第十四章　范数与算子不等式

在前面各章中，特别是在第 1,6,7,9～13 各章中，都涉及到了各种空间中的范数和算子不等式，本章则是集中地讨论最基本最常用的空间范数与算子不等式.

§1　范数不等式

1.　**华罗庚不等式**：设$(X,(,))$为实内积空间，$x_k,x,y\in X,\alpha,\beta>0,1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，则

(1)　$$[\beta-(x,y)]^2+\alpha\|x\|^2\geqslant\frac{\alpha\beta^2}{\alpha+\|y\|^2},\tag{1.1}$$

仅当 $x=\left(\frac{\beta}{\alpha+\|y\|^2}\right)y$ 时等号成立；

(2)　$$\|y-\sum_{k=1}^n x_k\|^2+\alpha\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2\geqslant\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)\|y\|^2,\tag{1.2}$$

仅当 $x_k=\left(\frac{1}{n+\alpha}\right)y$ 时等号成立. 见 Dragomir,S.S. 杨国胜，[330]1996,27:227 - 232. 1999 年，Pecaric,J. 推广了上述结果，即下述(3)(4)：

(3)　当 $(x,y)<\beta,1<p<\infty$，则

$$[\beta-(x,y)]^p+\alpha^{p-1}\|x\|^p\geqslant\left(\frac{\alpha}{\alpha+\|y\|^q}\right)^{p-1}\beta^p,\tag{1.3}$$

仅当 $x=\left(\frac{\beta\|y\|^{q-2}}{\alpha+\|y\|^q}\right)y$ 时等号成立. 当 $p=2$ 时，又得到(1.1)式.

(4)　设 $(x,y)<\beta,f$ 是$[0,\infty)$上递增的凸函数，则

①　$$f[\beta-(x,y)]+\frac{1}{\alpha}\|y\|f(\alpha\|x\|)\geqslant\left(\frac{\alpha+\|y\|}{\alpha}\right)f\left(\frac{\alpha\delta}{\alpha+\|y\|}\right),\tag{1.4}$$

当 f 是严格凸函数时，(1.4)式中仅当 $x=\left(\frac{\beta}{\|y\|(\alpha+\|y\|)}\right)y$ 时等号成立；

②　$$f(\|y-\sum_{k=1}^n x_k\|)+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n f(\alpha\|x_k\|)\geqslant\left(\frac{\alpha+n}{\alpha}\right)f\left(\frac{\alpha\|y\|}{\alpha+n}\right).\tag{1.5}$$

当 f 是严格凸函数时，(1.5)式中仅当 $x_k=\left(\frac{1}{n+\alpha}\right)y$ 时等号成立.

特别当 $f(x)=x^p,p>1$ 时得到

$$\|y-\sum_{k=1}^n x_k\|^p+\alpha^{p-1}\sum_{k=1}^n\|x_k\|^p\geqslant\left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^{p-1}\|y\|^p.\tag{1.6}$$

见[330]2002,33(3):265 - 268.

2.　**Bohr 不等式**：设 X 为酉向量空间，$x_k\in X$. $a_{kj}>0,1\leqslant k<j\leqslant n$. 则

$$\|\sum_{k=1}^n x_k\|^2\leqslant\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2\left(1+\sum_{j=k+1}^n a_{kj}+\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_{ik}}\right).$$

(Pecaric, J. E., Rassias, Th. M. [301] 1993, 174(1): 138 - 146.)

3. **Grothendieck 不等式**:

(1) 设 X 为 Hilbert 空间, $x_k \in X$, $\|x_k\| \leqslant 1$, $a_{kj} \in R^1$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} \| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \| \leqslant C \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} t_k s_j \right| : | t_k |, | s_j | \leqslant 1 \right\}.$$

已知

$$\frac{\pi}{2} \leqslant C \leqslant \frac{\pi}{2\ln(1+\sqrt{2})} = 1.782\cdots,$$

问 C 的最佳值是多少?(证明见[104]P. 177 - 180)

(2) 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵, $x_1, \cdots, x_n$ 是 Banach 空间 X 的单位球的元, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \| \leqslant (2n)^{1/2} \| A \|_{\infty,1}.$$

见 Andrew, T. Math. Nachr 1987, 131: 335 - 343.

4. **Dunkl-Williams 不等式**: 设 x, y 是赋范空间 X 中的两个非零向量, 则

(1) $$\| x - y \| \geqslant \left(\frac{1}{2}\right) \sup(\| x \|, \| y \|) \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\|; \tag{1.7}$$

(2) $$\| x - y \| \geqslant \left(\frac{1}{4}\right) (\| x \| + \| y \|) \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\|, \tag{1.8}$$

其中系数 1/2, 1/4 均不能换成更大的数.

