第五章　初等超越函数不等式

§1　三角函数不等式

1. **Jordan 不等式**:设 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$,则

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}<1.$$

证　$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上严格递减.于是 $f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}(0<x<\frac{\pi}{2})$;若 $0<x<\frac{\pi}{4}$,则　$f(x)>f(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

注　Jordan 不等式已有许多推广,例如

(1)　设 $0\leqslant x\leqslant\pi/2$,则

$$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x+\frac{x}{12\pi}(\pi^2-4x^2).$$

见[305]1982,89(6):424;1986,93(7):568.

(2)　$x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$;

$$\left|\sin x-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

而且这个差具有$(-1)^n$ 的符号.

提示:利用 Taylor 级数展开式.

(3)　1969 年 Redheffer,R.证明对于所有实数 $x\neq0$,有

$$\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}.$$

见[305]1969,76:422,注意这个不等式与 Jordan 不等式互不包含.

(4)　$\forall x\neq0$,存在常数 $c>0$,使得

$$\frac{cx^2}{1+x^2}<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{6}.$$

(5)　设 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$\cos x<\frac{n\sin x}{x}-\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{kx}{n}<1.$$

(6)　存在常数 $a,b>0$,使得

$$1-\frac{\sin x}{x}\geqslant\begin{cases}a, & |x|>1,\\ bx^2, & |x|\leqslant1.\end{cases}$$

(7) $\sin x \geqslant \begin{cases} \dfrac{x}{1+(x/5)}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 53x/(53+9x^2), & 0 \leqslant x \leqslant 1/3, \\ (3\sqrt{3}/2\pi)x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/3. \end{cases}$

(8) $$\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi - 2x}, \quad (0 < x \leqslant \frac{\pi}{6}).$$

(9) [MCM]. $\dfrac{2\cos x}{1+\cos x} < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{3}{4-\cos x}, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

(10) $$\left|\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right| \leqslant \begin{cases} 1-(2/\pi), 0 < |x| \leqslant \pi/2, \\ \sqrt{2}-(4/\pi), 0 < |x| \leqslant \pi/4 \end{cases}.$$

见[327]1988,53(2):145 - 154.

2[MCU]. 设 $0 < x \leqslant \pi/2$,则

$$(\sin x)^{-2} \leqslant x^{-2} + 1 - 4\pi^{-2}.$$

仅当 $x = \pi/2$ 时等号成立.

证 令 $f(x) = (\sin x)^{-2} - x^{-2}$,则 $f'(x) = -2(\sin x)^{-3}\cos x + 2x^{-3} > 0 \Leftrightarrow$

$$g(x) = \sin x(\cos x)^{-\frac{1}{3}} - x > 0.$$

但 $g''(x) = \dfrac{4}{9}(\cos x)^{-\frac{7}{3}}(\sin x)^3$,所以当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时,$g''(x) > 0$,于是,$g'(x)$ 严格递增,从而 $g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g(x)$ 在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内严格递增,从而 $g(x) > g(0) = 0. \Rightarrow$ $f'(x) > 0$,所以 f 在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内严格递增,于是,$f(x) \leqslant f(\dfrac{\pi}{2}) = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$.

3. (1) 设 $|x| < \dfrac{\pi}{2}, 1 < p \leqslant 2$,则存在正数 c_1, c_2,使得

$|\sin x|^p \leqslant c_1 |\cos x|^p - c_2\cos(px)$.(证明见[45]P.60)

(2) 设 $|x| \leqslant \pi/2$,则

$$|\sin x|^p \leqslant \alpha\cos px + \beta(\cos x)^p.$$

式中 $p > 0$,并且不是奇整数,常数 α、β 只依赖于 p.证明见[57]Vol.1P.255.

4[MCU]. 设 $0 < |x| \leqslant \pi/2$,则

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x.$$

证 1 不妨设 $0 < x < \pi/2$.只要证 $f(x) = (\sin x)^3(\cos x)^{-1} - x^3 \geqslant 0$.
求四阶导数 $f^{(4)}(x)$ 并化简后变成要证 $3(\cos x)^{-5} - (\cos x)^{-3} - 2\cos x \geqslant 0$.

因为 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时,$(\cos x)^{-5} > (\cos x)^{-3} > \cos x$,故不等式即可得证.

证 2 用 Taylor 级数.因为 $x > 0$,所以

$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \dfrac{x^2}{3!}\right)^3 = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{216}$,且 $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!}$,

于是只要证明

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!},$$

即只要证

$$f(x)=\frac{1}{4!}+(-\frac{1}{216}+\frac{1}{720})x^2-\frac{1}{8!}x^4>0,$$

而 f 在 $(0,\infty)$ 内递减，所以 $f(x)>f(2)>0$.

注 上述不等式可推广如下：设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，若 $a\leqslant 3$，则

$$\cos x<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{a},$$

若 $a>3$，则存在依赖于 a 的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，满足

$\cos x_0=\left(\frac{\sin x_0}{x_0}\right)^{a}$，使得当 $0<x<x_0$ 时，$\cos x>\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{a}$，而当 $x_0<x<\pi/2$ 时，不等号反向.

关于这些不等式的证明及进一步推广：

$$(\cos x)^{c}<\frac{(\sin x)^{a}}{x^{b}},(0<x<\frac{\pi}{2}).$$

见[4]P323－326 及后面所附的参考文献.

5. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则在不等式

$$\cos bx\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\cos ax$$

中 a 的最大值为 $a=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}$，$b$ 的最小值为 $b=1/\sqrt{3}$，同时还成立

$$\cos x\leqslant(\cos x)(1-\frac{x^2}{3})^{-1}\leqslant\sqrt[3]{\cos x}\leqslant\cos\frac{x}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\cos ax\leqslant\cos\frac{x}{2}\leqslant 1.$$

注 $\cos x\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$，对于 $0<x\leqslant\pi$ 仍成立.

6. **Gronwall 不等式**：设 $x\in R^1$，

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},g(x)=\frac{1-\cos x}{x},\text{则}$$

(1) $|f^{(n)}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$，仅当 n 为偶数且 $x=0$ 时等号成立.

(2) $|g^{(n)}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$，仅当 n 为奇数且 $x=0$ 时等号成立.

提示：先证明恒等式：

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\sin(t+\frac{n+1}{2}\pi)\mathrm{d}t,\quad g^{(n)}(x)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\sin(t+\frac{n\pi}{2})\mathrm{d}t.$$

见[305]1920，27：81－85.

7. (1) 设 $0<x<\pi$，则 $\sin\frac{x}{2}+\cos x<(\sin x)^{-1}$.

(2) 若 $0\leqslant x\leqslant\pi$，则

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}(\cos x+4-(x^3/3))\\(4-4\cos x-x^2)x^{-2}\end{array}\right\}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}(2+\cos x),\\2(1-\cos x)x^{-2}.\end{array}\right.$$

8. (1) 若 $x \neq 0$,则

$$1-\frac{1}{2}x^2<\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{24},$$

若 $0 \leqslant x \leqslant \pi$,有 $\cos x<1-\frac{2}{\pi^2}x^2$;一般地,有

$$\left|\cos x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

并且这个差具有 $(-1)^{n+1}$ 的符号.

