二元关系
Binary Relation

中山大学 杨超
yangch8@mail.sysu.edu.cn

有序对

- 有序对 (x1,y1) 和 (x2,y2) 相等的充分必要条件是
- x1=x2 并且 y1=y2

- 注：有序对可以用集合来定义。

(a,b) = { a, {a,b} }

(c,d) = { c, {c,d} }

(b,a) = { b, {a,b} }

笛卡尔乘积

- 给定集合 A 和 B，它们的笛卡尔乘积定义为
- $$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$
-
-
- 如 $\{a, b\} \times \{1,2,3\} =$
- $$\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$
-

（二元）关系

- A,B 是两个集合，则 $A \times B$ 的子集
- R 称为从 A 到 B 的一个 (二元) 关系。
-
- 若 (a,b) 是 R 的一个元素，我们就认为 a 和 b 具有关系 R 。有时候也记作 aRb.
-
-

定义域，值域

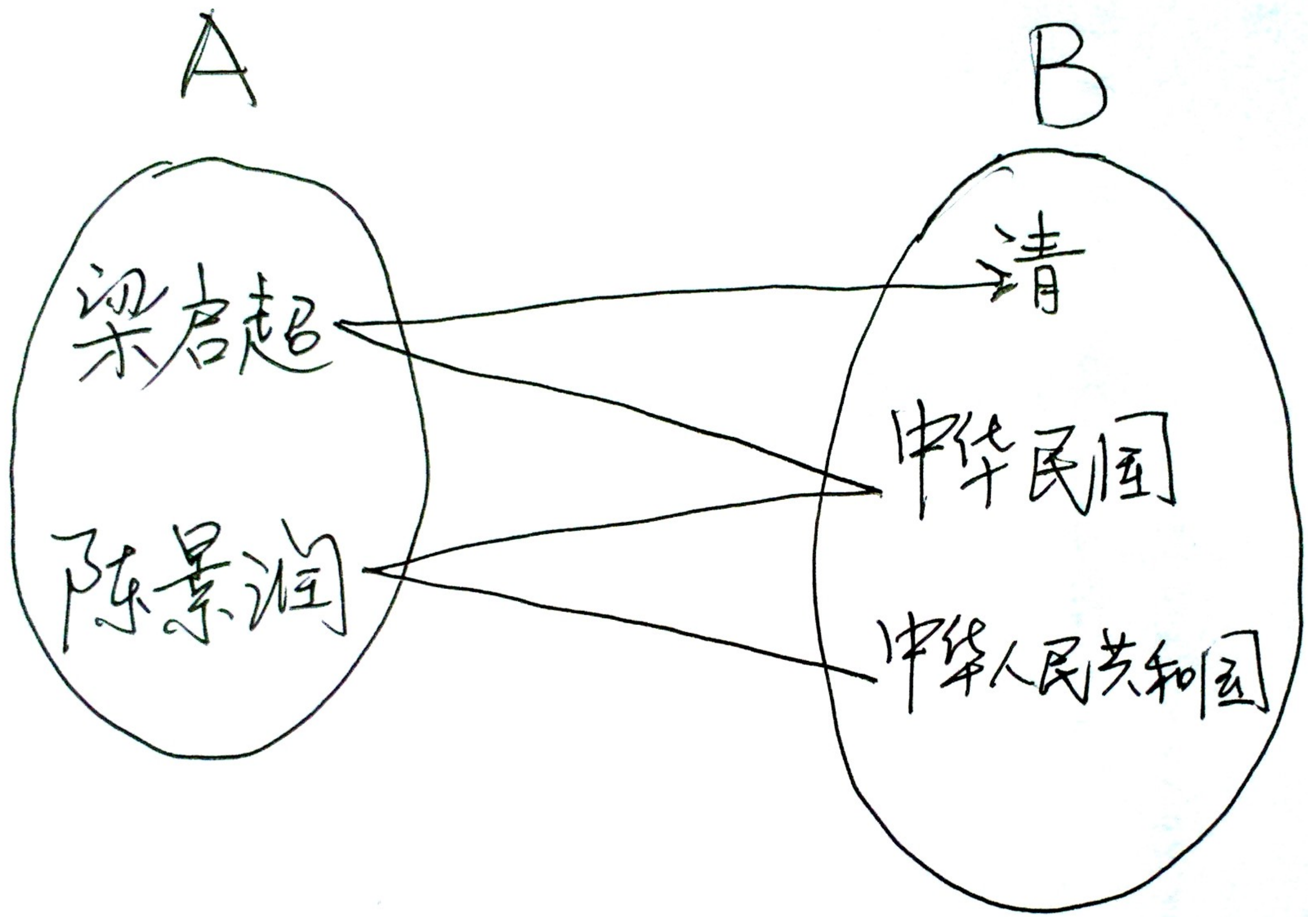
-
- 定义域 (前域)
- dom R ={ x | 存在 y, 使得 xRy }
- ran R ={ y | 存在 x ， 使得 xRy}
-
- 映射（函数）是特殊的关系： (1)dom R =A
- (2) 对每个 A 中的元素 x ，有唯一的 B 中元素 y ，使得 xRy

A 上的二元关系

- 从 A 到 A 的二元关系称为
- A 上的二元关系
-
- 如：空集 , A x A 都是 A 上的二元关系
-
- 又如： A 上的恒等关系,
- $$I_A = \{(a, a) | a \in A\}$$

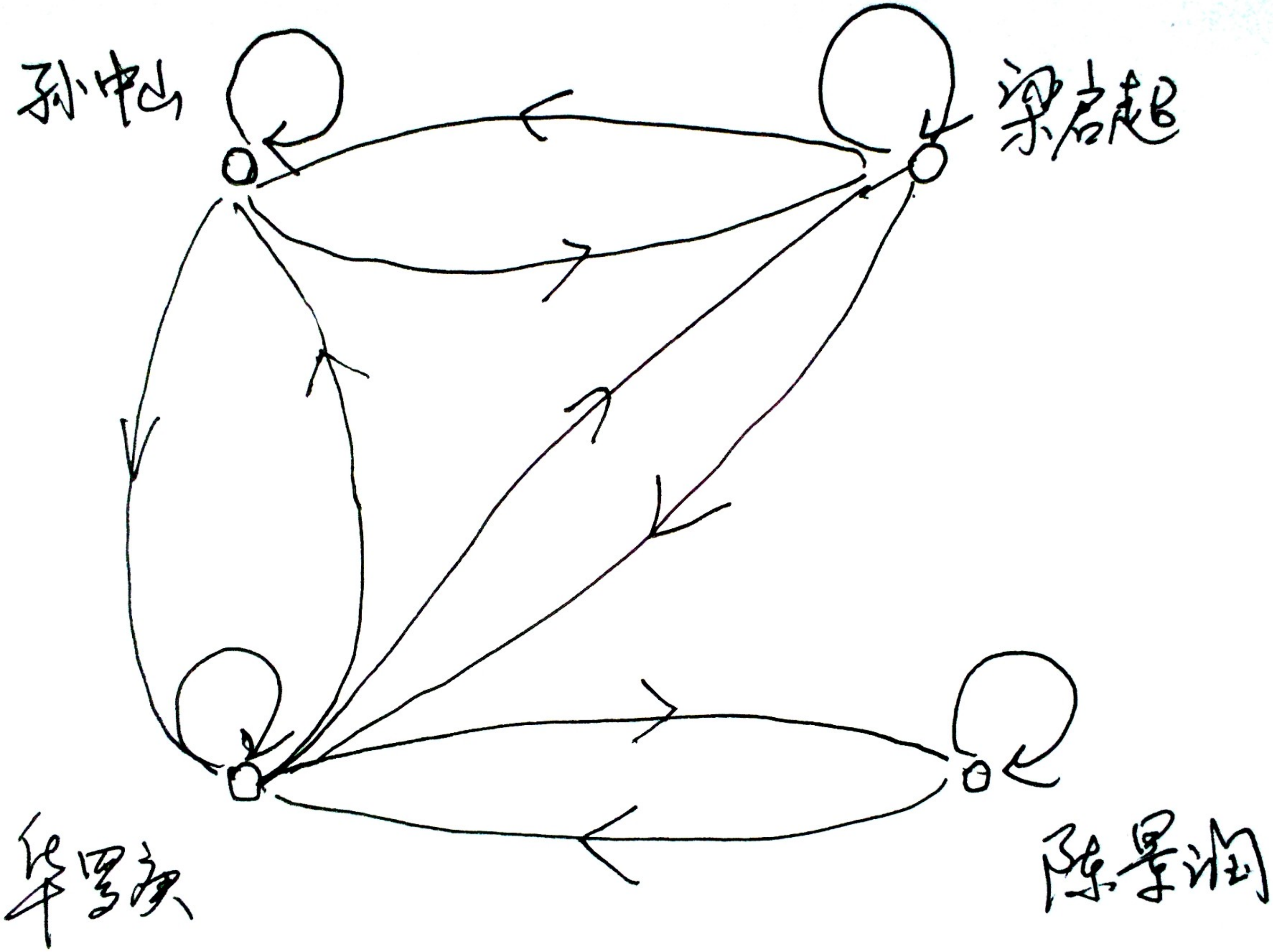
- 例子：自然数的小于关系
- 设 N 是自然数全体的集合，则
-
-

$$<=\{(a,b)|a\in N,b\in N,a<b\}$$



$$R = \{(\text{梁}, \text{清}), (\text{梁}, \text{中华民国}), (\text{陈}, \text{中华民国}), (\text{陈}, \text{中华人民共和国})\} \subseteq A \times B$$

- 设 A={ 孙中山，梁启超，华罗庚，陈景润 }
-
- 定义 A 上的二元关系如下：
-
- A={(孙 , 孙),(梁 , 梁),(华 , 华),(陈 , 陈),
- (孙 , 梁),(梁 , 孙),(孙 , 华),(华 , 孙),
- (梁 , 华),(华 , 梁),(华 , 陈),(陈 , 华)}

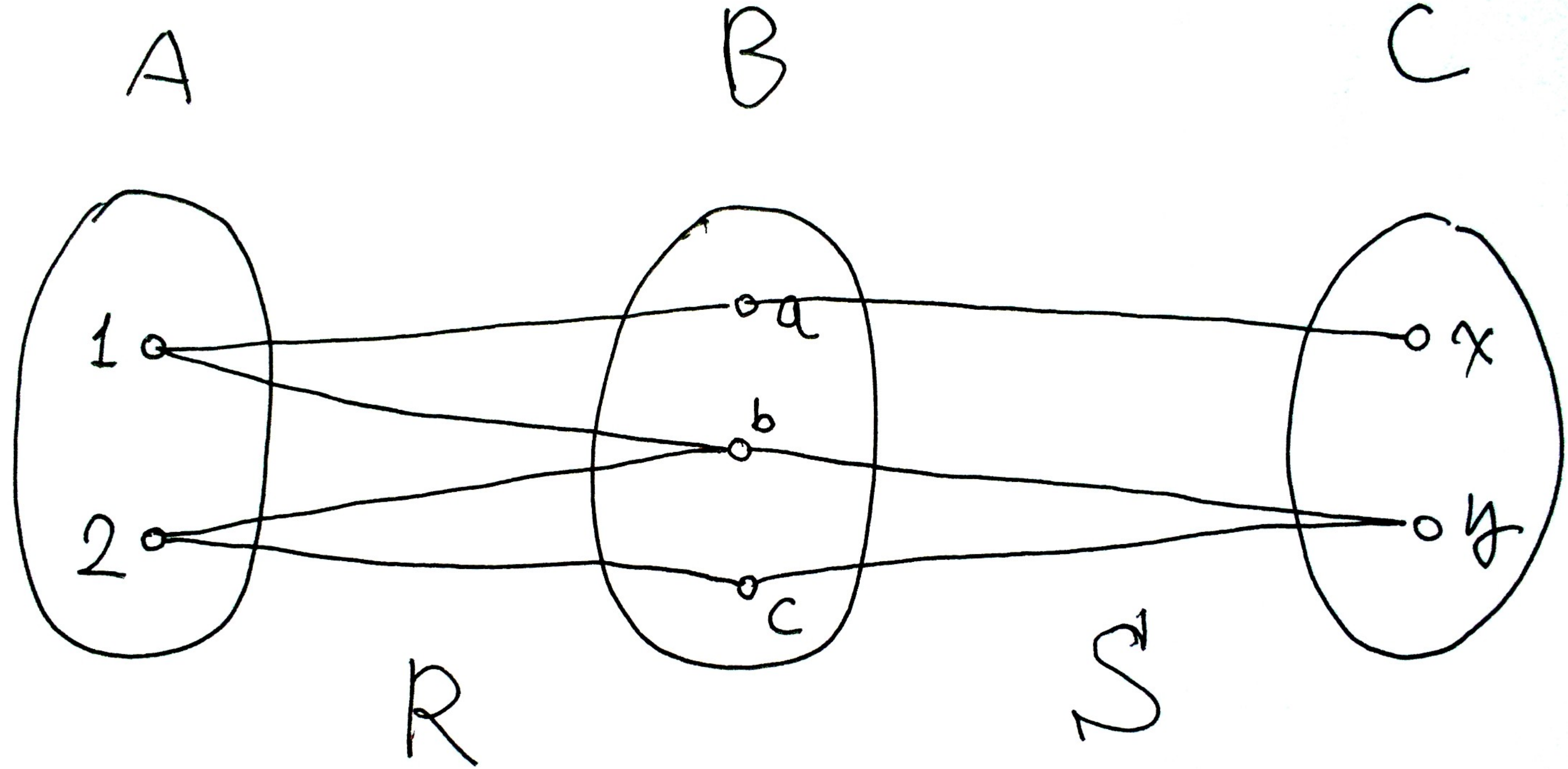


孙中山
梁启超
华罗庚
陈景润

- 例子： A 是世界上所有的人全体构成的集合。
-
  定义 A 上的二元关系 R 如下：
-
- $R=\{ (x,y) \mid x$ 是 y 的父亲 $\}$

复合

- 复合
- 若 R 是从 A 到 B 的关系， S 是从 B 到 C 的关系，那么 R 和 S 的复合是从 A 到 C 的一个二元关系，定义为：
- $$R \circ S = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists b)((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S)\}$$



$$R \circ S = \{(1, x), (1, y), (2, y)\}$$

逆

- 设 R 是从 A 到 B 的二元关系，
- R 的逆定义为
-
-

$$R^{-1}=\{(b,a)|(a,b)\in R\}$$

- 有两类特殊的关系是我们最感兴趣的。这两类关系也是在数学的所有领域中都会经常碰到的。
-
- 一，等价关系
-
- 二，偏序关系

关系的性质

- 设 R 是 A 上的二元关系
-
- 自反性：$(\forall x)(x \in A \rightarrow (x, x) \in R)$
-
- 反自反性：$(\forall x)(x \in A \rightarrow (x, x) \notin R)$

- 对称性
- $(\forall x)(\forall y)((x,y)\in R \rightarrow (y,x)\in R)$
-
- 反对称性
-

$$(\forall x)(\forall y)(((x,y)\in R \wedge (y,x)\in R) \rightarrow x=y)$$

- 传递性
-
- $$((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R)\rightarrow(x,z)\in R$$

等价关系

- 设 R 是 A 上的二元关系，
- 若 R 具有自反性，对称性和传递性，则称
- R 是 A 上的等价关系
-

- 例子：整数的模 k 同余关系
-

$$R_k = \{(x, y) \mid x \equiv y \pmod{k}\}$$

