初等数论
第四章　二次剩余

卢 伟
Email: luwei3@mail.sysu.edu.cn

中山大学　数据科学与计算机学院

下面考虑模为素数的二次同余方程：

$$ay^2 + by + c \equiv 0 \bmod p$$

其中$p \nmid a$.
如果p为2的话，很容易验证这个方程是否有解(将0和1直接代入检查是否成立即可)，所以我们下面讨论时都假设$p > 2$.
$p \nmid a \Longrightarrow p \nmid 4a$，所以上述二次同余方程和

$$ay^2 + by + c \equiv 0 \bmod p$$

等价(即解相同)，而此式也就是：

$$(2ay + b)^2 \equiv (b^2 - 4ac) \bmod p$$

这样，我们就一般考虑形如：

$$x^2 \equiv a \bmod p$$

的同余方程.
设素数$p > 2$, 如果$x^2 \equiv a \bmod p$有解，则称a是一个模p的平方剩余(二次剩余). 否则，称a是一个模p的平方非剩余(二次非剩余).

比如，$1^2 \equiv 1 \bmod 3$，所以1是模3的平方剩余
0,1,2都不能使得$x^2 \equiv -1 \bmod 3$成立，所以-1是一个模3的平方非剩余
$2^2 \equiv 4 \bmod 7$，所以4是模7的平方剩余
$4^2 \equiv 2 \bmod 7$，所以2是模7的平方剩余
0,1,2,3,4,5,6 均不能使得$x^2 \equiv 5 \bmod 7$成立，所以5是模7的平方非剩余.

对方程$x^2 \equiv a \bmod p$，如果$p|a$, 假设这个方程有解x_0的话，即$p|(x_0^2 - a)$,就有$p|x_0^2$,从而$p|x_0$;

因为否则的话，就是$(p, x_0) = 1$，假设$x_0 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$，从而$p \neq p_i, i = 1, 2, \cdots, s$，并且$x_0^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_s^{2a_s}$，从而$(p, x_0^2) = 1$，

也就是说如果$p|a$,则同余方程$x^2 \equiv a \bmod p$只有唯一解$x \equiv 0 \bmod p$.所以我们下面讨论中都假设$(a, p) = 1 : x^2 \equiv a \bmod p$

定理

在模p的一个简化剩余系中，恰有$\frac{p-1}{2}$个模p二次剩余，恰有$\frac{p-1}{2}$个模p二次非剩余；如果a是模p二次剩余的话，$x^2 \equiv a \bmod p\,((a,p)=1)$的解数为2.

证明：以简化剩余系$\mathcal{A}=\{1,2,3,\cdots,p-2,p-1\}$来考虑(其他简化剩余系类似)，我们要看看$a$从这个集合取值时，其中有多少个是二次剩余.

而要看a取值后是否是二次剩余也就是看在模p的任意一个完全剩余系中是否有元素x，使得$x^2 \equiv a \bmod p$成立，我们只需要看完全剩余系$\mathcal{B}=\{-\frac{p-1}{2},-\frac{p-1}{2}+1,-\frac{p-1}{2}+2,\cdots,-1,0,1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}-1,\frac{p-1}{2}\}$ 即可，这些数字中，0肯定不是方程的解，

所以只需要考虑$\mathcal{C}=\{-\frac{p-1}{2},-\frac{p-1}{2}+1,-\frac{p-1}{2}+2,\cdots,-1,1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}-1,\frac{p-1}{2}\}$这些数即可.

j从$\mathcal{C}$中任意取值都有$(-j)^2 \equiv j^2 \bmod p$($j^2$的值在模$p$意义下自然在集合$\mathcal{A}$内)，这样$a$是模$p$二次剩余当且仅当$a \equiv 1^2 \bmod p$，或$a \equiv 2^2 \bmod p$，或$a \equiv 3^2 \bmod p$，$\cdots$，或$a \equiv \frac{p-1}{2}^2 \bmod p$，也就是说$\mathcal{A}$中有可能成为二次剩余的数至多是$\frac{p-1}{2}$个，如果这些平方的结果两两不同余，就意味着$\mathcal{A}$中确实是二次剩余的数有$\frac{p-1}{2}$个.

证明(续):

而当$1 \le i, j \le \frac{p-1}{2} (i \neq j)$时,$i^2 \not\equiv j^2 \bmod p$(否则$p|(i-j)$或$p|(i+j)$,不可能),所以这也就给出了模$p$的全部二次剩余,一共$\frac{p-1}{2}$个. 简化剩余系中剩下的$\frac{p-1}{2}$个数也就是模$p$的二次非剩余了.

根据这个分析,当a是模p的二次剩余时,在$1 \sim \frac{p-1}{2}$之间一定有一个且仅有一个i使得$i^2 \equiv a \bmod p$成立.

这样$x^2 \equiv a \bmod p$的解就是$x \equiv \pm i \bmod p$,解数为2.

$\diamond$

比如求$p=11$的二次剩余和二次非剩余：

$\mathcal{A}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$\mathcal{C}=\{1,2,3,4,5\}$

j	1	2	3	4	5
$d\equiv j^2 \bmod p$	1	4	9	5	3

所以，$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$中1,3,4,5,9是二次剩余，2,6,7,8,10是二次非剩余.

根据这个表还可以看出$x^2\equiv 9 \bmod p$的解是$\pm 3 \bmod 11$.

定理

a是模p的平方剩余 $\iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$
a是模p的平方非剩余 $\iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$

证明：先说明$\forall a, s.t., (a,p)=1$,则$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$与$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$有且只有一个成立:
这是因为我们有

$$(a,p)=1 \implies a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

从而

$$(a^{\frac{p-1}{2}}-1)(a^{\frac{p-1}{2}}+1) \equiv 0 \bmod p$$

即

$$p|(a^{\frac{p-1}{2}}-1)(a^{\frac{p-1}{2}}+1)$$

这样要么

如果两个都成立，那么p|2，明显不可能

$$p|(a^{\frac{p-1}{2}}-1) \quad (i.e., a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p)$$

要么

$$p|(a^{\frac{p-1}{2}}+1) \quad (i.e., a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p)$$

证明(续1)：
这就是说
$p|(a^{\frac{p-1}{2}}-1)$ 和$p|(a^{\frac{p-1}{2}}+1)$ 至少有一个成立.

但二者不能同时成立，这是因为:设t为任意整数，如果同时有$p|(t-1), p|(t+1)$, 则有$t=kp+1=k'p-1$,即有$p(k'-k)=2$,从而$p|k'-k|=2$，但我们已经假设了p是≥ 3的素数，所以等式$p|k'-k|=2$不可能成立.

这样我们知道，对于任意的$a, p\nmid a: a^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \bmod p$与$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \bmod p$有且仅有一个成立，所以如果我们能够证明"$a$是模$p$的平方剩余 $\Longleftrightarrow$ $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \bmod p$” ,那么自然有“$a$是模$p$的平方非剩余 $\Longleftrightarrow$ $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \bmod p$"

证明(续2)：

先证明必要性"$\Longrightarrow$":

如果a是模p的二次剩余，则必有x_0使得$x_0^2 \equiv a \bmod p$成立，因而有$x_0^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$成立，又

$$p \nmid a \Longrightarrow p \nmid x_0$$

(否则就有$p|x_0^2$)

$$p \nmid x_0 \Longrightarrow x_0^{p-1} \equiv 1 \bmod p \Longrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$$

下**面**证明充分性"$\Longleftarrow$":

如果$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$,这时必有$p \nmid a$,否则,$p|a^{\frac{p-1}{2}}$.从而$(p,a)=1$,即$a$是模$p$的一个简化剩余.

