习题2-7 **中山大學 本科生考试草稿纸** 2011/9/5-41

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.115.1 求下列函数的导数：

(1) $F(x)=\int_1^{x^2}\frac{dt}{1+t^2}$； $F'(x)=\frac{1}{1+x^4}\cdot(x^2)'=\frac{2x}{1+x^4}$.

(2) $G(x)=\int_0^{1+x^2}\sin t^2dt$； $G'(x)=\sin(1+x^2)^2\cdot(1+x^2)'=2x\cdot\sin(1+x^2)^2$.

(3) $H(x)=\int_x^1 t^2\cdot\cos t\,dt$； $H'(x)=-x^2\cos x$.

(4) $L(x)=\int_x^{x^2}e^{-t^2}dt=e^{-x^4}\cdot(x^2)'-e^{-x^2}=2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$.

P.115.2 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$F_0(x)=\int_a^x f(t)dt$，在 $x=a$ 有右导数。

证：$F_0'(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{F_0(x)-F_0(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{\int_a^x f(t)dt-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(c)\cdot(x-a)}{x-a}$，$(a\le c\le x)$

$=\lim\limits_{x\to a+0}f(c)=\lim\limits_{c\to a+0}f(c)=f(a)$.

P.115.3 设：$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，假定 f 有一个原函数 $F(x)$，且 $F(a)=0$.

证明：当 $a\le x\le b$ 时，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

证：由假设 $F'(x)=f(x)$，而 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$

从而 $F(x)-\int_a^x f(t)dt=C$

又 $F(a)=0$，从而 $C=0\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

P.115.4 证明：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}dt$.

证：$\left(\ln x-\int_1^x\frac{1}{t}dt\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$

即 $\ln x-\int_1^x\frac{1}{t}dt=C\Longrightarrow C=0\Longrightarrow\ln x=\int_1^x\frac{dt}{t}$.