提示: 先考虑 $\| x \| = 1$, $\| y \| \leqslant 1$, 令 $z = y / \| y \|$, 证明 $1 + \| x - z \| \leqslant \| y \| + \| z - y \| + 2 \| x - y \|$.

(3) 若 X 为复内积空间, 则

$$\| x - y \| \geqslant \frac{1}{2} (\| x \| + \| y \|) \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\|. \tag{1.9}$$

已知(1.9)式对于一般的赋范线性空间不成立, 但是, 若(1.9)式成立, X 是否必为内积空间?(见[305]1964, 71: 53 - 54 或[74]Vol. 1: 98)

1993 年 Rashed 将(1.8)式推广为:

$$\| x \| \cdot \| y \| \cdot \| x - y \| \geqslant C_p (\| x \|^p + \| y \|^p)^{1/p} \| \| y \| x - \| x \| y \|,$$

式中 $C_p = \begin{cases} 2^{-1-\frac{1}{p}}, & 0 < p \leqslant 1 \\ 2^{-2}, & p \geqslant 1. \end{cases}$ (见[301]1993, 176: 587 - 593).

5. 设赋范空间中的向量 x, y, z 满足 $x + y + z = 0$, 则

$$\| x - y \| + \| y - z \| + \| z - x \| \geqslant (3/2)(\| x \| + \| y \| + \| z \|),$$

见[305]1989, 96(6): 527.

6. **Bynum-Drew 不等式**: 设 X 为抽象 L^p 空间($1 < p \leqslant 2$), 即 X 为 Banach 格且 $\| x + y \|^p = \| x \|^p + \| y \|^p$, , $x, y \in X$, $x \wedge y = 0$. 则

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leqslant \frac{1}{2} (\| x \|^2 + \| y \|^2) - (p-1) \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2,$$

式中 $p - 1$ 是最佳常数.

1990 年 Smarzewski, R. 进一步证明在上述条件下, 有

$$\|(1-t)x+ty\|^2\leqslant(1-t)\|x\|^2+t\|y\|^2-(p-1)t(1-t)\|x-y\|^2,$$

式中 $0<t<1$.见[301]1990,150:146 - 150.

注 抽象 L^p 空间的理论可参看专著:A. C. Zaanen, W. A. J. Luxemburg, Riesz spaces, North-Holland, 1971.

7. **Clarkson 不等式**:设 $f,g\in L^p(X,\sum,\mu)$, $1/p+1/q=1$,若 $2\leqslant p\leqslant\infty$,则

(1) $\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\dfrac{f-g}{2}\right\|_p^p\leqslant\dfrac{1}{2}(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)$;

(2) $\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|_p^q+\left\|\dfrac{f-g}{2}\right\|_p^q\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\|f\|_p^p+\dfrac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}$.

若 $1<p\leqslant2$,则(1)(2) 中不等号均反向.证明见[98]P316 - 322.

8. 设 X 为 Banach 空间,$1<p\leqslant q<\infty$, $\alpha=\left(\dfrac{p-1}{q-1}\right)^{1/2}$,则 $\forall x,y\in X$,成立

$$(\|x+\alpha y\|^q+\|x-\alpha y\|^q)^{1/q}\leqslant2^r(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)^{1/p}.$$

式中 $r=1/q-1/p$,

(证明见俞鑫泰,Banach 空间选论,上海:华东师大出版社,1992,P234).

9. **Fan Ky 不等式**:设 X 为实内积空间,$x_k,e\in X$, $\|e\|=1$, $0<\|x_k\|\leqslant1/2$, $x_1+x_2\neq0$,则

$$\frac{(x_1,x_2)}{\|x_1+x_2\|^2}\leqslant\frac{(e-x_1,e-x_2)}{\|2e-x_1-x_2\|^2}.$$

(王挽澜等[334]1984,27(4):485 - 497).

10. **比卜一来维不等式**:设 X 为 Hilbert 空间,A 为 X 的闭子空间,$\forall x\in X$,令 $d=\inf\{\|x-y\|:y\in A\}=d(x,A)$,则 $\forall y_1,y_2\in A$,成立

$$\|y_1-y_2\|\leqslant\sqrt{\|x-y_1\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-y_2\|^2-d^2}.$$

(见阿赫叶惹尔,逼近论讲义,P23.)

