
普通物理学
中山大学
余非人

第19章　相对论基础

§ 1 经典力学基本原理

§ 2 相对论基本原理

§ 3 相对论速度和加速度变换公式

§ 4 狭义相对论力学基础

§ 5 例题

§1 经典力学基本原理

1. 绝对时空观

- **空间概念的绝对性：** 空间是绝对的，它均匀地，以完全一样的，静止不动的方式存在着，它与物质的存在和运动无关，也与观察者所在的参考系无关。
- **时间概念的绝对性：** 时间是绝对的，它均匀地，以完全一样的，永远不变的方式流逝着，它与物质的存在和运动无关，也与观察者所在的参考系无关。
- **同时概念的绝对性：** 两个事件是否同时发生是绝对的，它与物质的存在和运动无关，也与观察者所在的参考系无关。

2. 伽利略坐标变换

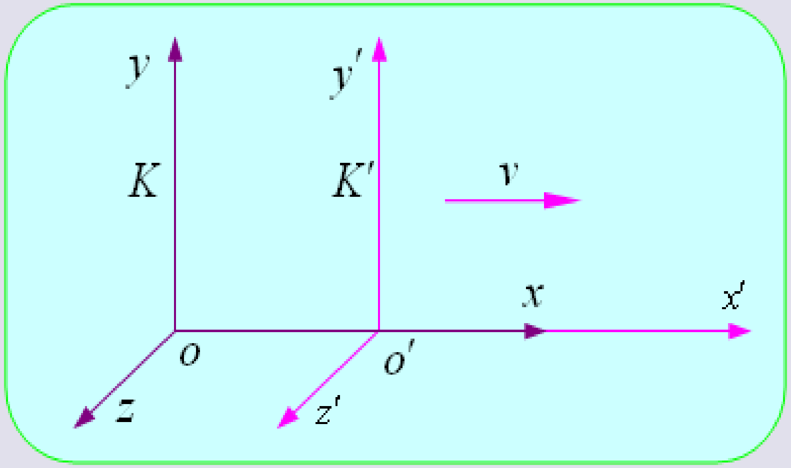
- **伽利略坐标变换：**两个惯性参照系 K 和 K'，参照系 K' 沿 ox 轴以速度 v 匀速地运动，在 $t=0$ 时刻，参照系 K' 的原点 o' 和坐标轴与参照系 K 的原点 o 和坐标轴完全重合。根据绝对时空观，参照系 K 与 K' 之间的坐标变换关系为伽利略坐标变换。

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$



- **绝对空间：** 物体的大小是绝对的，它与其相对观察者（参照系）的运动无关。

$$\Delta x' = \Delta x - v\Delta t \overset{\Delta t=0}{=} \Delta x \qquad \Delta y' = \Delta y \qquad \Delta z' = \Delta z$$

- **绝对时间：** 物理过程经历的时间是绝对的，它与其相对观察者（参照系）的运动无关。

$$\Delta t' = \Delta t$$

- **绝对同时性：** 两个事件是否同时发生是绝对的，它与其相对观察者（参照系）的运动无关。

$$\Delta t' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 0$$

- **时空观与坐标变换：** 有怎样的时空观就有怎样的坐标变换，有怎样的坐标变换就有怎样的时空观。坐标变换是对时空观的定量描述，伽利略坐标变换是对绝对时空观的定量描述。

3. 伽利略相对性原理

- **伽利略相对性原理：**伽利略通过观察作匀速直线运动的封闭船舱中的力学现象得出了如下伽利略相对性原理。
  - ✧ 一切彼此作匀速直线运动的惯性参照系，对于描写机械运动的力学规律来说是完全等价的，不存在特殊优越的惯性参照系。
  - ✧ 在一个惯性参照系内部所作的任何力学实验，都不能确定该惯性参照系本身是处在静止状态，还是处在匀速直线运动状态。

- **相容性：**伽利略坐标变换、经典力学和伽利略相对性原理三者具有相容性。

✧ 伽利略坐标变换为：

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_R t \qquad t' = t \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}' = \vec{a}$$

✧ 经典力学认为，在参照系K和K'中，质点的质量和所受的力都相等。

$$m' = m, \quad \vec{F}' = \vec{F}$$

✧ 牛顿定律在惯性参照系K中成立，根据伽利略坐标变换，可以推导得到牛顿定律在K'中也成立，即描写机械运动的力学规律的牛顿定律在任何参照系中都具有相同的形式。

由： K中的牛顿定律： $\vec{F} = m\vec{a}$

得： K'中的牛顿定律： $\vec{F}' = m'\vec{a}'$

§2 狭义相对论基本原理

1. 狭义相对论基本原理：

- **爱因斯坦相对性原理：** 物理定律在一切惯性参考系中都具有相同的数学表达形式。
- **光速不变原理：** 在彼此相对作匀速直线运动的任一惯性参考系中，所测得的光在真空中传播速度都相等。

- **爱因斯坦相对性原理的来源：**爱因斯坦相对性原理是伽利略相对性原理的推广。爱因斯坦认为相对性原理是物质世界最完美的基本原理，它的完美性就在于它的统一性，即物理定律的形式不因参照系的选择不同而有所不同，它不但适用于经典力学，也适用于一切物质运动规律。
- **光速不变原理的来源：**光速不变原理是迈克耳孙和莫雷实验的结果。如果承认光速不变原理，则迈克耳孙和莫雷实验可以得到解释。如果不承认光速不变原理，则迈克耳孙和莫雷实验就无法得到解释。

- **迈克耳孙和莫雷实验：**它是利用迈克耳孙干涉仪测量地球相对"以太"运动速度的实验，"以太"是经典力学假设的绝对静止参照系。根据绝对时空观的伽利略坐标变换，如果光在"以太"绝对静止参照系中的传播速度为c，那么光在运动的地球参照系中的传播速度不总是c，它与光的传播方向有关，因此，在地球运动参照系中的迈克耳孙和莫雷实验，理论上可以观察到干涉效应，但是迈克耳孙和莫雷在不同地理条件，不同季节条件下多次进行实验，都没有观察到理论上的干涉效应。如果假设光在任何参照系，沿任何方向传播的速度都是c，那么迈克耳孙和莫雷实验，在理论上就没有干涉效应，这与实验吻合。

- **光速不变原理否定了绝对时空观：**光速不变原理说明所有的惯性参照系是等价的，不存在特殊的“以太”绝对参照系，否定了“以太”绝对参照系的存在，也就否定了绝对时空观，因为“以太”绝对参照系的存在是绝对时空观的直接结果。
- **光速不变原理与爱因斯坦相对性原理具有相容性：**光的传播规律是物质基本的运动规律，光速这个物质基本的运动规律在任何惯性参照系中都一样，它满足爱因斯坦的相对性原理。

2. 洛伦兹坐标变换

- **洛伦兹坐标变换：**由狭义相对论的两条基本原理推导出的坐标变换关系称为洛伦兹坐标变换。洛伦兹坐标变换是狭义相对论的基础。

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

- **光速是物体运动的最高速度：**当参照系的运动速度大于光速时，洛伦兹坐标变换将无意义，这说明参照系的速度不能大于光速。参照系必须建立在物体之上，参照系的速度不能大于光速，说明物体的速度也不能大于光速。光速为物体运动的最高速度，它与光速不变是等价的。