任取整数$c(\neq 0)$,$-\frac{p-1}{2} \leq c \leq \frac{p-1}{2}$,考虑同余式$cx \equiv a \bmod p$,

我们知道如果x遍历简化剩余系$\mathcal{A} = \{-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-1}{2}+1, -\frac{p-1}{2}+2, \cdots, -1, 1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}-1, \frac{p-1}{2}\}$, 则$cx$也会遍历模$p$的一个简化剩余系.

这就意味着在集合$\mathcal{A}$中存在唯一一个元素(记作x_e)使得$cx_e \equiv a \bmod p$.

证明(续3)：
如果a不是二次剩余的话，则有$x_e \neq c$.
而$c(\neq 0)$可以取$-\frac{p-1}{2} \sim \frac{p-1}{2}$的任意数。这样可以将$\{-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-1}{2}+1, -\frac{p-1}{2}+2, \cdots, -1, 1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}-1, \frac{p-1}{2}\}$的$p-1$个数按照$c, x_c$分为一对对，每一对都满足$cx_c \equiv a \bmod p$,从而：

$$(-\frac{p-1}{2})\cdot(-\frac{p-1}{2}+1)\cdot(-\frac{p-1}{2}+2)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(\frac{p-1}{2}-1)\cdot(\frac{p-1}{2}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$$

另外，

$$1 \equiv 1 \bmod p$$

$$2 \equiv 2 \bmod p$$

$$\cdots$$

$$\frac{p-1}{2} \equiv \frac{p-1}{2} \bmod p$$

$$\frac{p-1}{2}+1 \equiv -\frac{p-1}{2} \bmod p$$

$$\frac{p-1}{2}+2 \equiv -\frac{p-3}{2} \bmod p$$

$$\cdots$$

$$p-1 \equiv -1 \bmod p$$

证明(续4)：
所以有：

$$(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot (-\frac{p-1}{2})(-\frac{p-3}{2}) \cdots (-1) \bmod p \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$$

由于已知条件

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$$

从而

$$(p-1)! \equiv 1 \bmod p$$

而由Wilson定理:

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p,$$

所以$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$与已知条件矛盾，故$a$是模$p$的二次剩余.$\diamond$
这个结论被称为欧拉判别条件

示例：判别137是否是模227的二次剩余
根据欧拉判别条件，需要计算：

$$137^{\frac{227-1}{2}} \mod 227$$

即$137^{113} \mod 227$
这可以通过模重复平方计算法得出，最后可得：

$$137^{\frac{227-1}{2}} \equiv -1 \mod 227$$

故137是模227的平方非剩余.

二次剩余小结

考虑模素数二次同余方程：

$$x^2 \equiv a \bmod p \quad ((a,p)=1)$$

1. 定义：二次(平方)剩余，二次(平方)非剩余
2. 定理：在模p的一个简化剩余系中，恰有$\frac{p-1}{2}$个模p二次剩余，恰有$\frac{p-1}{2}$个模p二次非剩余；如果a是模p二次剩余的话，$x^2 \equiv a \bmod p \quad ((a,p)=1)$的解数为2.
3. 欧拉判别条件：
a是模p的平方剩余 $\iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$
a是模p的平方非剩余 $\iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$

根据这个结论：
$a=-1$是模p二次剩余的充要条件是

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$$

左边数字的值只能是±1，如果它为-1的话不可能与1同余，所以只可能为1才能同余，而要$(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$，等价于$\frac{p-1}{2}=2k$，等价于$p=4k+1$，即$p \equiv 1 \bmod 4$.
即：$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$
所以我们有：-1是模p二次剩余的充要条件是$p \equiv 1 \bmod 4$.
比如同余方程$x^2 \equiv -1 \bmod 61$的解数为2，这是因为$p=61$为素数，
且$61=4\times 15+1$,，所以-1是模61的二次剩余，即解数为2.

示例：
判断同余方程$x^2 \equiv 16 \bmod 51$的解数.
由于$51 = 3 \times 17$, 同余方程

$$x^2 \equiv 16 \bmod 51 \qquad (1)$$

和同余方程组

$$\begin{cases} x^2 \equiv 16 \bmod 3 \\ x^2 \equiv 16 \bmod 17 \end{cases} \qquad (2)$$

等价，考虑(1)的解数，只需考虑(2)的解数。

同余方程组(2)又等价于

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \bmod 3 \\ x^2 \equiv -1 \bmod 17 \end{cases} \qquad (2')$$

可使用欧拉判别法判断1是模3的二次剩余(从而第一个同余方程有2个解，可以检查分别是$x \equiv 1 \bmod 3, x \equiv 2 \bmod 3$),
-1是模17的二次剩余(从而第二个同余方程有2个解，可以检查分别是$x \equiv 4 \bmod 17, x \equiv 13 \bmod 17$), 把它们组合在一起就构成4个同余方程：

$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 4 \bmod 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 13 \bmod 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 4 \bmod 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 13 \bmod 17 \end{cases}$$

它们每个都有一个解，所以原来的同余方程(1)有4个解.

示例:

判断同余方程$x^2 \equiv -63 \bmod 187$的解数.

类似上例，可以判断与之等价的同余方程组:

$$\begin{cases} x^2 \equiv -63 \bmod 11 \\ x^2 \equiv -63 \bmod 17 \end{cases}$$

这个同余方程组等价于:

$$\begin{cases} x^2 \equiv 3 \bmod 11 \\ x^2 \equiv 5 \bmod 17 \end{cases} \qquad (2)$$

检查$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8\}$,每个的平方都不与5同余, 所以$x^2 \equiv 5 \bmod 17$无解，

从而, 原同余方程无解。

定理

p是奇素数，$(a_1,p)=1,(a_2,p)=1$，则：

- 如果a_1,a_2都是模p的二次剩余，则a_1a_2也是；
  这是因为$(a_1a_2)^{\frac{p-1}{2}}=a_1^{\frac{p-1}{2}}a_2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \bmod p$
- 如果a_1,a_2都是模p的二次非剩余，则a_1a_2是模p的二次剩余；
  理由同上
- 如果a_1,a_2一个是模p的二次剩余，一个是模p的二次非剩余，则a_1a_2是模p的二次非剩余.
  这是因为$(a_1a_2)^{\frac{p-1}{2}}=a_1^{\frac{p-1}{2}}a_2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \bmod p$

2. 勒让德(Legendre)符号

设p是素数，定义Legendre符号如下：

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & \text{如果}a\text{是模}p\text{的平方剩余}\\ -1 & \text{如果}a\text{是模}p\text{的平方非剩余}\\ 0 & \text{如果}p|a\end{cases}$$

比如

$$0^2\equiv 0 \bmod 5, 1^2\equiv 1 \bmod 5, 2^2\equiv 4 \bmod 5, 3^2\equiv 4 \bmod 5, 4^2\equiv 1 \bmod 5$$

由此

$$(\frac{1}{5})=1,(\frac{4}{5})=1$$

$$(\frac{2}{5})=-1,(\frac{3}{5})=-1$$

$$(\frac{5}{5})=0$$

$(\frac{a}{p})=1 \iff a$是模p的二次剩余;
$(\frac{a}{p})=-1 \iff a$是模p的二次非剩余.

