数字图像处理 第四章作业

16337341 朱志儒

4.1 解：对函数$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 2\mathrm{A},\ -\frac{\mathrm{W}}{4} \le \mathrm{t} \le \frac{\mathrm{W}}{4} \\ 0,\ \mathrm{t} < -\frac{\mathrm{W}}{4}\text{或}\ \mathrm{t} > \frac{\mathrm{W}}{4} \end{cases}$的傅里叶变换：

$$\mathrm{F(u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ut}dt = \int_{-\frac{W}{4}}^{\frac{W}{4}} 2Ae^{-j2\pi ut}dt = -\frac{A}{j\pi u}e^{-j2\pi ut}|_{-\frac{W}{4}}^{\frac{W}{4}}$$

$$= -\frac{A}{j\pi u}\left(e^{-\frac{j\pi uW}{2}} - e^{\frac{j\pi uW}{2}}\right) = \frac{A}{j\pi u}\left(2j\sin\left(\frac{\pi}{2}uW\right)\right) = AW\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}uW\right)}{\frac{\pi}{2}uW}$$

$$= AWsinc(\frac{uW}{2})$$

例子中的结果：$\mathrm{F(u) = AWsinc(uW)}$，两式对比可发现两式的幅值不变，频率变化。

4.16 证明：由二维连续傅里叶变换：

$$\mathrm{F(u,v)} = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(t,z)e^{-j2\pi(ut+vz)}dtdz$$

可知：

$$\Im\left[\mathrm{f(x,y)}e^{j2\pi(u_0x+v_0y)}\right] = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)} \cdot e^{j2\pi(u_0x+v_0y)}dxdy$$
$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi[(u-u_0)x+(v-v_0)y]}dtdz = F(u-u_0, v-v_0)$$

同理：

$$\Im^{-1}\left[F(u,v)e^{-j2\pi(u_0x+v_0y)}\right] = \mathrm{f(x}-x_0,\mathrm{y}-y_0)$$

由上可得连续二维傅里叶变换是平移不变的。

由二维离散傅里叶变换：

$$\mathrm{F(u,v)} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{m}+\frac{vy}{N})}$$

可知：

$$\Im\left[\mathrm{f(x,y)}e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}\right]=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}$$

$$=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{(u-u_0)x}{M}+\frac{(v-v_0)y}{N})}=\ F(u-u_0,v-v_0)$$

同理:

$$\Im^{-1}\left[F(u,v)e^{-j2\pi(u_0x+v_0y)}\right]=\mathrm{f(x}-x_0,\mathrm{y}-y_0)$$

由上可得离散二维傅里叶变换是平移不变的。

使用极坐标

$$\mathrm{x=rcos\theta},\qquad \mathrm{y=rsin\theta},\qquad \mathrm{u=wcos\varphi},\qquad \mathrm{v=wsin\varphi}$$

二维连续傅里叶变换:

$$\mathrm{F(w,\varphi)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(r,\theta)e^{-j2\pi(wrcos\varphi cos\theta+wrsin\varphi sin\theta)}rdrd\theta$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}f(r,\theta)e^{-j2\pi wrcos(\theta-\varphi)}rd\theta dr$$

可知:

$$\Im\left[\mathrm{f}\left(\mathrm{r},\theta+\theta_0\right)\right]=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}f(r,\theta+\theta_0)e^{-j2\pi wrcos(\theta+\theta_0-\varphi)}rd\theta dr$$

令$\Theta=\theta+\theta_0$则

$$\Im[\mathrm{f(r,\Theta)}]=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}f(r,\Theta)e^{-j2\pi wrcos[\Theta-(\varphi+\theta_0)]}rd\Theta\mathrm{dr}=\mathrm{F(w,\varphi}+\theta_0)$$

同理:

$$\Im^{-1}[F(w,\varphi+\theta_0)]=f(r,\theta+\theta_0)$$

由上可得连续二维傅里叶变换是旋转不变的。

二维离散傅里叶变换:

$$\mathrm{F(w,\varphi)}=\sum_{w=0}^{M-1}\sum_{\varphi=0}^{2\pi}f(r,\theta)\,e^{-j2\pi(wrcos\varphi cos\theta+wrsin\varphi sin\theta)}=\sum_{w=0}^{M-1}\sum_{\varphi=0}^{2\pi}f(r,\theta)\,e^{-j2\pi wrcos(\theta-\varphi)}$$

可知:

$$\Im\left[\mathrm{f}\left(\mathrm{r},\theta+\theta_0\right)\right]=\sum_{w=0}^{M-1}\sum_{\varphi=0}^{2\pi}f(r,\theta+\theta_0)\,e^{-j2\pi wrcos(\theta+\theta_0-\varphi)}$$

令$\Theta=\theta+\theta_0$则

$$\Im[\mathrm{f}(\mathrm{r},\Theta)]=\sum_{w=0}^{M-1}\sum_{\varphi=0}^{2\pi}f(r,\Theta)\,e^{-j2\pi wrcos[\Theta-(\varphi+\theta_0)]}=\mathrm{F}(\mathrm{w},\varphi+\theta_0)$$

同理:

$$\Im^{-1}[F(w,\varphi+\theta_0)]=f(r,\theta+\theta_0)$$

由上可得离散二维傅里叶变换是旋转不变的。

综上可得：连续和离散二维傅里叶变换都是平移和旋转不变的。