P.75.9 定义：若多项式 $p(x)$ 可表为 $p(x)=(x-x_0)^m\cdot g(x)$，且 $g(x_0)\neq 0$， 2011 3/7-26

则称 x_0 是 $p(x)$ 的 m 重根。今设 x_0 是 $p(x)$ 的 k 重根。

证明：x_0 是 $p'(x)$ 的 $k-1$ 重根。$(k\geq 2)$

证：由假设 $p(x)=(x-x_0)^k\cdot g(x)$

则 $p'(x)=k\cdot(x-x_0)^{k-1}\cdot g(x)+(x-x_0)^k\cdot g'(x)$

$=(x-x_0)^{k-1}\cdot[k\cdot g(x)+(x-x_0)\cdot g'(x)]$

所以 $P'(x_0)=0$，$k\cdot g(x_0)+(x_0-x_0)\cdot g'(x_0)=k\cdot g(x_0)\neq 0$

即 x_0 是 $p'(x)$ 的 $k-1$ 重根。

P.76.10 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 有定义，且 $f(-x)=f(x)$，$f'(0)$ 存在。证明 $f'(0)=0$

证：$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0)$

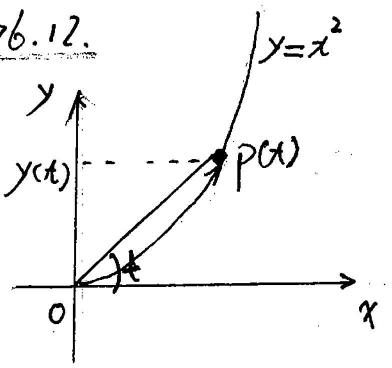
所以 $2f'(0)=0$，$f'(0)=0$

P.76.11 设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，证明：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$.

证：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\cdot\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]-[f(x_0-\Delta x)-f(x_0)]}{2\Delta x}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right]=\dfrac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=f'(x_0)$.

P.76.12.



$0<t<\dfrac{\pi}{2}$，

$P(t)=(x(t),\ y(t))$

如图：$\tan t=\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{x^2(t)}{x(t)}=x(t)$

$x(t)=\tan(t)$，$y(t)=\tan^2 t$

$P(t)=(\tan t,\ \tan^2 t)$

$V(t)=P'(t)=(x'(t),\ y'(t))=(\sec^2 t,\ 2\tan t\cdot\sec^2 t)$

$a(t)=V'(t)=(2\sec^2 t\tan t,\ 2\sec^2 t(\sec t+\tan^2 t))$.