

线性代数试卷

一、(24 分) 填空题:

1. 设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$, 则 $|A^{-1}|^2 \cdot |A| = \underline{\frac{1}{2}}$

2. 设 A 为 n 阶可逆阵, 则下列 C 恒成立。

(A) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

(B) $(2A^{-1})^T = (2A^T)^{-1}$

(C) $\left[(A^{-1})^{-1}\right]^T = \left[(A^T)^{-1}\right]^{-1}$

(D) $\left[(A^T)^T\right]^{-1} = \left[(A^{-1})^{-1}\right]^T$

3. 若向量组 a_1, a_2, \dots, a_r 可由另一向量组 b_1, b_2, \dots, b_s 线性表示, 则 C。

(A) $r \leq s$

(B) $r \geq s$

(C) a_1, a_2, \dots, a_r 的秩 $\leq b_1, b_2, \dots, b_s$ 的秩

(D) a_1, a_2, \dots, a_r 的秩 $\geq b_1, b_2, \dots, b_s$ 的秩

4. 当 k 满足 时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} kx_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解。

5. 若齐次线性方程组的一个基础解系为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 则 D 也是该齐次线性方程组的基础解系。

(A) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 - \xi_1$

(B) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

(C) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

(D) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

6. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2, 则其伴随阵 A^* 的秩为 0。

7. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的三个特征值为 1, 1, -1。

8. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ 的矩阵 $A = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ 。

二、(8 分) 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$ 。

该资源由考僧独家整理发布, 微信关注考僧, 更多惊喜

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \\
 &= (a^2 - b^2)^2
 \end{aligned}$$

三、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 $A^{2n} - A^2$ (n 为正整数)。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2n} - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2n-2 & 2n-2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

四、(8 分) 设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求 X 。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

该资源由考僧独家整理发布, 微信关注考僧, 更多惊喜

五、(10 分) 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性相关, 求常数 k ; 并找出一组最大无关组以及用该最大无关组表示其余向量。

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & k & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$k = -3$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ 是最大无关组}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

六、(14 分) 已知线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 11x_3 + 12x_4 = k \end{cases}$$

求 k , 使得上述方程组有解, 并求出所有的解。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & -11 & 12 & k \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-16 \end{pmatrix}$$

$k=16$ 时上述方程组有解

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

七、(16 分) 设对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, 已知 A 有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,

1. 求 x 和另一个特征值 λ_3 ;

2. 求 A 的所有特征向量;

该资源由考僧独家整理发布, 微信关注考僧, 更多惊喜

3. 求一个正交矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \lambda_3$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad 2 + 3 + x = 2 + 2 + \lambda_3$$

$$x = 3, \lambda_3 = 4$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ 对应的特征向量 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4 \text{ 对应的特征向量 } \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{正交矩阵 } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ 可使 } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

八、(10 分) 证明题:

1. 设向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 都是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解, 数 k_1, k_2, \dots, k_s 满足 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$, 则向量 $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_s\mathbf{a}_s$ 也是该方程组的解。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_s\mathbf{a}_s) &= k_1\mathbf{A}\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{A}\mathbf{a}_2 + \dots + k_s\mathbf{A}\mathbf{a}_s \\ &= k_1\mathbf{b} + k_2\mathbf{b} + \dots + k_s\mathbf{b} \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_s)\mathbf{b} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

2. \mathbf{A} 为 n 阶方阵, \mathbf{x}, \mathbf{y} 是 n 维列向量, 并且 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = 2\mathbf{y}$, 证明 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 正交。

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{y} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{y} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{0})^T \mathbf{y} = 0, \text{ 所以 } \mathbf{x} \text{ 与 } \mathbf{y} \text{ 正交} \end{aligned}$$