P.230.15. 设 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}$ 的三个方向角 α,β,γ 满足：$\alpha=\beta=\frac{1}{2}\gamma$

求 $\vec{a}$ 的坐标。

解：$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{2}}=(\frac{x}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{2}}$，$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{2}}$，$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{2}}$

又 $\alpha=\beta$，$\gamma=2\alpha$，从而 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+(x^2-1)^2=1$

从而 $\cos\alpha=\cos\beta \Rightarrow x=y$.　$\cos\gamma=\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2(\frac{x}{\sqrt{2}})^2-1=x^2-1$.

$x^2+(x^2-1)^2=1 \Rightarrow x^2+x^4-2x^2+1=1$

$x^4-x^2=0$，$x^2(x^2-1)=0$

$x=0$，$x=\pm1$.

$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{2}}=x^2-1$，$z=\sqrt{2}(x^2-1)$

$\vec{a}=(0,0,-\sqrt{2})$ 或 $\vec{a}=(1,1,0)$.

P.230.16 设 $\vec{a}\neq0$，$\vec{b}\neq0$，且 $(7\vec{a}-5\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{b})$，$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$

求 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

解：由题意：$(7\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=0$

$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$

即 $\begin{cases}7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}=0 & \cdots\cdots① \\ 7|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$

①−②　$-23|\vec{b}|^2+46\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$ ……③

③代入①　$7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2+8|\vec{b}|^2=0$　即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\frac{1}{2}$.