根据二次剩余的欧拉判别条件:

a是模p的平方剩余 $\iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$
a是模p的平方非剩余 $\iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$

有: $(\frac{a}{p}) = 1 \iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$, 以及$(\frac{a}{p}) = -1 \iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$.
这也就是说, 如果p是奇数, $a \in \mathbb{Z}$, 则:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{a}{p}) \bmod p$$

使用此式可以帮助我们计算勒让德符号, 比如:

$$\because 2^{\frac{17-1}{2}} \equiv 1 \bmod 17 \quad \therefore (\frac{2}{17}) = 1$$

即2是模17的二次剩余

$$\because 3^{\frac{17-1}{2}} \equiv -1 \bmod 17 \quad \therefore (\frac{3}{17}) = -1$$

即3是模17的二次非剩余

再如，设p是奇素数:

$$1^{\frac{p-1}{2}} = 1 \Longrightarrow (\frac{1}{p}) = 1$$

$$a = -1, a^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \Longrightarrow (\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

对于奇素数p，可能的情况有两种:

$$p \equiv 1 \bmod 4, \qquad p \equiv 3 \bmod 4$$

对于前者，有$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k+1-1}{2}} = (-1)^{2k} = 1$，从而

$$(\frac{-1}{p}) = 1$$

对于后者，有$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k+3-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$ 从而

$$(\frac{-1}{p}) = -1$$

从而

$$(\frac{-1}{p}) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{if } p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

设p是奇素数:

- $(\frac{a+p}{p}) = (\frac{a}{p})$
  这是因为下面的两个同余式等价(一个的解也是另外一个的解)
  $$x^2 \equiv a + p \bmod p \iff x^2 \equiv a \bmod p$$
  这就意味着a是模p的二次剩余当且仅当$a+p$是模p的二次剩余.
  类似的, $(\frac{a+kp}{p}) = (\frac{a}{p})$
- $a \equiv b \bmod p \Longrightarrow (\frac{a}{p}) = (\frac{b}{p})$
  这是因为
  $$a = kp + b \Longrightarrow (\frac{a}{p}) = (\frac{kp+b}{p}) = (\frac{b}{p})$$
- $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$
  这是因为
  $$(ab)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}}$$
- $(a,p) = 1 \Longrightarrow (\frac{a^2}{p}) = 1$
  由上一条即得. (如果$p|a$的话,$(\frac{a^2}{p}) = 0$)

根据以上结论, 再由算术基本定理, 我们知道只要能够计算$(\frac{-1}{p})$,$(\frac{2}{p})$,$(\frac{q}{p})$,我们就能够计算任意的$(\frac{a}{p})$

引理（Gauss引理）

设p是奇素数, $(a,p)=1, 1\le j\le \frac{p-1}{2}, t_j=(a\cdot j \bmod p)$(即$0<t_j<p$), 以$m$表示这$\frac{p-1}{2}$个$t_j$中大于$\frac{p}{2}$的$t_j$的个数, 则$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^m$

事实上, 因为$p\nmid a$, 对任意的$1\le j<i\le \frac{p-1}{2}$, 有$p\nmid [(j\pm i)a]$, 即

$$t_j\not\equiv \pm t_i \bmod p$$

以$r_1,r_2,\ldots,r_m$表示所有$t_j(1\le j\le \frac{p-1}{2})$中大于$\frac{p}{2}$的数, 以$s_1,s_2,\ldots,s_k$表示所有$t_j(1\le j\le \frac{p-1}{2})$中小于$\frac{p}{2}$的数($k+m=\frac{p-1}{2}$), 即:

$$\frac{p}{2}<r_i<p, 1\le s_j<\frac{p}{2}$$

从而

$$1\le p-r_i<\frac{p}{2}$$

显然有

$$1 \le p - r_1, p - r_2, \ldots, p - r_m < \frac{p}{2}$$

由$1 \le j < i < \frac{p}{2}$, $t_j \not\equiv \pm t_i \bmod p$ 我们知道

$$s_j \not\equiv p - r_i \bmod p, (j = 1, 2, \ldots, k, i = 1, 2, \ldots, n)$$

从而$\frac{p-1}{2}$个数

$$s_1, s_2, \ldots, s_k, p - r_1, p - r_2, \ldots, p - r_m$$

恰好是

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$$

的一个排列, 从而

$$t_1 t_2 \cdots t_{\frac{p-1}{2}} \equiv 1a \cdot 2a \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2} a \equiv s_1 s_2 \ldots s_k r_1 r_2 \ldots r_m$$

$$\equiv (-1)^m s_1 s_2 \ldots s_k (p - r_1)(p - r_2) \ldots (p - r_m) \equiv (-1)^m 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2}$$

即得

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^m$$

这个结论在数论中被称为Gauss引理

Gauss引理的一个直接应用就是计算$(\frac{2}{p})$

- $(\dfrac{2}{p}) = \begin{cases} 1 & p \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & p \equiv \pm 3 \bmod 8 \end{cases}$

  采用Gauss引理中的符号，取$a = 2$，可以看到

$$1 \le j < \frac{p}{4} \Longrightarrow 1 \le t_j = 2j < \frac{p}{2}$$

$$\frac{p}{4} \le j < \frac{p}{2} \Longrightarrow \frac{p}{2} \le t_j = 2j < p$$

所以

$$m = \frac{p-1}{2} - [\frac{p}{4}]$$

从而

$$m = \begin{cases} l & p = 4l + 1 \\ l + 1 & p = 4l + 3 \end{cases}$$

从而

$$(\frac{2}{p}) = (-1)^m = \begin{cases} 1 & p \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & p \equiv \pm 3 \bmod 8 \end{cases}$$

此即所证：当且仅当素数$p \equiv \pm 1 \bmod 8$时，2才是模p的二次剩余. ⋄

对证明过程的进一步分析，$t_j = (ja \bmod p)(i.e., 0 < t_j < p)$ 利用符号整数表示就是：

$$ja = p[\frac{ja}{p}] + t_j, \quad (1 \le j \le \frac{p-1}{2})$$

两边对j求和得

$$a\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = p\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{ja}{p}] + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} t_j = pT + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} t_j$$

而

$$\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} t_j = s_1 + \ldots + s_k + r_1 + \ldots + r_m$$

$$= s_1+\ldots+s_k+(p-r_1)+\ldots+(p-r_m)-mp+2(r_1+\ldots+r_m) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j-mp+2(r_1+\ldots+r_m)$$

从而

$$a \cdot \frac{\frac{p-1}{2}\cdot(1+\frac{p-1}{2})}{2} = pT + \frac{\frac{p-1}{2}\cdot(1+\frac{p-1}{2})}{2} - mp + 2(r_1+\ldots+r_m)$$

$$\frac{p^2-1}{8}(a-1) = p(T-m) + 2(r_1+\ldots+r_m), i.e., \frac{p^2-1}{8}(a-1) \equiv T + m \bmod 2$$

(此处利用等差数列求和公式$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$)

$p(T - m) = T - m \bmod 2$

$T - m = T + m \bmod 2$

易见，当$a=2, 1\le j\le \frac{p-1}{2}$时，$1\le 2j\le p-1$

$$[\frac{2j}{p}]=0$$

从而

$$T=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{2j}{p}]=0$$

从而当$a=2$时，

$$m\equiv \frac{p^2-1}{8} \mod 2$$

这样就有

$$(\frac{2}{p})=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

当a是奇数时:

$a-1$是偶数,

$$\frac{p^2-1}{8}(a-1) \equiv T+m \bmod 2 \Longrightarrow 0 \equiv T+m \bmod 2$$

因为$T+m \equiv T-m \bmod 2$, 所以有

$$0 \equiv T-m \bmod 2, \quad i.e., T \equiv m \bmod 2$$

即

$$\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{ja}{p}] \equiv m \bmod 2, \quad i.e., m = 2k + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{ja}{p}]$$

$(\frac{a}{p}) = (-1)^m \Longrightarrow$

$$(\frac{a}{p}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{ja}{p}]}$$

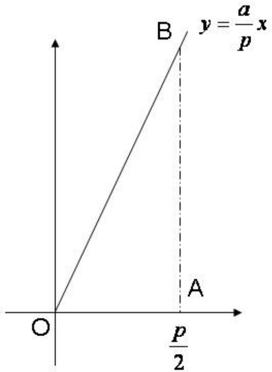
如果a也是奇素数(比如记之为q), 则我们也可以考虑$(\frac{p}{q})$, 同上,应该有

$$(\frac{p}{q}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{jp}{q}]}$$

假设a是正数，继续来看

$$T=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{ja}{p}]$$

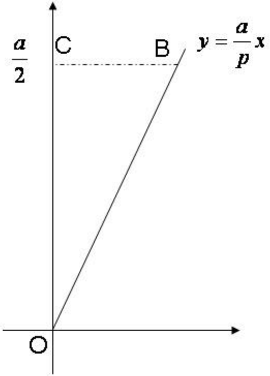
的意义:



可见，$[\frac{a}{p}\cdot 1],[\frac{a}{p}\cdot 2],\ldots,[\frac{a}{p}\cdot\frac{p-1}{2}]$分别是$x$取$1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}$时对应的竖线上的整点(横纵坐标均为整数)的个数，而且AB上没有整点(因为$\frac{p}{2}$不是整数)，OB上除O外无整点(因为$\frac{a}{p}$不是整数)，这样T就是三角形OAB内部的整点的个数.

