# 第一章　行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解　（1）
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$$
$$-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)$$
$$=-24+8+16-4$$
$$=-4$$

（2）
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+cba-bbb-aaa-ccc$$
$$=3abc-a^3-b^3-c^3$$

（3）
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

（4）
$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$
$$=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-y^3-(x+y)^3-x^3$$
$$=3xy(x+y)-y^3-3x^2y-3y^2x-x^3-y^3-x^3$$
$$=-2(x^3+y^3)$$



2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

（1）1　2　3　4；　　　　　　　　（2）4　1　3　2；
（3）3　4　2　1；　　　　　　　　（4）2　4　1　3；
（5）1　3　$\cdots$　$(2n-1)$　2　4　$\cdots$　$(2n)$；
（6）1　3　$\cdots$　$(2n-1)$　$(2n)$　$(2n-2)$　$\cdots$　2.

解（1）逆序数为 0

（2）逆序数为 4：4　1，4　3，4　2，3　2

（3）逆序数为 5：3　2，3　1，4　2，4　1，2 1

（4）逆序数为 3：2　1，4　1，4　3

（5）逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$：

3　2　　1 个
5　2，5　4　　2 个
7　2，7　4，7　6　　3 个
$\cdots\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots$
$(2n-1)$　2，$(2n-1)$　4，$(2n-1)$　6，$\cdots$，$(2n-1)$　$(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

（6）逆序数为 $n(n-1)$

3　2　　1 个
5　2，5　4　　2 个
$\cdots\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots$
$(2n-1)$　2，$(2n-1)$　4，$(2n-1)$　6，$\cdots$，$(2n-1)$　$(2n-2)$　　$(n-1)$ 个
4　2　　1 个
6　2，6　4　　2 个
$\cdots\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots$
$(2n)$　2，$(2n)$　4，$(2n)$　6，$\cdots$，$(2n)$　$(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解　由定义知，四阶行列式的一般项为 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，其中 $t$ 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数．由于 $p_1=1, p_2=3$ 已固定，$p_1p_2p_3p_4$ 只能形如 $13\square\square$，即 1324 或 1342. 对应的 $t$ 分别为

$$0+0+1+0=1 \text{或} 0+0+0+2=2$$

$\therefore -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

4. 计算下列各行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

解

(1) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times (-1)^{4+3}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+\frac{1}{2}c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} =0$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =0$$

(3) $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$$

$$=adfbce\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=4abcdef$$

(4) $$\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix}0 & 1+ab & a & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1+ab & a & 0\\ -1 & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+dc_2}\begin{vmatrix}1+ab & a & ad\\ -1 & c & 1+cd\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1+ab & ad\\ -1 & 1+cd\end{vmatrix}=abcd+ab+cd+ad+1$$

5. 证明:

(1) $\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix}ax+by & ay+bz & az+bx\\ ay+bz & az+bx & ax+by\\ az+bx & ax+by & ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}=0$;

(4) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)\cdot(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$

证明

(1) 左边 $\xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3 = \text{右边}$$

(2) 左边 $\xlongequal[\text{分开}]{\text{按第一列}} a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{分别再分}} a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{分别再分}} a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} (-1)^2 = \text{右边}$$

(3) 左边 $= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+(2a+1) & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2+(2b+1) & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2+(2c+1) & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2+(2d+1) & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{c_3-c_1\\c_4-c_1}]{c_2-c_1}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{分成二项}]{\text{按第二列}}2\begin{vmatrix} a^2 & a & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & b & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & c & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & d & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第二项}\substack{c_3-4c_2\\c_4-9c_2}]{\text{第一项}\substack{c_3-4c_2\\c_4-6c_2}}\begin{vmatrix} a^2 & a & 4 & 9 \\ b^2 & b & 4 & 9 \\ c^2 & c & 4 & 9 \\ d^2 & d & 4 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a & 6a \\ b^2 & 1 & 4b & 6b \\ c^2 & 1 & 4c & 6c \\ d^2 & 1 & 4d & 6d \end{vmatrix}=0$$

(4) 左边 $=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

(5) 用数学归纳法证明

当$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，命题成立.

假设对于$(n-1)$阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1},$$

则$D_n$按第1列展开：

$$D_n=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n=\text{右边}$$

所以，对于$n$阶行列式命题成立.

6. 设$n$阶行列式$D=\det(a_{ij})$，把$D$上下翻转、或逆时针旋转$90^\circ$、或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明$D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$，$D_3=D$.

证明 $\because D=\det(a_{ij})$

$$\therefore D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

同理可证 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^T=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$

$$D_3=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D=(-1)^{n(n-1)}D=D$$

7. 计算下列各行列式（$D_k$为$k$阶行列式）：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是$a$，未写出的元素都是 0；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

提示：利用范德蒙德行列式的结果.

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & 0 & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & 0 & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$；

(5) $D_n=\det(a_{ij})$，其中$a_{ij}=|i-j|$；

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

解

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{按最后一行展开}}$

$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} +(-1)^{2n}\cdot a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)(n-1)}$

（再按第一行展开）

$$=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)(n-2)} +a^n=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$$

(2)将第一行乘$(-1)$分别加到其余各行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

再将各列都加到第一列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

(3) 从第 $n+1$ 行开始，第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换，换到第 1 行，第 $n$ 行经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行…，经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换，得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

此行列式为范德蒙德行列式

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}[(a-i+1)-(a-j+1)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}[-(i-j)]=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\bullet(-1)^{\frac{n+(n-1)+\cdots+1}{2}}\bullet\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}[(i-j)]$$

$$=\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}(i-j)$$

(4) $$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & 0 & & b_n \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ 0 & & c_1 & d_1 & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c_n & & & 0 & & d_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一行}} a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & ⋰ & & \\ 0 & & a_1 \quad b_1 & & 0 & \vdots \\ & & c_1 \quad d_1 & & & \\ & ⋰ & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & ⋰ & \\ 0 & & & a_1 \quad b_1 & & 0 \\ & & & c_1 \quad d_1 & & \\ & & ⋰ & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{都按最后一行展开}} a_n d_n D_{2n-2} - b_n c_n D_{2n-2}$$

由此得递推公式：

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2}$$

即
$$D_{2n} = \prod_{i=2}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) D_2$$

而
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$$

得
$$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i)$$

(5) $a_{ij} = |i-j|$

$$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_3,\cdots]{r_1-r_2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[c_4+c_1,\cdots]{c_2+c_1,c_3+c_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_4,\cdots]{c_1-c_2,c_2-c_3}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n & 1+a_n \end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开（由下往上）}]{\text{按最后一列}}$$

$$(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1})-\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{vmatrix} + \cdots +
$$

$$
\begin{vmatrix} -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{vmatrix}
$$

$$
=(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1})+a_1a_2\cdots a_{n-3}a_{n-2}a_n+\cdots+a_2a_3\cdots a_n
$$

$$
=(a_1a_2\cdots a_n)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})
$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组：

$$
(1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}
$$

$$
(2)\begin{cases} 5x_1+6x_2 = 1, \\ x_1+5x_2+6x_3 = 0, \\ x_2+5x_3+6x_4 = 0, \\ x_3+5x_4+6x_5 = 0, \\ x_4+5x_5 = 1. \end{cases}
$$

解 (1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-13&8\\0&0&-5&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-1&-54\\0&0&0&142\end{vmatrix}=-142$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\0&5&0&9\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&5&0&9\\0&-13&-3&-23\\0&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&1&2&11\\0&5&0&9\\0&-13&-3&-23\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&1&2&11\\0&0&-10&-46\\0&0&23&120\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&1&2&11\\0&0&-1&38\\0&0&0&142\end{vmatrix}=-142$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&0&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-7&-2&3\\0&-12&-3&-7\\0&-15&-1&8\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-1&3&2\\0&0&23&11\\0&0&39&31\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-1&3&2\\0&0&-1&-19\\0&0&0&-284\end{vmatrix}=-284$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-3&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}=-426$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}=142$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=-1$$

(2) $$D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按最后一行}}5D'-\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}=5D'-6D''$$

$$=5(5D''-6D''')-6D''=19D''-30D'''$$

$$=65D'''-114D''''=65\times19-114\times5=665$$

（$D'$为行列式$D$中$a_{11}$的余子式，$D''$为$D'$中$a'_{11}$的余子式，$D'''$，$D''''$类推）

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}}D'+\begin{vmatrix}6&0&0&0\\5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$=D'+6^4=19D'''-30''''+6^4=1507$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二列}}-\begin{vmatrix}1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&0&0&0\\1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}-5\times6^3=-65-1080=-1145$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三列}}\begin{vmatrix}1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&6&0\\0&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&0\\0&1&6\end{vmatrix}=19+6\times114=703$$

$$D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第四列}}-\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}$$

$$=-5-6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}=-395$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按最后一列}}\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}+D'=1+211=212$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{1507}{665};\quad x_2=-\frac{1145}{665};\quad x_3=\frac{703}{665};\quad x_4=\frac{-395}{665};\quad x_4=\frac{212}{665}.$$

9. 问$\lambda,\mu$取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解？

解 $D_3=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\mu-\mu\lambda$，

齐次线性方程组有非零解，则 $D_3=0$

即 $\mu-\mu\lambda=0$

得 $\mu=0$或$\lambda=1$

不难验证，当 $\mu=0$或$\lambda=1$时，该齐次线性方程组确有非零解.

10. 问$\lambda$取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$

有非零解？

解

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\2 & 3-\lambda & 1\\1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\2 & 1-\lambda & 1\\1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3+(\lambda-3)-4(1-\lambda)-2(1-\lambda)(-3-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$

齐次线性方程组有非零解，则 $D=0$

得 $\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$

不难验证，当$\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$时，该齐次线性方程组确有非零解.

# 第二章　矩阵及其运算

1．已知线性变换：

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 $x_1, x_2, x_3$ 到变量 $y_1, y_2, y_3$ 的线性变换.

解

由已知：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

2．已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 $z_1, z_2, z_3$ 到 $x_1, x_2, x_3$ 的线性变换.

解　　由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

所以有 $\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3 \end{cases}$

**3．设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$.

解

$$3AB - 2A = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

**4．计算下列乘积：**

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;　　(2) $(1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;　　(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,2)$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

解

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 7 + 3\times 2 + 1\times 1 \\ 1\times 7 + (-2)\times 2 + 3\times 1 \\ 5\times 7 + 7\times 2 + 0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1) = (10)$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 \\ 1\times(-1) & 1\times 2 \\ 3\times(-1) & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

$\times\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

5．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，问：

(1) $AB = BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 吗?

解

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\therefore AB \neq BA$

(2) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$

但 $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$



故 $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(3) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix}$

而 $A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\1&7\end{pmatrix}$

故 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

6．举反列说明下列命题是错误的:

（1）若 $A^2=0$,则 $A=0$;

（2）若 $A^2=A$,则 $A=0$ 或 $A=E$;

（3）若 $AX=AY$,且 $A\neq 0$,则 $X=Y$.

解 (1) 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $A^2=0$,但 $A\neq 0$

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ $A^2=A$,但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$

(3) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$AX=AY$ 且 $A\neq 0$ 但 $X\neq Y$

7．设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$,求 $A^2,A^3,\cdots,A^k$.

解 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}$

利用数学归纳法证明: $A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$



当 $k=1$ 时,显然成立,假设 $k$ 时成立,则 $k+1$ 时

$$A^k = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$

8. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,求 $A^k$.

解　首先观察

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

由此推测 $A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$　$(k \geq 2)$

用数学归纳法证明:

当 $k = 2$ 时,显然成立.

假设 $k$ 时成立，则 $k+1$ 时,

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \dfrac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知：$A^k=\begin{pmatrix} \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k} \end{pmatrix}$

**9**．设 $A,B$ 为 $n$ 阶矩阵，且 $A$ 为对称矩阵，证明 $B^T AB$ 也是对称矩阵.

证明　　已知：$A^T=A$

则　　$(B^T AB)^T=B^T(B^T A)^T=B^T A^T B=B^T AB$

从而　　$B^T AB$ 也是对称矩阵.

**10**．设 $A,B$ 都是 $n$ 阶对称矩阵，证明 $AB$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明　　由已知：$A^T=A$　　$B^T=B$

充分性：$AB=BA\Rightarrow AB=B^T A^T\Rightarrow AB=(AB)^T$

即 $AB$ 是对称矩阵.

必要性：$(AB)^T=AB\Rightarrow B^T A^T=AB\Rightarrow BA=AB$.

**11**．求下列矩阵的逆矩阵：

(1)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$；　　(2)$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$；　　(3)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;  (5) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ $(a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$

解

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  $|A| = 1$

$A_{11} = 5,\ A_{21} = 2 \times (-1),\ A_{12} = 2 \times (-1),\ A_{22} = 1$

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$

故  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $|A| = 1 \neq 0$  故 $A^{-1}$ 存在

$A_{11} = \cos\theta \quad A_{21} = \sin\theta \quad A_{12} = -\sin\theta \quad A_{22} = \cos\theta$

从而  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(3) $|A| = 2$,  故 $A^{-1}$ 存在

$A_{11} = -4 \qquad A_{21} = 2 \qquad A_{31} = 0$

而  $A_{12} = -13 \qquad A_{22} = 6 \qquad A_{32} = -1$

$A_{13} = -32 \qquad A_{23} = 14 \qquad A_{33} = -2$

故  $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\dfrac{13}{2} & 3 & -\dfrac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{pmatrix}$

$|A|=24 \qquad A_{21}=A_{31}=A_{41}=A_{32}=A_{42}=A_{43}=0$

$A_{11}=24 \qquad A_{22}=12 \qquad A_{33}=8 \qquad A_{44}=6$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\1&1&4\end{vmatrix}=-12 \qquad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&0\\1&2&4\end{vmatrix}=-12$

$A_{14}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&3\\1&2&1\end{vmatrix}=3 \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&4\end{vmatrix}=-4$

$A_{24}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&2&1\end{vmatrix}=-5 \qquad A_{34}=(-1)^7\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&1\end{vmatrix}=-2$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{8}&-\frac{5}{24}&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

(5) $|A|=1\neq 0$ 　故 $A^{-1}$ 存在

而 $A_{11}=1 \quad A_{21}=-2 \quad A_{31}=0 \quad A_{41}=0$

$A_{12}=-2 \quad A_{22}=5 \quad A_{32}=0 \quad A_{42}=0$

$A_{13}=0 \quad A_{23}=0 \quad A_{33}=2 \quad A_{43}=-3$

解

$$A_{14}=0 \quad A_{24}=0 \quad A_{34}=-5 \quad A_{44}=8$$

从而 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

(6) $A=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

由对角矩阵的性质知 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

12．解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$； (2) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解

(1) $X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $$X=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&3&-2\\-3&3&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

(3) $$X=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6&6\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$$

(4) $$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

13．利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1,\\2x_1+2x_2+5x_3=2,\\3x_1+5x_2+x_3=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2,\\2x_1-x_2-3x_3=1,\\3x_1+2x_2-5x_3=0.\end{cases}$

解 (1) 方程组可表示为 $$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

故 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

从而有 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

(2) 方程组可表示为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

故有 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

**14．** 设 $A^k = O$ ($k$ 为正整数),证明

$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

证明　一方面，$E = (E - A)^{-1}(E - A)$

另一方面，由 $A^k = O$ 有

$E = (E - A) + (A - A^2) + A^2 - \cdots - A^{k-1} + (A^{k-1} - A^k)$

$= (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(E - A)$

故 $(E - A)^{-1}(E - A) = (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(E - A)$

两端同时右乘 $(E - A)^{-1}$

就有 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

**15．** 设方阵 $A$ 满足 $A^2 - A - 2E = O$,证明 $A$ 及 $A + 2E$ 都可逆,并求 $A^{-1}$

及

$(A+2E)^{-1}$.

