P.181.6 设 $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ 为任意实数，证明：$f(x)=C_1\cos x+C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx$ 在 $(0,\pi)$ 内必有根。

证：作 $\varphi(x)=C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\frac{\sin 2x}{2}+C_3\cdot\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\cdots+C_n\cdot\frac{\sin nx}{n}$.

$\varphi(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，$\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$

由罗尔定理，至少存在一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，$0<\xi<\pi$

而 $\varphi'(x)=f(x)$，从而 $f(\xi)=0$，$\xi\in(0,\pi)$

即 ξ 是 $f(x)=C_1\cos x+C_2\cos 2x+\cdots\cdots+C_n\cos nx$ 的一个根，$(0<\xi<\pi)$。

P.181.7 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 内可微，$g(x)\neq 0$，且 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}\equiv 0$，$x\in(a,b)$.

证明：存在常数 k，使 $f(x)=k\cdot g(x)$，$x\in(a,b)$.

证：$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\frac{-\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}}{g^2(x)}=0 \quad (g(x)\neq 0)$$

即 $\frac{f(x)}{g(x)}=k$，$f(x)=k\cdot g(x)$. $x\in(a,b)$

P.181.8 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，且 $f'(x)\equiv k$，$-\infty<x<+\infty$.

证明：$f(x)=kx+b$

证：$f(t)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导.

$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)=kx$，$f(x)=kx+f(0)=kx+b$.

方法2. 由 $f'(x)=\frac{dy}{dx}=k$，则 $dy=k\cdot dx$，$\int dy=\int k\cdot dx$

$y=kx+b$.