(2) 设 a 为正数,$y \neq 0$,则

$$(a\cos x-y)^2+(a\sin x-b^2/y)^2 \geqslant (\sqrt{2}\,|b|-a)^2.$$

提示:用复数证法.令 $a_1=a(\cos x+i\sin x)$,$z_2=y+i\dfrac{b^2}{y}$.
再利用 $|z_1-z_2| \geqslant |z_2|-|z_1|$.

9. 设 $0<x<\pi/2$,则

(1) $1<\cos^2 x+x\sin x<2$,

(2) $\cos x+x\sin x>1$,

(3) $1<\sin x+\cos x \leqslant \sqrt{2}$.

注 $x>0$ 时,有 $\sin x+\cos x>1+x-x^2$.

(4) $\sin x\,\mathrm{tg}x>2(1-\cos x)$.

(5) [MCM] $\left(|a|+\dfrac{|b|}{\sin x}\right)\left(|b|+\dfrac{|a|}{\cos x}\right) \geqslant |a|^2+|b|^2+3|ab|$.

(6) 设 $0<p<1$,$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,$a,b>0$,则

$$a(\sin x)^{2/q}+b(\cos x)^{2/q} \geqslant (a^p+b^p)^{1/p},$$

仅当 $x=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{p/2}$ 时等号成立.

10. $-4 \leqslant \cos 2x+3\sin x \leqslant 17/8$,$(x \in R^1)$.

11. 设 $0<x<y<\pi/2$,则

(1) $\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}y}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{\sin x}{\sin y}<\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

(2) $1-\left(\dfrac{\sin x}{\sin y}\right)^2<1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2<(\sec^2 x)\left[1-\left(\dfrac{\sin x}{\sin y}\right)^2\right]$.

12. [MCM].设 $0 \leqslant a \leqslant 1$,$0 \leqslant x \leqslant \pi$,则

$$(2a-1)\sin x+(1-a)\sin(1-a)x \geqslant 0. \tag{1.1}$$

证 若 $a=0,1$ 及 $x=0,\pi$,(1.1) 式显然成立.因此不妨设 $0<a<1$,$0<x<\pi$,而(1.1) 式可改写成

$$(1-2a)\sin x \leqslant (1-a)\sin(1-a)x.$$

此式很难用初等方法化简,可适当放大:

$$(1-2a)\sin x \leqslant (1-2a+a^2)\sin x=(1-a)^2\sin x.$$

问题变成要证

$$\frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{\sin(1-a)x}{(1-a)x}.$$

因为$(1-a)x < x$,所以,只要证 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在$(0,\pi)$内递减.

13. $|(1+\cos x)\sin x| \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

14. $\sqrt{3}|\sin x| \leqslant 2+\cos x$.

15. $|\sin x + (2/\sin x)| \geqslant 3$.

提示:令 $f(x) = \sin x + (2/\sin x)$,因为 $|f(x)|$ 为偶函数,所以可考虑 $0 < x < \pi$,再令 $t = \sin x$,然后考虑 $g(t) = t + (2/t)$ 的单调性.

16. [MCU]. $x > 0$ 时,$x^2 + \pi x + (15/2)\pi\sin x > 0$,(1988 年莫斯科大学入学试题).

17. [MCM].若对于已知数 a,b,不等式 $a\cos x + b\cos 3x > 1$ 无解,则 $|b| \leqslant 1$.

18. $[\cos(a+x) + \beta\cos x]^2 \leqslant 1 + 2\beta\cos\alpha + \beta^2$.

提示:左边减去右边得到 $-[\beta\sin x + \sin(a+x)]^2$

19. $|\cos x| + |\cos 2x| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,仅当 $|\cos x| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,即 $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$ 时等号成立.

提示:令 $t = |\cos x|$,求 $f(t) = t + |2t^2 - 1|$ 的极值.

20. $(x+1)\cos\dfrac{\pi}{x+1} - x\cos\dfrac{\pi}{x} > 1 \quad (x \geqslant \sqrt{3})$.

提示:$f(t) = \cos t$ 在原点附近作 Taylor 级数展开,变成要证

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{1}{x^{2k-1}} - \frac{1}{(x+1)^{2k-1}}\right) > 0.$$

这只要证 $f_k(x) = x^{-(2k-1)} - x^{-(2k+1)}$ 当 $x \geqslant \sqrt{3}$ 时递减.

21. 若 $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi$,则 $\cos x + \cos y \leqslant 1 + \cos xy$.

证 由于 $\cos a = \cos(-a)$,所以不妨设 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$0 \leqslant xy \leqslant y \leqslant \sqrt{\pi} < \pi$,$\cos y \leqslant \cos xy$,从而 $\cos x + \cos y \leqslant 1 + \cos xy$;

当 $x > 1, y > 1$ 时,用反证法,即设

$$\cos x + \cos y > 1 + \cos xy, \tag{1.2}$$

由于 $0 \leqslant xy \leqslant (x^2+y^2)/2 \leqslant \pi/2$,故 $\cos(xy) \geqslant 0$.从而 $\cos x + \cos y > 1$,即 $\cos x > 1 - \cos y > 1 - \cos 1 > 0.45$,所以,$x < \arccos 0.45 < 1.2$.同理可证 $y < 1.2$.于是 $xy < 1.44$.从而 $1 + \cos xy > 1 + \cos 1.44 > 1.13 > 2\cos 1 > \cos x + \cos y$.这与(1.2)矛盾,证毕.

22. [MCU].设 α,β 为实数,且 $\cos\alpha \neq \cos\beta$,则对于所有 $n > 1$,有

$$\left|\frac{\cos n\beta\cos\alpha - \cos n\alpha\cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\right| < n^2 - 1.$$

提示:令 $x = \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$,$y = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$,则不等式左边可化为

$$\left|\frac{\sin(n-1)x\sin(n+1)y + \sin(n+1)x\sin(n-1)y}{2\sin x\sin y}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\sin(n-1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(n+1)y}{\sin y}\right|+\left|\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(n-1)y}{\sin y}\right|\right\},$$

再利用 $|\sin x| \leqslant n|\sin x|$.

23. 设 α,β 为实数，m,n 为自然数，则

$$\left|\frac{\cos m\alpha\cos n\beta-\cos m\beta\cos n\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}\right|\leqslant|m^2-n^2|.$$

特别，取 $m=0$，即得 **Goodman 不等式**：

$$\left|\frac{\cos n\alpha-\cos n\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}\right|\leqslant n^2.$$

24. 设 $0<|x|<\pi$，$|\alpha-\beta|<\frac{1}{2}$，则

$$\left|\frac{\sin\alpha x}{2\sin(x/2)}-\frac{\sin\beta x}{x}\right|<1.$$

25. 设$\frac{\pi}{m}\leqslant x\leqslant\pi-\frac{\pi}{n}$，$n\geqslant 3$，则

$$\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{2n}\sin nx>0.$$

26.(1) 若 $x\geqslant 1$，则

$$\sin\frac{1}{x-1}-2\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x+1}>0.$$

(2) 设 $x>0$，则

$$x^2+\pi x+\frac{15}{2}\pi\sin x>0.$$

提示：利用 $f(x)=\sin(1/x)$ 在$[1,\infty)$上的凸性，从而可用 Jensen 不等式.

27. 设 $0<x<\sqrt{\pi/2}$，则 $(\sin x)^2<\sin x^2$.

28. 设 $0<x\leqslant 1$，则 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{\sin(x^2)}{x^2}$.

提示：左边不等式从 $0<\sin x/x<1$ 两边乘 $\sin x/x$ 得到，右边不等式利用 $f(x)=(\sin x)/x$ 的递减性，从 $x^2<x$ 得出 $f(x)\leqslant f(x^2)$.

29. 对于所有实数 x，有 $(\cos x)^2\geqslant 1-x^2$.

30. 设 $|x|<\sqrt{2n}$，则 $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n>1-\frac{x^2}{2n-x^2}$.

31. 设当 $0\leqslant\alpha\leqslant 2^n x$ 时 $\cos\alpha>0$，则 $\cos(2^{n+1}x)<2^n(\cos x-1)+1$.

32. [MCM] 对所有实数 x,y，有 $\cos(x+y)+2(\cos x+\cos y)+3\geqslant 0$.

提示：令 $\alpha=(x+y)/2$，$\beta=(x-y)/2$，不等式左边 $=[(1+\cos\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2](1-\cos\beta)$.

33. 设 $0<x<\pi/2$，则 $\sqrt{\cos x}<\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$.

34. **Kober 不等式**：若 $0<x<\pi/2$，则

$$1-\frac{2}{\pi}x<\cos x<1-\frac{x^2}{\pi}.$$

若 $\pi/2 < x < \pi$,则左边不等号反向.见[309]1944,56:22.

35.　[MCM].设 $f(x) = (1 + r^2 + 2r\cos x)^{p/2} + (1 + r^2 - 2r\cos x)^{p/2}$.则当 $r > 0$, $p \geqslant 2$ 时成立 $f(x) \leqslant f(0)$.见[345]1987,1:35.

36.　$5 + 8\cos x + 4\cos 2x + \cos 3x \geqslant 0$.

提示:左边可配方得 $(1 + \cos x)(1 + 2\cos x)^2$.

37.　$3 + 4\cos x + \cos 2x \geqslant 0$.

提示:除了求 $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ 的极值外,还可用复数的指数形式证明.

38.　[MCM].设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,则

$[1 + (\sin x)^{-1}][1 + (\cos x)^{-1}] \geqslant 3 + 2\sqrt{2} > 5$.仅当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

提示:只要证 $(\sin x)^{-1} + (\cos x)^{-1} \geqslant 2\sqrt{2}$.[38]P.1364.

39.
$$[(\sin x)^{-4} - 1][(\cos x)^{-4} - 1] \geqslant 9.$$

40.　[MCM].若 $0 < x < \pi/2$,则
$$\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x).$$

证　因为 $0 < x < \pi/2$,所以,$0 < \sin x < x < \pi/2$,又 $\cos x$ 在 $(0, \pi/2)$ 上递减,所以,

$\cos x < \cos(\sin x)$.而由　$0 < \cos x < 1$,又得 $\sin(\cos x) < \cos x$.

41.　对于所有实数 x,有

(1)　$1 - (x^2/2) < \sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

(2)　$2\sin^2(\pi/4 - (\sqrt{2}/2)) \leqslant \cos(\sin x) - \sin(\cos x) \leqslant 2\sin^2(\pi/4 + (\sqrt{2}/2))$.

(3)　$\cos(\cos x) > 0$.

(4)　对于任意实数 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$,有 $\sin(\prod \sin x_k) < \cos(\prod \cos x_k)$ 见"数学教学"1990,3:38.

42.　[MCM].$|\sin nx| \leqslant n|\sin x| \leqslant n|x|$,
左边不等式仅当 $n = 1$ 或 $\sin x = 0$ 时等号成立.

提示:左边不等式可用数学归纳法证明.而 $|\sin x| \leqslant |x|$ 对所有实数 x 均成立.

注　当 n 不是自然数时,左边不等式不一定成立.例如,$n = 1/2, x = \pi$ 时,有
$$|\sin(1/2)\pi| > (1/2)|\sin\pi|.$$

43.　若 $0 < x < 1, x \neq \frac{1}{2}$,则　$\pi < \frac{\sin \pi x}{x(1-x)} < 4$.

44.　设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

若 $a > 1, 0 < \lambda < \ln a$, n_0 满足 $a^{n_0} > \frac{1}{2(\ln a - \lambda)}$,整数 m_k 满足 $m_k - \frac{1}{2} \leqslant a^k < m_k + \frac{1}{2}$　$(k > n_0)$,则

$$|f(a^n - m_k)| < \begin{cases} \frac{1}{\pi}(a^k \ln a - \frac{1}{2})^{-1}, (n > k), \\ \frac{1}{\pi\lambda a^n}. \qquad (n_0 \leqslant n < k) \end{cases}$$ （证明见[73]P.510 - 513）

45. 若 $0 < \alpha < \pi/2, 0 < \beta < \pi/2$，则

(1) [MCM] $(\cos\alpha)^{-2} + (\sin\alpha\sin\beta\cos\beta)^{-2} \geqslant 9$.

仅当 $\beta = \pi/4, \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$ 时等号成立.

证 不等式左边 $= (\cos\alpha)^{-2} + 4(\sin\alpha\sin2\beta)^{-2} \geqslant (\cos\alpha)^{-2} + 4(\sin\alpha)^{-2} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + 4(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) = 5 + \operatorname{tg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg}^2\alpha = 5 + 2(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}) \geqslant 5 + 2\times2\times\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\alpha} = 5 + 4 = 9$.

上式可推广为：设 $0 < a_k < \pi/2, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$(\cos\alpha_1)^{-2} + \left[(\sin\alpha_1)\prod_{k=2}^{n}\sin\alpha_k\cos\alpha_k\right]^{-2} \geqslant (2n-1)^2.$$

(2) $\frac{(\sin\alpha)^{p+2}}{(\sin\beta)^p} + \frac{(\cos\alpha)^{p+2}}{(\cos\beta)^p} \geqslant 1$，仅当 $\alpha = \beta$ 时等号成立，式中 $p > 0$.

(3) $\sin^3\alpha + (\cos\alpha\cos\beta)^3 + (\cos\alpha\sin\beta)^3 \geqslant \sqrt{3}/3$,

$\cos^3\alpha + (\sin\alpha\sin\beta)^3 + (\sin\alpha\cos\beta)^3 \geqslant \sqrt{3}/3$.

(4) [MCM]. $\cos(\alpha+\beta) < \cos\alpha + \cos\beta$;　　$\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

实际上这两个不等式对所有实数 α, β 均成立. 而当 α, β 为非负数且 $\alpha + \beta \leqslant 2\pi$ 时，则有

$$0 \leqslant \sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) \leqslant \sqrt{3}/2.$$

(5) $\frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1} < \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} < \frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}$.

证 左边不等式可从 $\cos\alpha - 1 < \cos\alpha - \cos\beta, \cos\alpha + 1 > \cos\alpha + \cos\beta > 0$ 推出，而右边不等式可利用 $\cos\alpha - 1 < 1 - \cos\alpha$ 和 $\cos\beta > 0 \Rightarrow (\cos\alpha - 1)\cos\beta < (1 - \cos\alpha)\cos\beta$. 两边各加上 $\cos\alpha - \cos^2\beta$ 即可得证.

46. 设 $0 < x < \pi/4$，则

$$\frac{\cos x}{8\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 1.$$

提示：左边可化为　$(1/8)[\operatorname{tg}x + (\operatorname{tg}x)^{-1}]\cdot[\operatorname{tg}x(1 - \operatorname{tg}x)]^{-1}$，
再对这两个因式分别用几何 - 算术平均不等式.

47. 设 $0 < \alpha < \pi/2, 0 < \beta < \pi$，则　$\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2} < \sin(\frac{\beta}{2}\cos\alpha)$.

提示：利用 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内严格递减.

48. 设 $|x| \leqslant \pi$，则

$$-1 \leqslant \sin x + \cos x + \sin x\cos x \leqslant \frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{2}).$$

49. [MCM]. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1$.

证 将以下三个不等式：$\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant 2\sin\alpha\sin\beta, \sin^2\alpha + 1 \geqslant 2\sin\alpha, \sin^2\beta + 1 \geqslant$

$2\sin\beta$,相加即可得证.

50. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant 2(\sin\alpha + \sin\beta - 1)$.

提示:左边减去右边得 $(\sin\alpha - 1)^2 + (\sin\beta - 1)^2 \geqslant 0$.

51. $\cos2\alpha + \cos2\beta \leqslant \cos^2\alpha + \cos^2\beta < 3 + \cos(\alpha\beta)$.

提示:$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - (\cos2\alpha + \cos2\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant 0$
第二个不等式可用反证法.

52. $\cos\alpha\cos\beta \leqslant 1 + \sin\alpha\sin\beta$.

53. [MCM].若 $0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 < p < 1$,则 $p\cos x \leqslant \cos(px)$.

54. $\sin x + \sin y + \sin(x+y) \leqslant 3\sqrt{3}/2$.
仅当 $\sin x = \sin y = \sin(x+y) = \sqrt{3}/2$ 时等号成立.

55. (1) 设 $f(x) = \dfrac{6\cos x + \sin x - 5}{2\cos x - 3\sin x - 5}$,则 $-\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 3$.

证 作万能代换 $t = \operatorname{tg}(x/2)$,则 $y = f(x)$ 化为代数方程

$$y = g(t) = (11t^2 - 2t - 1)/(7t^2 + 6t + 3),$$

即 $(7y - 11)t^2 + 2(3y+1)t + (3y+1) = 0$.
因为 t 为实数,所以判别式 $\Delta \geqslant 0$,解之得 $-1/3 \leqslant y \leqslant 3$.

类似地,可以证明以下常见的不等式:

(2) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3} \leqslant \dfrac{2-\sin x}{2-\cos x} \leqslant \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.

(3) $\dfrac{1+a}{1-a} \leqslant \dfrac{\cos x + a}{\cos x - a} < \dfrac{1-a}{1+a}, (a > 0)$.

(4) $\dfrac{b-a}{b+a} \leqslant \dfrac{b + a\sin\theta}{b - a\sin\theta} < \dfrac{b+a}{b-a}, (0 < a < b)$.

(5) $0 \leqslant \dfrac{1+\sin x}{2-\cos x} \leqslant \dfrac{4}{3}$.

(6) $f(x) = \dfrac{a\cos x + b\sin x + c}{p\cos x + q\sin x + r}$ 等可作类似讨论.

56. 设 $x, y > 0, x + y \leqslant \pi, 0 \leqslant a \leqslant 1$,则

$$\cos^2 ax + \cos^2 ay - 2\cos ax\cos ay\cos a\pi \geqslant \sin^2 a\pi.$$

注 此不等式杨乐、华罗庚等给出了不同的证明.

57. 设 $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y) - 4\sin x + \sin(x-y)}{\cos(x+y) - 4\cos x + \cos(x-y)}, 0 < x < \dfrac{\pi}{4}$.
则对于任何实数 y,有 $0 < f(x,y) < 1$.

提示:运用三角恒等变换,得 $f(x,y) = \operatorname{tg}x$.

58. 设 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, 0 < x \leqslant \pi/3, f(x,\alpha) = 1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2$,则

(1) $\sin^2 x \leqslant f(x,\alpha) \leqslant 1$.

(2) $\dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{f(x,\alpha)}{2(1-\cos x)} \leqslant (\sin x)^{-2}$.

59. 设 $0 \leqslant x < 1$,则

$\dfrac{(1+x^2)\cos\alpha - 2x}{1-x^2} \leqslant \dfrac{(1-x^2)\cos\alpha + 2x\sin\alpha\sin\beta}{1 - 2x\cos\beta + x^2}$.(见[308]1965,16:847-852)

60.　设 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,令 $f(x,\alpha)=\frac{x(1+\alpha\cos x)}{\sin x}$,则

$$\alpha+1\leqslant f(x,\alpha)\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

61.　(1)　设 $0\leqslant x\leqslant\pi/4,0\leqslant y\leqslant\pi/4$,则

$$0\leqslant\sin x+\sin y+\cos(x+y)\leqslant 3/2.$$

仅当 $x=y=\pi/6$ 时等号成立.

(2)　设 $x,y>0,x+y<\pi,\alpha\in R^1$,则 $\sin x\sin y\sin(x+y)\leqslant 3\sqrt{3}/8$;

$$\alpha(\alpha-1)\sin(x+y)+\alpha[(\sin x)^2-\sin y]+\sin y>0.$$

(3)　设 $x_k=\frac{2k-1}{2n}\pi,1\leqslant k\leqslant n.0<x<\pi$,则

$$\left|\frac{\cos nx}{\cos x-\cos x_k}\right|\sin x_k\leqslant 2n.\text{(Fejer. 1916)}$$

提示:因为 $\cos x_k=0$,所以,$|\cos nx|=|\cos nx-\cos nx_k|\leqslant 2\left|\sin\frac{n(x_k-x)}{2}\right|$,再利用 $|\cos x-\cos x_k|=2\left|\sin\frac{x_k+x}{2}\sin\frac{x_k-x}{2}\right|$ 和 $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$ 即可得证.

62.　[IMO].设 $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x\geqslant 0$,则

$$a^2+b^2\leqslant 2,A^2+B^2\leqslant 1.$$

证 1　令 $r=\sqrt{a^2+b^2},R=\sqrt{A^2+B^2}$,

$$\cos\alpha=\frac{a}{r},\sin\alpha=\frac{b}{r},\cos 2\beta=\frac{A}{R},\sin 2\beta=\frac{B}{R},\text{则}$$

$$f(x)=1-r\cos(x-a)-R\cos 2(x-\beta).$$

考虑　$f(a+(\pi/4))$ 和 $f(\alpha-(\pi/4))$　可证　$a^2+b^2\leqslant 2$;考虑　$f(\beta+\pi)$ 和 $f(\beta)$ 可证　$A^2+B^2\leqslant 1$.

证 2　用反证法:设 $a^2+b^2>2$,取一个特殊的 x_0,使 $f(x_0)<0$,这只要当 $\sin 2(\alpha-\beta)\geqslant 0$ 时,取 $x_0=\alpha-(\pi/4)$ 而当 $\sin 2(\alpha-\beta)<0$ 时,取 $x_0=\alpha+(\pi/4)$.同理,设 $A^2+B^2>1$,取 $x_0=\beta$ 或 $\pi+\beta$ 使 $f(x_0)<0$.这些都与假设矛盾.

