

《SE-103 线性代数》期末试题参考答案 (B)

1.

(1) 10; (2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix};$ (3) $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda - 6;$ (4) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};$

(5) $(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

2. (1) 错误, 当 $m=n$ 时才是一一对应的映射。

(2) 错误, 因为矩阵的行阶梯形式并不唯一。

(3) 错误, 因为例如令 A 和 B 为两个不同的 2 阶置换矩阵, 则 $(A+B)$ 不可逆。

(4) 正确, 因为两者有相同的特征多项式。

(5) 错误, 例如单位矩阵是对称的, 但是没有不同的特征值。

3.

(1) (过程正确 5 分, 计算正确 2 分)

S 的面积是 $\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = 14$, $\det A = 2$, 所以根据第 3 章定理 10 可知, 线性变换

后 S 的面积是 $2 \times 14 = 28$.

(2) (各个基 3 分, 其中过程正确 2 分, 结果正确 1 分)

根据题意可知, 有 $T(1)=3+5t$, $T(t)=-2t+4t^2$, $T(t^2)=t^2$, 所以它对应以 B 为底的变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) (特征值求解 6 分, 其中每个特征值 1 分, 对应特征向量 2 分; 矩阵对角化分解 2 分; 最后计算结果 2 分, 没有化简则只给 1 分)

根据题意可知, 由于原矩阵是下三角阵, 所以其特征值为主对角线上的元素, 即 a 和 b 。

代入后分别计算得其对应特征向量为 $v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以原矩阵可以对角化为

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3(a-b) & b \end{pmatrix} = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

所以有

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3(a-b) & b \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 3(a^k - b^k) & b^k \end{pmatrix}$$

(4) (计算过程正确 5 分, 计算结果正确 2 分)

根据最小二乘法可知, 方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的最小二乘解满足方程

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

又因为

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

解得 $x_1 = 0.9$, $x_2 = 0.4$, 即为所求方程的最小二乘解。

4. (1) (充分性与必要性证明各占 5 分)

证: 记线性变换 T 的标准矩阵为 A , 则由于 T 是 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^n 的满射, 所以 A 可逆是其充分必要条件。根据第二章定理 9 可知, 线性变换 T 可逆也是 A 可逆充分必要条件。

(2) (判断 3 分, 理由说明 6 分)

解: 一定有解。因为记原线性方程组的系数矩阵为 A , 则由题意可知 A 是一个 5×6 的矩阵且原线性方程组的非平凡解中只有一个变量非零; 所以 $\dim \text{Nul } A = 1$ 。因此根据秩定理可知 $\dim \text{Col } A = \text{rank } A = 6 - 1 = 5$, 而 \mathbb{R}^5 中只有它本身作为子集时维数才是 5。这表示 $\text{Col } A$ 就是 \mathbb{R}^5 , 即 A 为系数矩阵的任意一个线性方程组都是相容的。

5. 证:

记矩阵 A 的特征值 λ 对应的特征向量是 \vec{v} , 则根据定义可知 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, 所以有

$$p(A)\vec{v} = (c_0 + c_1 A + \cdots + c_n A^n)\vec{v} = (c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n)\vec{v} = p(\lambda)\vec{v}$$

这表示 $p(\lambda)$ 就是 $p(A)$ 的一个特征值。