成y的函数.

解 当$x \leq 2$时, $y=x+2, y \leq 4, x=y-2$;当$x>2$时, $y=3x-2, y>4, x=\dfrac{1}{3}(y-2).$

$$x=\begin{cases} y-2, y \leq 4 \\ \dfrac{1}{3}(y-2), y>4. \end{cases}$$

3.求出满足不等式$\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x$的全部$x$.

解 $x \geq -1. \quad 2\sqrt{1+x}<x+2, 4(1+x)<x^2+4x+4, x^2>0. x \geq -1, x \neq 0.$

4.用数学归纳法证明下列等式:

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}.$

证 当$n=1$时, $2-\dfrac{1+2}{2^1}=\dfrac{1}{2}$,等式成立.设等式对于$n$成立, 则

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$$
$$=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{2n+4-(n+1)}{2^{n+1}}=2-\frac{(n+1)+3}{2^{n+1}},$$

即等式对于$n+1$也成立.故等式对于任意正整数皆成立.

(2) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2} (x \neq 1).$

证 当$n=1$时, $\dfrac{1-(1+1)x^n+1x^{1+1}}{(1-x)^2}=\dfrac{(1-x)^2}{(1-x)^2}=1$,等式成立.

设等式对于n成立, 则

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}+(n+1)x^n$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}+(1-x)^2(n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}+(1-2x+x^2)(n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}+(x^n-2x^{n+1}+x^{n+2})(n+1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}+(x^n-2x^{n+1}+x^{n+2})(n+1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2},$$

即等式对于$n+1$成立.由归纳原理,等式对于所有正整数都成立.

5.设$f(x)=\dfrac{|2+x|-|x|-2}{x}$

(1)求$f(-4), f(-1), f(-2), f(2)$的值;

(2)将$f(x)$表成分段函数;

(3)当$x\to 0$时$f(x)$是否有极限:

(4)当$x\to -2$时是否有极限?

解(1) $f(-4)=\dfrac{2-4-2}{-4}=-1,\ f(-1)=\dfrac{1-1-2}{-1}=2,\ f(-2)=\dfrac{-2-2}{-2}=2,\ f(2)=\dfrac{4-2-2}{2}=0.$

(2) $f(x)=\begin{cases}-4/x, x\le -2;\\ 2, -2<x\le 0;\\ 0, x>0.\end{cases}$

(3)无.因为 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0\ne\lim\limits_{x\to 0-}f(x).$

(4)有. $\lim\limits_{x\to -2-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2-}(-4/x)=2,\ \lim\limits_{x\to -2+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2+}2=2=\lim\limits_{x\to -2-}f(x), \lim\limits_{x\to -2}f(x)=2.$

6.设$f(x)=[x^2-14]$,即$f(x)$是不超过x^2-14的最大整数.

(1)求$f(0), f\left(\dfrac{3}{2}\right), f(\sqrt{2})$的值;

(2) $f(x)$在$x=0$处是否连续?

(3) $f(x)$在$x=\sqrt{2}$处是否连续?

解(1) $f(0)=[-14]=-14,\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left[\dfrac{9}{4}-14\right]=\left[-6+\dfrac{1}{4}\right]=-7. f(\sqrt{2})=[-12]=-12.$

(2)连续.因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{y\to 0+}[y-14]=-14=f(0).$

(3)不连续.因为 $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}+}f(x)=-12,\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}-}f(x)=-11.$

7.设两常数a,b满足$0\le a<b$,对一切自然数n,证明:

(1) $\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$;(2) $(n+1)a^n<\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}.$

证 $\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}=\dfrac{(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+a^n)}{b-a}<b^n+b^{n-1}b+\cdots+b^n=(n+1)b^n$,

类似有 $\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}>(n+1)a^n$.

8.对 $n=1,2,3,\cdots$, 令 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

证明:序列$\{a_n\}$单调上升,而序列$\{b_n\}$单调下降, 并且 $a_n<b_n$.

证令 $a=1+\dfrac{1}{n+1}, b=1+\dfrac{1}{n}$, 则由7题中的不等式,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}<(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\frac{1}{n(n+1)}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n+1}\right)<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

我们证明 $\dfrac{1}{n}+1+\dfrac{1}{n+1}>\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}+1+\frac{1}{n+1}>1+\frac{2}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n(n+1)}>\dfrac{1}{(n+1)^2}$.最后不等式显然成立.

当 $n\to\infty$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\to e, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\to e$, 故 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

9.求极限

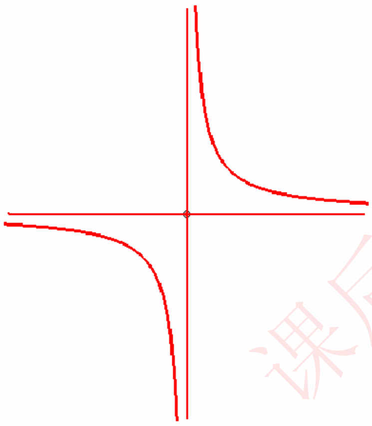
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

解 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}\to\frac{1}{2}(n\to\infty).$$

10.作函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{nx^2+a}(a\neq 0)$的图形.

解$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{nx^2+a}=\begin{cases}0, & x=0;\\ 1/x, & x\neq 0.\end{cases}$



11.在？关于有界函数的定义下,证明函数$f(x)$在区间$[a,b]$上为有界函数的充要条件为存在一个正的常数M使得$|f(x)|<M,\forall x\in[a,b]$.

证设存在常数M_1,N使得$M_1\le f(x)\le N,\forall x\in[a,b]$,取$M=\max\{|M_1|,|N|\}+1$,则有$|f(x)|<M,\forall x\in[a,b]$.

反之,若存在一个正的常数M使得$|f(x)|<M,\forall x\in[a,b]$,则$-M<f(x)<M,\forall x\in[a,b]$.

12.证明:若函数$y=f(x)$及$y=g(x)$在$[a,b]$上均为有界函数,则$f(x)+g(x)$及$f(x)g(x)$也都是$[a,b]$上的有界函数.

