

组合数学

第六章 容斥原理及其应用

主要内容

- 1. 容斥原理及简单应用
- 2. 错排问题
- 3. 带禁止位置的排列
- 4. 莫比乌斯反演

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

容斥原理

“容”是inclusion, “斥”是exclusion.

Principle of inclusion and exclusion

容斥原理是加法原理的一般情况

设全集为 U , $A \subseteq U$, 则有

$$|A^c| = |U| - |A|.$$

简单形式的容斥原理

因为 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
所以 设全集为 U , 且 $A, B \subseteq U$, 则有

$$\begin{aligned} |A^c \cap B^c| &= |U| - |A \cup B| \\ &= |U| - |A| - |B| + |A \cap B| \end{aligned}$$

类似的设全集为 U , 且 $A, B, C \subseteq U$, 则有

$$\begin{aligned} |A^c \cap B^c \cap C^c| &= |U| - |A| - |B| - |C| \\ &\quad + |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| \\ &\quad - |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

简单应用举例

例. 求1~1000中不能被5,6,8整除的数的个数.

$A_5 = \{1 \sim 1000 \text{ 中能被 } 5 \text{ 整除的数}\}, A_6, A_8,$

$$|A_5 \cup A_6 \cup A_8| = ?$$

例. 多重集的组合. $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的10组合个数

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 & \text{-----} * \\ 0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$U = \{*, x_i \geq 0\}, A = \{*, x_1 > 3\}, B = \{*, x_2 > 4\}, C = \{*, x_3 > 5\},$

$$|A^c \cap B^c \cap C^c| = ?$$

容斥原理

定理：设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 U 中的有限集合，则

$$\begin{aligned} & |A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c| \\ &= |U| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明：

推论

定理: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是有限集合, 则

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

欧拉函数 $\phi(n)$

$\phi(n)$ 是1~ n 中与 n 互素的数的个数.

例 $\phi(3)=2$, $\phi(6)=2$. 设 n 的素分解为 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$

设 A_i 为1~ n 中 p_i 的倍数的集合, $i, j = 1, \dots, k$

$$|A_i| = n/p_i, \quad |A_i \cap A_j| = n/(p_i p_j), \quad \dots$$

$$\phi(n) = |A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_k^c|$$

$$= n - \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} + \sum_{i \neq j} \frac{n}{p_i p_j} - \dots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

错位排列

定义: 若 $S=\{1,2,\dots,n\}$ 的排列 $i_1i_2\dots i_n$ 满足

$$i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \dots, i_n \neq n,$$

则称它为 n 元素的错位排列.

以 D_n 记 n 元素的错位排列数.

设 $A_i = \{i \text{ 在 } i \text{ 位}\}$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n|$$

$$= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)!$$

$$- C_n^3(n-3)! + \dots + (-1)^n C_n^n 1!$$

$$D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = ?,$$

定理: $D_n = n! [1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^n/n!]$

定理: $D_n = (n-1) D_{n-1} + (n-1) D_{n-2}$.

注: $\{1,\dots,n\}$ 中 $i_2=2$, 其它错排的排列数为 D_{n-1} .

错排公式

设 A_i 为数 i 在第 i 位的全体排列, $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$|A_i| = (n-1)!, \quad |A_i \cap A_j| = (n-2)!, \quad \dots$$

$$\text{错排数} = |A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c| \quad ?$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots \pm \frac{n!}{n!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \right)$$

错排的递推关系

定理: $D_n = (n-1) D_{n-2} + (n-1) D_{n-1}$.

证明: 对错排 $i_1 \dots i_n$,

(1) i_1 有 $n-1$ 种取值, 设 $i_1 = k$;

(2) 或(2a) $i_k = 1$; 或(2b) $i_k \neq 1$. 将 i_1, i_k 互换则有

(2a) $\{2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ 是错排.

(2b) $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ 是错排.

问题举例

n 位男士, n 位女士聚会, 女士选择舞伴,
第一次跳舞有多少种方案?
若每人都换舞伴, 第二次跳舞方案数?
第二次跳舞每人都换舞伴的概率是多少?

带禁止位置的排列

问题的描述: 设 $S=\{1,\dots,n\}$, $X_1,\dots,X_n\subseteq S$,
求满足 $i_1\notin X_1,\dots,i_n\notin X_n$ 的排列 $i_1\dots i_n$ 的个数.

例. $X_1=\{1,4\}, X_2=\{3\}, X_3=\emptyset, X_4=\{1,5\}, X_5=\{2,5\}$

	1	2	3	4	5
i_1	X			X	
i_2			X		
i_3					
i_4	X				X
i_5		X			X

问题的解

定义: 设将 k 个棋子放在棋盘的禁止位置上,
没有棋子位于同行同列, 方案数为 r_k .

定义: $A_k = \{ i_k \in X_k \}$

关联: $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = r_1(n-1)!$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = r_k(n-k)!$$

定理: 带禁止位置的排列数为

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^n r_n 0!,$$

问题举例

X					
X	X				
		X	X		
		X	X		

$$r_1=7, r_2=15, r_3=10,$$

$$r_4=2, r_5=r_6=0$$

带如图禁止位置排列数为

$$6! - 7 \cdot 5! + 15 \cdot 4! - 10 \cdot 3! + 2 \cdot 2! \\ = 184$$

另外的禁排问题

n 个人练走步, 排成一行前行. 第二天要求每人前面的人与前一天不同, 记方案数为 Q_n .

定理: 对于 $n > 0$,

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! \\ - \cdots + (-1)^n \binom{n-1}{n-1} 1!$$

魔法手镯

Potter的女朋友**Ginny**的生日快到了.

Potter打算做魔法手镯作为生日礼物.

手镯上要均匀地点缀 $n(1 \leq n \leq 10^9)$ 个魔珠.

有 $m(1 \leq m \leq 10)$ 种魔珠,有些魔珠不能相邻.

输入第一行: t // 测试样例数.

第二行: $n \ m \ k$ // $1 \leq k \leq m(m-1)/2$

接下来 k 行: $a \ b$ // $1 \leq a, b \leq m$, a 和 b 号珠不能相邻

...

输出: 不同手镯数模9973的结果.

m 种元素的多重集的圆排列

长为 n 圆排列在 n 个位置断开可得 n 个线排列

可能相同, 例: **123412341234123412341234**

只能形成4个不同的线排列, 称为**周期4**.

设一圆(线)排列可由长为 k 的线排列拷贝形成,
则这样的 k 中最小者称为该排列的**周期**.

长为 n 线(圆)排列数? 周期取值? 各数间的关系?

$n=4, m=2$: 周期1: 1111, 2222

周期2: 1212

周期4: 1112, 1122, 1222

多重集线排列与圆排列的关系

固定 \mathbf{m} , 令 $S=\{\infty \cdot 1, \dots, \infty \cdot \mathbf{m}\}$.

$T(n)$: S 的长为 n 的圆排列个数.

\mathbf{m}^n : S 的长为 n 的线排列数 ($\neq T(n) \times n$, 举例).

$M(d)$: S 的周期为 d 的线排列数.

则有

$$\mathbf{m}^n = \sum_{d|n} M(d) \quad T(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} M(d)$$

可以由此解出 $M(n)$ 和 $T(n)$ 吗?

经典的Möbius函数 $\mu(n)$

$\forall n > 0$ 可以唯一地分解为素数幂的乘积:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_k 是不同的素数, $a_i \geq 1$. 定义

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n=1; \\ 0, & \text{若 } \exists i, \text{ 使得 } a_i > 1; \\ (-1)^k, & \text{其它.} \end{cases}$$

例如: $30=2 \cdot 3 \cdot 5$, $\mu(30)=(-1)^3=-1$,

$14=2 \cdot 7$, $\mu(14)=(-1)^2=1$,

$44=2^2 \cdot 11$, $\mu(44)=0$,

Möbius函数的性质

定理: 对任意正整数 n , 有 $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ 0, & \text{if } n > 1. \end{cases}$

证明: $n=1$, 定理成立. 若 $n>1$, 设

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \quad n_1 = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{d|n_1} \mu(d) \\ &= \mu(1) + \sum_{1 \leq i \leq k} \mu(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mu(p_i p_j) + \cdots + \mu(p_1 \cdots p_k) \\ &= \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0 \end{aligned}$$

Möbius反演定理

定理: 设 $F(n)$ 和 $G(n)$ 是正整数集上的函数, 则

$$G(n) = \sum_{d|n} F(d) \Leftrightarrow F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) G\left(\frac{n}{d}\right).$$

设 $\{\infty \cdot 1, \dots, \infty \cdot m\}$ 的周期 d 线排列数为 $M(d)$, 则有

$$\sum_{d|n} M(d) = m^n \quad \Rightarrow \quad M(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) m^d$$

Möbius函数与欧拉函数

定理: 对任意正整数 n , 有 $\sum_{d|n} \mu(d)/d = \phi(n)/n$.

