§1.5　推理规则(Rules of Inference)

一．证明和论证(proof and argument)

数学证明是一些合法的论证，它们建立起数学语句的正确性。所谓论证是一个语句序列，以一个结论结束。所谓合法是说论证的最后那个语句（结论）为真由前面的那些语句（前提）为真推出。

*为了从一些语句推出新的语句，我们必须有一些推理规则，作为构造合法推理的模板。

我们将说明怎样用推理规则产生合法的论证，我们也将说明一些常见的不正确的推理形式，称为谬误(fallacies).

二．命题逻辑的合法论证(valid argument in propositional logic)

1. 例子：如果你有当前的密码，你就可以登录上网；

　　你有当前的密码；

　　所以，你可以登录上网。

令 p: 你有当前的密码; q: 你可以登录上网.

该论证的形式：

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

这是正确的推理，因为$(p\to q)\wedge p\to q$ 是重言式。无论 p, q 取什么真值，该蕴涵式始终为真。当 $p\to q$ 和 p 为真时，q 一定为真。

*一个论证是合法的，是说：只要它的所有前提为真，则它的结论一定为真。

2. 定义：命题逻辑的推理是一系列命题，除最后一句外，前面的所有句子都称为前提，最后一个句子称为结论。一个推理是合法的，是说：它的所有前提为真蕴含它的结论为真。

命题逻辑的一个推理形式是一系列复合命题，其中含有命题变量。一个推理形式是合法的，是说：无论前提中的命题变量取什么真值，只要所有前提为真，就有结论为真。

推理形式：前提：$p_1, p_2, \ldots, p_n$，结论：q 是合法的推理形式，当且仅当$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$是重言式。

三. 命题逻辑的推理规则：

*根据以上定义，我们可以用真值表来判定每一个推理是否合法。但假如一个推理包含 10 个命题变量，那么真值表就要2^{10}=1024 行，太复杂。

为此，我们建立一些相对简单的推理形式（称为推理规则）的正确性。根据推理规则，构造复杂的合法的推理。

1. 假言推理(分离规则)(Modus ponens (law of detachment))

$$\begin{array}{l} p \\ p\to q \\ \hline q \end{array}$$

重言式：(p∧(p→q))→q

2. 拒取式(Modus tollens)

$\neg q$　　　重言式：$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$

$p \to q$

$\neg p$

3. 假言三段论(Hypothetical syllogism)

$p \to q$　　　重言式：$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

$q \to r$

$p \to r$

4. 析取三段论(Disjunctive syllogism)

$p \vee q$　　　重言式：$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

$\neg p$

---

q

5. 附加规则(Addition)

p　　　重言式：$p \to p \vee q$

$p \vee q$

6. 化简规则(Simplification)

$p \wedge q$　　　重言式：$p \wedge q \to p$

---

p

7. 合取构成(Conjunction)

p　　　重言式：$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$

q

$p \wedge q$

8. 消解规则(Resolution)

$p\vee q$　　　重言式：$((p\vee q)\wedge(\neg p\vee r))\rightarrow(q\vee r)$

$\neg p\vee r$

$q\vee r$

四．例子：

例 1：假设有条件语句：“如果今天下雪，我们就去滑雪。”并且“今天下雪”为真，由假言推理规则，推出“我们就去滑雪”为真。

例 2：判断以下推理是否正确。

“如果$\sqrt{2}>\frac{3}{2}$，　那么$(\sqrt{2})^2>(\frac{3}{2})^2$”我们知道$\sqrt{2}>\frac{3}{2}$，因此“$(\sqrt{2})^2=2>(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$”。

解：这个推理的形式是正确的，使用了假言推理，设 p: $\sqrt{2}>\frac{3}{2}$，q: $(\sqrt{2})^2>(\frac{3}{2})^2$，由$(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$. 但是，因为 p: $\sqrt{2}>\frac{3}{2}$为假，故我们不能保证结论$(\sqrt{2})^2>(\frac{3}{2})^2$为真。事实上 q 为假。

例 3：说明以下推理：“现在是零度以下。”所以“或者现在是零度以下，或者现在下雨。”

解：令 p: 现在是零度以下; q: 现在下雨. 由附加规则

p

$p\vee q$

知结论成立。

例 5：说明以下推理用什么规则：如果今天下雨，那么我们今天不去吃烧烤；如果我们今天不去吃烧烤，那么我们明天

去吃烧烤；所以，如果今天下雨，那么我们明天去吃烧烤。

解：令 p: 今天下雨; q: 我们今天不去吃烧烤; r: 我们明天去吃烧烤. 由假言三段论：

$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ q\rightarrow r \end{array}}{p\rightarrow r}$$

该推理用的是假言三段论。

五．用推理规则构造证明：

例 6：证明以下前提：今天下午不出太阳并且今天比昨天冷；仅当今天出太阳我们才去游泳；如果我们不去游泳，我们就去划独木舟；如果我们去划独木舟，那么我们在太阳下山前到家；推出结论：我们在太阳下山前到家。

解：设 p: 今天下午出太阳; q: 今天比昨天冷; r: 我们去游泳; s: 我们去划独木舟; t: 我们在太阳下山前到家.