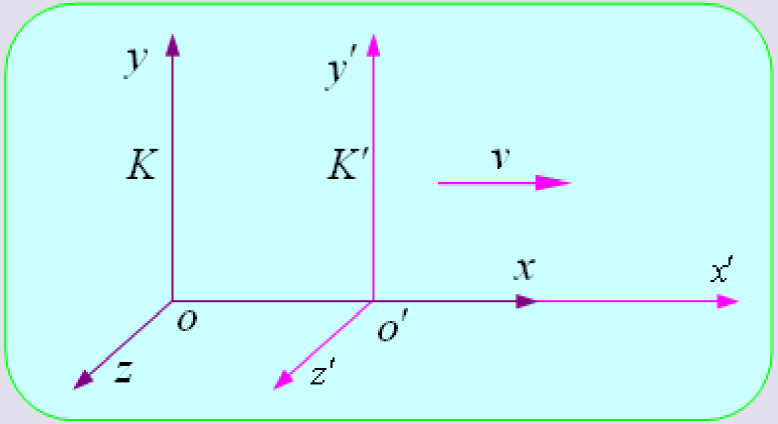
- **洛伦兹坐标变换的低速极限为伽利略坐标变换：**当两坐标系相对速度与光速相比很小时，洛伦兹变换就蜕化为伽利略坐标变换。这说明洛伦兹坐标变换是对高速和低速运动都成立的变换，它包含了低速运动的伽利略坐标变换。

$$v << c \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) & \Rightarrow \quad x' &= x - vt \\ y' &= y & y' &= y \\ z' &= z & z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) & \Rightarrow \quad t' &= t \end{aligned}$$

3. 洛伦兹坐标变换推导

- **两个相对运动的惯性参照系：**两个惯性参照系K和K'，参照系K'沿ox轴以速度v匀速地运动，在$t=0$时刻，参照系K'的原点o'和坐标轴与参照系K的原点o和坐标轴完全重合。



- **时间和空间的均匀性假设：**对两个特定事件，这两个事件发生的空间间隔与时间间隔不会因为它们发生的空间位置和时刻不同而有所不同。比如粒子的寿命和一个原子的大小。

- **惯性坐标系的坐标变换是线性变换：** 时间和空间都具有均匀性，因此，时间和空间的变换关系必须是线性关系，如果变换关系不是线性的，那么，对两个特定事件的空间间隔与时间间隔的测量结果就与该间隔在坐标系中的位置与时间有关，从而破坏了时空的均匀性。
- **坐标变换是齐次的：** 因为在零时刻两个坐标的原点重合，因此，坐标变换是齐次关系式。
- **坐标变换的形式：** 根据以上要求，坐标变换的形式是线性齐次关系。考虑到参照系 K' 沿 ox 轴以速度 v 匀速运动，坐标变换可取如下形式。

$$x' = c_{11}x + c_{12}t \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = c_{21}x + c_{22}t$$

- **坐标变换对 t' 的导数：**

$$\frac{dx'}{dt'}=c_{11}\frac{dx}{dt'}+c_{12}\frac{dt}{dt'}=c_{11}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt'}+c_{12}\frac{dt}{dt'}=\left(c_{11}\frac{dx}{dt}+c_{12}\right)\frac{dt}{dt'}$$

$$1=c_{21}\frac{dx}{dt'}+c_{22}\frac{dt}{dt'}=c_{21}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt'}+c_{22}\frac{dt}{dt'}=\left(c_{21}\frac{dx}{dt}+c_{22}\right)\frac{dt}{dt'}$$

两个式子之比为

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{\left(c_{11}\frac{dx}{dt}+c_{12}\right)\frac{dt}{dt'}}{\left(c_{21}\frac{dx}{dt}+c_{22}\right)\frac{dt}{dt'}}=\frac{c_{11}\frac{dx}{dt}+c_{12}}{c_{21}\frac{dx}{dt}+c_{22}}$$

$$\left(c_{21}\frac{dx}{dt}+c_{22}\right)\frac{dx'}{dt'}=c_{11}\frac{dx}{dt}+c_{12}$$

- **理想实验 1：** 对原点 o' 运动的观察

  - 在 K 中的观察者看到的是：

$$\frac{dx}{dt} = v$$

  - 在 K' 中的观察者看到的是：

$$\frac{dx'}{dt'} = 0$$

  - 将观察结果代入坐标变换导数式子得：

$$(c_{21}v + c_{22})0 = c_{11}v + c_{12}$$

$$\Rightarrow c_{12} = -vc_{11}$$

- **理想实验 2：** 对原点 o 运动的观察

✧ 在 K 中的观察者看到的是：

$$\frac{dx}{dt}=0$$

✧ 在 K' 中的观察者看到的是：

$$\frac{dx'}{dt'}=-v$$

✧ 将观察结果代入坐标变换导数式子得：

$$-\left(c_{21}0+c_{22}\right)v=c_{11}0+c_{12}$$

$$\Rightarrow c_{12}=-vc_{22}$$

- **光速不变原理的理想实验 3：**对一个沿ox坐标轴方向运动的光子的观察

✧ 在K中的观察者看到的是：

$$\frac{dx}{dt}=c$$

✧ 在K'中的观察者看到的是：

$$\frac{dx}{dt}=c$$

✧ 将观察结果代入坐标变换导数式子得：

$$(c_{21}c+c_{22})c=c_{11}c+c_{12}$$

$$\Rightarrow c_{21}c^2+c_{22}c=c_{11}c+c_{12}$$

- 以 c_{11} 为参变量解方程：

$$\begin{cases} c_{12} = -vc_{11} \\ c_{12} = -vc_{22} \\ c_{21}c^2 + c_{22}c = c_{11}c + c_{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{12} = -vc_{11} \\ c_{22} = c_{11} \\ c_{21} = -\dfrac{vc_{11}}{c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = c_{11}x - vc_{11}t = c_{11}(x - vt) \\ t' = -\dfrac{vc_{11}}{c^2}x + c_{11}t = c_{11}\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c_{11}}{\Delta}(x' + vt') \\ t = \dfrac{c_{11}}{\Delta}\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \qquad \Delta = c_{11}^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)$$

- **相对性原理的理想实验 4：** 根据相对性原理，参照系 K 与参照系 K' 是等价的。

✧ 在 K 中看， K' 沿 ox 轴的正方向运动 $(+v)$，坐标变换是

$$\begin{cases} x' = c_{11}(x - vt) \\ t' = c_{11}\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c_{11}}{\Delta}(x' + vt') \\ t = \dfrac{c_{11}}{\Delta}\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \qquad \Delta = c_{11}^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)$$

✧ 在 K' 中看， K 沿 $o'x'$ 轴的负方向运动 $(-v)$，根据相对性原理，坐标变换应该是

$$\begin{cases} x = c_{11}(x' + vt') \\ t = c_{11}\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{c_{11}}{\Delta}(x - vt) \\ t' = \dfrac{c_{11}}{\Delta}\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \qquad \Delta = c_{11}^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)$$

✧ 相对性原理要求

$$\Delta = c_{11}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$$

$$\Rightarrow c_{11} = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \overset{令}{=} \gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

4. 狭义相对论的相对时空观

- **狭义相对论的时空观是相对时空观：**有怎样的时空观就有怎样的坐标变换，有怎样的坐标变换就有怎样的时空观。伽利略坐标变换所描述的是绝对时空观，洛伦兹坐标变换与伽利略坐标变换不同，它所描述的时空观肯定不是绝对时空观，将它称之为相对时空观。洛伦兹坐标变换可由狭义相对论的两条基本原理导出，所以狭义相对论的时空观是相对时空观。

- **物体的固有长度：**当一个细长的物体在参照系 K' 中与 $o'x'$ 轴平行，且静止地放置时，参照系 K' 中的观察者，他所测量到的长度 $L_0=\Delta x'=x_2'-x_1'$，称为该物体的固有长度。物体的固有长度，是物体相对观察者静止时，观察者所测量的长度。物体的固有长度是不变的，它相对任何观察者都是一样的，只要该物体相对观察者是静止的。

