 2012 15/4

P.222. 2.(11) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}$; $(q>0)$

解：当n充分大后，$(\ln\ln n)^q<(\ln n)^{\frac{1}{2}}$

$$u_n=\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}>\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{\frac{1}{2}}}=v_n$$

$$v_n=\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{\frac{1}{2}}},\quad f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$$

由于 $\int_3^{+\infty}f(x)dx=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}=\int_3^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}d\ln x$

$$=2\sqrt{\ln x}\Big|_3^{+\infty}=+\infty$$

所以 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$ 发散。

再由比较判别法可知 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}$ 也发散。