证存在M_1,M_2,$|f(x)|<M_1$,$|g(x)|<M_2,\forall x\in[a,b]$.$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|<M_1+M_2$,$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<M_1M_2,\forall x\in[a,b]$.

13.证明:$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{\pi}{x}$在$x=0$的任一邻域内都是无界的,但当$x\to 0$时$f(x)$不是无穷大量.

证任取一个邻域$(-\delta,\delta),\delta>0$和$M>0$,取正整数$n$,满足$\frac{1}{n}<\delta$和$n>M$,则$\left|f(\frac{1}{n})\right|=n>M$,

故$f(x)$在$(-\delta,\delta)$无界. 但是$x_n=\frac{1}{2n+1/2}\to 0$, $f(x_n)=(2n+1/2)\cos(2n+1/2)\pi=0\not\to\infty$,

故当$x\to 0$时$f(x)$不是无穷大量.

14.证明$\lim\limits_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1)=\ln x(x>0)$.

证令$x^{\frac{1}{n}}-1=y_n$,则$\frac{1}{n}\ln x=\ln(1+y),n=\frac{\ln x}{\ln(1+y)}.\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}-1=0.$

注意到$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln e=1,$

我们有$n(x^{\frac{1}{n}}-1)=\frac{y_n\ln x}{\ln(1+y_n)}\to\ln x(n\to\infty).$

15.设$f(x)$及$g(x)$在实轴上有定义且连续.证明:若$f(x)$与$g(x)$在有理数集合处处相等,则它们在整个实轴上处处相等.

证任取一个无理数x_0,取有理数序列$x_n\to x_0$, $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=g(x_0)$.

16.证明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

证$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{4y^2}=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$

17.证明:(1)$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$;(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+a}-e^x}{x}=e^a$.

证(1)$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln e=1.$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+a}-e^a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^a(e^x-1)}{x}=e^a\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=e^a\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=e^a\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$

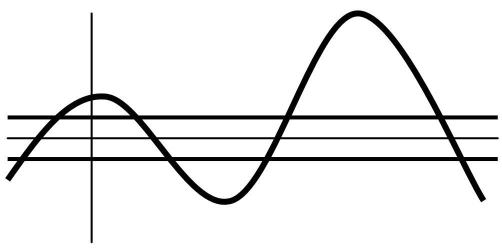
$=e^a\cdot\frac{1}{1}=e^a.$

18.设$y=f(x)$在a点附近有定义且有极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$,又设$y=g(x)$在$a$点附近有定义,且是有界函数.证明$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

证设$|g(x)|<M,0<|x-a|<\delta_0$.对于任意$\varepsilon>0$,存在$\delta_1>0$,使得当$0<|x-a|<\delta_1$时$|f(x)|<\varepsilon/M$.令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_0\}$,则$0<|x-a|<\delta$时,$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

19.设$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中连续,又设c为正的常数,定义$g(x)$如下

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 当|f(x)|\le c\\ c & 当f(x)>c\\ -c & 当f(x)<-c\end{cases}$$



试画出$g(x)$的略图,并证明$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

证(一)若$|f(x_0)|<c$,则存在$\delta_0>0$,当$|x-x_0|<\delta_0$时$|f(x)|<c$, $g(x)=f(x)$,
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=g(x_0)$.
若$f(x_0)>c$,则存在$\delta_0>0$,当$|x-x_0|<\delta_0$时$f(x)>c$, $g(x)=c$,
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} c=c=g(x_0)$.
若$f(x_0)=c$,则$g(x_0)=c$.对于任意$\varepsilon>0$,不妨设$\varepsilon<c$,存在$\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时
$|f(x)-c|<\varepsilon$.设$|x-x_0|<\delta$.若$f(x)\le c$,则$g(x)=f(x)$,$|g(x)-g(x_0)|=|f(x)-c|<\varepsilon$,
若$f(x)>c$, 则$g(x)=c$,$|g(x)-g(x_0)|=0<\varepsilon$.
证(二)利用$g(x)=\min\{f(x),c\}+\max\{f(x),-c\}-f(x)$.
$\max\{f_1(x),f_2(x)\}=(|f_1(x)-f_2(x)|+f_1(x)+f_2(x))/2$.
$\min\{f_1(x),f_2(x)\}=(-|f_1(x)-f_2(x)|+(f_1(x)+f_2(x))/2$.

20.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,又设$\eta=\dfrac{1}{3}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$,
其中$x_1,x_2,x_3\in[a,b]$.证明存在一点$c\in[a,b]$,使得$f(c)=\eta$.
证若$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,则$\eta=f(x_1)$,取$c=x_1$即可.
否则设$f(x_1)=\min\{f(x_1),f(x_2),f(x_3)\}$, $f(x_3)=\min\{f(x_1),f(x_2),f(x_3)\}$,
$f(x_1)<\eta<f(x_3)$, f在$[x_1,x_3]$连续,根据连续函数的中间值定理,存在一点$c\in[a,b]$,
使得$f(c)=\eta$.

21.设 $y=f(x)$在点x_0连续而$g(x)$在点x_0附近有定义,但在x_0不连续问$kf(x)+l\,g(x)$
是否在x_0连续,其中k,l为常数.
解如果$l=0$,$kf(x)+l\,g(x)$在x_0连续;如果$1\ne0$,$kf(x)+l\,g(x)$在x_0不连续, 因否则
$g(x)=[[kf(x)+\lg(x)]-kf(x)]/l$将在$x_0$连续.

22.证明Dirichlet函数处处不连续.
证任意取x_0.取有理数列$x_n\to x_0$,则$D(x_n)\to1$;取无理数列$x_n'\to x_0$,则$D(x_n')\to0$;
故$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$不存在,$D(x)$在$x_0$不连续.

23. 求下列极限:
(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^{|x|}=0$;(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\cdot0=0$;
(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 5x}{\ln(1+x^2)+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 5x/x}{x[[\ln(1+x^2)]/x^2]+\sin x/x}=\dfrac{5}{1}=5$.
(4)$\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{1/y}=e$.

