18.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且a,b是方程$f(x)=0$的两个实根.证明方程
$f(x)+f'(x)=0$在(a,b)内至少有一个实根.

证设 $g(x)=e^x f(x), g(a)=g(b)=0, g$在 $[a,b]$连续, 在(a,b)可导),.

根据Rolle定理, 存在 $c\in(a,b)$, 使得$g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))=0$,即$f(x)+f'(x)=0$.

19.决定常数A的范围, 使方程$3x^4-8x^3-6x^2+24x+A$有四个不相等的实根.

解$P(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x, P'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

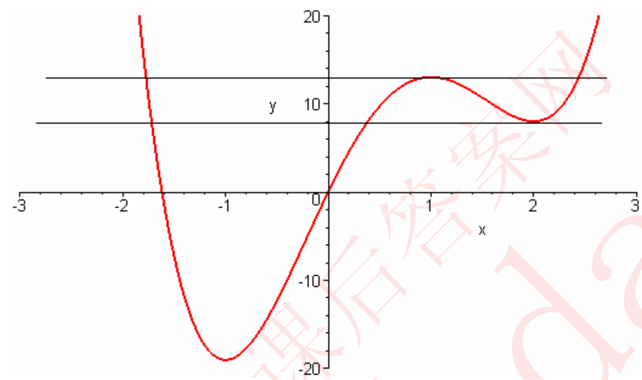
$=12(x^3-2x^2-x+2)=12[x^2(x-2)-(x-2)]=12(x-2)(x^2-1)=12(x-2)(x-1)(x+1)$

$=0$,.

$x_1=-1, x_2=1, x_3=2. P(x_1)=-19, P(1)=13, P(2)=8.$

根据这些数据画图, 由图易知当在区间$(-P(1),-P(2))=(-13,-8)$时

$3x^4-8x^3-6x^2+24x+A$有四个不相等的实根.



20.设$f(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$.证明:方程$f(x)=0$当$n$为奇数时有一个实根,当$n$为偶数时无实根.

证当$x\le 0$时$f(x)>0$,故f 只有正根,当$n=2k-1$为奇数时, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 存在$a,b,a<b, f(a)>0, f(b)<0$.

根据连续函数的中间值定理, 存在$x_0\in(a,b)$, 使得$f(x_0)=0$.

$f'(x)=-1+x-x^2+\cdots-x^{2k-2}=\dfrac{x^{2k-1}+1}{-x-1}<0(x>0)$,当$x>0$时, f严格单调递减,故实根唯一.

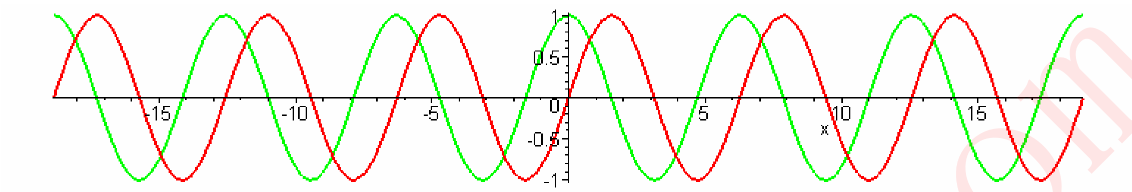
当$n=2k$为偶数时, $f'(x)=-1+x-x^2+\cdots+x^{2k-1}=\dfrac{-x^{2k}+1}{-x-1}=0, x=1.$

$0<x<1, f'(x)<0, x>1, f'(x)>0, f(1)$是$x>0$时的最小值, $f(1)>0$,故当n为偶数时$f(x)$无实根.

21.设函数$u(x)$与$v(x)$以及它们的导函数$u'(x)$与$v'(x)$在区间$[a,b]$上都连续,且$uv'-u'v$在$[a,b]$上恒不等于零.证明$u(x)$在$v(x)$的相邻根之间必有一根,反之也对.即有$u(x)$与$v(x)$的根互相交错地出现.试句举处满足上述条件的$u(x)$与$v(x)$.

证设x_1,x_2是$u(x)$的在$[a,b]$的两个根, $x_1<x_2$.由于$u'v-uv'\neq 0, v(x_1)\neq 0, v(x_2)\neq 0$.如果$v(x)$在$[x_1,x_2]$上没有根,则$w=\dfrac{u}{v}$在$[a,b]$连续, $w(x_1)=w(x_2)=0$,由Rolle定理,存在$c\in[x_1,x_2]$,使得$w'(c)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(c)=0$,即$(u'v-uv')(c)=0$,此与$u'v-uv'$恒不等于零的假设矛盾. 故v(x)在$[x_1,x_2]$上有根.

例如$u=\cos(x), v=\sin x, u'v-uv'=-1\neq 0$, $\sin x\cos x$的根交错出现.



22.证明:当$x>0$时函数$f(x)=\dfrac{\arctan x}{\tanh x}$单调'递增,且$\arctan x<\dfrac{\pi}{2}(\tanh x)$.

证$f'(x)=\left(\dfrac{\arctan x}{\tanh x}\right)'=\dfrac{\dfrac{\tanh x}{1+x^2}-\dfrac{\arctan x}{\cosh^2 x}}{\tanh^2 x}=\dfrac{\sinh x\cosh x-(1+x^2)\arctan x}{(1+x^2)\tanh^2 x\cosh^2 x}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sinh 2x-(1+x^2)\arctan x}{(1+x^2)\tanh^2 x\cosh^2 x}=\frac{g(x)}{(1+x^2)\tanh^2 x\cosh^2 x}.$$

$g(0)=0.$

$g'(x)=\cosh 2x-1-2x\arctan x, g'(0)=0,$

$g''(x)=2\sinh 2x-2\arctan x-\dfrac{2x}{1+x^2}, g''(0)=0,$

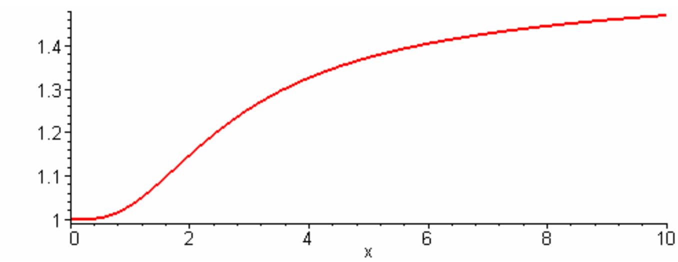
$$g'''(x)=4\cosh 2x-\frac{2}{1+x^2}-2\times\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x)^2}=4\cosh 2x-\frac{2}{1+x^2}-\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$=4\cosh 2x-\frac{4}{1+x^2}+\frac{4x^2}{1+x^2}>0(\text{当}x>0\text{时}\cosh x>1),$$

由Taylor公式, 对于$x>0$有

$g(x)=\dfrac{g(\theta x)}{3!}x^3>0,\ f'(x)>0,\ f$严格单调递增.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{\tanh x}=\dfrac{\pi}{2}$,故对于$x>0$有$\dfrac{\arctan x}{\tanh x}<\dfrac{\pi}{2}$.



23.证明:当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时有$\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\tan x}{x}$.

证$f(x)=\sin x\tan x-x^2$,

$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x-2x=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x$,

$f''(x)=\cos x+\sec x+2\sin x\sec^2 x\tan x-2=(\cos x+\sec x-2)+2\sin^2 x\sec x-2>0$

$(\cos x+\sec x=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\geq 2, x\in(0,\pi/2))$.

$f(0)=f'(0)=0$,根据Taylor公式,

$f(x)=\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2>0, \sin x\tan x-x^2>0, \dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\tan x}{x}(x\in(0,\pi/2))$.

24.证明下列不等式:

(1)$e^x>1+x, x\neq 0$.

(2)$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x), x>0$.

(3)$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x, x>0$.

证 (1)$e^x=1+x+\dfrac{e^{\theta x}}{2}x^2>1+x, x\neq 0$.

(2)$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{(1+\theta x)^2}x^2<x, x>0$.

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{3(1+\theta x)^3}x^3>x-\dfrac{x^2}{2}, x>0$.

(3) $f(x)=x-\sin x$, $f(0)=0$, $f'(x)=1-\cos x\geq 0$,仅当$x=2n\pi$时$f'(x)=0$,故当$x>0$时

f严格单调递增, $f(x)>f(0)=0, x>0$.

$g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$,

$g'(x)=\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right), g''(x)=-\sin x+x>0, x>0$.$g$当$x>0$时

严格单调递增, $g(x)>g(0)=0, x>0$.

25.设$x_n=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$,其中常数$q\in[0,1)$.证明序列$x_n$有极限.

证x_n单调递增.$\ln x_n=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+q^i)<\sum_{i=1}^{n}q^i=\dfrac{q-q^{n+1}}{1-q}<\dfrac{q}{1-q}$,

$x_n=e^{\ln x_n}<e^{\frac{q}{1-q}}$.$x_n$有上界.故$x_n$有极限.

26.求函数$f(x)=\tan x$在$x=\pi/4$处的三阶Taylor多项式,并由此估计$\tan(50^\circ)$的值.

解$f'(x)=\sec^2 x$, $f''(x)=2\sec^2 x\tan x$, $f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x$.

$f(\dfrac{\pi}{4})=1, f'(\dfrac{\pi}{4})=2, f''(\dfrac{\pi}{4})=4, f'''(\dfrac{\pi}{4})=16$.

$$f(x)=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

$$\tan(50^\circ)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{36}\right)\approx 1+2\times\frac{\pi}{36}+2\left(\frac{\pi}{36}\right)^2+\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3\approx 1.191536480.$$

27.设$0<a<b$,证明$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b)$.

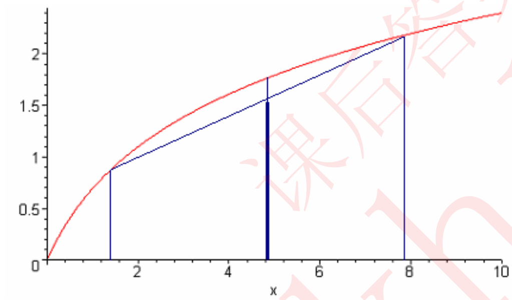
证$f(x)=\ln(1+x)$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}<0$,

f在$x>0$上凸,

$$\frac{(1+a)}{(1+a+b)}\ln(1+a)+\frac{(1+b)}{(1+a+b)}\ln(1+b)$$

$$<\ln\left(1+\frac{(1+a)a}{(1+a+b)}+\frac{(1+b)b}{(1+a+b)}\right)$$

$$<\ln\left(1+\frac{(1+a+b)a}{(1+a+b)}+\frac{(1+a+b)b}{(1+a+b)}\right)=\ln(1+a+b).$$



28.设有三个常数a,b,c,满足

$a<b<c, a+b+c=2, ab+bc+ca=1$.证明:$0<a<\frac{1}{3},\frac{1}{3}<b<1,1<c<\frac{4}{3}$.

证考虑多项式$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-2x^2+x-abc$.

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)=0, x_1=\frac{1}{3}, x_2=1$.

当$x<\frac{1}{3}$或$x>1$时$f'(x)>0$, f严格单调递增,当$\frac{1}{3}<x<1$时$f'(x)<0$, f严格单调递减.

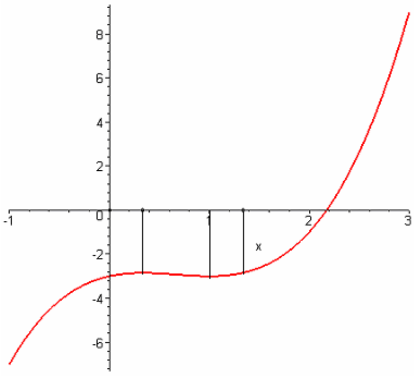
如果$f(0)=f(1)=-abc\geq 0$, f将至多有两个

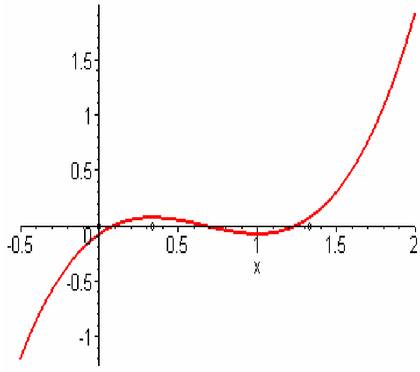
实根.如果$f(\frac{1}{3})=f(\frac{4}{3})=\frac{4}{27}-abc\leq 0$, f也将至多有两个

根(见附图).而f实际有根a,b,c.故$f(0)=f(1)=-abc<0$,并且$f(\frac{1}{3})=f(\frac{4}{3})=\frac{4}{27}-abc>0$.

考虑到严格单调性,于是f

在$(0,\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},1),(1,\frac{4}{3})$各有一实根,正是$a,b,c$,故结论成立.





29.设函数$f(x)$的二阶导数$f''(x)$在$[a,b]$上连续,且对于每一点$x\in[a,b]$, $f''(x)$与$f(x)$同号.证明:若有两点$c,d\in[a,b]$,使$f(c)=f(d)=0$,则$f(x)\equiv 0, x\in[c,d]$.

证由于$f''(x)$与$f(x)$同号,$(f(x)f'(x))'=f'^2(x)+f(x)f''(x)\ge 0, g(x)=f(x)f'(x)$单调,
$g(c)=g(d)=0$,故$f(x)f'(x)\equiv 0, x\in[c,d]$.$(f^2(x))'=2f(x)f'(x)\equiv 0, x\in[c,d]$.
$f^2(x)\equiv C, x\in[c,d]$.$f^2(c)=0$,故$f^2(x)\equiv 0, x\in[c,d]$,即$f(x)\equiv 0, x\in[c,d]$.

30.求多项式$P_3(x)=2x^3-7x^2+13x-9$在$x=1$处的Taylor公式.

解$P_3'(x)=6x^2-14x+13, P_3''(x)=12x-14, P_3'''(x)=12$.

$P_3(1)=-1, P_3'(1)=5, P_3''(1)=-2, P_3'''(1)=12$.

$P_3(x)=-1+5(x-1)-(x-1)^2+2(x-1)^3$.

31.设$P_n(x)$是一个n次多项式.

