Chapter 1-Review

1. 线性方程组 Systems of Linear Equations (Linear System) [P3]

关键词：coefficient 系数[P2]; constant term 常数（项）[讲义-P1]; linear equation 线性方程 [P2]; variable 未知数（或变元）

有 m 个方程 n 个未知数$(x_1,x_2,\ldots x_n)$的线性方程组可表示为：

1) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\,(1 \le i \le m)$
2) $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b$ ($a_1,a_2,\ldots a_n$, b 为 m 维列向量)
3) $Ax=b$ (A 是 $m\times n$ 矩阵；x，b 为 m 维列向量)
4) *Augmented matrix*(增广矩阵) -

(其中第 $j(1 \le j \le n)$列是变元 x_j 的系数)

2. 线性方程组解的情况（Solution Status） [P4]

1) *No solution* 无解
2) *Has Solution* 有解
   a) *Exactly one solution (unique solution)* 唯一解
   b) *Infinitely many solutions* 无穷多解

3. 阶梯形（Echelon Forms） [P14]

关键词：leading entry 先导元素 [P14]；pivot position 主元位置[P16]；

1） *3 conditions of echelon form matrix* 阶梯形矩阵的三个条件（缺一不可）：
   a) *A zero row is not above on any nonzero row* 所有非零行都在零行上部
   b) *Each leading entry of a row is on the right of the leading entry of the previous row* 每行的先导元素都在上一行先导元素的右边
   c) *In each column, an entry below the leading entry is 0* 与先导元素同列且在其下部的元素全为 0
2) 2 additional conditions of Reduced Echelon Forms 简化阶梯形的额外两个性质：
   a) *The leading entry of each nonzero row is 1* 每一非零行的先导元素都是 1
   b) *Each leading 1 is the ONLY nonzero entry of its column* 先导元素是其所在列唯一非零元素

注：与线性方程组结合：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad x_3 & = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 & = & 1 + x_2 - x_3 \\ x_4 & = & -1 \end{cases}$$

4. 解的存在性与唯一性定理 （Theorem 2. Existence and Uniqueness Theorem） [P24]

关键词：pivot column 主元列[P16]；echelon form 阶梯形[P16]；

- **No** [0 0 … 0 | b_i] $b_i \neq 0$ ≡ Has solution
  - No free variables ~ unique solution
  - ≥1 free variable ~ infinitely many solutions

5. 齐次线性方程组非零解的条件（Condition of Homogeneous System Having Non-Trivial Solution） [P50]

关键词：homogeneous system 齐次线性方程组[P50]；Ax = 0[P50]; non-trivial solutions 非零解/非平凡解[P51]; free variable 自由变量[P20]；

Homogeneous system has non-trivial solutions 齐次线性方程组有非零解 ~ at least one free variable 至少有一个自由变量

注：结合简化阶梯形采用反证法轻松搞定！

Additionally, 此外：if r = #{pivot positions}, p = #{free variables}, n = #{variables} then r+p = n,

#{} - number of {ζ} （ζ 的个数）

注：看简化阶梯形

6. 非齐次线性方程组解的结构定理（Structure of Solution Set of Nonhomogeneous System） [P53]

关键词：nonhomogeneous system 非齐次线性方程组[P50]；

Let v_0 be a solution of a nonhomogeneous system $Ax = b$.

Let H be the set of general solutions of the corresponding homogeneous system $Ax = 0$.

Suppose the solution set of $Ax = b$ is S

Then $S = H + v_0$

如果 v_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解，H 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解。（$Ax = 0$ 也称为 $Ax = b$ 的导出组）

则 $Ax = b$ 的通解是 $S = H + v_0$

注：Proof

Apparently, $\forall h \in H$, $(h+v0) \in S$;

so, $H \subseteq S$; （1）

Now, $\forall v \in S$, $v - v_0 \in H$, since $A(v - v_0) = Av - Av_0 = b - b = 0$;

