中山大學 本科生考试草稿纸 2012 16/4

P.223.3. 证明：若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛；反之不一定成立。举例说明。

证：对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，

从而，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，且 $u_n > 0$

并有：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1} = 0$

即 $0 < \frac{u_n^2}{u_n} < 1$

$0 < u_n^2 < u_n$

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛。

或由 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 < 1$ 亦由比较判别法的极限形式，可得级数收敛。

反之不成立。

举例：取 $v_n = \frac{1}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，

但是 $v_n^2 = \frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛。