第四章　非正弦周期电流电路

4.1　验证图 4.1.1(b)所示三角波电压的傅里叶级数展开式，并求出当 U_m=123V 时的有效值。

解：三角波电压在一个周期（$-\pi,\pi$）内的表示式为

$$u(t)=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi}U_m\omega t-2U_m & -\pi\le\omega t\le-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{2}{\pi}U_m\omega t & -\dfrac{\pi}{2}\le\omega t\le\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{2}{\pi}U_m\omega t+2U_m & \dfrac{\pi}{2}\le\omega t\le\pi\end{cases}$$

由于 $u(t)$ 是奇函数，故其傅里叶级数展开式中，系数 A_0=0，C_{km}=0

$$B_{km}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(t)\sin k\omega td(\omega t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{2U_m}{\pi}(\omega t+\pi)\sin k\omega td(\omega t)+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2U_m}{\pi}\omega t\sin k\omega td(\omega t)+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{2U_m}{\pi}(\omega t-\pi)\sin k\omega td(\omega t)$$

对第一个积分式作变量变换后，与第三个积分式相同，故

$$B_{km}=\frac{4U_m}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\omega t+\pi)\sin k\omega td(\omega t)+\frac{2U_m}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\omega t\sin k\omega td(\omega t)$$

$$=-\frac{4U_m}{k\pi^2}\left[(-\omega t+\pi)\cos k\omega t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos k\omega td(\omega t)\right]-\frac{2U_m}{k\pi^2}\left[\omega t\cos k\omega t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos k\omega td(\omega t)\right]$$

$$=-\frac{4U_m}{k\pi^2}\left[\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k}\left(\sin k\pi-\sin k\frac{\pi}{2}\right)\right]-\frac{2U_m}{k\pi^2}\left[2\times\frac{\pi}{2}\cos k\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\left(\sin k\frac{\pi}{2}\right)\times 2\right]$$

$$=\frac{8U_m}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{8U_m}{\pi^2}\dfrac{(-1)^{l+1}}{(2l-1)^2} & k=2l-1\\ & l\text{为自然数}\\ 0 & k=2l\end{cases}$$

$$u(t)=\frac{8U_m}{\pi^2}\left[\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t+\cdots+\frac{(-1)^{l+1}}{(2l-1)^2}\sin(2l-1)\omega t+\cdots\right]$$

U_m=123V 时

$$u(t)=100(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin\omega t+\cdots)V$$

各谐波分量有效值为

$$U_1=\frac{100}{\sqrt{2}}，\ U_3=\frac{100}{9\sqrt{2}}，\ U_5=\frac{100}{25\sqrt{2}}$$

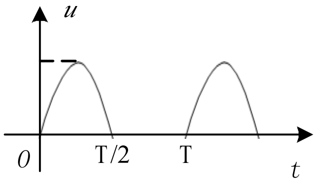
总有效值

$$U=\sqrt{U_1^2+U_3^2+\cdots}=\frac{100}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\cdots}=71.2V$$

4.2　求题 4.2 图所示半波整流电压的平均值和有效值。

解：半波整流电压在一个周期内可表示为

$$u(t)=\begin{cases}U_m\sin\frac{2\pi}{T}t & 0\le t\le\frac{T}{2}\\ 0 & \frac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$$



题4.2图

电压平均值

$$U_0=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}U_m\sin\frac{2\pi}{T}tdt$$

$$=\frac{U_m}{T}\frac{T}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{T}t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{U_m}{\pi}=0.32U_m$$

电压有效值

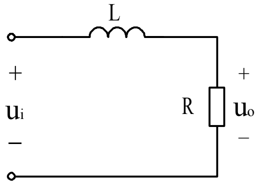
$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}U_m^2\sin^2\frac{2\pi}{T}tdt}$$

$$=\sqrt{\frac{U_m^2}{2T}\int_0^{\frac{T}{2}}(1-\cos\frac{4\pi}{T}t)dt}=\frac{U_m}{2}=0.5U_m$$

4.3　在题 4.3 图所示电路中，L=1H，R=100Ω， u_i=20+100sinωt+70sin3ωt，基波频率为 50Hz，求输出电压 u_0 及电路消耗的功率。

解：电感对直流相当于短路，故输出电压中直流分量 U_0=20V，由分压公式得，u_0 中基波分量为

$$\dot{U}_{1m}=\frac{R}{R+j\omega L}100\angle 0°=\frac{100\times100}{100+j314\times1}=30.3\angle-72.3°V$$



题4.3图

电流中基波分量为 $\dot{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\dot{U}_{1m}}{R} = \frac{0.303}{\sqrt{2}} \angle -72.3° A$

三次谐波分量为

$$\dot{U}_{3m} = \frac{R}{R + j3\omega L} 70\angle 0° = \frac{100 \times 70}{100 + j314 \times 3} = 7.4\angle -83.9° V$$

$$\dot{I}_3 = \frac{0.074}{\sqrt{2}} \angle -83.9° A$$

$$u_0 = 20 + 30.3\sin(\omega t - 72.3°) + 7.4\sin(3\omega t - 83.9°) V$$

电路消耗的功率为各谐波消耗的功率之和

$$P = P_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2$$
$$= \frac{20^2}{100} + \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{0.303}{\sqrt{2}} \cos 72.3° + \frac{70}{\sqrt{2}} \times \frac{0.074}{\sqrt{2}} \cos 83.9°$$
$$= 4 + 4.6 + 0.3 = 8.9W$$