Because $v - v_0 + v_0 \in H + v_0$

Consequently: $v \in H + v_0$ *and thus* $S \subseteq H$ （2）

Given (1) and (2), we now have $S = H$. ■

E.g.: (Examples 5.1 and 5.2)

$Ax = 0$:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & +x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & -4x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$H = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 - 2c_3 \\ c_1 \\ -2c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & +x_4 & +2x_5 & = & -2 \\ -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & -4x_4 & -3x_5 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = & -1 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 & = & 3 \end{cases}$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = v_0 + H = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + c_1 - c_2 - 2c_3 \\ c_1 \\ 1 - 2c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. 线性组合（Linear Combination） [P32]

关键词：vectors 向量 $v_1, v_2, \ldots v_p$ [P32]；scalar 标量 $c_1, c_2, \ldots c_p$ [P29]；

If $y = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p$

Then vector y is called a linear combination of the vectors $v_1, v_2, \ldots v_p$

注：与线性方程组结合

$b = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ （$a_1, a_2, \ldots a_n$, b 为向量; $x_1, x_2, \ldots x_p$ 为标量）有解 ≡ b 是 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 的线性组合

8. 线性无关/ 相关（Linear Independent / Dependent） **[P65]**

关键词： trivial solutions 非零解/非平凡解[P51]; $\mathbb{R}^m$ m 维空间 [P28]；

1) Definition [P65]

Vector set $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ *is linear dependent if* $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0$ *has only the trivial solution.* ($x_1x_2 \ldots x_n$ *are all 0*) 如果方程组 $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0$ 只有零解 ($x_1x_2 \ldots x_n$ 全是 0)，则 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 线性无关。

Vector set $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ *is linear independent if* $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0$ if $x_1x_2 \ldots x_n$ *are not all 0.*

若方程组 $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ 有非零解（$x_1x_2 \ldots x_n$ 不全是 0），则向量组 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 线性相关。

2) Theorem 7 Characterization of Linearly Dependent 定理 7 线性相关和线性组合的关系定理 [P68]

Vector set $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ *is linear dependent* ~ *Exist vector* a_i ($1 \le i \le n$)*, which is a linear combination of the other vectors*

向量组 $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ 线性相关 ~ 存在某向量 a_i ($1 \le i \le n$) 是其它向量的线性组合

注：由线性相关定义 $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0$，$x_1x_2 \ldots x_n$ 不全是 0 则线性相关。设 $x_i \neq 0$ ($1 \le i \le n$)，把 x_ia_i 移到等式另一边 $x_ia_i = -(x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n)$，然后两边除以 x_i（因为 $x_i \neq 0$）即得证向量 a_i ($1 \le i \le n$) 是其它向量的线性组合（还不懂？看线性组合定义 100 遍☺）。

3) Theorem 8 Determine Linearly Dependency by Investigating Vector Dimension and Number 由向量个数与维数判断相关性定理 [P68]

Vector set $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ *in* $\mathbb{R}^m$ *is linear dependent if* $n > m$ *r* a_i ($1 \le i \le n$)*, which is a linear combination of the other vectors*

如果向量组中向量个数 n 大于向量的维数 m，则向量组线性相关。

注：不知如何证明？看本表第 5 项 100 遍☺。

4) Theorem 9 *Vector set* $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ *is linear dependent if there exists* $a_i = 0$ ($1 \le i \le n$)

$\forall \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$，□ $a_i = 0$ ($1 \le i \le n$) ⇒ $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ 线性相关

注：还是不知如何证明？看本格上面的定义 100 遍☺。

9. 等价定理（Theorem 4） **[P43]**

关键词： $\mathbb{R}^m$ m 维空间 [P28]；subset of $\mathbb{R}^m$ spanned (or generated) by $v_1, v_2, \ldots v_p$ 由 $v_1, v_2, \ldots v_p$ 张成（或生成的）的 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 [P35]；

1) *For each b in* $\mathbb{R}^m$*, the system* $Ax = b$ *has a solution.* 对于 $\mathbb{R}^m$ 中的每一个向量 b，线性方程组 $Ax = b$ 都有一个解