(1)证明: $P_n(x)$在任一点x_0处的Taylor公式为

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0).$$

(2)若存在一个数a,使$P_n(a)>0, P_n^{(k)}(a)\ge 0(k=1,2,\cdots n)$.证明$P_n(x)$的所有实根都不超过$a$.

证(1)$P_n(x)$是一个n次多项式.

(1)证明:因为$P_n(x)$是一个n次多项式, $P_n^{(n+1)}(x)\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$.故在任一点$x_0$处,根据带Lagrange余项的Taylor公式

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}P_n^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

$$=P_n(x_0)+P_n'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

(2)$P_n(x)=P_n(a)+P_n'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)(x-a)^n\ge P_n(a)>0(x\ge a)$,

故$P_n(x)$的所有实根小于a.

32.设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有二阶导数,又知对于一切$x>0$,有

$|f(x)|\le A, |f''(x)|\le B$其中$A,B$为常数.证明:$|f'(x)|\le 2\sqrt{AB}, x\in(0,+\infty)$.

证任意取$x\in(0,+\infty), h>0. f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(c)}{2}h^2$,

$$f'(x)=\frac{1}{h}(f(+h)-f(x))-\frac{f''(c)}{2}h.$$

$$|f'(x)|\le\frac{2A}{h}+\frac{B}{2}h(*).$$

当$\dfrac{2A}{h}=\dfrac{B}{2}h$时(*)右端取最小值. 在(*)中取$h=2\sqrt{\dfrac{A}{B}}$,即得$|f'(x)|\le 2\sqrt{AB}$.

第四章总练习题

1.设y=f(x)在$[x_0-h, x_0+h]$(h>0)内可导.证明存在θ, 0<θ<1使得

$f(x_0+h)-f(x_0-h)=[f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)]h.$

证令g(x)=$f(x_0+x)-f(x_0-x), x\in[0,h].g(x)$在[0, h]内可导,

$g'(x)=f'(x_0+x)+f'(x_0-x), g(0)=0.$

根据Lagrange公式,存在$\theta\in(0,1)$使得

$g(h)-g(0)=g'(\theta h)h$, 即$f(x_0+h)-f(x_0-h)=[f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)]h.$

2.证明:当$x\geq 0$时,等式$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$

中的$\theta(x)$满足$1/4\leq\theta(x)\leq 1/2$且$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=1/4, \lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=1/2.$

证$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}, 2\sqrt{x+\theta(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x},$

$4(x+\theta(x))=2x+1+2\sqrt{x(x+1)},$

$\theta(x)=\dfrac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x).$

$\theta(x)\geq\dfrac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x)}-2x)=\dfrac{1}{4},$

由算术$-$几何平均不等式得

$\theta(x)=\dfrac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)\leq\dfrac{1}{4}(1+(x+x+1)-2x)=\dfrac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)=\dfrac{1}{4}.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)(1+2\sqrt{x(x+1)}+2x)}{(1+2\sqrt{x(x+1)}+2x)}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+4x+4\sqrt{x(x+1)}}{(1+2\sqrt{x(x+1)}+2x)}==\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x+4+4\sqrt{1+1/x}}{(1/x+2\sqrt{(1/x+1)}+2)}=\dfrac{1}{2}.$

3.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{1}{x}, \quad 1<x<+\infty\end{cases}$ 求$f(x)$在闭区间[0,2]上的微分中值定理的中间值.

解$f'(x)=\begin{cases}-x, 0\leq x\leq 1\\ -\dfrac{1}{x^2}, \quad 1<x<+\infty\end{cases}.\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{1/2-3/2}{2}=-\dfrac{1}{2}.$

$-x=-\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}, x=\sqrt{2}.f(x)$在闭区间[0,2]上的微分中值定理的中间值为$\dfrac{1}{2}$或$\sqrt{2}$.

4.在闭区间$[-1,1]$上Cauchy中值定理对于函数$f(x)=x^2$与$g(x)=x^3$是否成立?并说明理由.

解 由于$g'(x)=3x^2$有零点$0\in(-1,1)$,Cauchy中值定理的条件不满足. 其实其结论也不成立.

因为若$\dfrac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, $f'(c)=2c=0$,　$c=0$,但$g'(0)=0$,$\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$无意义.

5.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上有二阶导数,且$f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$又$f(a)=f(b)=0$,证明当$x\in(a,b)$时$f(x)\neq 0$.

证一 若存在$c\in(a,b)$, $f(c)=0$,则由Rolle定理,存在$c_1\in(a,c), c_2\in(c,b)$使得$f'(c_1)=f'(c_2)=0$.

对于$f'(x)$在$[c_1,c_2]$应用定理, 存在$\xi\in(c_1,c_2)$,使得$f''(\xi)=0$,此与条件$f''(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$矛盾.

证二 由假设, $f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$,根据*Darboux*定理, $f''(x)$恒正或恒负.不妨设$f''(x)$恒正,于是f下凸, 曲线严格在连结$(a,f(a))=(a,0)(b,f(b))=(b,0)$的弦下方,故$f(x)<0$, $x\in(a,b)$.

6.设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数,且$f(a)=f(b)=0$,又存在$c\in(a,b)$使$f(c)>0$.证明:在(a,b)内至少存在一点x_0使$f''(x_0)<0$.

证一 由公式,存在$c_1\in(a,c)$,满足$f'(c_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(c)}{c-a}>0$,

存在$c_2\in(c,b)$,满足$f'(c_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=\dfrac{-f(c)}{c-a}<0$.

对于$f'(x)$在$[c_1,c_2]$应用Lagrange公式, 存在$x_0\in(c_1,c_2)$,使得

$$f''(x_0)=\frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1}<0.$$

证二 若不然, $f''(x)\geq 0, x\in(a,b)$, f在$[a,b]$下凸,曲线在连结$(a,f(a))=(a,0)$ $(b,f(b))=(b,0)$的弦下方,故$f(x)\leq 0, x\in(a,b)$.

7.证明方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\dfrac{a_2}{n-1}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+\dfrac{a_n}{1}$

在0与1之间有一个根.

证 考虑函数

$$f(x)=\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+\frac{a_2x^{n-1}}{n-1}+\cdots+\frac{a_nx}{1}-\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}\right)x,$$

$$f'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n-\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}\right)$$

$f(0)=f(1)=0$.由*Rolle*定理,存在$c\in(0,1)$, $f'(c)=0$,即c是

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}$$

在0与1之间的一个根.

8.设函数$f(x)$在有限区间(a,b)内可导,但无界,证明$f'(x)$在(a, b)内也无界.
逆命题是否成立?试举例说明.

证若不然,设f'(x)在(a, b)内有界M, 取定$x_0\in(a,b)$, 则对于任意 $x\in(a,b)$,
根据 Lagrange 公式,$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$,
$|f(x)|=|f(x_0)+f'(c)(x-x_0)|\le|f(x_0)|+|f'(c)||(x-x_0)|\le|f(x_0)|+|M|(b-a)$.

逆命题不成立. 例如$\sqrt{x}$在(0,1)内有界,$0<\sqrt{x}<1$,但是$\sqrt{x}'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$在(0,1)内无界.

9.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有n个根(一个k重根算作k个根),且存在$f^{(n-1)}(x)$,
证明$f^{(n-1)}(x)$在$[a,b]$至少有一个根.(注意:若$f(x)$可以表示成$f(x)=(x-x_0)^k g(x)$且
$g(x_0)\ne0$,则称x_0为$f(x)$的k重根).

证我们对于n作归纳法证明.函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有2个根. 如果x_0是2重根,则
$f(x)=(x-x_0)^2g(x)$且$g(x_0)\ne0$,则$f'(x)=2(x-x_0)g(x)+(x-x_0)^2g'(x)$, $f'(x)$有根x_0.
如果$f(x)$在区间$[a,b]$上有2个不同的根$x_1,x_2,x_1<x_2$,在$[x_1,x_2]$应用Rolle定理,存在
$x_0\in(x_1,x_2)$,使得$f'(x_0)=0$.设结论对于n个根的情况成立.现在假定$f(x)$在区间$[a,b]$
上有$n+1$个根. 如果f有$n+1$重根重根x_0,则
$f(x)=(x-x_0)^{n+1}g(x)$且$g(x_0)\ne0$,则
$f'(x)=(n+1)(x-x_0)^n g(x)+(x-x_0)^{n+1}g'(x)=(x-x_0)^n((n+1)g(x)+(x-x_0)g(x))$,
$(n+1)g(x)+(x-x_0)g(x)=g_1(x),g_1(x_0)=(n+1)g(x_0)\ne0$, $f'(x)$有n重根x_0.
如果如果f有$n+1$个单重根$x_1,\cdots x_{n+1}$,在区间$[x_1,x_2],\cdots,[x_n,x_{n+1}]$上应用Rolle定理,
存在$c_1\in(x_1,x_2),\cdots,c_n\in(x_n,x_{n+1}])$使得$f'(c_1)=\cdots=f'(c_n)=0$, $f'(x)$至少有n个根.
如果f有不同的根$x_1,\cdots,x_k$,重数分别为$n_1,\cdots,n_k,n+1>k>1,\sum_{i=1}^k n_i=n+1$.在$[x_1,x_2]$,
$\cdots,[x_{k-1},x_k]$上应用Rolle定理,存在$c_1\in(x_1,x_2),\cdots,c_{k-1}\in(x_{k-1},x_k)$使得
$f'(c_1)=\cdots=f'(c_{k-1})=0$.$f'(x)$至少有根$k-1+\sum_{i=1}^k(n_i-1)=n$个. 对f'(x)用归纳假设,
$(f'(x))^{(n)}=f^{(n+1)}(x)$至少有一个根.

10.证明:Lerendre多项式$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)]^n$在$(-1,1)$内有$n$个根.

证$f(x)=\dfrac{1}{2^n n!}(x^2-1)]^n$, $f(1)=f(-1)=0$,对于f在$[-1.1]$应用Rolle定理，存在
$c_1^1\in(-1,1)$,使得$f'(c_1^1)=0$.$f'(-1)=f'(1)=0$(当$n>1$时),对于f'在（-1, c_1^1)
$(c_1^1,1)$应用Rolle定理，存在
$c_1^2\in$(-1, c_1^1),$c_2^2\in$(c_1^1,1)使得$f'(c_1^2)=f'(c_2^2)=0$.如此下去，$f^{(n-1)}(x)$在
$(-1,1)$有零点$c_1^{n-1},\cdots,c_{n-1}^{n-1}$，$f^{(n-1)}(-1)=f^{(n-1)}(1)=0$，在（$-1$, c_1^{n-1}），(c_1^{n-1}, c_2^{n-1})，
$\cdots$，(c_{n-1}^{n-1}, 1)应用Rolle定理，得到$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(-1,1)$使得$f^{(n)}(x)=P_n(x)=0$.
$P_n(x)$是n次多项式，至多有n个零点，故$P_n(x)$恰有n个零点.

11.设函数f在$(-\infty,+\infty)$内可导,且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.证明:必存在一点$c\in(-\infty,+\infty)$,使得$f'(c)=0$.

证若$f(x)\equiv\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.x\in(-\infty,+\infty)$,取任意一点$c\in(-\infty,+\infty)$,都有$f'(c)=0$.

设存在$f(x_0)\neq A$,不妨设$f(x_0)>A$.根据极限不等式,存在a, b, 满足:$a<b$,$x_0\in(a,b)$, $f(a)<f(x_0)$, $f(b)<f(x_0)$. f在$[a,b]$连续,必在一点$c\in[a,b]$取最大值. $f(c)\geq f(x_0)>f(a)$, $f(c)\geq f(x_0)>f(b)$, 故$x_0\in(a,b)$, x_0为极大值点,根据Fermat引理, $f'(c)=0$.

12. 设函数$f(x)$在无穷区间$(x_0,+\infty)$可导,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 根据极限定义,存在正数$x_1>x_0$,使得$x>x_1$时$|f'(x)|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)-f(x_1)+f(x_1)}{x}\right|=\left|\frac{f'(c)(x-x_1)+f(x_1)}{x}\right|\leq\frac{\varepsilon(x-x_1)+|f(x_1)|}{x}$$

$<\varepsilon+\dfrac{|f(x_1)|}{x}$.为使$\dfrac{|f(x_1)|}{x}<\varepsilon$,只需$x>\dfrac{|f(x_1)|}{\varepsilon}$.令$X=\max\{x_1,\dfrac{|f(x_1)|}{\varepsilon}\}$,

当$x>X$时,必有$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<2\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

13.设函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$内连续,且当x>a时$f'(x)>l>0$,其中l为常数. 证明:若$f(a)<0$,则在区间$\left(a,a-\dfrac{f(a)}{l}\right)$内方程$f(x)=0$有唯一实根.

证$f(a)<0$,

$$\left(a-\frac{f(a)}{l}\right)=f(a)+f'(c)\left(-\frac{f(a)}{l}\right)>f(a)+l\left(-\frac{f(a)}{l}\right)=0,$$

f在$\left[a,a-\dfrac{f(a)}{l}\right]$连续,由连续怀念书函数的中间值定理,

在区间$\left(a,a-\dfrac{f(a)}{l}\right)$内方程$f(x)=0$至少有一实根.若有两个实根,根据Rolle定理, $f'(x)$将在$\left(a,a-\dfrac{f(a)}{l}\right)$有一零点,这与条件$f'(x)>l>0$矛盾.

14.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导, 且$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.现令$g(x)=f(x+1)-f(x)$,证明$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

证$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x+\theta)(0<\theta<1)=0$.

15.称函数$f(x)$在$[a,b]$满足Lipschiz条件,若存在常数$L>0$,使对于任意$x_1,x_2\in[a,b]$,都有$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

(1)若$f'(x)$在$[a,b]$连续,则$f(x)$在$[a,b]$满足Lipschiz条件

(2)(1)中所述事实的逆命题是否成立?

(3)举一个在$[a,b]$上连续但不满足Lipschiz条件的函数.

解(1) $f'(x)$在$[a,b]$连续, 存在常数$L>0$, 使得$|f'(x)|\le L.x\in[a,b]$.

根据中值公式, 对于任意$x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$,存在$c\in[x_1,x_2]$,使得

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(c)(x_1-x_2)|=|f'(c)|(x_2-x_1)\le L(x_2-x_1)$.

