习题2-1. # 中山大學 本科生考试草稿纸 2011/2/4-23.

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条:“考试作弊者不授予学士学位。”

P.74.1 设 $f(x)=x^2$，证明: $f'(0)=0$，$f'(\frac{1}{2})=1$；并由此说明: 曲线 $y=x^2$ 在 $(0,0)$ 点的切线平行于 x 轴；在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 点的切线与 x 轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$。

证: $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$

$f'(\frac{1}{2})=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\frac{1}{2}+\Delta x)-f(\frac{1}{2})}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}+\Delta x)^2-\frac{1}{4}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{4}+\Delta x+\Delta x^2-\frac{1}{4}}{\Delta x}=1$

$\tan\alpha_1=K|_{(0,0)}=0$，$\alpha_1=0$，从而过 $(0,0)$ 的切线 $/\!/$ x 轴。

$\tan\alpha_2=K|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{4})}=f'(\frac{1}{2})=1$，$\alpha_2=\frac{\pi}{4}$，即过 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 的切线与 x 轴夹角 $\frac{5\pi}{4}$。

P.75.2 用定义求导:

(1) $y=ax^3$，$y'=(ax^3)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)^3-ax^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a\cdot\frac{x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-x^3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a(3x^2+3x\cdot\Delta x+\Delta x^2)=3ax^2$

(2) $y=\sqrt{2px}$，$(p>0)$.

$(\sqrt{2px})'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2p(x+\Delta x)}-\sqrt{2px}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2p(x+\Delta x)-2px}{\Delta x\cdot(\sqrt{2p(x+\Delta x)}+\sqrt{2px})}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2p\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2p(x+\Delta x)}+\sqrt{2px})}=\frac{p}{\sqrt{2px}}$.

(3) $y=\sin 5x$；$(\sin 5x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 5(x+\Delta x)-\sin 5x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{5\cdot\Delta x}{2}\cos(\frac{10x+5\Delta x}{2})}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}5\cdot\frac{\sin\frac{5\Delta x}{2}}{\frac{5\cdot\Delta x}{2}}\cdot\cos(5x+\frac{5\Delta x}{2})=5\cdot\cos 5x$.

P.75.3 求 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程:

(1) $y=2^x$，$M(0,1)$；　$y'=2^x\cdot\ln 2$，$K=y'|_{(0,1)}=2^x\ln 2|_{(0,1)}=\ln 2$

$y-1=\ln 2\cdot(x-0)\Longrightarrow x\cdot\ln 2-y+1=0$

(2) $y=x^2+2$，$M(3,11)$；$y'=2x$，$K=y'|_{(3,11)}=6$

$y-11=6(x-3)\Longrightarrow 6x-y-7=0$