- 例子：
- A 是具有中国户籍的人的全体
-
- R={(x,y) | x 和 y 户籍所在的省份相同 }

- 前面的例子中，我们发现等价关系和分类有着密切的联系。
-
- 这不是偶然的，下面我们从理论上证明这个联系。

等价类

- 设 A 上的等价关系 R， a 是 A 的一个元素，
- 定义 a 的等价类为
-
- $$[a]_R = \{x \in A \mid xRa\}$$

- 引理：若 R 是 A 上的等价关系，则
- (1) $$aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$$
-
- (2) $$(a, b) \notin R \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \varnothing$$

先证 $aRb \Rightarrow [a]_R = [b]_R$

对 $\forall x \in [a]_R$，由定义 xRa，

又已知 aRb，故由传递性，xRb。

这就证明了 $[a]_R \subseteq [b]_R$.

另一方面，对 $\forall x \in [b]_R$，有

$$\left.\begin{array}{l} xRb \\ aRb \Rightarrow bRa \end{array}\right\} \Rightarrow xRa$$

所以 $[b]_R \subseteq [a]_R$

再证 $[a]_R=[b]_R \Rightarrow aRb$

首先，由自反性，$a\in[a]_R$.

又 $[a]_R=[b]_R$，所以 $a\in[b]_R$.

再由定义 aRb

先证 $(a,b)\notin R \Rightarrow [a]_R\cap[b]_R=\phi$

(反证) 反设 $x\in[a]_R\cap[b]_R$，则

$$\left.\begin{array}{l} xRa \Rightarrow aRx \\ xRb \end{array}\right\} aRb$$，矛盾.

再证 $[a]_R\cap[b]_R=\phi \Rightarrow (a,b)\notin R$

(反证) 反设 aRb，则 $a\in[b]_R$.

由自反性 $a\in[a]_R$，故 $a\in[a]_R\cap[b]_R$. 矛盾.