证明　　由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$

两端同时取行列式: $|A^2-A|=2$

即　$|A||A-E|=2$,故　$|A|\neq 0$

所以 $A$ 可逆,而 $A+2E=A^2$

$|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq 0$　　　故 $A+2E$ 也可逆.

由 $A^2-A-2E=O \Rightarrow A(A-E)=2E$

$\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

又由 $A^2-A-2E=O \Rightarrow (A+2E)A-3(A+2E)=-4E$

$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E$

$\therefore (A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1}$

$\therefore (A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$

16．设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=A+2B$,求 $B$.

解　　由 $AB=A+2B$ 可得 $(A-2E)B=A$

故 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

17．设 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$,求 $A^{11}$.

解　$P^{-1}AP=\Lambda$ 故 $A=P\Lambda P^{-1}$ 所以 $A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}$

$|P|=3$　$P^*=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$　　$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

而　$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}$

故 $A^{11}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731 & 2732\\ -683 & -684\end{pmatrix}$

18．设 $m$ 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$,记

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

$f(A)$ 称为方阵 $A$ 的 $m$ 次多项式.

(1)设 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,证明：$\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}$, $f(\Lambda)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}$;

(2)设 $A=P\Lambda P^{-1}$,证明：$A^k=P\Lambda^kP^{-1}$, $f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$.

证明

(1)　i)利用数学归纳法.当 $k=2$ 时

$$\Lambda^2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}$$

命题成立,假设 $k$ 时成立,则 $k+1$ 时

$$\Lambda^{k+1}=\Lambda^k\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k+1}\end{pmatrix}$$

故命题成立.



ii)左边 $=f(\Lambda)=a_0E+a_1\Lambda+a_2\Lambda^2+\cdots+a_m\Lambda^m$

$$=a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m&0\\0&\lambda_2^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2+\cdots+a_m\lambda_1^m&0\\0&a_0+a_1\lambda_2+a_2\lambda_2^2+\cdots+a_m\lambda_2^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&0\\0&f(\lambda_2)\end{pmatrix}=\text{右边}$$

(2) i) 利用数学归纳法.当$k=2$时

$$A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}\text{成立}$$

假设$k$时成立,则$k+1$时

$A^{k+1}=A^k\cdot A=P\Lambda^kP^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{k+1}P^{-1}$成立,故命题成立,

即 $A^k=P\Lambda^kP^{-1}$

ii) 证明

右边$=Pf(\Lambda)P^{-1}$

$$=P(a_0E+a_1\Lambda+a_2\Lambda^2+\cdots+a_m\Lambda^m)P^{-1}$$

$$=a_0PEP^{-1}+a_1P\Lambda P^{-1}+a_2P\Lambda^2P^{-1}+\cdots+a_mP\Lambda^mP^{-1}$$

$$=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m=f(A)=\text{左边}$$

19．设$n$阶矩阵$A$的伴随矩阵为$A^*$，证明：

(1) 若$|A|=0$,则$|A^*|=0$;

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明

(1) 用反证法证明．假设$|A^*|\neq 0$则有$A^*(A^*)^{-1}=E$

由此得$A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O\ \therefore\ A^*=O$

这与$\left|A^*\right| \neq 0$矛盾，故当$|A| = 0$时

有$\left|A^*\right| = 0$

(2)　由于$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$，则$AA^* = |A|E$

取行列式得到：$|A|\left|A^*\right| = |A|^n$

若$|A| \neq 0$　则$\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$

若$|A| = 0$由(1)知$\left|A^*\right| = 0$此时命题也成立

故有$\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$

20．取$A = B = -C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,验证$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}$

检验：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$

而　$\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

故　$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}$

21．设$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ 4 & -3 & & O \\ & O & 2 & 0 \\ & & 2 & 2 \end{pmatrix}$,求$\left|A^8\right|$及$A^4$

解 $A=\begin{pmatrix}3&4&&\\4&-3&&\\&&2&0\\&&2&2\end{pmatrix}$，令 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$

则 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$

故 $A^8=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}A_1^8&O\\O&A_2^8\end{pmatrix}$

$|A^8|=|A_1^8||A_2^8|=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16}$

$$A^4=\begin{pmatrix}A_1^4&O\\O&A_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4&0&&\\0&5^4&&\\&&2^4&0\\&&2^6&2^4\end{pmatrix}$$

22．设 $n$ 阶矩阵 $A$ 及 $s$ 阶矩阵 $B$ 都可逆,求 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}$．

解 将 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}$ 分块为 $\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&C_4\end{pmatrix}$

其中 $C_1$ 为 $s\times n$ 矩阵，$C_2$ 为 $s\times s$ 矩阵

$C_3$ 为 $n\times n$ 矩阵，$C_4$ 为 $n\times s$ 矩阵

则 $\begin{pmatrix}O&A_{n\times n}\\B_{s\times s}&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&C_4\end{pmatrix}=E=\begin{pmatrix}E_n&O\\O&E_s\end{pmatrix}$

由此得到 $\begin{cases}AC_3=E_n\Rightarrow C_3=A^{-1}\\AC_4=O\Rightarrow C_4=O & (A^{-1}\text{存在})\\BC_1=O\Rightarrow C_1=O & (B^{-1}\text{存在})\\BC_2=E_s\Rightarrow C_2=B^{-1}\end{cases}$

故 $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

# 第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

1．把下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_3+(-3)r_1}{\overset{r_2+(-2)r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{r_3\div(-2)}{\overset{r_2\div(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\overset{r_3\div 3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_2+3r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{r_1+r_3}{\overset{r_1+(-2)r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \underset{r_3+(-2)r_1}{\overset{r_2\times 2+(-3)r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\underset{r_1+3r_2}{\overset{r_3+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1\div 2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_3\div(-3) \\ r_4\div(-5)}}{\overset{r_2\div(-4)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_2}}{\overset{r_1-3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-2r_2}}{\overset{r_1-2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_3-8r_1 \\ r_4-7r_1}}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2\times(-1) \\ r_4-r_3}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\overset{r_2+r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**2.** 在秩是 $r$ 的矩阵中,有没有等于 0 的 $r-1$阶子式?有没有等于 0 的 $r$ 阶子式?

解　　在秩是 $r$ 的矩阵中,可能存在等于 0 的 $r-1$阶子式,也可能存在等于 0 的 $r$ 阶子式.

例如，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(\alpha)=3$ 同时存在等于 0 的 3 阶子式和 2 阶子式.

**3**．从矩阵 $A$ 中划去一行得到矩阵 $B$，问 $A,B$ 的秩的关系怎样?

解　$R(A)\geq R(B)$

设 $R(B)=r$，且 $B$ 的某个 $r$ 阶子式 $D_r\neq 0$.矩阵 $B$ 是由矩阵 $A$ 划去一行得

到的，所以在 $A$ 中能找到与 $D_r$ 相同的 $r$ 阶子式 $\overline{D_r}$，由于 $\overline{D_r}=D_r\neq 0$，故而 $R(A)\geq R(B)$.

