第十六章　集论与图论不等式

§1　集论不等式

1.　**基数不等式**:若集合 A 与 B 之间存在满单射(即一一映射),则称 A 与 B 对等,这时称 A 与 B 有相同的基数(或势),A 的基数记为 $|A|$(有的著作中记为 $\overline{\overline{A}}$ 或 card A).

若 A 与 B 的一个子集 B_0 对等,则称 $|A|\leqslant|B|$,若 $|A|\leqslant|B|$ 且 A 不与 B 对等,则称 $|A|<|B|$. 自然数集 N 的基数称为可数基数,记为 $|N|=a$,实数集 R^1 的基数称为连续统基数,记为 $|R^1|=c$.

(1)　若 $|A_1|\leqslant|A_2|$, $|A_2|\leqslant|A_3|$,则 $|A_1|\leqslant|A_3|$.

(2)　非空集 A 的幂集 $P(A)$ 的基数 $|P(A)|>|A|$.

(3)　$a<c<2^c$.

见[146].

(4)　**König 不等式**:任何基数 α 可以看成与其基数 α 的最小序数一致,特别地,a 对于序数 ω_0,c 对应于序数 ω_1,等等,于是全体基数类可以看成全体序数类的子类,若 $\forall t\in T.\ \alpha_t<\beta_t$, $|T|\geqslant\omega_0$,则

$$\sum\{\alpha_t:t\in T\}<\prod\{\beta_t:t\in T\}.$$

若取 $T=N$,且若 $1<\alpha_n<\alpha_{n+1}$,则

$$\alpha_{\omega_0}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots<\alpha_1\alpha_2\cdots.$$

(5)　设集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 满足条件:

①　若 $\alpha_1,\alpha_2\in I,\alpha_1\neq\alpha_2$,则 $|A_{\alpha_1}|\neq|A_{\alpha_2}|$;

②　集 $\{|A_\alpha|:\alpha\in I\}$ 无最大元,则

$$\left|\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right|<\left|\prod_{\alpha\in I}A_\alpha\right|.$$

(见[148]P.19)

2.　**基数不变量不等式**:使每个空间对应一个无穷基数的函数,它在同胚空间上取相同值,称为**基数不变量**(或**基数特征**). 设 X 为任意拓扑空间,一个平凡的不变量就是集合的基数 $|X|$. 它的权 $\omega(X)$ 是 X 的基的最小基数,它的密度 $d(X)$ 是 X 的稠子集的最小基数. Suslin 数 $c(X)$ 是最小的无穷基数 τ,它使得每一个两两不交的非空开集族的基数不超过 τ,Lindelöf 数 $l(X)$ 是最小的无穷基数 τ,它使得 X 的任意开覆盖都有一个基数 $\leqslant\tau$ 的子覆盖,它们之间成立不等式:

(1)　$c(X)\leqslant d(X)\leqslant\omega(X)$, $l(X)\leqslant\omega(X)$. 但 $d(X)$ 与 $l(X)$ 之间不可比较.

(2)　存在具有不可数权的可数正规 T_1 空间,成立

$$d(X) \leqslant |X|,\ l(X) \leqslant |X|;$$

(3) 若 X 为 T_0 空间，$|X| \leqslant \exp(\omega(X))$；

(4) 设 X 为 Hausdorff 空间，则 $|X| \leqslant \exp[\exp d(x)]$，$w(x) \leqslant \exp|X|$.

[94]Ch1 - 2 中还有大量类似的不等式，由于涉及过多的专有名词，本书从略.

3. **Fisher 不等式**：t 设计是 m 集合 A 上的一个 k 子集(区组)系，使得 A 的每一个 t 子集恰好出现在 λ 个区组里. 设 b 是 t 设计中的区组数，则

$$b \geqslant \begin{cases} \binom{m}{s}, & 若\ t = 2s, m \geqslant k+2, \\ 2\binom{m-1}{s}, & 若\ t = 2s+1, m-1 \geqslant k+s. \end{cases}$$

(见[107]5:127.)

4. **集合测度不等式**：设 $(X, \sum, \mu)$ 为测度空间. $E_k \in \sum$，μ^* 为外测度，则

(1) $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$；

(2) $\mu(\liminf\limits_{k\to\infty} E_k) \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} \mu(E_k)$；

(3) 令 $A_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} E_j$，若存在 k_0，使得 $\mu(A_{k_0}) < \infty$，则

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k) \geqslant \limsup_{k\to\infty} \mu(E_k);$$

(4) 若 $\mu^*(A), \mu^*(B) < \infty$，则

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A\Delta B)，式中\ A\Delta B = (A-B)\cup(B-A);$$

(5) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$；

(6) 设 $\mu(E) > 0$，f 是 E 上非负可测函数，且有

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f \mathrm{d}\mu \geqslant c_1 > 0, \quad \frac{1}{\mu(E)}\int_E f^2 \mathrm{d}\mu < c_2.$$

令 $E_\delta = \{x \in E: f(x) > \delta c_1\}$，$\delta > 0$，则

$$\mu(E_\delta) \geqslant \mu(E)\frac{(1-\delta)^2 c_1^2}{c_2}. \quad (见[119]P.338)$$

§2 图论不等式

三有序组 $(V(G), E(G), \varphi_G)$ 称为图，其中 $V(G)$ 是非空结点集合，$E(G)$ 是边集合，φ_G 是边集 E 到结点无序偶(或有序偶)集合上的函数. 因为每条边总是关联两个结点，所以，图常记为 $G = (V, E)$. 在 G 中结点 $v \in V$ 关联的边数称为结点度数，记为 $\deg(v)$，$\Delta(G) = \max\{\deg(v): v \in V(G)\}$ 称为图 G 的最大度，$\delta(G) = \min\{\deg(v): v \in V(G)\}$ 称为图 G 的最小度；不含有平行边和环的图称为简单图，每对结点间都有边相连的简单图称为完全图. 若 $G_1 = (V_1, E_1)$ 使得 $E_1 \subset E$，$V_1 \subset V$，称 G_1 为 G 的子图.

1. **Turan 不等式**：不含 r 点完全图 K_r 的 n 点图的边数 $m \leqslant \dfrac{(r-2)n^2}{2(r-1)}$，$r \geqslant 2$.