(2)否. $f(x)$在$[a,b]$满足Lipschiz条件, 未必处处可导, 更谈不到$f'(x)$在$[a,b]$连续. 例如, $f(x)=|x|$在 $[-1,1]$满足Lipschiz条件, 但在0不可导.

(3) $f(x)=\sqrt{x}$在$[0,1]$连续,但不满足Lipschiz条件, 因其导函数

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1]$无界.

16.设$F(x)$在$[a,b]$可导,且其导函数$F'(x)=f(x)$在$[a,b]$上可积,证明

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

证$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\to\int_a^b f(x)dx(\lambda(\Delta)\to 0)$.

$\{x_i\}$为$[a,b]$的分割.

17.设多项式$P(x)-a$与$P(x)-b$的全部根都是单实根,证明对于任意实数$c\in(a,b)$,多项式$P(x)-c$的根也全都是单实根.

证不妨设a=0, b>0, c∈(0, b), $P(x)$是n次多项式, 且首项系数为正.

$P(x)$有单实根$x_1<\cdots<x_n$,则这些根把实轴分为$n+1$个区间,每个区间保持固定正负号,且正负相间. 否则某个根将为极值点, 导数为零, 此与单实根矛盾. 在两个无穷区间保持正号, 且严格单调递增或递减, 在每个有穷区间有一个最值点, 且在其两侧分别递增和递减, 设$n=2k$为偶数,

则$\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=+\infty$.设$b>0$且$P(x)=b$有n个单实根$x_1'<\cdots<x_n'$. 必有

$x_1'<x_1, x_2', x_3'\in(x_2,x_3),\cdots,x_{2k-2}',x_{2k-1}'\in(x_{2k-2},x_{2k-1}), x_{2k}'\in(x_{2k},+\infty), P(x_i')=b$.

根据连续函数的中间值定理,对于$c\in(0,b)$, 存在$c_1\in(-\infty,x_1), c_2\in(x_2,x_2')$,

$c_3\in(x_3',x_3), c_{2k-2}\in(x_{2k-2},x_{2k-2}'), c_{2k-1}\in(x_{2k-1}',x_{2k-1}+\infty), c_{2k}\in(x_{2k},+\infty)$,

使得$P(c_i)=c.P$为n次多项式, c_i是P(x)=c的所有单实根.

习题 4.1

1.验证函数$f(x)=x^3-3x^2+2x$在区间$[0,1]$及$[1,2]$上满足Rolle定理的条件并分别求出导数为0的点.

解f处处可导, $f(0)=f(1)=f(2)=0$,故$f(x)$在区间$[0,1]$及$[1,2]$上满足Rolle定理的条件. $f'(x)=3x^2-6x+2=0, x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}, x$

$x_1=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\in(0,1), x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\in(1,2), f'(x_1)=f'(x_2)=0.$

2.讨论下列函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上是否满足Rolle定理的条件,若满足,求$c\in(-1,1)$,使$f'(c)=0$.

(1) $f(x)=(1+x)^m(1-x)^n, m,n$为正整数;

(2) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.

解(1) $f'(x)=m(1+x)^{m-1}(1-x)^n-n(1+x)^m(1-x)^{n-1}$

$=(1+x)^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-n-nx)=0, c=\frac{m-n}{m+1}\in(-1,1), f'(c)=0.$

(2) $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-1/3}$, $f'(0)$不存在.

3.写出函数$f(x)=\ln x$在区间$[1,e]$上的微分中值公式,并求出其中的$c=?$

解$f'(x)=\frac{1}{x}, f(e)-f(1)=\ln e-\ln 1=1=\frac{1}{c}(e-1), c=e-1.$

4.应用Lagrange中值定理, 证明下列不等式:

(1) $|\sin y-\sin x|\le|x-y|$;

(2) $|\tan x-\tan y|\ge|y-x|, x,y\in(-\pi/2,\pi/2)$;

(3) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}(0<a<b)$.

证(1) $|\sin x-\sin y|=|(\sin x)'|_{x=c}(x-y)|=|\cos c||x-y|\le|x-y|$.

(2) $|\tan y-\tan x|=|(\tan x)'|_{x=c}(y-x)|=\sec^2 c|y-x|\ge|y-x|$.

(3) $\frac{b-a}{a}<\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=(\ln x)'|_{x=c}(b-a)=\frac{b-a}{c}(c\in(a,b))<\frac{b-a}{a}$.

5.证明多项式$P(x)=(x^2-1)(x^2-4)$的导函数的三个根都是实根,并指出它们的范围.

证$P(x)$有四个实根根$\pm1,\pm2$,根据Rolle定理,它的导函数有三个实根,又作为四次多项式的导函数,是三次多项式, 最多三个实根, 故$P(x)$的导函数的三个根都是实根, 分别在区间$(-2,-1),(-1,1),(1,2)$.

6.设$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意实数,证明:函数$f(x)=c_1\cos x+c_2\cos 2x+\cdots+c_n\cos nx$在$(0,\pi)$内必有根.

证$g(x)=c_1\sin x+\frac{1}{2}c_2\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}c_n\sin nx$在$[0,\pi]$满足定理的条件$(g(0)=g(\pi)=0)$,故其导函数$f(x)$在$(0,\pi)$内必有根.

7.设函数$f(x)$与$g(x)$在(a,b)内可微，$g(x)\neq 0$，且$\begin{vmatrix} f((x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0, x\in(a,b)$.

证明：存在常数k，使$f(x)=kg(x), x\in(a,b)$.

证$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{\begin{vmatrix} f((x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}}{g^2(x)}=0,$

根据公式的一个推论，存在常数k，使$\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，即$f(x)=kg(x), x\in(a,b)$.

8.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可微且$f'(x)=k, -\infty<x<+\infty$.证明：$f(x)=kx+b, -\infty<x<+\infty$，其中$k,b$为常数.

证$(f(x)-kx)'=f'(x)-k=k-k=0, -\infty<x<+\infty.$，$f(x)-kx=b, -\infty<x<+\infty.$

9.证明下列等式：

(1) $\arcsin x+\arccos x=\pi/2, -1\le x\le 1;$

(2) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, -\infty<x<+\infty.$

证 (1) $(\arcsin x+\arccos x)'=(\arcsin x)'+(\arccos x)'$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0, x\in(-1,1)$，$\arcsin x+\arccos x$在$[-1,1]$连续，故

$\arcsin x+\arccos x=C, C=\arcsin 0+\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\left(\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}=0,$$

$\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=C$，以$x=0$代入得$C=0$，故$\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

10.证明不等式：$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x, 0<x<\pi/2.$

证 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}(0<x\le\pi/2)$，$f(0)=1$，$f$在$[0,\pi/2]$连续，

f在$(0,\pi/2)$可导，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0.$

f在$[0,\pi/2]$严格单调递减，$=\dfrac{2}{\pi}f(\dfrac{\pi}{2})<f(x)<f(0)=1, 0<x<\pi/2.$

11.设函数$f(x)$在(a,b)内可微，对于任意一点$x_0\in(a,b)$，若$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$.

证$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}{\Delta x}(0<\theta<1)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f'(x_0+\theta\Delta x)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x).$

12.(Darboux中值定理)设$y=f(x)$在(A,B)区间中可导，又设$[a,b]\subset(A,B)$，且$f'(a)<f'(b)$.证明：对于任意给定的η：$f'(a)<\eta<f'(b)$，都存在$c\in(a,b)$使得$f'(c)=\eta$.

证先设$f'(a)<0<f'(b)$.$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0$，存在$(b-a)/2>\delta_1>0$，

使得$0<\Delta x\le\delta_1$时$\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0$，即$f(a+\Delta x)-f(a)<0$.特别$f(a+\delta_1)<f(a)$.

类似存在$\delta_2: 0<\delta_2<(b-a)/2, f(b-\delta_2)<f(b)$.$f[a,b]$某点$c$取最小值f(c)，

$f(c)\le f(a+\delta_1)<f(a), c\neq a$，同理，$c\neq b$.$c\in(a,b)$，$c$是极小值点，由Fermat引理，

$f'(c)=0$.再设η：$f'(a)<\eta<f'(b)$.考虑$g(x)=f(x)-\eta x$.$g'(x)=f'(x)-\eta$，

$g'(a)=f'(a)-\eta<0, g'(b)=f'(b)-\eta>0$，由前面的结果，存在$c\in(a,b)$使得

$g'(c)=f'(c)-\eta=0$，即$f'(c)=\eta$.

习题 4.2

用L'Hospital法则求下列极限：

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{3^x\ln 3}=\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1-1/(1+x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

$$3.\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/(1+x)-1/\sqrt{1+x^2}}{1/\sqrt{1+x^2}\times\ln(1+x)+\ln(x+\sqrt{1+x^2})1/(1+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{(1+x)\ln(1+x)+\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x/\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)+1+(x/\sqrt{1+x^2})\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

$$4.\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=3.$$

$$5\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1/(\cos ax))(-\sin ax)a}{(1/(\cos bx))(-\sin bx)b}=\frac{a^2}{b^2}.$$

$$6.\ \lim_{x\to 0+0}x^\alpha\ln x(\alpha>0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{(-\alpha)x^{-a-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0+0}x^\alpha=0.$$

$$7.\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{50}}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{e^{y/50}}\right)^{50}=\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y/50}}\right)^{50}=\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{50}{e^{y/50}}\right)^{50}=0.$$

$$8.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi}.y=(\tan x)^{2x-\pi},\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(2x-\pi)\ln\tan x$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sec^2 x/\tan x}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}=-2\lim_{z\to 0-0}\frac{z^2\tan z}{\sin^2 z}=0,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\ln y}$$

$$=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y}=e^0=1.$$

$$9.\lim_{x\to\infty}\left(a^{1/x}-1\right)x(a>0)=\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{a^y\ln a}{1}=\ln a.$$

$$10.\lim_{y\to 0}\frac{y-\arcsin y}{\sin^3 y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\arcsin y}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}{3y^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{y\to0}\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{y^2}=-\frac{1}{3}\lim_{y\to0}\frac{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}}{2y}=-\frac{1}{6}.$$

$$11.\lim_{y\to1}\left(\frac{y}{y-1}-\frac{1}{\ln y}\right)=\lim_{y\to1}\left(\frac{y\ln y-y+1}{(y-1)\ln y}\right)$$

$$=\lim_{y\to1}\left(\frac{\ln y+1-1}{\ln y+(y-1)/y}\right)=\lim_{y\to1}\left(\frac{\ln y}{y\ln y+(y-1)}\right)$$

$$=\lim_{y\to1}\left(\frac{1/y}{\ln y+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$12.\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^4}=\lim_{y\to0}\frac{1-y-e^{-y}}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{-1+e^{-y}}{2y}=\lim_{y\to0}\frac{-e^{-y}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

$$13.\lim_{x\to0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2},\ y=\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2},$$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\arctan x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x/\arctan x)\times\frac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-1-2x\arctan x}{6x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=-\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-1/3}.$$

$$14.\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.\ y=\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)(1+x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\arctan\frac{1}{x}\right)(1+x^2)}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\frac{1}{x}\right)(1+x^2)}=-1,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}.$$

$$15.\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin x}=2.$$

$$16.\lim_{x\to0}\frac{\cosh x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sinh x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cosh x+\cos x}{2}=1.$$

$$17.\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1/x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-1}=-2.$$

$$18.\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x.\ y=\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1/\arctan x)\times\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-2/\pi}.$$

习题 4.3

1.求下列函数再$x=0$点的的局部Taylor公式:

(1) $\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)-\left(1-x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right)+o(x^{2n+2})$$

$$=x+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}++o(x^{2n+2}).$$

(2) $$\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\left(-x-\frac{x^{2}}{2}+\cdots-\frac{x^{2n}}{2n}-\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)-\left(x-\frac{x^{2}}{2}+\cdots-\frac{x^{2n}}{2n}+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\right)+o(x^{2n})$$

$$=-\left(x+\frac{x^{3}}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)+o(x^{2n}).$$

(3) $$\sin^{2}x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^{2}}{2!}-\frac{(2x)^{4}}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)+o(x^{2n+1}).$$

(4) $$\frac{x^{2}+2x-1}{x-1}=-(x^{2}+2x-1)(1+x+\cdots+x^{n}+o(x^{n}))$$

$$=-(x^{2}+x^{3}+\cdots+x^{n+2}+o(x^{n+2}))-2(x+x^{2}+\cdots+x^{n+1}+o(x^{n+1}))+(1+x+\cdots+x^{n}+o(x^{n}))$$

$$=1-x-2x^{2}-2x^{3}-\cdots-2x^{n}+o(x^{n}).$$

(5) $$\cos x^{3}=1-\frac{x^{6}}{2!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{6n}}{(2n)!}+o(x^{6n+3}).$$

2.求下列函数再$x=0$点的的局部Taylor公式至所指定的阶数:

(1) $e^{x}\sin x(x^{4})$

解 $$e^{x}\sin x=\left(1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3})\right)\left(x-\frac{x^{3}}{6}+o(x^{4})\right)=x+x^{2}+\frac{x^{3}}{3}+o(x^{4}).$$

(2) $\sqrt{1+x}\cos x(x^{4})$

解 $$\sqrt{1+x}\cos x=\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}+\frac{1}{16}x^{3}-\frac{5}{128}x^{4}+o(x^{4})\right)\left(1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}+o(x^{5})\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^{2}-\frac{3}{16}x^{3}+\frac{25}{384}x^{4}+o(x^{4}).$$

(3) $\sqrt{1-2x+x^{3}}-\sqrt{1-3x+x^{2}}\,(x^{3})$

解 $\sqrt{1-2x+x^{3}}-\sqrt{1-3x+x^{2}}$

$$=\left(1+\frac{1}{2}(-2x+x^{3})-\frac{1}{8}(-2x+x^{3})^{2}+\frac{1}{16}(-2x+x^{3})^{3}\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}(-3x+x^{2})-\frac{1}{8}(-3x+x^{2})^{2}+\frac{1}{16}(-3x+x^{2})^{3}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}(-2x+x^3)-\frac{1}{8}(4x^2)+\frac{1}{16}(-8x^3)\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}(-3x+x^2)-\frac{1}{8}(9x^2-6x^3)+\frac{1}{16}(-27x^3)\right)+o(x^3)$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+o(x^3).$$

3.求下列函数在点$x=0$的局部Taylor公式:

(1) $\arctan x$.

