习题4-1 # 中山大學 本科生考试草稿纸 2011/4/18—81

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.180.1 验证函数 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 在区间 $[0,1]$ 及 $[1,2]$ 上满足罗尔定理的条件并分别求出导数为0的点。

证：① $f(0)=0$，$f(1)=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件。

② $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，$f(1)=0$，$f(2)=8-12+4=0$

从而，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上满足罗尔定理的条件。

③ $f'(x)=3x^2-6x+2 \overset{令}{=} 0$，从而 $x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\times3\times2}}{2\times3}=\dfrac{6\pm\sqrt{12}}{6}=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

P.180.2 讨论下列函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是否满足罗尔定理的条件.

若满足，求 $c\in(-1,1)$，使 $f'(c)=0$。

(1) $f(x)=(1+x)^m\cdot(1-x)^n$； m,n 为整数。

证：$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续，在 $(-1,1)$ 内可导；并 $f(-1)=f(1)$；

从而，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理的条件。

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1}\cdot(1-x)^n+(1+x)^m\cdot n(1-x)^{n-1}\cdot(-1)$$
$$=(1+x)^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}[m(1-x)-n(1+x)]$$
$$=(1+x)^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}[(m-n)-(m+n)x] \overset{令}{=} 0，\text{则 } x=\frac{m-n}{m+n}.$$

(2) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$； $f'(x)=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $(x\neq0)$

$f(x)$ 在 $x=0$ 不可导。从而，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 不满足罗尔定理。

P.180.3 写出函数 $y=f(x)=\ln x$ 在 $[1,e]$ 上的微分中值公式，并求 ξ。

解：$f(e)-f(1)=f'(\xi)\cdot(e-1)$

$\ln e-0=\dfrac{1}{\xi}(e-1)$，$\xi=e-1$.