24.设函数$y=f(x)$在$[0,+\infty)$内连续,且满足$0\le f(x)\le x$.设$a_1\ge0$是一任意数,并假定
$a_2=f(a_1),a_3=f(a_2),\cdots$,一般地$a_{n+1}=f(a_n)$.试证明$\{a_n\}$单调递减,且极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.
若$l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,则$l$是方程$f(x)=x$的根,即$f(l)=l$.
证$a_{n+1}=f(a_n)\le a_n$,$\{a_n\}$单调递减. 又$a_{n+1}=f(a_n)\ge0(n=1,2,)$,$\{a_n\}$单调递减有下界,

故a_n有极限. 设$l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,则$l=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)=f(l)$.

25.设函数$y=E(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义且处处连续,并且满足下列条件:

$E(0)=1, E(1)=e, E(x+y)=E(x)\cdot E(y)$.

证明$E(x)=e^x(\forall x\in(-\infty,+\infty))$.

证用数学归纳法易得$E(x_1+\cdots+x_n)=E(x_1)\cdot\cdots\cdot E(x_n)$.于是$E(nx)=E(x)^n$.

设n是正整数,则$E(n)=E(1+\cdots+1)=E(1)^n=e^n$.

$1=E(0)=E(n+(-n))=E(n)\cdot E(-n)=e^n\cdot E(-n), E(-n)=e^{-n}$.于对于任意整数

$E(n)=e^n$.

对于任意整数n, $E(1)=E(n\cdot\frac{1}{n})=E(n)\cdot E(\frac{1}{n})=e^n\cdot E(\frac{1}{n})$,$\cdot E(\frac{1}{n})=e^{\frac{1}{n}}$.

$E(\frac{m}{n})=E(m\cdot\frac{1}{n})=\left(E(\frac{1}{n})\right)^m=\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m=e^{\frac{m}{n}}$.即对于所有有理数$r$, $E(r)=e^r$.

对于无理数x,取有理数列$\mathrm{x_n}\to x$,由$E(x)$的连续性,

$E(x)=\lim\limits_{n\to\infty}E(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{x_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$ (e^x的连续性)$=e^x$.

习题 1.1

1.证明$\sqrt{3}$为无理数.

证 若$\sqrt{3}$不是无理数, 则$\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, p,q为互素自然数.$3=\dfrac{p^2}{q^2}$, $p^2=3q^2$.3除尽p^2, 必除尽p, 否则$p=3k+1$或$p=3k+2$.$p^2=9k^2+6k+1$, $p^2=9k^2+12k+4$,3除p^2将余1.故$p=3k,9k^2=3q^2,q^2=3k^2$,类似得3除尽q.与p,q互素矛盾.

2.设p是正的素数,证明$\sqrt{p}$是无理数.

证 设$\sqrt{p}=\dfrac{a}{b}$, a,b为互素自然数, 则$p=\dfrac{a^2}{b^2}$, $a^2=pb^2$,素数p除尽a^2,故p除尽a, $a=pk$.$p^2k^2=pb^2$, $pk^2=b^2$.类似得p除尽b.此与a,b为互素自然数矛盾.

3.解下列不等式:

(1)$|x|+|x-1|<3$.\;(2)$|x^2-3|<2$.

解 (1)若$x<0$,则$-x+1-x<3,2x>-2,x>-1,(-1,0)$;

若$0<x<1$,则$x+1-x<3,1<3,(0,1)$;

若$x>1$,则$x+x-1<3,x<3/2,(1,3/2)$.

$X=(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,3/2)$.

(2)$-2<x^2-3<2,1<x^2<5,1<|x|^2<5,1<|x|<\sqrt{5},x=(1,\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},-1)$.

4.设a,b为任意实数,(1)证明$|a+b|\geq|a|-|b|$;(2)设$|a-b|<1$,证明$|a|<|b|+1$.

证(1)$|a|=|a+b+(-b)|\leq|a+b|+|-b|=|a+b|+|b|,|a+b|\geq|a|-|b|$.

(2)$|a|=|b+(a-b)|\leq|b|+|a-b|<|b|+1$.

5.解下列不等式:

(1)$|x+6|>0.1$;(2)$|x-a|>l$.

解 (1)$x+6>0.1$或$x+6<-0.1$.$x>-5.9$或$x<-6.1$.$X=(-\infty,-6.1)\cup(-5.9,+\infty)$.

(2)若$l>0$, $X=(a+l,+\infty)\cup(-\infty,a-l)$;若$l=0$, $x\neq a$;若$l<0$, $X=(-\infty,+\infty)$.

6.若$a>1$,证明$0<\sqrt[n]{a}-1<\dfrac{a-1}{n}$,其中$n$为自然数.

证若$a>1$,显然$\sqrt[n]{a}=b>1$.$a-1=\sqrt[n]{a}^n-1=(\sqrt[n]{a}-1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+1)>n(\sqrt[n]{a}-1)$.

7.设(a,b)为任意一个开区间,证明(a,b)中必有有理数.

证取自然数n 满足$1/10^n<b-a$.考虑有理数集合

A=$A_n=\{\dfrac{m}{10^n}\,|\,m\in\mathbf{Z}\}$. 若$A_n\cap(a,b)=\varnothing$,则$A=B\cup C,B=A\cap\{x\,|\,x\geq b\}$,

$C=A\cap\{x\,|\,x\leq a\}$.B中有最小数$m_0/10^n$,$(m_0-1)/10^n\in C$,

$b-a\leq m_0/10^n$-$(m_0-1)/10^n$=$1/10^n$, 此与n的选取矛盾.

8.设(a,b)为任意一个开区间,证明(a,b)中必有无理数.

证取自然数n 满足$1/10^n<b-a$.考虑无理数集合$A_n=\{\sqrt{2}+\dfrac{m}{10^n}\,|\,m\in\mathbf{Z}\}$. 以下仿8题.

