 2012 15/4

P.223.2.(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$; $(p>0)$

解: $u_n = f(n) = \frac{1}{n\cdot(\ln n)^p}$

由积分判别法: $p=1$, $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int_3^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_3^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\,d\ln x = \ln\ln x\Big|_3^{+\infty} = +\infty$$

从而 $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$ 也发散。

$p\neq 1$, $u_n = f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_3^{+\infty}(\ln x)^{-p}\,d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_3^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{(\ln x)^{p-1}}\Big|_3^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ 0-\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{(\ln 3)^{p-1}}. & p>1 \end{cases}$$

从而, $p>1$ 时, 级数收敛;

$0<p\leq 1$ 时, 级数发散。