解 $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n})$

(2) $\arcsin x=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

解 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k+o(x^n)$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k+o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}+o(x^n),$$

$$\arcsin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^x t^{2k}dx+\int_0^x o(t^n)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k+1}+o(t^{2n+1}).$$

4.利用Taylor公式求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)}{8x^4}=-\frac{1}{16}.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(x+o(x))}=\frac{1}{2}.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\frac{1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\right)\frac{1}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\frac{x^3}{6})-x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

5.当x较小时,可用$\sin a+x\cos a$近似代替$\sin(a+x)$,其中a为常数,试证其误差不超过$|x|^2/2$.

证$f(x)=\sin(a+x)-(\sin a+x\cos a)$

$f(0)=0,\ f'(x)=\cos(a+x)-\cos a,$

$f''(x)=-\sin(a+x).$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(c)}{2}x^2=\frac{-\sin(a+c)}{2}x^2,$$

$$|f(x)|=|\sin(a+x)-(\sin a+x\cos a)|\le\frac{x^2}{2}.$$

6.设$0<x\le 1/3$,按公式$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$计算$e^x$的近似值,试证公式误差不超过$8\times10^{-4}$.

证$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{e^{\theta x}}{24}x^4,\left|e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\right|=\frac{e^{\theta x}}{24}x^4\le\frac{e^{1/3}}{24}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$=.000717\cdots<8\times10^{-4}.$

第四章总练习题

1.设 y=f(x)在[x_0−h, x_0+h](h>0)内可导.证明存在θ, 0<θ<1使得

$f(x_0+h)-f(x_0-h)=[f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)]h.$

证 令 g(x)=$f(x_0+x)-f(x_0-x),x\in[0,h]$.$g$(x)在[0, h]内可导,

$g'(x)=f'(x_0+x)+f'(x_0-x),g(0)=0.$

根据Lagrange公式,存在$\theta\in(0,1)$使得

$g(h)-g(0)=g'(\theta h)h$, 即$f(x_0+h)-f(x_0-h)=[f'(x_0+\theta h)+f'(x_0-\theta h)]h.$

2.证明:当$x\ge0$时,等式$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$

中的$\theta(x)$满足$1/4\le\theta(x)\le1/2$且$\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=1/4,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=1/2.$

证$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},2\sqrt{x+\theta(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x},$

$4(x+\theta(x))=2x+1+2\sqrt{x(x+1)},$

$$\theta(x)=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x).$$

$$\theta(x)\ge\frac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x)}-2x)=\frac{1}{4},$$

由算术−几何平均不等式得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)\le\frac{1}{4}(1+(x+x+1)-2x)=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to0}\theta(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)(1+2\sqrt{x(x+1)}+2x)}{(1+2\sqrt{x(x+1)}+2x)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+4x+4\sqrt{x(x+1)}}{(1+2\sqrt{x(x+1)}+2x)}==\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x+4+4\sqrt{1+1/x}}{(1/x+2\sqrt{(1/x+1)}+2)}=\frac{1}{2}.$$

3.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2},0\le x\le1\\ \dfrac{1}{x},\quad 1<x<+\infty\end{cases}$ 求$f(x)$在闭区间$[0,2]$上的微分中值定理的中间值.

解$f'(x)=\begin{cases}-x,0\le x\le1\\ -\dfrac{1}{x^2},\quad 1<x<+\infty\end{cases}.\ \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{1/2-3/2}{2}=-\dfrac{1}{2}.$

$-x=-\frac{1}{2},x=\frac{1}{2};-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2},x=\sqrt{2}.f(x)$在闭区间$[0,2]$上的微分中值定理的中间值为$\frac{1}{2}$或$\sqrt{2}$.

4.在闭区间$[-1,1]$上Cauchy中值定理对于函数$f(x)=x^2$与$g(x)=x^3$是否成立?并说明理由.

解 由于$g'(x)=3x^2$有零点$0\in(-1,1)$,Cauchy中值定理的条件不满足.其实其结论也不成立.

因为若$\dfrac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, $f'(c)=2c=0$, $c=0$,但$g'(0)=0$, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$无意义.

5.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上有二阶导数,且$f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$又$f(a)=f(b)=0$,证明当$x\in(a,b)$时$f(x)\neq 0$.

证一 若存在$c\in(a,b)$, $f(c)=0$,则由Rolle定理,存在$c_1\in(a,c), c_2\in(c,b)$使得$f'(c_1)=f'(c_2)=0$.

对于$f'(x)$在$[c_1,c_2]$应用定理,存在$\xi\in(c_1,c_2)$,使得$f''(\xi)=0$,此与条件$f''(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$矛盾.

证二 由假设,$f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$,根据Darboux定理,$f''(x)$恒正或恒负.不妨设$f''(x)$恒正,于是f下凸,曲线严格在连结$(a,f(a))=(a,0)(b,f(b))=(b,0)$的弦下方,故$f(x)<0$, $x\in(a,b)$.

6.设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数,且$f(a)=f(b)=0$,又存在$c\in(a,b)$使$f(c)>0$.证明:在(a,b)内至少存在一点x_0使$f''(x_0)<0$.

证一 由公式,存在$c_1\in(a,c)$,满足$f'(c_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(c)}{c-a}>0$,

存在$c_2\in(c,b)$,满足$f'(c_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=\dfrac{-f(c)}{c-a}<0$.

对于$f'(x)$在$[c_1,c_2]$应用Lagrange公式,存在$x_0\in(c_1,c_2)$,使得

$$f''(x_0)=\frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1}<0.$$

证二 若不然,$f''(x)\geq 0, x\in(a,b)$, f在$[a,b]$下凸,曲线在连结$(a,f(a))=(a,0)$ $(b,f(b))=(b,0)$的弦下方,故$f(x)\leq 0, x\in(a,b)$.

7.证明方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\dfrac{a_2}{n-1}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+\dfrac{a_n}{1}$

在0与1之间有一个根.

证 考虑函数

$$f(x)=\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+\frac{a_2x^{n-1}}{n-1}+\cdots+\frac{a_nx}{1}-\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}\right)x,$$

$$f'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n-\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}\right)$$

$f(0)=f(1)=0$.由Rolle定理,存在$c\in(0,1)$, $f'(c)=0$,即c是

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_n}{1}$$

在0与1之间的一个根.

8.设函数$f(x)$在有限区间(a,b)内可导,但无界,证明$f'(x)$在(a, b)内也无界.逆命题是否成立?试举例说明.

证 若不然,设f'(x)在(a, b)内有界M,取定$x_0\in(a,b)$,则对于任意 $x\in(a,b)$,根据 Lagrange 公式,$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$,

$$|f(x)|=|f(x_0)+f'(c)(x-x_0)|\leq|f(x_0)|+|f'(c)||(x-x_0)|\leq|f(x_0)|+|M|(b-a).$$

逆命题不成立.例如$\sqrt{x}$在$(0,1)$内有界,$0<\sqrt{x}<1$,但是$\sqrt{x}'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1)$内无界.

9.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有n个根(一个k重根算作k个根),且存在$f^{(n-1)}(x)$,证明$f^{(n-1)}(x)$在$[a,b]$至少有一个根.(注意:若$f(x)$可以表示成$f(x)=(x-x_0)^k g(x)$且$g(x_0)\neq 0$,则称x_0为$f(x)$的k重根).

证我们对于n作归纳法证明.函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有2个根. 如果x_0是2重根,则$f(x)=(x-x_0)^2 g(x)$且$g(x_0)\neq 0$,则$f'(x)=2(x-x_0)g(x)+(x-x_0)^2 g'(x)$, $f'(x)$有根x_0.
如果$f(x)$在区间$[a,b]$上有2个不同的根$x_1,x_2,x_1<x_2$,在$[x_1,x_2]$应用Rolle定理,存在$x_0\in(x_1,x_2)$,使得$f'(x_0)=0$.设结论对于n个根的情况成立.现在假定$f(x)$在区间$[a,b]$上有$n+1$个根. 如果f有$n+1$重根重根x_0,则
$f(x)=(x-x_0)^{n+1}g(x)$且$g(x_0)\neq 0$,则
$f'(x)=(n+1)(x-x_0)^n g(x)+(x-x_0)^{n+1}g'(x)=(x-x_0)^n((n+1)g(x)+(x-x_0)g(x))$,
$(n+1)g(x)+(x-x_0)g(x)=g_1(x), g_1(x_0)=(n+1)g(x_0)\neq 0$, $f'(x)$有n重根x_0.
如果如果f有$n+1$个单重根$x_1,\cdots x_{n+1}$,在区间$[x_1,x_2],\cdots,[x_n,x_{n+1}]$上应用Rolle定理,存在$c_1\in(x_1,x_2),\cdots,c_n\in(x_n,x_{n+1})$使得$f'(c_1)=\cdots=f'(c_n)=0$, $f'(x)$至少有n个根.
如果f有不同的根$x_1,\cdots,x_k$,重数分别为$n_1,\cdots,n_k$, $n+1>k>1$, $\sum_{i=1}^{k}n_i=n+1$.在$[x_1,x_2]$, $\cdots,[x_{k-1},x_k]$上应用Rolle定理,存在$c_1\in(x_1,x_2),\cdots,c_{k-1}\in(x_{k-1},x_k)$使得
$f'(c_1)=\cdots=f'(c_{k-1})=0$. $f'(x)$至少有根$k-1+\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n$个. 对$f'(x)$用归纳假设,
$(f'(x))^{(n)}=f^{(n+1)}(x)$至少有一个根.

10.证明:Lerendre多项式$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)]^n$在$(-1,1)$内有$n$个根.

证$f(x)=\dfrac{1}{2^n n!}(x^2-1)]^n$, $f(1)=f(-1)=0$,对于f在$[-1.1]$应用Rolle定理，存在$c_1^1\in(-1,1)$,使得$f'(c_1^1)=0$. $f'(-1)=f'(1)=0$(当$n>1$时),对于f'在（-1，c_1^1）$(c_1^1,1)$应用Rolle定理，存在
$c_1^2\in$（-1，c_1^1）,$c_2^2\in$（c_1^1,1)使得$f'(c_1^2)=f'(c_2^2)=0$.如此下去，$f^{(n-1)}(x)$在$(-1,1)$有零点$c_1^{n-1},\cdots,c_{n-1}^{n-1}$，$f^{(n-1)}(-1)=f^{(n-1)}(1)=0$，在（$-1,c_1^{n-1}$），($c_1^{n-1},c_2^{n-1}$)，$\cdots$，($c_{n-1}^{n-1}$, 1）应用Rolle定理，得到$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(-1,1)$使得$f^{(n)}(x)=P_n(x)=0$.
$P_n(x)$是n次多项式，至多有n个零点，故$P_n(x)$恰有n个零点.

11.设函数f在$(-\infty,+\infty)$内可导,且$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$.证明:必存在一点$c\in(-\infty,+\infty)$,使得$f'(c)=0$.
证若$f(x)\equiv\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$. $x\in(-\infty,+\infty)$,取任意一点$c\in(-\infty,+\infty)$,都有$f'(c)=0$.
设存在$f(x_0)\neq A$,不妨设$f(x_0)>A$.根据极限不等式,存在a, b,满足:$a<b$, $x_0\in(a,b)$, $f(a)<f(x_0)$, $f(b)<f(x_0)$. f在$[a,b]$连续,必在一点$c\in[a,b]$取最大值. $f(c)\geq f(x_0)>f(a)$, $f(c)\geq f(x_0)>f(b)$, 故$x_0\in(a,b)$, x_0为极大值点,根据Fermat引理, $f'(c)=0$.

12. 设函数$f(x)$在无穷区间(x_0, $+\infty$)可导, 且$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 证明$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.
证由于$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 根据极限定义, 存在正数$x_1>x_0$, 使得$x>x_1$时$|f'(x)|<\varepsilon$.
$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)-f(x_1)+f(x_1)}{x}\right|=\left|\frac{f'(c)(x-x_1)+f(x_1)}{x}\right|\leq\frac{\varepsilon(x-x_1)+|f(x_1)|}{x}$$
$<\varepsilon+\dfrac{|f(x_1)|}{x}$.为使$\dfrac{|f(x_1)|}{x}<\varepsilon$,只需$x>\dfrac{|f(x_1)|}{\varepsilon}$.令$X=\max\{x_1,\dfrac{|f(x_1)|}{\varepsilon}\}$,
当$x>X$时,必有$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<2\varepsilon$,故$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

13.设函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$内连续,且当x>a时$f'(x)>l>0$,

其中l为常数. 证明:若$f(a)<0$,则在区间$\left(a,a-\frac{f(a)}{l}\right)$内方程

$f(x)=0$有唯一实根.

证$f(a)<0$,

$$\left(a-\frac{f(a)}{l}\right)=f(a)+f'(c)\left(-\frac{f(a)}{l}\right)>f(a)+l\left(-\frac{f(a)}{l}\right)=0,$$

f在$\left[a,a-\frac{f(a)}{l}\right]$连续,由连续怀念书函数的中间值定理,

在区间$\left(a,a-\frac{f(a)}{l}\right)$内方程$f(x)=0$至少有一实根.若有两个实根,根据

Rolle定理, $f'(x)$将在$\left(a,a-\frac{f(a)}{l}\right)$有一零点,这与条件$f'(x)>l>0$矛盾.

14.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.现令$g(x)=f(x+1)-f(x)$,证明

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$.

证$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x+\theta)(0<\theta<1)=0$.

15.称函数$f(x)$在$[a,b]$满足Lipschiz条件,若存在常数$L>0$,使对于任意

$x_1,x_2\in[a,b]$,都有$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

(1)若$f'(x)$在$[a,b]$连续,则$f(x)$在$[a,b]$满足Lipschiz条件

(2)(1)中所述事实的逆命题是否成立?

(3)举一个在$[a,b]$上连续但不满足Lipschiz条件的函数.

解(1) $f'(x)$在$[a,b]$连续, 存在常数$L>0$, 使得$|f'(x)|\le L.x\in[a,b]$.