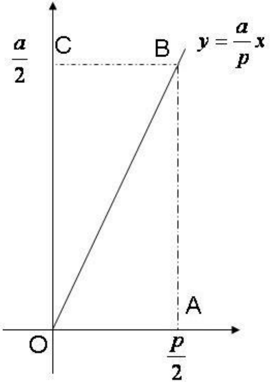
如果a也是奇素数，则我们也可以考虑$(\frac{p}{a})$，同上，应该有$(\frac{p}{a}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{a-1}{2}}[\frac{jp}{a}]}$

记$S = \sum_{j=1}^{\frac{a-1}{2}}[\frac{jp}{a}]$，来看$S$的意义：



可见，$[\frac{p}{a}\cdot 1], [\frac{p}{a}\cdot 2], \ldots, [\frac{p}{a}\cdot\frac{a-1}{2}]$分别是$y$取$1, 2, \ldots, \frac{a-1}{2}$时对应的横线上的整点(横纵坐标均为整数)的个数，而且CB上没有整点(因为$\frac{a}{2}$不是整数)，OB上除O外无整点(因为$\frac{a}{p}$不是整数)，这样S就是三角形OCB内部的整点的个数.

$S+T$也就是矩形$OABC$内部的整点个数:



而这个矩形内部的整点个数显然就是$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}$, 所以,

$$S+T=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}$$

所以a,p都是素数时, $(\frac{a}{p})\cdot(\frac{p}{a})=(-1)^T\cdot(-1)^S=(-1)^{S+T}=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}}$ 这样S就是三角形OCB内部的整点的个数. 这就是有用的Gauss二次互反律

定理（Gauss二次互反律）

$p \neq q$均为奇素数, 则

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

根据这个结论, 两个奇素数p, q:

只要有一个数$\equiv 1 \bmod 4$, 就必有$(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$,

当且仅当他们都是形如$4k+3$形式的数时, 才有$(\frac{p}{q}) = -(\frac{q}{p})$.

利用这个结论与$(\frac{2}{p}), (\frac{-1}{p})$相结合可以计算勒让得符号.

计算$(\frac{137}{227})$
事实上，227是素数，

$$137 \equiv -90 \bmod 227 \Longrightarrow (\frac{137}{227}) = (\frac{-90}{227})$$

$$(\frac{-90}{227}) = (\frac{-1}{227})(\frac{2\cdot 3^2\cdot 5}{227})$$

$$= (-1)(\frac{2}{227})(\frac{3^2}{227})(\frac{5}{227}) \quad (\because (\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}})$$

$$= (-1)(\frac{2}{227})(\frac{5}{227}) \quad (\because p \nmid a \Longrightarrow (\frac{a^2}{p}) = 1)$$

$$= (-1)(-1)(\frac{5}{227}) \quad (\because 227 = 8\cdot 8+3, (\frac{2}{p}) = -1 \text{ if } p \equiv \pm 3 \bmod 8)$$

对于$(\frac{5}{227})$，因为5模4余1，所以$(\frac{5}{227}) = (\frac{227}{5})$，
而$227 \equiv 2 \bmod 5$，所以$(\frac{227}{5}) = (\frac{2}{5}) = -1(\because 5 \equiv -3 \bmod 8)$
最终，$(\frac{137}{227}) = -1$

上述计算$(\frac{137}{227})$其实就是相当于判断同余式$x^2 \equiv 137 \bmod 227$是否有解.

示例: 判断$x^2 \equiv -1 \bmod 365$是否有解? 有的话, 解数多少?
这时无法直接使用勒让得符号的方法, 因为365不是素数, 所以勒让得符号$(\frac{-1}{365})$没有定义.
但是$365 = 5 \cdot 73$, 5和73互素,
这时原同余式等价于同余式组

$$\begin{cases} x^2 \equiv -1 \bmod 5 \\ x^2 \equiv -1 \bmod 73 \end{cases}$$

这样要判断原同余式的解, 只需要判断这个同余式组的解的情况.
这里5和73都是素数, 所以:
可以使用勒让得符号判断$x^2 \equiv -1 \bmod 5$有解$(\because (\frac{-1}{5}) = 1)$,
可以使用勒让得符号判断$x^2 \equiv -1 \bmod 73$有解$(\because (\frac{-1}{73}) = 1)$
所以同余式组有解, 解数为4,
故原同余式有解, 解数为4.

Previously on Quadratic Residue

考虑模素数二次同余方程:

$$x^2 \equiv a \bmod p \quad ((a,p)=1)$$

- 定义: 如果有解, 则称a是一个模p的平方剩余(二次剩余). 否则，称a是一个模p的平方非剩余(二次非剩余).
- 定理: 在模p的一个简化剩余系中，恰有$\dfrac{p-1}{2}$个模p二次剩余，恰有$\dfrac{p-1}{2}$个模p二次非剩余；如果a是模p二次剩余的话，$x^2 \equiv a \bmod p \quad ((a,p)=1)$的解数为2
- 欧拉判别条件
  a是模p的平方剩余 $\Longleftrightarrow \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$
  a是模p的平方非剩余 $\Longleftrightarrow \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$

- 勒让得符号：

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & \text{如果}a\text{是模}p\text{的平方剩余}\\ -1 & \text{如果}a\text{是模}p\text{的平方非剩余}\\ 0 & \text{如果}p|a\end{cases}$$

如果p是奇数, $a\in\mathbb{Z}$, 则:

$$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv(\frac{a}{p})\bmod p$$

- $(\dfrac{a+kp}{p})=(\dfrac{a}{p}), a\equiv b\bmod p\Longrightarrow(\dfrac{a}{p})=(\dfrac{b}{p})$,
$(\dfrac{ab}{p})=(\dfrac{a}{p})(\dfrac{b}{p}), (a,p)=1\Longrightarrow(\dfrac{a^2}{p})=1$
- p是奇素数, $a\in\mathbb{Z}$, 则: $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv(\dfrac{a}{p})\bmod p$
- $(\dfrac{-1}{p})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, i.e.,

$$(\frac{-1}{p})=\begin{cases}1 & \text{if } p\equiv 1\bmod 4\\ -1 & \text{if } p\equiv 3\bmod 4\end{cases}$$

- $(\frac{2}{p}) = \begin{cases} 1 & p \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & p \equiv \pm 3 \bmod 8 \end{cases}$ 即：当且仅当素数$p \equiv \pm 1 \bmod 8$时，2才是模p的二次剩余．或说：

$$(\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

- Gauss二次互反律 p, q都是奇数时，$(\frac{q}{p}) \cdot (\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$, i.e.,
  只要有一个数$\equiv 1 \bmod 4$，就必有$(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$，
  当且仅当他们都是形如$4k+3$形式的数时，才有$(\frac{p}{q}) = -(\frac{q}{p})$.

3. 雅可比(Jacobi)符号

设m是奇素数的乘积, $m = p_1p_2\dots p_s, \forall a \in \mathbb{Z}$,

$$(\frac{a}{m}) \triangleq (\frac{a}{p_1})\cdot(\frac{a}{p_2})\cdot\dots\cdot(\frac{a}{p_s})$$

其中$(\frac{a}{p_i})$是模p_i的勒让得符号. 称$(\frac{a}{m})$为雅可比符号.
显然, 根据这个定义, 当m本身就是素数时, 雅可比符号就是勒让得符号.