习题 1.2

1.求下列函数的定义域:

$(1)y=\ln(x^2-4);(2)y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};(3)y=\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}};(4)y=\frac{1}{\sqrt{2x^2+5x-3}}.$

解 $(1)x^2-4>0,|x|^2>4,|x|>2,D=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty).$

$(2)\frac{1+x}{1-x}>0.\begin{cases}1-x>0\\1+x>0\end{cases}$或$\begin{cases}1-x<0\\1+x<0\end{cases}.-1<x<1,D=(-1,1).$

$(3)\frac{5x-x^2}{4}>1,x^2-5x-4<0.x^2-5x+4=0,(x-1)(x-4)=0,x_1=1,x_2=4.$

$D=(1,4).$

$(4)2x^2+5x-3>0.(2x-1)(x+3)=0,x_1=-3,x_2=1/2.D=(-\infty,-3)\cup(1/2,+\infty).$

2.求下列函数的值域$f(X)$,其中X为题中指定的定义域.

$(1)\ f(x)=x^2+1,X=(0,3).f(X)=(1,10).$

$(2)\ f(x)=\ln(1+\sin x),X=(-\pi/2,\pi],\ f(X)=(-\infty,\ln 2].$

$(3)\ f(x)=\sqrt{3+2x-x^2},X=[-1,3],3+2x-x^2=0,x^2-2x-3=0,(x+1)(x-3)=0,$

$x_1=-1,x_2=3,\ f(X)=[0,f(1)]=[0,4].$

$(4)\ f(x)=\sin x+\cos x,X=(-\infty,+\infty).$

$f(x)=\sqrt{2}(\sin x\cos(\pi/4)+\cos x\sin(\pi/3))=\sqrt{2}\sin(x+\pi/4),\ f(X)=[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$

3.求函数值:

(1)设$f(x)=\frac{\ln x^2}{\ln 10}$,求$f(-1),\ f(-0.001),\ f(100);$

(2)设$f(x)=\arcsin\frac{x}{1+x^2}$,求$f(0),\ f(1),\ f(-1);$

(3)设$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x),-\infty<x\le 0,\\-x,\quad 0<x<+\infty,\end{cases}$求$f(-3),\ f(0),\ f(5).$

(4)设$f(x)=\begin{cases}\cos x,0\le x<1,\\1/2,\quad x=1,\\2^x,\quad 1<x\le 3\end{cases}$求$f(0),\ f(1),\ f(3/2),\ f(2).$

解(1) $f(x)=\log x^2,\ f(-1)=\log 1=0,\ f(-0.001)=\log(10^{-6})=-6,\ f(100)=\log 10^4=4.$

$(2)\ f(0)=0,\ f(1)=\arcsin(1/2)=\pi/6,\ f(-1)=\arcsin(-1/2)=-\pi/6.$

$(3)\ f(-3)=\ln 4,\ f(0)=0,\ f(5)=-5.$

$(4)\ f(0)=\cos 0=1,\ f(1)=1/2,\ f(3/2)=2\sqrt{2},\ f(2)=4.$

4.设函数$f(x)=\frac{2+x}{2-x},x\ne\pm 2$,求$f(-x),\ f(x+1),\ f(x)+1,\ f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)}.$

解$f(-x)=\frac{2-x}{2+x},x\ne\pm 2;\ f(x+1)=\frac{2+x+1}{2-x-1}=\frac{3+x}{1-x},x\ne 1,x\ne -3,$

$f(x)+1=\frac{2+x}{2-x}+1=\frac{4}{2-x}, x\neq\pm2;\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2-1/x}{2+1/x}=\frac{2x-1}{2x+1}, x\neq0, x\neq\pm1/2,$

$\frac{1}{f(x)}=\frac{2+x}{2-x}, x\neq\pm2.$

5.设$f(x)=x^3$,求$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，其中$\Delta x$为一个不等于零的量.

解$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3\Delta x+\Delta x^2.$

6.设$f(x)=\ln x, x>0, g(x)=x^2, -\infty<x<+\infty$,试求$f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x))$.

解$f(f(x))=f(\ln x)=\ln\ln x, x>1; g(g(x))=g(x^2)=x^4, -\infty<x<+\infty;$

$f(g(x))=f(x^2)=\ln x^2, x\neq0; g(f(x))=g(\ln x)=\ln^2 x, x>0.$

7.设$f(x)=\begin{cases}0, & x\geq0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\geq0;\\ 1-x, & x<0,\end{cases}$ 求$f(g(x)), g(f(x))$.

解$\forall x, g(x)\geq0, f(g(x))=0.$

$g(f(x))=\begin{cases}g(0), & x\geq0,\\ g(-x), & x<0.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\geq0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

8.作下列函数的略图:

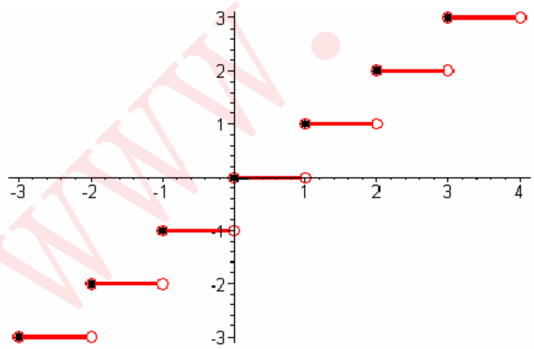
(1)$y=[x]$,其中$[x]$为不超过x的最大整数;

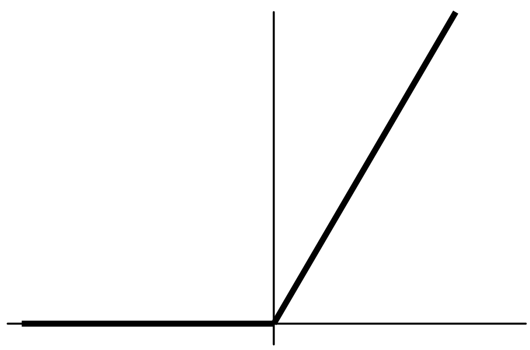
(2)$y=[x]+x$;

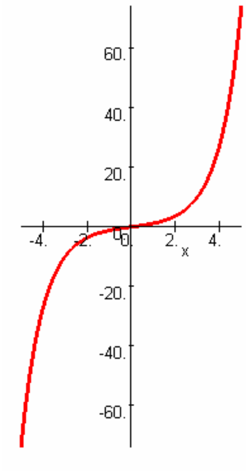
(3)$y=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(-\infty<x<+\infty)$;

