中山大學 本科生考试草稿纸 2012 16/4

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.235. 1.(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}$；

解：① 由于 $\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x}\right)'=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+2}{2x^2}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x^2}$

当 $x>4$ 时，$\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x}\right)'=\frac{2-\sqrt{x}}{2x^2}<0$，即 x 充分大时，$\frac{\sqrt{x}-1}{x}$ 单减；

从而，$n>4$ 时，$\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ 单减，即 $u_n>u_{n+1}$。

又 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)=0$.

由交错级数的莱布尼兹判别法，可知 $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ 收敛。

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ 收敛。

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}$；

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[2\sqrt{x}-\ln|x|\right]_1^{+\infty}=+\infty$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right|$ 发散。综合①,②可得 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ 条件收敛。

方法2 ① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$

因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

由交错级数莱布尼兹判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$；$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ 都收敛，

从而，给定级数收敛。

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right|$，由 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}-1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right|$ 发散。

综合①、②可知，给定的级数条件收敛。