**4**．求作一个秩是 4 的方阵，它的两个行向量是 $(1,0,1,0,0),(1,-1,0,0,0)$

解　设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为五维向量，且 $\alpha_1=(1,0,1,0,0)$，

$\alpha_2=(1,-1,0,0,0)$，则所求方阵可为 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}$，秩为 4，不妨设

$$\begin{cases}\alpha_3=(0,0,0,x_4,0)\\ \alpha_4=(0,0,0,0,x_5)\text{ 取 } x_4=x_5=1\\ \alpha_5=(0,0,0,0,0)\end{cases}$$

故满足条件的一个方阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**5**．求下列矩阵的秩，并求一个最高阶非零子式：

(1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$\underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \overset{r_3 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 秩为2

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1 - r_2 \\ r_2 - 2r_1}}{\underset{r_3 - 7r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15 \end{pmatrix}$

$\overset{r_3 - 3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 秩为2.

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 - 2r_4}{\underset{\substack{r_2 - 2r_4 \\ r_3 - 3r_4}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{r_3 + 2r_1}{\overset{r_2 + 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_4 \leftrightarrow r_1}}{\underset{\substack{r_3 \div 14 \\ r_4 \div 16 \\ r_4 - r_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 秩为 3

三阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$.

6．求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

解 (1) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$ 即得 $\begin{cases} x_1=\frac{4}{3}x_4 \\ x_2=-3x_4 \\ x_3=\frac{4}{3}x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 即得 $\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4 \\ x_2=x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=x_4 \end{cases}$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{即得} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

(4)　对系数矩阵实施行变换：

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4 \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7．求解下列非齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y-z+w=1, \\ 4x+2y-2z+w=2, \\ 2x+y-z-w=1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x+y-z+w=1, \\ 3x-2y+z-3w=4, \\ x+4y-3z+5w=-2; \end{cases}$

解　(1)　对系数的增广矩阵施行行变换,有

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2$ 而 $R(B)=3$,故方程组无解.

(2)　对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x=-2z-1 \\ y=z+2 \\ z=z \end{cases}$　亦即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3)　对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2} \\ y=y \\ z=z \\ w=0 \end{cases}$　即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x=\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}w+\frac{6}{7} \\ y=\frac{5}{7}z-\frac{9}{7}w-\frac{5}{7} \\ z=z \\ w=w \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**8**．$\lambda$ 取何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多个解?

解 (1) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}\neq 0$,即 $\lambda\neq 1,-2$ 时方程组有唯一解.

(2) $R(A)<R(B)$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

由 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0,(1-\lambda)(1+\lambda)^2\neq 0$

得 $\lambda=-2$ 时,方程组无解.

(3) $R(A)=R(B)<3$,由 $(1-\lambda)(2+\lambda)=(1-\lambda)(1+\lambda)^2=0$,

得 $\lambda=1$ 时,方程组有无穷多个解.

**9**．非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当$\lambda$取何值时有解？并求出它的解.

解　$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3}(\lambda - 1) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix}$

方程组有解，须$(1-\lambda)(\lambda+2)=0$得$\lambda = 1, \lambda = -2$

当$\lambda = 1$时,方程组解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当$\lambda = -2$时,方程组解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

10．设$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$

问$\lambda$为何值时,此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解
时求解.

解　$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5-\lambda}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2} & \frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2} \end{pmatrix}$

当$|A| \neq 0$,即$\frac{(1-\lambda)^2(10-\lambda)}{2} \neq 0$　$\therefore \lambda \neq 1$且$\lambda \neq 10$时，有唯一解.

当$\frac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2} = 0$且$\frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2} \neq 0$，即$\lambda = 10$时，无解.

当$\dfrac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2}=0$且$\dfrac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2}=0$，即$\lambda=1$时，有无穷多解.

此时，增广矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

原方程组的解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (k_1,k_2\in R)$

11．试利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解　（1）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$

12．(1)　设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,求 $X$ 使 $AX=B$；

(2) 设$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$,求$X$使$XA=B$.

解

(1) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)\overset{初等行变换}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{array}\right)$

$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\\\hline 1&2&3\\2&-3&1\end{array}\right)\overset{初等列变换}{\sim}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 2&-1&-1\\-4&7&4\end{array}\right)$

$\therefore X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}$.

# 第四章　向量组的线性相关性

1．设$v_1=(1,\ 1,\ 0)^T, v_2=(0,\ 1,\ 1)^T, v_3=(3,\ 4,\ 0)^T$，

求$v_1-v_2$及$3v_1+2v_2-v_3$.

解　$v_1-v_2=(1,\ 1,\ 0)^T-(0,\ 1,\ 1)^T$

$$=(1-0,\ 1-1,\ 0-1)^T=(1,\ 0,\ -1)^T$$

$$3v_1+2v_2-v_3=3(1,\ 1,\ 0)^T+2(0,\ 1,\ 1)^T-(3,\ 4,\ 0)^T$$

$$=(3\times1+2\times0-3,\ 3\times1+2\times1-4,\ 3\times0+2\times1-0)^T$$

$$=(0,\ 1,\ 2)^T$$

2．设$3(a_1-a)+2(a_2+a)=5(a_3+a)$其中$a_1=(2,5,1,3)^T$，

$a_2=(10,1,5,10)^T, a_3=(4,1,-1,1)^T$，求$a$

解　由$3(a_1-a)+2(a_2+a)=5(a_3+a)$整理得

$$a=\frac{1}{6}(3a_1+2a_2-5a_3)=\frac{1}{6}[3(2,5,1,3)^T+2(10,1,5,10)^T-5(4,1,-1,1)^T]$$

$$=(1,2,3,4)^T$$

3．举例说明下列各命题是错误的:

(1)若向量组$a_1,a_2,\cdots,a_m$是线性相关的,则$a_1$可由$a_2,\cdots a_m$,线性表示.

(2)若有不全为 0 的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$使

$$\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m+\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_mb_m=0$$

成立,则$a_1,\cdots,a_m$线性相关，$b_1,\cdots,b_m$亦线性相关.



(3)若只有当$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$全为 0 时,等式

$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$

才能成立,则$a_1,\cdots,a_m$线性无关，$b_1,\cdots,b_m$亦线性无关.

(4)若$a_1,\cdots,a_m$线性相关，$b_1,\cdots,b_m$亦线性相关,则有不全为 0 的数,

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$使$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0, \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$

同时成立.

解　(1) 设$a_1 = e_1 = (1,0,0,\cdots,0)$

$a_2 = a_3 = \cdots = a_m = 0$

满足$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关,但$a_1$不能由$a_2,\cdots,a_m$,线性表示.

(2) 有不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$使

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$$

原式可化为

$\lambda_1(a_1 + b_1) + \cdots + \lambda_m(a_m + b_m) = 0$

取$a_1 = e_1 = -b_1, a_2 = e_2 = -b_2, \cdots, a_m = e_m = -b_m$

其中$e_1,\cdots,e_m$为单位向量,则上式成立,而

$$a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_m \text{ 均线性相关}$$

(3) 由$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$ (仅当$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$)

$\Rightarrow a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_m + b_m$线性无关

取$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$

取$b_1,\cdots,b_m$为线性无关组

满足以上条件,但不能说是$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关的.