设m是奇素数的乘积, $m = p_1p_2\dots p_s, \forall a \in \mathbb{Z}$, 则
$(m, n) > 1$, 则$(\frac{m}{n}) = 0, (\frac{n}{m}) = 0$
这是因为: 比如$m = pp_1p_2\dots p_s, n = pq_1q_2\dots q_t$
则

$$(\frac{m}{n}) = (\frac{m}{p})(\frac{m}{q_1})(\frac{m}{q_2})\dots(\frac{m}{q_t}) = 0$$

$(\frac{n}{m})$类似.

- $(\frac{a+m}{m}) = (\frac{a}{m})$ 事实上,

$$(\frac{a+m}{m}) = (\frac{a+m}{p_1 p_2 \dots p_s}) = (\frac{a+m}{p_1}) \cdot \dots \cdot (\frac{a+m}{p_s}) = (\frac{a}{p_1}) \cdot \dots \cdot (\frac{a}{p_s}) = (\frac{a}{m})$$

类似地, $(\frac{a+km}{m}) = (\frac{a}{m})$

- $(\frac{ab}{m}) = (\frac{a}{m})(\frac{b}{m})$ 理由同上.
- 设$(a,m)=1$, 则$(\frac{a^2}{m}) = 1$
- $(\frac{1}{m}) = 1$

进一步学习之前, 我们看m是奇素数的乘积, $m = p_1 p_2 \dots p_s$
从而自然有$m \equiv p_1 p_2 \dots p_s \bmod 4$, 即

$$m \equiv (1 + 2 \cdot \frac{p_1 - 1}{2})(1 + 2 \cdot \frac{p_2 - 1}{2}) \dots (1 + 2 \cdot \frac{p_s - 1}{2}) \bmod 4$$

而

$$(1+2\cdot\frac{p_1 - 1}{2})(1+2\cdot\frac{p_2 - 1}{2}) \dots (1+2\cdot\frac{p_s - 1}{2}) = 1+2\cdot\frac{p_1 - 1}{2}+\dots+2\cdot\frac{p_s - 1}{2}+4\cdot(\dots)$$

从而

$$m \equiv 1 + 2 \cdot \frac{p_1 - 1}{2} + 2 \cdot \frac{p_2 - 1}{2} + \dots + 2 \cdot \frac{p_s - 1}{2} \bmod 4$$

所以

$$m - 1 \equiv 2 \cdot (\frac{p_1 - 1}{2} + \frac{p_2 - 1}{2} + \dots + \frac{p_s - 1}{2}) \bmod 4$$

$$\frac{m - 1}{2} \equiv \frac{p_1 - 1}{2} + \frac{p_2 - 1}{2} + \dots + \frac{p_s - 1}{2} \bmod 2$$

即

$$\frac{p_1 - 1}{2} + \frac{p_2 - 1}{2} + \dots + \frac{p_s - 1}{2} = 2k + \frac{m - 1}{2}$$

- $(\frac{-1}{m}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$

  这是因为

$$
\begin{aligned}
(\frac{-1}{m}) &= (\frac{-1}{p_1})(\frac{-1}{p_2})\ldots(\frac{-1}{p_s}) \\
&= (-1)^{\frac{p_1-1}{2}}(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\ldots(-1)^{\frac{p_s-1}{2}} \\
&= (-1)^{\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\frac{p_s-1}{2}} \\
&= (-1)^{2k+\frac{m-1}{2}} \\
&= (-1)^{\frac{m-1}{2}}
\end{aligned}
$$

  注意到: $(\frac{-1}{m}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$, i.e.,

$$
(\frac{-1}{p}) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{if } p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}
$$

m是奇素数的乘积, $m = p_1 p_2 \dots p_s$
从而自然有$m^2 = p_1^2 p_2^2 \dots p_s^2$, $m^2 \equiv p_1^2 p_2^2 \dots p_s^2 \bmod 16$, 即

$$m^2 \equiv (1 + 8 \cdot \frac{p_1^2 - 1}{8})(1 + 8 \cdot \frac{p_2^2 - 1}{8}) \dots (1 + 8 \cdot \frac{p_s^2 - 1}{8}) \bmod 16$$

而

$$(1+8\cdot\frac{p_1^2 - 1}{8})(1+8\cdot\frac{p_2^2 - 1}{8}) \dots (1+8\cdot\frac{p_s^2 - 1}{8}) = 1+8\cdot\frac{p_1^2 - 1}{8} + \dots + 8\cdot\frac{p_s^2 - 1}{8} + 64\cdot(\dots)$$

从而

$$m^2 \equiv 1 + 8 \cdot \frac{p_1^2 - 1}{8} + 8 \cdot \frac{p_2^2 - 1}{8} + \dots + 8 \cdot \frac{p_s^2 - 1}{8} \bmod 16$$

所以

$$\frac{m^2 - 1}{8} \equiv \frac{p_1^2 - 1}{8} + \frac{p_2^2 - 1}{8} + \dots + \frac{p_s^2 - 1}{8} \bmod 2$$

- $(\frac{2}{m}) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$
这是因为

$$(\frac{2}{m}) = (\frac{2}{p_1})(\frac{2}{p_2})\dots(\frac{2}{p_s})$$

$$= (-1)^{\frac{p_1^2-1}{8}}(-1)^{\frac{p_2^2-1}{8}}\dots(-1)^{\frac{p_s^2-1}{8}}$$

$$= (-1)^{\frac{p_1^2-1}{8}+\frac{p_2^2-1}{8}+\frac{p_s^2-1}{8}}$$

$$= (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$$

注意到:

$$(\frac{2}{p}) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{if } p \equiv \pm 3 \bmod 8 \end{cases}$$

即：当且仅当素数$p \equiv \pm 1 \bmod 8$时, 2才是模p的二次剩余. 或说:

$$(\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

雅克比符号的互反律: m, n都是奇素数的乘积, $(m,n)=1$, 则
m和n均为素

$$(\frac{n}{m})\cdot(\frac{m}{n})=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$$

证明: 假设$m=p_1p_2\dots p_s, n=q_1q_2\dots q_r$, 其中$p_i, q_j$均为奇素数, 且$p_i\neq q_j$, 则

$$(\frac{n}{m})=\prod_{i=1}^{s}(\frac{n}{p_i})=\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(\frac{q_j}{p_i})$$

$$=\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(\frac{p_i}{q_j})(-1)^{\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2}}$$

$$=\left\{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(\frac{p_i}{q_j})\right\}\cdot\left\{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2}}\right\}$$

$$=(\frac{m}{n})\{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2}}\}$$

$$=(\frac{m}{n})\{\prod_{i=1}^{s}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{r}\frac{q_j-1}{2}}\}$$

$$= (\frac{m}{n})\{\prod_{i=1}^{s}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}\cdot\prod_{j=1}^{r}\frac{q_j-1}{2}}\}$$

而

$$n = q_1q_2\dots q_r \Longrightarrow \frac{n-1}{2} \equiv \frac{q_1-1}{2} + \frac{q_2-1}{2} + \dots + \frac{q_r-1}{2} \bmod 2$$

所以

$$(\frac{n}{m}) = (\frac{m}{n})\{\prod_{i=1}^{s}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\}$$

$$= (\frac{m}{n})\{(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i-1}{2}}\}$$

$$= (\frac{m}{n})\{(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}\}$$

注意到:Gauss二次互反律: q, p都是素数时:

$$(\frac{q}{p})\cdot(\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

只要有一个数$\equiv 1 \bmod 4$, 就必有$(\frac{q}{p}) = (\frac{p}{q})$
当且仅当它们都是形如$4k+3$形式的数时, 才有$(\frac{q}{p}) = -(\frac{p}{q})$.
这些性质表明为了计算雅克比符号(当然包括勒让德符号是它的特殊情形)的值, 并不需要求素因数分解式.