(4)$y=\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})(-\infty<x<+\infty)$;

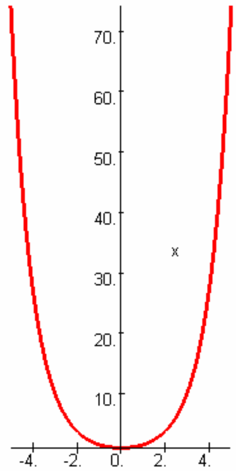
(5)$y=\begin{cases}x^2, & 0\leq x<0,\\ x-1, & -1\leq x<0.\end{cases}$



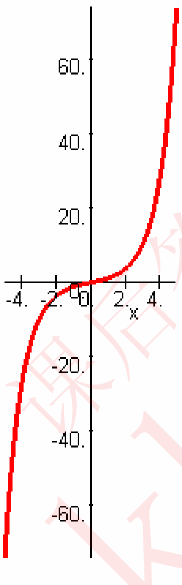




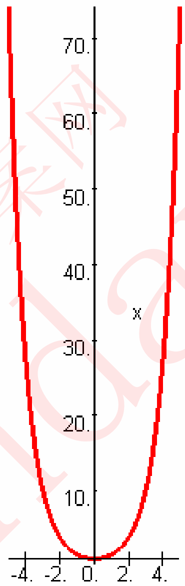
（1）



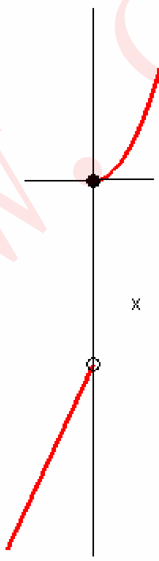
（2）



（3）



（4）



（5）

9.设$f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 0, \\ x, \quad x<0, \end{cases}$求下列函数并且作它们的图形：

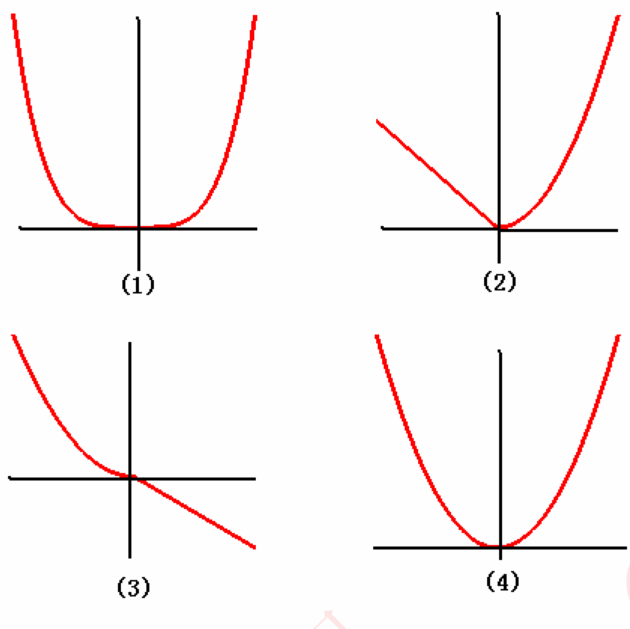
(1)$y=f(x^2)$;(2)$y=|f(x)|$;(3)$y=f(-x)$;(4)$y=f(|x|)$.

解(1)$y=x^4,-\infty<x<+\infty$.

(2)$y=|f(x)|=\begin{cases} x^2, x\geq 0, \\ -x, \quad x<0. \end{cases}$

(3)$y=f(-x)=\begin{cases} x^2, -x\geq 0, \\ -x, \quad -x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2, x\leq 0, \\ -x, \ x>0. \end{cases}$

(4)$y=f(|x|)=x^2,-\infty<x<+\infty$.



10.求下列函数的反函数：

$(1)y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}(0<x<+\infty);$

$(2)y=\sinh x(-\infty<x<+\infty);$

$(3)y=\cosh x(0<x<+\infty).$

解$(1)\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=y, x^2-2yx-4=0, x=y+\sqrt{y^2+4}, y=x+\sqrt{x^2+4}(-\infty<x<+\infty).$

$(2)\frac{e^x-e^{-x}}{2}=y, z=e^x, z^2-2yz-1=0, e^x=z=y+\sqrt{y^2+1}, x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$

$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),(-\infty<x<+\infty).$

$(3)\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y, z=e^x, z^2-2yz+1=0, e^x=z=y+\sqrt{y^2-1}, x=\ln(y+\sqrt{y^2-1}),$

$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),(x\geq 1).$

11.证明$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$

证$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{(e^{2x}+e^{-2x}+2)-(e^{2x}+e^{-2x}-2)}{4}=1.$

12.下列函数在指定区间内是否是有界函数？

$(1)y=e^{x^2}, x\in(-\infty,+\infty);$否

$(2)y=e^{x^2} x\in(0,10^{10});$是

$(3)y=\ln x, x\in(0,1);$否

$(4)y=\ln x, x\in(r,1),$其中$r>0.$是

$(5)y=\frac{e^{-x^2}}{2+\sin x}+\cos(2^x), x\in(-\infty,+\infty);$是$|y|\leq\frac{1}{2-1}+1=2.$

(6) $y = x^2 \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$; 否.

(7) $y = x^2 \cos x, x \in (-10^{10}, 10^{10})$.是

13.证明函数$y = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$在$(1, +\infty)$内是有界函数.

证$y = \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} (x > 1).$

13.研究函数$y = \dfrac{x^6 + x^4 + x^2}{1+x^6}$在$(-\infty, +\infty)$内是否有界.

