第四章　几何不等式

几何不等式已有许多专著，如参考文献中的[3,7,15,19,32,53,134]等，而[31,33～38,99,100]等著作中，几何不等式也占了很大的篇幅，国内外出版的数学杂志，特别是[351]，大量刊登各种几何不等式的论文. 20世纪90年代以来，由中国科学院成都计算机研究所杨路研究员研究开发的不等式型机器证明软件“BOTTEMA”的问世和不断升级，为证明和发现新的不等式特别是几何不等式提供了强有力的工具，刘保乾等借助这种软件已发现和证明了几千个三角形几何不等式(见[134]). 要想在一本书内全面反映这么多的研究成果是不可能的，本章仍以本书第二版的编排方式为基础，适当补充了新的有代表性的新成果和新方法.

在本章中，都设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的边长；A,B,C 为内角(注意以弧度为单位)；S 为面积；$p=(a+b+c)/2$ 为半周长；h_a,h_b,h_c 为高；l_a,l_b,l_c 为中线长；t_a,t_b,t_c 为内角平分线长；r_a,r_b,r_c 为旁切圆半径；r,R 分别为三角形(或多边形)内切圆和外接圆半径；$\sum$ 表示循环和，$\prod$ 表示循环积，例如 $\sum f(a)=f(a)+f(b)+f(c)$，$\sum f(a,b)=f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)$，$\prod f(a)=f(a)f(b)f(c)$，对于四边形，$\sum f(a)$ 则表示 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$ 等.

在不等式后面，用{锐}表示锐角三角形，{钝}表示钝角三角形，{等正}表示仅当正多边形(如正三角形，正方形等)时不等式中的等号成立，{等似}表示两个多边形(包括三角形)相似时等号成立. n,m,k,j 等表示自然数. 对于初学者，希望注意以下几个问题：

1.　**要充分注意隐含条件**. 例如 $A+B+C=\pi$；$a-b<c<a+b$；从三角形大边对大角，可得 $(a-b)(A-B)\geqslant 0$ 等；从 $a\geqslant b\geqslant c$ 得 $A\geqslant B\geqslant C$，从而 $l_a\leqslant l_b\leqslant l_c$，$h_a\leqslant h_b\leqslant h_c$，$t_a\leqslant t_b\leqslant t_c$. 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则意味着 $t>8$ 时，有

$$\sum a^2>tR^2，即\quad p^2>r^2+4Rr+(t/2)R^2.$$

若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，则意味着 $t<8$ 时上式中不等号均反向，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，则 $\sum a^2=8R^2$，即 $p^2=r^2+4Rr+4R^2$(另见[3]11,26－28). 还经常用到三角形中的等量关系，例如，面积 $S=pr$；$\prod a=4SR=4prR$；$h_a=\dfrac{2S}{a}$；$t_a=\sqrt{bc\left[1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right]}$；

$l_a=\sqrt{\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}}$；

$$\sum ab=p^2+4Rr+r^2；\sum a^2=2(p^2-4Rr-r^2)；$$

$$\sum a^3=2p(p^2-6Rr-3r^2)；\sum a^4=2(p^2-4Rr-r^2)^2-8p^2r^2，$$

利用正弦定理、余弦定理，半角公式等，往往可以使三角形边的不等式与角的不等式相互转

化.例如$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow \sum \operatorname{ctg} A \geqslant \sqrt{3}$,$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + \sum (a-b)^2 \Leftrightarrow \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2} \geqslant \sqrt{3}$.

2. **要注意几何不等式与代数不等式的联系**.通过代换:$x = (b+c-a)/2$,$y = (c+a-b)/2$,$z = (a+b-c)/2$,就可把三角形边 a,b,c 的不等式转化为正数 x,y,z 的代数不等式.还可利用三正数 a,b,c 能构成三角形边长的许多充要条件(记为$\{\Delta\}$):

(1) $\{\Delta\} \Leftrightarrow 25(\sum a^4) < 11(\sum a^2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{3}(\sum \sin^2 A) < 10\prod \sin A$;

(2) $\{\Delta\} \Leftrightarrow pa^2 + qb^2 \geqslant pqc^2$,式中 $p+q=1$.

(3) 若正数 a,b,c 满足 $2(\sum a^4) < (\sum a^2)^2$ 则$\{\Delta\}$;若 n 个正数a_k 满足 $(n-1)\sum a_k^4 < (\sum a_k^2)^2 (n \geqslant 3)$,则这些数中任何三个都可构成三角形的边长.

(4) **利用 a,b,c 为三正数的充要条件**:$\sum a > 0$,$\sum ab > 0$,$\prod a > 0$,易证三次方程 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的三个实根 $a,b,c\{\Delta\} \Leftrightarrow p < 0, r < 0, q > 0, p^3 - 4pq + 8r > 0$.(其他条件可见[19]第一章或[348])1991,9:40-41.)利用这些关系,常常可以沟通代数不等式与几何不等式,成为证明和发现新不等式的一种重要手段.

3. **注意复数,凸函数,优化理论,基本不等式等其他知识的综合运用**.例如利用下述基本定理就可以统一证明许多三角不等式:

定理 1 设 $F(x,y,z)$ 是实对称齐次多项式,其次数 $n \leqslant 3$.

(1) 若 $F(1,1,1)$,$F(1,1,0)$,$F(2,1,1)$ 均非负,则 $F(a,b,c) \geqslant 0$;

(2) 若 $F(1,1,1) > 0$,$F(1,1,0)$,$F(2,1,1)$ 非负,则 $F(a,b,c) > 0$;

(3) 若 $F(1,1,1) = 0$,$F(1,1,0) > 0$,$F(2,1,1) \geqslant 0$,则 $F(a,b,c) \geqslant 0$.{等正}见[305]1971,78:879

定理 2 设 f 是$[0,\infty)$上的凸函数,则

$$3f(2p/3) \leqslant \sum f(a) \leqslant f(0) + 2f(p).$$

定理 3 设 f 是$[0,2p]$上三阶凸函数(定义见第 7 章 §1),则

$$(1/3)\sum f(a) - f(2p/3) \leqslant (1/3)\sum f(b+c) - f(4p/3).$$

例如,$f(x) = x/(2p-x)$ 是三阶凸函数(其定义见第 7 章 §1.),由定理 3,得

$$\sum \frac{b+c}{a} - \sum \frac{a}{b+c} \geqslant \frac{9}{2}.$$

利用正弦定理、三角形面积公式等还可以使边与角的不等式互化.

定理 4 设 f 是$[0,\pi/2]$上三阶凸函数,则

$$\sum f\left(\frac{\pi-A}{2}\right) - \sum f\left(\frac{A}{2}\right) \geqslant 3\left[f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

若 f 是严格三阶凸函数,则上式中仅当正三角形时等号成立.

利用定理 4 可以证明三角形的角的不等式.

此外,陈胜利,张小明,孙文彩,褚小光,刘保乾还在[100]P3-32 和[134]中分别研究了三角形不等式的不同证明方法.

§1　三角形不等式

一、　三角形边长、面积与 p,r,R 不等式

1.　[MCM]. **Finsler-Hadwiger 不等式**:

$$4\sqrt{3}S+\sum(a-b)^2\leqslant\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}S+3\sum(a-b)^2,\qquad\{等正\}$$

特别,$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}S$ 称为 **Weitzenböck 不等式**,苏化明总结出它的 24 种证法,见[99]12:106 - 117,此外,南秀全还用费马点定理给出了一个新的证明,见[99]3:71 - 72.推广:

(1)　$\sum a_n\geqslant 2^n\times 3^{(1-\frac{n}{4})}S^{n/2}+\sum(a-b)^n.$　　{等正}

(2)　设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为任意实数,则

$$\sum\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^2\right)\geqslant 2\sqrt{3}S;$$

(3)　设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为任意实数,则

$$\left(\sum\lambda_1 a^2\right)^2\geqslant 16S^2\left(\sum\lambda_1\lambda_2\right)\quad\text{(Oppenheim)}$$

仅当 $a^2:b^2:c^2=(\lambda_2+\lambda_3):(\lambda_3+\lambda_1):(\lambda_1+\lambda_2)$ 时等号成立,它等价于 **Kooi 不等式**:

$$\sum(\lambda_2\lambda_3 a^2)\leqslant(\sum\lambda_1)^2R^2.$$

见[3]P147:[19]P681:[348]1991,6:39 - 42.

(4)　**单墫不等式**:设 $\triangle ABC$ 的最大角 $A\leqslant\alpha$,则

$$\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}S+\lambda\sum(a-b)^2.$$

式中　$\lambda=[2-2\sin(\alpha+(\pi/6))]/[2\sin(\alpha/2)-1]^2$ 是 α 的递增函数. 特别,当 $A\leqslant\alpha=2\pi/3$ 时,成立

$$\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}S+\frac{\sqrt{3}+2}{2}\sum(a-b)^2<4\sqrt{3}S+2\sum(a-b)^2.$$

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,有

$$\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}S+(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)^2\sum(a-b)^2<4\sqrt{3}S+\frac{16}{9}\sum(a-b)^2.$$

这是对刘健结果和猜想的改进,见[32].82 - 86

(5)　$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}S+\sum(a-b)^2+2\sum\left[\sqrt{a(p-a)}-\sqrt{b(p-b)}\right]^2.$

(董林,中学数学研究,1999.4:17)

我们问:使 $\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}+\lambda\sum(a-b)^2$ 成立的最大 λ 是什么?

(6)　$4S(4-\frac{2r}{R})^{1/2}\leqslant\sum a^2-\sum(a-b)^2\leqslant 4S(1+\frac{R}{r})^{1/2}.$

(7)　$1\leqslant\dfrac{\sum a^2}{\sum ab}\leqslant 1+\sqrt{1-\dfrac{2r}{R}}.$　　{等正}

(8)　$\sum a^{4t}\geqslant 3^{1-t}4^{2t}S^{2t}+\sum(a^{2t}-b^{2t})^2.(t>0).$　　{等正}

(9)　$\sum a^n \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}} p \sum a^{n-2} + \sum a^{n-2}(b-c)^2 \geqslant 2^n \times 3^{1-\left(\frac{n}{4}\right)} p^{n/2} + \sum a^{n-2}(b-c)^2$.
(王志亮.中等数学.1995.3:14)

(10)　$(4/3)p^2 \leqslant \sum a^2 \leqslant 2p(p-\sqrt{3}r)$.(Bager,[19]P.176)

2.　**Neberg 不等式**:$\sum a^2 \leqslant 9R^2$.　　{等正}

推广:(1)**Gerretsen 不等式**:

$36r^2 \leqslant 18Rr \leqslant 12r(2R-r) \leqslant \sum a^2 \leqslant 8R^2 + 4r^2 \leqslant 9R^2$.　　{等正}

它的证明及其进一步推广见[19]P50,170 - 171.

(2)　当 $t \leqslant \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 3} \approx 2.818$ 时,$\sum a^t \leqslant 3(\sqrt{3}R)^t$.

(见 Elem. Math,1962,17:40 - 41;1963,18:31 - 32)

(3)　$4\sqrt{3}S \leqslant 3[(\prod a)\prod(b+c-a)]^{1/3} \leqslant \sum a(b+c-a)$

$\leqslant \frac{9(\prod a)}{\sum a} \leqslant \frac{3\sqrt{3}(\prod a)}{\sqrt{\sum ab}} \leqslant \frac{9(\prod a)}{\sum \sqrt{ab}} \leqslant 3(\prod a)^{2/3}$

$\leqslant \sum a\sqrt{bc} \leqslant \{3(\prod a)(\sum a)\}^{1/2} \leqslant \sum ab \leqslant (1/2)\sum(a+b)\sqrt{ab}$

$\leqslant (\frac{1}{3})(\sum a)^2 \leqslant (\frac{1}{3})(\sum \sqrt{a})(\sum a^{3/2}) \leqslant \frac{(\sum a)(\sum a^{3/2})}{\sum \sqrt{a}} \leqslant \sum a^2 \leqslant 9R^2$.

(见宋庆[348]1990,12;17 - 19)

(4)　$$\sqrt{3}S \leqslant \left\{\begin{matrix} \sum a^2 - \sum(a-b)^2 \\ 4\sqrt{3}S\left(\frac{R}{2r}\right)^{1/3} \end{matrix}\right\} \leqslant 3(\prod a)^{2/3} \leqslant 4\sqrt{3}S\left(\frac{R}{2r}\right)^{1/2} \leqslant \sum ab$$

$$\leqslant \left\{\begin{matrix} \frac{1}{3}(\sum a)^2 \\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sum(ab)^2} \end{matrix}\right\} \leqslant \left\{\begin{matrix} 4\sqrt{3}S\left(\frac{R}{2r}\right) \\ \sum a^2 \leqslant \left\{\begin{matrix} \sqrt{3\sum a^4} \leqslant 4\sqrt{3}S\left(\frac{R}{2r}\right)^{17/12} \\ 4\sqrt{3}S\left(\frac{R}{2r}\right)^{7/6}. \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

(陈胜利[100].601 - 602)

3.　$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\sum a^2}{(\sum a)^2} < \frac{1}{2}$.

对于{钝},不等式左边可改进为 $6-4\sqrt{2}$.

提示:利用控制不等式和凸函数不等式.见[345]1985,9:35 - 37.

4.　$3 \leqslant \frac{(\sum a)^2}{\sum ab} < 4$.　　{等正}

对于{钝},上限可改进为 16/5.

5.　**Bager 不等式**:$72\sqrt{3}r^3 \leqslant 24rS \leqslant 36\sqrt{3}Rr^2 \leqslant 12RS \leqslant 8S(2R-r)$

$\leqslant 4S(5R-4r) \leqslant \sum a^3 \leqslant 4pR(2R-r) \leqslant 6\sqrt{3}R^2(2R-r)$.　　{等正}

6. [MCM]. $\sum a^3 < \sum a(b-c)^2 + 4\prod a = \sum a(b^2+c^2) - 2\prod a$.

这个不等式实际上是长为 a,b,c 的线段可以构成三角形的充要条件，逆命题可用反证法证明. 见[38]P.873.

7.(1) $\frac{1}{4} < \frac{\prod(a+b)}{(\sum a)^3} \leqslant \frac{8}{27}$，对于{钝}，上限可改进为 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\frac{1}{2}pr(R-2r) + \frac{3}{4}\prod(a+b) \leqslant 2\sum a^3 \leqslant (\sum a)(\sum a^2)$.

8. $2\sum a - \sum \frac{1}{a} \leqslant \sum a^3 < \frac{1}{4}(\sum a)^3$.

9. $3(\sum a^3 + 3\prod a) \leqslant 2(\sum a)(\sum a^2)$. ([3]P.3.) {等正}

10. $4r(\sum a)^2 + 2\sum a^3 < 9\prod a + (\sum a)(\sum a^2)$.

11. **Goldner 不等式：** $\sum a^4 \geqslant 16S^2$. {等正}

改进与推广：

(1) $54R^3(R-r) \geqslant \sum a^4 \geqslant 16S^2 + 4\sqrt{3}S\sum(a-b)^2 + \frac{1}{2}(\sum(a-b)^2)^2$.

{等正}

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中任两数之和大于 0，则

$(\sum \frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^4) \geqslant 8S^2$. 仅当 $\frac{a^2}{\lambda_2+\lambda_3} = \frac{b^2}{\lambda_3+\lambda_1} = \frac{c^2}{\lambda_1+\lambda_2}$ 时等号成立.

(见[19]P.34). 由此推出一系列不等式，见中学数学. 1994. 1.

12. $\sum(ab)^2 \leqslant \sum a^4 < 2\sum(ab)^2$.

13. $36r^2 \leqslant 4\sqrt{3}S \leqslant 18Rr \leqslant 4r(5R-r) \leqslant \sum ab \leqslant 4(R+r)^2 \leqslant 9R^2$. {等正}

更进一步加细见[19]P172.

14. $2\sum ab - \sum c^2 \leqslant 2\sum a\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant \sum ab$. 它等价于

$\frac{1}{2}\sum(a-b)^2 \leqslant \sum a(\sqrt{p-b} - \sqrt{p-c})^2 \leqslant \sum(a-b)^2$. (吴跃生,[100]P561)

15. (1) **Goldstone 不等式：** $16(pr)^2 \leqslant \sum(ab)^2 \leqslant 4(pR)^2$. (见[19]P177.) {等正}

(2) $p^2(p^2 - 8Rr + 5r^2) \leqslant \sum(ab)^2 \leqslant p^2(p^2 - 7Rr + 3r^2)$.

