《高等数学》第八章习题解答

习题8.1

1. 求$\int_L (xy+yz+zx)ds$, 其中L为过四点$O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,1)$的折线.

解. $I=\int_0^1 0dz+\int_0^1 ydy+\int_0^1(x+1+x)dx=\frac{5}{2}$.

2. 求$\oint_L xyds$, 其中L是正方形$|x|+|y|=a\ (a>0)$.

解. 被积函数是关于x的奇函数, 积分曲线L关于y轴对称, 因此积分为0.

3. 求$\int_L(1+y^2)ds$, 其中L为摆线段: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

解. $I=\int_0^{2\pi}(1+4a^2\sin^4\frac{t}{2})2a\sin\frac{t}{2}dt=8a+\frac{256}{15}a^3$.

4. 求$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中$L$为螺旋线段: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\le t\le 2\pi$.

解. $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2+b^2t^2}\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\arctan\frac{2\pi b}{a}$.

5. 求$\oint_C(x+y)ds$, 其中C为双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$的右面的一瓣.

解. 曲线C的参数方程: $x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.
$x'^2+y'^2=\frac{a^2}{\cos 2\theta}$. 于是$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}(\cos\theta+\sin\theta)\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=\sqrt{2}a^2$.

6. 求$\int_L xyds$, 其中L是椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$位于第一象限中的那部分.

解. L的参数方程: $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ab\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=\frac{ab(a^3-b^3)}{a^2-b^2}$.

7. 求$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中L为曲线段$x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$.

解. $x^2+y^2=a^2(1+t^2)$, $x'^2+y'^2=a^2t^2$, $I=\int_0^{2\pi}a^2\sqrt{1+t^2}tdt=\frac{(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1}{3}a^2$.

8. 求$\int_L(x+\sqrt{y}-z^5)ds$, 其中L由曲线段L_1, L_2组成, L_1与L_2的方程分别为$L_1:\begin{cases}y=x^2,\\ z=0,\end{cases}\ 0\le x\le 1$; $L_2:\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}\ 0\le z\le 1$.

解. $I=\int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx+\int_0^1(2-z^5)dz=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\frac{11}{6}=\frac{5\sqrt{5}+10}{6}$.

9. 若椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点$(x,y)$处的线密度为$|y|$, 求椭圆周的质量$(0<b<a)$.

解. 记椭圆为L, $m=\int_L|y|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=2b^2+\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

习题8.2

1. 求$\int_L 2xydx-x^2dy$的值, 其中L沿下列不同路径从原点$O(0,0)$到终点$A(2,1)$:
(1) 直线段$\overline{OA}$; (2) 以Oy轴为对称轴的抛物线段; (3) 折线OBA; (4)折线OCA.

解. (1) $I=\int_0^1 2(2y)yd(2y)-(2y)^2dy=\frac{4}{3}$.

(2) $I=\int_0^2 2x\frac{x^2}{2}dx-x^2d\frac{x^2}{2}=0$.

(3) $I=\int_0^2 0dx-\int_0^1 4dy=-4$.

(4) $I=-\int_0^1 0dy+\int_0^2 2xdx=4$.

2. 求$\int_L \mathbf{F}d\mathbf{r}$, 其中$\mathbf{F}=(x^2+y,x+y^2)$, L沿下列各路径从点$A(1,0)$到$B(-1,0)$: (1) 半圆周$y=-\sqrt{1-x^2}$; (2) 直线段$\overline{AB}$; (3) 折线段ACB, 其中C点坐标为$(0,-1)$.

解. (1) 曲线L: $x=\cos t$, $y=\sin t$, t从0至$-\pi$. $I=\int_0^{-\pi}(\cos^2 t+\sin t)(-\sin tdt)+(\cos t+\sin^2 t)\cos tdt=-\frac{2}{3}$.

(2) 曲线L: $y=0$, x从1至-1. $I=\int_1^{-1}(x^2+0)(-dx)=-\frac{2}{3}$.

(3) $I=\int_1^0(x^2+x-1)dx+(x+(x-1)^2)dx+\int_0^{-1}(x^2-x-1)dx+(x+(-x-1)^2)(-dx)=-\frac{2}{3}$.

3. 求$\oint x^2dy-y^2dx$, 其中积分路径为椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 按逆时针方向.