- **物体的长度：** 当参照系 K' 相对参照系 K 以速度 v 沿 ox 轴运动时，其中静止的物体也随 K' 相对 K 以速度 v 沿 ox 轴运动，这时 K 中观察者，他所测量的长度，称为该物体的长度，即 $L=\Delta x=x_2-x_1$。当 K 中观察者测量物体的长度时，由于物体是运动的，所以他必须在同一时刻测量该物体两端的坐标 x_1,x_2，即必须是 $\Delta t=t_2-t_1=0$。物体的长度，相对不同的观察者是不同的，它与物体相对观察者的运动有关。根据洛伦兹坐标变换有：

$$x'=\gamma(x-vt)$$

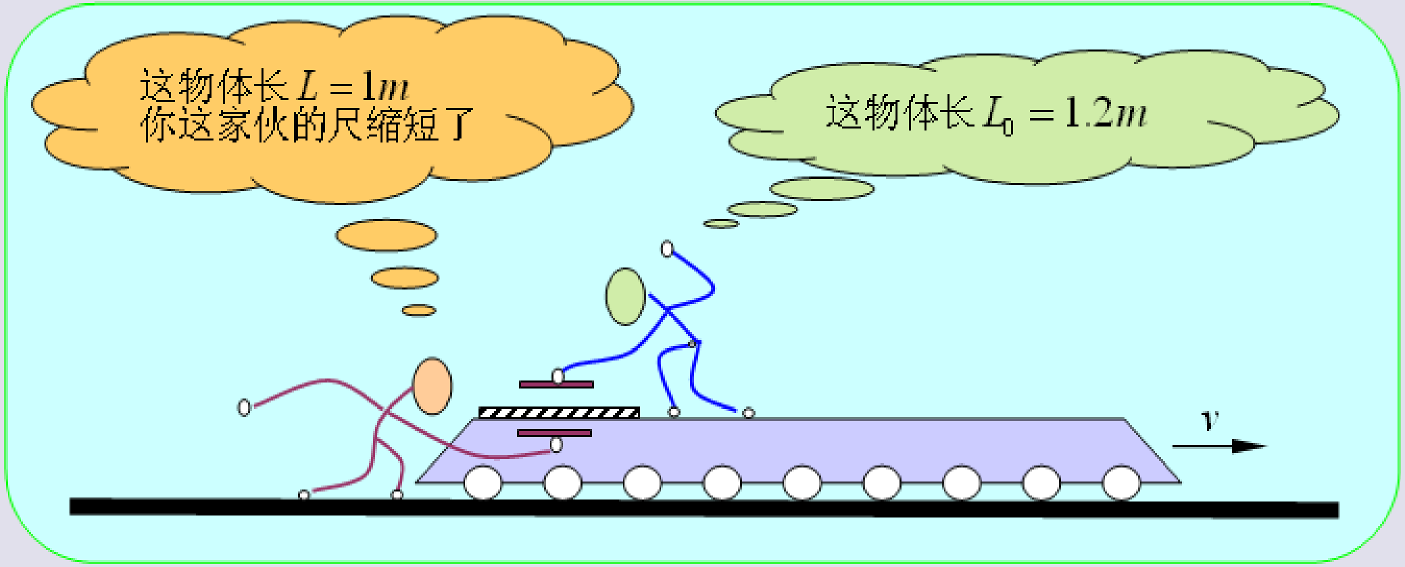
$$\Rightarrow \Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)$$

$$\Rightarrow L_0=\gamma(L-v0) \quad \because \Delta t=0$$

$$\Rightarrow L_0=\gamma L$$

$$\Rightarrow L=\frac{L_0}{\gamma}<L_0 \qquad \gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}>1$$

- **物体的长度收缩：**物体运动时，其长度L小于它的固有长度L_0，即物体运动时，其长度L收缩了。物体运动速度越高，物体的长度收缩得越厉害，特别是，物体运动速度越接近光速，物体的长度收缩得越接近 0。
- **尺收缩：**尺也是物体，所有的尺都是一样的，其固有长度都相同。K'中观察者手里的尺相对K中观察者是运动的，所以，对于K中观察者来说，K'中观察者手里的尺收缩变短了，K'中观察者用该尺去测物体的长度，所测得的长度L_0自然要大于L。反过来说就是L小于L_0。因此，运动物体的长度收缩其实质是运动尺的长度收缩了。



- **空间概念的相对性：**运动尺长度收缩，说明相对观察者运动的空间间隔收缩了，空间运动得越快，空间的间隔收缩得越厉害，空间间隔相对不同的观察者是不同的，即空间概念不是绝对的，是相对的，是相对具体观察者而言的。

- **物理过程的固有时间：**在参照系K'中，当一种物理过程，自始至终处在空间同一位置$\Delta x' = x_2' - x_1' = 0$进行时，参照系$K'$中的观察者，对该过程所测得的时间$T_0 = \Delta t' = t_2' - t_1'$，称为该过程的固有时间。一种物理过程的固有时间，是该过程相对观察者自始至终都处于同一个位置时，观察者所测量的时间。一种物理过程的固有时间是不变的，它相对任何观察者都是一样的，只要相对观察者，该物理过自始至终处于空间的同一位置。

- **物理过程的时间：**当参照系 K' 相对参照系 K 以速度 v 沿 ox 轴运动时，物理过程进行的空间位置也随 K' 相对 K 以速度 v 沿 ox 轴不断运动变化，这时 K 中观测者，他对该物理过程所测得的时间 $T=\Delta t=t_2-t_1$，称为物理过程的时间。物理过程的时间，相对不同的观察者是不同的，它与物理过程进行的空间位置相对观察者运动变化有关。根据洛伦兹坐标变换有：

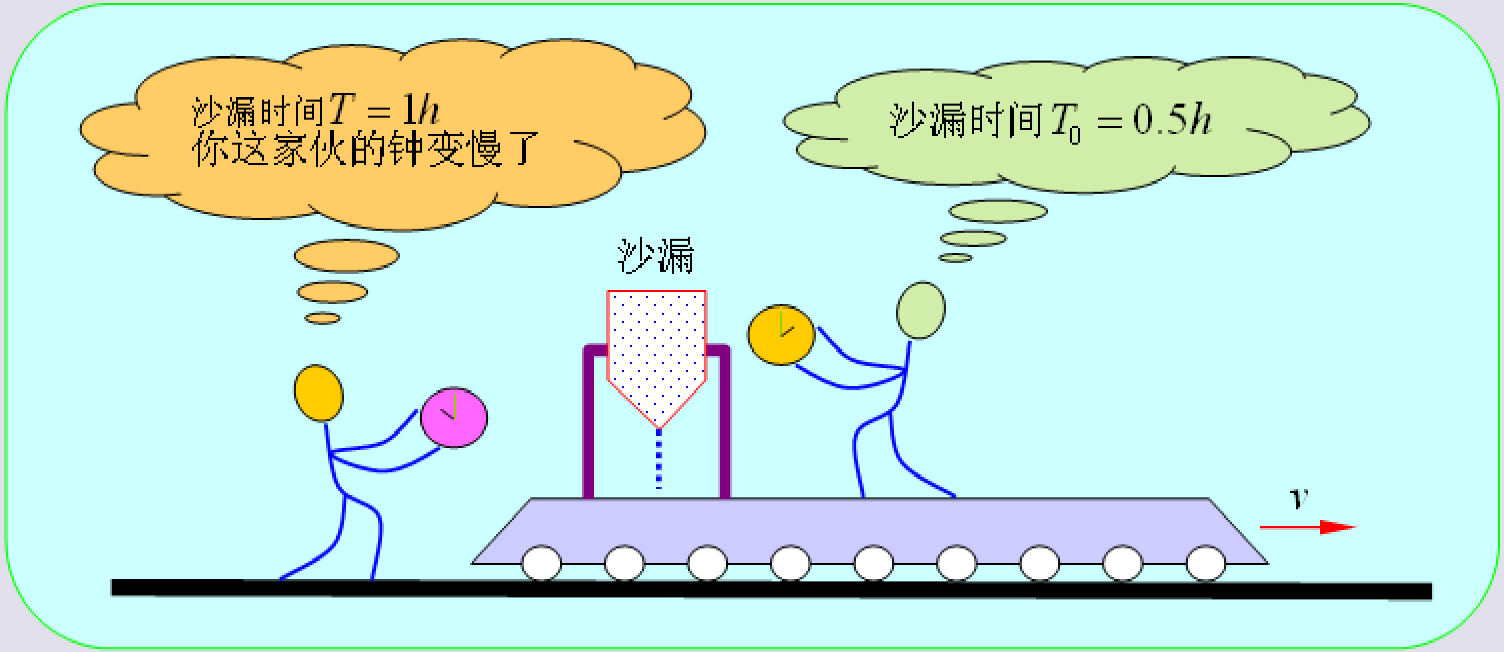
$$t=\gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t=\gamma\left(\Delta t'+\frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow T=\gamma\left(T_0+\frac{v0}{c^2}\right) \qquad \because \Delta x'=0$$