解 $|x| \le 1$时, $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2}{1+x^6} \le 3, |x| > 1$时, $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2}{1+x^6} \le \dfrac{3x^6}{x^6} = 3,$

$|y| = y \le 3, x \in (-\infty, +\infty).$

习题 1.3

1.设$x_n=\dfrac{n}{n+2}(n=1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,即对于任意$\varepsilon>0$,求出正整数$N$,使得当$n>N$时有 $|x_n-1|<\varepsilon$,并填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
N	18	198	1998	19998

证$\forall\varepsilon>0$,不妨设$\varepsilon<1$,要使$|x_n-1|=\left|\dfrac{n}{n+2}-1\right|=\dfrac{2}{n+2}<\varepsilon$,只需$n>\dfrac{2}{\varepsilon}-2$,取$N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-2\right]$,则当$n>N$时,就有$|x_n-1|<\varepsilon$.

2.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|l|$.

证$\forall\varepsilon>0,\exists N$,使得当$n>N$时,$|a_n-l|<\varepsilon$,此时$||a_n|-|l||\le|a_n-l|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|l|$.

3.设$\{a_n\}$有极限l,证明

(1)存在一个自然数N,$n<N\ |a_n|<|l|+1$;

(2)$\{a_n\}$是一个有界数列,即存在一个常数M,使得$|a_n|\le M\ (n=12,\cdots)$.

证(1)对于$\varepsilon=1,\exists N$,使得当$n>N$时,$|a_n-l|<1$,此时$|a_n|=|a_n-l+l|\le|a_n-l|+|l|<|l|+1$.

(2)令$M=\max\{|l|+1,|a_1|,\cdots,|a_N|\}$,则$|a_n|\le M\ (n=12,\cdots)$.

4. 用ε-N说法证明下列各极限式:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-3}=\dfrac{3}{2}$;　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}=0$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0(|q|<1)$;　　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=1$;

(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^{3/2}}\right)=0$.

证(1)$\forall\varepsilon>0$,不妨设$\varepsilon<1$,要使$\left|\dfrac{3n+1}{2n-3}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{11}{2(2n-3)}<\varepsilon$,只需$n>\dfrac{11}{2\varepsilon}+3$,取$N=\left[\dfrac{11}{2\varepsilon}+3\right]$,当$n>N$时,$\left|\dfrac{3n+1}{2n-3}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-3}=\dfrac{3}{2}$.

(2)$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}\right|<\varepsilon$,由于$\left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}\right|\le\sqrt[3]{n}$,只需$\sqrt[3]{n}<\varepsilon$,$n>\dfrac{1}{\varepsilon^3}$,

取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^3}\right]$,当$n>N$时$\left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}\right|<\varepsilon.$

(3) $|q|=\dfrac{1}{1+\alpha}(\alpha>0).n>4$

$$|n^2q^n|=\frac{n^2}{(1+\alpha)^n}=\frac{n^2}{1+n\alpha+\dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\alpha^3+\cdots+\alpha^n}$$

$$<\frac{6n}{(n-1)(n-2)\alpha^3}<\frac{24}{n\alpha^3}<\varepsilon,n>\frac{24}{\varepsilon\alpha^3},N=\max\{4,\left[\frac{24}{\varepsilon\alpha^3}\right]\}.$$

(4) $\dfrac{n!}{n^n}\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon,n>\dfrac{1}{\varepsilon},N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right].$

(5) $\left|\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)-1\right|$

$$=\left|\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right)\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,n>\frac{1}{\varepsilon},N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

(6) $\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^{3/2}}\le\dfrac{n}{(n+1)^{3/2}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon,n>\dfrac{1}{\varepsilon^2},N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right].$

5.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\{b_n\}$是有界数列,即存在常数$M$,使得$|b_n|<M(n=1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0.$

证$\forall\varepsilon>0,\exists$正整数 N,使得 $|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{M},|a_nb_n|=|a_n||b_n|\le\dfrac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon,$

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0.$

6.证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证$\forall\varepsilon>0$,要使$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$,只需$\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1.$

而$\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}=\dfrac{n}{1+n\varepsilon+\dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2}<\dfrac{2}{(n-1)\varepsilon^2}<\dfrac{4}{n\varepsilon^2}$,只需$\dfrac{4}{n\varepsilon^2}<1,n>\dfrac{4}{\varepsilon^2},N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right].$

7.求下列各极限的值:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3/n-100/n^2}{4-1/n^2+2/n^2}=\dfrac{1}{4}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+10)^4}{n^4+n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+10/n)^4}{1+1/n}=16.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^{-2}=e^{-2}.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}$

$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n$, 取 $q\in(\frac{1}{e},1),\exists N$, 当 $n>N$ 时, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<q$

$0<\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n<q^n,\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=0.$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e\cdot\frac{1}{e}=1.$

8.利用单调有界序列有极限证明下列序列极限的存在性:

(1) $x_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},x_{n+1}=x_n+\frac{1}{(n+1)^2}>x_n,$

$x_n<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2.$ x_n 单调增加有上界，故有极限.

(2) $x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1},x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2^{n+1}+1}>x_n,$

$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1.$

x_n 单调增加有上界，故有极限.

(3) $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}.x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=-\frac{1}{2n+2}<0,$

$x_{n+1}<x_n,x_n>0,x_n$ 单调减少有下界，故有极限.

(4) $x_n=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+1)!}>0,$

$x_n\le 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3.$

x_n 单调增加有上界，故有极限.

9. 证明 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$

证 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+$

$\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$

$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$

$<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$

对于固定的正整数k，由上式，当$n>k$时，

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$

令$n\to\infty$得$e\ge\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right),$

$e\ge\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$

10.设满足下列条件：$|x_{n+1}|\le k|x_n|, n=1,2,\cdots,$其中是小于1的正数.证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

证由$|x_{n+1}|\le k|x_n|\le k^2|x_{n-1}|\le\cdots k^{n-1}|x_1|\to 0(n\to\infty)$，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

习题 1.4

1.直接用ε-δ说法证明下列各极限等式：

(1)$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}(a>0)$;(2)$\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$;(3)$\lim\limits_{x\to a}e^x=e^a$;(4)$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

证 (1)$\forall\varepsilon>0$,要使$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}<\varepsilon$,由于$\dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}}$,

只需$\dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$,$|x-a|<\sqrt{a}\varepsilon$.取$\delta=\sqrt{a}\varepsilon$,则当$|x-a|<\delta$时,$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$.