(4) $a_1 = (1,0)^T$　$a_2 = (2,0)^T$　$b_1 = (0,3)^T$　$b_2 = (0,4)^T$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2=0 \Rightarrow \lambda_1=-2\lambda_2 \\ \lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2=0 \Rightarrow \lambda_1=-\dfrac{3}{4}\lambda_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \text{与题设矛盾.}$$

4．设$b_1=a_1+a_2, b_2=a_2+a_3, b_3=a_3+a_4, b_4=a_4+a_1$,证明向量组$b_1,b_2,b_3,b_4$线性相关.

证明　　设有$x_1,x_2,x_3,x_4$使得

$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4=0$则

$x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_4)+x_4(a_4+a_1)=0$

$(x_1+x_4)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3+(x_3+x_4)a_4=0$

(1) 若$a_1,a_2,a_3,a_4$线性相关,则存在不全为零的数$k_1,k_2,k_3,k_4$,

$k_1=x_1+x_4; k_2=x_1+x_2; k_3=x_2+x_3; k_4=x_3+x_4;$

由$k_1,k_2,k_3,k_4$不全为零,知$x_1,x_2,x_3,x_4$不全为零,即$b_1,b_2,b_3,b_4$线性相关.

(2) 若$a_1,a_2,a_3,a_4$线性无关,则$\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\\x_3+x_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$

由$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$知此齐次方程存在非零解

则$b_1,b_2,b_3,b_4$线性相关.

综合得证.

5．设$b_1=a_1,b_2=a_1+a_2,\cdots,b_r=a_1+a_2+\cdots+a_r$,且向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关,证明向量组$b_1,b_2,\cdots,b_r$线性无关.

证明　设$k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_rb_r=0$则

$$(k_1+\cdots+k_r)a_1+(k_2+\cdots+k_r)a_2+\cdots+(k_p+\cdots+k_r)a_p+\cdots+k_ra_r=0$$

因向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关,故

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_r=0 \\ \quad k_2+\cdots+k_r=0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad k_r=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$故方程组只有零解

则$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$所以$b_1,b_2,\cdots,b_r$线性无关

6．利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组:

(1) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

解　(1) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\overset{r_4-r_3}{\underset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

(2) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_1}{\underset{r_4-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\underset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

7．求下列向量组的秩,并求一个最大无关组:

(1) $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$;

(2) $a_1^T=(1,2,1,3),a_2^T=(4,-1,-5,-6),a_3^T=(1,-3,-4,-7)$.

解 (1) $-2a_1=a_3\Rightarrow a_1,a_3$线性相关.

由 $$\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\\a_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 9 & 100 & 10 & 4\\ -2 & -4 & 2 & -8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 82 & 19 & -32\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$



秩为 2,一组最大线性无关组为$a_1,a_2$.

(2) $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为 2,最大线性无关组为 $a_1^T, a_2^T$.

8. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组 $n$ 维向量,已知 $n$ 维单位坐标向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由它们线性表示,证明 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关.

证明　$n$ 维单位向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关

不妨设:

$$\begin{aligned} e_1 &= k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + \cdots + k_{1n}a_n \\ e_2 &= k_{21}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{2n}a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + \cdots + k_{nn}a_n \end{aligned}$$

所以 $\begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$

两边取行列式，得

$\begin{vmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix}$ 由 $\begin{vmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix} \neq 0$

即 $n$ 维向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所构成矩阵的秩为 $n$

故$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关.

9．设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是一组$n$维向量,证明它们线性无关的充分必要条件是：任一$n$维向量都可由它们线性表示.

证明　　设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为一组$n$维单位向量，对于任意$n$维向量$a=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$则有$a=\varepsilon_1 k_1+\varepsilon_2 k_2+\cdots+\varepsilon_n k_n$即任一$n$维向量都可由单位向量线性表示.

必要性

$\Rightarrow$ $a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$能由单位向量线性表示，即

$$\alpha_1=k_{11}\varepsilon_1+k_{12}\varepsilon_2+\cdots+k_{1n}\varepsilon_n$$
$$\alpha_2=k_{21}\varepsilon_1+k_{22}\varepsilon_2+\cdots+k_{2n}\varepsilon_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n=k_{n1}\varepsilon_1+k_{n2}\varepsilon_2+\cdots+k_{nn}\varepsilon_n$$

故$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1{}^T \\ \varepsilon_2{}^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n{}^T \end{pmatrix}$$

两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{vmatrix}$$

由$$\begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

令 $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}$ 则

由 $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$

即 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 都能由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示，因为任一 $n$ 维向量能由单位向量线性表示，故任一 $n$ 维向量都可以由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示.

$\overset{充分性}{\Leftarrow}$ 已知任一 $n$ 维向量都可由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示，则单位向量组：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示，由 8 题知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关.

**10．** 设向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 的秩为 $r_1$,向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_t$ 的秩 $r_2$ 向量组 $C$： $a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_r$ 的秩 $r_3$,证明

$$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$$

证明　设 $A,B,C$ 的最大线性无关组分别为 $A',B',C'$,含有的向量个数(秩)分别为 $r_1,r_2,r_2$,则 $A,B,C$ 分别与 $A',B',C'$ 等价,易知 $A,B$ 均可由 $C$ 线性表示,则秩$(C)\ge$秩$(A)$,秩$(C)\ge$秩$(B)$，即 $\max\{r_1,r_2\}\le r_3$

设 $A'$ 与 $B'$ 中的向量共同构成向量组 $D$,则 $A,B$ 均可由 $D$ 线性表示,

即 $C$ 可由 $D$ 线性表示,从而 $C'$ 可由 $D$ 线性表示，所以秩$(C')\ge$秩$(D)$,

$D$ 为 $r_1+r_2$ 阶矩阵，所以秩$(D)\le r_1+r_2$ 即 $r_3\le r_1+r_2$.

11.证明 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

证明:设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T \quad B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

且 $A,B$ 行向量组的最大无关组分别为 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_r^T \quad \beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_s^T$

显然,存在矩阵 $A',B'$,使得

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix} = B'\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{pmatrix} a_1^T+b_1^T \\ a_2^T+b_2^T \\ \vdots \\ a_n^T+b_n^T \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{pmatrix} + B'\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

因此 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$

12．设向量组 $B:b_1,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,\cdots,a_s$ 线性表示为

$$(b_1,\cdots,b_r)=(a_1,\cdots,a_s)K,$$

其中 $K$ 为 $s\times r$ 矩阵，且 $A$ 组线性无关。证明 $B$ 组线性无关的充分必要条

件是矩阵 $K$ 的秩 $R(K)=r$.

证明 $\Rightarrow$ 若 $B$ 组线性无关

令 $B=(b_1,\cdots,b_r) \quad A=(a_1,\cdots,a_s)$ 则有 $B=AK$

由定理知 $R(B)=R(AK)\le \min\{R(A),R(K)\}\le R(K)$

由 $B$ 组:$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性无关知 $R(B)=r$，故 $R(K)\ge r$.

又知 $K$ 为 $r\times s$ 阶矩阵则 $R(K)\le \min\{r,s\}$

由于向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示,则

$r\le s$

$\therefore \min\{r,s\}=r$

综上所述知 $r\le R(K)\le r$ 即 $R(K)=r$ .