$$\Rightarrow T=\gamma T_0>T_0 \qquad \gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}>1$$

- **物理过程的时间膨胀：**空间位置不断运动变化的物理过程的时间 T 大于它的固有时间 T_0，即物理过程的时间膨胀了，空间位置运动变化速度越高，物理过程的时间膨胀得越厉害，特别是，空间位置运动变化速度越接近光速，物理过程的时间膨胀得越接近无穷长的时间。
- **钟变慢：**时钟的走时过程也是一个物理过程，所有的时钟都是一样的，其固有时间都相同。K' 中观察者手里的钟相对 K 中观察者是运动的，所以，对于 K 中观察者来说，K' 中观察者手里的钟的时间膨胀了，即时钟变慢了（它走 1 秒要花更多的时间），K' 中观察者用这个钟去测量物理过程，所测得的时间 T_0 自然要小于 T。反过来说就是 T 大于 T_0。因此物理过程的时间膨胀实质是运动钟变慢了。



- **时间概念的相对性：**运动时钟的时间膨胀，即钟变慢，说明相对观察者运动时钟的时间间隔与该时钟运动的速度有关，时间间隔相对不同的观察者是不同的，即时间概念不是绝对的，是相对的，是相对具体观察者而言的。

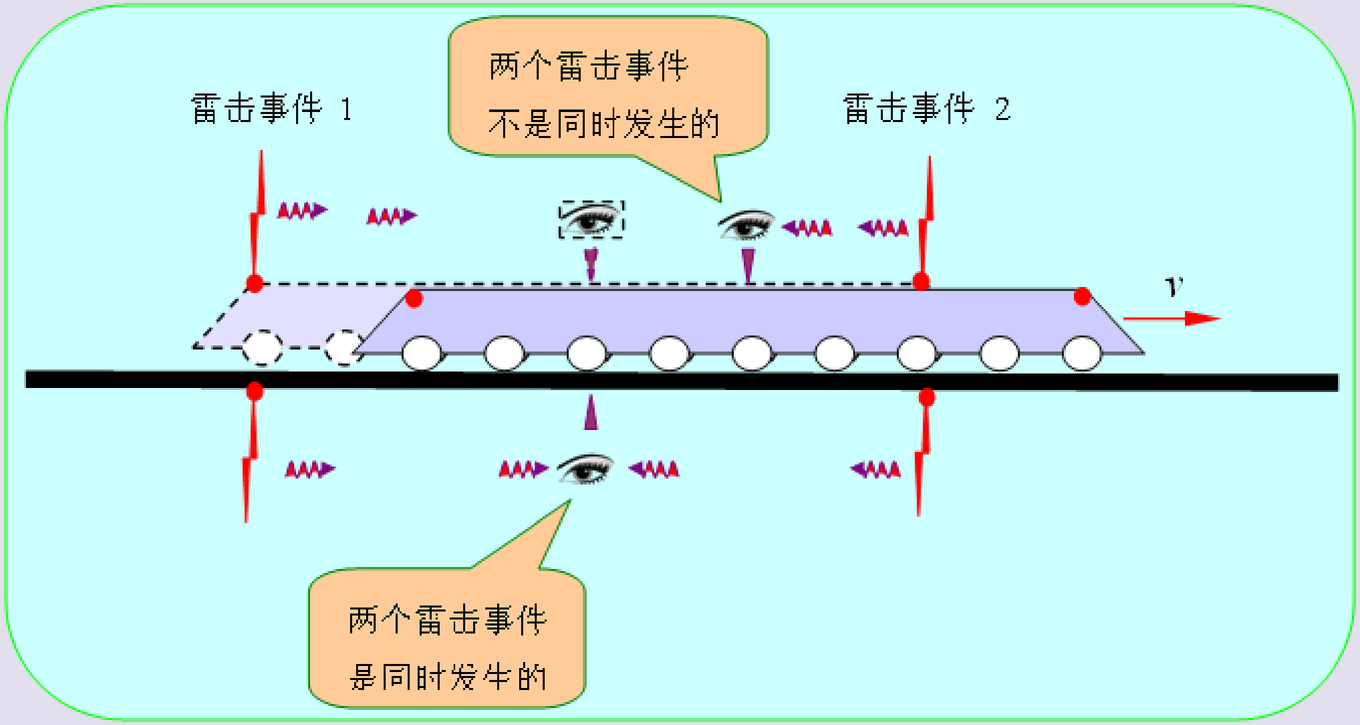
- **同时概念的相对性：** 一个事件的发生，有其地点和时间。设参照系 K' 相对参照系 K 以速度 v 沿 ox 轴匀速运动，如果在参照系 K' 中的观察者，观察到两个不同地点 $(\Delta x' \neq 0)$ 的两个事件，是同时 $(\Delta t' = 0)$ 发生的，则在参照系 K 中的观察者看来，这两个事件不是同时发生的。如果在一个参照系中的观察者，观察到同一个地点同时发生了两个事件，则对任何观察者来说，这两个事件都是同时发生的。因此，同时概念是相对的。这是因为根据洛伦兹坐标变换有：

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \qquad \Rightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\left(0 + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \qquad \because \Delta t' = 0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\frac{v\Delta x'}{c^2}\begin{cases} \neq 0 & \Delta x' \neq 0 \\ = 0 & \Delta x' = 0 \end{cases}$$

- 两个事件“同时”发生的相对性理想实验：



✧ 运动坐标系 K'：一辆匀速前进的列车。

✧ 静止坐标系 K：地面。

✧ 两个事件：在空间两个不同的位置，发生了两道雷电 1 和 2。

- 雷电 1 在地面击出一道痕迹 A，在列车上击出一道痕迹 A’。
  雷电 2 在地面击出一道痕迹 B，在列车上击出一道痕迹 B’。
- 地面的上的观察者刚好站在痕迹 A-B 的中点 C，列车上的观察者刚好站在痕迹 A’-B’的中点 C’。
- 如果地面上的观察者 C 同时看到这两个雷电所发的光，则观察者 C 认为这两个雷击事件是同时发生的。
- 这时列车上的观察者 C’也会同时看到这两个雷电所发的光吗？由于地面参照系 K 中的光的速度为 c，列车参照系 K’中的光的速度也为 c，而列车上的观察者 C’是在运动的，所以列车上的观察者 C’将先看到列车前面 A’处的雷电光 1，后看到列车后面 B’处的雷电光 2，因此列车上的观察者 C’认为两个雷击事件不是同时发生的。