11. **Smarzewski 不等式**:设 $L_p^p=L^p(X,\sum,\mu)$, $\|y\|_p=\left(\int_X|y|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, A 为 L^p 的非空闭凸子集,$\forall y\in L^p$, $x,z\in A$.当 $2\leqslant p<\infty$ 时,成立

$$\|y-z\|^p\leqslant\|y-x\|^p-C_p\|z-x\|^p;$$

若 $z\in A$ 是 y 在 L^p 中的最佳逼近元,$1<p<2$,则

$$\|y-z\|^p\leqslant\|y-x\|^p\leqslant\|y-z\|^p+C_p\|z-x\|^p,\ \forall x\in A,$$

式中 $C_p=(1+t_0^{p-1})(1+t_0)^{1-p}=(p-1)(t_0+1)^{2-p}$,而 $t_0=t_0(p)$ 表示函数 $g(t)=-t^{p-1}+(p-1)t+p-2$ 在$(1,\infty)$上的惟一零点,$t_0(2)=1$.

(提示:利用第 3 章 N25,细节见[327]1987,49:93 - 98.).

12. **Gruss-Lupas 型不等式**:设$(X,\|\cdot\|)$为赋范线性空间,$x_k\in X$, $\alpha_k\in K$,(实数或复数集),$p_k\geqslant0$ 且 $\sum_{k=1}^n p_k=1$,则

$$\left\|\sum_{k=1}^n p_k\alpha_kx_k-\left(\sum_{k=1}^n p_k\alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^n p_kx_k\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}|\alpha_{k+1}-\alpha_k|\right)\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\|x_{k+1}-x_k\|\right)\left[\sum_{k=1}^{n}k^2p_k-\left(\sum_{k=1}^{n}kp_k\right)^2\right].$$

(Dragomir, S. S. 等, Math. Commun. 2000, 5(2): 117 - 126)

13. **Grüss 不等式**：设 X 是复数域 C 上内积空间. $x_k, y_k \in X$.

(1)　若 $p_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \alpha_k, \beta_k \in C$. 使得

$$\mathrm{Re}[(\beta_1-\alpha_k)](\overline{\alpha_k}-\overline{\beta_2})\geqslant 0;\quad \mathrm{Re}(y_1-x_k, x_k-y_2)\geqslant 0, k=1,\cdots,n.$$

则 $\left\|\sum_{k=1}^{n}p_k\alpha_kx_k-\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)\right\|\leqslant\frac{1}{4}(\beta_1-\beta_2)\|y_1-y_2\|$. 式中$\frac{1}{4}$是最佳常数. (Dragomir, S. S. [301]2000, 250(2): 494 - 511)

(2)　若 $e\in X, \|e\|=1, x, y\in X, \alpha_k\in C$, 使得

$\mathrm{Re}(\alpha_3e-x, x-\alpha_1e)\geqslant 0$,　$\mathrm{Re}(\alpha_4e-y, y-\alpha_2e)\geqslant 0$, 则

$|(x,y)-(x,e)(e,y)|\leqslant 1/4\,|\alpha_3-\alpha_1|\cdot|\alpha_4-\alpha_2|$.

式中 1/4 是最佳常数. (Dragomir, S. S. [301]1999, 237(1): 74 - 82)

14. **L^p 空间的特征不等式**：设 $x, y\in L^p$ 为任意两个线性无关的元素, $\alpha, \beta\in(0,1)$, $\alpha+\beta=1, \forall\alpha\in(0,1/2]$, $x(\alpha)$ 表示方程 $\beta x^{p-1}-\alpha-(\beta x-\alpha)^{p-1}=0$, $(\alpha/\beta\leqslant x\leqslant 1)$ 的惟一解, 并令

$$g(\alpha)=\begin{cases}\alpha\beta, & p=2\\ 0, & p\neq 2, \alpha=0,1.\\ \alpha\beta\dfrac{1-(\alpha\wedge\beta)x^{p-1}}{[1+x(\alpha\wedge\beta]^{p-1}}, & p\neq 2,\ 0<\alpha<1,\end{cases}$$

则 $p>2 \iff \|\beta x+\alpha y\|^p+g(\alpha)\|x-y\|^p<\beta\|x\|^p+\alpha\|y\|^p$. $p<2$ 时, 右边的不等号反向. 仅当 $p=2$ 时等号成立. (徐宗本等[334]. 1994, 37(4): 433 - 439).

15.　设 f, g 是 R^n 上正的可测函数. $1\leqslant p, q\leqslant\infty, 1\leqslant r\leqslant\infty, 1/r=(1/p)+(1/q)-1$, 则

$$\int fg\leqslant\|f\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}\left(\int f^pg^q\right)^{1/r}.$$

见[73]P. 231 - 234.