16. **Klamkin 不等式：** (1) 设非负实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中任何两数之和大于 0，$0 < t \leqslant 2$，则

$$\sum \frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}(bc)^t \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^t.$$ 见[19]P106.

(2) $\sum\sqrt{bc} \geqslant p + \frac{29Rr}{2p} - \frac{2r^2}{p}$. (张小明，中学数学，1999，9:43)

(3) 设 $t > 0$，则 $\sum a^t(a-b) \geqslant 0$. $t < 0$ 时，不等号反向 {等正}

17. (1) **Gerretsen 不等式：**

$$8r(R-2r) \leqslant 4(R-2r)(R+r-\sqrt{R(R-2r)}) \leqslant \sum(a-b)^2$$
$$\leqslant 4(R-2r)(R+r+\sqrt{R(R-2r)}) \leqslant 8R(R-2r).$$ {等正}

见[3]N5.25.[19]P172.

(2) $\frac{p^2}{2R}(R-2r)\leqslant\sum(a-b)^2\leqslant\frac{2p^2}{R}(R-2r)$.(张小明[100]P.600)

18. **Benezech 不等式**:设 t 为实数,则

$$(\sum a^2)\sum(bc)^{t-2}<2(\sum a^t)(\sum a^{t-2}).$$

提示:考虑重心坐标为(a^t,b^t,c^t)的点 G,分别计算 GA^2,GB^2,GC^2 和

$$(\sum A^t)^2\left(\sum\frac{GA}{bc}\right)^2.$$

19. (1) **Catalen 不等式**:设 $t\geqslant2$,则 $\sum a^tb(a-b)\geqslant0$. {等正}

(2) $\sum a^tb(a^u-b^u)\geqslant0$,式中 $t\geqslant2,u\geqslant1$. {等正}

(3) $\sum(p-a)\sqrt{bc}\geqslant\frac{2}{3}p^2$(刘健) {等正}

20. **Guba 不等式**:$2\sqrt{3}S\leqslant\sum a(p-a)\leqslant9Rr$. {等正}

21. $\prod a<\sum a^2(p-a)\leqslant\frac{3}{2}\prod a$.证明见[3]P.3. {等正}

22. **Djordjevic 不等式**:设 t 为实数,则

$$\sum a^t(p-a)\leqslant\frac{1}{2}(\prod a)(\sum a^{t-2}).$$ {等正}

23. **Andersson 不等式**:$\sum a^3(p-a)\leqslant p(\prod a)$. {等正}

24. **Janous 不等式**:

$$2p\sum\sqrt{p-a}\leqslant3\sum\sqrt{bc(p-a)}.$$ ([305]1988,95)

25. $\sqrt{p}<\sum\sqrt{p-a}\leqslant\sqrt{3p}$.

对于{钝},下限可改进为$\sqrt{2p}$.([6]P200)

26. $\sum\sqrt{a(p-a)}\leqslant\sqrt{2}p$.

对于{钝},下限可改进为 p,它的改进见[19]P130.

27. $\sqrt{2}\sum a\leqslant\sum\sqrt{a^2+b^2}\leqslant(1+\sqrt{2}/2)\sum a$.

28.(1) **Janous 不等式**:设 $0<t<1$,则

$$\sum\left(\frac{1}{a}\right)^t\leqslant3^{1-2t}\left(\frac{p}{Rr}\right)^t.$$ {等正}

特别地,当 $p=1/2$ 时,上式称为 **Flore 不等式**.见[363]1978,83:217.

(2) $\sum a^{-n}\geqslant3^{\alpha}R^{-n}$,式中 $\alpha=1-(n/2)$.

29. (1) $\frac{\sqrt{3}}{R}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)}\leqslant\sum\frac{1}{a}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2r}$. {等正}

(2) $\frac{11\sqrt{3}}{5R+12r}\leqslant\sum\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{5}{4R}+\frac{7}{8r})$. {等正}

(陈计,福建中学数学,1993.6:10-11)

(3) $\frac{243\sqrt{3}}{110R+266r}\leqslant\sum\frac{1}{a}\leqslant\frac{\sqrt{(R+r)(R+2r)}}{2Rr}$.

见杨学技[31]P236 - 242.2000年,周永良利用 p、R、r 间的最强不等式导出了 $\sum\frac{1}{a}$ 的最强不等式见[100]P.175 - 199.

30. $\frac{9r}{2S}\leqslant\frac{r(5R-r)}{RS}\leqslant\sum\frac{1}{a}\leqslant\frac{(R+r)^2}{RS}\leqslant\frac{9R}{4S}$. {等正}

31. $\frac{\sqrt{3}}{R}\leqslant\frac{2(5R-r)}{3\sqrt{3}R^2}\leqslant\frac{5R-r}{Rp}\leqslant\sum\frac{1}{a}\leqslant\frac{(R+r)^2}{RS}\leqslant\frac{(R+r)^2}{3\sqrt{3}Rr^2}\leqslant\frac{\sqrt{3}R}{4r^2}$. {等正}

32. $\sum\left(\frac{1}{a}\right)^{2t}\leqslant3\left(\frac{\sqrt{3}}{4S}\right)^t+\lambda\sum\left(\frac{1}{a^t}-\frac{1}{b^t}\right)^2$. 式中 $\lambda=\frac{1}{2}$, $0<t<\frac{\ln9-\ln4}{\ln4-\ln3}$. (陈计).

杨之提出,λ 的最小值是什么?见[35].陈琦提出猜想:$0<t\leqslant1$ 时,

$$\sum\left(\frac{1}{a}\right)^{2t}\leqslant\frac{1}{3^{t-1}(2-t)}\left[\frac{1-t}{R^{2t}}+\left(\frac{1}{2r}\right)^{2t}\right].$$

已知 $t=1/4,1/2,1$ 时不等式成立.见[31]P.243 - 246.

33. $\frac{2(5R-r)}{R}\leqslant(\sum a)(\sum\frac{1}{a})\leqslant\frac{2(R+r)^2}{Rr}$. {等正}

34. **Walker 不等式:** $\sum\frac{1}{a^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}$.

改进与推广:

(1) $\frac{1}{R^2}\leqslant\frac{1}{2Rr}\leqslant\frac{1}{3}(\sum\frac{1}{a})^2\leqslant\sum\frac{1}{a^2}\leqslant\frac{(R^2+r^2)^2+Rr^3}{R^2r^3(16R-5r)}\leqslant\frac{1}{4r^2}$. {等正}

(2) 若 △ABC 为非钝角三角形,则 $\sum\frac{1}{a^2}\geqslant\frac{5}{4S}$(等腰 △ 成立等号.).

35. $3\leqslant\frac{7R-2r}{2R}\leqslant\sum\frac{b}{a}\leqslant\frac{1}{2}+(\frac{R}{r}+\frac{r}{R})\leqslant\frac{3R}{2r}$. {等正}

$$\frac{23}{108}\left(\frac{p^2}{Rr}\right)<\sum\frac{b}{a}<\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{Rr}\right)\text{(刘保乾).}$$

36. $\frac{9}{4p}<\sum\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4r}$. {等正}

37. $4\sum\frac{1}{a}-\sum\frac{a}{bc}\leqslant\frac{(5/R)+(2/r)}{\sqrt{3}}$. (Bilcev).

38. 设 $M=1-(2r/R)$.刘保乾和张小明提出,是否成立:

$$2M\leqslant\sum\left(\frac{b-c}{a}\right)^2\leqslant3M;\quad\frac{2}{9}M\leqslant\sum\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2\leqslant2M.$$

刘一张还提出一系列类似的问题,见[100]P200 - 222.

39. 令 $M=R^2+3Rr+2r^2$,则

$\frac{M}{R^2+M}\leqslant\sum(\frac{p-a}{b+c})\leqslant\frac{6R}{9R-2r}$. (见[19]P.174) {等正}

40. $\sum(\frac{1}{p-a})\geqslant\frac{5+4\sqrt{2}}{p}$; {等正}

推广 $\sum(p-a)^{-n}\geqslant3^{1+n}p^{-n}$; $\sum(p-a)^n\geqslant3^\alpha r^n$,式中 $\alpha=1+\frac{n}{2}$.

41. $\sum\left(\frac{a}{p-a}\right)=\frac{4R}{r}-2\geqslant 6$.([99]3P.7.).

42. $\frac{5}{S}\leqslant 2\cdot\sum\frac{1}{a(p-a)}\leqslant\frac{1}{r^2}\leqslant\sum(\frac{1}{p-a})^2$.

43. $\sum\left(\frac{a}{p-a}\right)^{1/2}\geqslant\frac{9\sqrt{3Rr}}{p}$.

44. $\sum(\frac{bc}{p-a})\geqslant p(5-\frac{2r}{R})$;(Bilcev).(见[19]P178)

45. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为正数,则

$$\sum(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3})(\frac{bc}{p-a})\geqslant\sum a.$$ 见[381].1987,13:52.

46. **Guba 不等式:** $\sum(\frac{a-b}{p-b})\leqslant 0$.(转引[19]$P$145)

47. 设 $t\geqslant 1$,则

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{t-2}p^{t-1}\leqslant\sum\frac{a^t}{b+c}<2p^{t-1}.$$

48. 设 $t\geqslant 0$,则

$$\frac{3(3t+2)}{4}<\frac{(2+5\sqrt{2})t+2(5\sqrt{2}-4)}{4}\leqslant\sum(\frac{tp+a}{b+c})<\frac{5t+4}{2}.$$

对于{钝},上限可改进为$(7t+5)/3$.

49.(1) $\sum\frac{a}{b+c}\leqslant\frac{1}{6}(\sum a)(\sum\frac{1}{a})$.(杨学技);

(2) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sum\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2\leqslant\sum\frac{a}{b+c}\leqslant\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\sum\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2$.见[100]P562-563.

50. $\sum\frac{1}{b^2+c^2}\geqslant\frac{1}{2R^2}$.

51. **Klamkin 不等式:**

$\sum\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right)\leqslant 3\leqslant\sum\left(\frac{a}{b}\right)^2$. (见[331]1971,357-380:22-14) {等正}

52. $\sum\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}\leqslant\sum bc$. (Morghescu,[363]1986,91:21) {等正}

53. **Mirea 不等式:**

(1) $\frac{16}{3}S^2\leqslant\frac{\sum a^2}{\sum(1/a)^2}\leqslant 9R^4$; {等正}

(2) $\frac{16S^2}{9R^2}\leqslant\frac{\sum(ab)^2}{\sum a^2}\leqslant 3R^2$.(见[363]1933.39:411) {等正}

54. **B-B 不等式(Braune-Bottema 不等式):**

$$5-\frac{4r}{R}\leqslant\frac{\sum a^3}{\prod a}\leqslant\frac{2R}{r}-1.$$ {等正}

见 Elem,Math.1975,30:18;1976,31:15-16.

55. $1 \leqslant \frac{(\sum a)(\sum a^3)}{(\sum bc)^2} \leqslant \frac{R}{2r}$. {等正}

(见 Elem, Math. 1973.28:102;1974,29:96 − 97)

56. 设 $t > 0$,则

$$\frac{4(9-2t)}{27}p^2 \leqslant \sum a^2 - \frac{1}{p}(\prod a) < 2p^2.$$

对于{钝},上限可改进为$\frac{6-t}{4}p^2$,见[6]P200.

57. (1) $12\sqrt{3}Rr^2 \leqslant \prod a \leqslant 4Rr[2R + (3\sqrt{3}-4)r] \leqslant 6\sqrt{3}R^2 r$. ([3]P62) {等正}

(2) $\prod a \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)^{3/2}$. (见[100]P552)

58. $32RS \leqslant 4pr(9R-2r) \leqslant \prod(a+b) \leqslant 4p(2R^2+3Rr+2r^2) \leqslant 8pR(R+2r) \leqslant 24\sqrt{3}R^3$. (见[19]P172 − 173) {等正}

59. 令 $d = pr/R$,则

$$4d^2/(3\sqrt{3}) \leqslant 2rd \leqslant 3\sqrt{3}r^2 \leqslant 2pd/(3\sqrt{3}) \leqslant S \leqslant 3\sqrt{3}Rr/2 \leqslant$$
$$\leqslant p^2/(3\sqrt{3}) \leqslant pR/2 \leqslant 3\sqrt{3}R^2/4.$$ {等正}

利用 $S = pr$,可得到有关 p, r, R 的不等式.

60. **Mircea 不等式:** $\sqrt{S} \leqslant R + (r/2)$. {等正}

61. $\sqrt{3}S \leqslant r(4R+r) \leqslant \sqrt{3}S + (1/2)\sum(a-b)^2$.

62. $r^3(16R-5r) \leqslant S^2 \leqslant r^2(3r^2+4Rr+4R^2)$. {等正}

63. 设 $q = \left[(1/2)\sum(a-b)^2\right]^{1/2}$,则

$$p(p+a)^2(p-2q) \leqslant 27S^2 \leqslant p(p-a)^2(p+2q),$$

式中两个等号均在等腰三角形且其底边为最小(或最大)边时成立.

64. $S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\sum a^t\right)^{2/t}$, $t > 0$. (见[305]1927,34:382 − 364) {等正}

65. $S \leqslant \frac{3}{4}\frac{\prod a}{\sqrt{\sum a^2}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(\prod a)^{2/3}$. {等正}

66. $S \leqslant (\sqrt{3}/4)(\prod a)^{1/3}[\prod a^2 - \prod(a-b)^2]^{1/6}$. {等正}

见[350]1986,2:11 − 13.

67. $p^2 \geqslant 3\sqrt{3}S + (1/2)\sum(a-b)^2$. {等正}

68. $8Rr + (11/(3\sqrt{3}))S \leqslant p^2 \leqslant 4R^2 + [11/(3\sqrt{3})]S$, {等正}

69. **Bottema 基本不等式:** 令 $d = \sqrt{R(R-2r)}$,则

$$\sqrt{R+r-d}(\sqrt{2R}+\sqrt{R-r+d}) \leqslant p \leqslant \sqrt{R+r+d}(\sqrt{2R}+\sqrt{R-r-d}),$$

或

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)d \leqslant p^2 \leqslant 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)d.$$

因为 $d < R - r$,得到 **Gerretsen 不等式:**

$$r(16R - 5r) \leqslant p^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2. \qquad \{等正\}$$

对于非钝角三角形,有 $p^2 \geqslant 2R^2 + 8Rr + 3r^2$.(见[31]P371 - 384 或[100]P175 - 199)

$p > 2R + r$ {锐};$p < 2R + r$ {钝};$p = 2R + r$ {直角}.

70. **Janic 不等式:** $\sqrt{3}p \leqslant 5R - r$. {等正}.

71.(1) $9\sqrt{3}r - p \leqslant 4pr/R \leqslant 6\sqrt{3}r \leqslant 3\sqrt{6Rr} \leqslant 2p \leqslant 2[2R + (3\sqrt{3} - 4)r] \leqslant 3\sqrt{3}R$.(见[19]P165 - 166)

(2) $p \geqslant r[3\sqrt{3} + \frac{t}{R}(R - 2r)]$. 式中 $t_{\max} = 6.829212418\cdots$.(刘保乾、黄拔萃[100]P582)

72. $4R(R - 2r)^3 \geqslant (p^2 + r^2 - 2R^2 - 10Rr)^2$. {等正}

73. $p \geqslant \sqrt{r}(\sqrt{6R} - \sqrt{2R - r})$.

74. 设 $t > 0$,则

$$(\frac{r}{R})^t + (\frac{p}{R})^t \leqslant 2^{-t}(1 + 3^{3t/2}). \qquad \{等正\}$$

75. $ab > 4Rr$.