- 两个观察者谁对谁错呢？因为测量方法一样，所以这两观察者说的都对。这说明不同地点的两个事件的同时性不是绝对的，只是个相对的概念，这就是“同时”的相对性。
- 如果能找到一种东西，它有无穷大的速度，用它来传播这两个雷电事件发生的信号，那么两个观察者都会说这两道雷电是同时发生的，“同时”的概念就具有了绝对性，它与观察者所处的参照系无关，遗憾的是这样的东西不存在。如果光速不是不变的，是与光源运动有关的，也不会有上述情况出现，因此“同时”概念的相对性和绝对性与信号传播速度是有限还是无限相关的，也与光速变与不变相关。

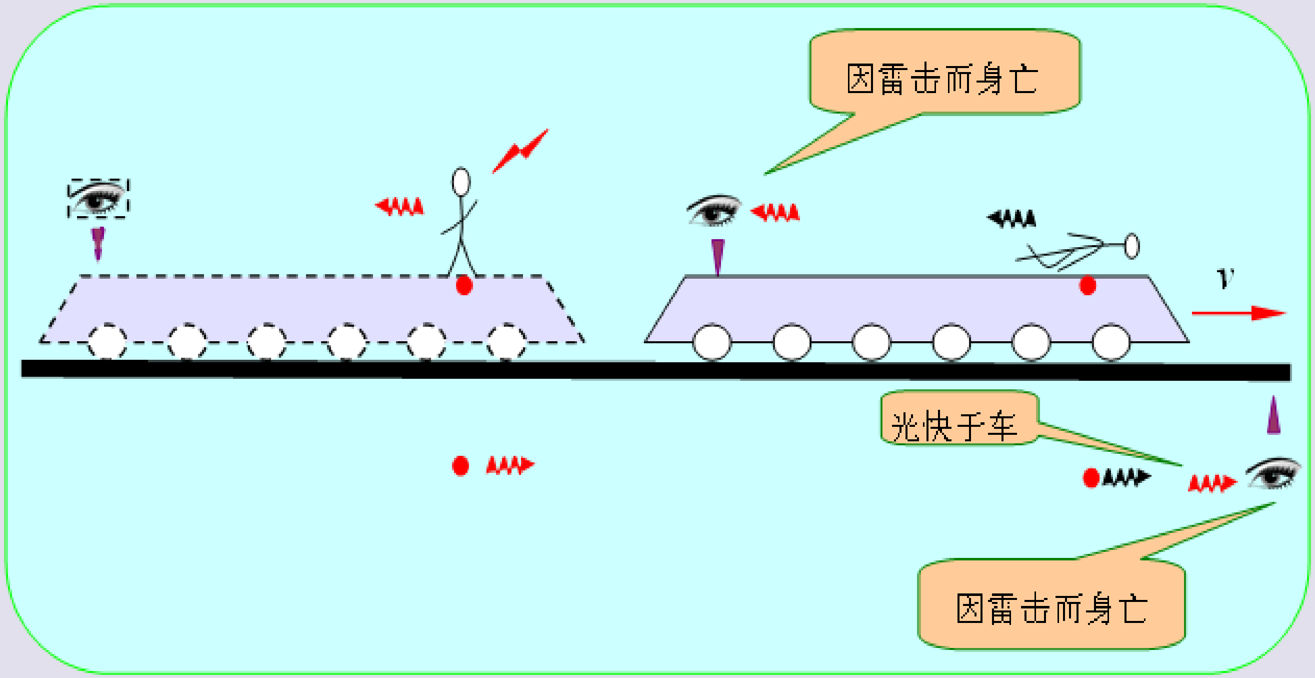
- **因果关系的绝对性：**在 K' 中观察者看到一个静止的物体上发生了一个物理过程，他看到 A 现象出现在先，B 现象出现在后（ $\Delta t' \geq 0$ ），在 K 中观察者看到该物体是运动的，它也看到了该物体上发生的物理过程，并且 A 现象出现在先，B 现象出现在后 $\Delta t \geq 0$ ，即物体的物理过程先后次序的因果关系不因观测者相对物体运动不运动而发生改变，即因果关系是绝对不变的。这是因为根据洛伦兹坐标变换有：

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v0}{c^2}\right) \qquad \because \Delta x' = 0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\Delta t' \begin{cases} > 0 & \Delta t' > 0 \\ < 0 & \Delta t' < 0 \end{cases}$$



§3 相对论速度和加速度变换公式

1. 速度变换

- 洛伦兹变换：

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

- 时间微分：

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) = \gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

- 速度变换：

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dx'}{dt} = \frac{dt}{dt'}\gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right) = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dy'}{dt} = \frac{dt}{dt'}\frac{dy}{dt} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dz'}{dt} = \frac{dt}{dt'}\frac{dz}{dt} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

- 光速不变：

$u_x = c$时

$$u'_x = \frac{(c-v)}{\left(1-\frac{vc}{c^2}\right)} = c\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} = c$$

- 加速度变换：

$$a'_x = \frac{1}{\gamma^3\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^3}\cdot a_x$$

$$a_x = \frac{1}{\gamma^3\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}\cdot a'_x$$

$$a'_y = \frac{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}+\frac{vu_y}{c^2}\right)}{\gamma^2\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^3}\cdot a_y$$

$$a_y = \frac{\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}-\frac{vu'_y}{c^2}\right)}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}\cdot a'_y$$

$$a'_z = \frac{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}+\frac{vu_z}{c^2}\right)}{\gamma^2\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^3}\cdot a_z$$

$$a_z = \frac{\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}-\frac{vu'_z}{c^2}\right)}{\gamma^2\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}\cdot a'_z$$

§4 狭义相对论力学基础

1. 力学的基本原理：

- **力学理论的基础：**时空观是力学理论的基础，因此，描述时空观的坐标变换是力学理论的基础。

  ✧ 绝对时空观是经典力学的基础，因此，描述绝对时空观的伽利略坐标变换是经典力学理论的基础。

  ✧ 相对时空观是相对论力学的基础，因此，描述相对时空观的洛伦兹坐标变换是相对论力学的基础。

- **力学理论的基本原理：** 相对性原理是力学理论的基本原理
  - ✧ 经典力学相对性原理：在伽利略坐标变换下，物理定律形式保持不变，称为伽利略相对性原理。
  - ✧ 狭义相对论力学相对性原理：在洛伦兹坐标变换下，物理定律形式保持不变，称为爱因斯坦相对性原理。
  - ✧ 经典力学和狭义相对论力学都是惯性参照系中的力学。
- **力学理论的物理定律：** 物理定律要满足相对性原理，并能被物理实验所证实。
  - ✧ 经典力学的物理定律：牛顿第二定律 $\bar{F} = m\bar{a}$，它满足伽利略相对性原理，并被大量低速运动的力学实验所证实。
  - ✧ 狭义相对论力学的物理定律：它必须满足爱因斯坦相对性原理，并要求能被大量低速和高速运动的力学实验所证实。

2. 相对论力学的力学量

- **位矢：** 它是描述物体在时空中运动的基本的力学量，它可以导出速度和加速度等力学量。在相对运动速度为 v 的两个惯性参照系 K 和 K' 中有

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \vec{r}' = \vec{r}'(t')$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} \qquad \vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt'}$$