2) *Each b in* $\mathbb{R}^m$ *is a linear combination of the columns of A.* $\mathbb{R}^m$ 中的每一个向量 b 都是矩阵 A 的列向量的线性组合

3) *The columns of A span* $\mathbb{R}^m$ 矩阵 A 的列向量生成 $\mathbb{R}^m$

4) *The matrix A has a pivot position in every row.* 矩阵 A 每一行都有一个主元位置

注：1）- 3）根据定义显然成立；4）可用定理 2 采用反证法

10. 补充齐次方程组基础解系定理（Additional Theorem of basic solutions of a homogenous linear system） **[P43]**

关键词：basic solutions (基础解系) [讲义 P17 定理 5.3]

The basic solutions of any homogeneous linear system are linearly independent.

齐次线性方程组的基础解系中各个向量是线性无关的

注：先看本表第 6 项齐次方程组的例子

Proof:

Suppose v_1 v_2 ...v_p *are the basic solutions of a homogeneous linear system* $Ax = 0$. *Then, we know that there are p free variables* $Ax = 0$ *(为什么，看本表第 5 项)*

Let $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_p = v$, **where** $c_1, c_2, \ldots c_n$ *are scalars.*

We know that in each vector v_i $(1 \le i \le p)$, *there is a 1 corresponding to the position of the i-th free variable. In addition, each element in that position in the other vectors is* 0.

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Position of the } i\text{-}th \text{ free variable} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Consequently, the element in this position of the vector v is c_i.

Therefore, for vector v to be a 0 vector, $c_1, c_2, \ldots c_n$ *must all be 0.* ■

Chapter 2

matrix algebra	**[P105]**	矩阵代数
matrix operations	**[P107]**	矩阵的运算
main diagonal of matrix	**[P107]**	矩阵的主对角线
diagonal matrix	**[P107]**	对角矩阵
identity matrix I_n	**[P45+ P107]**	**n × n** 单位矩阵
matrix addition	**[P107]**	矩阵加法
scalar multiplication	**[P109]**	数乘（矩阵）
matrix multiplication	**[P109]**	矩阵乘法
If A is an m × n matrix, and B is an n × p matrix with columns b $\{b_1....b_p\}$**, then the product of AB is the m × p matrix whose columns are** $Ab_1...Ab_p$	**[P110]**	**A: m × n** 矩阵 **B: n × p** 矩阵，矩阵的各列向量为 $\{b_1....b_p\}$, **AB =** $[Ab_1\, Ab_2 ... Ab_p]$
The vector in column *j* of AB is a linear combination of all the column vectors $\{a_1 \ldots a_n\}$ **of A (weights are the entries of the corresponding** b_j**column of B)**	**[P110]**	矩阵 **AB** 的第 ***j*** 列 V_j 都是 **A** 的所有列向量$(a_1 \ldots a_n)$的线性组合。（其中各个权是 **B** 中对应列 b_j 的元素）
Theorem . Rules for Matrix Operation **A: m × n matrix** **B，C: matrices whose sizes in each row of the following allow the addition and multiplication in that row** **k, t: scalar**	**[P108+ P113]**	矩阵运算规则 **A: m × n** 矩阵 **B, C:** 在每行中，尺寸都符合那行加法和乘法定义的矩阵 **k, t:** 标量