16. **双 Cauchy-Schwarz 型不等式**：设 X 为内积空间, $x, y, z\in X$. 则

$$2|(z,x)(z,y)|\leqslant\{\|x\|\,\|y\|+|(x,y)|\}\|z\|^2.$$

若 X 为 Hilbert 空间, 则对 x, y 的任何投影 P_x, P_y. 成立

$$2|(Px,y)|=2|(Px,Py)|\leqslant\|x\|\,\|y\|+|(x,y)|.$$

Manolis, M. 等. Missouri J. Math. Sci., 2000, 12(1): 26 - 30.

17. **Brezis-Gallouet 不等式**：设 $\Omega\subset R^n$ 为区域, 其边界充分光滑.

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}=\left\{\int_\Omega\left(|u|^p+\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha u|^p\right)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}, 1\leqslant p<\infty$$

令 $r=n-1+(n/2), \beta=\sigma-1+(n/2), \sigma\geqslant 2$, 若 $\|u\|_{H^\beta(\Omega)}\leqslant 1$, 则 $\exists C>0$, 使得

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\left\{1+n\cdot\sqrt{\ln(1+\|u\|_{H^r(\Omega)})}\right\}.$$

(Du Xinhua. Chinese Sci. Bull. 1996, 41(23): 1937 - 1942)

18. **最佳逼近不等式**:设$\{e_k\}$是内积空间 X 中标准正交系,$x \in X, c_k = (x, e_k)$, $A_n = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$.则 $\forall \alpha_k \in K$,成立

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \| \leqslant \| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \|.$$

19. **Bessel 不等式**:设$\{e_k\}$是内积空间 X 中标准正交系,则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)(y, e_k)| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|, \forall x, y \in X,$$

当 $x = y$ 时,即为第 11 章 §2 N.46.

20. **算子中值不等式**:设 X, Y 为 Banach 空间,$G \subset X$ 为开集,$f: G \to Y$ 为 Frechet 可微,线段$\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\} \subset G$,则

$\| f(y) - f(x) \| \leqslant \sup\limits_{t \in (0,1)} \| f'(tx + (1-t)y) \| \| y - x \|$.更一般地,设 $x_0 \in G, t_k \in X, 1 \leqslant k \leqslant n$,使得对于 $0 \leqslant \xi_k \leqslant 1$,有 $x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k t_k \in G$,对 k 用归纳定义:$\Delta^1 f(x_0, t_1) = f(x_0 + t_1) - f(x_0), \Delta^k f(x_0, t_1, \cdots, t_k) = \Delta^{k-1} g_k(x_0, t_1, \cdots, t_{k-1})$,其中 $g_k(t) = f(x + t_k) - f(x)$.令集 $A = \left\{ z : z = x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k t_k, 0 \leqslant \xi_k \leqslant 1 \right\}$,则

$$\| \Delta^n f(x_0, t_1, \cdots, t_n) \| \leqslant \| t_1 \| \cdot \| t_2 \| \cdots \| t_n \| \sup_{z \in A} \| D^n f(z) \|,$$

$$\| \Delta^n f(x_0, t_1, \cdots, t_n) \| - D^n f(x_0) \cdot (t_1, \cdots, t_n) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| t_1 \| \cdot \| t_2 \| \cdots \| t_n \| \sup_{z \in A} \| D^n f(z) - D^n f(x_0) \|.$$

21. 设 X 为 Banach 空间,$f: [a, b] \to X$ 为无限次可微映射,则对于 $m < n$,有

(1) $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \| f^{(k)}(a) \| \dfrac{a^k}{k!} \leqslant \sum\limits_{k=m}^{n-1} \| f^{(k)}(b) \| \dfrac{b^k}{k!} + \int_0^b \| f^{(n)}(x) \| \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}x$;

(2) $\int_a^b \| f^{(m)}(x) \| \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!} \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \| f^{(n)}(x) \| \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}x + \sum\limits_{k=m}^{n-1} \| f^{(k)}(b) \| \dfrac{b^k}{k!}$.

22. 设 X 为 Banach 空间,$f: [a, \infty) \to X$ 为无穷次可微映射,$a \geqslant 0$.