解. L: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, t从0至2π. $I=\int_0^{2\pi}a^2\cos^2 tb\cos t-\sin^2 t(-a\sin t)dt=0$.

4. $\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中$L$为: (1) 曲线$y=x^4$上由点$(-1,1)$到点$(1,1)$的一段; (2) 由点$(-1,1)$到点$(1,1)$的直线段.

解. (1) $I=\int_{-1}^1(x^2-2xx^4)dx+(x^8-2xx^4)dx^4=-\frac{10}{9}$.

(2) $I=\int_{-1}^1(x^2-2x)dx=\frac{2}{3}$.

5. 求$\int_L ydx+zdy+xdz$, 其中L为螺旋线段: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$.

解. $I=\int_0^{2\pi}a\sin t(-a\sin t)dt+bta\cos tdt+a\cos tbdt=-\pi a^2+0+0=-\pi a^2$.

6. 求$\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y)dy$, 其中$L$是曲线$y=|x|$上从点$(-1,1)$到$(2,2)$的一段.

解. $I=\int_{-1}^0(x^2+x^2)dx+(x^2+x)(-dx)+\int_0^2(x^2+x^2)dx+(x^2-x)dx=\frac{41}{6}$.

7. 求$\oint_L\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中$L$是以$A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$, $D(0,-2)$为顶点的正向正方形闭路.

解. 被积向量函数$(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|})$和积分曲线都关于原点对称, 因此积分为0.

8. 求$\int_L(x^4-z^2)dx+2xy^2dy-ydz$, 其中$L$为依参数$t$增加方向的曲线: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\le t\le 1)$.

解. $I=\int_0^1(t^4-t^6)dt+2tt^4dt^2-t^2dt^3=\frac{1}{35}$.

9. 求$\oint_L(z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz$, 其中$L$为球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限的边界, 方向由$A(1,0,0)$到$B(0,1,0)$到$C(0,0,1)$再回到$A$.

解. 由对称性$I=3\int_{AB}(z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz$
$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-\sin^2 t)(-\sin tdt)+(\cos^2 t-0)\cos tdt+0=4$.

14. 求$\oint_L \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, 其中$L$为双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$的右面的一瓣, 沿逆时针方向.

解. 曲线L: $x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.
$ydx-xdy=-a^2\cos 2\theta d\theta$, $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-a^2\cos 2\theta\cos\theta\sin\theta d\theta=0$.

习题8.3

1. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{L^+}(xy^2+y^3)dy-(x^3+x^2y)dx$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$.

解. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2rdr=\frac{\pi}{2}a^4$.

(2) $\oint_L y^2dx+x^2dy$, 其中L为以$O(0,0),B(1,0),C(0,1)$为顶点的三角形OBC的正向边界线.

解. $I=\iint\limits_{\triangle OBC}(2y-2x)dxdy$, 由对称性$I=0$.

(4) $\oint_{L^+}(x+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy$, 其中$L$是双纽线$r^2=\cos 2\theta$的右半支.

解. 设D为L所围区域. $I=\iint\limits_D(1+e^x\cos y-e^x\cos y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}rdr=\frac{1}{2}$.

(5) $\oint_{L^+}(e^x\sin y+\sin x-8y)dx+(e^x\cos y-\sin y)dy$, 其中$L$为上半圆$0\le y\le\sqrt{ax-x^2}$ $(0\le x\le a)$的边界.

解. 设D为L所围区域. $I=\iint\limits_D(e^x\cos y-e^x\cos y+8)dxdy=\pi a^2$.

2. 利用曲线积分计算下列闭曲线所围图形的面积:

(1) 星形线$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

解. 记星形线为L, 所围区域为D. $S=\iint\limits_D dxdy=\oint_{L^+}xdy=\int_0^{2\pi}3a^2\cos^4 t\sin^2 tdt=\frac{3}{8}\pi a^2$.

(2) 心脏线$x=a(1-\cos t)\cos t$, $y=a(1-\cos t)\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

解. 记心脏线为L. $S=\frac{1}{2}\oint_{L^+}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=\frac{3}{2}\pi a^2$.

3. 证明$\oint_{L^+}f(xy)(ydx+xdy)=0$, 其中$f(u)$有连续的一阶导数, L为光滑曲线.