1) Addition and scalar multiplication $A + B = B + A$ $(A + B) + C = A + (B + C)$ $A + 0 = A$ $k(A + B) = kA + kB$ $(k+t) A = kA + tA$ $k(tA) = (kt) A$		1) 矩阵加法和数乘
2) Multiplication $A(BC) = (AB)C$ $A (B+C) = AB + AC$ $(B+C)A = BA + CA$ $k(AB) = (kA) B = A (kB)$ $I_m A = A = A I_m$		2) 矩阵乘法
commute	[P113]	可交换（矩阵乘法）
Warnings: In general $AB \neq BA$ $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ or $B = 0$	[P114]	
transpose of a matrix	[P115]	矩阵的转置
Theorem 3 Transposition A: $m \times n$ matrix A^T: transpose of matrix A B: matrix whose size in each row of the following allow the addition and multiplication in that row k: scalar $(A^T)^T = A$ $(A + B)^T = A^T + B^T$ $(kA)^T = k A^T$ $(AB)^T = B^T A^T$		
invertible	[P119]	(矩阵)可逆的
matrix inverse	[P119]	矩阵的逆
singular matrix	[P119]	奇异矩阵
nonsingular matrix	[P119]	非奇异矩阵
Theorem 4 necessary and sufficient condition for a 2 x 2 matrix is invertible Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, If $ad-bc \neq 0$, then A is invertible and $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ Theorem 4, A is invertible Iff $\det A \neq 0$ (where $\det A = ad-bc$)	[P119]	二阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可逆的充要条件 $ad-bc \neq 0$ 或记作$\|A\| \neq 0$

Theorem 5 **If A is an invertible n × n matrix, then for each b in $\mathbb{R}^n$, the equation Ax = b has the unique solution x = A^{-1}b**	**[P120]**	定理 **5** 系数为 **n** 阶可逆方阵 **A** 的线性方程组 **Ax=b** 的解的情况定理 若 **A** 是一个 **n** 阶可逆矩阵，那么对于 **n** 维空间$\mathbb{R}^n$中的每一个列向量 **b** 方程组 **Ax = b** 都有唯一解 **x = A^{-1}b**
Theorem 6 Rules of **A, B: n × n invertible matrices** $(A^{-1})^{-1} = A$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	**[P121]**	定理 **6** 矩阵的逆运算规则
elementary matrix	**[P122]**	初等矩阵
If an elementary row operation is performed on matrix A, the resulting matrix can be written as EA, where the m x m matrix E is created by performing the same row operation on I_m **Proof idea:** **Prove that each of the 3 kinds of row operations, if performed on a matrix A** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$**, is the same as left multiply the three corresponding elementary matrix.** **Ex. : A** $r_i \leftrightarrow r_j$ **= E_{ij} A, where E_{ij} = I** $r_i \leftrightarrow r_j$	**[P123]**	左乘初等矩阵等价于 进行一次与初等矩阵一样的行初等变换
Theorem 7. **An nxn matrix A is invertible iff A is row equivalent to I_n, and in this case, any sequence of elementary row operations that reduces A to I_n also transform into A^{-1}**	**[P123]**	定理 **7** 可逆矩阵判断定理 一个 **nxn** 矩阵 **A** 是可逆的当且仅当 **A** 行等价于 I_n（就是说 **A** 可以行化简成 I_n）。并且，在这种情况下，任何一系列把 A 行化简成 I_n 的操作，都可以把 I_n 转化成 A^{-1}
Algorithm for finding A^{-1}: **Row reduce the augmented matrix [A | I] , if A is row equivalent to I, then [A | I] is row equivalent to [I | A^{-1}]. Otherwise, A is not ivertible.**	**[P124]**	用初等行变换求逆矩阵: 把增广矩阵[A | I]化简，如果 **A** 行等价于单位阵 **I,** 则[A | I]能化简成[I | A^{-1}]，否则 **A** 不可逆。
Theorem 8. Invertible matrix theorem **The following statements are equivalent.** **a. A is an invertible matrix.** **b. A is row equivalent to the n x n identity matrix.** **c. A has n pivot positions.** **d. The equation Ax = 0 has only the trivial**	**[P129]**	可逆矩阵性质定理 下列断言等价 a. A 是可逆的 b. A 行等价于一个 n 阶单位阵。 c. A 有 n 个主元位置。 d. 矩阵方程 Ax = 0 仅有平凡解（零