前提：$\neg p\wedge q$, $r\rightarrow p$, $\neg r\rightarrow s$, $s\rightarrow t$

结论：t

证明：

(1) $\neg p\wedge q$ 前提

(2) $\neg p$ （1），化简

(3) $r\rightarrow p$ 前提

(4) $\neg r$ （2），（3）拒取式

(5) $\neg r\rightarrow s$ 前提

(6)　s　　　　　　（4），（5）分离

(7)　s→t　　　　　前提

(8)　t　　　　　　（6），（7）分离

例 7：证明以下前提：如果你发给我 email，我将写完程序；如果你不发给我 email，我将早点睡觉；如果我早点睡觉，我醒来时精神十足；推出结论：如果我不写完程序，那么我醒来时精神十足。

解: 设 p: 你发给我 email; q: 我将写完程序; r: 我将早点睡觉; s: 我醒来时精神十足.

前提：p→q, ┐p→r, r→s

结论：┐q→s

证明：

(1)　p→q　　　　　前提

(2)　┐q→┐p　　　（1）逆否命题

(3)　┐p→r　　　　前提

(4)　┐q→r　　　　（2），（3）假言三段论

(5)　r→s　　　　　前提

(6)　┐q→s　　　　（4），（5）假言三段论

例子：证明以下前提：如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影；小赵不去看电影或小张去看电影；小王去看电影；推出结论：当小赵去看电影时，小李也去。

解: 设 p: 小张去看电影; q: 小王去看电影; r: 小李去看电影;

s：小赵去看电影;

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r, \neg s\vee p, q$

结论：$s\rightarrow r$

证明：用附加前提证明法

(1)	s	附加前提引入
(2)	$\neg s\vee p$	前提
(3)	p	（1），（2）析取三段论
(4)	$p\wedge q\rightarrow r$	前提
(5)	q	前提
(6)	$p\wedge q$	（3），（5）合取构成
(7)	r	（6），（4）分离

例子：用反证法证明以下推理：

前提：$p\vee q, p\rightarrow r, q\rightarrow s$

结论：$s\vee r$

证明：（反证法）

(1)	$\neg(s\vee r)$	结论否定引入
(2)	$\neg s\wedge\neg r$	德•摩根律
(3)	$\neg s$	（2），化简
(4)	$\neg r$	（2），交换律，化简
(5)	$p\rightarrow r$	前提
(6)	$\neg p$	（4），（5）拒取式
(7)	$q\rightarrow s$	前提

(8)　$\neg q$　　　　（3），（7）拒取式

(9)　$\neg p \wedge \neg q$　　（6），（8）合取构成

(10)　$\neg(p \vee q)$　　（9）德•摩根律

(11)　$p \vee q$　　　　前提

(12)　$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$　（10），（11）合取构成，矛盾

六．消解法(resolution)

*计算机科学家们已经能够用程序实现自动推理和证明定理。其中主要的规则是消解规则。这个规则根据重言式：

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

其中：$q \vee r$ 称为消解结果(resolvent).

令 $q = r$, 则重言式化为$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$. 进一步，令 $r = F$, 有$(p \vee q) \wedge (\neg p) \rightarrow q$ （因为$\neg p \vee F \Leftrightarrow \neg p$，$q \vee F \Leftrightarrow q$）,这就是析取三段论的重言式。

例 8: 用消解法证明前提:“杰士明正在滑雪或现在不在下雪”和“现在正在下雪或巴特正在玩曲棍球”能够推出结论:“杰士明正在滑雪或巴特正在玩曲棍球”。

解：令 p: 天不在下雪； q: 杰士明正在滑雪; r: 巴特正在玩曲棍球; 由消解规则：

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \end{array}}{q \vee r}$$

即可推出结论。

例 9：构造以下推理的证明：

前提：$(p\wedge q)\vee r, r\rightarrow s$

结论：$p\vee s$

证明：

(1) $(p\wedge q)\vee r$ 前提

(2) $(p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （1）分配律

(3) $p\vee r$ （2）化简

(4) $r\rightarrow s$ 前提

(5) $\neg r\vee s$ （4）蕴涵等值式

(6) $p\vee s$ （3），（5）消解规则

七．推理中的谬误

1. 肯定结论谬误

例 10：以下推论是否合法：

如果你做了这本书中每一道题，那么你将学会离散数学。你学会了离散数学。所以，你做了书中的每一道题。

解：令 p: 你做了书中的每一道题; q: 你学会了离散数学;

本题的推理是：

$$\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

但$(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$ 不是重言式，故本推理不正确。

2. 否定前提谬误

例 11：以下推论是否正确：如果你做了这本书中每一道题，那么你将学会离散数学。你没有做书中每一道题。所以，你学不会离散数学。

解：令 p,q 如上题。本题的推理是：

$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ \neg p \end{array}}{\neg q}$$

