习题1-1 # 中山大學 本科生考试草稿纸 2011/6/26 -1

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.16.1. 证明：$\sqrt{3}$为无理数。

证：反证法。假设$\sqrt{3}$为有理数，即存在整数m与n，使$(m,n)=1$且$\sqrt{3}=\frac{m}{n}$.

平方得：$3n^2=m^2$（即m^2能被3整除，从而m能被3整除.）

即 $m=3p$，p为整数。

从而 $3n^2=3^2p^2 \Rightarrow n^2=3p^2$（即$n$也能被3整除）

这与$(m,n)=1$矛盾. 从而$\sqrt{3}$为无理数。

P.16.2 设p为正的素数，证明：$\sqrt{p}$为无理数。

证：反证法，假设$\sqrt{p}$为有理数，即存在正整数m,n，使$\sqrt{p}=\frac{m}{n}$，且$(m,n)=1$.

于是，有$m^2=p\cdot n^2$或$m^2=n\cdot(pn)$，可见，n能整除m^2。由$(m,n)=1$.

由辗转相除法可知：存在整数u,v，使$mu+nv=1$.

又$m^2u+mnv=m$.

时n能整除m^2u又能整除nmv，故n能整除m。

这样，必$n=1$，得$p=m^2$。这与p为素数矛盾。故$\sqrt{p}$不是有理数。

P.16.3 解下列不等式

(1) $|x|+|x-1|<3$

解：当$x<0$时，有$-x-(x-1)<3$，即$-2x<2$，$x>-1$

当$0<x<1$，有$x-(x-1)<3$，即$1<3$. 不等式成立。

当$x>1$时，有$x+(x-1)<3$，即$x<2$.

综上，当$-1<x<2$时，不等式$|x|+|x-1|<3$成立。

(2) $|x^2-3|<2$.

解：由$|x^2-3|<2 \Longrightarrow -2<x^2-3<2 \Longrightarrow 1<x^2<5$

由$x^2<5 \Longrightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$

由$x^2>1 \Longrightarrow x>1$或$x<-1$.

综上$-\sqrt{5}<x<-1$或$1<x<\sqrt{5}$时，给定不等式成立