

习題 2-3 中山大學 本科生考試草稿紙 2011/4-29



警告

《中山大學授予學士學位工作細則》第七條：“考試作弊者不授予學士學位。”

P.94.1 當 $x \rightarrow 0$ 時，下列各函數是 x 的几階元小？

(1) $y = x + x^2 + 100x^3$;

解：由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 10x^2 + 100x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x + 100x^2) = 1$

故， y 是 x 的 1 階元小。

(2) $y = (\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) \sin x$;

解：由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) \cdot \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

故， y 是 x 的 2 階元小。

(3) $y = x \cdot (1 - \cos x)$

解：由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (1 - \cos x)}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$

故， y 是 x 的 3 階元小。

P.95.2 已知：當 $x \rightarrow 0$ 時， $\alpha(x) = O(x^2)$ ，證明： $\alpha(x) = O(x)$

證：由已知 $\alpha(x) = \eta(x) \cdot x^2$

$$\Rightarrow \alpha(x) = [\eta(x) \cdot x] \cdot x$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0$ ，故 $\lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) \cdot x = 0$

故 $\alpha(x) = O(x)$ 。

方法 2.

由條件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^2} = 0$ ，故 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\alpha(x)}{x^2} = 0$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = 0$ ， $\alpha(x) = O(x)$ 。