63.　设 $f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$,则

$$\frac{1}{2}(a+c)-\sqrt{b^2+(\frac{a-c}{2})^2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(a+c)+\sqrt{b^2+(\frac{a-c}{2})^2}.$$

记 $\cos\beta=\frac{a-c}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}$, $\sin\beta=\frac{2b}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}$,

则仅当 $2x=\beta$ 时.右边的等号成立,而仅当 $2x=\beta+\pi$ 时,左边的等号成立(除去 $b=0$, $a=c$ 的情形).

提示:将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=\frac{1}{2}(a+c)+b\sin 2x+\frac{1}{2}(a-c)\cos 2x$.

64.　**Makouski 不等式:**若 x,y,α 为实数,$c>0$,则

$$(x-y)^2\sin\alpha+(x+y)^2\cos\alpha\leqslant(1+c|\cos 2\alpha|)x^2+(1+\frac{1}{c}|\cos 2\alpha|)y^2$$

$\leqslant (1+c)x^2+(1+c^{-1})y^2.$

65.　$|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$, $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$.

66.　设 $0\leqslant x,y\leqslant\pi$,则 $|\cos x-\cos y|\geqslant|x-y|\sqrt{\sin x\sin y}$.

67.　(1)　设 $a,b,c>0$ 且 $a\cos^2x+b\sin^2x<c$,则$\sqrt{a}\cos^2x+\sqrt{b}\sin^2x<\sqrt{c}$.

(2)　$|a\cos\beta+b\sin\beta x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

68.　$0<(\sin x)^8+(\cos x)^{14}\leqslant 1$.

69.　$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant(\sin x)^3+(\cos x)^3\leqslant 1$,　$(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$.

提示:令 $t=\sin x+\cos x$,则 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

$$f(x)=(\sin x)^3+(\cos x)^3=t[1-\frac{1}{2}(t^2-1)]=g(t),$$

求 $g(t)$ 在$[1,\sqrt{2}]$上的最大最小值,

70.　$2^{1-n}\leqslant(\sin x)^{2n}+(\cos x)^{2n}\leqslant 1$, $n\in N$.

提示:用数学归纳法证明.

71.　当 x 为锐角,$n>2$ 时,有$(\sin x)^n+(\cos x)^n<1$.

72.　$(\sin x\cos x)^4\leqslant(\sin x)^{10}+(\cos x)^{10}$.

73.　设 $0\leqslant x_k\leqslant\pi(1\leqslant k\leqslant n)$ 且 $\sum x_k=\pi$,则

$$\sum(\sin x_k)^2\leqslant\begin{cases}0, & n=1,\\ 2, & n=2,\\ 9/4, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

提示:令 $y_k=2x_k$,则 $\sum y_k=2\pi$,$0\leqslant y_k\leqslant 2\pi$,问题转化为求$(n-\sum\cos y_k)/2$ 的最大值.当 $n\geqslant 4$ 时,由条件知,不妨设 $y_1+y_2\leqslant\pi$,于是,

$$\cos y_1+\cos y_2=2\cos\frac{y_2+y_2}{2}\cos\frac{y_1-y_2}{2}$$

$$\geqslant 2\left[\cos\frac{y_1+y_2}{2}\right]^2=\cos 0+\cos(y_1+y_2).$$

于是总可设 $y_1=0$,由逐步调整原理,转化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中至多只有三个不为零.

74.　$(\sin x)^m(\cos x)^n\leqslant\frac{1}{2}$.

提示:利用几何一算术平均不等式.

75.　设 $p>0,q>0,0<x\leqslant\pi/2$,则

$$0\leqslant(\sin x)^p(\cos x)^q\leqslant\left(\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}\right)^{1/2}.$$

提示:令 $\alpha=\frac{p}{p+q}$,$\beta=\frac{q}{p+q}$,则 $\alpha+\beta=1.0<\alpha,\beta<1$,利用 $f(x)=\ln x$ 在$(0,\infty)$内的凸性,令 $x_1=\frac{1}{p}\sin^2x$,$x_2=\frac{1}{q}\cos^2x$,代入 Jensen 不等式:$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)\leqslant f(\alpha x_1+\beta x_2)$.即可得证.不等式右边的等号仅当 $x_1=x_2$ 时成立.

76.　[MCM].设 x,y 为正数.α 为实数,则

$$x^{(\sin\alpha)^2}y^{(\cos\alpha)^2} < x + y.$$

77. 设 $0 < A,B,C < \frac{\pi}{2}$,则

(1) [MCM].若 $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 1$,则

$$\frac{\pi}{2} < A + B + C \leqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \frac{3\pi}{4}.\text{(见[38]P.1360)}$$

(2) 若 $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1$,则 $\frac{3\pi}{4} < A + B + C < \pi$.

提示:为证(1),可作一长方体,利用三面角中两个面角之和大于第三个面角.(2)的证明与(1)类似,见[350]1983,2:30 - 31.

78. [MCM].设 $0 < x < \pi/2$,则

$$(2n + 1)(\sin x)^n(1 - \sin x) < 1 - (\sin x)^{2n+1}.$$

提示:因为 $0 < \sin x < 1$,所以,当 $k \leqslant n$ 时,有 $(\sin x)^{2n-k} + (\sin x)^k > 2(\sin x)^n$,依次令 $k = 0,1,\cdots,n - 1$,然后相加即得.

79. 设 $0 < \alpha_k < \pi, k = 1,\cdots,n$,则

(1) $|\sin(\sum\alpha_k)| < \sum\sin\alpha_k \leqslant n\sin(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(2) $\sum\cos\alpha_k \leqslant n\cos(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(3) [MCM].$(\prod\sin\alpha_k)^{1/n} \leqslant \sin(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(4) $(\prod\cos\alpha_k)^{1/n} \leqslant \cos(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)$.

(5) [MCU] $\left(\prod(\frac{\sin\alpha_k}{\alpha_k})\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{\sin(\frac{1}{n}\sum\alpha_k)}{\frac{1}{n}(\sum\alpha_k)}$

以上均仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

提示:用数学归纳法或用凸函数 Jensen 不等式.例如为证(5),可考虑 $g(x) = \ln\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上的凸性,也可用逐步调整法.

注 $\alpha_k = \frac{1}{k}$ 时,有 $\prod_{k=2}^{n}\cos\frac{1}{k} > \frac{2}{3}$.

80. 设 $0 < x < \pi/2$,则 $(\sin x)^{1-\cos 2x} + (\cos x)^{1+\cos 2x} \geqslant \sqrt{2}$.

提示:考虑 $f(x) = x^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的凸性,有

$$(\sin^2x)^{\sin^2x} + (\cos^2x)^{\cos^2x} \geqslant 2A^A,\text{式中 } A = \frac{\sin^2x + \cos^2x}{2}.$$

81. 若 $0 < x < \pi/4$,则

$$(\sin x)^{\cos x} < (\cos x)^{\sin x}.$$

当 $\pi/4 < x < \pi/2$ 时,不等号反向.