划分

- 设 A 是一个集合 ,S={ S1, S2, … Sn} 是 A 的一个子集族。若 S 满足
- (1) $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n = A \qquad (\cup S = A)$
-
- (2) $(i \neq j) \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$
-
- 则称 S 是 A 的一个划分。

等价关系与划分

- 设 R 是 A 上的一个等价关系
- 定义：
-
- $$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

- 定理：若 E 是 A 上的一个等价关系，则 A/E 是 A 的一个划分。

①先证 $\bigcup A/E = A$

显然 $\bigcup A/E \subseteq A$.

另一方面，对 $\forall a \in A$，有 $a \in [a]_R$，

故 $a \in \bigcup A/E$.

所以 $A \subseteq A/E$

② 证不重复。即若 $[a]_R \neq [b]_R$，则 $[a]_R \cap [b]_R = \phi$.

（反证）设 $x \in [a]_R \cap [b]_R$，则

$$\left.\begin{cases} xRa \Rightarrow aRx \\ xRb \end{cases}\right\} \Rightarrow aRb.$$

由前面引理，有 $[a]_R = [b]_R$，与我们的假设矛盾.

- 定义：设 S={S1,S2,...Sn} 是 A 的一个划分，定义 A 上的关系如下：
-
- $$R_S=\{(x,y)\in A\times A\mid(\exists i)(x\in S_i\wedge y\in S_i)\}$$
-
- 定理：如上定义的 Rs 是 A 上的等价关系。
- （证明留作作业）
-

- 最后再举一个等价关系的应用的例子
- 假设我们已经知道有自然数集
- $N=\{0,1,2,\ldots\}$
- 和自然数的加法，如何定义负整数?
-
-

- 考虑 N x N 上的二元关系：
- R={ ((a,b), (c,d)) | a+d=b+c }
-
- 自反性 (a,b) R (a,b) ，因为 a+b=b+a
- 对称性 若 (a,b) R (c,d) ，则 (c,d) R (a,b)
- 传递性 若 (a,b) R (c,d) 且 (c,d) R (e,f)
- 则 a+d = b+c, c+f =d+e, 两式相加，消去 c,d
- 的 a+f = b+e ，所以有 (a,b)R(e,f)

- 于是 R 是 N x N 上的一个等价关系。
- 所有的等价类如下：
- [(0,0)]= { (0,0), (1,1), (2,2), …}
- [(1,0)]={(1,0),(2,1), (3,2),…}
- [(2,0)]={ (2,0),(3,1),(4,2),…}
- ...
- [(0,1)]={ (0,1), (1,2), (2,3), …}
- [(0,2)]={(0,2), (1,3), (2,4), …}
- …
-

偏序
Partial Order

偏序的定义

- 集合 A 上的一个具有自反性，反对称性和传递性的二元关系，称为一个偏序关系。通常用下面的符号来表示偏序关系。
- $$\preccurlyeq$$
-
- 集合 A 连同 A 上的一个偏序关系，称为偏序集 (partial order set)，记作
- $(A, \preccurlyeq)$

- 例子：

$$\left(\mathbb{N}, \leq\right)$$

$$\left(\mathbb{Q}, \leq\right)$$

$$\left(\mathbb{R}, \leq\right)$$

- 例子：集合的包含关系
- 设 P(A) 是集合 A 的全体子集的集合。
- 如若 A={1,2,3}，则
- $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
-
- 那么（P(A), $\subseteq$ ）是一个偏序集

- 例子：用 $a|b$ 表示 a 整除 b
-
- 那么 $(N, |)$ 是一个偏序集

全序关系，全序集

- 设 $\preccurlyeq$ 是 A 上的偏序关系，若对任意 A 中元素 x 和 y，要么 x $\preccurlyeq$ y，要么 y $\preccurlyeq$ x，则称 $\preccurlyeq$ 是一个全序 (Total Order) 关系。简而言之，就是任何两个元素都可以比较“大小“。
- 相应的，(A, $\preccurlyeq$) 称为全序集。