solution. e. The columns of A form a linearly independent set. f. The linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ is one-to-one. g. The equation Ax= b has only one solution for each b in $\mathbb{R}^n$. h. The columns of A span $\mathbb{R}^n$. i. The linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ maps $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$. j. There is an n x n matrix C such that $CA = I$. k. There is an n x n matrix D such that $AD = I$. l. A^T is an invertible matrix.		解）。 e. A 的列形成一个线性无关集。 f. 线性变换$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 是一对一的。 g. 对于$\mathbb{R}^n$中任意的一个向量 b,矩阵方程 Ax= b 有唯一解。 h. A 的列张成$\mathbb{R}^n$. i. 线性变换$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 把$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^n$。 j. 存在一个 n x n 矩阵 C 使 $CA = I$. k. 存在一个 n x n 矩阵 D 使 $AD = I$. l. A^T 是可逆的。
partitioned matrix (block matrix)	[P134]	分块矩阵
multiplication of partitioned matrices	[P135]	分块矩阵的乘法
Partitions of A and B should be conformable for block multiplication The column partition of A matches the row partition of B	[P136]	**A 和 B 的分块矩阵要相乘的话， A 和 B 的分法应遵从矩阵乘法定义** **A 的列分法应与 B 的行分法一致** （左边大小列 = 右边大小行）
Theorem 10 column-row expansion of AB If A is an m x n matrix and B is an n x p matrix then $AB = [col_1(A) \quad col_2(A) \ \dots \ col_n(A)] \begin{bmatrix} row_1(B) \\ row_2(B) \\ \dots \\ row_n(B) \end{bmatrix} =$ $col_1(A)\, row_1(B) + \dots + col_n(A)\, row_n(B)$	[P137]	定理 10 AB 乘法的列行展开
subspace	[P168]	子空间
column space of A ColA = all linear combinations of the columns of A $= k_1a_1 + \dots + k_na_n$ （$k_{i(1\leq i\leq n)} \in R$）	[P169]	A 的列空间 ColA = A 的所有列的线性组合形成的向量的集合
null space of A Nul A = all solutions to the homogeneous equation Ax = 0	[P169]	A 的零空间 Nul A = 齐次线性方程组 Ax = 0 的通解
Theorem 12. Theorem for null space of A The null space of an m x n matrix A is a subspace of $\mathbb{R}^n$. Equivalently, the set of all solutions to a system Ax= 0 of m homogeneous linear equations in n unknowns is a subspace of $\mathbb{R}^n$.	[P170]	A 的零空间定理 m x n 矩阵 A 的零空间是$\mathbb{R}^n$的子空间（这是因为 Ax = 0 的解向量是 n 维的，所以它是 n 维空间的子空间） 也就是说，有着 m 个方程 n 个未知数的方程组 Ax=0 的通解是$\mathbb{R}^n$的子空间.
basis	[P170]	基

Theorem 13. Theorem for column space of A **The pivot columns of a matrix A form a basis for the column space of A**	**[P172]**	A 的列空间定理 A 的主元列形成了 A 的列空间的一个基。
coordinate vector of x （relative to B）	**[P176]**	X 相对于 B 的坐标向量 (对照解析几何中，相对于 x 轴,y 轴,z 轴的坐标)
dimension of a subspace **The dimension of a nonzero subspace H, denoted by dim H, is the number of vectors in any basis for H. The dimension of the zero subspace is 0.**	**[P177]**	子空间的维数 非零子空间的维数，用 dim H 表示，它是 H 的任意一个基中，向量的个数。零子空间的维数定义成 0 （注意： 与向量的维数区别！）
rank	**[P178]**	秩
Theorem 14. The Rank Theorem **If a matrix A has n columns then rank A + dim Nul A = n**		定理 14 矩阵的秩定理 如果矩阵 A 有 n 列，则 A 的秩+ A 的零空间的维数 = n (回忆第一章 r+ p = n, 不知道？ 罚你看第一章秘籍 100 遍) r 是 主元列的个数 p 是自由变量的个数，Ax=0 有多少自由变量，就有多少线性无关的基础解向量，也就是说 A 的零空间的维数是 p.
Theorem the invertible matrix theorem **m. The columns of A form a basis of $\mathbb{R}^n$.** **n. Col A = $\mathbb{R}^n$.** **o. dim Col A = n.** **p. rank A = n.** **q. Nul A = {0}** **r. dim Nul A = 0**	**[P179]**	可逆矩阵性质定理 续 m. A 的列向量形成了$\mathbb{R}^n$的一个基 n. **Col A = $\mathbb{R}^n$.** o. dim Col A = n. p. rank A = n. q. Nul A = {0} **r.** dim Nul A = 0 注：这是因为 A 可逆，A 可以初等变换为单位阵，单位阵地列向量都线性无关。因为初等变换不改变线性相关性，则说明 A 的 n 个列向量也都线性无关。 Ax=0 只有零解。 为什么初等变换不改变线性相关性？ 因为初等变换不改变方程组 Ax=0 的解。

