 2012 16/4

P.223.4. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛，

则级数：$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 都收敛。

证 (1) 因为 $(|a_n|-|b_n|)^2 \geq 0$

则 $|a_n|\cdot|b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$

由条件 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛。

由比较判别法可知：$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||b_n|$ 收敛。

(2) 因为 $2a_n\cdot b_n \leq a_n^2+b_n^2$

$$(a_n+b_n)^2 = a_n^2+2a_n\cdot b_n+b_n^2 \leq a_n^2+b_n^2+(a_n^2+b_n^2)=2(a_n^2+b_n^2)$$

由条件及(1)可知 $\sum_{n=1}^{\infty}2(a_n^2+b_n^2)$ 收敛，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛。

(3) 因为 $(|a_n|-\frac{1}{n})^2 = |a_n|^2-\frac{2|a_n|}{n}+\frac{1}{n^2} \geq 0$

$$\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 也收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛。