1. $z=f(x^2y,\frac{y}{x})$,其中f为可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ B-4

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'x^2+f_2'\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xf_1'+2x^3yf_{11}''-yf_{12}''-\frac{1}{x^2}f_2'+2yf_{21}''-\frac{y}{x^3}f_{22}'',$$

2. 证明$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$连续且偏导数存在，但在此点不可微

$\because 0\le|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ $\therefore$由夹逼定理得$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）连续。

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0;\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0-0}{y}=0$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）偏导数存在。 $\Delta z=f(0+x,0+y)-f(0,0)$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\Delta z-(A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y)}{\rho}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{(x^2+y^2)}$$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{k}{(1+k^2)}$与$k$有关，

$\therefore f(x,y)$在（0，0）不可微。

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上存在三阶导数，且$f(1)=0$；设函数$F(x)=x^3f(x)$ 证明在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$F'''(\xi)=0$

证：$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$

$\because F(0)=F'(0)=F''(0)=0$，$F(1)=0$

$\therefore F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理，存在$\xi_1\in(0,1)$,使得$F'(\xi_1)=0$。

$F'(x)$在$[0,\xi_1]$上满足罗尔定理，存在$\xi_2\in(0,\xi_1)$,使得$F''(\xi_2)=0$。

$F''(x)$在$[0,\xi_2]$上满足罗尔定理，存在$\xi\in(0,\xi_2)$,使得$F'''(\xi)=0$

证：由泰勒公式

$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}x^3$

$0<\xi<x<1$

由$F(0)=F'(0)=F''(0)=0$, $F(1)=0$

得 $\frac{F'''(\xi)}{3!}=0$

$F'''(\xi)=0$, $0<\xi<x<1$