P.62.2. 方法2 (1) 设 $\varphi(x)=x-\varepsilon\cdot\sin x-y_0$ 　　2011/4-20

则 $\varphi(x)=x(1-\varepsilon\cdot\frac{\sin x}{x}-\frac{y_0}{x})$

当 $x\to\infty$ 时，$1-\varepsilon\cdot\frac{\sin x}{x}-\frac{y_0}{x}\to 1>0$

因此，当 $|x|$ 充分大时，$(1-\varepsilon\cdot\frac{\sin x}{x}-\frac{y_0}{x})>0$

此时，$\varphi(x)$ 与 x 同号。$x\to+\infty$，$\varphi(x)\to+\infty$

$x\to-\infty$，$\varphi(x)\to-\infty$

从而在实轴上有一点 b，使 $\varphi(b)>0$ 　$(a<b)$

上有一点 a，使 $\varphi(a)<0$

而 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由介值定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$

使 $\varphi(\xi)=0$，即 $y_0=\xi-\varepsilon\cdot\sin\xi$.

ξ 是方程 $y_0=x-\varepsilon\cdot\sin x$ 的一个解。

(2) 设 $\xi_1\neq\xi_2$，ξ_1,ξ_2 都是 $y_0=x-\varepsilon\cdot\sin x$ 的一个解.

则 $\xi_1-\varepsilon\sin\xi_1=y_0$ 　　$\xi_1-\xi_2=\varepsilon(\sin\xi_1-\sin\xi_2)$

$\xi_2-\varepsilon\cdot\sin\xi_2=y_0$ 　　$|\xi_1-\xi_2|=\varepsilon|\sin\xi_1-\sin\xi_2|\le\varepsilon|\xi_1-\xi_2|$

$(1-\varepsilon)|\xi_1-\xi_2|\le 0$

而条件 $0<\varepsilon<1$，$1-\varepsilon>0$，$|\xi_1-\xi_2|>0$ 与上式矛盾。

从而 $\xi_1=\xi_2$。即方程的解是唯一的。

P.62.3 设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续，又设 $x_1,x_2\in(a,b)$，$m_1>0$，$m_2>0$

证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\frac{m_1f(x_1)+m_2\cdot f(x_2)}{m_1+m_2}$.

证：作 $\varphi(x)=f(x)-\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}$，则 $\varphi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，

则 $\varphi(x_1)=f(x_1)-\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}=\frac{m_2[f(x_1)-f(x_2)]}{m_1+m_2}$.

$\varphi(x_2)=f(x_2)-\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}=\frac{m_1\cdot[f(x_2)-f(x_1)]}{m_1+m_2}$

如果 $f(x_1)\neq f(x_2)$，由 $m_1>0$，$m_2>0$，从而 $\varphi(x_1)$ 与 $\varphi(x_2)$ 异号，由介值定理得到存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$

使 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}$，$\xi\in(a,b)$.

如果 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $\varphi(\xi)=0\Rightarrow\xi=x_1=x_2$.