证明值迭代算法的收敛性

值迭代算法的迭代形式如下:

$$\mathrm{u_{new}} = R^{\pi} + \gamma P^{\pi} u = T^{\pi}(u) = f(u)$$

$f(u)$满足:

$$|f(x) - f(y)| = |(R^{\pi} + \gamma P^{\pi} x) - (R^{\pi} + \gamma P^{\pi} y)| = |\gamma P^{\pi}(x - y)| \le \gamma |x - y|$$

则$f(u)$在其定义域内存在唯一的不动点ξ，满足$\xi = \mathrm{f}(\xi)$，即值迭代算法具有收敛性。

证明:

设 f(x)的定义域为$[a, b]$，数列$a_n = f(a_{n-1})$，由$\mathrm{f}([\mathrm{a},\mathrm{b}]) \subset (\mathrm{a},\mathrm{b})$可知$\mathrm{a_n} \in (a, b)$，

$$\begin{aligned}\left|a_n - a_{n+p}\right| &= \left|f(a_{n-1}) - f(a_{n+p-1})\right| \le \gamma \left|a_{n-1} - a_{n+p-1}\right| \le \gamma^2 \left|a_{n-2} - a_{n+p-2}\right| \le \cdots \\ &\le \gamma^n \left|a_0 - a_p\right| \le \gamma^n |b - a|\end{aligned}$$

则$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} = \left[\frac{\ln(\frac{\varepsilon}{b-a})}{\ln a}\right]$，当$\mathrm{n} > \mathrm{N}, \mathrm{p} \in \mathrm{N}$时，$\left|a_n - a_{n+p}\right| < \varepsilon$，即数列$a_n$收敛。

存在$\xi \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$使得$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \xi$，对于$a_{n+1} = f(a_n)$，两边同时令$n \to \infty$，可得$\xi = \mathrm{f}(\xi)$，

ξ是 f(x)的不动点。

假设 f(x)存在另一个不动点η，即$\eta = \mathrm{f}(\eta)$，则

$$|\eta - \xi| = |f(\eta) - f(\xi)| \le \gamma |\eta - \xi|$$

又$0 < \gamma < 1$，则$\eta - \xi = 0$，$\eta = \xi$，故不动点ξ是唯一的。

综上所述，f(x)在其定义域中存在唯一的不动点$\xi = \mathrm{f}(\xi)$，即值迭代算法具有收敛性。