- **质量：** 它是描述物体惯性的基本力学量，在相对运动速度为 v 的两个惯性参照系 K 和 K' 中，物体的质量分别为 m 和 m'。

- **动量：** 它是描述物体运动状态的力学量，在相对运动速度为 v 的两个惯性参照系 K 和 K' 中，物体的动量分别为

$$\vec{p} = m\vec{u} \qquad \vec{p}' = m'\vec{u}'$$

3. 相对论力学定律

- **动量守恒定律：**相对论力学将动量守恒定律作为最基本的力学定律。在相对运动速度为 v 的两个惯性参照系 K 和 K' 中，动量守恒定律具有形同的形式，满足相对性原理。虑两个具有相互作用（碰撞）的物体组成的系统，它们的动量守恒定律是：

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{C} \qquad \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{C}'$$

- **相对论力学定律：**动量守恒定律是相互作用的基本规律，相互作用可以用力来描述，所以，引入力的概念后，动量守恒定律可以用关于力的方程来描述，即相对论力学定律。考虑两个具有相互作用（碰撞）的物体组成的系统：

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{C} \qquad \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{C}'$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1'}{dt'} + \frac{d\vec{p}_2'}{dt'} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1'}{dt'} = -\frac{d\vec{p}_2'}{dt'}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1'}{dt'} = \vec{F}_{12}' = -\vec{F}_{21}' = -\frac{d\vec{p}_2'}{dt'}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad \Rightarrow \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \quad \vec{F}_{12}' = -\vec{F}_{21}'$$

4. 力学量的变换：

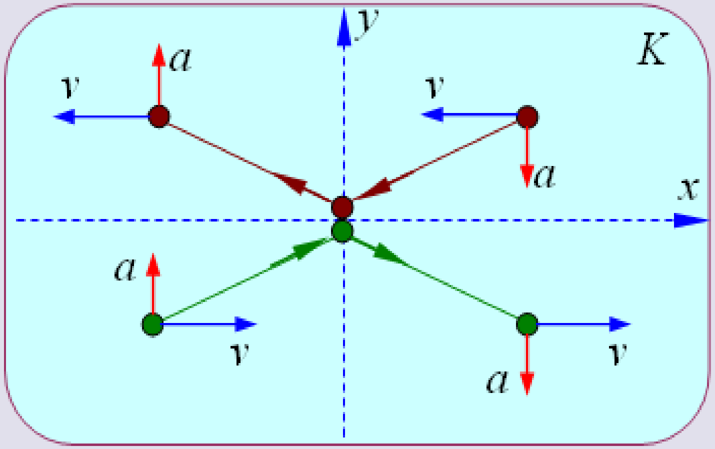
- **力学量的变换：**在相对论中，坐标、速度、加速度、质量和力等力学量，它们一般在不同的参照系中是不相同的，它们的变换关系可以由洛伦兹坐标变换，物理定律和爱因斯坦相对性原理确定，即在不同参照系中，力学量可以不同，但要保证描述各个力学之间关系的物理定律形式不能变。比如 $m \neq m'$，$\vec{u} \neq \vec{u}'$，$\vec{F} \neq \vec{F}'$ 但 $\vec{p} = m\vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{p}' = m'\vec{u}'$ 以及 $\vec{F} = d\vec{p}/dt \;\Rightarrow\; \vec{F}' = d\vec{p}'/dt'$。

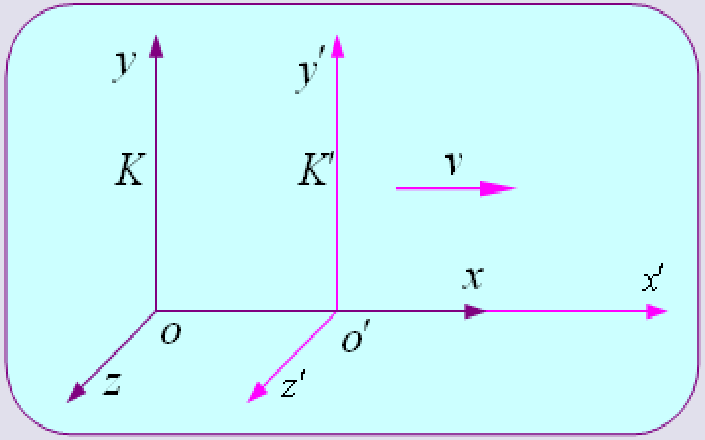
- **相对论质量的变换形式：**质量m是对物体惯性的描述，物体的惯性一方面应该与物体本身的固有特性有关，另一方面它还应该与物体的运动状态有关，所以质量应该是物体速度的函数。由于质量是标量，速度是矢量，所以质量应该是速率的函数，而不应该是速度的函数。根据上述分析，可以给出质量的变换关系为：

在参照系K中　$m = m(u)$　　u是物体在K中的速率

在参照系K'中　$m' = m(u')$　　u'是物体在K'中的速率

- **相对论质量与速率的关系：**它可以通过理想实验来确定。考虑两个相同球的碰撞，它们在相对运动速度为 v 的两个惯性参照系 K 和 K' 中都满足动量守恒定律，因此有





✧ 在参照系 K 中的动量守恒定律：

$$\vec{p}_{1a}+\vec{p}_{2a}=\vec{p}_{1b}+\vec{p}_{2b} \quad \Rightarrow \quad m(u_{1a})\vec{u}_{1a}+m(u_{2a})\vec{u}_{2a}=m(u_{1b})\vec{u}_{1b}+m(u_{2b})\vec{u}_{2b}$$

✧ 在参照系 K' 中的动量守恒定律：

$$\vec{p}'_{1a}+\vec{p}'_{2a}=\vec{p}'_{1b}+\vec{p}'_{2b} \quad \Rightarrow \quad m(u'_{1a})\vec{u}'_{1a}+m(u'_{2a})\vec{u}'_{2a}=m(u'_{1b})\vec{u}'_{1b}+m(u'_{2b})\vec{u}'_{2b}$$

✧ 在参照系 K 中，假设满足动量守恒定律的两球碰撞为

$$\vec{u}_{1a} = vi + aj \qquad \vec{u}_{1b} = vi - aj$$

$$\vec{u}_{2a} = -vi - aj \qquad \vec{u}_{2b} = -vi + aj$$

$$m(u_{1a})\vec{u}_{1a} + m(u_{2a})\vec{u}_{2a} \equiv m(u_{1b})\vec{u}_{1b} + m(u_{2b})\vec{u}_{2b}$$

✧ 在参照系 K' 中，由洛伦兹坐标变换，两球碰撞的速度为

$$\vec{u}'_{1a} = \gamma a j \qquad u'_{1a} = \gamma a$$

$$\vec{u}'_{2a} = -\frac{2v}{(1+\beta^2)} i - \frac{a}{\gamma(1+\beta^2)} j \qquad u'_{2a} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)a^2 + 4c^2\beta^2}}{(1+\beta^2)} = b$$

$$\vec{u}'_{1b} = -\gamma a j \qquad u'_{1b} = \gamma a$$

$$\vec{u}'_{2b} = -\frac{2v}{(1+\beta^2)} i + \frac{a}{\gamma(1+\beta^2)} j \qquad u'_{2b} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)a^2 + 4c^2\beta^2}}{(1+\beta^2)} = b$$

$$\beta = v/c \qquad \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

✧ 在参照系 K' 中，两球碰撞也满足动量守恒定律

$$m(u'_{1a})\vec{u}'_{1a} + m(u'_{2a})\vec{u}'_{2a} = m(u'_{1b})\vec{u}'_{1b} + m(u'_{2b})\vec{u}'_{2b}$$

$$\Rightarrow m(\gamma a)\gamma a j - \frac{2vm(b)}{(1+\beta^2)} i - \frac{am(b)}{\gamma(1+\beta^2)} j = -m(\gamma a)\gamma a j - \frac{2vm(b)}{(1+\beta^2)} i + \frac{am(b)}{\gamma(1+\beta^2)} j$$

$$\Rightarrow m(b) = m(\gamma a)\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)$$ 其中 $b = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)a^2 + 4c^2\beta^2}}{1+\beta^2}$