但$(p\rightarrow q)\wedge\neg p\rightarrow\neg q$不是重言式，故本推理不正确。

八．含量词的语句的推理规则

1. 全称量词消去(Universal instantiation)

$$\frac{\forall xP(x)}{P(c)}$$

*c 可以是 x 论域中的任何一个元素。

2. 全称量词引入(Universal generalization)

$$\frac{P(c)\ \text{c 是论域中任意元素}}{\forall xP(x)}$$

3. 存在量词消去(existential instantiation)

$$\frac{\exists xP(x)}{P(c)\ \ \text{对论域中某个 c}}$$

*c 不能指定是哪个元素

4. 存在量词引入(Existential generalization)

$$\frac{P(c)\ \text{对论域中某个元素}\ c}{\exists x P(x)}$$

九．含量词的推理

例 12：给出以下推理的证明：凡人都会死，苏格拉底是人，所以苏格拉底会死。

解：论域：全总论域。

令 P(x): x 是人；Q(x): x 会死。个体常项：a: 苏格拉底

前提：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$, $P(a)$

结论：$Q(a)$

证明：

(1) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ 前提

(2) $P(a)\rightarrow Q(a)$ 全称量词消去

(3) $P(a)$ 前提

(4) $Q(a)$ （2），（3）分离

例 13：证明前提：这个班的一个学生没读过这本书；这个班的每一个学生都通过了第一次考试；推出结论：通过第一次考试的某个学生没有读过这本书。

解：设 C(x): x 是这个班的学生；B(x): x 读过这本书；

P(x): x 通过了第一次考试。

前提：$\exists x(C(x)\wedge\neg B(x))$, $\forall x(C(x)\rightarrow P(x))$

结论：$\exists x(P(x)\wedge\neg B(x))$

证明：

(1) $\exists x(C(x)\land\neg B(x))$ 前提

(2) $C(a)\land\neg B(a)$ （1）存在量词消去

(3) $C(a)$ （2）化简

(4) $\forall x(C(x)\to P(x))$ 前提

(5) $C(a)\to P(a)$ （4）全称量词消去

(6) $P(a)$ （3），（5）分离

(7) $\neg B(a)$ （2）化简

(8) $P(a)\land\neg B(a)$ （6），（7）合取构成

(9) $\exists x(P(x)\land\neg B(x))$ （8）存在量词引入

例子：设论域是实数的集合。构造下面推理的证明：不存在能表示成分数的无理数；有理数都能表示成分数。因此，有理数都不是无理数。

解：设 F(x): x 为无理数；G(x): x 为有理数；H(x): x 能表示成分数；

前提：$\neg\exists x(F(x)\land H(x))$，$\forall x(G(x)\to H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\to\neg F(x))$

证明：

(1) $\neg\exists x(F(x)\land H(x))$ 前提

(2) $\forall x\neg(F(x)\land H(x))$ （1）等值置换（量词否定）

(3) $\forall x(\neg F(x)\lor\neg H(x))$ （2）等值置换（德•摩根律）

(4) $\forall x(F(x)\to\neg H(x))$ （3）等值置换（蕴涵等值式）

(5) $F(y)\to\neg H(y)$ （4）全称量词消去

(6) $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$ 前提

(7) $G(y)\rightarrow H(y)$ （6）全称量词消去

(8) $H(y)\rightarrow\neg F(y)$ （5）逆否命题

(9) $G(y)\rightarrow\neg F(y)$ （7），（8）假言三段论

(10) $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$ （9）全称量词引入

例子：构造以下推理的证明：

前提：$\forall x(P(x)\wedge Q(x)\rightarrow R(x))$，$\forall x(S(x)\rightarrow P(x))$, $S(a)\wedge Q(a)$

结论：$R(a)$

证明：

(1) $\forall x(S(x)\rightarrow P(x))$ 前提

(2) $S(a)\wedge Q(a)$ 前提

(3) $S(a)$ （2）化简

(4) $S(a)\rightarrow P(a)$ （1）全称量词消去

(5) $P(a)$ （3），（4）分离

(6) $Q(a)$ （2）化简

(7) $P(a)\wedge Q(a)$ （5），（6）合取构成

(8) $\forall x(P(x)\wedge Q(x)\rightarrow R(x))$ 前提

(9) $P(a)\wedge Q(a)\rightarrow R(a)$ （8）全称量词消去

(10) $R(a)$ （7），（9）分离

作业：

1. 构造以下推理的证明：

前提：$p \rightarrow (q \rightarrow s), \neg r \vee p, q$

结论：$r \rightarrow s$

2. 用命题逻辑构造以下推理的证明：

如果小张守第一垒并且小李向 B 队投球，则 A 队取胜；或者 A 队未取胜，或者 A 队成为联赛第一名；A 队没有成为联赛第一名；小张守第一垒。因此，小李没向 B 队投球。

3. 用谓词逻辑构造以下推理的证明：

前提：$\forall x(P(x) \vee Q(x))$，$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$，$\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$，$\exists x \neg P(x)$

结论：$\exists x \neg R(x)$

4. 用谓词逻辑构造以下推理的证明：

如果一个人怕困难，那么他就不会获得成功；每个人或者获得成功，或者失败过；有些人未曾失败过。所以有些人不怕困难。（设论域为全总论域）