示例: 计算

$$(\frac{105}{317}) = (\frac{317}{105}) = (\frac{2}{105}) = 1$$ 317 mod 105 = 2

可见, 有了雅克比符号后, 大大方便了勒让德符号的计算, 比如$(\frac{105}{317})$, 不必$(\frac{105}{317}) = (\frac{3}{317})(\frac{5}{317})(\frac{7}{317})$.

以上的雅克比符号性质虽然都和勒让德符号类似, 但不能掩盖两者之间的本质区别:
雅克比符号$(\frac{n}{m}) = 1$绝不表示二次同余方程

$$x^2 \equiv n \bmod m$$

一定有解
比如: $(\frac{3}{119}) = 1$, 但$x^2 \equiv 3 \bmod 119$ 无解.
同样的, 对雅克比符号来说, 没有性质

$$(\frac{n}{m}) = n^{\frac{m-1}{2}} \bmod m$$

不存在类似勒让德符号的Gauss引理的性质;

不存在类似: a是奇数, 则$(\frac{a}{p}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}[\frac{aj}{p}]}$的性质;

等等.

4. 模素数的二次同余方程求解 不考

模素数的二次同余方程的解的存在性判定和具体求解都可以解决. 前面我们知道根据勒让德符号计算可以判定二次同余方程$x^2 \equiv a \bmod p$的解的存在与否问题.

那么, 如果判定出来这个方程的解是存在的, 应该怎么求解呢? 下面给出一个一般性的算法. 算法的主要思路是:

- 将$p-1$写成是2的幂和一个奇数的乘积形式, 即$p-1=2^t \cdot s$
- 我们希望能够比较方便的求出方程
$$y^{2^{t-1}} \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_{t-1}^2$的解(事实上, 这个解比较容易写出), 利用这个解能够比较容易地写出
$$y^{2^{t-1}} \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_{t-2}^2$的解;
- 利用
$$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$$
的这个解能够比较容易的写出
$$y^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_{t-3}^2$的解;

- 利用
$$y^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$$
的这个解能够比较容易的写出
$$y^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_{t-4}^2$的解;
- ......;
- 一般地, 利用
$$y^{2^{t-(k-1)}} \equiv 1 \bmod p$$
的这个解能够比较容易的写出
$$y^{2^{t-k}} \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_{t-k}^2$的解;
- 利用
$$y^{2^{t-k}} \equiv 1 \bmod p$$
的这个解能够比较容易的写出
$$y^{2^{t-(k+1)}} \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_{t-(k+1)}^2$的解;

- ......;
- 利用
$$y^{2^3} \equiv 1 \bmod p$$
的这个解能够比较容易的写出
$$y^{2^2} \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_2^2$的解;
- 利用
$$y^{2^2} \equiv 1 \bmod p$$
的这个解能够比较容易的写出
$$y^2 \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_1^2$的解;
- 利用
$$y^2 \equiv 1 \bmod p$$
的这个解能够比较容易的写出
$$y \equiv 1 \bmod p$$
的一个形如$a^{-1}x_0^2$的解;
- 至此, 我们已经得到原方程的一个解, 即$x_0^2 \equiv a \bmod p$

在具体求解之前我们先任意选取模p的一个平方非剩余n, 计算$b=(n^s \bmod p)$, 从而有

$$b^{2^t}=(n^s)^{2^t}=n^{s\cdot 2^t}=n^{p-1}\equiv 1 \bmod p \quad (\because \text{Eular theorem})$$

$$b^{2^{t-1}}=(n^s)^{2^{t-1}}=n^{s\cdot 2^{t-1}}=n^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \bmod p \quad (\because \text{square non-residue})$$

给定$p-1=2^t\cdot s$: 方程

$$y^{2^{t-1}}\equiv 1 \bmod p$$

的一个形如$a^{-1}x_{t-1}^2$的解就是:

$$x_{t-1}=(a^{\frac{s+1}{2}} \bmod p)$$

$$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}}\equiv [a^{-1}(a^{\frac{s+1}{2}})^2]^{2^{t-1}}=[a^{-1}a^{s+1}]^{2^{t-1}}=a^{s\cdot 2^{t-1}}\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \bmod p$$

下面我们看怎样有这个解找出方程

$$y^{2^{t-2}}\equiv 1 \bmod p$$

的一个形如$a^{-1}x_{t-2}^2$的解:

由于$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}}\equiv 1 \bmod p$, 而且$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}}=[(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}}]^2$

所以必定$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}}\equiv 1 \bmod p$ 或$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}}\equiv -1 \bmod p$

case 1: 如果$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$, 则令$x_{t-2} = x_{t-1}$, 且有

$$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-2}} = (a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$$

即$a^{-1}x_{t-2}^2$是方程

$$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$$

的解;

case 2: 如果$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv -1 \bmod p$, 则令$x_{t-2} = x_{t-1} \cdot b$, 且有

$$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-2}} = (a^{-1}x_{t-1}^2 b^2)^{2^{t-2}} = (a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}}(b^2)^{2^{t-2}} = (a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} b^{2^{t-1}} \equiv 1 \text{ m}$$

即$a^{-1}x_{t-2}^2$是方程

$$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$$

的解;

亦即: 不论$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$ 还是$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv -1 \bmod p$, 我们总能利用方程$y^{2^{t-1}} \equiv 1 \bmod p$计算出方程$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_{t-2}^2$.

由于$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$，而且$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-2}} = [(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}}]^2$
所以必定$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$ 或$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} \equiv -1 \bmod p$

case 1：如果$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$，则令$x_{t-3} = x_{t-2}$，且有

$$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-3}} = (a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$$

即$a^{-1}x_{t-3}^2$是方程

$$y^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$$

的解;

case 2：如果$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} \equiv -1 \bmod p$，则令$x_{t-3} = x_{t-2} \cdot b^2$，则$x_{t-3}^2 = x_{t-2}^2 \cdot b^{2^2}$，且有

$$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-3}} = (a^{-1}x_{t-2}^2 b^{2^2})^{2^{t-3}} = (a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}}(b^{2^2})^{2^{t-3}} = (a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} b^{2^{t-1}} \equiv$$

即$a^{-1}x_{t-3}^2$是方程

$$y^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$$

的解;

亦即：不论$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$ 还是$(a^{-1}x_{t-2}^2)^{2^{t-3}} \equiv -1 \bmod p$，我们总能利用方程$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$计算出方程$y^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_{t-3}^2$.

由于$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$，而且$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-3}} = [(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}}]^2$
所以必定$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$ 或$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}} \equiv -1 \bmod p$

case 1：如果$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$，则令$x_{t-4} = x_{t-3}$，且有

$$(a^{-1}x_{t-4}^2)^{2^{t-4}} = (a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$$

即$a^{-1}x_{t-4}^2$是方程

$$y^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$$

的解；

case 2：如果$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}} \equiv -1 \bmod p$，则令$x_{t-4} = x_{t-3} \cdot b^{2^2}$，则$x_{t-4}^2 = x_{t-3}^2 \cdot b^{2^3}$，且有

$$(a^{-1}x_{t-4}^2)^{2^{t-4}} = (a^{-1}x_{t-3}^2b^{2^3})^{2^{t-4}} = (a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}}(b^{2^3})^{2^{t-4}} = (a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}}b^{2^{t-1}} \equiv$$

即$a^{-1}x_{t-4}^2$是方程

$$y^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$$

的解；

亦即：不论$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$ 还是$(a^{-1}x_{t-3}^2)^{2^{t-4}} \equiv -1 \bmod p$，我们总能利用方程$y^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$计算出方程$y^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_{t-4}^2$.