✧ 取极限 $a \to 0$：

$$b = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)a^2 + 4c^2\beta^2}}{(1+\beta^2)} \overset{a\to 0}{\Rightarrow} b = \frac{2c\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = 2\frac{c^2}{b^2}\left(1 \pm \sqrt{1-b^2/c^2}\right) - 1$$

$$m(b) = m(\gamma a)\gamma^2(1+\beta^2) \overset{a\to 0}{\Rightarrow} m(b) = m(0)\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right) \Rightarrow m(b) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-b^2/c^2}}$$

✧ 令 $b = u$ 是物体的运动速率， 令 $m_0 = m(0)$ 是物体静止时的质量，

则运动物体的质量为：

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

- **力的变换：**力的变换关系可以通过爱因斯坦相对性原理和洛伦兹坐标变换得到，可以证明力在不同的参照系中是不同的，即 $\vec{F} \neq \vec{F}'$。
- **力学问题的分析：**之所以讨论质量的变换关系，是为了得到了质量与速率的关系，如果只是在一个参照系中分析力学问题，则可以不涉及力的变换关系。

5. 相对论质量分析:

- 相对论力学定律:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dm\vec{u}}{dt}$$

$m=\gamma_u m_0$：是物体的相对论质量，它不是恒量

m_0：是物体的静止质量，它是恒量

$\gamma_u=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$， $\beta_u=\dfrac{u}{c}$， u 是物体的运动速度

- **横向质量：**物体在运动速度垂直方向$\hat{e}_\perp$上的惯性称为横向质量。

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dm\vec{u}}{dt}=m\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}\frac{dm}{dt}=m_0\gamma_u\vec{a}+\vec{u}\frac{dm}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot\hat{e}_\perp=m_0\gamma_u\vec{a}\cdot\hat{e}_\perp+\vec{u}\cdot\hat{e}_\perp\frac{dm}{dt}=m_0\gamma_u\vec{a}\cdot\hat{e}_\perp$$

$$F_\perp=m_0\gamma_u a_\perp$$

$$F_\perp=m_\perp a_\perp$$

$$m_\perp=m_0\gamma_u$$

- **纵向质量：** 物体在运动速度方向 $\hat{e}_{//}$ 上的惯性称为纵向质量。

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dm\vec{u}}{dt}=m\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}\frac{dm}{dt}=m_0\gamma_u\vec{a}+\vec{u}\frac{dm}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot\hat{e}_{//}=m_0\gamma_u\vec{a}\cdot\hat{e}_{//}+\vec{u}\cdot\hat{e}_{//}\frac{dm}{dt}$$

$$m_0u\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=m_0u\frac{\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt}}{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^3}=m_0\frac{u^2}{c^2}\frac{\frac{du}{dt}}{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^3}=m_0\gamma_u^3\beta_u^2\frac{du}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot\hat{e}_{//}=m_0\gamma_u\vec{a}\cdot\hat{e}_{//}+m_0\gamma_u^3\beta_u^2\frac{du}{dt}$$

$$F_{//}=m_0\gamma_u a_{//}+m_0\gamma_u^3\beta_u^2a_{//}=m_0\gamma_u a_{//}\left(1+\gamma_u^2\beta_u^2\right)=m_0\gamma_u^3a_{//}$$

$$F_{//}=m_{//}a_{//}$$

$$m_{//}=m_0\gamma_u^3$$

- **相对论质量的特征：**

  - ✧ 物体运动时，物体的运动速率不同，其质量不同：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

  - ✧ 一个物体的质量在不同的惯性参照系中不相同：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad m'=\frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$

$$m'=\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}m$$

$$m'\neq m$$

  - ✧ 物体在静止或低速条件下，其质量回到牛顿质量，它是恒量，这时，相对论力学定律也回到牛顿定律：

$$m=\gamma_u m_0\approx m_0$$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dm\vec{u}}{dt}\approx\frac{dm_0\vec{u}}{dt}=\frac{d\vec{u}}{dt}=m_0\vec{a}$$

- 纵向惯性质量比横向惯性质量大，这说明物体在速度方向的惯性大，在速度垂直方向的惯性小，物体在速度方向的加速难于速度垂直方向的加速，惯性表现为各向异性特征。
- 由于纵向加速难于横向加速，这就使得物体加速度的方向与物体所受力的方向不一致，这也是跟牛顿力学不一样的地方。

$$\bar{F}=\frac{d\bar{p}}{dt}=\frac{dm\bar{u}}{dt}=m\frac{d\bar{u}}{dt}+\bar{u}\frac{dm}{dt}=m_0\gamma_u\bar{a}+\bar{u}\frac{dm}{dt}$$

6. 质量和能量的关系（质能关系）

- 力对运动物体所做的功：

$$
\begin{aligned}
dA &= \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r} = d\vec{p}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}\cdot d\vec{p} \\
&= \vec{u}\cdot\left(\vec{u}dm + md\vec{u}\right) = u^2 dm + m\vec{u}\cdot d\vec{u} \\
&= u^2 m_0 d\gamma_u + m_0\gamma_u u du = m_0 c^2\left[\beta_u^2 d\gamma_u + \gamma_u\beta_u d\beta_u\right] \\
&= m_0 c^2\left[\beta_u^2 d\gamma_u + \frac{1}{2}\gamma_u d\beta_u^2\right] = m_0 c^2\left[d\gamma_u - \left(1-\beta_u^2\right)d\gamma_u - \frac{1}{2}\gamma_u d\left(1-\beta_u^2\right)\right] \\
&= m_0 c^2\left[d\gamma_u - \frac{1}{\gamma_u^2}d\gamma_u - \frac{1}{2}\gamma_u d\left(\gamma_u^{-2}\right)\right] = m_0 c^2\left[d\gamma_u - \frac{1}{\gamma_u^2}d\gamma_u + \frac{1}{\gamma_u^2}d\gamma_u\right] \\
&= m_0 c^2 d\gamma_u = d\left(m_0\gamma_u c^2\right) = d\left(mc^2\right)
\end{aligned}
$$

$$A = mc^2 - m_0 c^2$$

- **物体的质能关系：**根据力对运动物体所做的功，爱因斯坦引入一个经典力学中从未有过能量概念，即，物体的质能关系。
  - ✧ 运动物体的能量：$E = mc^2$
  - ✧ 静止物体的能量：$E_0 = m_0 c^2$
  - ✧ 运动物体的动能：$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$
- **质量和能量：**质量和能量都是物质的重要属性，质量可以通过物体的惯性和万有引力现象而显示出来，能量则通过物质系统状态变化时对外作功，传递热量等形式而显示出来，质能关系式揭示了质量和能量是不可分割的，这个公式建立了这两个属性在量值上的关系，它表示具有一定质量的物质客体也必具有和这质量相当的能量。物体的动能是物体的能量在运动状态与静止状态下的差额。质能关系式在近代物理研究中非常重要，对原子核物理以及原子能利用方面，具有指导的意义，是一根重要的理论支柱。