- 对于有限偏序集，我们可以用哈希图来示意。
- 哈希图的要点：把“大“的元素画在“小“的元素上方。只画出“盖住“关系。

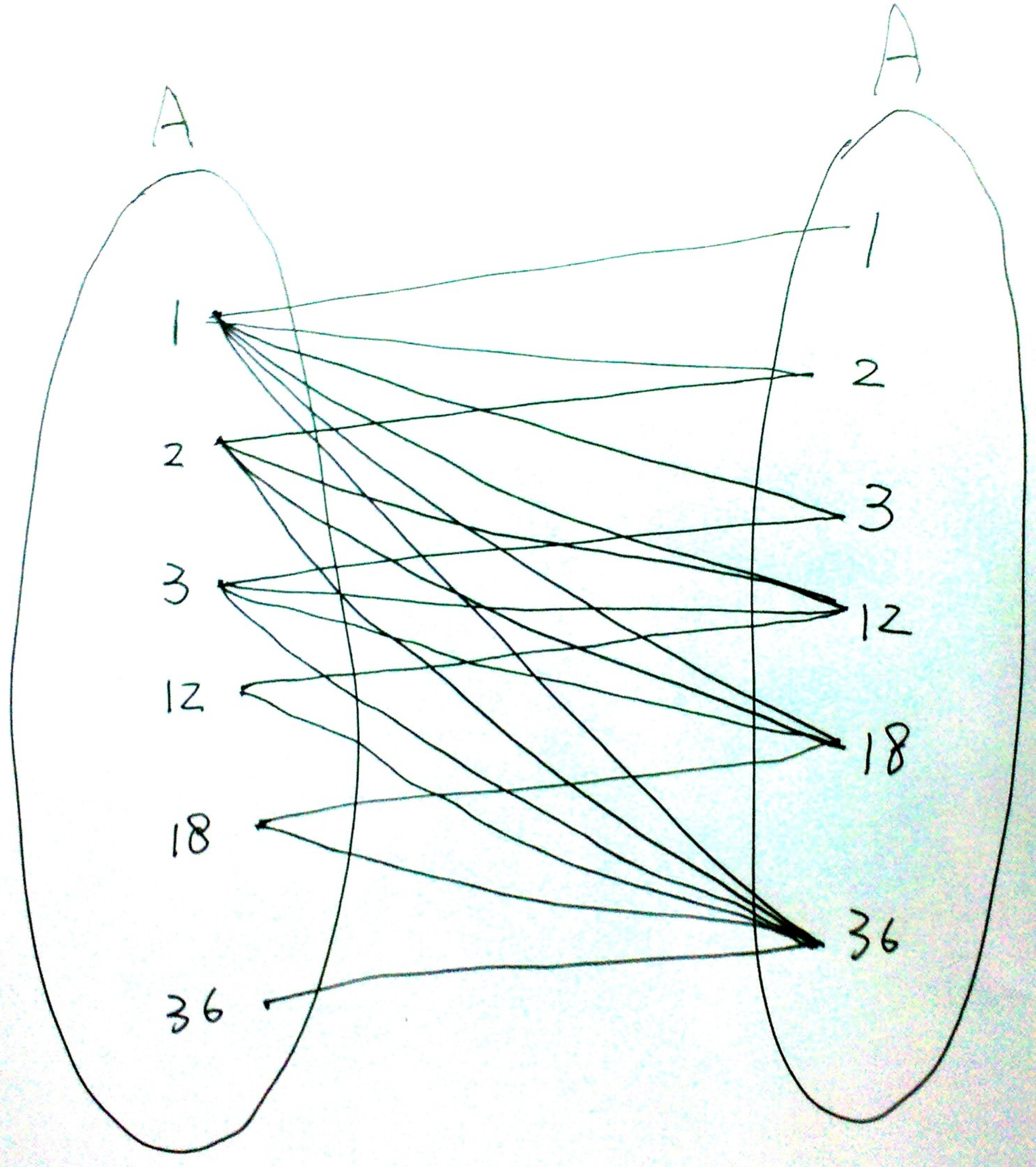
盖住

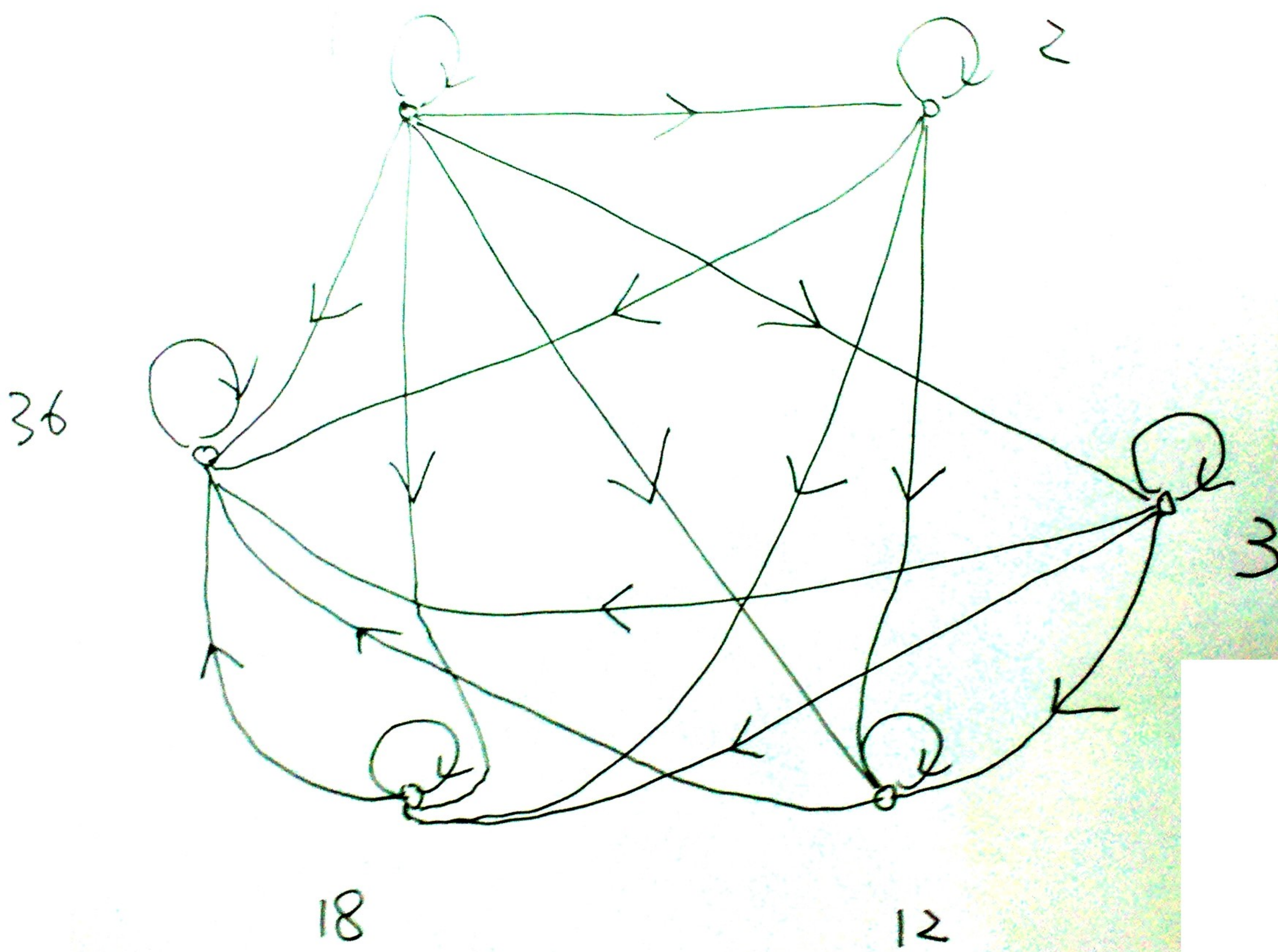
- 设 (A, $\preccurlyeq$) 是一个偏序， x,y 是 A 的两个不同的元素，
- 我们称 y 盖住 x, 如果下面两个条件满足：