76. $\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$.(Bandila. V.)(见[363]1985,90:65)

77. $\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geqslant \frac{5}{2}$. {等正}

78. $$\frac{r}{2R - r} \leqslant \frac{3r}{4R + r} \leqslant \frac{r}{R + r} \leqslant \frac{r(16R - 5r)}{(4R + r)^2} \leqslant$$

$$\leqslant (\frac{p}{4R + r})^2 \leqslant \frac{R}{2(2R - r)} \leqslant \frac{1}{3} \leqslant \frac{4R + r}{27r} \leqslant \frac{R^2}{4r(R + r)}.$$

79. 记 $H_t = \frac{1}{2}\sum a^{2t}$,$K_t = \sum (ab)^t$. 1954 年,Beatty, S. 证明:

$$(K_1 - H_1)(3K_1 - 5H_1) \leqslant 12S^2 \leqslant (K_1 - H_1)^2.$$

1988 年陈计证明,当 $t \geqslant 1$ 或 $t \leqslant 0$ 时,成立

$S^{2t} \geqslant 2^{2(1-2t)}3^{t-2}(K_t - H_t)(3K_t - 5H_t)$.(见[381]1989,15:1 - 3)

80. 设 a^t, b^t, c^t 可以构成一个三角形 $\triangle_t$,它的面积为 S_t,1975 年,Oppenheim, A. 证明:当 $0 < t < 1$ 时,成立 $R_t \leqslant 3^{\frac{t-1}{2}}R^t$ 和

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{1-t} S^t \leqslant S_t \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{1-t} S^t. \qquad \{等正\}$$

当 $t \geqslant 1$ 或 $t \leqslant 0$ 时,不等号反向. 见[331]1974,461 - 497:257 - 263.

1988 年钱黎文等证明:S_t 具有对数凸性,即 $0 < \lambda < 1$ 时,$S_{t_1}^{\lambda} S_{t_2}^{1-\lambda} \leqslant S_q$,式中 $q = \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2$. 冷岗松证明 Δ_t 的周长,R_t,r_t 等也有类似的性质,见[344]1988,2:75 - 77,和湖南教育学院学报 1992,5:121 - 123.

81. **Euler 不等式(1765 年):** $R \geqslant 2r$. {等正}

前面不少不等式实际上涉及了 Euler 不等式的改进和推广,此外,我们还介绍以下结

果:

(1) 设△ABC是Bager型锐角三角形,即$\frac{\pi}{6}\leqslant A\leqslant B\leqslant\frac{\pi}{3}\leqslant C\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$\frac{r}{R}\geqslant\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

提示:利用$f(x)=\log(\sin\frac{x}{2})$在$(0,\pi)$上的凹性,得到

$$\frac{r}{4R}=\prod(\sin\frac{A}{2})\geqslant\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

(见Murty,V.N.等,[381]1895,11:191)

(2) [MCM].$r\leqslant 2R(\sin\frac{A}{2})(1-\sin\frac{A}{2})$,

仅当$b=c$时等号成立,[38]P1366-1367.

(3) 设$f(x)=\frac{4p^2/R-2rx}{27-x}$,则当$-\infty<x\leqslant y\leqslant 11$时,$2r\leqslant f(x)\leqslant f(y)\leqslant R$.

提示:考虑f的单调性,见Elem. Math. 1965,20:140;1966,21;139.

(4) $R\geqslant 2r+\frac{1}{8R}\sum(a-b)^2$.(宋庆,中学数学,1993,5:11)

(5) 与△ABC两边相切且与△ABC外接圆内切的三个圆的半径分别记为r_1,r_2,r_3,则

$$4r\leqslant 3(r_1r_2r_3)^{1/3}\leqslant r_1+r_2+r_3\leqslant 2R. \qquad \{等正\}$$

(李同林,中学数学,1993,5:11)

二、 三角形内角不等式

1. $\sum(\frac{1}{A})^t\geqslant\frac{3^{t+1}}{\pi^t},(t>0)$.

提示:利用Hölder不等式.

2. 利用$f(x)=(\sin x)^t$当$t<0$时为凸函数,当$0<t\leqslant 1$时在$[0,\pi]$上是凹函数,当$t\geqslant 2$时在$[0,\pi/4]$上是凸函数,易证下述不等式(其中记$\alpha=1+t/2,\beta=1-t/2$):

(1) 若$0<t\leqslant 1$,则$0<\sum(\sin A)^t\leqslant 3^\alpha/2^t$,对于{锐},下限可改进为2,对于{钝},上限可改进为$1+2^\beta$.特别地,有

$3\sqrt{3}(r/R)\leqslant\sum\sin A\leqslant 2+(3\sqrt{3}-4)(r/R)\leqslant 3\sqrt{3}/2$,{等正}.对于{锐},下限可改为2,对于{钝},上限可改为$1+\sqrt{2}$;

$0<\sum\sqrt{\sin A}\leqslant\sqrt{3p/R}\leqslant 3(3/4)^{1/4}$.{等正}.对于{锐},下限为2,对于{钝},上限为$1+2^{3/4}$.若$t<0$,则$\sum(\sin A)^t\geqslant 3^\alpha/2^t$,对于{钝},下限为$1+2^\beta$.

若$t>0$,则$\sum(\sin A)^t\geqslant 3(\prod\sin A)^{t/3}\geqslant 3^\alpha[r^2/(2R^2)]^{t/3}\geqslant 3^\alpha(r/R)^t$.

{等正}.

(2) $\frac{15r}{2R}\leqslant\frac{3r}{R^2}(2R-r)\leqslant\sum\sin^2A\leqslant\frac{2R^2+r^2}{R^2}\leqslant\frac{9}{4}$,{等正},对于{锐},下限为

2,对于{钝},$1<\sum\sin^2A<2$,对于{直角},$\sum\sin^2A=2$.

(3)　$$\frac{9\sqrt{3}r^2}{2R^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}r^2}{2R^2}(5R-4r)\leqslant\frac{pr}{2R^3}-(5R-4r)$$

$$\leqslant\sum\sin^3A\leqslant\frac{p(2R-r)}{2R^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4R}(2R-r)<\frac{3\sqrt{3}}{2}.\qquad\{等正\}$$

(4)　$\sum\sin^4A\leqslant 2-\frac{1}{2}(\frac{r}{R})^2-3\left(\frac{r}{R}\right)^4\leqslant 2-5(\frac{r}{R})^4$,{等正},见[19]P189.

(5)　若 $0<t\leqslant1$,则 $1<\sum(\sin\frac{A}{2})^t\leqslant 3/2^t$;$t<0$ 时,$\sum(\sin\frac{A}{2})^t\geqslant 3/2^t$;

对于{锐},当 $0<t\leqslant1$ 时,下限为 2^β,当 $t\geqslant2$ 时,成立 $3/2^t\leqslant\sum(\sin\frac{A}{2})^t\leqslant2^\beta$;

对于{钝},$g(t)=2^{-t/2}+2(\sqrt{2-\sqrt{2}}/2)^t$ 是 $0<t\leqslant1$ 时的上限,$t<0$ 时的下限.

特别地,$1<\sum\sin(A/2)\leqslant3/2$.(上限可改进为$\sqrt{2}$);　　$\sum[\sin(A/2)]^{-1}\geqslant6$;

$3/4\leqslant\sum[\sin(A/2)]^2<1$.　　{等正}

(6)　若 $t\geqslant1$,则

$$\sin(\frac{\pi}{t})<\sum\sin(\frac{A}{t})\leqslant3\sin(\frac{\pi}{3t})<\frac{\pi}{t}.$$

(Bursuc,1.[363].1980,85:365)

(7)　$|\sum\sin(mA)|\leqslant3\sqrt{3}/2,(m\in Z)$,$-2<\sum\sin3A\leqslant3\sqrt{3}/2$,仅当 A,B,C 中有一个为 $7\pi/9$,其余两个均为 $\pi/9$ 时等号成立,见[305],1982.99(3).

(8)　$\sum\sin(2kA)\geqslant-3/2$;$\sum\sin(4m+1)(A/2)\leqslant3/2$;

$\sum\sin(4m-1)(A/2)\geqslant-3/2$.

(9)　$\sum\sin^2(mA)\leqslant9/4(m\in Z)$;$\sum\sin^2[(2k-1)A/2]\geqslant3/4$;

$36(r/R)^4\leqslant6(r/R)^2+12(r/R)^4\leqslant\sum\sin^2(2A)\leqslant9/4$.

(10)　我们还可以得到更一般的不等式.记

$$M_k(x)=\begin{cases}(\sum x^k/3)^{1/k}, & k\neq0,\infty,\\(xyz)^{1/3}, & k=0,\\\min\{x,y,z\}, & k=-\infty,\\\max\{x,y,z\}, & k=\infty.\end{cases}$$

则,①　$-\infty<k\leqslant1$ 时,有

$0<M_k(\sin A)\leqslant p/(3R)\leqslant2/3+(\sqrt{3}-(4/3))(r/R)\leqslant\sqrt{3}/2$.　　{等正}

对于{钝},上限为$[(1+2^\beta)/3]^{1/k}$,式中 $\beta=1-(k/2)$.

②　对于{锐},当 $0<k\leqslant1$ 时,有$(2/3)^{1/k}<M_k(\sin A)\leqslant\sqrt{3}/2$.

③　$k=-\infty$ 时,$0<\min\{\sin A,\sin B,\sin C\}\leqslant\sqrt{3}/2$.对于{钝},上限为$\sqrt{2}/2$.

④　已知 $k=(\lg9-\lg4)/(\lg4-\lg3)$ 是使 $M_k(\sin A)\leqslant\sqrt{3}/2$ 成立的最大值.又已知当 $0<t\leqslant1,k\leqslant1$ 时,有

$$M_k(\sin tA)\leqslant\sin(t\pi/3).\qquad(1)$$

[19]161 提出两个问题：第一，求出使(1)式成立的 $k=k(t)$ 的最大值；第二，对于 $q>k$，求出使 $M_q(\sin A)<m(q)$ 成立的最小值 $m(q)$.

⑤ 若 $k\leqslant 3$，则 $M_k(\sin A\sin B)\leqslant 3/4$；若 $3<k\leqslant 4$，则 $M_k(\sin A\sin B)\leqslant 3^{-1/4}$.

⑥ 若 $-1\leqslant k\leqslant(\lg 9-\lg 4)/(\lg 4-\lg 3)$，则 $2\sqrt{3}r\leqslant M_k(a)\leqslant\sqrt{3}R$.

利用各种变换，又可得到新的不等式. 例如通过变换 $A_1=(\pi-A)/2$ 等，可将 $M_k(\sin A)$，$M_k(\sin A\sin B)$ 转化为 $M_k(\cos\frac{A}{2})$，$M_k(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2})$ 等.

3. 利用 $f(x)=(\cos x)^t$ 当 $t<0$ 时为凸函数，当 $0<t\leqslant 1$ 时在 $[0,\pi]$ 上为凹函数，当 $0<t\leqslant 2$ 时在 $[0,\pi/4]$ 上为凹函数，易证下述不等式(其中仍记 $\alpha=1+t/2$，$\beta=1-t/2$)：

(1) 对于{锐}，若 $0<t\leqslant 1$，则 $1<\sum(\cos A)^t\leqslant 3/2^t$；若 $t<0$，则 $\sum(\cos A)^t\geqslant 3/2^t$.

(2) 对于{钝}，当 $t\geqslant 2$ 时，有 $\sum(\cos A)^t\geqslant 3/2^t$.(Mascioni, V.)

(3) $3r/R<\sum\cos A\leqslant 2\cos(C/2)+\cos C\leqslant 3/2$.

(4) $3/4\leqslant 2(r/R)-(r/R)^2\leqslant\sum\cos^2A\leqslant 3(R-r)^2/R^2<3$. {等正}；对于{锐}，上限为 1，对于{钝}，下限为 1.

(5) $\frac{3}{8}\leqslant\frac{2R^3-3Rr^2-4r^3}{2R^3}\leqslant\sum\cos^3A\leqslant\frac{4R^2+12Rr-34r^2}{4R^2}$； {等正}

当 n 是大于 1 的奇数时，$\sum(\cos A)^n<\frac{5}{4}$.

(6) $0<t\leqslant 1$ 时，$2<\sum(\cos\frac{A}{2})^t\leqslant 3^\alpha/2^t$，对于{钝}，上限为 $2^{-t/2}+2(\sqrt{2+\sqrt{2}}/2)^t$.

(7) $t<0$ 时，$\sum(\cos\frac{A}{2})^t\geqslant 3^\alpha/2^t$. 对于{钝}，下限为 $2^{-t/2}+2(\sqrt{2+\sqrt{2}}/2)^t$.

(8) 若 $0<t\leqslant 2$，且对于{锐}，有 $1+2^\beta<\sum(\cos\frac{A}{2})^t\leqslant 3^\alpha/2^t$.

(9) $2<1+\sum\sin(A/2)\leqslant\sum\cos(A/2)\leqslant 3\sqrt{3}/2$. 对于{锐}，下限为 $\sqrt{2}+1$.

(10) $2\leqslant 9r/(2R)\leqslant(3/2)(1+r/R)<\sum\cos^2(A/2)\leqslant p^2/(6Rr)$. {等正}

(11) $\sqrt{3}p/(2R)\leqslant\sum\cos^2(A/2)\leqslant 9/4$. {等正}

(12) 若 $t\geqslant 2$，则 $2+\cos(\pi/t)<\sum\cos(A/t)\leqslant 3\cos(\pi/(3t))$.

(13) 设 $\sum A=k\pi, k\in N$，则 $-3\leqslant(-1)^{nk+1}\sum\cos nA\leqslant 3/2$，取 $n=2m$，则 $\sum\cos(2mA)\geqslant -3/2$.

(14) $\sum(\cos mA)^2\geqslant 3/4\quad(m\in Z)$.

(15) $|\sum\cos(nA/2)|\leqslant 3\sqrt{3}/2\quad(n$ 为奇数).

(16) $\sum[\cos(k-(1/2))A]^2\leqslant 9/4$.

(17) $\sum(\cos 2A)^2\leqslant 3-6(r/R)^2-12(r/R)^4\leqslant 3-36(r/R)^4$. {等正}

4.(1) $1+\frac{\sqrt{3}p}{9R}\leqslant\sum\sin(\frac{A}{2})\leqslant 1+\frac{p}{4R}-\frac{(3\sqrt{3}-4)r}{4R}$;

(2) $1+\frac{\sqrt{2}-1}{2R}p-\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{3}-2}{2R}r\leqslant\sum\sin(\frac{A}{2})\leqslant\sqrt{2}+\frac{3-2\sqrt{2}}{R}r$;

(3) $\sum\sin(\frac{A}{2})\geqslant 1+\sqrt{\frac{r}{2R}}\geqslant 1+\frac{3\sqrt{3}}{2p}r$.(杨学技,尹华焱,[100]P591 - 592)

(4) $\sum(\sin\frac{A}{2})^{2n}\geqslant\frac{3}{4^n}$;

(5) $\frac{3\sqrt{2}}{4}(4^{1/3}-1)<\sum\sin\frac{A}{4}<\frac{\sqrt{2}}{4}(3\sqrt{3}-1)$;

(6) $\frac{3}{4}(2-\sqrt{3})\leqslant\sum(\sin\frac{A}{4})^2<\frac{1}{2}$;

5. 令 $f(n)=\sum(\cos\frac{A}{2})^n$.则

(1) $2<f(2)\leqslant 9/4$(Kooistra,1957);

(2) $1+1/\sqrt{2}<f(3)<2$.

(左边不等式见陈胜利等,[100]P418 - 420,右边不等式属于陈计,1992)

(3) $3/2<f(4)<2$.(陈计);

(4) $\frac{5}{4}<f(6)<2$; $f(7)\geqslant\frac{81\sqrt{3}}{128}$; $\frac{243}{256}\leqslant f(8)<2$.(陈计)

(5) $n>7$ 时 $f(n)\geqslant\frac{3^\alpha}{2^n}$.{等正},式中 $\alpha=1+\frac{n}{2}$.

(6) 当 $3\leqslant n\leqslant 6$ 时,$f(n)\leqslant 2-\left[4-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]\left(\frac{r}{R}\right)$.(吴善和,[100]P588)

(7) $\sum\cos(\frac{A}{2})\leqslant 2+\frac{p}{4R}-\frac{16-9\sqrt{3}}{4R}r$.(杨学技等,[100]P589)

(8) $2-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\frac{p}{R}\right)+\frac{15\sqrt{3}-3\sqrt{6}-16}{4}\left(\frac{r}{R}\right)\leqslant\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^3$

$\leqslant\sum\left(\sin\frac{A}{2}\right)^3+1+\frac{9\sqrt{3}-11}{4}\left(\frac{r}{R}\right)$.(杨学技等,[100]P588 - 589)

(9) $\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^3\leqslant\sum\cos(\frac{A}{2})-\prod\cos(\frac{A}{2})$.