提示:$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增.

82. $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}, (0 < x < \frac{\pi}{4})$

见[305]1992,9:873.

83. 设 $0 < x < \pi/4$,则 $\sin x < \cos x < \operatorname{ctg} x$

84. 当 $0 < x < \pi/4$,有

$$\sin x + \cos x < \operatorname{tg} x + \cos x < \operatorname{ctg} x + \sin x < \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x;$$

而当 $\pi/4 < x < \pi/2$ 时,有

$$\sin x + \cos x < \operatorname{ctg} x + \sin x < \operatorname{tg} x + \cos x < \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

85. [MCM].设非负数 α,β,γ 之和为 $\pi/2$,则

$$1 \leqslant \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leqslant 3(\sqrt{3} - 1)/2.$$

提示:利用 $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha + (\pi/4))$,将中间表达式化为

$$\sqrt{2}[\cos(\alpha + (\pi/4)) + 2\sin(\alpha/2)\cos((\beta - \gamma)/2)].$$

或者由于 α,β,γ 的对称性,用局部固定法求中间表达式的极值,将中间表达式记为 y.则

$$y = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}(\cos\frac{\alpha + \beta}{2} - \sin\frac{\alpha + \beta}{2}) + \cos\gamma - \sin\gamma.$$

从 $0 \leqslant (\alpha + \beta)/2 \leqslant \pi/4$ 知

$$\cos\frac{\alpha + \beta}{2} - \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \geqslant 0.$$

所以固定 γ,当 $\alpha = \beta$ 时 $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = 1$,$y$ 有最大值,由 α,β,γ 的对称性,当 $\alpha = \beta = \gamma = \pi/6$ 时,y 有最大值 $3(\sqrt{3} - 1)/2$.同理可证 $y \geqslant 1$.

86. $2\sqrt{3} \leqslant 3^{\sin 2x} + 3^{\cos 2x} < 4, \quad 0 < x < \pi/2.$

87. [MCM]. $|\sin x| + |\sin(x + 1)| + |\sin(x + 2)| > 8/5.$

从而可以证明

$$\sum_{k=1}^{3n} |\sin k| > 8n/5.$$

88. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)^2 < 3x.(x > 0).$

证 $\forall x > 0$,取 n 满足 $n - 1 < \frac{1}{x} \leqslant n$. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} = I_1 + I_2$,

利用 $|\sin x| \leqslant |x|$,得到

$$I_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kx}{k}\right)^2 = (n - 1)x^2 < x; \quad I_2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \frac{2}{n} \leqslant 2x.$$

89. 若 $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$,则对于 $0 < x < \pi$,及所有实数 α,β,有

$$-b_0\sin^2(\beta - \frac{\alpha}{2})\frac{x}{2} \leqslant (\sin\frac{\beta}{2}x)\sum_{k=0}^{n} b_k\sin(k\alpha + \beta)x \leqslant b_0\cos^2(\beta - \frac{\alpha}{2})\frac{x}{2}.$$

90. $\sum_{j<k}\cos(a_j - a_k) \geqslant -\frac{n}{2}.$

实际上,我们可以证明更一般的不等式:设 $a_k, x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 都是任意实数,则

(1) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(a_k-a_j)\geqslant 0$,

(2) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_kx_j\cos(a_k-a_j)=(\sum x_k\cos a_k)^2+(\sum x_k\sin a_k)^2\geqslant 0$.

91. [MCU].(1) 设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,则

$$\prod_{k=0}^{n}(\sin 2^k x)^2\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

提示:用归纳法证明

$f(x)=|(\sin x)^2(\prod_{k=1}^{n-1}\sin 2^k x)^3\sin(2^k x)|$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处有极大值.[66]P432.

92. (1) 设 $\alpha(k)=(2/3)[1-(-1/2)^k]$,$\beta(k)=1-\alpha(k)/2$,$g(x)=\sin x(\sin 2x)^{1/2}$,

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n-1}[g(2^{k-1}x)]^{\alpha(k)}[\sin(2^n x)]^{\beta(k)}. \tag{1.3}$$

则
$$|f(x)|\leqslant(2/\sqrt{3})f(\pi/3). \tag{1.4}$$

由此推出,当(1.3)式中 $f(x)$ 换成 $f(x)=\prod_{k=0}^{n}\sin(2^k x)$ 时,(1.4)式仍成立.

(2) 设 $x_k,y_k\in[0,\frac{1}{2}]$,则

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\sin x_k-\prod_{k=1}^{n}\sin y_k\right|\leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n;\ \left|\prod_{k=1}^{n}\cos x_k-\prod_{k=1}^{n}\cos y_k\right|\leqslant 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

见[345]1993.12:49.

(3) 设 $x,y,z\in R^1$,则

$$(\sin x)^2\cos y+(\sin y)^2\cos z+(\sin z)^2\cos x<\frac{3}{2}.$$

(1993年全俄19届数学竞赛试题).陈计将上界改进为$\frac{5}{4}$,仅当$(\cos x,\cos y,\cos z)=(1,0,\frac{1}{2})$,或$(0,\frac{1}{2},1)$,或$(\frac{1}{2},1,0)$时等号成立,并推广为:$\forall x_k\in R^1.n\geqslant 2$,成立

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin x_k)^2\cos x_{k+1}\leqslant\frac{n}{2}.$$

式中 $x_{n+1}=x_1$,且当 n 为奇数时不等号是严格的.见[345]1995,9:28-29.

(4) 设 $x,y\geqslant 0,x+y=\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. $f(x,y)=(\sin x)^2+(\sin y)^2+2C\sin x\sin y$.则当 $C\geqslant\cos\alpha$ 时,

$$(\sin\alpha)^2\leqslant f(x,y)\leqslant(1+C)(1-\cos\alpha).$$

而当 $C<\cos\alpha$ 时,以上不等号全部反向.

提示:$f(x,y)$ 的表达式可变形为

$f(x,y)=(\sin\alpha)^2+2(C-\cos\alpha)\sin x\sin y=(\sin\alpha)^2+(C-\cos\alpha)[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$.见[371]1992,65(5):349,354.

93. 设 $0<\beta-\alpha<\pi$,则

$$\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} |1+a\cos x+b\sin x| \geqslant (\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4})^2.$$

94. [MCM].若 $0<x<\pi/6$,则 $\sum_{k=1}^{n}(\sin x)^{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{tg}x)^{2k}<\frac{7}{6}$.

95. 设 $0<x_1<\cdots<x_n<\pi/2$,则

$$\operatorname{tg}x_1<\frac{\sum\sin x_k}{\sum\cos x_k}<\operatorname{tg}x_n.$$

提示:利用在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $\sin x$ 严格递增和 $\cos x$ 严格递减,有

$n\sin x_1<\sum\sin x_k<n\sin x_n$; $n\cos x_1>\sum\cos x_k>n\cos x_n$.

96. 若 $\prod_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\alpha_k=1$,则 $\prod_{k=1}^{n}\sin\alpha_k\leqslant 2^{-n/2}$,

仅当 $\alpha_k=\frac{\pi}{4}\quad(k=1,\cdots,n)$ 时等号成立.