以此类推，我们总可用一个高次的方程$y^{2^{t-k}} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_{t-k}^2$计算出一个低次的方程$y^{2^{t-k-1}} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_{t-k-1}^2$，

直到最终我们能够用一个高次的方程$y^{2^3} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_3^2$计算出一个低次的方程$y^{2^2} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_2^2$,

能够用一个高次的方程$y^{2^2} \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_2^2$计算出一个低次的方程$y^2 \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_1^2$,

能够用一个高次的方程$y^2 \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_1^2$计算出一个低次的方程$y \equiv 1 \bmod p$的解$a^{-1}x_0^2$,
从而x_0即为方程$x^2 \equiv a \bmod p$的一个解，另外一个解为$x \equiv -x_0 \bmod p$.

示例: 求解$x^2 \equiv 186 \bmod 401$
计算$(\frac{186}{401}) = 1$, 说明原方程有解.

$$a = 186, p = 401, p-1 = 2^4 \cdot 25, t = 4, s = 25, a^{-1}235 \bmod 401$$

任取一个模p的非平方剩余$n = 3$, 计算$b = n^s = 3^25 \equiv 268 \bmod 401$
计算$y^{2^{t-1}} \equiv 1 \bmod p$的解:

$$x_{t-1} = (a^{\frac{s+1}{2}}), \quad x_3 = (186^{\frac{25+1}{2}} \bmod 401) = 103$$

$$a^{-1}x_3^2 = (235 \cdot 103^2 \bmod 401) = 98$$

计算$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \bmod p$的解:

$$\because (a^{-1}x_3^2)^{2^{t-2}} \equiv 98^4 \equiv -1 \bmod 401$$

$$\therefore x_{t-2} = x_{t-1}b, \quad x_2 = (x_3 b \bmod p) = (103 \cdot 268 \bmod 401) = 336$$

$$(a^{-1}x_{t-2}^2 = (235 \cdot 336^2 \bmod 401) = 400 \equiv -1 \bmod 401$$

计算$y^{2^{t-3}} \equiv 1 \bmod p$的解:

$$\because (a^{-1}x_2^2)^{2^{t-3}} \equiv (-1)^2 \equiv 1 \bmod 401$$

$$\therefore x_{t-3} = x_{t-2}, \quad x_1 = x_2 = 336$$

$$a^{-1}x_{t-3}^2 = (235 \cdot 336^2 \bmod 401) = 400 \equiv -1 \bmod 401$$

计算$y^{2^{t-4}} \equiv 1 \bmod p$, 即$y \equiv 1 \bmod p$ 的解:

$$\because (a^{-1}x_1^2)^{2^{t-4}} \equiv -1 \bmod 401$$

$$\therefore x_{t-4} = x_{t-3}b^{2^{t-2}}, \quad x_0 = (x_1 b^4 \bmod 401) = (336 \cdot 268^4 \bmod 401) = 304$$

这就是我们要求的原方程的解: $x \equiv \pm 304 \bmod 401$.

对于特殊形式的素数p不需要像上述那样繁琐的计算, 特别地:
$p = 4k+3$, p为素数, k为任意整数, 已知$x^2 \equiv a \bmod p$有解, 求其解.
因为$x^2 \equiv a \bmod p$有解, 根据欧拉判别准则我们指导下式必定成立:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$$

从而

$$a^{\frac{4k+2}{2}} \equiv 1 \bmod p \Longrightarrow a^{2k+1} \equiv 1 \bmod p$$

从而

$$a^{2k+1} a \equiv a \bmod p$$

即

$$(a^{k+1})^2 \equiv a \bmod p$$

其中$k+1 = \frac{p+1}{4}$. 所以原方程的解就是

$$x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p$$

类似地，如果素数p和q都是形如$4k+3$的形式，且$x^2 \equiv a \bmod p$，$x^2 \equiv a \bmod q$ 都有解(即$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$，$a^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$都成立)，那么二次方程

$$x^2 \equiv a \bmod pq$$

有解，并且可以通过孙子定理求解同余式组获得:

$$\begin{cases} x \equiv a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p \\ x \equiv a^{\frac{q+1}{4}} \bmod q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p \\ x \equiv a^{\frac{q+1}{4}} \bmod q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p \\ x \equiv -a^{\frac{q+1}{4}} \bmod q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p \\ x \equiv -a^{\frac{q+1}{4}} \bmod q \end{cases}$$

5. 模为合数的二次同余方程

设$m = 2^{\delta}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, 我们知道对于一个模为合数$m$的二次方程($a$与$m$互素)

$$x^2 \equiv a \bmod m$$

他等价于一个同余式组

$$\begin{cases} x^2 \equiv a \bmod 2^{\delta} \\ x^2 \equiv a \bmod p_1^{\alpha_1} \\ x^2 \equiv a \bmod p_2^{\alpha_2} \\ \dots\dots \\ x^2 \equiv a \bmod p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

这就是说, 我们需要解决的问题就是: 方程$x^2 \equiv a \bmod 2^{\delta}$的判定(与求解), 方程$x^2 \equiv a \bmod p^{\alpha}$($a$与$p$互素)的判定(与求解).

定理

方程$x^2 \equiv a \bmod p^\alpha$($a$与$p$互素)的判定与求解: $x^2 \equiv a \bmod p^\alpha$有解 $\Longleftrightarrow$ a为模p的二次剩余. 且有解的话, 解数为2.

"$\Longrightarrow$:" 设$x^2 \equiv a \bmod p^\alpha$ 有解x_1, 即$x_1^2 \equiv a \bmod p^\alpha$, 从而$x_1^2 \equiv a \bmod p$, 即$a$为模$p$的二次剩余.

"$\Longleftarrow$:" 设a为模p的二次剩余, 即存在$x \equiv x_1 \bmod p$使得$x_1^2 \equiv a \bmod p$,
$x_1^2 - a \equiv 0 \bmod p$,

取$f(x) = x^2 - a$, 则上式说明$f(x) \equiv 0 \bmod p$有解x_1, 从而可以利用这个解对应的求出方程$f(x) \equiv 0 \bmod p^2$的解$x \equiv x_1 + kp \bmod p^2$, 其中$k$是$f'(x_1)k \equiv \frac{-f(x_1)}{p} \bmod p$的解, 这里得到的$k$的解是唯一的(这是因为$f'(x_1) = 2x_1$, 2和$x_1$都与$p$互素, 所以$(f'(x_1), p) = 1$),

类似的, 利用$f(x) \equiv 0 \bmod p^2$的这个解可以唯一的对应$f(x) \equiv 0 \bmod p^3$的解,......, 最终可以利用$f(x) \equiv 0 \bmod p$有解x_1, 唯一地得到$f(x) \equiv 0 \bmod p^\alpha$的解.

我们知道模素数二次同余方程$x^2 - a \equiv 0 \bmod p$只有两个解$x \equiv \pm x_1 \bmod p$, 所以二次同余方程$x^2 - a \equiv 0 \bmod p^\alpha$也只有两个解(并且可以利用$\pm x_1$求出). ◇

方程$x^2 \equiv a \bmod 2^\delta$的判定:

可以看到, 如果$\delta = 2$: 则

$$x^2 \equiv a \bmod 4 \text{ 有解} \iff a \equiv 1 \bmod 4$$

这是很显然的: $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9$.考虑到$(a, 4) = 1$, 我们得到$a \equiv 1 \bmod 4$时有解, 且解数为2, 解为$x \equiv 1 \bmod 4, x \equiv -1 \bmod 4$.

当$\delta \geq 3$时: 方程$x^2 \equiv a \bmod 2^\delta$ 有解 $\iff$ $a \equiv 1 \bmod 8$. 且有解的话, 解数为4.