(尹华焱,Neuger 不等式的改进,[100]P587)

(10) 对{锐},$\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^3\leqslant\frac{53\sqrt{3}}{48}+\frac{\sqrt{3}r}{24R}\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}$.(杨学技等,[100]P420 - 421)

(11) $2+\frac{\sqrt{2}-1}{2R}p+\frac{9\sqrt{3}-3\sqrt{6}-8}{2R}r\leqslant\sum\cos(\frac{A}{2})\leqslant\sqrt{2}+1+\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2}{R}r$;

(12) $\sum\cos(\frac{A}{2})\leqslant 2+\frac{p}{4R}-\frac{16-9\sqrt{3}}{4R}r$.(杨学技等,[100]P589,591)

(13) $\min\left\{1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;2;3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}\leqslant\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^n$

$\leqslant\max\left\{1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;2;3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$,$n\geqslant 2$.(杨寅,[345]1997,4:25)

6.(1) $\frac{5}{2} < \sum\left(\cos\frac{A}{4}\right)^2 < \frac{3}{4}(2+\sqrt{3})$;

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}(2+3\sqrt[3]{4}) < \sum\cos\frac{A}{4} < \frac{3\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.

7.(1) $1+\sum\cos A < \sum\sin A \leqslant 3(\sqrt{3}-1)/2+\sum\cos A$.

对于{锐},$1 < \sum\cos A < \sum\sin A$.

(2) $\sum\sin 2A \leqslant \sum\sin A \leqslant \sum\cos(A/2) \leqslant 3\sqrt{3}/2$.

8. $-\sum\cos 2A \leqslant \sum\cos A \leqslant \sum\sin(A/2) \leqslant 3/2$.

9. $\sum A = k\pi, k, m \in N, m \geqslant 2$,令 $S_m = \sum[(\sin(nA)]^{2m} + (\cos(nA))^{2m}]$,则

$$\max\left\{\frac{9}{4^m}\binom{2m}{m}-\frac{3}{2},\frac{3}{2^{m-1}}\right\} \leqslant S_m \leqslant 3.$$

[1]97－99给出了它的证明,并指出,当 m 比较大时,下界并不是最好的,如何改进它的下界?在三角形中,成立 $5/2 < \sum[(\sin(A/4))^4 + (\cos(A/4))^4] \leqslant 21/8$.

10.(1) **Garfunkel 不等式:**

$(2/\sqrt{3})\sum\sin A \leqslant \sum\cos((A-B)/2) \leqslant (2/\sqrt{3})\sum\cos(A/2)$, {等正}

见[381].1985,11:288.

(2) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{p}{R})+\frac{8-3\sqrt{6}}{2}(\frac{r}{R}) \leqslant \sum\cos(\frac{A-B}{2}) \leqslant 1+\sqrt{2}+(4-2\sqrt{2})(\frac{r}{R})$.

(杨学技等,[100]P591)

11. $3\sqrt{3r/(2R)} \leqslant \sum\sqrt{\sin A\sin B} \leqslant S/(Rr)$.

左边不等式在正三角形时成立等号,见[19]180,186.

12. **Bager 不等式:**

$$\sum\cos(B-C) \leqslant (1+(2r/R))\sum\cos A. \qquad \text{\{等正\}}$$

13. **Janous 不等式:**令 $g(n) = \left|\sum\sin n(B-C)\right|$,则 $g(1) < 1; g(2) < 3\sqrt{3}/2$; $n \geqslant 3$ 时,$g(n) \leqslant 3\sqrt{3}/2$.见[381]1987,13:179.

14. $\sin^2A + \lambda(\sin^2B + \sin^2C) \leqslant 1 + \lambda + (1/4)\lambda^2, (\lambda > 0)$,

仅当 $\lambda < 2, B = C = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda}{2}$ 时等号成立,特别地,有

$$\sin^2A + \sin B\sin C \leqslant 25/16.$$ (宋庆,见[350]1996.2)

15. $1 < \sum\cos A \leqslant \sum\sin(A/2)$.

16. $3\sum\sin^2A - 2\sum\cos^3A \leqslant 6$.

17. $\sum\sin^2A \leqslant \sum[\cos(A/2)]^2 \leqslant 9/4 \leqslant 3\sum[\sin(A/2)]^2 \leqslant 3\sum\cos^2A$.

18.(1) $\sum\cos A \geqslant (3/4) + 6\prod\sin(A/2)$;

(2) $\sum\cos A \geqslant (\frac{1}{2}) + \prod\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$.

(3) $\prod\cos(B-C) > -\frac{1}{8}$.(宋庆[100]P589)

19. 对于{锐},有$\sum\sin^2A+\sum\sin(2A)<16\{\prod\cos(A/2)\}^2$.

20. $\sum(\sin A)^3\leqslant(\sum\sin A)(\sum\sin^2(A/2))$.

21. $\left[\dfrac{\sum\sin A}{\sum\cos(A/2)}\right]^3\geqslant 8\prod\sin(A/2)$,只对 Bager I 型三角形成立.即设$A\leqslant B\leqslant C$,且$B\geqslant\pi/3$.见[381]1985,11:325;1987,13:132-133.

22. $\dfrac{9r}{2R}\leqslant 5\left(\dfrac{r}{R}\right)-(\dfrac{r}{R})^2\leqslant\sum\sin A\sin B\leqslant(1+r/R)^2\leqslant 9/4$. {等正}

23. $\sum\sin A\sin B\leqslant p^2/(3R^2)$. {等正}

提示:$\sum\sin A\sin B=(1/4)[(p/R)^2+(r/R)^2+4(r/R)]$.

24.(1) $\sum\sin 2A\sin 2B\leqslant 5(r/R)^2+8(r/R)^3\leqslant 9(r/R)^2$.

(2) $\dfrac{p}{2R}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}(\dfrac{p}{R})^2-\dfrac{27(\sqrt{2}-1)}{8}(\dfrac{r}{R})\leqslant\sum\sin A\sin(\dfrac{A}{2})$

$\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{p}{R})-\dfrac{r}{R}-(3\sqrt{6}-3\sqrt{3}-2)(\dfrac{r}{R})^2$.(尹华焱等.[100]P587)

(3) $\sum\sin A(\sin\dfrac{A}{2})^2\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.{锐}.(刘保乾等.[100]P592)

25. $(7/2)(r/R)-1\leqslant 4(r/R)-(r/R)^2-1\leqslant\sum\cos A\cos B$

$\leqslant(r/R)+(r/R)^2\leqslant 3r/(2R)\leqslant 3/4$. {等正}

26. 若$0\leqslant t\leqslant 1$,则$\cos^2(t\pi/4)+2\cos(t\pi/4)\leqslant\sum\cos tA\cos tB\leqslant 1+2\cos(t\pi/2)$,对于{锐},上限为$3\cos^2(t\pi/6)$.见[381]1987,13:181-183.

27. **Janous 不等式:**

$3/4\leqslant 1-(r/R)^2\leqslant\sum\cos A-\sum\cos A\cos B<2-3(r/R)+(r/R)^2<2$,

对于{锐},上限为1,对于{钝},下限为$(2\sqrt{2}-1)/2$,由此推出$\sum\cos A\cos B\leqslant 3/4$.

28. $0<1/(3\sqrt{3})[(32-15\sqrt{3}](r/R)-(10-3\sqrt{3})(r/R)^2]$

$\leqslant\sum\sin A-\sum\sin A\sin B<1$.

29. 对于非钝角三角形,有

$4\sum(\cos A\cos B)^2\leqslant\sum\cos^2A;\sum(\cos A\cos B)^2\leqslant(1/4)-4\prod(\cos A)^2$.

见 Oppenheim,A.[305](1965,12:1129).其中等号仅在正三角形或等腰直角三角形时成立.

30.(1) $3(7r-2R)/(2R)\leqslant 3\sum\cos A\cos B\leqslant\sum\sin A\sin B$

$\leqslant 3\sum\sin(A/2)\sin(B/2)\leqslant\sum\cos(A/2)\cos(B/2)\leqslant 9/4$. {等正}

(2) $1+\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}(\dfrac{p}{R})+\dfrac{10+3\sqrt{3}-6\sqrt{6}}{4}(\dfrac{r}{R})\leqslant\sum\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$\leqslant\sqrt{2}+\dfrac{1}{4}(\dfrac{p}{R})+\dfrac{18-3\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{4}(\dfrac{r}{R})\leqslant\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}+\left(\dfrac{7-4\sqrt{2}}{2}\right)(\dfrac{r}{R})$;

(杨学技等,[100]P591)

31.(1)　$9\sqrt{3}r/(4p) \leqslant \sum \sin(A/2)\sin(B/2) \leqslant 5/8 + r/(4R) \leqslant 3/4$.

提示:利用面积公式和正弦定理.见[348]1989.7.

(2)　$\frac{p}{4R} + \frac{6-3\sqrt{3}}{4}(\frac{r}{R}) \leqslant \sum \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{r}{2R}$.(杨学技等,[100]P591)

32.　$\sum \sin A \sin(A/2) \leqslant 4/\sqrt{3}$.

33.　$3/(8R) \leqslant (1/4)[2(r/R) - (r/R)^2] \leqslant \sum[\sin(A/2)\sin(B/2)]^2$

$\leqslant (1/4)[1 - (r/R) + (r/R)^2] \leqslant (1/8)(2 - (r/R))$.　{等正}

34.　$\sum[\cos(A/2)\cos(B/2)]^2 \geqslant (1/4)(p/R)^2$;

$27r/(8R) \leqslant 1 + 11r/(8R) \leqslant 1 + (3/2)(r/R) - (r/2R)^2 \leqslant \sum[\cos(A/2)\cos(B/2)]^2$
$\leqslant (1/4)[5 + 3(r/R) + (r/R)^2] \leqslant (10R + 7r)/(8R) \leqslant 27/16$.　{等正}

35.　$3/4 \leqslant \sum \sin(A/2) - \sum \sin(A/2)\sin(B/2) < 1$,对于{锐},上限为$(2\sqrt{2} - 1)/2$,对于{钝},下限为$\sqrt{2-\sqrt{2}}(1 - 1/\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 2)/4$.

36.　**Klamkin 不等式:**

$$2\sum \sin(A/2)\sin(B/2) \leqslant (\sum \sin A \sin B)^{1/2} \leqslant \sum \cos A \leqslant \sum \sin(A/2).$$

37.　$\sum(\sin(A/2)\sqrt{\sin B \sin C}) \leqslant p/(2R)$.　{等正}

38.　$\sum(\cos(A/2)\sqrt{\sin B \sin C}) \leqslant p/R$.见[363]1969,B20:663－664.　{等正}

39.　$9/16 \leqslant (1/4)[3 - (r/R) - (r/R)^2]$

$\leqslant \sum \cos^2(A/2) - \sum(\cos(A/2)\cos(B/2))^2$

$= \sum \sin^2(A/2) - \sum[\sin(A/2)\sin(B/2)]^2$

$\leqslant 1 - (r/R) + (1/4)(r/R)^2 \leqslant 1 - 7r/(8R) < 1$.

40.　**Janous 不等式:**

$15/8 \leqslant 2 - (1/2)(r/R)^2 \leqslant \sum[\sin^4(A/2)] + \cos^4(B/2)]$

$\leqslant 3[1 - (r/R) + (1/2)(r/R)^2] < 3$.　{等正}

41.　$\sum \cos^3(A/2)\cos((B - C)/2) \leqslant 9\sqrt{3}/8$.　{等正}

42.　$\sum[\sin(A/2) + \sin(B/2)]^2 \leqslant 3$.

43.　若 $t > 0$,令 $\alpha = 1 + (t/2)$,则

$\sum(\sin A)^t \geqslant 3(\prod \sin A)^{t/3} \geqslant 3^\alpha(r^2/2R^2)^{t/3} \geqslant 3^\alpha(r/R)^t$.　{等正}

44.　$\sum \sin^2(A/2) \geqslant 1 - (1/4)\prod \cos(\frac{A-B}{2})$.

45.　$12\sqrt{3}(r/R)^2 \leqslant (3\sqrt{3}/2)(r/R)^2[9 - 2(r/R)] \leqslant \prod(\sin A + \sin B)$

$\leqslant (p/R)[1 + (3/2)(r/R) + (r/R)^2] \leqslant 3\sqrt{3}$.　{等正}

46.　(1)　$8\prod \sin A \leqslant \prod(\sin A + \sin B) \leqslant 2\sum \sin A \leqslant 2\sum \sin((A/2) + B)$.

(2)　$\prod \sin\frac{A}{4} + \prod \cos\frac{A}{4} \leqslant \frac{1}{4}(12 + \frac{3r}{R})^{1/2}$.(黄汉生,[100]P585)

47.　$0 < \prod \sin A \leqslant 3\sqrt{3}/8$,对于{钝},上限为 1/2.

提示:利用 $f(x)=\lg\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上的凹性,若利用Schur凸函数(第7章§1).可以进一步证明 $\prod\sin A\geqslant\sqrt{3}/4$.

48. $3\sqrt{3}r^2/(2R^2)\leqslant\prod\sin A\leqslant(r/R)+(3\sqrt{3}/2-2)(r/R)^2$

$\leqslant 3\sqrt{3}r/(4R)<3\sqrt{3}/8$.(见[19]181) {等正}

49. $(2pr/R^2)[6(r/R)-2-3(r/R)^2]\leqslant\prod\sin 2A\leqslant 2pr^3/R^4$

$\leqslant 4(r/R)^3+2(3\sqrt{3}-4)(r/R)^4\leqslant 3\sqrt{3}(r/R)^3\leqslant 3\sqrt{3}/8$. {等正}

见[19]186.

50. 设 $\sum A=k\pi,k\in N,x,y,z$ 为正数,则

$$\prod|\sin nA|^x\leqslant\left[\frac{(\sum xy)^2}{4(\prod x)(\sum x)}\right]^{(\sum x)/2}.$$

特别,$\prod|\sin nA|\leqslant 3\sqrt{3}/8$.提示:利用加权均值不等式(第一章§3).

51. $\prod\sin(\frac{nA}{2})\begin{cases}\leqslant 1/8, & n=4m+1,\\ \geqslant -1/8, & n=4m-1,\end{cases}$

$m\in Z$,特别 $0<\prod\sin(A/2)\leqslant 1/8$. {等正}

52. 令 $f(x,y,z)=\sin(xA)\sin(yB)\sin(zC)$.

(1) $f(1,1,1/2)\leqslant 2\sqrt{3}/9$,仅当 $A=B,\cos A=\sqrt{3}/3$ 时,等号成立.

(2) $f(1/2,1/2,1)\leqslant\frac{1}{54}(2\sqrt{13}-5)\sqrt{2\sqrt{13}+22}$,仅当 $A=B$,且 $\cos A=(\sqrt{13}-1)/6$ 时等号成立.

(3) $f(1/4,1/4,1/2)\leqslant(5\sqrt{10}-14)/54$,仅当 $A=B,\cos(A/2)=(\sqrt{10}+2)/6$ 时等号成立.见[305]1937,44:579-583.

我们要问:当实数 x,y,z 不全相等时,如何求出 $f(x,y,z)$ 的上下界?

53. $9r/(4R)-1\leqslant 3(r/R)-1-(3/2)(r/R)^2\leqslant\prod\cos A\leqslant(1/2)(r/R)^2\leqslant 1/8$.

对于{锐},$0\leqslant\prod\cos A\leqslant 1/8$,左边等号在直角三角形时成立;

对于{钝},$-1\leqslant\prod\cos A\leqslant 0$.

54. 设 $\sum A=k\pi,k\in N$,则

$-1\leqslant(-1)^{nk+1}\prod\cos nA\leqslant 1/8$.

55. 设 $\sum A=k\pi,k$ 为奇数,则 $|\prod\cos(n+\frac{1}{2})A|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

56. $\frac{abc}{8R^3}<\prod\cos\frac{A}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$,对于{锐},下限为1/2,对于{钝},上限为 $(1+\sqrt{2})/4$.

提示:利用 $f(x)=\lg\cos x$ 在 $(0,\pi/2)$ 上的凹性.

57. $72\prod\cos A\leqslant 12\sum\cos A\cos B\leqslant 3\sum\cos(A-B)\leqslant 16(\sum\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})^2$

$\leqslant 4\sum\sin A\sin B\leqslant 9\prod\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 6\sum\cos A$. {等正}

见[19]157和孙建斌等,中学数学(湖北)1993.2.