证 从假设,$\prod\sin\alpha_k=\prod\cos\alpha_k$. 所以,$\left(\prod\sin\alpha_k\right)^2=\prod(\sin\alpha_k\cos\alpha_k)=2^{-n}(\prod\sin2\alpha_k)\leqslant 2^{-n}$.

97. 设 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi/2$,则

(1) $\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\geqslant 6$.

提示:不等式左边 $=(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha})+(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha})+(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta})\geqslant 3\times2=6$.

(2) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

(3) 若加上条件 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,则

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma>\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha).$$

见[345]1989,6:32.

98. 若 $0<\alpha_k\leqslant\pi/2,1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant3$,且 $\sum_{k=1}^{n}\cos^2\alpha_k=1$,则

$$\sum\operatorname{tg}\alpha_k\geqslant(n-1)\sum\operatorname{ctg}\alpha_k.$$ 见[305]1982,89:601.

99. [MCM].设 $0<x<\pi$,则 $2\sin 2x\leqslant\operatorname{ctg}(x/2)$.

仅当 $x=\pi/3$ 时等号成立.

100. **Djokovic 不等式**:设 $0<x<\pi/6$,则

$$x+\frac{1}{3}x^3<\operatorname{tg}x<x+\frac{4}{9}x^3.$$

注 左边的不等式对于 $0<x<\pi/2$ 也成立,而右边的不等式可推广为:若 $0<x<\alpha<\pi/2$,则 $\operatorname{tg}x<x+f(\alpha)x^3$,式中 $f(\alpha)$ 的最佳值为 $f(\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{\alpha^3}$.特别,当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,$f(\alpha)<\frac{4}{9}$.

101. 设 $0<x<1$,则

$$x < \operatorname{tg}x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

102.　**Becker-Stark 不等式**：设 $0 < x < 1$，则

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{x}{1-x^2} < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{1-x^2}.$$（证明见[8]P.171）

103.　设 $0 < x < \pi$，则

(1)　[MCM]. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}x$，仅当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时等号成立.

提示：$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - (1 + \operatorname{ctg}x) = \frac{1}{\sin x} - 1 \geqslant 0$.

(2)　$\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg}x > n$.

注　利用电子计算机每隔 1° 求函数

$f(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{4} - \operatorname{ctg}x = \frac{1}{\sin(x/2)} + \frac{1}{\sin x}$ 的值，得到 $f(x) \geqslant 2.2845514 = f(111^\circ)$.（见[345]1991,7:44－47,50）

(3)　设 $f(x) = \operatorname{ctg}x - \frac{1}{x}$，则 $f^{(k)}(x) < 0, k = 0,1,2,\cdots$.

提示：利用 $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi + x} - \frac{1}{k\pi - x}\right)$，$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right]$.

详细证明见[305]1989,96(7):576－589.

104.　设 $0 < x < \pi/2$，则

(1)　**Huygens 不等式**：$\operatorname{tg}x + 2\sin x > 3x$，　$\operatorname{tg}x + \sin x > 2x$；

(2)　$\log_{\cos x}\sin x > \log_{\cos x}\operatorname{tg}x$；

(3)　$\ln\sec x < \frac{1}{2}\sin x\operatorname{tg}x$；

(4)　$\operatorname{ctg}^2 x < x^{-2} < 1 + \operatorname{ctg}^2 x$；

(5)　**Wilker 不等式**：

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg}x}{x} > 2;\quad c_1x^3\operatorname{tg}x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg}x}{x} - 2 < c_2x^3\operatorname{tg}x.$$

式中 $c_1 = 0.164, c_2 = 0.178$. 见[305]1989,96(1):55;1991,98(3). 我们问：c_1, c_2 的最优值是什么？

(6)　$2\operatorname{tg}(x/2) \leqslant \cos 2x$. 仅当 $x = x/3$ 时等号成立.

提示：用万能代换　$t = \operatorname{tg}(x/2)$ 化为代数不等式.

(7)　$\sum_{k=1}^{n}\sec(x/k) - \sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(x/k) < n$.

105.　设 $0 < \alpha, \beta < \pi/2, 0 < \alpha + \beta < \pi/2$，则　$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

提示：$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg}\alpha + tg\beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

106.　设 $0 < x < \pi/2$，则

$$\frac{\sin x}{2 + \cos x} < \operatorname{tg}\frac{x}{3}.$$

107. $\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3k}\right) \geqslant n^2$.

108. 设 $A_n^0 = 1, A_n^p = \sum_{k=0}^{n} A_k^{p-1}, n = 0,1,2,\cdots, p = 1,2,\cdots$，则当 $0 < t < \pi, m = 3,4,\cdots$，时有

$$A_n^{-m} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{k} \sin jt\right) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

109. 设 $0 < x < \pi/2$，则

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sec \frac{x}{k} \csc \frac{x}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \left(\sec \frac{x}{k} + \csc \frac{x}{k}\right).$$

110. 设 $0 < x < \pi/2$，则

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \csc x > 6.$$

111. [MCM]. 设 $0 < x < \pi/4$，则

$$\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} > \operatorname{ctg} x, \text{ 若} \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \text{则不等号反向}.$$

112. (1) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，则 $\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x)^3 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. 若 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$，则左边不等式反向.

(2) $\operatorname{tg} x > 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$.

(3) 若 $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$，则 $\csc x - \operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{2} - 1$.

113. 设 $0 < x < \pi/2$，则

(1) $(\operatorname{tg} x)^p + (\operatorname{ctg} x)^q \geqslant \frac{p+q}{pq}(p^q \cdot q^p)^t, p, q > 0, t = \frac{1}{p+q}$.

仅当 $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{p}\right)^t$ 时等号成立.

(2) $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^k}\right) < 2^{-n} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

(3) $\sec x + \csc x \geqslant 2\sqrt{2}$.

114. 设 $0 < \alpha < \beta < \pi/2$，则

(1) $\sin\beta - \sin\alpha < \beta - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$.

提示：利用 $\cos x < 1 < \sec^2 x < (0 < x < \pi/2)$，从 α 到 β 积分，也可用单位圆证.

(2) $\sec^2\alpha < \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\beta - \alpha} < \sec^2\beta$.

115. $0 < \alpha < \pi/2, 0 < x < y$，则 $y\sec\alpha - x\operatorname{tg}\alpha \geqslant \sqrt{y^2 - x^2}$

116. 设 $\operatorname{tg} x = \alpha \operatorname{tg} y, \alpha > 0$，则

$$\operatorname{tg}^2(x - y) \leqslant \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha}.$$

117. 设 $(\cos\alpha\cos\beta)^{-1} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$，则 $\cos 2\gamma \leqslant 0$.

提示:因为 $\cos^2\gamma = \dfrac{1-(\mathrm{tg}\gamma)^2}{1+(\mathrm{tg}\gamma)^2}$,所以,只要证 $1-(\mathrm{tg}\gamma)^2 \leqslant 0$. 再利用条件,归结为证明 $\cos\alpha\cos\beta \leqslant 1+\sin\alpha\sin\beta$.

118. 设 $0 \leqslant \alpha,\beta,\gamma < \dfrac{\pi}{2}$,且 $\alpha+\beta+\gamma = \pi/2$,则

$$\sqrt{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta+5} + \sqrt{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma+5} + \sqrt{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha+5} \leqslant 4\sqrt{3}.$$

119. (1) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{\sec^2 x - \mathrm{tg}x}{\sec^2 x + \mathrm{tg}x} \leqslant 3$; (2) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x} \leqslant 3$.