证明: $n=1$, 定理成立. 若 $n>1$, 设

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \quad n_1 = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d)/d &= \sum_{d|n_1} \mu(d)/d \\ &= \mu(1) + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{\mu(p_i)}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\mu(p_i p_j)}{p_i p_j} + \cdots + \frac{\mu(p_1 \cdots p_k)}{p_1 \cdots p_k} \\ &= \mu(1) - \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1}{p_i p_j} + \cdots + \frac{(-1)^k}{p_1 \cdots p_k} = \frac{\phi(n)}{n} \end{aligned}$$

多重集的圆排列数

设 $\{\infty \cdot 1, \dots, \infty \cdot m\}$ 的长为 n 的圆排列数为 $T(n)$,
周期是 d 的线排列数为 $M(d)$, 则有

$$\sum_{d|n} M(d) = m^n \Rightarrow M(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) m^d$$

$$T(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} M(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) m^d$$

应用二：魔法手镯

设有 m 种魔法珠, $B=(b_{ij})_{m \times m}$ 为其邻接矩阵

$T^{\wedge}(n)$: 满足 B , 且长为 n 的圆排列数.

$M^{\wedge}(d)$: 满足 B , 且周期是 d 的线排列数.

$\text{tr } B^n$: B 的长为 n 的回路 的条数

$$\sum_{d|n} M^{\wedge}(d) = \text{tr}(B^n) \Rightarrow M^{\wedge}(n) = \sum_{d|n} \mu(d) [\text{tr } B^d]$$

$$T^{\wedge}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} M^{\wedge}(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) [\text{tr } B^d]$$

样例分析

1
4 4 6
1 1
2 2
4 4
1 3
1 4
2 4
输出
8

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 12 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr} B = 1, \text{tr } B^2 = 7, \text{tr } B^4 = 23$$

观察各周期排列数与 B^4 的关系

周期1: 3, 周期2: 12, 34, 23

周期4: 1232, 4323, 4333, 2333

$$(\phi(4) \cdot 1 + \phi(2) \cdot 7 + \phi(1) \cdot 23) / 4 = 8.$$

偏序集 (X, \leq) 上的函数空间 $\Omega(X)$

$\forall f \in \Omega(X)$, 都满足 $f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, 及
若 $\neg(x \leq y)$, 则必有 $f(x, y) = 0$.

$\Omega(X)$ 中的两个特殊函数:

δ 函数:

$$\forall x \in X, \quad \delta(x, x) = 1,$$

$$\forall x \neq y \in X, \quad \delta(x, y) = 0.$$

ζ 函数:

$$\forall x \leq y \in X, \quad \zeta(x, y) = 1,$$

$$\text{否则, } \zeta(x, y) = 0.$$

函数空间 $\Omega(X)$ 中的Möbius函数

任取 $f, g \in \Omega(X)$, 定义 f 与 g 的卷积 $f * g$ 为:

$$f * g(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Möbius函数 $\mu \in \Omega(X)$ 满足:

$$\mu * \zeta = \zeta * \mu = \delta$$

Möbius函数的递归定义:

$$\forall x \in X, \quad \mu(x, x) = 1,$$

$$\forall x < y \in X, \quad \mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z).$$

容易验证 $\mu * \zeta = \zeta * \mu = \delta$ (卷积结合律).

Möbius反演公式

定理: 令 (X, \leq) 是下有限偏序集,
 μ 是它的Möbius函数, $F: X \rightarrow \mathbf{R}$,
若

$$G(x) = \sum_{y \leq x} F(y), \quad \forall x \in X$$

则有

$$F(x) = \sum_{y \leq x} G(y) \mu(y, x), \quad \forall x \in X$$

与经典Möbius函数的对比

在偏序集($\mathbf{Z}, |$)上:

$$\mu(1,3) = -1, \mu(1,5) = -1,$$

$$\mu(1,4) = 0, \mu(1,15) = 1,$$

$$\mu(3,15) = \mu(1,5) = -1.$$

Möbius反演与容斥原理

- 设 $X_n = \{1, \dots, n\}$, 考虑偏序集 $(P(X_n), \subseteq)$.
- 设 $A \subseteq B \subseteq X_n$, 则 $\mu(A, B) = (-1)^{|B| - |A|}$.

设有全集 U 的子集 A_1, A_2, \dots, A_n , 对 $\forall L \in P(X_n)$, 令

$$F(L) = |\{x \in U \mid (\forall i \in L, x \notin A_i) \text{ 且 } (\forall i \notin L, x \in A_i)\}|.$$

例 $F(\{1\}) = |A_1^c \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|,$

$$F(\{1, 2, \dots, n\}) = |A_1^c \cap \dots \cap A_n^c|.$$

令 $G(B) = \sum_{A \subseteq B} F(A)$, 则有 $G(B) = |\cap_{i \notin B} A_i|,$

$$F(X_n) = \sum_L (-1)^{n - |L|} G(L),$$

可见容斥原理也是一种Möbius反演.

本章小结

容斥原理及其简单应用

错排问题 带禁止位置的排列

莫比乌斯反演