根据中值公式, 对于任意$x_1,x_2\in[a,b],x_1<x_2$,存在$c\in[x_1,x_2]$,使得

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(c)(x_1-x_2)|=|f'(c)|(x_2-x_1)\le L(x_2-x_1)$.

(2)否. $f(x)$在$[a,b]$满足Lipschiz条件, 未必处处可导, 更谈不到$f'(x)$在

$[a,b]$连续. 例如, $f(x)=|x|$在 $[-1,1]$满足Lipschiz条件, 但在0不可导.

(3) $f(x)=\sqrt{x}$在$[0,1]$连续,但不满足Lipschiz条件, 因其导函数

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1]$无界.

16.设$F(x)$在$[a,b]$可导,且其导函数$F'(x)=f(x)$在$[a,b]$上可积,证明

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

证$F(b)-F(a)=\sum\limits_{i=1}^n(F(x_i)-F(x_{i-1}))=\sum\limits_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

$\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\to\int_a^b f(x)dx(\lambda(\Delta)\to 0)$.

$\{x_i\}$为$[a,b]$的分割.

17.设多项式$P(x)-a$与$P(x)-b$的全部根都是单实根,证明对于任意实数

$c\in(a,b)$,多项式$P(x)-c$的根也全都是单实根.

证不妨设a=0, b>0, c∈(0, b) , $P(x)$是n次多项式, 且首项系数为正.

$P(x)$有单实根$x_1<\cdots<x_n$,则这些根把实轴分为$n+1$个区间,每个区间保持

固定正负号,且正负相间. 否则某个根将为极值点, 导数为零, 此与单实根

矛盾. 在两个无穷区间保持正号, 且严格单调递增或递减, 在每个

有穷区间有一个最值点, 且在其两侧分别递增和递减, 设$n=2k$为偶数,

则$\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=+\infty$.设$b>0$且$P(x)=b$有n个单实根$x_1'<\cdots<x_n'$. 必有

$x_1'<x_1,x_2',x_3'\in(x_2,x_3),\cdots,x_{2k-2}',x_{2k-1}'\in(x_{2k-2},x_{2k-1}),x_{2k}'\in(x_{2k},+\infty),P(x_i')=b$.

根据连续函数的中间值定理,对于$c\in(0,b)$,存在$c_1\in(-\infty,x_1),c_2\in(x_2,x_2')$,

$c_3\in(x_3',x_3),c_{2k-2}\in(x_{2k-2},x_{2k-2}'),c_{2k-1}\in(x_{2k-1}',x_{2k-1}+\infty),c_{2k}\in(x_{2k},+\infty)$,

使得$P(c_i)=c.P$为n次多项式,c_i是P(x)=c的所有单实根.

18.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且a,b是方程$f(x)=0$的两个实根.证明方程$f(x)+f'(x)=0$在(a,b)内至少有一个实根.

证设 $g(x)=e^x f(x), g(a)=g(b)=0, g$在 $[a,b]$连续, 在(a,b)可导),.

根据Rolle定理, 存在 $c\in(a,b)$, 使得$g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))=0$,即$f(x)+f'(x)=0$.

19.决定常数A的范围, 使方程$3x^4-8x^3-6x^2+24x+A$有四个不相等的实根.

解$P(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x, P'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

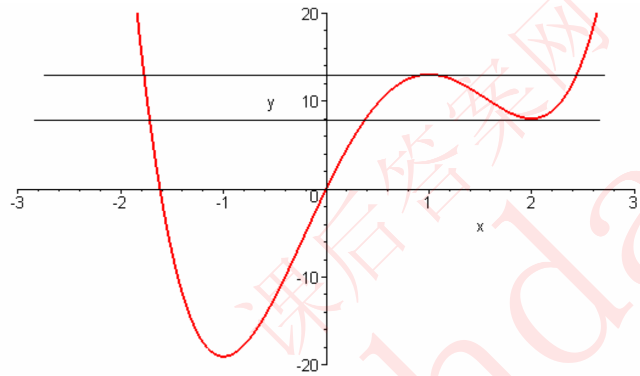
$=12(x^3-2x^2-x+2)=12[x^2(x-2)-(x-2)]=12(x-2)(x^2-1)=12(x-2)(x-1)(x+1)$

$=0,.$

$x_1=-1, x_2=1, x_3=2. P(x_1)=-19, P(1)=13, P(2)=8.$

根据这些数据画图, 由图易知当在区间$(-P(1),-P(2))=(-13,-8)$时

$3x^4-8x^3-6x^2+24x+A$有四个不相等的实根.



20.设$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}$.证明:方程$f(x)=0$当$n$为奇数时有一个实根,当$n$为偶数时无实根.

证当$x\le 0$时$f(x)>0$,故f 只有正根,当$n=2k-1$为奇数时, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 存在$a,b,a<b, f(a)>0, f(b)<0$.

根据连续函数的中间值定理, 存在$x_0\in(a,b)$, 使得$f(x_0)=0$.

$f'(x)=-1+x-x^2+\cdots-x^{2k-2}=\frac{x^{2k-1}+1}{-x-1}<0(x>0)$, 当$x>0$时, f严格单调递减, 故实根唯一.

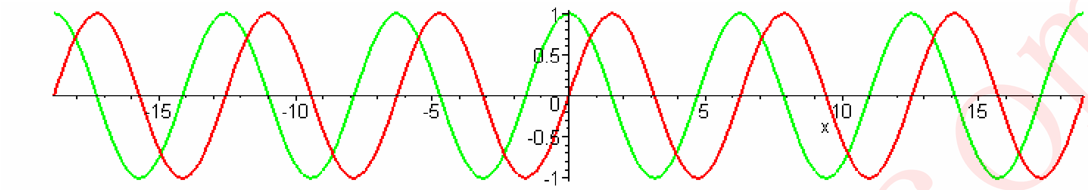
当$n=2k$为偶数时, $f'(x)=-1+x-x^2+\cdots+x^{2k-1}=\frac{-x^{2k}+1}{-x-1}=0, x=1.$

$0<x<1, f'(x)<0, x>1, f'(x)>0, f(1)$是$x>0$时的最小值, $f(1)>0$, 故当n为偶数时$f(x)$无实根.

21.设函数$u(x)$与$v(x)$以及它们的导函数$u'(x)$与$v'(x)$在区间$[a,b]$上都连续,且$uv'-u'v$在$[a,b]$上恒不等于零.证明$u(x)$在$v(x)$的相邻根之间必有一根,反之也对.即有$u(x)$与$v(x)$的根互相交错地出现.试句举处满足上述条件的$u(x)$与$v(x)$.

证设x_1, x_2是$u(x)$的在$[a,b]$的两个根, $x_1 < x_2$.由于$u'v-uv' \neq 0, v(x_1) \neq 0, v(x_2) \neq 0$.如果$v(x)$在$[x_1,x_2]$上没有根,则$w=\dfrac{u}{v}$在$[a,b]$连续, $w(x_1)=w(x_2)=0$,由Rolle定理,存在$c \in [x_1,x_2]$,使得$w'(c)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(c)=0$,即$(u'v-uv')(c)=0$,此与$u'v-uv'$恒不等于零的假设矛盾. 故v(x)在$[x_1,x_2]$上有根.

例如$u=\cos(x), v=\sin x, u'v-uv'=-1 \neq 0, \sin x\cos x$的根交错出现.



22.证明:当$x>0$时函数$f(x)=\dfrac{\arctan x}{\tanh x}$单调'递增,且$\arctan x < \dfrac{\pi}{2}(\tanh x)$.

证$f'(x)=\left(\dfrac{\arctan x}{\tanh x}\right)'=\dfrac{\dfrac{\tanh x}{1+x^2}-\dfrac{\arctan x}{\cosh^2 x}}{\tanh^2 x}=\dfrac{\sinh x\cosh x-(1+x^2)\arctan x}{(1+x^2)\tanh^2 x\cosh^2 x}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\sinh 2x-(1+x^2)\arctan x}{(1+x^2)\tanh^2 x\cosh^2 x}=\dfrac{g(x)}{(1+x^2)\tanh^2 x\cosh^2 x}.$

$g(0)=0.$

$g'(x)=\cosh 2x-1-2x\arctan x, g'(0)=0,$

$g''(x)=2\sinh 2x-2\arctan x-\dfrac{2x}{1+x^2}, g''(0)=0,$

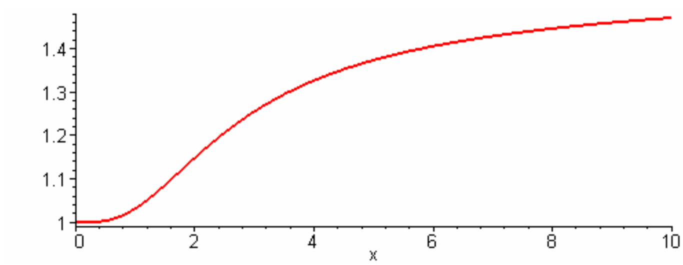
$g'''(x)=4\cosh 2x-\dfrac{2}{1+x^2}-2\times\dfrac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x)^2}=4\cosh 2x-\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{2(1-x^2)}{1+x^2}$

$=4\cosh 2x-\dfrac{4}{1+x^2}+\dfrac{4x^2}{1+x^2}>0$(当$x>0$时$\cosh x>1$),

由Taylor公式,对于$x>0$有

$g(x)=\dfrac{g(\theta x)}{3!}x^3>0, f'(x)>0, f$严格单调递增.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{\tanh x}=\dfrac{\pi}{2}$,故对于$x>0$有$\dfrac{\arctan x}{\tanh x}<\dfrac{\pi}{2}$.



23.证明:当$0<x<\frac{\pi}{2}$时有$\frac{x}{\sin x}<\frac{\tan x}{x}$.

证$f(x)=\sin x\tan x-x^2$,

$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x-2x=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x$,

$f''(x)=\cos x+\sec x+2\sin x\sec^2 x\tan x-2=(\cos x+\sec x-2)+2\sin^2 x\sec x-2>0$

$(\cos x+\sec x=\cos x+\frac{1}{\cos x}\geq 2, x\in(0,\pi/2))$.

$f(0)=f'(0)=0$,根据Taylor公式,

$f(x)=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2>0, \sin x\tan x-x^2>0, \frac{x}{\sin x}<\frac{\tan x}{x}(x\in(0,\pi/2))$.

24.证明下列不等式:

(1)$e^x>1+x, x\neq 0$.

(2)$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x), x>0$.

(3)$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x, x>0$.

证 (1)$e^x=1+x+\frac{e^{\theta x}}{2}x^2>1+x, x\neq 0$.

(2)$\ln(1+x)=x-\frac{1}{(1+\theta x)^2}x^2<x, x>0$.

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3(1+\theta x)^3}x^3>x-\frac{x^2}{2}, x>0$.

(3)$f(x)=x-\sin x, f(0)=0, f'(x)=1-\cos x\geq 0$,仅当$x=2n\pi$时$f'(x)=0$,故当$x>0$时$f$严格单调递增,$f(x)>f(0)=0, x>0$.

$g(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$,

$g'(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right), g''(x)=-\sin x+x>0, x>0$.$g$当$x>0$时严格单调递增,$g(x)>g(0)=0, x>0$.

25.设$x_n=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$,其中常数$q\in[0,1)$.证明序列$x_n$有极限.

证x_n单调递增.$\ln x_n=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+q^i)<\sum_{i=1}^{n}q^i=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}<\frac{q}{1-q}$,

$x_n=e^{\ln x_n}<e^{\frac{q}{1-q}}$.$x_n$有上界.故$x_n$有极限.

26.求函数$f(x)=\tan x$在$x=\pi/4$处的三阶Taylor多项式,并由此估计$\tan(50^\circ)$的值.

解$f'(x)=\sec^2 x, f''(x)=2\sec^2 x\tan x, f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x$.

$$f(\frac{\pi}{4})=1,\ f'(\frac{\pi}{4})=2,\ f''(\frac{\pi}{4})=4,\ f'''(\frac{\pi}{4})=16.$$

$$f(x)=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

$$\tan(50^\circ)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{36}\right)\approx 1+2\times\frac{\pi}{36}+2\left(\frac{\pi}{36}\right)^2+\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3\approx 1.191536480.$$

27.设$0<a<b$,证明$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b)$.

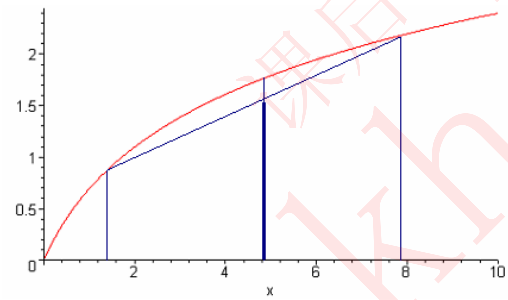
证$f(x)=\ln(1+x),\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x},\ f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}<0,$

f在$x>0$上凸,

$$\frac{(1+a)}{(1+a+b)}\ln(1+a)+\frac{(1+b)}{(1+a+b)}\ln(1+b)$$

$$<\ln\left(1+\frac{(1+a)a}{(1+a+b)}+\frac{(1+b)b}{(1+a+b)}\right)$$

$$<\ln\left(1+\frac{(1+a+b)a}{(1+a+b)}+\frac{(1+a+b)b}{(1+a+b)}\right)=\ln(1+a+b).$$



28.设有三个常数a,b,c,满足

$a<b<c,a+b+c=2,ab+bc+ca=1$.证明:$0<a<\frac{1}{3},\frac{1}{3}<b<1,1<c<\frac{4}{3}$.

证考虑多项式$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-2x^2+x-abc$.

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)=0,x_1=\frac{1}{3},x_2=1$.

当$x<\frac{1}{3}$或$x>1$时$f'(x)>0$, f严格单调递增,当$\frac{1}{3}<x<1$时$f'(x)<0$, f严格单调递减.