$\Leftarrow$ 若 $R(k)=r$

令 $x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_rb_r=0$,其中 $x_i$ 为实数 $i=1,2,\cdots,r$

则有 $(b_1,b_2,\cdots,b_r)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=0$

又 $(b_1,\cdots,b_r)=(a_1,\cdots,a_s)K$ ,则 $(a_1,\cdots,a_s)K\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=0$

由于 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关,所以 $K\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=0$

即 $$\begin{cases}k_{11}x_1+k_{21}x_2+\cdots+k_{r1}x_r=0\\ k_{12}x_1+k_{22}x_2+\cdots+k_{r2}x_r=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_{1r}x_1+k_{2r}x_2+\cdots+k_{rr}x_r=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_{1s}x_1+k_{2s}x_2+\cdots+k_{rs}x_r=0\end{cases} \qquad (1)$$

由于 $R(K)=r$ 则(1)式等价于下列方程组:

$$\begin{cases}k_{11}x_1+k_{21}x_2+\cdots+k_{r1}x_r=0\\ k_{12}x_1+k_{22}x_2+\cdots+k_{r2}x_r=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_{1r}x_1+k_{2r}x_2+\cdots+k_{rr}x_r=0\end{cases}$$

由于$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{r1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1r} & k_{2r} & \cdots & k_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

所以方程组只有零解$x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$.所以$b_1, b_2, \cdots, b_r$线性无关,

证毕.

13．设

$V_1 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in R满足x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$

$V_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in R满足x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$

问$V_1, V_2$是不是向量空间？为什么？

证明　集合$V$成为向量空间只需满足条件：

若$\alpha \in V, \beta \in V$，则$\alpha + \beta \in V$

若$\alpha \in V, \lambda \in R$，则$\lambda\alpha \in V$

$V_1$是向量空间，因为：

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T \quad \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0$

$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)^T$

且$(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)$

$= (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = 0$　故$\alpha + \beta \in V_1$

$\lambda \in R, \lambda\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \cdots + \lambda\alpha_n = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \lambda \cdot 0 = 0$故$\lambda\alpha \in V_1$

$V_2$不是向量空间，因为：

$(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)$

$=(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=1+1=2$ 故$\alpha+\beta\notin V_2$

$\lambda\in R, \lambda\alpha=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\cdots,\lambda\alpha_n)$

$\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2+\cdots+\lambda\alpha_n=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=\lambda\cdot 1=\lambda$

故当$\lambda\neq 1$时，$\lambda\alpha\notin V_2$

14．试证:由$a_1=(0,1,1)^T, a_2=(1,0,1)^T, a_3=(1,1,0)^T$所生成的向量空间就

是$R^3$.

证明　设$A=(a_1,a_2,a_3)$

$$|A|=|a_1,a_2,a_3|\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{-1}\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

于是$R(A)=3$故线性无关.由于$a_1,a_2,a_3$均为三维,且秩为 3,

所以$a_1,a_2,a_3$为此三维空间的一组基,故由$a_1,a_2,a_3$所生成的向量空间就是$R^3$.

15．由$a_1=(1,1,0,0)^T, a_2=(1,0,1,1)^T$,所生成的向量空间记作$V_1$,由$b_1=(2,-1,3,3)^T, a_2=(0,1,-1,-1)^T$,所生成的向量空间记作$V_2$,试证$V_1=V_2$.

证明　设$V_1=\{x=k_1a_1+k_2a_2 | k_1,k_1\in R\}$

$V_2=\{x=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2 | \lambda_1,\lambda_1\in R\}$



任取$V_1$中一向量,可写成$k_1a_1+k_2a_2$,

要证$k_1a_1+k_2a_2\in V_2$,从而得$V_1\subseteq V_2$

由$k_1a_1+k_2a_2=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$得

$$\begin{cases}k_1+k_2=2\lambda_1\\k_1=\lambda_2-\lambda_1\\k_2=3\lambda_1-\lambda_2\\k_2=3\lambda_1-\lambda_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda_1=k_1+k_2\\-\lambda_1+\lambda_2=k_1\end{cases}$$

上式中,把$k_1,k_2$看成已知数,把$\lambda_1,\lambda_2$看成未知数

$$D_1=\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}=2\neq0\qquad\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2\text{有唯一解}$$

$\therefore V_1\subseteq V_2$

同理可证: $V_2\subseteq V_1$ $(\because D_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\neq0)$

故$V_1=V_2$

16．验证$a_1=(1,-1,0)^T,a_2=(2,1,3)^T,a_3=(3,1,2)^T$为$R^3$的一个基,并把$v_1=(5,0,7)^T,v_2=(-9,-8,-13)^T$用这个基线性表示.

解　由于$|a_1,a_2,a_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-6\neq0$

即矩阵$(a_1,a_2,a_3)$的秩为 3

故$a_1,a_2,a_3$线性无关，则为$R^3$的一个基.

设$v_1=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3$，则

$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=5\\-k_1+k_2+k_3=0\\3k_2+2k_3=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=2\\k_2=3\\k_3=-1\end{cases}$$

故 $v_1 = 2a_1 + 3a_2 - a_3$

设 $v_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$， 则

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -9 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -8 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = -3 \\ k_3 = -2 \end{cases}$$

故线性表示为

$v_2 = 3a_1 - 3a_2 - 2a_3$

17．求下列齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

(3) $nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots 2x_{n-1} + x_n = 0$.

解 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$

取 $x_3 = 1, x_4 = -3$ 得 $x_1 = -4, x_2 = 0$

取 $x_3 = 0, x_4 = 4$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 1$

因此基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -2 & 1\\ 3 & 5 & 4 & -2\\ 8 & 7 & 6 & -3\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{1}{19}\\ 0 & 1 & \frac{14}{19} & -\frac{7}{19}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以原方程组等价于$\begin{cases}x_1=-\frac{2}{19}x_3+\frac{1}{19}x_4\\ x_2=-\frac{14}{19}x_3+\frac{7}{19}x_4\end{cases}$

取 $x_3=1,x_4=2$ 得 $x_1=0,x_2=0$

取 $x_3=0,x_4=19$ 得 $x_1=1,x_2=7$

因此基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix}$

(3) 原方程组即为

$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}$

取 $x_1=1,x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$ 得 $x_n=-n$

取 $x_2=1,x_1=x_3=x_4=\cdots=x_{n-1}=0$ 得 $x_n=-(n-1)=-n+1$

……

取 $x_{n-1}=1,x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=0$ 得 $x_n=-2$

所以基础解系为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -n & -n+1 & \cdots & -2\end{pmatrix}$

18．设 $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 3\\ 9 & -5 & 2 & 8\end{pmatrix}$，求一个 $4\times 2$ 矩阵 $B$，使 $AB=0$，且 $R(B)=2$.

解　　由于 $R(B)=2$，所以可设 $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$ 则由

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 3\\ 9 & -5 & 2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$ 可得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ -9\\ 5\end{pmatrix}$$ ,解此非齐次线性方程组可得唯一解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ ，故所求矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{11}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

**19．求一个齐次线性方程组,使它的基础解系为**

$\xi_1=(0,1,2,3)^T,\xi_1=(3,2,1,0)^T$.

解　　显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in R)$$

即$\begin{cases} x_1 = 3k_2 \\ x_2 = k_1 + 2k_2 \\ x_3 = 2k_1 + k_2 \\ x_4 = 3k_1 \end{cases}$消去$k_1, k_2$得

$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$此即所求的齐次线性方程组.

20．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知$\eta_1, \eta_2, \eta_3$是它的三个解向量．且

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}，\eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解　由于矩阵的秩为 3，$n - r = 4 - 3 = 1$，一维．故其对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量，且由于$\eta_1, \eta_2, \eta_3$均为方程组的解，由

非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=\underset{(\text{齐次解})}{(\eta_1-\eta_2)}+\underset{(\text{齐次解})}{(\eta_1-\eta_2)}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}=\text{齐次解}$$

为其基础解系向量，故此方程组的通解：$x=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$(k\in R)$

21．设 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵，且 $AB=0$，证明 $R(A)+R(B)\le n$ .

证明　设 $A$ 的秩为 $r_1$，$B$ 的秩为 $r_2$，则由 $AB=0$ 知，$B$ 的每一列向量都是以 $A$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解向量.