(2)$\forall\varepsilon>0$,不妨设$|x-a|<1$.要使$|x^2-a^2|=|x+a||x-a|<\varepsilon$,由于

$|x+a|\le|x-a|+|2a|<1+|2a|$,

只需$(1+|2a|)|x-a|<\varepsilon$,$|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{1+|2a|}$.取$\delta=\min\{\dfrac{\varepsilon}{1+|2a|},1\}$,则当$|x-a|<\delta$时,

$|x^2-a^2|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$.

(3) $\forall\varepsilon>0$,设$x>a$.要使$|e^x-e^a|=e^a(e^{x-a}-1)<\varepsilon$,即$0<(e^{x-a}-1)<\dfrac{\varepsilon}{e^a}$,$1<e^{x-a}<1+\dfrac{\varepsilon}{e^a}$,

$0<x-a<\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{e^a}\right)$,取$\delta=\min\{\dfrac{\varepsilon}{1+|2a|},1\}$,则当$0<x-a<\delta$时,$|e^x-e^a|<\varepsilon$,

故$\lim\limits_{x\to a+}e^x=e^a$. 类似证$\lim\limits_{x\to a-}e^x=e^a$.故$\lim\limits_{x\to a}e^x=e^a$.

(4)$\forall\varepsilon>0$,要使$|\cos x-\cos a|=2\left|\sin\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}\right|=2\left|\sin\dfrac{x+a}{2}\right|\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\right|\le|x-a|$,

取$\delta=\varepsilon$,则当$|x-a|<\delta$时,$|\cos x-\cos a|<\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

2.设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$,证明存在$a$的一个空心邻域$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$,使得函数$u=f(x)$在该邻域内使有界函数.

证对于$\varepsilon=1$,存在$\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$时,$|f(x)-l|<1$,从而

$|f(x)|=|f(x)-l+l|\le|f(x)-l|+|l|<1+|l|=M$.

3.求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^2-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}(1+\dfrac{x}{2})=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot1^2=\dfrac{1}{2}$.

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(a>0)$.

(4)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-2x-3}=\dfrac{-2}{-3}$.

(5)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-2x-3}=\dfrac{-2}{-3}$.

$$(6)\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(2x+2)^{10}}{(2x+1)^{30}}=\frac{2^{30}}{2^{30}}=1.$$

$$(7)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1.$$

$$(8)\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1-3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-2)}{(x^2-x+1)}=\frac{-3}{3}=-1.$$

$$(9)\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{2\cdot 4}{6}=\frac{4}{3}.$$

$$(10)\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{ny+\frac{n(n-1)}{2}y^2+\cdots+y^n}{y}=n.$$

$$(11)\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

$$(12)\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}(b_n\neq 0)=\frac{a_m}{b_n}.$$

$$(13)\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}(a_0\cdot b_0\neq 0)=\begin{cases}a_0/b_0, m=n\\ 0, \quad n>m\\ \infty, \quad m>n.\end{cases}$$

$$(14)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+8}}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+8/x^4}}{1+1/x^2}=1.$$

$$(15)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x})(\sqrt[3]{1+3x}^2+\sqrt[3]{1+3x}\cdot\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{1-2x}^2)}{(x+x^2)(\sqrt[3]{1+3x}^2+\sqrt[3]{1+3x}\cdot\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{1-2x}^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(1+x)(\sqrt[3]{1+3x}^2+\sqrt[3]{1+3x}\cdot\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{1-2x}^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5}{(1+x)(\sqrt[3]{1+3x}^2+\sqrt[3]{1+3x}\cdot\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{1-2x}^2)}=\frac{5}{3}.$$

$$(16)a>0,\ \lim_{x\to a+0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a+0}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$=\lim_{x\to a+0}\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$=\lim_{x\to a+0}\left(\frac{(x-a)}{\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$=\lim_{x\to a+0}\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

4.利用$\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sin x}{x}=1$及$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}\lim\limits_{x\to 0}\cos\beta x=\dfrac{\alpha}{\beta}.$

(2) $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{2x^2}\square\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{3x}=1\square 0=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x-\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}.$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos a.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}(-k)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{-k}=e^{-k}.$

(7) $\lim\limits_{y\to 0}(1-5y)^{1/y}=\left[\lim\limits_{y\to 0}(1-5y)^{1/(5y)}\right]^{-5}=e^{-5}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+100}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^{100}=e.$

5.给出$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$及$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$的严格定义.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$：对于任意给定的$A>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时$f(x)>A.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$：对于任意给定的$A>0$，存在$\Delta>0$，使得当$x<-\Delta$时$f(x)<-A.$

习题 1.5

1.试用$\varepsilon-\delta$说法证明

(1)$\sqrt{1+x^2}$在$x=0$连续

(2)$\sin 5x$在任意一点$x=a$连续.

证(1)$\forall\varepsilon>0$,要使$|\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+0^2}|=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}<\varepsilon$.由于$\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}\le x^2$,只需

$x^2<\varepsilon$,$|x|<\sqrt{\varepsilon}$,取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当$|x|<\delta$时有$|\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+0^2}|<\varepsilon$,故$\sqrt{1+x^2}$在$x=0$连续.

(2)(1)$\forall\varepsilon>0$,要使$|\sin 5x-\sin 5a|=2|\cos\dfrac{5x+5a}{2}||\sin\dfrac{5(x-a)}{2}|<\varepsilon$.

由于$2|\cos\dfrac{5x+5a}{2}||\sin\dfrac{5(x-a)}{2}|\le 5|x-a|$,只需$5|x-a|<\varepsilon$,$|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,

取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则当$|x-a|<\delta$时有$|\sin 5x-\sin 5a|<\varepsilon$,故$\sin 5x$在任意一点$x=a$连续.

2. 设$y=f(x)$在x_0处连续且$f(x_0)>0$,证明存在$\delta>0$使得当$|x-x_0|<\delta$时$f(x)>0$.

证由于$f(x)$在x_0处连续,对于$\varepsilon=f(x_0)/2$,存在存在$\delta>0$使得当$|x-x_0|<\delta$时

$f(x)-f(x_0)|<f(x_0)/2$, 于是$f(x)>f(x_0)-f(x_0)/2=f(x_0)/2>0$.