- (1)x $\preccurlyeq$ y
- (2)A 中不存在与 x,y 不同的元素 z， 使得
- x $\preccurlyeq$ z， 并且 z $\preccurlyeq$y

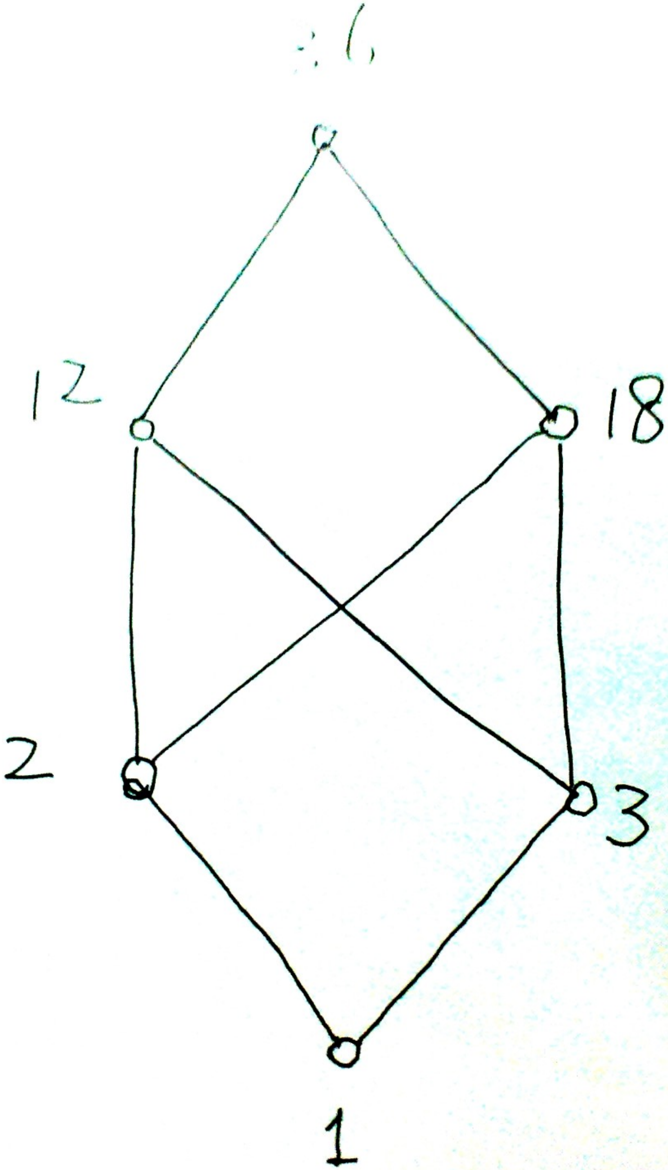
- 例子：
- A={0,1,1/2, 1/3, 1/4 , 1/5, …}
-
- 1/n 盖住 1/(n+1)
- 有元素盖住 0 吗?