证. $f(xy)(ydx+xdy)=f(xy)d(xy)$为全微分, 因此它的曲线积分与路径无关. 由于$L$的起点和终点重合, 因此$\oint_{L^+}f(xy)(ydx+xdy)=0$.

4. 证明下列曲线积分与路径无关, 并求积分值.

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)dx+(x-y)dy$. $\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=\frac{\partial(x-y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关. $(x+y)dx+(x-y)dy=d(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2)$, $I=(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2)|_{(0,0)}^{(1,1)}=1$.

(3) $\int_{(0,0)}^{(a,b)}e^x\cos ydx-e^x\sin ydy$. $\frac{\partial(e^x\cos y)}{\partial y}=\frac{\partial(-e^x\sin y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关. $e^x\cos ydx-e^x\sin ydy=d(e^x\cos y)$, $I=e^x\cos y|_{(0,0)}^{(a,b)}=e^a\cos b-1$.

5. 求$\int_{AB}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$的值，其中$A(-2,-1)$, $B(3,0)$, AB为任意路径.

解. $(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=d(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5)$,
$I=(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5)|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62$.

7. 求常数a,b，使$\frac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$是某个函数$u(x,y)$的全微分，并求$u(x,y)$.

解. 记$P=\frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q=-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}$. 解$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，得$a=b=-1$.
由$\frac{\partial u}{\partial x}=P$，得$u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+\varphi(y)$. 求导得$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(y)$，代入$\frac{\partial u}{\partial y}=Q$，得$\varphi(y)=C$. 因此$u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

8. 求$\int_{(0,1)}^{(1,1)}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y)dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)dy$.

解. $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y)dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)dy=d(\sqrt{x^2+y^2}+xy)$.
因此$I=(\sqrt{x^2+y^2}+xy)|_{(0,1)}^{(1,1)}=\sqrt{2}$.

9. 求$\int_{AB}(x^2+y)dx+(x-y^2)dy$，其中$AB$是由$A(0,0)$至$B(1,1)$的曲线段$y^3=x^2$.

解. $(x^2+y)dx+(x-y^2)dy=d(\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3)$, $I=(\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3)|_{(0,0)}^{(1,1)}=1$.

10. 设D是平面有界闭区域，其边界线L逐段光滑，函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数. 证明: $\oint_{L^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,x)]ds=\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$，其中$\cos(n,x),\cos(n,y)$为曲线$L$的外法向量的方向余弦.

证. $\oint_{L^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)]ds=\oint_{L^+}Pdy-Qdx=\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$.

11. 求曲线积分$\oint_{L^+}[x\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle+y\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle]ds$，其中$L$为一简单封闭曲线，$\mathbf{n}$为$L$的外法线方向的单位向量.

解. 设L所围区域为D. $I=\oint_{L^+}xdy-ydx=\iint\limits_D 2d\sigma=$两倍$D$的面积,

12. 设函数$u(x,y),v(x,y)$在有界闭区域D上有连续的二阶偏导数，L为D的边界，分段光滑. 证明:

(1) $\iint\limits_D v\triangle u d\sigma=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}ds-\iint\limits_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma$，其中$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$为$u$沿$L$的外法线方向的方向导数.

(2) $\iint\limits_D(u\triangle v-v\triangle u)d\sigma=\oint_{L^+}(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})ds$.

证. $\iint\limits_D v\triangle u d\sigma+\iint\limits_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial u}{\partial y}))d\sigma$，由格林公式，该式$=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial x}dy-v\frac{\partial u}{\partial y}dx$，由于$dy=\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle ds$, $dx=-\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle ds$，该式$=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle ds+v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle ds=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}ds$. (1)得证. (2)是(1)的直接推论.

13. 设$u(x,y)$是有界闭区域D上的调和函数，即$u(x,y)$有连续的二阶偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 证明:

(1) $\oint_{L^+} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds=\iint\limits_D[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]d\sigma$, 其中$L$为$D$的边界, $\mathbf{n}$为L的外法线方向.

(2) 若$u(x,y)$在L上处处为零, 则$u(x,y)$在D上也恒为零.

证. (1) 在12(1)题中取$v=u$, 并利用$\triangle u=0$, 即得所要等式.

(2) 一方面由(1)的结论$\iint\limits_D[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]d\sigma=0$, 另一方面$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$为$D$上非负连续函数, 因此$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$在$D$内恒为零, 因此$u$在$D$上恒为零.