58. $(2r/R)^2 \leqslant (r/2R)^2(9-2(r/R)) \leqslant \prod(\cos A+\cos B)$
$\leqslant (r/R)+(3/2)(r/R)^2+(r/R)^3 \leqslant 1.$ {等正}

59. $\prod\cos A \leqslant 8\prod(\sin\frac{A}{2})^2 \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}\prod\sin A \leqslant \prod\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}\prod\cos\frac{A}{2}$
$\leqslant \prod\sin\frac{\pi-A}{4} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}\prod\cos\frac{\pi-A}{4} \leqslant \frac{1}{8}.$ {等正}

60. $\prod\cos A \leqslant \prod(1-\cos A).$

61. $24\prod\cos A \leqslant \sum\cos^2(A-B).$

提示:利用$(x+y)^2 \geqslant 4xy$ 和 $\cos A=-\cos(B+C)$ 证明 $\cos^2(B-C) \geqslant 8\prod\cos A.$

62. $1+\prod\cos A \geqslant \sqrt{3}\prod\sin A.$

对于{钝},$\sqrt{3}$ 可改为 2. 见[6]197.

63. 设 $0<t\leqslant 1/2$,令 $\alpha=t\pi/3$,则 $\cos(3\alpha) \leqslant \prod\cos(tA)+\prod\sin(tA)$
$\leqslant \sin^3\alpha+\cos^3\alpha$. 见[381]1987,13:154 - 156.

64. $\sqrt{2}/2 < \prod\cos(A/4)+\prod\sin(A/4) \leqslant 3\sqrt{6}/8.$

65. $\prod\cos(2^nA)+\prod(1+\cos(2^nA)) \geqslant 0$,$n=1$ 时就是 **Bottema 不等式**. 见[381]1982,8:296 - 297,1983,9:113,1984,10:228 - 229,320,或[19]154 - 155.

66. 对于{锐},有

$\sum(\sin A)^{\cos A} > \sum(\cos A)^{\sin A};\ \prod(\sin A)^{\cos A} > \prod(\cos A)^{\sin A}.$

67. $\sum(1+\cos 2A)/(1+\cos A) > 1$. 它等价于 G-B 不等式.(见 N.163)

68. $\sum\frac{\cos(B/2)\cos(C/2)}{\sin(A/2)} \geqslant \frac{9}{2}.$

69. $5-\frac{r}{R} \leqslant \sum\frac{\cos(B/2)\cos(C/2)}{\sin(A/2)} \leqslant \frac{(R+r)^2}{rR}.$ {等正}

70. $6 \leqslant 7-2(r/R) \leqslant \sum(\sin A+\sin B)/\sin C \leqslant 1+2(R/r)+2(r/R) \leqslant 3R/r.$ {等正}

71. $\sum\frac{\sin(A/2)}{\sin(B/2)\cos(C/2)} \geqslant 2\sqrt{3}.$

72. 对于{锐},有

$$\frac{\sum\sin(2A)}{\sum\sin(4A)} \leqslant -1.$$

提示:利用$\sum\sin(2A)=4\prod\sin A$,$\sum\sin(4A)=-4\prod\sin(2A)$,证明

$$\prod\sin(2A) \leqslant \prod\sin A.$$

73. $\sum(\cos^2A+\cos^2B)/(\cos A+\cos B) \geqslant 1+(r/R).$

74. $\sum\sin(A+B)/(\sin A+\sin B) \geqslant 3/2.$

提示:由三角形内角和公式与正弦定理,转化为代数不等式$\sum a/(b+c) \geqslant 3/2$. 见 Ch3. N. 34(20).

75. 对于{锐},有 $\sum \frac{2}{A}\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{9}{\pi}$.

76. 对于{锐},有 $\sum \frac{\sin A}{A} \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

提示:利用 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在$(0,\pi/2)$上的凸性.

77. [MCM]. $2\sum \frac{\sin A}{A} \leqslant \sum\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\sin A$.

提示:考虑矩阵模型:

$$M=\begin{pmatrix}\sin A & \sin B & \sin C\\ \frac{1}{A} & \frac{1}{B} & \frac{1}{C}\end{pmatrix}\ (\text{全反序}),\quad M_1=\begin{pmatrix}\sin A & \sin B & \sin C\\ \frac{1}{B} & \frac{1}{C} & \frac{1}{A}\end{pmatrix}\ (\text{乱序 }1),$$

$$M_2=\begin{pmatrix}\sin A & \sin B & \sin C\\ \frac{1}{C} & \frac{1}{A} & \frac{1}{B}\end{pmatrix}\ (\text{乱序 }2).$$

由第3章N86排序不等式有 $S(M)\leqslant S(M_1)$, $S(M)\leqslant S(M_2)$,于是

$$2S(M)\leqslant S(M_1)+S(M_2).$$

78. $A\cos B+\sin A\cos C>0$. 见[305]1957,64:24.

79. $\prod \sin A \leqslant \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 \prod A$.

80. $0<\sin\left(\frac{A}{2}\right)+\sin\left(\frac{B}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}\right)<1+\sqrt{2}$.

81. $\sin(A/2)+\sin(B/2)+\cos(C/2)\geqslant \sin A+\sin B-\sin C$.

82. $0<\cos^2(A/2)+\cos^2(B/2)-\cos^2(C/2)<2$.

83. 设 $C\geqslant \pi/2$,则

(1) $1<\sin A+\sin B-\cos C\leqslant 3/2$; (2) $3/4\leqslant \sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C<1$;

(3) $2<\cos A+\cos B+\sin C\leqslant 3\sqrt{3}/2$; (4) $2<\cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 C\leqslant 9/4$.

84. 对于{锐},有

(1) $0<\cos A+\cos B+\sin C<1+\sqrt{2}$.

(2) [MCM]. $A<B<C \Rightarrow \sin 2C<\sin 2B<\sin 2A$.

见[38]P1357.

85. 若 A,B 均小于 $\pi/2$,则 $\cos A+\cos B-\sin C>0$;
若 $A>\pi/2$ 或 $B<\pi/2$,则不等号反向.

86. $\cos A+\cos B-2\sin(C/2)\leqslant 0$.

87. **Andrica 不等式:**

$$\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant 1+2\sin B\sin C\cos A.\ (\text{见[363]1976,81:337})$$

88. 若 t 为实数,则

$$t(t-2)\sin(A/2)+\cos((B-C)/2)\geqslant 0.$$

提示:考虑关于 t 的二次式 $t^2\sin(A/2)-2t\sin(A/2)+\cos((B-C)/2)$ 的判别式.

89. 设 $A+B+C=k\pi$,则

$$\sin(nA)\sin(nB) \leqslant \begin{cases} \sin^2(nC/2), n \text{ 或 } k \text{ 为偶数}, \\ \cos^2(nC/2), n \text{ 和 } k \text{ 为奇数} \end{cases}.（见[19]93）$$

90. 设 $C \geqslant \pi/2$，则 $-1/8 \leqslant \sin A\sin B\cos C < 0$.

91. 对于{锐}，有 $0 < \cos A\cos B\sin C < 3\sqrt{3}/8$.

92.(1) $\sin A + (\sin B)^2 + (\sin C)^2 \leqslant 1 + \sqrt{2}$；

(2) $(\cos A)^2 + \cos B + \cos C > \dfrac{3}{4}$；

(3) $\cos A + (\cos B)^2 + (\cos C)^2 > \dfrac{3}{4}$；

(4) 设 λ 为实数，则 $\cos A + \lambda(\sin 2B + \sin 2C)$，$\sin A + \lambda(\cos 2B + \cos 2C)$，$\sin\dfrac{A}{2} + \lambda(\sin B + \sin C)$，$\cos\dfrac{A}{2} + \lambda(\cos B + \cos C)$ 的上界均为 $\sqrt{1 + 4\lambda^2}$.

$\cos 2A + \lambda(\sin 2B + \sin 2C) \leqslant 1 + (\lambda^2/2)$.

（宋庆"中学数学"1999，6：43 – 44）

93.(1) $\sum\sqrt{1 - \cos A\cos B} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$；(2) $\sum\sqrt{1 - \sin A\sin B} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

（张善立等，[100]586）

94. 设 $t \geqslant 0$，则 $\sum(\mathrm{tg}A)^t \geqslant 3^\alpha$， {等正}

式中 $\alpha = 1 + (t/2)$；若再令 $\beta = (t+2)/9$，则当 $t \geqslant 1$ 时，成立

$$\sum(\mathrm{tg}A)^t \geqslant 3^{3\beta}\left(\sum \mathrm{tg}A\right)^\beta \geqslant 3^\alpha > 3 + (3t/2).$$

见[19]135 和[231]117. 当 $t \geqslant 1$ 时，可利用 $f(x) = (\mathrm{tg}x)^t$ 在 $(0, \pi/2)$ 上的凸性.

95. 对于{锐}，$\sum \mathrm{tg}A = \prod \mathrm{tg}A \geqslant 3\sum \mathrm{ctg}A \geqslant 3\sqrt{3}$.

96. 对于{钝}，$\sum \mathrm{tg}A < 0$，$\prod \mathrm{tg}A < 0$.

97. $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sum(\mathrm{tg}A)^{2k}\right] \geqslant (9/2)(3^n - 1)$.（见[348]1987，7：33，31） {等正}

98. 设 $t \geqslant 1$，$\beta = 1 - (t/2)$，$\sum A = k\pi, k \in N$，则 $\sum|\mathrm{tg}(n + 1/2)A|^t \geqslant 3^\beta$；$\sum|\mathrm{ctg}nA|^t \geqslant 3^\beta$. 特别，对于{锐}，$\sum \mathrm{ctg}^2 A \geqslant 1$，见[19]93 – 94. 但若 $0 < t < 1$，$\sum A = k\pi, k \in N$，[19]P. 98 – 99 提出：当 k 为奇数，n 为非负整数时，$\sum|\mathrm{tg}(n + 1/2)A|^t$ 和当 n 为自然数时，$\sum|\mathrm{ctg}nA|^t$ 的最佳下界是什么？

99. $\sqrt{3} \leqslant (3/p)(2R - r) \leqslant \sum \mathrm{ctg}A \leqslant (2R^2 + r^2)/(pr) \leqslant (\sqrt{3}/4)(R/r)^2$. {等正}

100. (1) $\sum \mathrm{ctg}A \geqslant p/(3r)$；(2) $\sum \mathrm{ctg}A \geqslant \sqrt{\dfrac{9R}{4r} - \dfrac{3}{2}}$. {等正}

101. $1 \leqslant \dfrac{9(2R - r)^2}{4R^2 + 4Rr + 3r^2} - 2 \leqslant \sum \mathrm{ctg}^2 A \leqslant \dfrac{(2R^2 + r^2)^2}{r^3(16R - 5r)} - 2 \leqslant \dfrac{3R^3}{8r^3} - 2$. {等正}

102. $\sum \mathrm{ctg}^2 A \geqslant \dfrac{p^2}{9r^2} - 2$. {等正}

103. 对于{锐}，$\sum \mathrm{ctg}2A < 0$.

104. $\sum(\operatorname{ctg}(A/2))^t-\sum(\operatorname{tg}(A/2))^t\geqslant 3^\alpha-3^\beta$,式中 $\alpha=1+(t/2),\beta=1-(t/2),0<t<1$,或 $t>2$.

提示:$f(x)=(\operatorname{tg}x)^t$ 在$[0,\pi/2]$上当 $t>2$ 或 $0<t<1$ 时是三阶凸函数.于是可以利用本节前面的定理4.

105. 若 $t\geqslant 1$,令 $\beta=1-(t/2)$,则 $\sum(\operatorname{tg}(A/2))^t\geqslant 3^\beta$. {等正}

提示:利用 $f(x)=(\operatorname{tg}x)^t(t\geqslant 1)$ 在$(0,\pi/2)$上的凸性.特别地,有

$$\sum\operatorname{tg}(A/2)\geqslant\sqrt{3},\quad \sum\operatorname{tg}^6(A/2)\geqslant 1/9.$$

106. $\frac{2\sqrt{3}r}{R}\leqslant\frac{2(4R+r)}{3\sqrt{3}R}\leqslant\frac{4R+r}{2R+(3\sqrt{3}-4)r}\leqslant\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\leqslant\frac{4R+r}{3\sqrt{3}r}\leqslant\frac{\sqrt{3}R}{2r}$. {等正}

107. $\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\leqslant\frac{9Rr}{2S}$; $\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\leqslant\frac{p}{3r}$. {等正}

108. $3\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3t})\leqslant\sum\operatorname{tg}(\frac{A}{t})<\operatorname{tg}\frac{\pi}{t},(t\geqslant 2)$.

提示:利用 $f(x)=\operatorname{tg}(\frac{x}{t})(t\geqslant 2)$ 在$(0,\pi)$上的凸性.

109.(1) $\frac{2(6r^2-R^2)}{R^2}\leqslant\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\frac{3R^2-8r^2}{4r^2}$, {等正}

(2) $1\leqslant\frac{16}{9}\left[\sum\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2\right]^2\leqslant\sum\operatorname{tg}^2(\frac{A}{2})\leqslant\frac{16R^2-24Rr+11r^2}{r(16R-5r)}$. {等正}

110. $\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\sum\operatorname{tg}^3(\frac{A}{2})\leqslant\frac{9R^3}{8\sqrt{3}r^3}-\frac{8}{\sqrt{3}}$; $\sum\operatorname{tg}^3(\frac{A}{2})\geqslant\frac{3r}{p}$. {等正}

更好的下界估计见[19]183.

111. $\sum\operatorname{tg}^2(A/t)\geqslant 3\operatorname{tg}^2(\pi/3t).(t\geqslant 2)$.

112. 对于{锐},$\sum\operatorname{ctg}A\leqslant-\sum\operatorname{ctg}(2A)$.

113.(1) 令 $\alpha=1+(m/2),m\in Z$,则 $\sum(\operatorname{ctg}\frac{A}{2})^m\geqslant 3^\alpha$.

(2) $3^{1-\frac{n}{2}}\leqslant\sum\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^n\leqslant\sum(\operatorname{ctg}A)^n$.

114. $3\sqrt{3}\leqslant\left(1+\frac{13R}{r}\right)^{1/2}\leqslant\sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\leqslant 2(\frac{R}{r})+3\sqrt{3}-4\leqslant\frac{3\sqrt{3}R}{(2r)}$. {等正}

115.(1) $9R/(2r)\leqslant 8(R/r)-7\leqslant\sum\operatorname{ctg}^2(A/2)\leqslant[2(R/r)-1]^2$. {等正}

116. $\sum\operatorname{ctg}^2(A/2)\geqslant p^2/(3r^2)$. {等正}

117. $\sum\operatorname{ctg}^2(A/2)\geqslant[\sum\operatorname{ctg}(A/2)]\sum\operatorname{ctg}A$.

提示:令 $x=\operatorname{ctg}(A/2),y=\operatorname{ctg}(B/2),z=\operatorname{ctg}(C/2)$,转化为代数不等式.详见[3]2.44.

118. $9\sqrt{3}\leqslant 9\sqrt{3}(\frac{R}{2r})\leqslant 3\sqrt{3}[(\frac{4R}{r})-5]\leqslant\sum\operatorname{ctg}^3(\frac{A}{2})$

$\leqslant 3\sqrt{3}[2(\frac{R}{r})^3-4(\frac{R}{r})^2+\frac{3R}{2r}]$. {等正}

119. $\sum\sqrt{\operatorname{tg}(A/2)}\leqslant 3\cdot\sqrt{(4R+r)/(3p)}$. {等正}

120. $\sum \sqrt{\operatorname{ctg}(A/2)} \leqslant \sqrt{3p/r}$. {等正}

121. $\sum \operatorname{ctg}(A/4) \geqslant 3(2-\sqrt{3})+(2p/r) \geqslant 6+(p/r) \geqslant 3(2+\sqrt{3})$. {等正}

122. $1<\sum \operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(B/2)<\sqrt{3}$.

123. $\sum (\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(B/2)]^2 \geqslant (8R-7r)/(16R-5r) \geqslant 1/3$.

124. $\sum \sqrt{\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(C/2)+5} \leqslant 4\sqrt{3}$.

125. $9 \leqslant \sum \operatorname{ctg}(A/2)\operatorname{ctg}(B/2)=4(R/r)+1 \leqslant 9R/(2r)$.

126. $\sum \operatorname{ctg}(A/2)\operatorname{ctg}(B/2)-\sum \operatorname{ctg}(A/2) \geqslant 5-3\sqrt{3}+2(R/r) \geqslant 9-3\sqrt{3}$.

127. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则

(1) $\sum \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B \geqslant \sum \operatorname{ctg}(A/2)\operatorname{ctg}(B/2) \geqslant 9$; {等正}

(2) $\sum \operatorname{tg}A(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C) \geqslant 6$; (3) $\sum \operatorname{ctg}A(\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C) \geqslant 6$. {等正}

提示:令 $x=\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}B$ 等,并利用 $x+(1/x) \geqslant 2\ (x>0)$.

128. $6 \leqslant \sum (\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2})\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sum (\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2})\operatorname{tg}\frac{C}{2}=4(\frac{R}{r})-2$.

{等正}

129. $6(R/p)-2(R^2/rp)-3(r/p) \leqslant \prod \operatorname{ctg}A \leqslant r/p \leqslant 1/(3\sqrt{3})$. {等正}

130. $\frac{2r}{3\sqrt{3}R} \leqslant \frac{r}{2R+(3\sqrt{3}-4)r} \leqslant \prod \operatorname{tg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}$. {等正}

提示:利用 $f(x)=\log\operatorname{tg}x$ 在$(0,\pi/2)$上的凸性.

131. $\triangle ABC$ 为锐角三角形的充要条件是 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>1$;若 $C \geqslant \pi/2$,则 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B<1$.

132. 对于{钝}, $\prod \operatorname{ctg}A<0$.

133. $4R/(3\sqrt{3r}) \leqslant \prod (\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B) \leqslant (2/(3\sqrt{3}))(R/r)^2$. {等正}

134. $\frac{8}{3\sqrt{3}} \leqslant \prod (\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}) \leqslant \frac{4R}{3\sqrt{3}r}$. {等正}

135. $12\sqrt{3}(R/r) \leqslant \prod [\operatorname{ctg}(A/2)+\operatorname{ctg}(B/2)] \leqslant 6\sqrt{3}(R/r)^2$. {等正}

136. 设 $\sum A=k\pi$, k 为奇数, $t>0$,令 $\beta=1-(t/2)$,则

$$\sum |\sec(n+(1/2))A|^t \geqslant 2^t 3^\beta.$$

137. 对于{锐},有 $\sum \sec A \geqslant 6$; $\sum \sec A \geqslant \frac{4R}{r}-\frac{2r}{R}-1$. {等正}

138. 对于{锐}, $\sum (\sec A)^n \geqslant 3\times 2^n$,而对于{钝}, $\sum \sec^2 A>3$.

139. (1) 设 $\sum A=k\pi$, $k \in N$, $t>0$,令 $\beta=1-(t/2)$,则

$$\sum |\csc(nA)|^t \geqslant 2^t 3^\beta;$$

(2) $\sum (\csc A)^n \geqslant 2^n \times 3^{1-\frac{n}{2}}$.

140. $2\sqrt{3} \leqslant \frac{2(5R-r)}{p} \leqslant \sum \csc A \leqslant \frac{2(R+r)^2}{pr} \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}(\frac{R}{r}+1)^2 \leqslant \frac{\sqrt{3}R^2}{2r^2}$.

{等正}

141. $\left(\frac{25R}{4r}-\frac{1}{2}\right)^{1/2}\leqslant\sum\csc A\leqslant 2p/(3r)$. {等正}

142. $\sum\csc^2A\geqslant 27(R/p)^2$.

143. $\frac{4(5R-r)^2}{4R^2+4Rr+3r^2}-\frac{4R}{r}\leqslant\sum\csc^2A\leqslant\frac{4(R+r)^4}{r^3(16R-5r)}-\frac{4R}{r}$. {等正}

144. (1) $\sum\csc(\frac{A}{2})\geqslant 7-\frac{2r}{R}$.

(2) $(p/R)+3(2-\sqrt{3})\leqslant\sum\csc(A/2)<(p/R)+1$.

145. $6\leqslant 9\sqrt{3}(\frac{R}{p})\leqslant\sum\csc(\frac{A}{2})\leqslant 2(\frac{R}{r}+1)$（刘保乾等[100]P592）.

146. $\sum\sec^2(A/2)\geqslant 5-\frac{r}{R}$.

147. $\sum\csc^n(A/2)\geqslant 2^n\times 3$.

148. $\sum\csc(2A)\geqslant\sum\csc A\geqslant\sum\sec(A/2)\geqslant 2\sqrt{3}$.

149. $\sum\csc A\geqslant(9/4)\prod\sec(A/2)$.

提示：令 $x=\sin A, y=\sin B, z=\sin C$，利用代数不等式$(\sum x)(\sum 1/x)\geqslant 9$.

150. $\sum\sec A\sec B\geqslant 12$. {等正}

151. $\prod\mathrm{ctg}A\leqslant(8\sqrt{3}/9)\prod\sin(A/2)\leqslant\prod\mathrm{tg}(A/2)$

$\leqslant(8/27)\prod\cos(A/2)\leqslant\sqrt{3}/9\leqslant(1/27)\prod\mathrm{ctg}(A/2)$. 见[34]76－77.

152. $\prod\mathrm{ctg}(A/2)>\pi(1+\prod\cos(A/2))$.

153. $\sum\sec(A/2)\leqslant 2\sum\mathrm{tg}(A/2)\leqslant 9R^2/(2S)$.

154. 对于{锐}，有

$$\sum\sec A\sec B\geqslant 3\sum\csc A\csc B\geqslant\sum\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\geqslant(\frac{4\sqrt{3}}{3})\prod\mathrm{ctg}(\frac{A}{2})$$

$$\geqslant(\frac{9\sqrt{3}}{2})\prod\sec(\frac{A}{2})\geqslant 3\sum\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}.$$

见[348]1990,1:43.和[350]1992,5:37－38.

155. $\sum\frac{\mathrm{tg}(A/2)}{\csc B+\csc C}\geqslant\frac{3r}{2R}$.

156. $\sum\sqrt{\mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(B/2)}\sec(A/2)\leqslant 2$.

157. 若 $\log\mathrm{tg}A,\log\mathrm{tg}B,\log\mathrm{tg}C$ 成等差数列，则 $\pi/3\leqslant B<\pi/2$.

158. 对于{锐}，若 $\sin B=3\cos A\cos C$，则 $\pi/3<B<\pi/2$.

159. $\sum\csc A\csc B\geqslant 4$.

160. 对于{锐}，当 $t\geqslant 1$ 时，有

$$(2^t-1)^3\leqslant\prod[(\sec A)^t-1]\leqslant(1-2^{-t})\prod(\sec A)^t.$$ {等正}

左边不等式见安徽教育学院学报 1989,2.林祖成利用拉格朗日乘子法给出了一个证明.

161. 对于{锐}，$\sum\sin A+\sum\mathrm{tg}A>2\pi$;

162. $\sum\sin A > \min\{\operatorname{tg}\frac{A}{8},\operatorname{tg}\frac{B}{2},\operatorname{tg}\frac{C}{2},\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\}+2.$

163. **G-B 不等式(Garfunkel-Bankoff 不等式):**

$$2-8\prod\sin(A/2)\leqslant\sum\operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)\leqslant\frac{1}{4}\prod\csc\left(\frac{A}{2}\right)-1. \qquad \{等正\}$$

提示:利用 $f(x)=\operatorname{tg}^2(x/t)$ 当 $t\geqslant 2$ 时在 $(0,\pi)$ 上的凸性,它可改进为

$\sum\operatorname{tg}^2(A/2)\geqslant 1+[1-8\prod\sin(A/2)]/M^2$,式中

$M=\max\{\cos(A/2),\cos(B/2),\cos(C/2)\}$. 见[348]1991,10:18.

164. $\sum\sin(A/2)\cdot\sum\operatorname{ctg}(A/2)\geqslant 9\sqrt{3}/2.$

165. $(\sum\operatorname{tg}^2(A/2))\prod\cos A\leqslant 1/8.$ (见[350]1992,2:23)

166. $\sum\sec A\leqslant\sum(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)-3.$

167. $\sum\sec(A/2)\leqslant 2\sum\operatorname{tg}(A/2)\leqslant\sum\csc A\leqslant 2\sum\operatorname{ctg}A.$

168. 对于{锐},有 $\sum\operatorname{ctg}(A/2)\leqslant(3/2)\sum\csc(2A).$ {等正}

见[381]1986,12:51,和 1987,13:200 - 201.

169. $\sqrt{3}\leqslant\sum\operatorname{tg}((\pi-A)/4)\leqslant\sum\operatorname{tg}(A/2)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}\sum\csc\left(\frac{A}{2}\right)\leqslant$

$\leqslant(1/3)\sum\operatorname{ctg}(A/2)\leqslant\sum\operatorname{ctg}A\leqslant(9/8)\prod\csc A.$

170. $\sum\operatorname{ctg}A-3\prod\operatorname{ctg}A\geqslant 2\sqrt{3}/3.$

171. 对于{锐},$(\prod\operatorname{tg}A)(\prod\sin A)\geqslant 27/8.$ {等正}

172. $\frac{3\sqrt{3}}{4}\sum\sec\left(\frac{B}{2}\right)\sec\left(\frac{C}{2}\right)\leqslant\sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\sum\csc\left(\frac{B}{2}\right)\csc\left(\frac{C}{2}\right).$

(刘保乾等,[100]P585 - 586)

173. $\sum\sec\left(\frac{A-B}{2}\right)\leqslant 2+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right).$ (尹华焱 - 张小明,[100]P588)

174. $6\sum\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)\leqslant 2\sum\csc A+\sum\sec\left(\frac{A}{2}\right).$ (刘保乾,[100]P589)

175. (1) $\sum\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sum\csc\frac{A}{2}\geqslant 10-\left(\frac{2r}{R}\right)^4;$

(2) $\sum\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2\sum\left(\csc\frac{A}{2}\right)^2\geqslant 10-\left(\frac{2r}{R}\right)^{17}.$ (刘保乾等,[100]P592)

176. $$8\prod\cos A\overset{①}{\leqslant}3\sqrt{3}\prod\operatorname{ctg}A\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{9}\prod\sin A\leqslant 8\prod\sin\frac{A}{2}\leqslant 3\sqrt{3}\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\leqslant\frac{2}{3}\sum\cos A\leqslant\frac{2}{3}\sum\sin\frac{A}{2}\leqslant 1\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^{-1}$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sum\sin A\right)^{-1}=\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\prod\cos\frac{A}{2}\right)^{-1}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}\sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\prod\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\sum\operatorname{ctg}A\overset{⑫}{\leqslant}\frac{\sqrt{3}}{9}\sum\operatorname{tg}A=\frac{\sqrt{3}}{9}\prod\operatorname{tg}A.$$

其中 ① 与 ⑫,即首尾两个不等式仅当锐角三角形时才成立.(陈胜利,福建中学数学,1989,4:19 - 20)

三、　三角形边角不等式

1.　$\sin(\frac{A}{2}) \leqslant \frac{a}{a+b}$,仅当 $b=c$ 时等号成立.

2.　$a \geqslant b\cos B + c\cos C$.提示:利用正弦定理.

3.　$2R \geqslant \sqrt{bc}\sec(A/2)$.见[348]1989,5:3.

4.　[MCM].若 $C \geqslant \pi/3$,则 $(a+b)\sum(1/a) \geqslant 4 + \csc(C/2)$.

5.　[MCM].若 a,b,c 成等差数列,则 A、B、C 中有两个小于 $\pi/3$.

提示:设 $b=a+d, c=a+2d$,(公差为 $d>0$),只要证 $B<\pi/3$.利用余弦定理证

$$\cos B > 1/2.$$

6.　若 $\sin A,\sin B,\sin C$ 成等差数列,则 $\cos B \geqslant b^2/(2ac)$.(见[350]1985,3:35)

7.　若 A,B,C 及 $\log a,\log b,\log c$ 均成等差数列,则对于任意实数 x,有

$$x^2\cos A + x + 1 > 0.$$

提示:证 $\triangle ABC$ 为等边,从而 $x^2\cos A + x + 1 = (1/2)[(x+1)^2+1] > 0$.

8.(1)　若 $2b < a+c$,则 $2B < A+C$.

(2)　若 $a^2 < b^2+c^2$,则 $A < \pi/2$;　若 $a^2 > b^2+c^2$,则 $A > \pi/2$.

(3)　若 $C=3B$,则 $b<c<3b$.

9.　**Bottema 不等式**:若 $A>B>C$,则

$$2R\cos A < R-d < 2R\cos B < R+d < 2R\cos C.$$

见[3]43.式中 d 是外心与内心的距离.

10.　对于{锐},有 $\sum \cos A < p/R$.

11.　设 $f(x,y,z) = \sum(Ax)/(\sum x)$,则

$$f(\cos A,\cos B,\cos C) \leqslant \pi/3 \leqslant f(a,b,c) < \pi/2. \qquad \{等正\}$$

若 $A \leqslant B \leqslant C$,则 $f(a,b,c) \leqslant (\pi - A)/2$;

$$f(a,b,c) \leqslant (\pi/2)[1 - \mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(B/2)].$$

证明见[3]3.4.

12.　$\sum(aB+bA) \leqslant 2\sum(aA)$.

13.　$\frac{\sum(aB-bA)^2}{(\sum a)^2} < \frac{\pi^2}{4}$.

上界不能再改进.[3]3.5 指出,Leko.T.有一极复杂的证明,希望能有一个较简单的证明.

14.　设 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形,则

$$\frac{\pi^2}{\sum(aA)} \leqslant \sum(\frac{A}{a}) \leqslant \frac{3\pi}{\sum a}. \qquad \{等正\}$$

15.　$3\sum a \leqslant \pi \cdot \sum(a/A) \leqslant 9\sqrt{3}R$,左边不等式对任意三角形成立,而右边不等式只对非钝角三角形成立.

提示:利用 $f(x) = (\sin x)/x$ 在 $(0,\pi/2)$ 内递减和第一章 Chebyshev 不等式.见[305]1977,84:294.

16.　$\pi\sum(a^2/A)\leqslant 3\sum a^2$，见 Oppenheim, A. [305]1977, 84:294.

17.　设 $A\geqslant B\geqslant C$，则 $\sum a(C-B)\geqslant 0$，见[363]1977, 82:20, 179 - 180.

18.　$\frac{b}{c}>\frac{B}{A+B},\frac{a}{c}>\frac{A}{A+B}$.　(见[305]1927, 34:247 - 250)

19.　$(\prod a)(\prod A)\geqslant rS(2\pi/3)^2$.

20.　$(\prod a)\prod(\pi-A)\geqslant Sp(4\sqrt{3}\pi/9)^3$.

提示：利用 $x/\sin x$ 的凸性和 Jensen 不等式.

21.　$\frac{2bc\cos A}{b+c}<b+c-a<\frac{2bc}{a}$.　(证明见[3]3.6)

22.　若 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $2\cos^2(C/2)\leqslant\sum a/(b+c)\leqslant 2\cos^2(A/2)$.

推广：令 $f(t)=\sum a^t/(b^t+c^t)$，$g(t)=2^{t-1}[\sin(C/2)]^t$，$\varphi(t)=2^{t-1}t^{-t/2}$，则

(1)　当 $t<0$ 时，$0<f(t)\leqslant g(t)$；

(2)　当 $0<t\leqslant 1$ 时，$g(t)\leqslant f(t)<1$；

(3)　当 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时，$\min\{1,g(t)\}\leqslant f(t)\leqslant\max\{g(t),\varphi(t)\}$；

(4)　当 $t\geqslant 2$ 时，$\min\{g(t),\varphi(t)\}\leqslant f(t)\leqslant\max\{1,g(t)\}$.

见 Simon, Stevin, 1949, 26:129 - 134.

23.　设 $a\geqslant b\geqslant c$，α,β,γ 是任意三角形的三内角，则

$bc+ca-ab<\sum(bc\cos\alpha)\leqslant(1/2)\sum a^2$，

仅当 $A=\alpha, B=\beta, C=\gamma$ 时等号成立，特别，取 $A=2\pi/3, B=C=\pi/6$，得到

$$1<\cos\alpha+\sqrt{3}(\cos\beta+\cos\gamma)\leqslant 5/2.$$

见 Monatsh, Math. 1962, 66:174 - 178.

24.　$0<r<(a/2)[\sec(A/2)-\operatorname{tg}(A/2)]$.

25.　$a<r_a<(a/2)[\sec(A/2)+\operatorname{tg}(A/2)]$.