(1) 若 $\forall x \geqslant a$,存在 $M_n < \infty$,使得 $\| f^{(n)}(x) \| (x^n / n!) \leqslant M_n$,并且 $\forall k \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} f^{(k-1)}(x) x^{k-1}$ 存在,则当 $m < n, b > a$ 时,有

$$\sum_{k=m}^{n-1} \| f^{(k)}(b) \| \frac{b^k}{k!} \leqslant \int_b^{\infty} \| f^{(n)}(x) \| \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}x;$$

$$\int_a^b \| f^{(m)}(x) \| \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \| f^{(k)}(b) \| \frac{b^k}{k!};$$

(2) 令 $J_n = \int_a^{\infty} \| f^{(n)}(x) \| \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}x$ 若J_n, J_{n+1} 均为有限时,则 $\forall x \geqslant a$,有

$$\| f^{(n)}(x) \| (x^n / n!) \leqslant \| f^{(n)}(a) \| (a^n / n!) + J_n + J_{n+1}.$$

若 $\lim\limits_{x \to \infty} f^{(n)}(x) = 0$,则$\{J_n\}$构成递增数列.N20 - 22 见[74]Vol. 1. P. 203, 214 - 215.

23. **幂权不等式**:设 $p, q \geqslant 1, r \geqslant 0, 0 \leqslant d \leqslant 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{\alpha}{n}, \dfrac{1}{q} + \dfrac{\beta}{n}, \dfrac{1}{r} + \dfrac{t}{n}$ 均为正

数,$u \in C_0^{\infty}(R^n)$,则

$$\| |x|^t u \|_r \leqslant C \| |x|^{\alpha} u \|_p^d \| |x|^{\beta} u \|_q^{1-d} \tag{1.10}$$

成立的充要条件是:

(1) $\frac{1}{r} + \frac{t}{n} = d(\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}) + (1-d)(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n})$;

(2) $t \leqslant d\alpha + (1-d)\beta$;

(3) 若 $d > 0, \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}$,则 $t = d\alpha + (1-d)\beta$.

见丁夏畦等,[338],1989,9(3):353-360,作者还对 $r < p, q$ 时求出了 C 的最佳值,它表明,某些 Sobolev 空间实际上同构于某种带幂权的 (L) 类.(1.10) 式可推广到 Banach 空间 X 上的线性算子 T.若 $\alpha < \beta < \gamma$,则成立**矩量不等式**:

$\| T^{\beta} x \| \leqslant C(\alpha, \beta, \gamma) \| T^{\alpha} x \|^p \| T^{\gamma} x \|^q$, 式中 $p = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}, q = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$,

见[107]2:547.

24. 设 $f \in L^q(E), 1 < p \leqslant r \leqslant q < \infty, \alpha > 0, \lambda = [(1/p) - (1/r)]/[(1/r) - (1/q)], 1/r = (t/p) + (1-t)/q, 0 < t < 1$,则

$$\| f \|_r \leqslant \alpha \| f \|_q + \alpha^{-\lambda} \| f \|_p.$$

见[119]P338.

§2 算子与泛函不等式

1. **线性算子范数不等式**:设 X, Y 为赋范线性空间,D 为 X 的线性子空间.$T: D \to Y$ 为有界线性算子,D 称为 T 的定义域,记为 $D(T)$,则算子 T 在 D 上的范数定义为:

$$\| T \| = \sup \left\{ \frac{\| Tx \|}{\| x \|} : x \neq 0, x \in D(T) \right\}.$$

它有以下两种等价形式:

$$\| T \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Tx \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \|.$$

(1) 若 T 有界,则成立**算子范数不等式**:

$$\| Tx \| \leqslant \| T \| \| x \|, x \in D(T).$$

(2) 若 T_1, T_2 是两个定义有乘积 $T_1 T_2$ 的算子,则算子范数有一个对计算很有用的性质:$\| T_1 T_2 \| \leqslant \| T_1 \| \cdot \| T_2 \|$.特别 $\| T^2 \| \leqslant \| T \|^2$,从而 $\| T^n \| \leqslant \| T \|^n$.

下面设 X 为 Banach 空间,T, T_k 均为 X 上有界线性算子.

(3) 设 $\| T \| \leqslant |\lambda|$,则逆算子 $S = (\lambda T - T)^{-1}$ 存在且为有界线性算子,

$\| S \| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \| T \|}$.其中 I 为恒等算子.

(4) 设 $T_2 = T_1 - T_3, \| T_3 \| < \| T_1^{-1} \|^{-1}, T = T_1^{-1} T_3$,则

$$\| T_2^{-1} - T_1^{-1} \| \leqslant \frac{\| T \|}{1 - \| T \|} \| T_1^{-1} \|; \| T_2^{-1} - T_1^{-1} \| \leqslant \frac{\| T_1^{-1} \|^2 \| T_3 \|}{1 - \| T_1^{-1} \| \| T_3 \|};$$