120. $(a\,\mathrm{tg}x)^2 + (b\,\mathrm{ctg}x)^2 \geqslant 2ab$.

提示:$(a\,\mathrm{tg}x)^2 + (b\,\mathrm{ctg}x)^2 - 2ab = (a\,\mathrm{tg}x - b\,\mathrm{ctg}x)^2$.

121. $(a\sec x)^2 + (b\cos x)^2 \geqslant 2ab$.

122. 设实数 $\alpha_k,\beta_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 满足 $\sum \alpha_k = \sum \beta_k = \pi$,则当 $\alpha_k > 0$ 时,有

$$\sum \cos\beta_k/\sin\alpha_k \leqslant \sum \mathrm{ctg}\alpha_k \quad (n > 2).$$

(29 届 IMO 备选题,见[109]1989,7:34 和 1991,6:41)

123. 若 $a > b > 0$,则 $a\sec x - b\,\mathrm{tg}x > \sqrt{a^2-b^2}$.

提示:令 $y = a\sec x - b\,\mathrm{tg}x$,则

$$(a^2-b^2)\mathrm{tg}^2 x - (2b\,\mathrm{tg}x)y + a^2 - y^2 = 0,\text{由判别式解 } y.$$

124. 设 $0 < x < \pi/2, a, b > 1$,则

$$ab \leqslant (\sin x)^2 \cdot a^{(\csc x)^2} + (\cos x)^2 b^{(\sec x)^2}.$$

仅当 $x = \mathrm{arctg}\sqrt{\log a/\log b}$ 时等号成立,见[348]1989,3:7-8.

125. 设 $0 < x < \pi/2, a, b, p$ 为正数,则

$a(\csc x)^p + b(\sec x)^p \geqslant (a^q + b^q)^{1/q}$,

式中 $q = 2/(p+2)$,仅当 $x = \mathrm{arctg}(a/b)^{p+2}$ 时等号成立.

126. **Lenhard 不等式**:设 $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \pi/2, 1 \leqslant k \leqslant n, n \geqslant 3, \sum \alpha_k = \pi$,则对于所有 $x_k \geqslant 0\ (1 \leqslant k \leqslant n)$,有

$$\sum x_k^2 \geqslant \left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum x_k x_{k+1}\cos\alpha_k,\ (x_{n+1} = x_1).$$

证明见"中学数学教学"1985,1:27. 1988 年,王振、陈计作了指数推广:设 $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \pi/2, 1 \leqslant k \leqslant n, n \geqslant 3, \sum \alpha_k = \pi$,则对任意 $x_k \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant n, x_{n+1} = x_1, 0 < q \leqslant 1$,有

$$\sum x_k^2 \geqslant [\sec(\pi/n)]^q \sum x_k x_{k+1}(\cos\alpha_k)^q.\ (\text{见}[348]1988,12:7)$$

1990 年叶军证明:设 n 个实数 β_k 满足 $\sum \beta_k = (2m+1)\pi \quad (m \in Z, n \geqslant 3)$,$n$ 个正数 α_k 满足 $\sum \alpha_k = \pi$,则对任意实数 $x_k(1 \leqslant k \leqslant n)$. $x_{n+1} = x_1$,有

$$\sum (x_k^2 + x_{k+1}^2)\mathrm{ctg}\alpha_k \geqslant 2\sum x_k x_{k+1}\cos\beta_k\csc\alpha_k,$$

仅当所有 $x_k x_{k+1}\cos\beta_k\cos\alpha_k$ 相等时等号成立,作者还由此证明了其他三角、几何不等式. 见[350]1990,1:32-35.

127. **Ozeki 不等式**:对任意 n 个实数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$,都有

$$\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}-x_nx_1\leqslant[\cos(x/n)]\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

1988 年 Mitrinovic, D. S. 证明:设 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 是 R^3 中 $n+1$ 个点,O 为 $\overline{A_1A_{n+1}}$ 的中点,记 $x_k=\overline{OA}_k$, $\alpha_k=\angle A_kOA_{k+1}$, $\varepsilon_k=\pm1$, $(1\leqslant k\leqslant n)$, $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}x_kx_{k+1}\cos\alpha_k\leqslant(\cos\frac{\pi}{n})\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

见 J. College Arts Sci, Chiba Univ. B. 1988, 21:19 – 21.

128. 当 $0<x<\pi/2$ 时,有

$$\sec x+\csc x+\sec x\csc x\geqslant2(\sqrt{2}+1).$$

129. $\log\sec x<(1/2)\sin x\,\mathrm{tg}x\ (0<x<1/2)$.

130. 设 $x_k(1\leqslant k\leqslant3)$ 为任意实数,记 $x_4=x_1$, $x_5=x_2$,则

$$\sum_{k=1}^{3}\cos^2x_k\csc^2(x_{k+1}-x_k)\geqslant2.$$ (见[305]1988, 95, E3074)

131. 设 $|x|\leqslant\pi/2$,则

$$\csc^2x-\frac{1}{2n+1}<\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(x-k\pi)^2}<\csc^2x,$$

132. 若 $0<x\leqslant\pi/2$,则

$$\csc x-\frac{x}{4n+1}<\sum_{k=2n}^{2n}\frac{(-1)^k}{x-k\pi}<\csc x+\frac{x}{4n+2}.$$

注 这两个不等式可用于计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

133. [MCM] 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in(0,\frac{\pi}{2})$,使得 $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{tg}(\alpha_k-\frac{\pi}{4})\geqslant n-2$,

则 $\prod_{k=1}^{n}\mathrm{tg}\alpha_k\geqslant(n-1)^n$. (见[348]1999.1:44 – 45)

134. $[(\sec x)^4-1][(\csc x)^4-1]\geqslant9$.

135. 设 $0<x_k<1$, $1\leqslant k\leqslant n$, $x_{n+1}=x_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}x_k(1-x_{k+1})<\frac{n}{4}[\sec\frac{(n-2)\pi}{2n})]^2.$$

提示:作边长为 1 的正 n 边形. 见“数学教学”1993.5:39.

136. 设 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,则 $x(\sec x)^2-\mathrm{tg}x\leqslant\frac{8\pi^2x^3}{(\pi^2-4x^2)^2}$.

证 令 $a_n=[(2n+1)\pi]^2-4x^2$,则

$$\mathrm{tg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8x}{a_n},\quad(\sec x)^2=(\mathrm{tg}x)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{a_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{64x^2}{a_n^2}.$$

于是,

$$x(\sec x)^2-\mathrm{tg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{64x^3}{a_n^2}\leqslant\frac{64x^3}{(\pi^2-4x^2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

$= \dfrac{2\pi^4 x^3}{3(\pi^2 - 4x^2)^2} < \dfrac{8\pi^2 x^3}{(\pi^2 - 4x^2)^2}$. ([305]1980,87(1):62). Ruehr-Shafer 改进为:

$$x(\sec x)^2 - \mathrm{tg} x \leqslant \frac{2\pi^2(\mathrm{tg} x - x)}{\pi^2 - 4x^2}.$$