或为电阻 R 消耗的平均功率

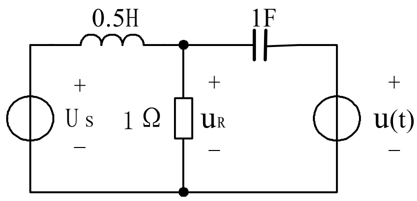
$$P = P_0 + P_1 + P_3 = \frac{20^2}{100} + \left(\frac{30.3}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{100} + \left(\frac{7.4}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{100} = 8.9W$$

4.4　在题 4.4 图所示电路中，U_S=4V，u(t)=3sin2tV，求电阻上的电压 u_R。

解：利用叠加定理求解较方便

直流电压源 U_s 单独作用时

$$u'_R = U_S = 4V$$



题4.4图

交流电压源 $u(t)$ 单独作用时

$$X_L = \omega L = 2 \times 0.5 = 1\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}\Omega$$

电阻与电感并联支路的等效阻抗为

$$\frac{R \times JX_L}{R + jX_L} = \frac{j}{1 + j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45° \Omega$$

故 $$U''_R = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ - j\frac{1}{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = 3\angle 45^\circ V$$

$$u''_R = 3\sqrt{2}\sin(2t + 45^\circ)V$$

$$u_R = u'_R + u''_R = 4 + 3\sqrt{2}\sin(2t + 45^\circ)V$$

4.5　在 RLC 串联电路中，已知 R=10Ω，L=0.05H，C=22.5μF，电源电压为 u(t)=60+180sinωt+60sin(3ωt+45°)+20sin(5ωt+18°),，基波频率为 50H_Z，试求电路中的电流、电源的功率及电路的功率因数。

解：RLC 串联电路中，电容对直流相当于开路，故电流中直流分量为零。

对基波

$$X_L = \omega L = 314 \times 0.05 = 15.7\Omega,\ X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 22.5 \times 10^{-6}} = 141.5\Omega$$

$$Z_1 = R + j(X_L - X_C) = 10 + j(15.7 - 141.5) = 126\angle -85.3^\circ\Omega$$

基波电流的幅值相量为

$$\dot{I}_1 = \frac{180\angle 0^\circ}{126\angle -85.3^\circ} = 1.43\angle 85.3^\circ A$$

对三次谐波

$$X_L = 3\omega L = 47.1\Omega，\ X_C = 47.1\Omega，\ Z_3 = 10\Omega$$

三次谐波电流的幅值相量为

$$\dot{I}_3 = \frac{60\angle 45^\circ}{10} = 6\angle 45^\circ A$$

对五次谐波

$$X_L = 5\omega L = 78.5\Omega，\ X_C = 28.2\Omega$$

$$Z_5 = R + j(X_L - X_C) = 10 + j(78.5 - 28.2) = 51.2\angle 78.8^\circ\Omega$$

五次谐波电流的幅值相量为

$$\dot{I}_5 = \frac{20\angle 18^\circ}{51.2\angle 78.8^\circ} = 0.39\angle -60.8^\circ A$$

总电流为

$$i(t) = 1.43\sin(\omega t + 85.3^\circ) + 6\sin(3\omega t + 45^\circ) + 0.39\sin(5\omega t - 60.8^\circ)A$$

电源的功率

$$P = P_1 + P_3 + P_5 = I_1U_1\cos\varphi_1 + I_3U_3\cos\varphi_3 + I_5U_5\cos\varphi_5$$

$$= \frac{1}{2}[1.43\times180\cos(-85.3°) + 6\times60\cos0° + 0.39\times20\cos78.8°] = 191W$$

电路的无功功率

$$Q = Q_1 + Q_3 + Q_5 = I_1U_1\,sin\varphi_1 + I_3U_3\,sin\varphi_3 + I_5U_5\,sin\varphi_5$$

$$= \frac{1}{2}[1.43\times180\,sin(-85.3°) + 0 + 0.39\times20\,sin78.8°] = -124.4\,var$$

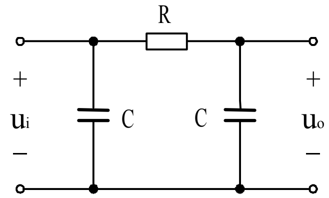
功率因数

$$\lambda = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{191}{\sqrt{191^2+124^2}} = 0.84$$

4.6 在题 4.6 图所示 π 型 RC 滤波电路中，u_i 为全波整流电压，基波频率为 50Hz，如要求 u_0 的二次谐波分量小于直流分量的 0.1%，求 R 与 C 所需满足的关系。

解：全波整流电压为

$$u_i = \frac{2U_m}{\pi}\left(1-\frac{2}{3}\cos2\omega t-\frac{2}{15}\cos4\omega t+\cdots\right)V$$



题4. 6图

显然，u_0 中的直流分量与 u_i 中的直流分量相等，为 $\frac{2U_m}{\pi}V$

对二次谐波，其幅值为

$$U_{02m} = \frac{|j\frac{1}{2\omega C}|}{|R+\frac{1}{j2\omega C}|}\frac{4U_m}{3\pi} = \frac{\frac{1}{2\omega C}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{4\omega^2C^2}}}\frac{4U_m}{3\pi} = \frac{4U_m}{3\pi\sqrt{4\omega^2R^2C^2+1}}$$

按要求有

$$\frac{4U_m}{3\pi\sqrt{4\omega^2R^2C^2+1}} < 0.1\%\times\frac{2U_m}{\pi}$$

$$\sqrt{4\omega^2R^2C^2+1} > \frac{2000}{3}$$

即

$$RC > \frac{2000}{2\times314\times3} = 1.06$$