3.设$f(x)$在(a,b)上连续,证明$|f(x)|$在(a,b)上也连续,并且问其逆命题是否成立?

证任取 $x_0\in(a,b)$, f在x_0连续.任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$使得当$|x-x_0|<\delta$时

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,此时$||f(x)|-|f(x_0)||\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,故$|f|$在$x_0$连续.其逆命题

不真,例如$f(x)=\begin{cases}1, x\text{是有理数}\\-1, x\text{是无理数}\end{cases}$处处不连续,但是$|f(x)|\equiv 1$处处连续.

4. 适当地选取a, 使下列函数处处连续:

(1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x^2}, & x<0,\\ a+x & x\ge 0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\ge 1,\\ a\arccos\pi x, & x<1.\end{cases}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\sqrt{1+x^2}=1=f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=f(0)=a=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\ln(1+x)=\ln 2=f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}a\arccos\pi x=-a=f(1)=\ln 2$,

$a=-\ln 2$.

5.利用初等函数的连续性及定理3求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{x}=\cos\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{x}=\cos 0=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 2}x^{\sqrt{x}}=2^{\sqrt{2}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin 2x}{\sin 3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}}=e^{\frac{2}{3}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{\sqrt{x^4+8}}{x^2+1}=\arctan\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+8}}{x^2+1}=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

$$(5)\lim_{x\to\infty}\sqrt{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|\right]}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3|x|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}\right]}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-2/x^2}}\right]}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

6.设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}) f(x)^{g(x)}=a^b$.

证 $\lim\limits_{x\to x_0}) f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0})e^{(\ln f(x))g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[(\ln f(x))g(x)]}=e^{b\ln a}=a^b$.

7.指出下列函数的间断点及其类型,若是可去间断点,请修改函数在该点的函数值,使之称为连续函数:

(1) $f(x)=\cos\pi(x-[x])$,间断点 $n\in\mathbf{Z}$, 第一类间断点.

(2) $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$,间断点 $n\pi, n\in\mathbf{Z}$, 第一类间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\neq 1,\\ 1/2, x=1.\end{cases}$ 间断点 $x=1$, 第一类间断点.

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, 0\le x\le 1\\ \sin\dfrac{\pi}{x-1}, 1<x\le 2,\end{cases}$ 间断点 $x=1$, 第二类间断点.

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}, 0\le x\le 1,\\ x, 1<x\le 2,\\ \dfrac{1}{1-x}, 2<x\le 3.\end{cases}$ 间断点 $x=2$, 第一类间断点.

8.设 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数,而 $y=g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义,但在一点 x_0 处间断.问函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 及 $\varphi(x)=f(x)g(x)$ 在 x_0 点是否一定间断?

解 $h(x)=f(x)+g(x)$ 在 x_0 点一定间断. 因为如果它在 x_0 点连续, $g(x)=(f(x)+g(x))-f(x)$ 将在 x_0 点连续, 矛盾. 而 $\varphi(x)=f(x)g(x)$ 在 x_0 点未必间断. 例如 $f(x)\equiv 0, g(x)=D(x)$.

习题 1.6

1.证明:任一奇数次实系数多项式至少有一实根.

证 设$P(x)$是一奇数次实系数多项式,不妨设首项系数是正数,则$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$,存在$A,B,A<B,P(A)<0,P(B)>0$,$P$在$[A,B]$连续,根据连续函数的中间值定理,存在$x_0\in(A,B)$,使得$P(x_0)=0$.

2.设$0<\varepsilon<1$,证明对于任意一个$y_0\in\mathbf{R}$,方程$y_0=x-\varepsilon\sin x$有解,且解是唯一的.

证 令$f(x)=x-\varepsilon\sin x$, $f(-|y_0|-1)=-|y_0|-1+\varepsilon<-|y_0|\le y_0$,
$f(|y_0|+1)\ge|y_0|+1-\varepsilon>|y_0|\ge y_0$, f在$[-|y_0|-1,|y_0|+1]$连续,由中间值定理,存在$x_0\in[-|y_0|-1,|y_0|+1]$, $f(x_0)=y_0$.设$x_2>x_1$,
$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1-\varepsilon(\sin x_2-\sin x_1)\ge x_2-x_1-\varepsilon|x_2-x_1|>0$,故解唯一.

3.设$f(x)$在(a,b)连续,又设$x_1,x_2\in(a,b)$, $m_1>0,m_2>0$,证明存在$\xi\in(a,b)$使得
$$f(\xi)=\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}.$$

证 如果$f(x_1)=f(x_2)$,取$\xi=x_1$即可.设$f(x_1)<f(x_2)$,则
$$f(x_1)=\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_1)}{m_1+m_2}\le\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}\le\frac{m_1f(x_2)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}=f(x_2),$$
在$[x_1,x_2]$上利用连续函数的中间值定理即可.

4.设$y=f(x)$在$[0,1]$上连续且$0\le f(x)\le1,\forall x\in[0,1]$.证明在存在一点$t\in[0,1]$使得$f(t)=t$.

证 $g(t)=f(t)-t$, $g(0)=f(0)\ge0$, $g(1)=f(1)-1\le0$.如果有一个等号成立,取t为0或1.如果等号都不成立,则由连续函数的中间值定理,存在$t\in(0,1)$,使得$g(t)=0$,即$f(t)=t$.

5.设$y=f(x)$在$[0,2]$上连续,且$f(0)=f(2)$.证明在$[0,2]$存在两点x_1与x_2,使得$|x_1-x_2|=1$,且$f(x_1)=f(x_2)$.

证 令$g(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in[0,1]$.
$g(0)=f(1)-f(0)$, $g(1)=f(2)-f(1)=f(0)-f(1)=-g(0)$.如果$g(0)=0$,则$f(1)=f(0)$,取$x_1=0,x_2=1$.如果$g(0)\ne0$,则$g(0),g(1)$异号,由连续函数的中间值定理,存在$\xi\in(0,1)$使得$g(\xi)=f(\xi+1)-f(\xi)=0$,取$x_1=\xi,x_2=\xi+1$.