P.180.4 应用拉格朗日中值定理，证明下列不等式。 2011 8/7 —82.

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

证： $\sin x-\sin y=\cos\xi\cdot(x-y)$ ， ξ 在 x 与 y 之间。

$|\sin x-\sin y|=|\cos\xi||x-y|\le|x-y|$.

(2) $|\tan y-\tan x|\ge|y-x|$ ， $x,y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

证： $\tan y-\tan x=\sec^2\xi\cdot(y-x)=\frac{1}{\cos^2\xi}(y-x)$ ， $-\frac{\pi}{2}<\xi<\frac{\pi}{2}$

$|\tan y-\tan x|=\frac{1}{\cos^2\xi}|y-x|\ge\frac{1}{\cos^2 0}|y-x|=|y-x|$.

(3) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ ， $0<a<b$

证：对 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上用拉格朗日中值定理有：

$$\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a)\qquad(a<\xi<b)$$

而 $\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$

从而 $\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}\Rightarrow\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

P.180.5. 证明：多项式 $p(x)=(x^2-1)\cdot(x^2-4)$ 的导数的三个根都是实根，并指出它们的范围。

证： $p(x)=(x^2-1)\cdot(x^2-4)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

$p(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，可导，并 $p(-2)=p(-1)=p(1)=p(2)=0$

由罗尔定理有 $\xi_1\in(-2,-1)$, $\xi_2\in(-1,1)$, $\xi_3\in(1,2)$

使 $p'(\xi_1)=0$, $p'(\xi_2)=0$, $p'(\xi_3)=0$

即 $p'(x)$ 有三个根 ξ_1,ξ_2,ξ_3。