"$\Longrightarrow$:" 假设有解$x \equiv x_1 \bmod 2^\delta$, 由于$(a, 2^\delta) = 1$, 所以$a$必定是奇数, 从而$x_1$必定是奇数, 比如$x_1 = 2l + 1 (l \in \mathbb{Z})$,

从而$a \equiv (2l+1)^2 \equiv 1 + 4l(l+1) \bmod 2^\delta$,

从而$a \equiv 1 + 4l(l+1) \bmod 2^3$, 即$a \equiv 1 \bmod 8$.

"$\Longleftarrow$:" 已知$a \equiv 1 \bmod 8$,

当$\delta = 3$时, $2^\delta = 8$: 可以通过检查发现方程$x^2 \equiv 1 \bmod 8$的解,
$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9 \equiv 1 \bmod 8, 4^2 = 16 \equiv 0 \bmod 8, 5^2 = 25 \equiv 1 \bmod 8, 6^2 = 36 \equiv 4 \bmod 8, 7^2 = 49 \equiv 1 \bmod 8.$
可见方程$x^2 \equiv a \bmod 2^\delta$有解, 且解有4个:$x \equiv 1 \bmod 8$, $x \equiv 3 \bmod 8$, $x \equiv 5 \bmod 8$, $x \equiv 7 \bmod 8$, 即$x \equiv \pm 1 \bmod 8$, $x \equiv \pm 5 \bmod 8$, 也就是

$$\{\pm(1+4k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

当$\delta = 4$时, $2^\delta = 16$: 设c是方程$x^2 \equiv a \bmod 16$的解, 我们知道c必定是$x^2 \equiv a \bmod 8$ (即$x^2 \equiv 1 \bmod 8$) 的解, 所以必有$x \equiv c \bmod 16 \subset \{\pm(1+4k) : k \in \mathbb{Z}\}$, 我们现在关心的是哪些$k$使得$\pm(1+4k)$确实是方程$x^2 \equiv a \bmod 16$的解:
将$\pm(1+4k)$代入方程$x^2 \equiv a \bmod 16$, 由于$(1+4k)^2 = 1 + 8k + 16k^2$, 从而有$1 + 8k \equiv a \bmod 16$, 即$8k \equiv a - 1 \bmod 16$, 从而

a = 1 mod 8

$$k \equiv \frac{a-1}{8} \bmod 2, \quad \text{i.e.,} \quad k = 2l + (\frac{a-1}{8} \bmod 2), (l \in \mathbb{Z})$$

这样, 方程$x^2 \equiv a \bmod 16$的解就是(4个):

$$\{\pm(1 + 4 \cdot (2l + (\frac{a-1}{8} \bmod 2)))\} = \{\pm(1 + 8l + 4 \cdot (\frac{a-1}{8} \bmod 2))\}, l \in \mathbb{Z}.$$

当$\delta = 5$时, $2^\delta = 32$: 设c是方程$x^2 \equiv a \bmod 32$的解, 我们知道c必定是$x^2 \equiv a \bmod 16$的解, 所以必有$x \equiv c \bmod 32 \subset \{\pm(1 + 4 \cdot (\frac{a-1}{8} \bmod 2) + 8l) : k \in \mathbb{Z}\}$, 我们现在关心的是哪些$k$使得$\pm(1 + 4 \cdot (\frac{a-1}{8} \bmod 2) + 8l)$确实是方程$x^2 \equiv a \bmod 32$的解:
记$x_4 = 1 + 4 \cdot (\frac{a-1}{8} \bmod 2)$, 将$\pm(x_4 + 8l)$代入方程$x^2 \equiv a \bmod 32$, 由于$(x_4 + 8l)^2 = x_4^2 + 16x_4 l + 64l^2$, 从而有$x_4^2 + 16x_4 l + 64l^2 \equiv a \bmod 32$, 即$x_4^2 + 16x_4 l \equiv a \bmod 32$, 即$x_4^2 + 16l \equiv a \bmod 32$, 即$16l \equiv a - x_4^2 \bmod 32$, 从而

$$l \equiv \frac{a - x_4^2}{16} \bmod 2, \quad \text{i.e.,} \quad l = 2s + (\frac{a - x_4^2}{16} \bmod 2), (s \in \mathbb{Z})$$

这样, 方程$x^2 \equiv a \bmod 32$的解就是(4个):

$$\{\pm(x_4 + 8 \cdot (2s + (\frac{a - x_4^2}{16} \bmod 2)))\} = \{\pm(x_4 + 16s + 8 \cdot (\frac{a - x_4^2}{16} \bmod 2))\}, s \in \mathbb{Z}.$$

这个过程可以继续下去, 最终求出$x^2 \equiv a \bmod 2^\delta$的解(4个). ◇

示例：求解$x^2 \equiv 57 \bmod 64$

$64 = 2^6, 57 \equiv 1 \bmod 8$，所以原同余方程$x^2 \equiv 57 \bmod 2^6$有解：
从方程$x^2 \equiv 57 \bmod 2^3$开始：其解为

$$\pm(1+4k), k \in \mathbb{Z}$$

方程$x^2 \equiv 57 \bmod 2^4$的解：将$(1+4k)$代入$x^2 \equiv 57 \bmod 2^4$求出k，

$$k = 2l + (\frac{a-1}{8} \bmod 2) = 2l+1, \quad \pm(1+4(2l+1)) = \pm(5+8l), l \in \mathbb{Z}$$

方程$x^2 \equiv 57 \bmod 2^5$的解：将$(5+8l)$代入$x^2 \equiv 57 \bmod 2^5$求出l，
$(5+8l)^2 = 25 + 16 \cdot 5l + 64l^2$，所以$16 \cdot 5l \equiv a - 25 \bmod 32$，即

$$5l \equiv \frac{a-25}{16} \bmod 2, \quad i.e., l \equiv \frac{a-25}{16} \bmod 2$$

$$\therefore l = 2s + (\frac{a-25}{16} \bmod 2) = 2s, \quad \pm(5+8(2s)) = \pm(5+16s), s \in \mathbb{Z}$$

方程$x^2 \equiv 57 \bmod 2^6$的解: 将$(5+16s)$代入$x^2 \equiv 57 \bmod 2^6$求出s,
$(5+16s)^2 = 25 + 32 \cdot 5s + 256s^2$, 所以$32 \cdot 5s \equiv a - 25 \bmod 64$, 即

$$5s \equiv \frac{a-25}{32} \bmod 2 \quad i.e., s \equiv \frac{a-25}{32} \bmod 2,$$

$$\therefore s = 2t + (\frac{a-25}{32} \bmod 2) = 2t+1, \quad \pm(5+16(2t+1)) = \pm(21+32t), t \in \mathbb{Z}$$

$21 + 32 = 53$, $-21 \equiv 43 \bmod 64$, $-53 \equiv 11 \bmod 64$

也就是说, 方程$x^2 \equiv 57 \bmod 64$的解为$x \equiv 21 \bmod 64$, $x \equiv 53 \bmod 64$, $x \equiv 43 \bmod 64$,
$x \equiv 11 \bmod 64$. $\diamond$

至此, 关于二次方程我们得到的结论是:

1. 模素数的二次方程$x \equiv a \bmod p$的解的判定与求解;
2. 模为2^δ的二次方程$x \equiv a \bmod 2^\delta$的解的判定与求解(有解的话, 解数为4, 从$x^2 \equiv a \bmod 2^3$开始求解);
3. 模为p^α的二次方程$x \equiv a \bmod p^\alpha$的解的判定与求解(有解的话, 解数为2, 从$x^2 \equiv a \bmod p$开始求解);
4. 模为合数的二次方程$x^2 \equiv a \bmod m$(a与m互素)的解的判定与求解(利用2与3).

一次同余方程$ax \equiv b \bmod m$

一次同余方程组-孙子定理.


对于组合数学与数论、要能够精通它、
应用它，精通的目的全在于应用。
组合数学
与数论
认真看书学习，弄懂数论与组合数学