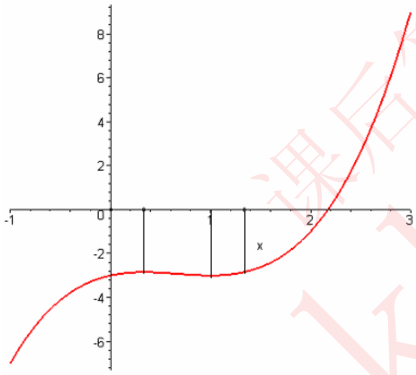
如果$f(0)=f(1)=-abc\ge 0$, f将至多有两个

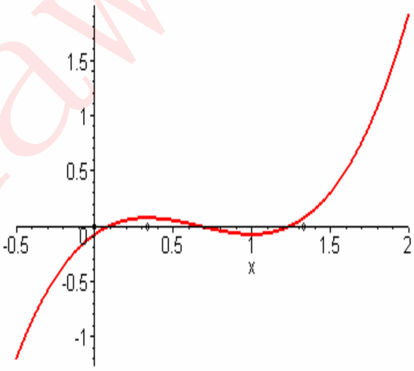
实根.如果$f(\frac{1}{3})=f(\frac{4}{3})=\frac{4}{27}-abc\le 0$, f也将至多有两个

根(见附图).而f实际有根a,b,c.故$f(0)=f(1)=-abc<0$,并且$f(\frac{1}{3})=f(\frac{4}{3})=\frac{4}{27}-abc>0$.

考虑到严格单调性,于是f

在$(0,\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},1),(1,\frac{4}{3})$各有一实根,正是$a,b,c$,故结论成立.





29.设函数$f(x)$的二阶导数$f''(x)$在$[a,b]$上连续,且对于每一点$x\in[a,b]$, $f''(x)$与$f(x)$同号.证明:若有两点$c,d\in[a,b]$,使$f(c)=f(d)=0$,则$f(x)\equiv 0,x\in[c,d]$.

证由于$f''(x)$与$f(x)$同号,$(f(x)f'(x))'=f'^2(x)+f(x)f''(x)\ge 0,g(x)=f(x)f'(x)$单调,

$g(c)=g(d)=0$,故$f(x)f'(x)\equiv 0,x\in[c,d]$.$(f^2(x))'=2f(x)f'(x)\equiv 0,x\in[c,d]$.

$f^2(x)\equiv C,x\in[c,d]$.$f^2(c)=0$,故$f^2(x)\equiv 0,x\in[c,d]$,即$f(x)\equiv 0,x\in[c,d]$.

30.求多项式$P_3(x)=2x^3-7x^2+13x-9$在$x=1$处的Taylor公式.

解$P_3'(x)=6x^2-14x+13, P_3''(x)=12x-14, P_3'''(x)=12.$

$P_3(1)=-1, P_3'(1)=5, P_3''(1)=-2, P_3'''(1)=12.$

$P_3(x)=-1+5(x-1)-(x-1)^2+2(x-1)^3.$

31.设$P_n(x)$是一个n次多项式.

(1)证明:$P_n(x)$在任一点x_0处的Taylor公式为

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0).$$

(2)若存在一个数a,使$P_n(a)>0, P_n^{(k)}(a)\geq 0(k=1,2,\cdots n)$.证明$P_n(x)$的所有实根都不超过$a$.

证(1)$P_n(x)$是一个n次多项式.

(1)证明:因为$P_n(x)$是一个n次多项式,$P_n^{(n+1)}(x)\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$.故在任一点$x_0$处,根据带Lagrange余项的Taylor公式

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}P_n^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

$$=P_n(x_0)+P_n'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

(2)$P_n(x)=P_n(a)+P_n'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)(x-a)^n\geq P_n(a)>0(x\geq a),$

故$P_n(x)$的所有实根都小于a.

32.设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有二阶导数,又知对于一切$x>0$,有

$|f(x)|\leq A, |f''(x)|\leq B$其中$A,B$为常数.证明:$|f'(x)|\leq 2\sqrt{AB}, x\in(0,+\infty)$.

证任意取$x\in(0,+\infty), h>0.$ $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(c)}{2}h^2,$

$$f'(x)=\frac{1}{h}(f(+h)-f(x))-\frac{f''(c)}{2}h.$$

$$|f'(x)|\leq\frac{2A}{h}+\frac{B}{2}h(*).$$

当$\dfrac{2A}{h}=\dfrac{B}{2}h$时(*)右端取最小值. 在(*)中取$h=2\sqrt{\dfrac{A}{B}}$,即得$|f'(x)|\leq 2\sqrt{AB}$.

习题 4.1

1.验证函数$f(x)=x^3-3x^2+2x$在区间$[0,1]$及$[1,2]$上满足Rolle定理的条件并分别求出导数为0的点.

解f处处可导, $f(0)=f(1)=f(2)=0$,故$f(x)$在区间$[0,1]$及$[1,2]$上满足Rolle定理的条件. $f'(x)=3x^2-6x+2=0, x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}, x$

$x_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\in(0,1), x_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\in(1,2), f'(x_1)=f'(x_2)=0.$

2.讨论下列函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上是否满足Rolle定理的条件,若满足,求$c\in(-1,1)$,使$f'(c)=0$.

(1) $f(x)=(1+x)^m(1-x)^n, m,n$为正整数;

(2) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.

解(1) $f'(x)=m(1+x)^{m-1}(1-x)^n-n(1+x)^m(1-x)^{n-1}$

$=(1+x)^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-n-nx)=0, c=\dfrac{m-n}{m+1}\in(-1,1), f'(c)=0.$

(2) $f'(x)=-\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$, $f'(0)$不存在.

3.写出函数$f(x)=\ln x$在区间$[1,e]$上的微分中值公式,并求出其中的$c=?$

解$f'(x)=\dfrac{1}{x}, f(e)-f(1)=\ln e-\ln 1=1=\dfrac{1}{c}(e-1), c=e-1.$

4.应用Lagrange中值定理, 证明下列不等式:

(1) $|\sin y-\sin x|\le|x-y|$;

(2) $|\tan x-\tan y|\ge|y-x|, x,y\in(-\pi/2,\pi/2)$;

(3) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}(0<a<b)$.

证(1) $|\sin x-\sin y|=|(\sin x)'|_{x=c}(x-y)|=|\cos c||x-y|\le|x-y|$.

(2) $|\tan y-\tan x|=|(\tan x)'|_{x=c}(y-x)|=\sec^2 c|y-x|\ge|y-x|$.

(3) $\dfrac{b-a}{a}<\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=(\ln x)'|_{x=c}(b-a)=\dfrac{b-a}{c}(c\in(a,b))<\dfrac{b-a}{a}$.

5.证明多项式$P(x)=(x^2-1)(x^2-4)$的导函数的三个根都是实根,并指出它们的范围.

证$P(x)$有四个实根根$\pm1,\pm2$,根据Rolle定理,它的导函数有三个实根,又作为四次多项式的导函数,是三次多项式, 最多三个实根, 故$P(x)$的导函数的三个根都是实根, 分别在区间$(-2,-1),(-1,1),(1,2)$.

6.设$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意实数,证明:函数$f(x)=c_1\cos x+c_2\cos 2x+\cdots+c_n\cos nx$在$(0,\pi)$内必有根.

证$g(x)=c_1\sin x+\dfrac{1}{2}c_2\sin 2x+\cdots+\dfrac{1}{n}c_n\sin nx$在$[0,\pi]$满足定理的条件

$(g(0)=g(\pi)=0)$,故其导函数$f(x)$在$(0,\pi)$内必有根.

7.设函数$f(x)$与$g(x)$在(a,b)内可微,$g(x)\neq 0$,且$\begin{vmatrix} f((x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0, x\in(a,b)$.

证明:存在常数k,使$f(x)=kg(x), x\in(a,b)$.

证$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{\begin{vmatrix} f((x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}}{g^2(x)}=0,$

根据公式的一个推论,存在常数k,使$\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$,即$f(x)=kg(x), x\in(a,b)$.

8.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可微且$f'(x)=k,-\infty<x<+\infty$.证明: $f(x)=kx+b,-\infty<x<+\infty$,其中$k,b$为常数.

证$(f(x)-kx)'=f'(x)-k=k-k=0,-\infty<x<+\infty.$, $f(x)-kx=b,-\infty<x<+\infty.$

9.证明下列等式:

(1) $\arcsin x+\arccos x=\pi/2, -1\le x\le 1$;

(2) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, -\infty<x<+\infty.$

证 (1) $(\arcsin x+\arccos x)'=(\arcsin x)'+(\arccos x)'$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0, x\in(-1,1)$, $\arcsin x+\arccos x$在$[-1,1]$连续,故

$\arcsin x+\arccos x=C, C=\arcsin 0+\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}, \arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\left(\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}-x\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}=0,$$

$\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=C$,以$x=0$代入得$C=0$,故$\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0$,

$x\in(-\infty,+\infty)$.

10.证明不等式：$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x, 0<x<\pi/2.$

证 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}(0<x\le\pi/2), f(0)=1, f$在$[0,\pi/2]$连续,

f在$(0,\pi/2)$可导, $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0.$

f在$[0,\pi/2]$严格单调递减, $=\dfrac{2}{\pi}f(\dfrac{\pi}{2})<f(x)<f(0)=1, 0<x<\pi/2.$

11.设函数$f(x)$在(a,b)内可微, 对于任意一点$x_0\in(a,b)$, 若$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在, 则

$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0).$

证$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}{\Delta x}(0<\theta<1)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f'(x_0+\theta\Delta x)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x).$

12.(Darboux中值定理)设$y=f(x)$在(A,B)区间中可导, 又设$[a,b]\subset(A,B)$, 且
$f'(a)<f'(b)$.证明: 对于任意给定的η: $f'(a)<\eta<f'(b)$, 都存在$c\in(a,b)$使得
$f'(c)=\eta.$

证先设$f'(a)<0<f'(b)$. $f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0$, 存在$(b-a)/2>\delta_1>0$,

使得$0<\Delta x\le\delta_1$时$\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0$, 即$f(a+\Delta x)-f(a)<0$.特别$f(a+\delta_1)<f(a)$.

类似存在$\delta_2: 0<\delta_2<(b-a)/2, f(b-\delta_2)<f(b)$. $f[a,b]$某点c取最小值f(c),
$f(c)\le f(a+\delta_1)<f(a), c\ne a$, 同理, $c\ne b. c\in(a,b)$, c是极小值点, 由Fermat引理,
$f'(c)=0$.再设η: $f'(a)<\eta<f'(b)$.考虑$g(x)=f(x)-\eta x. g'(x)=f'(x)-\eta$,
$g'(a)=f'(a)-\eta<0, g'(b)=f'(b)-\eta>0$, 由前面的结果, 存在$c\in(a,b)$使得
$g'(c)=f'(c)-\eta=0$, 即$f'(c)=\eta.$

习题 4.2

用L'Hospital法则求下列极限：

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{3^x\ln 3}=\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1-1/(1+x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

$$3.\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/(1+x)-1/\sqrt{1+x^2}}{1/\sqrt{1+x^2}\times\ln(1+x)+\ln(x+\sqrt{1+x^2})1/(1+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{(1+x)\ln(1+x)+\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x/\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)+1+(x/\sqrt{1+x^2})\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

$$4.\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=3.$$

$$5\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1/(\cos ax))(-\sin ax)a}{(1/(\cos bx))(-\sin bx)b}=\frac{a^2}{b^2}.$$

$$6.\ \lim_{x\to 0+0}x^\alpha\ln x(\alpha>0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{(-\alpha)x^{-a-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0+0}x^\alpha=0.$$

$$7.\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{50}}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{e^{y/50}}\right)^{50}=\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y/50}}\right)^{50}=\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{50}{e^{y/50}}\right)^{50}=0.$$

$$8.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi}.y=(\tan x)^{2x-\pi},\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(2x-\pi)\ln\tan x$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sec^2 x/\tan x}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}=-2\lim_{z\to 0-0}\frac{z^2\tan z}{\sin^2 z}=0,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\ln y}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y}=e^0=1.$$

$$9.\lim_{x\to\infty}\left(a^{1/x}-1\right)x(a>0)=\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{a^y\ln a}{1}=\ln a.$$

$$10.\lim_{y\to 0}\frac{y-\arcsin y}{\sin^3 y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\arcsin y}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}{3y^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{y^2}=-\frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}}{2y}=-\frac{1}{6}.$$

$$11.\lim_{y\to 1}\left(\frac{y}{y-1}-\frac{1}{\ln y}\right)=\lim_{y\to 1}\left(\frac{y\ln y-y+1}{(y-1)\ln y}\right)$$

$$=\lim_{y\to 1}\left(\frac{\ln y+1-1}{\ln y+(y-1)/y}\right)=\lim_{y\to 1}\left(\frac{\ln y}{y\ln y+(y-1)}\right)$$

$$=\lim_{y\to 1}\left(\frac{1/y}{\ln y+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$12.\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^4}=\lim_{y\to 0}\frac{1-y-e^{-y}}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-1+e^{-y}}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-e^{-y}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

$$13.\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2},\ y=\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\arctan x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x/\arctan x)\times\dfrac{\dfrac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-2x\arctan x}{6x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=-\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-1/3}.$$

$$14.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.y=\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)(1+x^2)}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)(1+x^2)}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)(1+x^2)}=-1,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}.$$

$$15.\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=2.$$

$$16.\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x+\cos x}{2}=1.$$

$$17.\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1/x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-1}=-2.$$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$. $y=\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1/\arctan x)\times\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-2/\pi}.$$

习题 4.3

1.求下列函数再$x=0$点的的局部Taylor公式:

(1) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right)+o(x^{2n+2})$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}++o(x^{2n+2}).$$

(2) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1}{2}\left(\left(-x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots-\dfrac{x^{2n}}{2n}-\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots-\dfrac{x^{2n}}{2n}+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\right)+o(x^{2n})$

$$=-\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)+o(x^{2n}).$$

(3) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(2x)^2}{2!}-\dfrac{(2x)^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)+o(x^{2n+1}).$

(4) $\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}=-(x^2+2x-1)(1+x+\cdots+x^n+o(x^n))$

$$=-(x^2+x^3+\cdots+x^{n+2}+o(x^{n+2}))-2(x+x^2+\cdots+x^{n+1}+o(x^{n+1}))+(1+x+\cdots+x^n+o(x^n))$$

$$=1-x-2x^2-2x^3-\cdots-2x^n+o(x^n).$$

(5) $\cos x^3=1-\dfrac{x^6}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{6n}}{(2n)!}+o(x^{6n+3}).$

2.求下列函数再$x=0$点的的局部Taylor公式至所指定的阶数:

(1) $e^x\sin x(x^4)$

解 $e^x\sin x=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4).$

(2) $\sqrt{1+x}\cos x(x^4)$

解 $\sqrt{1+x}\cos x=\left(1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3-\dfrac{5}{128}x^4+o(x^4)\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5)\right)$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+\frac{25}{384}x^4+o(x^4).$$

(3) $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}(x^3)$

解 $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}$

$$=\left(1+\frac{1}{2}(-2x+x^3)-\frac{1}{8}(-2x+x^3)^2+\frac{1}{16}(-2x+x^3)^3\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}(-3x+x^2)-\frac{1}{8}(-3x+x^2)^2+\frac{1}{16}(-3x+x^2)^3\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}(-2x+x^3)-\frac{1}{8}(4x^2)+\frac{1}{16}(-8x^3)\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}(-3x+x^2)-\frac{1}{8}(9x^2-6x^3)+\frac{1}{16}(-27x^3)\right)+o(x^3)$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+o(x^3).$$

3.求下列函数在点$x=0$的局部Taylor公式:

(1) $\arctan x$.

