组合数学

第五章 二项式系数

主要内容

- 1. 二项式系数及相关性质
- 2. 链与反链

二项式定理

Pascal公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

二项式定理(the binomial theorem)

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

一些恒等式

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

二项式系数的单峰性

n偶 $$\binom{n}{0} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \cdots > \binom{n}{n}$$

n奇 $$\binom{n}{0} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \cdots > \binom{n}{n}$$

牛顿二项式定理

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}y^{\alpha-k}$$

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

偏序与全序

集合A上的关系: 是$A\times A$的一个子集.

偏序: 传递的 自反的 反对称的 关系.

全序: 任意两个元素都可比较关系.

例: $(Z, \le)$, $(R, \le)$ 全序

$(R^2, \le)$ 偏序

(N, 整除) 偏序

$(P(\{1,2,3,4\}), \subseteq)$ 偏序

链与反链

定义: 设 (X, $\leq$) 为有限偏序集,

链是X的全序子集;

反链是X的子集, 其任两元素不可比较.

例: X={1,2,3}, (P(X), $\subseteq$)

{{1}, {1,2}, {1,2,3}}是链

{{1,2}, {1,3}, {2,3}}是反链

定理: 设S是n元集合, (P(S), $\subseteq$)的反链最多包含C(n, [n/2])个集合.

幂集的对称链划分

n=1: $\varnothing \subseteq \{1\}$

n=2: $\varnothing \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\}$

$\{2\}$

n=3: $\varnothing \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$

$\{2\} \subseteq \{2,3\}$

$\{3\} \subseteq \{1,3\}$

- 幂集划分成链
- 链中集合每个比前趋多1个元素
- |链头|+|链尾|=n

设已有n-1阶对称链划分, 如下构造n阶划分:

(1) n-1阶链每条添加集合 (链尾$\cup\{n\}$);

(2) n-1阶链每条去掉链尾, 链中每个集合加入n.

幂集反链的最多集合数

定理: 设S是n元集合, (P(S), $\subseteq$)的反链最多包含C(n, [n/2])个集合.

构造S的对称链划分:

- 含有S的每个子集
- 链中集合每个比前趋多1个元素
- |链头|+|链尾|=n

问题: 这个对称链划分由多少条链组成?

定理的证明.

偏序集的链与反链

令X={1,2,…,10}, 则 (X, |) 是偏序集

{4,6,7,9,10}是大小为5的反链

{1,2,4,8}是大小为4的链

(X, |)的极小元有: 1

(X, |)的极大元有: 10, 9, 8, 7, 6

命题: 设γ_1是链, γ_2是反链, 则

则 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ 至多有一个元素.

两个对偶的定理

定理1: 设偏序集$(X,\leq)$的最大链大小为r,

则X可以划分成r条反链(不能再少).

定理2: 设偏序集$(X,\leq)$的最大反链大小为m,

则X可以划分成m条链(不能再少).

证明.