概率统计期中考试题 B 解　　东校区 2007.11.15 下午

1．（10 分）对某大学城学生拥有手机, 电脑和数码相机这三件电子产品的情况进行调查, 有如下的数据: 有 95%的学生至少拥有这三件电子产品之中的一件, 87%的学生拥有手机, 82%的学生拥有电脑, 同时拥有手机和电脑的学生占 75%, 同时拥有手机和数码相机的占 17%, 同时拥有电脑和数码相机的占 16%, 同时拥有这三件电子产品的占 15%.

1）在这个大学城中任意选择一名学生, 求这个学生拥有数码相机的概率.

2）在这个大学城中任意选择一名学生, 求这个学生仅拥有数码相机而不拥有其他两件电子产品的概率.

解　以 A, B, C 分别表示选到的学生拥有手机, 电脑, 数码相机. 则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

拥有数码相机的概率是

$$P(C)=P(A\cup B\cup C)-P(A)-P(B)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$
$$=95\%-87\%-82\%+75\%+17\%+16\%-15\%=19\%,$$

仅拥有数码相机而不拥有其他两件电子产品的概率是

$$P(C\setminus(A\cup B))=P(C\setminus(A\cup B)C)=P(C)-P((A\cup B)C),$$
$$=P(C)-P(AC\cup BC)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=19\%-17\%-16\%+15\%=1\%.$$

2．（15 分）甲乙两人轮流在罚球区投篮, 甲先投, 约定先投中者为胜. 甲的命中率为 1/4, 乙的命中率为 1/5. 求各人获胜的概率.

解 1　设 $A_k=$“甲第 k 次投篮命中”, $B_k=$“乙第 k 次投篮命中”, $k=1,2,\cdots$, $A=$“甲获胜”, $B=$“乙获胜”. 则

$$P(A)=P(A_1\cup\bar{A}_1\bar{B}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3\cup\cdots)=P(A_1)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3)+\cdots$$
$$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(A_2)+P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{B}_2)P(A_3)+\cdots$$
$$=1/4+(3/4)(4/5)(1/4)+(3/4)^2(4/5)^2(1/4)+\cdots=\frac{1/4}{1-(3/4)(4/5)}=\frac{5}{8},$$
$$P(B)=1-P(A)=1-5/8=3/8.$$

解 2　设甲获胜的概率为 x. 又设当乙先投时, 乙获胜的概率为 y.

当甲先投时, 乙胜的概率为 $(1-1/4)y$, 因而

$$x+(1-1/4)y=1. \tag{1}$$

当乙先投时, 甲胜的概率为 $(1-1/5)x$, 因而

$$y+(1-1/5)x=1. \tag{2}$$

由(1)式和(2)式可以解得

$$x=5/8,$$

因而甲获胜的概率是 $5/8$, 乙获胜的概率是 $1-5/8=3/8$.

3．（15 分）设离散型随机向量 (X,Y) 有如下的概率分布:

X \ Y	0	1	2
-1	1/12	1/12	1/6

0	0	1/6	1/12
1	1/6	1/12	1/6

1）写出随机变量 $Z=XY$ 的分布.

2）求概率 $P(X^2+1\le Y)$.

解 1） Z 有分布列

z_k	-2	-1	0	1	2
$P(Z=z_k)$	1/6	1/12	1/2	1/12	1/6

2） $P(X^2+1\le Y)=P(X=-1,Y=2)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)$

$=1/6+1/6/+1/12+1/6=7/12$.

4. （15 分）设随机变量 X,Y 独立, 都服从标准正态分布 $N(0,1)$. 求随机变量 $Z=X^2+Y^2$ 的分布.

解 当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X^2+Y^2\le z)=0$.

当 $z\ge 0$ 时,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X^2+Y^2\le z)=\iint_{x^2+y^2\le z}p_X(x)p_Y(y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy,$$

作极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 得

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & rcon\theta\end{vmatrix}=r,$$

$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}|J|dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}rdr=\int_0^{\sqrt{z}}re^{-r^2/2}dr.$$

或者求出积分

$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}|J|dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}rdr=\int_0^{\sqrt{z}}re^{-r^2/2}dr$$

$$\overset{r=\sqrt{t}}{=}\int_0^z\frac{1}{2}e^{-t/2}dt=-e^{-t/2}\Big|_0^z=1-e^{-z/2}.$$

因此, Z 有密度

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}e^{-z/2}I_{[0,+\infty)}(z).$$

5. （15 分）设随机变量 X,Y 独立, 都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布. 求随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数.

解 X 和 Y 分别有密度函数

$$p_X(x)=I_{[0,1]}(x),\quad p_Y(y)=I_{[0,1]}(y).$$

Z 的密度函数是

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}I_{[0,1]}(x)I_{[0,1]}(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}I_{[0,1]}(x)I_{[z-1,z]}(x)dx$$

$$=I_{[0,1)}(z)\int_0^z dx+I_{[1,2]}(z)\int_{z-1}^1 dx=zI_{[0,1)}(z)+(2-z)I_{[1,2]}(z).$$

6. （15 分）设随机向量 (X,Y) 有联合密度 $p(x,y)=c(x+2y)I_D(x,y)$, 其中 c 是常数,

$$D=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}.$$

1）求常数 c.

2）求 X 的边缘密度.

3）求 EX，DX.

解 1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}c(x+2y)I_D(x,y)dxdy=c\int_0^1\left(\int_0^1(x+2y)dy\right)dx$

$$=c\int_0^1\left(\int_0^1 xdy\right)dx+2c\int_0^1\left(\int_0^1 ydy\right)dx=c/2+c=3c/2,$$

$c=2/3$.

2）$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{3}(x+2y)I_D(x,y)dy$,

$$=I_{[0,1]}(x)\int_0^1\frac{2}{3}(x+2y)dy=\frac{2}{3}I_{[0,1]}(x)\left.(xy+y^2)\right|_0^1=\frac{2}{3}(x+1)I_{[0,1]}(x).$$

3）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{2}{3}(x+1)I_{[0,1]}(x)dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x(x+1)dx=\left.\frac{2}{3}(x^3/3+x^2/2)\right|_0^1=5/9$,

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{2}{3}(x+1)I_{[0,1]}(x)dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x^2(x+1)dx=\left.\frac{2}{3}(x^4/4+x^3/3)\right|_0^1=7/18$,

$DX=EX^2-(EX)^2=7/18-(5/9)^2=13/162$.

7.（15 分）设 X 和 Y 都是随机变量，$EX=3$，$DX=9$，$EY=2$，$DY=4$. 又设 $U=2X-3Y+4$.

1）求 EU.

2）设 X,Y 独立，求 DU.

3）设 $\operatorname{cov}(X,Y)=-2$，求 DU 和相关系数 $\rho_{X,Y}$.

解 1）$EU=E(2X-3Y+4)=2EX-3EY+4=2\times3-3\times2+3=4$.

2）设 X,Y 独立，则

$$DU=D(2X-3Y+4)=D(2X)+D(-3Y)=2^2DX+3^2DY=4\times9+9\times4=72.$$

3）$DU=D(2X-3Y+4)=D(2X-3Y)=D(2X)+D(-3Y)+2\operatorname{cov}(2X,-3Y)$

$=D(2X)+D(-3Y)+2\operatorname{cov}(2X,-3Y)=4DX+9DY-12\operatorname{cov}(X,Y)$

$=4\times9+9\times4-12\times(-2)=96$.

$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{(DX)(DY)}}=\frac{-2}{\sqrt{9\times4}}=-\frac{1}{3}.$$