Chapter 3

determinant	**[P187]**	行列式
(i,j)-cofactor **$(-1)^{i+j}\det A_{ij}$**	**[P165]**	代数余子式
cofactor expansion	**[P165]**	余因子展开式
Theorem 2 det of a triangular matrix **If A is a triangular matrix, then det A is the product of the entries on the main diagonal of A**	**[P189]**	定理 2 三角矩阵的行列式定理 三角矩阵的行列式是该矩阵的主对角线上元素的乘积。
Theorem 3 row operations on determinant **a. If a multiple of one row of A is added to another row to produce a matrix B, then det B = det A** **b. If two rows of A are interchanged to produce B,then detB = - detA** **c. If one row of A is multiplied by k to produced B, then detB = k detA**	**[P192]**	定理 3 矩阵行变换与对应行列式的值 a. 把 A 的某一行的倍数加到另一行得到矩阵 B，则 detB = detA b. 若 A 的两行互换得到矩阵 B，则 detB = - detA c. 若 A 的某一行乘以 k 得到矩阵 B, detB = k detA
Theorem 4 use determinant to investigate whether matrix is invertible **A square matrix A is invertible iff det A $\neq 0$**	**[P194]**	定理 4 用行列式判可逆 一个方阵 A 可逆当且仅当 det A $\neq 0$
Theorem 5 determinant of transpose of A **If A is an n x n matrix, then det A^T = det A**	**[P196]**	定理 5 转置矩阵的行列式 一个方阵 A，它的转置矩阵的行列式和它本身的行列式值相等。
Theorem 6 Multiplicative Property **If A and B are an n x n matrices, then det AB = (det A) (det B)**	**[P196]**	定理 6 矩阵乘法的行列式 方阵 A 和 B 乘积的行列式等于 A 的行列式乘以 B 的行列式 det AB = (det A) (det B)
Theorem 7 Cramer's Rule **Let A be an invertible n x n matrix. For any b in $\mathbb{R}^n$, the unique solution x of Ax = b has entries given by** $$x_i = \frac{\det A_i(\mathrm{b})}{\det A}$$	**[P201]**	定理 7 克莱姆法则 设 A 是一个可逆 n 阶方阵，对于$\mathbb{R}^n$中任意向量 **b**，方程组 **Ax=b** 的唯一解可用下面的方法计算： $$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}$$
adjugate	**[P203]**	伴随矩阵
Theorem 8 An Inverse Formula **Let A be an invertible n x n matrix. Then** $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$		定理 8 逆矩阵计算公式 $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