解 $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n})$

(2) $\arcsin x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

解 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k+o(x^n)$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k+o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}+o(x^n),$$

$$\arcsin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^x t^{2k}dx+\int_0^x o(t^n)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k+1}+o(t^{2n+1}).$$

4.利用Taylor公式求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)}{8x^4}=-\frac{1}{16}.$

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(x+o(x))}=\frac{1}{2}.$

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\frac{1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\right)\frac{1}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6})-x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

5.当x较小时,可用$\sin a + x\cos a$近似代替$\sin(a+x)$,其中a为常数,试证其误差不超过$|x|^2/2$.

证$f(x)=\sin(a+x)-(\sin a + x\cos a)$

$f(0)=0,\ f'(x)=\cos(a+x)-\cos a,$

$f''(x)=-\sin(a+x).$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(c)}{2}x^2=\frac{-\sin(a+c)}{2}x^2,$$

$$|f(x)|=|\sin(a+x)-(\sin a + x\cos a)|\le\frac{x^2}{2}.$$

6.设$0<x\le 1/3$,按公式$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$计算$e^x$的近似值,试证公式误差不超过$8\times10^{-4}$.

证$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{e^{\theta x}}{24}x^4,\left|e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\right|=\frac{e^{\theta x}}{24}x^4\le\frac{e^{1/3}}{24}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$=.000717\cdots<8\times10^{-4}.$

习题 4.4

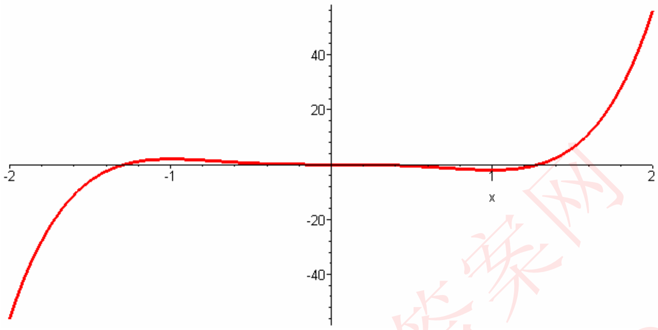
1.求下列函数的单调性区间与极值点:

(1)$y=3x^5-5x^3$.

解$y'=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)$,

$y'=15x^2(x^2-1)=15x^2(x-1)(x+1)=0, x_1=-1, x_2=0, x_2=1$.

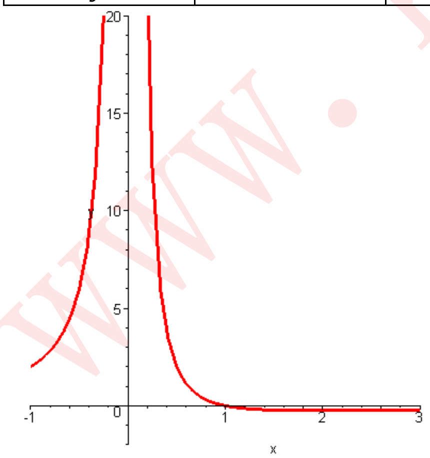
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	–	0	–	0	+
y	↗	极大值	↘	无极值	↘	极小值	↗



(2)$y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}. x\neq 0$.

$y'=-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^3}=0, x_1=1$.

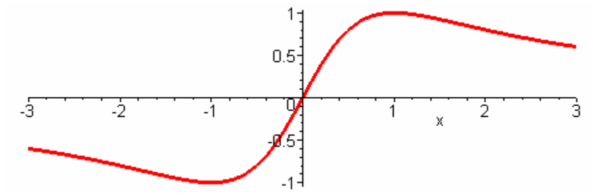
x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	–	0	+
y	↗	↘	极小值	↗



$(3) y=\dfrac{2x}{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty).$

$y'=2\times\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=2\times\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0, x=\pm1.$

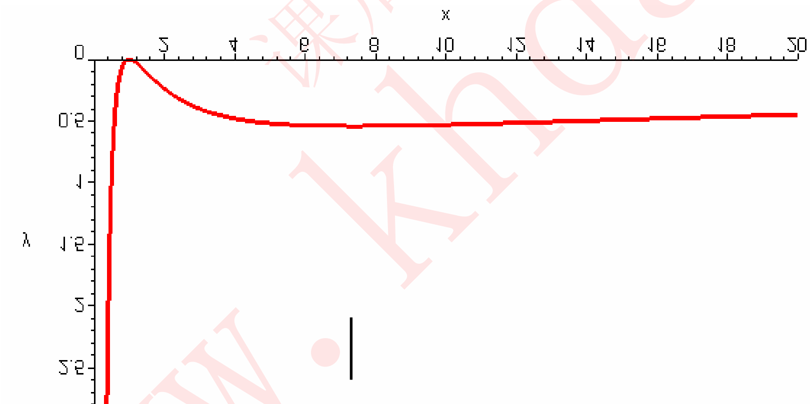
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	↘	极小值-1	↗	极大值 1	↘



$(4) y=\dfrac{1}{x}\ln^2 x, x>0.$

$y'=\dfrac{2(\ln x)(1/x)x-\ln^2 x}{x^2}=\dfrac{2(\ln x)-\ln^2 x}{x^2}=\dfrac{\ln x[2-\ln x]}{x^2}=0, x=1, x=e^2.$

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	↘	极小值	↗	极大值	↘



e^2

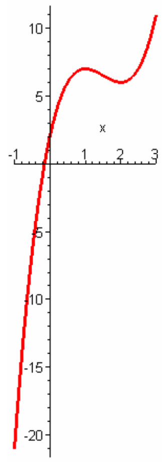
2.求函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$在区间$[-1,3]$上的最大值与最小值,并指明最大值点与最小值点.

解$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)$

$=6(x-1)(x-2)=0, x=1,2.$

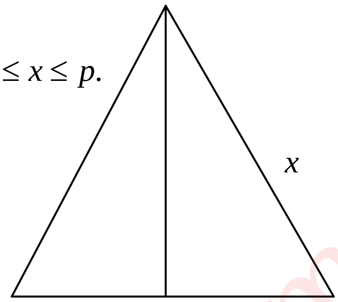
$f(-1)=-21, f(1)=7, f(2)=6, f(3)=11.$

$f(-1)=-21$是最小值, $f(3)=11$是最大值.



3.将周长为$2p$的等腰三角形绕其底边旋转一周,求使所得旋转体体积最大的等腰三角形的底边长度.

解 设腰长为x, 则



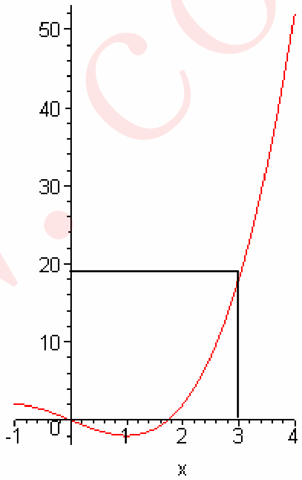
$$V=\frac{2\pi}{3}\left(x^2-(p-x)^2\right)(p-x)=\frac{2\pi}{3}\left(2px-p^2\right)(p-x),\ p/2\le x\le p.$$

$$V'=\frac{2\pi}{3}\left(2p(p-x)-(2px-p^2)\right)=\frac{2\pi}{3}\left(-4px+3p^2\right)=0,$$

$x_0=\frac{3}{4}p, V(p/2)=V(p)=0. V(\frac{3}{4}p)$是最大值.

等腰三角形的底边长度$=\ 2p-\frac{3}{2}p=\frac{1}{2}p.$

4.求出常数l与k的值,使函数$f(x)=x^3+lx^2+kx$在$x=-1$处有极值2,并求出在这样的l与k之下$f(x)$的所有极值点,以及在$[0,3]$上的最小值和最大值.



解 $f'(x)=3x^2+2lx+k, 3-2l+k=0, -1+l-k=2.$

$k=-3, l=0.$

$f(x)=x^3-3x. f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0,$

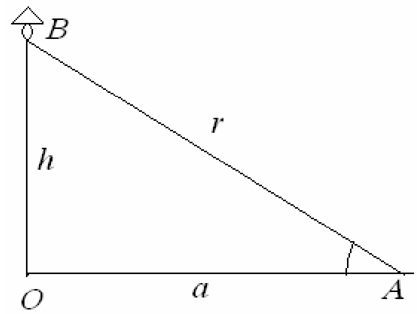
$x=\pm1, f''(x)=6x, f''(\pm1)=\pm6,$

$f(1)$是极小值, $f(-1)$是极大值.

$f(0)=0, f(1)=-2, f(3)=18. f(1)=-2$是最小值,

$f(3)=18$是最大值.

5.设一电灯可以沿垂直线OB移动,OA是一条水平线,长度为a. 问灯距离O点多高时,A点有最大的照度.

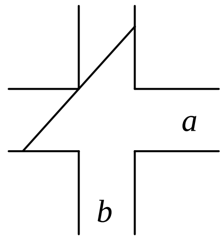


解 $J=K\frac{\sin\varphi}{a^2+a^2\tan^2\varphi}=\frac{K}{a^2}\sin\varphi\cos^2\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

$J'=\frac{K}{a^2}\left(\cos^3\varphi-2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)=0, \tan\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$J(0)=J(\pi/2)=0, J(\varphi_0)$是最大值, 这时灯的高度 $h=a\tan\varphi_0=\frac{a}{\sqrt{2}}.$

6.若两条宽分别为a及b的河垂直相交,若一船从一河转入另一河,问其最大的长度是多少?



解 设船与一岸夹角为θ,则船长为

$$l=a\csc\nu+b\sec\theta,0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

$$l'=-a\csc\theta\cot\theta+b\sec\theta\tan\theta=0,\frac{\sec\theta\tan\theta}{\csc\theta\cot\theta}=\frac{a}{b},$$

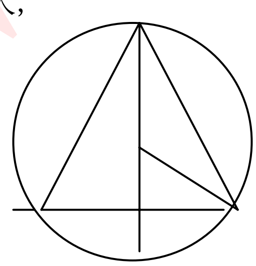
$$\tan^3\theta=\frac{a}{b},\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{a}{b}},\theta_0=\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

$\lim\limits_{\theta\to0}l(\theta)=+\infty,\ \lim\limits_{\theta\to\pi/2}l(\theta)=+\infty,l$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$有最小值，$\theta_0$是最小值点.

此时船长$l=a\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}},\right)^2}+b\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}},\right)^2}$

$$=a^{2/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}+a^{2/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}=\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}^3.$$

7.在半径为a的球内作一内接圆锥体, 要使锥体体积最大, 问其高及底半径应是多少?



解 设球心到内接圆锥体底的距离为x, 则锥体体积

$$V=\frac{\pi}{3}(a^2-x^2)(a+x),0\le x\le a.$$

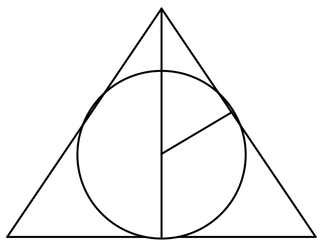
$$V'=\frac{\pi}{3}\left(-2x(a+x)+a^2-x^2\right)=\frac{\pi}{3}\left(-3x^2-2ax+a^2\right)$$

$$=-\frac{\pi}{3}\left(3x^2+2ax-a^2\right)=-\frac{\pi}{3}\left(3x-a\right)\left(x+a\right)=0,x_0=\frac{a}{3}.$$

$V(0)=\dfrac{\pi}{3}a^3,V(a)=0,V(\dfrac{a}{3})=\dfrac{\pi}{3}a^3\times\dfrac{32}{27}.V(\dfrac{a}{3})$为最大值.

底半径$=\sqrt{a^2-x_0^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$,高$h=a+x_0=a+\dfrac{a}{3}=\dfrac{4a}{3}$.

8.在半径为a的球外作一外切圆锥体, 要问其高及底半径取多少才能使锥体体积最小?



解 设锥的高为h,$\dfrac{r}{h}=\dfrac{a}{\sqrt{(h-a)^2-a^2}},r=\dfrac{ah}{\sqrt{(h-a)^2-a^2}}$.

$$V=V(h)=\frac{\pi}{3}\frac{a^2h^3}{(h-a)^2-a^2}.$$

$$V'=\frac{\pi a^2}{3}\frac{3h^2((h-a)^2-a^2)-2h^3(h-a)}{((h-a)^2-a^2)^2}=\frac{\pi a^2}{3}\frac{h^2[3((h-a)^2-a^2)-2h(h-a)]}{((h-a)^2-a^2)^2}$$

$$=\frac{\pi a^2}{3}\frac{h^2[h^2-4ah]}{((h-a)^2-a^2)^2}=\frac{\pi a^2}{3}\frac{h^3[h-4a]}{((h-a)^2-a^2)^2}=0,h_0=4a.$$

当$h<4a$时,$V'<0$,当$h>4a$时,$V'>0$,$V(4a)$为最小值, 此时$r_0=\dfrac{4a^2}{\sqrt{8a^2}}=\sqrt{2}a$.