(1)　当 $r_1=n$ 时, 该齐次线性方程组只有零解, 故此时 $B=0$,

$r_1=n$，$r_2=0$，$r_1+r_2=n$ 结论成立.

(2)　当 $r_1<n$ 时, 该齐次方程组的基础解系中含有 $n-r_1$ 个向量, 从而 $B$

的列向量组的秩 $\le n-r_1$, 即 $r_2\le n-r_1$, 此时 $r_2\le n-r_1$, 结论成立。

综上, $R(A)+R(B)\le n$ .

22．设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2=A$, $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵,证明

$R(A)+R(A-E)=n$

(提示:利用题 11 及题 21 的结论)

证明　$\because A(A-E)=A^2-A=A-A=0$

所以由 21 题所证可知 $R(A)+R(A-E)\le n$

又 $\because R(A-E)=R(E-A)$

由 11 题所证可知

$$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\geq R(A+E-A)=R(E)=n$$

由此 $R(A)+R(A-E)=n$.

23．求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6. \end{cases}$

解 (1) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore \eta=\begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \eta=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_1=\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

24. 设$\boldsymbol{\eta}^*$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解, $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$线性无关。

证明 (1)反证法, 假设$\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性相关, 则存在着不全为0的数$C_0,C_1,\cdots,C_{n-r}$使得下式成立:

$$C_0\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r}=0 \qquad (1)$$

其中, $C_0\neq 0$否则, $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性相关, 而与基础解系不是线性相关的产生矛盾。

由于$\eta^*$为特解, $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为基础解系, 故得

$A(C_0\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r})=C_0A\eta^*=C_0b$

而由(1)式可得$A(C_0\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r})=0$

故$b=0$, 而题中, 该方程组为非齐次线性方程组, 得$b\neq 0$

产生矛盾, 假设不成立, 故$\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.

(2)反证法, 假使$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性相关.

则存在着不全为零的数$C_0,C_1,\cdots,C_{n-r}$使得下式成立:

$$C_0\eta^*+C_1(\eta^*+\xi_1)+\cdots+C_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=0 \qquad (2)$$

即$(C_0+C_1+\cdots+C_{n-r})\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r}=0$

1) 若$C_0+C_1+\cdots+C_{n-r}=0$, 由于$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是线性无关的一组基础解

2) 系, 故$C_0=C_1=\cdots=C_{n-r}=0$, 由(2)式得$C_0=0$此时

$C_0=C_1=\cdots=C_{n-r}=0$与假设矛盾.

3) 若$C_0+C_1+\cdots+C_{n-r}\neq 0$由题(1)知, $\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关, 故

$C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-r} = C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-r} = 0$ 与假设矛盾,

综上, 假设不成立, 原命题得证.

25. 设 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 $s$ 个解，$k_1, \cdots, k_s$ 为实数，满足 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1$. 证明

$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$ 也是它的解.

证明　　由于 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 $s$ 个解.

故有　　$A\eta_i = b \qquad (i = 1, \cdots, s)$

而 $A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_sA\eta_s$

$= b(k_1 + \cdots + k_s) = b$

即　　$Ax = b$ （$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$）

从而 $x$ 也是方程的解.

26．设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 $r$，$\eta_1, \cdots, \eta_{n-r+1}$ 是它

的 $n - r + 1$ 个线性无关的解(由题 24 知它确有 $n - r + 1$ 个线性无关的解)．试证它的任一解可表示为

$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$　　（其中 $k_1 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$）.

证明　设 $x$ 为 $Ax = b$ 的任一解.

由题设知：$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关且均为 $Ax = b$ 的解.

取 $\xi_1 = \eta_2 - \eta_1, \xi_2 = \eta_3 - \eta_1, \cdots, \xi_{n-r} = \eta_{n-r+1} - \eta_1$, 则它的均为 $Ax = b$ 的解.

用反证法证：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

反设它们线性相关，则存在不全为零的数：

$l_1,l_2,\cdots,l_{n-r}$ 使得 $l_1\xi_1+l_2\xi_2+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0$

即 $l_1(\eta_2-\eta_1)+l_2(\eta_3-\eta_1)+\cdots+l_{n-r}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)=0$

亦即 $-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})\eta_1+l_1\eta_2+l_2\eta_3+\cdots+l_{n-r}\eta_{n-r+1}=0$

由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 线性无关知

$-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})=l_1=l_2=\cdots=l_{n-r}=0$

矛盾，故假设不对.

$\therefore \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，为 $Ax=b$ 的一组基.

由于 $x,\eta_1$ 均为 $Ax=b$ 的解，所以 $x-\eta_1$ 为的 $Ax=b$ 解 $\Rightarrow$ $x-\eta_1$ 可由

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出.

$$
\begin{aligned}
x-\eta_1 &= k_2\xi_1+k_3\xi_2+\cdots+k_{n-r-1}\xi_{n-r} \\
&= k_2(\eta_2-\eta_1)+k_3(\eta_3-\eta_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)
\end{aligned}
$$

$x=\eta_1(1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})+k_2\eta_2+k_3\eta_3+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}=0$

令 $k_1=1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1}$ 则 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{n-r+1}=1$

$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$，证毕.

# 第五章　相似矩阵及二次型

1．试用施密特法把下列向量组正交化：

(1)　$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$；

(2)　$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

解　(1)　根据施密特正交化方法:

令$b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

故正交化后得：$(b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{3}\\1&0&-\frac{2}{3}\\1&1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(2)　根据施密特正交化方法令$b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1 - \frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

故正交化后得 $(b_1,b_2,b_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

2．下列矩阵是不是正交阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

解 (1) 第一个行向量非单位向量,故不是正交阵.

(2) 该方阵每一个行向量均是单位向量，且两两正交，故为正交阵.

3．设 $A$ 与 $B$ 都是 $n$ 阶正交阵，证明 $AB$ 也是正交阵.

证明 因为 $A,B$ 是 $n$ 阶正交阵，故 $A^{-1}=A^T$， $B^{-1}=B^T$

$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^{-1}A^{-1}AB = E$

故 $AB$ 也是正交阵.

4．求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1)$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; (2)$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$;　(3)$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),(a_1 \neq 0)$.

并问它们的特征向量是否两两正交?

解　(1)　①　$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)$

故$A$的特征值为$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

②　当$\lambda_1 = 2$时,解方程$(A-2E)x = 0$,由

$(A-2E) = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

所以$k_1P_1(k_1 \neq 0)$是对应于$\lambda_1 = 2$的全部特征值向量.

当$\lambda_2 = 3$时,解方程$(A-3E)x = 0$,由

$(A-3E) = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

所以$k_2P_2(k_2 \neq 0)$是对应于$\lambda_3 = 3$的全部特征向量.

③　$[P_1, P_2] = P_1^T P_2 = (-1,1)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0$

故$P_1, P_2$不正交.

(2)　①　$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$

故$A$的特征值为$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 9$.

②　当$\lambda_1 = 0$时，解方程$Ax = 0$，由

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$得基础解系 $P_1 = \begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

故$k_1P_1(k_1 \neq 0)$是对应于$\lambda_1 = 0$的全部特征值向量.

当$\lambda_2 = -1$时,解方程$(A+E)x = 0$，由

$A+E = \begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$得基础解系 $P_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

故$k_2P_2(k_2\neq 0)$是对应于$\lambda_2=-1$的全部特征值向量

当$\lambda_3=9$时，解方程$(A-9E)x=0$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\text{得基础解系 }P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

故$k_3P_3(k_3\neq 0)$是对应于$\lambda_3=9$的全部特征值向量.