Chapter 4

Vector space	**[P215]**	向量空间
Subspace	**[P220]**	子空间
Zero Subspace	**[P220]**	零子空间
Subspace spanned by {v1…vp}	**[P221]**	由向量**{v1…vp}**生成（张成）的子空间
Null space of an m x n matrix A (written as Nul A) **Nul A is a subspace of R^n**	**[P226-227]**	m x n 矩阵 A 的零空间（注意与零子空间区别开来）。
Column space of an m x n matrix A (written as Col A) **Col A is a subspace of R^m**	**[P229]**	矩阵 A 的列空间 记作 **Col A** Col A 是 **R^m** 的子空间
Basis **Pivot columns of A form a basis for Col A**	**[P238]** **[P241]**	基 矩阵 A 的主元列形成了 **Col A** 的基
Coordinates of x relative to the basis B	**[P246]**	向量 x 相对于基 B 的坐标
Coordinate vector of x	**[P247]**	向量 x 相对于基 B 的坐标向量
Coordinate mapping	**[P247]**	坐标映射
Dimension	**[P256-257]**	维数
Rank **rank A + dim Nul A = n**	**[P265]**	秩
Invertible matrix theorem	**[P267]**	可逆矩阵的秩、维数定理
Change of basis **$B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1,\dots,c_n\}$, given $[x]_B$ (coordinates of vector x relative to the basis B), and $[b_1]_C, \dots, [b_n]_C$ (coordinates of vectors $b_1, \dots, b_n$ relative to the basis C);** **Then: $[x]_C = \underset{C \leftarrow B}{P}[x]_B$** **$\underset{C \leftarrow B}{P} = [[b_1]_C, \dots, [b_n]_C]$**	**[P273]**	基的变换 设 **$B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1,\dots,c_n\}$, $[x]_B$** 是 **x** 相对于 **B** 上的坐标，并且**$[b_1]_C, \dots, [b_n]_C$** 是基 **B** 相对于 **C** 的坐标。 **$[x]_C = \underset{C \leftarrow B}{P}[x]_B$** 其中$\underset{C \leftarrow B}{P} = [[b_1]_C, \dots, [b_n]_C]$

Chapter 5

Eigenvector; Eigenvalue	**[P303]**	特征向量；特征值
Eigenvectors correspond to distinct eigenvalues are linearly independent	**[P307]**	对应于不同特征值的特征向量线性无关
n x n matrix A is invertible iff: **0 is not an eigenvalue or** **det A $\neq$ 0**	**[P312]**	**n x n** 矩阵 **A** 是可逆的，当且仅当： **0** 不是特征值 **det A $\neq$ 0**
Characteristic equation: **det $(A - \lambda I) = 0$, or written as $\|A - \lambda I\| = 0$**	**[P313]**	特征方程
Similar matrix have the same characteristic polynomial and eigenvalues	**[P317]**	相似矩阵具有相同的特征值
Diagonalization **A is diagonalizable iff A has n independent eigenvectors**	**[P320]**	对角化 A 是可对角化的当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量。
An n x n matrix with n distinct eigenvalues is diagonalizable.	**[P323]**	

Chapter 6

Inner product / dot product	**[P375]**	内积　点积
Length of vector	**[P376]**	向量长度
Unit vector	**[P377]**	单位向量
Normalizing	**[P377]**	单位化
Distance between two vectors	**[P378]**	向量之间的距离
Orthogonal **u•v = 0**	**[P379]**	正交的 **u•v = 0**
Orthogonal complement	**[P380]**	正交补
Orthogonal basis	**[P385]**	正交基
Orthogonal projection **Orthogonal projection of y onto u**	**[P387]**	正交投影 Y 在 u 上的正交投影
Orthonormal **Orthonormal set** **Orthonormal basis**	**[P389]**	标准正交 标准正交集合 标准正交基
Orthogonal decomposition	**[P395]**	正交分解
Gram-Schmidt process	**[P402]**	格莱姆-施密特方法
QR factorization	**[P405]**	QR 分解
Least-Squares Problem	**[P410]**	最小二乘法
Inner product space	**[P428]**	内积空间
Cauchy-Schwarz Inequality	**[P432]**	柯西-施瓦茨不等式
Triangle Inequality	**[P433]**	三角不等式

Chapter 7

Symmetric matrix	**[P450]**	对称矩阵
Orthogonally diagonalizable	**[P450]**	可正交对角化
Spectral decomposition	**[P453]**	谱分解
Quadratic form	**[P456]**	二次型
Matrix of quadratic form	**[P456]**	二次型的矩阵
Change of variable	**[P457]**	变量变换
Principal axes theorem	**[P458]**	主轴定理
Positive definite **Negative definite** **Indefinite**	**[P461]**	正定 负定 不定
Positive semidefinite **Negative semidefinite**	**[P461]**	半正定 半负定
Constrained optimization	**[P463]**	条件优化　（注意优化方法）