26.　$0<r_b$(或 r_c)$<(a/2)[\operatorname{ctg}(A/2)+\csc(A/2)]$，证明见[19]198.

27.　$9r\leqslant 12r(1-r/(2R))\leqslant\sum a\sin A\leqslant 4R+(2r^2/R)\leqslant 4R+r\leqslant 9R/2$.

{等正}

提示：利用 $\sum a\sin a=(\sum a^2)/(2R)$. 由此还可以证明 $\sum a\sin A\geqslant 2\sqrt{3}S/R$.

28.　$54S\leqslant(\sum a)^2(\sum\sin A)\leqslant(9\sqrt{3}/2)\sum a^2$.　{等正}

29.　$\sum a^n\cos A\leqslant(1/3)(\sum a^n)(\sum\cos A)\leqslant(1/2)\sum a^n\leqslant\sqrt{(p/2)(\sum a^{2n-1})}$.
见[19]169.

30.　$\sum a\cos A\leqslant(3/2)\sum l_a\sin A\leqslant p$.（见[381]1987, 13:119）

31.　设 $0\leqslant t\leqslant 3$，则

$$\sum a^n(\sin\frac{A}{2})^t\geqslant\frac{1}{3}(\sum a^n)\sum(\sin\frac{A}{2})^t\geqslant 2^{3-t}(\sum a^n)\prod\sin(\frac{A}{2}).$$

见[19]169.

32.　$\prod(1-\frac{a}{b+c})\leqslant\prod\sin\frac{A}{2}$.　{等正}

见[363]1957,8:47.

33. $9r \leqslant \sum a\cos(A/2) \leqslant \sqrt{3}p \leqslant 2\sqrt{3}R + (9-4\sqrt{3})r \leqslant 9R/2.$ {等正}

见[348]1990,6:20 - 21.

34. $\sum \frac{a}{b+c}(\sin\frac{A}{2})^t \geqslant \frac{3}{2^{t+1}}$, 式中 $t \geqslant 2\log_2 3 - 2$. (吴跃生,[100]P586)

35. $\sum \frac{a}{b+c}\cos B\cos C \leqslant \frac{4R+r}{12R} \leqslant \frac{3}{8}$.(刘健,陈胜利等[100]P.427 - 432)

36.(1) 设 $t \geqslant 1$,则

$$\sum \frac{a}{b+c}(\mathrm{ctg}\frac{A}{2})^t \geqslant (\sqrt{3})^{t-3}\frac{(4R+r)^2}{Rp} \geqslant \frac{3^\beta}{2},\text{式中 } \beta = 1 + \frac{t}{2}.$$

(吴跃生,[100]P.432 - 436)

(2) $\sum a^2 \mathrm{tg}A \geqslant \frac{4rp^3}{2R^2+r^2}$.

37. 令 $t = (n+3)/2, n \geqslant 1$,则

$$2^{n-1}3^t r^n \leqslant \sum a^n \cos(A/2) \leqslant [(3p/2)\sum a^{2n-1}]^{1/2}.$$ {等正}

38. 若 $0 \leqslant t \leqslant 2$,则

$$\sum a^n(\cos\frac{A}{2})^t \leqslant \frac{1}{3}(\sum a^n)\sum(\cos\frac{A}{2})^t \leqslant (\frac{3}{4})^{t/2}(\sum a^n) \leqslant 3^{t/2}2^{1-t}(\frac{p}{2}\sum a^{2n-1})^{1/2}.$$

39.(1) $\sum \frac{1}{a}\cos\frac{A}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2r}$; (2) $\sum(1/a)\cos^2(A/2) \geqslant \frac{3\sqrt{3}p}{8S} \geqslant \frac{27r}{8S}$. {等正}

40. $\sum \sqrt{a}\cos(A/2) \geqslant (3/(2R))(abc)^{1/2}$.

41. $\prod(\sin A\sin B)^c < \prod(\sin A)^a$.

42. $\sum \frac{\cos A}{a} + \frac{\sqrt{3}}{2R} < \sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{R}\sum \mathrm{ctg}A$.

43. $\sum \mathrm{ctg}A \geqslant \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{(\sum a)(\sum a^2)}{\prod a}$. (见[305]1966,73:199) {等正}

44. 对于{锐},有$\sum\sqrt{\mathrm{ctg}^2A + \mathrm{ctg}^2B} \geqslant \sqrt{6}(\sum a)(\sum a^2)(9\prod a)^{-1}$.

见[348]1989,12:41.

45. $$\sum a^n(\mathrm{tg}\frac{A}{2})^t \geqslant \frac{1}{3}(\sum a^n)\sum(\mathrm{tg}\frac{A}{2})^t$$

$$\geqslant \begin{cases} 3^{-t/2}(\sum a^n) \geqslant 3^t(\sum a^n)\prod(\mathrm{tg}\frac{A}{2})^t, & t \geqslant 1, \\ 3^{(3-t)/2}(\sum a^n)(\prod \mathrm{tg}\frac{A}{2}), & 0 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

46. $3R \leqslant \sum a\,\mathrm{tg}(A/2) \leqslant 5R - 4r$. {等正}

提示:利用$\sum a\,\mathrm{tg}(A/2) = 2(2R - r)$.

47. $\sum a^2\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} \geqslant \frac{4S^2}{r(4R+r)}$.(见[19]P.684) {等正}

48. $\sum(a+b)(\sec\frac{C}{2})^t \geqslant 4p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t$,式中 $t \geqslant 1$.

49. $\frac{3}{p} \leqslant \frac{9\sqrt{3}R}{2p^2} \leqslant \sum \frac{(\sec\frac{A}{2})^2}{b+c} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}r}$. {等正}

50.(1) $(4/27)(\sum a)^3 \leqslant \sum a^3\csc^2 A \leqslant 12\sqrt{3}R^3$. {等正}

(2) $\sum \frac{a\sec A}{b^2+c^2} \geqslant \frac{p}{3Rr}$. {等正}

(3) $\sum a^2(\sec\frac{A}{2})^3 \geqslant 8R^2\sqrt{3}$.

(4) $\sum ab(\sin A)^2 \leqslant p^2$; $\sum ab(\cos A)^2 \leqslant p^2$.

(5) $\frac{1}{2R}\sum bc(\sec\frac{B}{2})(\sec\frac{C}{2}) \leqslant \sum a\sec(\frac{A}{2}) \leqslant 6R$. ([36]P.626)

四、 三角形其他元素(高、中线、内角平分线、旁切圆半径)不等式

(一) 三角形高的不等式

1. $h_a \leqslant \sqrt{bc}\cos(A/2)$.

2. $h_a \leqslant 2R\cos^2(A/2)$.

3. $h_a \leqslant (a/2)\mathrm{ctg}(A/2)$.

4. $9r \leqslant (2r/R)(5R-r) \leqslant \sum h_a \leqslant (2/R)(R+r)^2$
$\leqslant 2R+5r \leqslant 3(R+r) \leqslant 9R/2$; {等正}

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则 $\sum h_a \geqslant 2R+4r+(r^2/R)$;
若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,不等号反向.

5. $p < \sum h_a \leqslant \sqrt{3}p$. {等正}

6. $\sum h_a \leqslant \sqrt{3}\sum\sqrt{p-a} \leqslant 3\sqrt{p}$. {等正}

7. $27r^2 \leqslant \sum h_a^2 \leqslant 4R^2+11r^2$. {等正}

8. (1) $3^{1+n}r^n \leqslant \sum h_a^n < [(2^n-1)/2^n]\sum a^n, (n>2)$.

(2) $\sum \frac{1}{h_a^n} \geqslant \frac{2^n \cdot 3^{1-n}}{R^n}$.

9. $\sum h_a(p-a) \geqslant 3S$. (见[345]1991,10:17 - 19)

10. $\sum\sqrt{b^2+c^2-h_a^2} \leqslant 6R$.

11. $3\sqrt{3r} \leqslant \sum\sqrt{h_a} \leqslant (1+(r/R))\sqrt{6R} \leqslant (3/2)\sqrt{6R}$.

$$\sum\sqrt{h_a} \leqslant \sqrt{3\sqrt{3}p}.$$ {等正}

12. $(3/4)\sum ab \leqslant \sum h_a h_b \leqslant 3\sqrt{3}S$.

13. $27r^2 \leqslant (2r^2/R)(16R-5r) \leqslant \sum h_a h_b \leqslant (2r/R)(4R^2+4Rr+3r^2) \leqslant (27/2)Rr$.

14. $28r^2 - r^2(\frac{2r}{R})^8 \leqslant \sum h_a h_b$

15. $\sum a(h_b+h_c-h_a) \geqslant 6S$.

16. 设 $A\geqslant B\geqslant C$,则 $\sum(h_b/h_c)\geqslant\sum(h_c/h_b)$,仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时等号成立.

17. $\frac{1}{r}=\sum\frac{1}{h_a}\geqslant\frac{2}{R}$. {等正}

18. $\sum(1/h_a)\geqslant 3\sqrt{3}/p$.

19. $\frac{2}{3Rr}\leqslant\sum\frac{1}{h_a^2}\leqslant\frac{R}{6r^3}$.

20. $\frac{2}{3Rr}\leqslant\sum\frac{1}{h_ah_b}\leqslant\frac{R}{6r^3}$.

21. $\sum\frac{a^2}{h_bh_c}\geqslant 4$. {等正}

22. $3R\leqslant\sum a^2/(h_b+h_c)<4R$.

23. $4\sqrt{3}(\frac{r}{R})^2\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}(\frac{7R-2r}{9R-2r})\leqslant\sum\frac{a}{h_b+h_c}\leqslant\sqrt{\frac{3R}{2r}}$. {等正}

24. $3/2\leqslant\sum(h_a-r)/(h_a+r)<5/3$.

25. $6\leqslant\frac{19}{3}-\frac{2r}{3R}\leqslant\sum(h_a+r)/(h_a-r)\leqslant 7-\frac{2r}{R}$.(张小明,[100]P577)

26. $\sum\frac{1}{h_a-2r}\geqslant\frac{3}{r}$.

27. $6\leqslant\frac{7R-2r}{R}\leqslant\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}\leqslant\frac{2R^2+Rr+2r^2}{Rr}\leqslant\frac{7R-2r}{2r}$. {等正}

28. $\sum a^2/(h_b^2+h_c^2)\geqslant 2$.

29. $27r^3\leqslant(2r^3/R)(16R-5r)\leqslant\prod h_a\leqslant(2r^2/R)(4R^2+4Rr+3r^2)\leqslant(27/2)r^2R$. {等正}

30. $216r^3\leqslant\prod(h_a+h_b)\leqslant 54R^2r$.

(二) 三角形中线不等式

1. $(b+c-a)/2<l_a<(b+c)/2$.

2. (1) $bc-(a^2/4)\leqslant l_a^2<bc+(a^2/4)$. (2) $l_a^2\geqslant p(p-a)$.

3. $(a/4)(8p-9a)\leqslant l_a\leqslant\sqrt{3}p-\sqrt{p(p-b)}-\sqrt{p(p-c)}$. {等正}

4. $l_b+l_c\leqslant(3/4)\sum a$.

仅当三角形的三边为 $b+1,b,1$ 时等号成立.[19]P214.

5. $l_bl_c\geqslant(a^2/2)-b^2-c^2+(9bc/4)$.(见[348]1991,11:14)

6. $3p/2<\sum l_a<2p$.

7. $9r\leqslant\sum l_a\leqslant 4R+r\leqslant 9R/2$.

8. $\sqrt{9\sqrt{3}S}\leqslant\sum l_a\leqslant(4p^2-16Rr+5r^2)$.([100]490) {等正}

9. $\sum l_a\geqslant a+b$.

等式仅当三边为 $b+1,b,1$,而中线为 $(b-1)/2,(b/2)+1,b+(1/2)$ 时成立.

注　这是 Oppenheim, A. 对于 Erdös, P. 所提问题：$\sum l_a = a + b + tc$ 对 $t \geqslant 0$ 是否成立的回答之一，详见[19]214.

10.　$(\sum l_a)(\sum 1/a) > 15/2$.（见[348]1991, 11:14）

11.　(1)　$27r^2 \leqslant 9r(2R - r) \leqslant \sum l_a^2 \leqslant 3(3R^2 + r^2) \leqslant (27/4)R^2$.

(2)　$\frac{2}{3Rr} \leqslant \sum (\frac{1}{l_a})^2 \leqslant \frac{1}{3r^2}$.

12.　$\sum ab - (1/4)\sum a^2 \leqslant \sum l_a^2 \leqslant \sum ab + (1/4)\sum a^2$.

13.　$4R\sum (al_a) \geqslant \sum bc(b + c)$.

14.　$\sum al_a^2 \geqslant 9RS$.

15.　$r\sum l_a^2 \leqslant \prod l_a$.

16.　$\sum l_a^t < \sum a^t < (4^t/3)\sum l_a^t \quad (t \geqslant 1)$.（见[348]1991, 8:21 - 24）

17.　(1)　$\sum l_a^6 \geqslant p^4(p^2 - 12rR)$；　(2)　$\sum l_a^n \geqslant p^n \times 3^{1-\frac{n}{2}}$；

(3) $\sum \frac{1}{l_a^n} \geqslant \frac{2^n \times 3^{1-n}}{R^n}$.

18.　$\sum a(l_b + l_c - l_a) \geqslant 6S$.

19.　$(9/20)\sum ab < \sum (l_a l_b) < (5/4)\sum ab$.（[331]1971, (357 - 380):81 - 85）

20.　$9r(R + r) \leqslant \sum l_a l_b \leqslant 5R^2 + (9/4)Rr + (5/2)r^2$.

21.　$\sum (l_a l_b)^2 \geqslant rp^2(4R + r) \geqslant 9S^2$.

22.　$-4Rr + 61r^2 \leqslant 4\sum l_a l_b - 5p^2 \leqslant -20Rr + 13r^2$.

它等价于　$-28Rr + 29r^2 \leqslant (\sum l_a)^2 - 4p^2 \leqslant -16Rr + 5r^2$.

（褚小光，杨学枝，[100]P571）

23.　**Janous 不等式**：　$\frac{5}{p} < \sum \frac{1}{l_a} \leqslant \frac{1}{r}$.

24.　$\sum (1/l_a) \geqslant 3\sqrt{3}/(p + q)$，式中 $q = \frac{3\sqrt{3} - 5}{10}\sum |a - b|$.

（石世昌，见[348]1993, 8:26 - 28）

25.　$\sum (l_a/a) \geqslant 3\sqrt{3}/2$.

26.　$\sum (l_a/a)^2 \geqslant 9/4$.

27.　$\frac{2}{R^2 + 2r^2} \leqslant \sum (\frac{1}{l_a l_b}) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{S}$.　{等正}

28.　$\sum \frac{l_a}{b + c} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{r}{R}$.　{等正}

29.　$\frac{9}{4} \leqslant \sum \frac{l_a^2}{bc} \leqslant \frac{2R + 5r}{4r} \leqslant \frac{9R}{8r}$.　{等正}

30.　**Bager 不等式**：$\sum a^2/(l_b l_c) \geqslant 4$.

31.　$\sum (l_a l_b)/(ab) \geqslant 9/4${锐}.　{等正}

32. (1) $\sum \frac{ab}{l_a l_b} \geqslant 4$; (2) $\sum \frac{ab}{l_a^2 + l_b^2} \geqslant 2$. {等正}

33. $\sum (l_a l_b)^2/(ab) \geqslant (81/4) r^2$. {等正}

34. $\sum a^2/(l_b^2 + l_c^2) \leqslant 2$. {等正}

35. [MCM]. $\sum l_a^2/(b^2 + c^2) \leqslant 9/8$. {等正}

36. $\frac{3}{4}(1 + \frac{r}{R}) \leqslant \sum \frac{l_a^2}{b^2 + c^2} \leqslant 1 + \frac{r}{4R}$.

37. $\frac{1}{2} + \frac{r}{8R} \leqslant \sum \frac{l_a^2}{(b + c)^2} \leqslant \frac{3}{4}(1 - \frac{r}{2R})$.

