中山大學 本科生考试草稿纸 2019/5/7—39.

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条:"考试作弊者不授予学士学位。"

P.111.7 证:(必要性)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\{\Delta x\}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

而 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,ξ_i 是任意的,$f(\xi_i)$ 也是任意的,

从而,可取 $f(\xi_i)=M_i$,有 $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i$

也可取 $f(\xi_i)=m_i$,有 $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i$

从而 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x$ 与 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i$ 存在且相等。

(充分性)~~如果~~ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x\overset{记}{=\!=}I$.

时 $\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x$

则 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i\le\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i$

从而,由夹逼原理可得:$I=\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。