- **功能原理：**有了爱因斯坦的质能关系，相对论力学也满足功能原理，也遵循能量守恒定律：

$$A = E_2 - E_1 = \Delta E$$

- **动能的低速近似：**相对论动能在低速下回到经典力学的动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma_u - 1) = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

$$= m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots - 1\right] \approx m_0c^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{2}m_0u^2$$

7. 动量和能量的关系

- **动量和能量的关系：**

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{cmu}{mc^2}\right)^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{cp}{E}\right)^2}}$$

$$E^2 - (cp)^2 = \left(m_0 c^2\right)^2$$

或 $\left(\frac{E}{c}\right)^2 = p^2 + (m_0 c)^2$

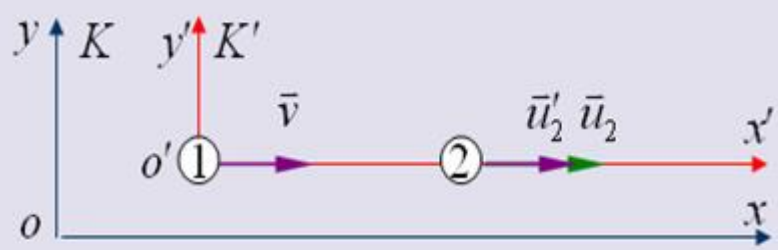
- **能量与动量的统一：**动量和能量的关系揭示了能量与动量是不可分割的，它们是物质属性的两个方面，它们是统一的，就像时间与空间是不可分割统一的一样。

- **光子的能量-质量-动量：**
  - ✧ 光子的静止质量： $m_0 = 0$，($m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{c}{c}\right)^2}} = \dfrac{m_0 \neq 0}{0} = \infty$)
  - ✧ 光子具有能量： E
  - ✧ 光子的质量： $m = \dfrac{E}{c^2}$
  - ✧ 光子的动量： $p = \dfrac{E}{c}$

§5　例题

1. 两个粒子，在参照系K中，粒子1的速度为$\vec{v}=0.9c\vec{i}$，粒子2相对对于粒子1的相对速度为$0.9c\vec{i}$，即在粒子1参照系K'中，粒子2的速度为$\vec{u}'=0.9c\vec{i}$。求在参照系K中，粒子2的速度$\vec{u}$是多少？

解：



$v=0.9c$

$u_x'=0.9c$

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+vu_x'/c^2}=\frac{0.9c+0.9c}{1+0.9^2c^2/c^2}=\frac{1}{1+0.9^2}\times1.8c=0.99c<c$$

$\vec{u}=0.99c\vec{i}$

2. 一个大力士踢出一个半径为 $R=0.2m$ 的球，球飞出去的速度是 $v=0.99999c$，这个大力士看到踢出去的球是什么样子？

解：

$$\gamma=1\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}=1\Big/\sqrt{1-0.99999^2c^2/c^2}=1\Big/\sqrt{1-0.99999^2}=223.61$$

$$R_{x0}=0.2m$$

$$R_{y0}=0.2m$$

$$R_{z0}=0.2m$$

$$R_x=\frac{R_{x0}}{\gamma}=\frac{0.2}{223.61}=8.9\times10^{-4}m=0.89mm$$

$$R_y=R_{y0}=0.2m$$

$$R_z=R_{z0}=0.2m$$

这个大力士看到踢出去的球几乎是个圆盘形的椭球。

3. 在地球上人的固有寿命是$T_{人0}=100$岁，天上神的固有寿命也是$T_{神0}=100$岁，神在天上高速飞行的速度是$v=0.99999c$，求人看神的寿命$T_{神}$是多少？相反，神看人的寿命$T_{人}$是多少？

解：

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1\Big/\sqrt{1-0.99999^2c^2/c^2} = 1\Big/\sqrt{1-0.99999^2} = 223.61$$

$$T_{神} = \gamma T_{神0} = 223.61\times 100 = 22361\text{岁}$$

$$T_{人} = \gamma T_{人0} = 223.61\times 100 = 22361\text{岁}$$

4. 一个电子在电场中被加速，电子质量为 m_{e0}，电子电荷为 e，电场电压为 U，求电子的速度 u。

解：

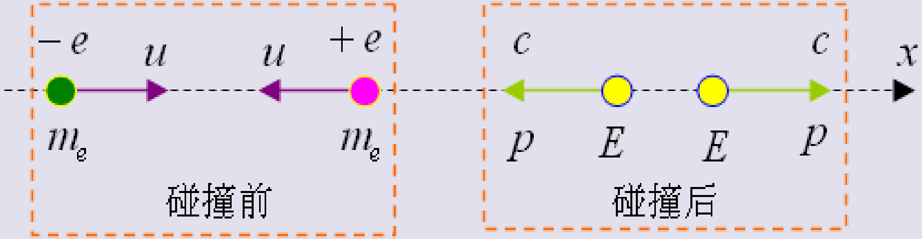
$$E_k = E - E_0 = eU$$

$$m_{e0}\gamma_u c^2 - m_{e0}c^2 = eU$$

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 1 + \frac{eU}{m_{e0}c^2}$$

$$u = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+eU/m_{e0}c^2}\right)^2}$$

5. 一个正电子与一个负电子对撞变成了两个光子，电子质量为 m_{e0}，电子电荷为 e，正负电子的速度为 u，求光子的能量 E 和动量 p。



解：动量守恒：

$mu+(-mu)=p+(-p)$ 图示成立

能量守恒：

$$2m_e c^2 = 2E$$

$$E = m_e c^2 = \frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{1}{c}\frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_{e0}c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

6. 一个质子与一个中子结合成氘核，求该过程所释放的核能。已知：

质子静止质量： $m_{p0}=1.67262\times10^{-27}(kg)$，

中子静止质量： $m_{n0}=1.67493\times10^{-27}(kg)$，

氘核静止质量： $m_{^2_{}H0}=3.34359\times10^{-27}(kg)$，

光速： $c=2.99792\times10^{8}(km/s)$。

解：

1）该过程的质量亏损：

$$\Delta m=\left(m_{n0}+m_{p0}\right)-m_{^2H0}$$
$$=\left(1.67262\times10^{-27}+1.67493\times10^{-27}\right)-\left(3.34359\times10^{-27}\right)$$
$$=3.9657\times10^{-30}(kg)$$

2）该过程所释放的核能：

$$E=\Delta mc^2=\left(3.9657\times10^{-30}\right)\times\left(2.99792\times10^{8}\right)^2=3.5642\times10^{-13}(J)$$

3）聚合成$1kg$氘，所释放的核能：

$$N=\frac{1kg}{3.34359\times10^{-27}kg}=2.99080\times10^{26}(\text{个氘})$$

$$NE=\left(2.99080\times10^{26}\right)\times\left(3.5642\times10^{-13}\right)=1.07\times10^{14}(J/kg)$$

4）燃烧$1kg$汽油，所释放的能量为：$4.6\times10^{7}(J/kg)$

$$\frac{\text{聚合成}1kg\text{氘所释放的能量}}{\text{燃烧}1kg\text{汽油所释放的能量}}=\frac{1.07\times10^{14}}{4.6\times10^{7}}=2.3\times10^{6}=230\text{万倍}$$

5) 核反应释放的能量是占静止能量的比是：

$$\frac{\Delta mc^2}{mc^2}=\frac{\Delta m}{m}=\frac{3.9657\times10^{-30}}{3.34359\times10^{-27}}\approx10^{-3}$$ 很大

4）燃烧汽油释放的能量是占静止能量的比是：

$$\frac{\text{燃烧}1kg\text{汽油所释放的能量}}{1kg\text{汽油的静止能}}=\frac{4.6\times10^{7}}{\left(2.99792\times10^{8}\right)^2}\approx5\times10^{-10}$$ 很小