哈希图的例子

- 设 A={1,2,3,12,18,36}
- 考虑偏序 { A, | }


A
A
1
2
3
12
18
36
1
2
3
12
18
36


2
36
3
18
12


36
12
18
2
3
1

最大元，最小元

- $(A, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集。B 是 A 的子集。
-
- 若 B 中存在元素 b， 使得对任意的 x 属于 B，
- 有 $x \preccurlyeq b$， 则称 b 为集合 B 的最大元。
-
- 若 B 中存在元素 a， 使得对任意的 x 属于 B，
- 有 $a \preccurlyeq x$， 则称 a 为集合 B 的最小元。
-

- 如令 A={1,2,3,4,12}
- 考察偏序集 (A, |)
- 那么 A 中的最大元是？最小元是？
-
- 若令 B={3,4}，则集合 B 有最大元吗？有最小元吗？

- 最大（小）元不一定存在。
-
- 性质一：(A, $\preccurlyeq$) 是一个偏序集。B 是 A 的子集。若 B 的最大（小）元存在，则唯一。

极大元，极小元

- (A, $\preccurlyeq$) 是一个偏序集。B 是 A 的子集。
-
- 若 B 中有元素 b，使得不存在 B 的元素 x，
- 使得 b $\preccurlyeq$ x，则称 b 为集合 B 的极大元。
-
- 若 B 中有元素 a，使得不存在的 B 中元素 x，
- 使得 x $\preccurlyeq$ a，则称 a 为集合 B 的极小元。
-

- 如令 A={1,2,3,4,12}
- 考察偏序集 (A, |)
- 那么 A 中的极大元是？极小元是？
-
- 若令 B={3,4}，则集合 B 有极大元吗？有极小元吗？

- 例子：下面这个偏序集有极大元吗?
-
- $(\mathbb{N}, \leq)$

- 由前面的例子，我们知道
- 极大（小）元不一定存在，若存在也不一定唯一。
-
- 性质二：最大元一定是极大元。最小元也一定是极小元。

上界，下界

- (A, $\preccurlyeq$) 是一个偏序集。B 是 A 的子集。
-
- 若 A 中有元素 b，使得对 B 的任意元素 x，
- 有 x $\preccurlyeq$ b，则称 b 为集合 B 的上界。
-
- 若 A 中有元素 a，使得对 B 中任意元素 x，
- 有 a $\preccurlyeq$ x，则称 a 为集合 B 的下界。

- 如令 A={1,2,3,4,12,18,24}
- 考察偏序集 (A, |)
-
- 若令 B={3,4}，则 12,24 都是 B 的上界。
- 能找到 A 的一个没有上界的子集吗?

上确界，下确界

- (A, $\preccurlyeq$) 是一个偏序集。B 是 A 的子集。
-
- B 的所有上界构成的集合的最小元称为上确界。
-
- B 的所有下界构成的集合的最大元称为下确界。

良序 (Well Order)

- 设 (A, $\preccurlyeq$) 是全序，若 A 的任意一个子集都有最小元，则称 A 为良序集。
-
- 例子：$(\mathbb{N}, \leq)$

- 例子：
- $$A = \mathbb{N} \cup \left\{ \infty \right\}$$