9.在曲线$y^2=4x$上求出到点$(18,0)$的距离最短的点.

解 $d^2=f(y)=\left(\dfrac{y^2}{4}-18\right)^2+y^2=\left(\dfrac{z}{4}-18\right)^2+z=g(z),0\le z<+\infty(z=y^2)$.

$\lim\limits_{z\to+\infty}g(z)=+\infty$, $g(z)$在$[0,+\infty)$有最小值.

$g'(z)=2\left(\dfrac{z}{4}-18\right)\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{z}{8}-8=0,z=64,g(0)=324,g(64)=68<g(0)$,

$g(64)$为最小值. $y=\sqrt{z}=\pm8,x=\dfrac{y^2}{4}=16$.

曲线$y^2=4x$上到点$(18,0)$的距离最短的点$(16,8),(16,-8)$.

10.试求内接于已知圆锥且有最大体积的正圆柱的高度.

解设已知圆锥的高度为H,底半径为H.设内接正圆柱的底半径为x,则其体积为

$V=\pi x^2(R-x)\dfrac{H}{R},0\le x\le R$.

$V'=\pi\left(2x(R-x)-x^2\right)=\pi\left(2Rx-3x^2\right)=\pi x\left(2R-3x\right)=0,x=0,\dfrac{2}{3}R$.

$V(0)=V(R)=0.V\left(\dfrac{2}{3}R\right)$为最大值.此时内接正圆柱的高度$h=(R-\dfrac{2}{3}R)\dfrac{H}{R}=\dfrac{H}{3}$.

11.试求内接于椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$且其底平行于$x$轴的最大等腰三角形的面积.

解$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},0\le t\le 2\pi$.

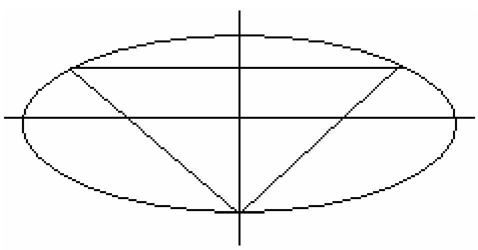
设内接等腰三角形的顶点在$(-b,0)$,而底边上的一个顶点在第一象限.

内接三角形面积$S=ab\cos t(1+\sin t),0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

$S'=ab[-\sin t(1+\sin t)+\cos^2 t]=ab[1-\sin t-2\sin^2 t](\sin t=z)$

$=-ab(2z^2+z-1)=-ab(2z-1)(z+1)=0,z=\sin t_0=\dfrac{1}{2}$.

$S(0)=ab,S(\dfrac{\pi}{2})=0,S(t_0)=ab\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$为最大值.



12.设动点A自平面坐标的原点O开始以速度8m/min沿y轴正向前进,而点B在x轴的正向距离原点50m处,同时沿x轴向原点作匀速运动,速度为6m/min.问何时A与B距离最近?最近的距离是多少?.

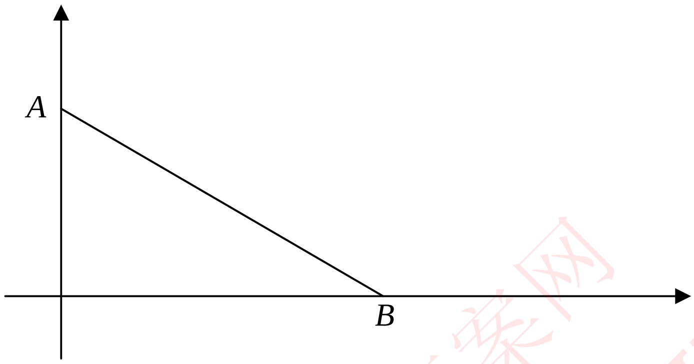
解$s^2 = f(t) = (8t)^2 + (50-6t)^2, t \geq 0.$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, $f(t)$在$t \geq 0$取最小值.

$f'(t) = 128t - 12(50-6t) = 200t - 600 = 0, t_0 = 3.$

$f(0) = 50, f(3) = 24^2 + 32^2 = 1600 = d^2, d = 40.$

开始后3分钟达到最近距离40m.



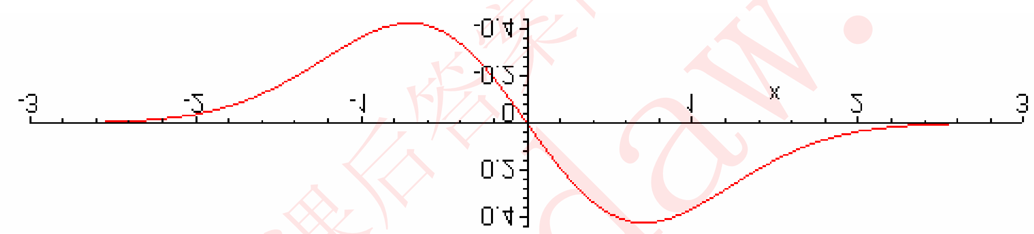
习题 4.5

1.求函数$f(x)=xe^{-x^2}$ 的凸凹性区间及拐点.

解$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$, $f''(x)=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)(-2x)-4xe^{-x^2}$

$=e^{-x^2}\left(-6x+4x^3\right)=2xe^{-x^2}\left(-3+2x^2\right)=0, x=0,\pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$

x	$(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}})$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{3}{2}},0)$	0	$(0,-\sqrt{\frac{3}{2}})$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	拐点	$\cup$	拐点	$\cap$	拐点	$\cup$

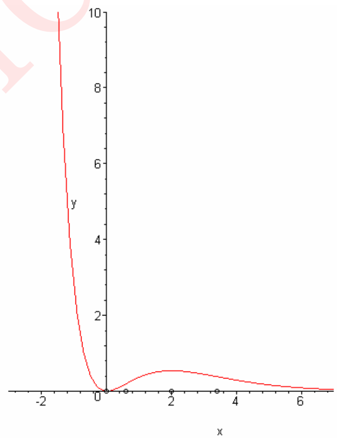


作下列函数的图形：

2. $y=x^2-\frac{1}{3}x^3, x\in(-\infty,\infty).$

$y'=2x-x^2=x(2-x)=0, x=0,2.$

$y''=2-2x=0, x=1.$



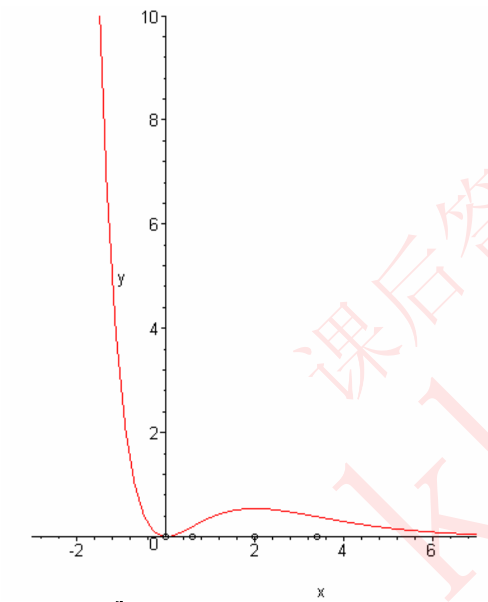
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$		$-$		$-$
y	$\searrow\cup$	极小值	$\cup\nearrow$	拐点	$\nearrow\cap$	极大值	$\searrow\cap$

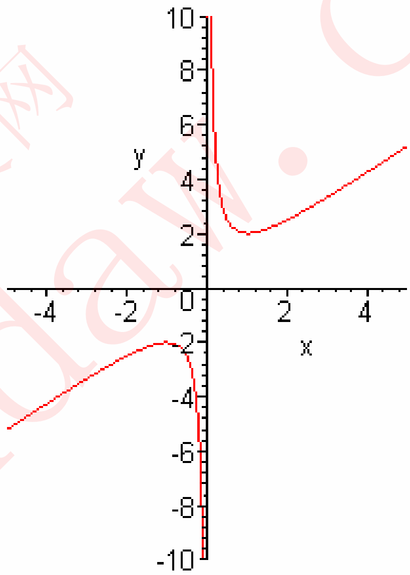
$3.y=x^2e^{-x},x\in(-\infty,+\infty).y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2)=e^{-x}x(2-x)=0,x=0,2;$

$y''=-e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}(2-2x)=e^{-x}(x^2-4x+2)=0,$

$x=2\pm\sqrt{2}.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2},2)$	2	$(2,2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	□ ∪	极小值	□ ∪	拐点	□ ∩	极大值	□ ∩	拐点	□ ∪





$4.y=x+\frac{1}{x},x\neq 0.$

$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=0,$

$x=\pm 1;\ y''=\frac{2}{x^3}.$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	$+$		$+$
y	↗∩	极大值	↘∩	↘∪	极小值	↗∪

5.$y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}, x\neq 1.$

$$y'=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-2(x+1)^3(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)^2(x-1)(3x-3-2x-2)}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2(x-1)(x-5)}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3},$$

$y'=0, x=-1,5.$

$$y''=\frac{[2(x+1)(x-5)+(x+1)^2](x-1)^3-3(x+1)^2(x-5)(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

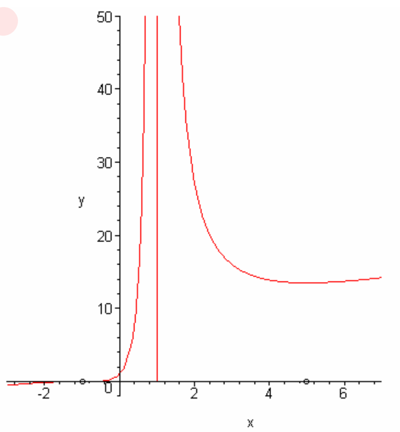
$$=\frac{[2(x+1)(x-5)+(x+1)^2](x-1)-3(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)\{[2(x-5)+(x+1)](x-1)-3(x+1)(x-5)\}}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)\{(3x-9)(x-1)-3(x^2-4x-5)\}}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)\{(3x^2-12x+9)-3(x^2-4x-5)\}}{(x-1)^4}=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}=0,\quad x=-1.$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	+	0	+	–	0	+
y''	–	0	+	+		+
y	□ ∩	拐点	□ ∪	□ ∪	极小值	□ ∪



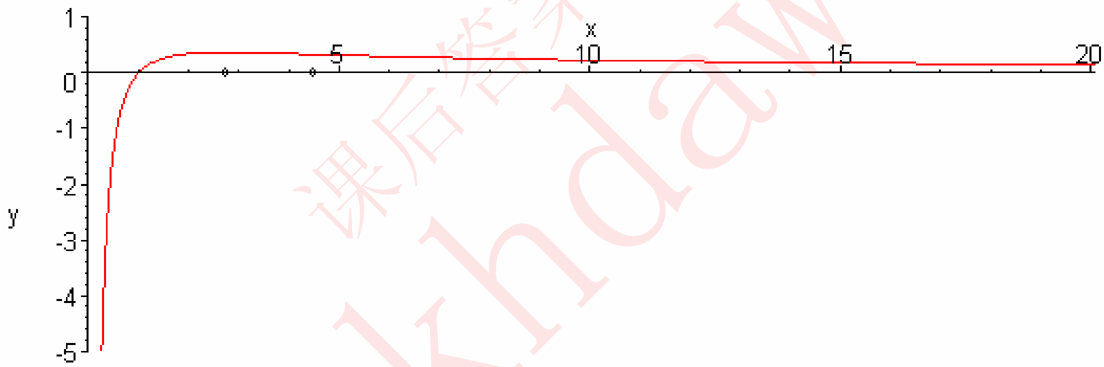
$6. y=\dfrac{\ln x}{x}, x>0.$

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0, x=e.$

$y''=\dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=-\dfrac{1+2(1-\ln x)}{x^3}=-\dfrac{3-2\ln x)}{x^3},$

$y''=0, x=e^{3/2}.$

x	$(-\infty,e)$	e	$(e,e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2},+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$
y''	$+$		$+$	0	$-$
y	□ $\cup$	极小值	□ $\cup$	拐点	□ $\cap$



7. 设函数$y=f(x)$在(a,b)内有二阶导数$f''(x)$且在(a,b)内向上凸.证明$f''(x)\le 0, x\in(a,b)$.

证$y=f(x)$在(a,b)在(a,b)内向上凸,故对于任意$x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2$,

$f(x_1)\le f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2), f(x_2)\le f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1).$

两式相加得

$0\le(f'(x_1)-f'(x_2))(x_2-x_1),$

消去$x_2-x_1>0$得$0\le f'(x_1)-f'(x_2)$,即$f'(x_2)\le f'(x_1)$, $f'(x)$是单调递减函数,故$f''(x)\le 0$,
$x\in(a,b)$.

习题 4.6

1.求下列曲线在指定点的曲率：

(1) $y=3x^3-x+1$ 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{9}\right)$ 处;

(2) $y=\frac{x^2}{x-1}$ 在 $\left(3,\frac{9}{2}\right)$ 处;

(3) $x(t)=a(t-\sin t), y(t)=a(1-\cos t)$, 其中 a 为常数, 在 $t=\pi/2$ 处.

解(1) $y'=9x^2-1, y''=18x, K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-6|}{(1+0^2)^{3/2}}=6.$

(2) $y=x+1+\frac{1}{x-1}, y'=1-\frac{1}{(x-1)^2}, y''=\frac{2}{(x-1)^3}.K=\frac{\frac{1}{4}}{(1+\frac{9}{16})^{3/2}}=\frac{16}{125}.$

(3) $x'=a(1-\cos t), x''=a\sin t, y'=a\sin t, y''=a\cos t, K=\frac{a^2}{(a^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a}.$

2.求曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率圆方程.

解 $y'=4x, y''=4.\alpha=\mathrm{x}_0-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=0, \beta=y_0+\frac{(1+y'^2)}{y''}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},$

$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=4, R=\frac{1}{4}$, 曲率圆方程: $x^2+(y-\frac{5}{4})^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2.$

3.问曲线 $y=2x^2-4x+3$ 上哪一点处曲率最大?并对其作几何解释.

解 $y'=4x-4, y''=4.K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{4}{(1+(4x-4)^2)^{3/2}}$ 当 $x=1$ 时最大, 对应点 $(1,1)$ 恰是抛物线的顶点.