③ $[P_1,P_2]=P_1^TP_2=(-1,-1,1)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=0$,

$[P_2,P_3]=P_2^TP_3=(-1,1,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=0$,

$[P_1,P_3]=P_1^TP_3=(-1,-1,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=0$,

所以$P_1,P_2,P_3$两两正交.

(3) $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_1^2-\lambda&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2-\lambda&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-\lambda^{n-1}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

$$=\lambda^{n-1}\left[\lambda-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\right]$$

$\therefore\lambda_1=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^n a_i^2$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

当$\lambda_1=\sum_{i=1}^n a_i^2$时,

$$(A-\lambda E)$$
$$=\begin{pmatrix} -a_2^2-a_3^2-\cdots-a_n^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & -a_1^2-a_3^2-\cdots-a_n^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & -a_1^2-a_2^2-\cdots-a_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & a_n & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_n$ 为自由未知量，并令 $x_n=a_n$， 设 $x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots x_{n-1}=a_{n-1}$.

故基础解系为 $P_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ 时，

$$(A-0\cdot E)=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

可得基础解系

$$P_2=\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix} -a_2 \\ 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,P_n=\begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$$

综上所述可知原矩阵的特征向量为

$$(P_1,P_2,\cdots,P_n)=\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

5．设方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似，求 $x,y$.

解　方阵 $A$ 与 $\Lambda$ 相似，则 $A$ 与 $\Lambda$ 的特征多项式相同，即

$$|A-\lambda E|=|\Lambda-\lambda E|\Rightarrow\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & x-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & y-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}.$$

6．设 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵，且 $|A|\neq 0$，证明 $AB$ 与 $BA$ 相似.

证明　$|A|\neq 0$ 则 $A$ 可逆

$A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)(BA)=BA$　则 $AB$ 与 $BA$ 相似.

7．设 3 阶方阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$；对应的特征向量依

次为

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求 $A$.

解　根据特征向量的性质知 $(P_1,P_2,P_3)$ 可逆,

得: $(P_1,P_2,P_3)^{-1}A(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

可得 $A=(P_1,P_2,P_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}(P_1,P_2,P_3)^{-1}$

得 $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$

8．设 3 阶对称矩阵 $A$ 的特征值 6，3，3，与特征值 6 对应的特征向量为

$P_1=(1,1,1)^T$,求 $A$.

解　设 $A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_4 & x_5\\ x_3 & x_5 & x_6\end{pmatrix}$

由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，知① $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\ x_2+x_4+x_5=6\\ x_3+x_5+x_6=6\end{cases}$

3 是 $A$ 的二重特征值,根据实对称矩阵的性质定理知 $A-3E$ 的秩为 1，

故利用①可推出 $\begin{pmatrix}x_1-3 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_4-3 & x_5\\ x_3 & x_5 & x_6-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_2 & x_4-3 & x_5\\ x_3 & x_5 & x_6-3\end{pmatrix}$

秩为 1.

则存在实的 $a,b$ 使得② $\begin{cases}(1,1,1)=a(x_2,x_4-3,x_5)\\ (1,1,1)=b(x_3,x_5,x_6-3)\end{cases}$ 成立.

由①②解得 $x_2=x_3=1,x_1=x_4=x_6=4,x_5=1$.

得 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

9．试求一个正交的相似变换矩阵,将下列对称矩阵化为对角矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

解　(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)$

故得特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=-2$时，由

$$\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

单位特征向量可取: $P_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=1$时,由

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

单位特征向量可取： $P_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=4$时,由

$$\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\quad\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取： $P_3=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$

得正交阵$(P_1,P_2,P_3)=P=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

(2)$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{pmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，

故得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，由

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

此二个向量正交,单位化后,得两个单位正交的特征向量

$$P_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$P_2^*=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\text{单位化得 }P_2=\frac{\sqrt5}{3}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=10$时,由

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

单位化 $P_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ :得正交阵$(P_1,P_2,P_3)$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2\sqrt5}{15}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4\sqrt5}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

10. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$, 求$\varphi(A)=A^{10}-5A^9$;

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,求$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解　(1)　$\because A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$是实对称矩阵.

故可找到正交相似变换矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\Lambda$

从而 $A=P\Lambda P^{-1}, A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

因此 $\varphi(A)=A^{10}-5A^9=P\Lambda^{10}P^{-1}-5P\Lambda^9P^{-1}$

$$=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^{10}\end{pmatrix}P^{-1}-P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5^{10}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2)　同(1)求得正交相似变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\Lambda, A=P\Lambda P^{-1}$

$$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$$

$$=A^8(A^2-6A+5E)=A^8(A-E)(A-5E)$$

$$=P\Lambda^8P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

11．用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$;

(2) $f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz$;

(3) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4$.

解 (1) $f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(2) $f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(3) $f = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

12．求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$;

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

解 (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$.

当 $\lambda_1 = 2$ 时，解方程 $(A - 2E)x = 0$，由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 取 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = 5$ 时，解方程 $(A - 5E)x = 0$，由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$取$P_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

当$\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$取$P_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

且有 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.

(2)二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&-1\\1&1-\lambda&-1&0\\0&-1&1-\lambda&1\\-1&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

故$A$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=3,\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda_1=-1$时，可得单位特征向量$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

当$\lambda_2=3$时，可得单位特征向量$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时，可得单位特征向量$P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$P_4=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

且有$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

**13．证明：二次型$f=x^TAx$在$\|x\|=1$时的最大值为矩阵$A$的最大特征值.**

证明　　$A$为实对称矩阵，则有一正交矩阵$T$，使得

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=B \text{ 成立.}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $A$ 的特征值，不妨设 $\lambda_1$ 最大，

$T$ 为正交矩阵，则 $T^{-1}=T^T$ 且 $|T|=1$，故 $A=T^{-1}B^T=T^TB^T$

则 $f=x^TAx=x^TT^TBTx=y^TBy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

其中 $y=Tx$

当 $\|y\|=\|Tx\|=|T|\|x\|=\|x\|=1$ 时，

即 $\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=1$ 即 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$

$$f_{\text{最大}}=(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)_{\text{最大}}\underset{y_1=1}{=}\lambda_1.$$

故得证.

**14.** 判别下列二次型的正定性：

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4$
$\quad -12x_3x_4$

解 (1) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$a_{11}=-2<0$, $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0$, $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0$,

故 $f$ 为负定.

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$, $a_{11}=1>0$, $\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4>0$,

$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0$, $|A|=24>0$.

故 $f$ 为正定.

**15．** 设$U$为可逆矩阵，$A=U^TU$，证明 $f=x^TAx$为正定二次型.

证明　　设$U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，　$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

$$f=x^TAx=x^TU^TUx=(Ux)^T(Ux)$$
$$=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n,\cdots,a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$
$$\cdot\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$
$$=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2+(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)^2$$
$$+\cdots+(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)^2\geq 0.$$

若“$=0$”成立，则$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$成立.

即对任意$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$使$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$成立.

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，$U$的秩小于$n$，则$U$不可逆，与题意产生矛盾.

于是$f>0$成立.

故$f=x^TAx$为正定二次型.

**16．** 设对称矩阵$A$为正定矩阵，证明：存在可逆矩阵$U$，使$A=U^TU$.

证明　　$A$正定，则矩阵$A$满秩，且其特征值全为正.

不妨设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为其特征值，$\lambda_i>0$　$i=1,\cdots,n$

由定理 8 知，存在一正交矩阵$P$

使$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

又因 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆， $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{T}$.

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{P}^{T}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{T}$ .

令 $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{T}=\boldsymbol{U}$ ， $\boldsymbol{U}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{T}\boldsymbol{U}$ .