38. $(\sum l_a)(\sum \frac{1}{l_a}) \geqslant 10 - \frac{2r}{R}$.(褚小光,尹华焱)

39. $\sum l_a^3 \leqslant 10R^3 - \frac{3}{4}Rr^2 + \frac{5}{2}r^3$.(石世昌)

40. $\sum \frac{l_a}{l_b + l_c}(\sin \frac{A}{2})^2 \leqslant \frac{3}{8}$.(吴善和)

41. $(\sum a)(\sum \frac{1}{l_a}) \geqslant \left(\frac{63R + 90r}{2r}\right)^{1/2}$.(杨学枝)

(以上 N.36 - 41 见[100]P572 - 573)

42. [MCM]. $\sum \frac{a^2 + b^2}{l_a} \leqslant 12R$.([348]1995,4:32)

(三)　三角形内角平分线不等式

1. $t_a \leqslant \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$.

2. $t_a \leqslant \sqrt{p(p - a)}$.

3. 若 $R = 1$,则 $t_a \leqslant (\cos \frac{A}{2})^2 \cos(\frac{B - C}{2})$.

4. $p + 3(3 - \sqrt{3}) r \leqslant \sum t_a \leqslant \sqrt{p} \sum \sqrt{p - a} \leqslant \sqrt{3} p$.

5. (1) $\frac{3\sqrt{3}}{p} \leqslant \left(\frac{2}{Rr}\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{3\sqrt{3}}{S}\right)^{1/2} \leqslant \sum \frac{1}{t_a} < \frac{3R}{S}$.

(2) $\frac{1}{2r} + \frac{1}{R} + \frac{\sqrt{2} - 1}{4R}(\frac{p}{r} - 3\sqrt{3}) \leqslant \sum \frac{1}{t_a} \leqslant \frac{1}{2R} + \frac{1}{4r}$.

(杨学技等,见[100]P.575,473 和[350]1995.2)

6. $\frac{p}{2r} + \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sum \frac{a}{t_a} \leqslant \frac{\sqrt{2}p}{2r} + \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{6}}{2}$.(吴善和.[100]P576)

7. (1) $\sum \frac{t_a}{a} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$; (2) $\sum \frac{t_a}{\sqrt{bc}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\sum \frac{1}{t_a t_b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{S}$.(杨学技等,[100]P.576,473.)

8. **Janous 不等式:** 若 $\lambda > 0$,则 $\sum t_a^\lambda \geqslant 3^{\lambda+1}(Rr^2/2)^{\lambda/3} \geqslant 3^{\lambda+1} r^\lambda$. {等正}

而当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时,有 $\sum t_a^\lambda \leqslant 3(p/\sqrt{3})^\lambda \leqslant 3(3R/2)^\lambda$. {等正}

9. $(8/9)p^2 \leqslant \sum t_a^2 \leqslant p^2$.

10. $3\sqrt{3}S \leqslant (27/2)Rr \leqslant \sum t_a^2 \leqslant p^2 - r(R/2 - r) \leqslant (27/4)R^2$. {等正}

提示:利用 Stewart 公式:$t_a^2 = bc - a^2bc/(2p-a)^2$,令 $f(t) = t(2p-t)^{-2}$,得到 $\sum t_a^2 = \sum ab - (\prod a)\sum f(a)$. 再利用 $f(t)$ 在$(0,2p)$上的凸性和海伦公式即可得证.

11. 设 $0 < \lambda \leqslant 1$, x, y, z 为正数,则 $\sum x t_a^\lambda \leqslant (\sqrt{3}p/3)^\lambda \sum (yz/x)$,仅当 $x = y = z$, $A = B = C$ 时等号成立. 见[350]1991.5.

12. $\sum t_a^4 \leqslant (9/16)\sum a^4$.

13. (1) $\sum t_a^6 \leqslant p^4(p^2 - 12Rr)$; (2) $\sum \frac{1}{t_a^n} \geqslant \frac{3^{1+\frac{n}{2}}}{p^n}$. {等正}

14. $\sum (at_a)^2 \leqslant 81R^2r^2$.

15. $6rp \leqslant \sum at_a \leqslant 2p^2/\sqrt{3}$; $\sum at_a \leqslant 9\sqrt{3}Rr$.

16. $\sum a(t_b + b_c - t_a) \geqslant 6S$.

17. 设 λ 为实数,则

(1) $\sum (at_a)^\lambda \leqslant (1/2)p(\prod a)(\sum a^{\lambda-2})$. {等正}

(2) $(\sum a^\lambda t_a)^2 \leqslant (3/2)p(\prod a)\sum a^{2(\lambda-1)}$. {等正}

18. $\sum (t_at_b)^2 \leqslant rp^2(4R + r)$.(见[305]1963,70:891,1964,71:687) {等正}

19. $\frac{16r}{9}(4R + r) < \sum t_at_b \leqslant 3r(4R + r)$.

20. $\sum t_a^2 \geqslant \sum t_at_b \geqslant 3\sqrt{3}S$. 刘健[31]P.90 - 96.

21. **Janous 不等式:** $\sum at_bt_c \leqslant Rp^3/(3r)$. {等正}

22. $3/2 \leqslant \sum \sqrt{1 - t_a^2/(bc)} < 3$.

23. $\sum (ab/t_c) \geqslant 4p/\sqrt{3}$.

24. $\sum (at_a)^{-1} \geqslant 4p/(\sqrt{3}\prod a)$. {等正}

25. $\sum (t_at_b/t_c)(p - c) \leqslant 3S$.

26. $\sum t_a^{-2} \geqslant 9/p^2$; $\sum t_a^{-n} \geqslant 3^{1+\frac{n}{2}}p^{-n}$.

27. $\sum (b^2 + c^2)/t_a^2 \geqslant 8$. 见[331]1973(412 - 460):155 - 157. {等正}

28. (1) $\sum \frac{t_a^2 + t_b^2}{a^2 + b^2} > 2$; (2) $\sum \frac{t_a + t_b}{a + b} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

29. $\sum \frac{t_a}{t_bt_c} \geqslant \frac{1}{r}$.

30. $\frac{1}{3R^2} \leqslant \sum \frac{1}{t_a^2} - \frac{1}{4r^2} \leqslant \frac{1}{6Rr}$. {等正}

31. $\frac{9}{4} - \frac{r}{2R} \leqslant \sum \frac{a^2}{t_b^2 + t_c^2} \leqslant \frac{19}{8} - \frac{3r}{4R}$.

32. $\frac{40}{9}+\frac{r}{9R}\leqslant\sum\frac{t_b^2+t_c^2}{a^2}\leqslant 6-\frac{3r}{R}$.

33. (1) $\frac{8r^2(16R-5r)}{9R-2r}\leqslant\prod t_a\leqslant\frac{8Rrp^2}{9R-2r}\leqslant pS$; (2) $\prod t_a\leqslant\frac{27}{8}R^3$;

(3) $\frac{2S^2}{R}\leqslant\prod t_a\leqslant\frac{S^2}{r}$; (4) $\prod t_a\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}\prod a$.

其中,N28 - 32 见[100]P574 - 576,478.

34. $\sum\frac{p-a}{t_a}\leqslant\sqrt{3}$;当 $-1\leqslant\beta<0$ 时,$\sum(p-a)t_a^\beta\leqslant\frac{p^{\beta+1}}{3^{\beta/2}}$, {等正}

当 $\beta>0$ 时不等号反向.(刘健,中学数学,1995,8:24 - 26)

35. 1995 年,文家金,单墫证明了一个一般性不等式:

设 f 是$(0,\infty)$ 上递增的正函数,则当 $\lambda>0$ 时,成立

$$\sum\frac{f(a)}{t_a^\lambda}\geqslant\frac{1}{3^{\lambda/2}}\sum f(a)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^\lambda. \qquad \{等正\}$$

由此推出了一系列不等式,如

$0<\lambda\leqslant1$ 时,$\sum\frac{1}{t_a^\lambda}\geqslant\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^\lambda\sum\frac{1}{a^\lambda}$.

当 $\lambda>1$ 时,$\sum\frac{1}{t_a^\lambda}\geqslant\frac{2}{3^{\lambda/2}}\sum\frac{1}{a^\lambda}+3^{1+\frac{\lambda}{2}}(1-2^{1-\lambda})p^{-\lambda}$.

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{\sum t_a^{-1}}{\sum a^{-1}}<\sqrt{2}$.

作者们进一步问:

(1) 当 $\lambda>0$ 时,$\frac{\sum t_a^{-\lambda}}{\sum a^{-\lambda}}$ 的最优下界是什么?

(2) 使$\sum\frac{1}{t_a^\lambda}\geqslant\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^\lambda\sum\frac{1}{a^\lambda}$ 成立的λ 的最大值是什么?(见福建中学数学.1995,4:16 - 17)

(四) 旁切圆半径不等式

1. $rr_a\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

提示:利用 $S=pr$ 和$S=(p-a)r$.

2. **Lemoine 不等式**:$(3/2)R\leqslant r_a<4R-\sqrt{3}(p-a)$.

特别,若 $r_a\leqslant r_b\leqslant r_c$,则 $r_a\leqslant(3/2)R$; $r_b<2R$; $(3/2)R\leqslant r_c<4R$.见[3]P.63,66.

3. $R\geqslant(r_a+r)^2/[4(r_a-r)]$.

4. (1) $9r\leqslant\sqrt{3}p\leqslant\sum r_a\leqslant 9R/2$; (2) $\sum r_a\geqslant(3/2)(3-\sqrt{3})r$;

(3) $\sum r_a>4R$; (4) $\sum r_a^n>p^n\times3^t$,式中 $t=1-(n/2)$.

5. $\sum ar_a\geqslant 3Rp\geqslant 6S$.

6. $3r\sum r_a \leqslant \sum r_a r_b$.

7. $54Rr \leqslant 3\sum ab \leqslant 4\sum r_a r_b$.

8. $(27/2)Rr \leqslant r(16R-5r) \leqslant \sum r_a r_b \leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$
$\leqslant (1/3)(4R+r)^2 \leqslant (27/4)R^2$.

9. $(27/4)R^2 \leqslant 8R^2-5r^2 \leqslant \sum r_a^2 \leqslant 16R^2-24Rr+11r^2 \leqslant p^2(4R-5r)/(3r)$.

10. $3p^2r \leqslant 16R^3+r^3-24Rr^2 \leqslant \sum r_a^3 \leqslant 64R^3-144R^2r+72Rr^2+r^3$.

11. $\dfrac{2}{R} \leqslant \sum \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{r}$; $\sum \dfrac{1}{r_a^n} \geqslant \dfrac{2^n \times 3^{1-n}}{R^n}$.

12. $18r/p \leqslant \sum (a/r_a) \leqslant 9R/p$.

13. (1) $3(4r/p)^{\lambda} \leqslant \sum (a/r_a)^t \leqslant 3^{\beta}\cdot 2^t(p/r)^t$,式中 $\lambda = t/3, \beta = 1-2t$,左边不等式对于所有实数 t 成立,而右边不等式只对 $0 < t \leqslant 1/2$ 成立;

(2) 令 $g = \dfrac{2}{p}(4R+r), t \geqslant 1$,则 $3^{1-t}g^t \leqslant \sum (\dfrac{a}{r_a})^t \leqslant g^t$.

14. $\dfrac{8R-7r}{r^2(16R-5r)} \leqslant \sum \dfrac{1}{r_a^2} \leqslant \dfrac{(2R-r)^2}{r^2(4R^2+4Rr+3r^2)}$.

15. $\dfrac{2}{3Rr} \leqslant \dfrac{4R+r}{r(4R^2+4Rr+3r^2)} \leqslant \sum \dfrac{1}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{4R+r}{r^2(16R-5r)} \leqslant \dfrac{1}{3r^2}$.

16. $\sum (a/r_a) \leqslant 9R/p$; $\sum (a^2/r_a) \geqslant 12r$.

17. (1) $\sum \dfrac{a}{r_a^2} \geqslant \dfrac{6}{p}$; (2) $\sum \dfrac{a^3}{r_a} \leqslant \dfrac{1}{r}\prod a$.

(3) $4 \leqslant 4\left(\dfrac{\sqrt{2pR}}{3^{3/4}r}-1\right) \leqslant \sum \dfrac{a^2}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{6\sqrt{3}R^2}{pr}-4$; (4) $\sum \dfrac{a^2}{r_b r_c} \geqslant \dfrac{2R}{r}$;

(5) $4 \leqslant \sum (\dfrac{a}{r_a})^2 \leqslant \dfrac{2R}{r}$; (6) $\dfrac{2}{\sqrt{3}r} \leqslant \sum \dfrac{a}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{R}{\sqrt{3}r^2}$;

(7) $\dfrac{9\sqrt{3}r}{2} \leqslant \sum \dfrac{r_b r_c}{a} \leqslant \dfrac{9\sqrt{3}R^3}{16r^2}$. {等正}

18. (1) $4\sqrt{3}(3R-4r) \leqslant \sum \dfrac{a^3}{r_b r_c} \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}R}{r}(3R-4r)$.

(2) $\sum \dfrac{r_b r_c}{a^2} \geqslant \dfrac{9}{4}$; (3) $\sum \left(\dfrac{r_a}{a}\right)^2 \geqslant \dfrac{9}{4}$.

(4) $\sum \left(\dfrac{a}{r_a}\right)^{1/2} \leqslant \left(\dfrac{2p}{r}\right)^{1/2}$.(孙建斌,[345]2001,10)

(5) $\sum \dfrac{ab}{r_c^2} \geqslant \dfrac{2R}{r}$.(宋庆,中学数学,1995.7:38)

19. (1) $\sum \dfrac{r+r_c}{a+b} \geqslant \sqrt{3}$; (2) $\sum \dfrac{r_a-r_b}{a-b} \geqslant 3\sqrt{3}$; (3) $\sum \dfrac{r_a}{p-b} \geqslant 3\sqrt{3}$.

20. $\sum (r_b+r_c)/a \geqslant 3\sqrt{3}$;(管志宏,中学数学,1992.11.)

21. $\sqrt{3} \leqslant \sum (r_b+r_c)/(b+c) \leqslant p/(2r)$.

22. $\sum a^2/(r_a-r) \leqslant 9R$; $\sum (r_a-r)/a \geqslant \sqrt{3}$.

23. $6 \leqslant 7-(2r/R) \leqslant \sum (r_a+r)/(r_a-r) \leqslant 2(1+(R/r))$.

24. $p/R \leqslant (4R^2+6Rr-r^2)/(Rp) \leqslant \sum (r_a/r) \leqslant (5R^2+3Rr+r^2)/(Rp)$.

25. $$\sum (r_ar_b)^2/(ab) \geqslant 81r^2/4.$$

26. $\frac{3\sqrt{3}}{R}(7r^2-R^2) \leqslant \sum \frac{r_br_c}{a} \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{32r}(9R^2-20r^2)$.

27. $6r \leqslant \sum a^2/(r_b+r_c) \leqslant (3/r)(3R^2-10r^2)$.

28. $8\prod r_a \leqslant 3\sqrt{3}\prod a$.

29. (1) $27r^3 \leqslant r^2(16R-5r) \leqslant \prod r_a \leqslant r(4R^2+4Rr+3r^2) \leqslant (27/4)rR^2 \leqslant \frac{27}{8}R^3$, (2) $\prod r_a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}p^3$; (3) $\frac{9}{R^2} \leqslant \frac{\sum r_a}{\prod r_a} \leqslant \frac{R}{6r^3}$;

(4) $243r^4 \leqslant (\prod r_a)\cdot(\sum r_a) \leqslant p^4/3$.

30. $32Rr^2 \leqslant 2r^2(9R-2r) \leqslant \prod (r_a+r) \leqslant 4r(2R^2+3Rr+2r^2) \leqslant 8R^3$.

31. $108Rr^2 \leqslant 4Rr(16R-5r) \leqslant \prod (r_a+r_b) \leqslant 4R(4R^2+4Rr+3r^2) \leqslant 27R^3$.

以上均{等正}. 在[19],[100],[32]等中还可找到其他旁切圆半径不等式.

(五) 联系高、中线、内角平分线的不等式

1. $t_a-h_a \leqslant R-2r$

2. $l_a \leqslant (R/2r)h_a$.

3. $l_a/t_a \geqslant (b+c)^2/(4bc)$, 仅当 $b=c$ 时等号成立.

4. $l_a/h_a \geqslant (b^2+c^2)/(2bc)$, 仅当 $b=c$ 或 A 为直角时等号成立.

5. $9r \leqslant \sum h_a \leqslant \sum t_a \leqslant \sum l_a \leqslant \sum r_a \leqslant 9R/2$;

若 $a \leqslant b \leqslant c$, 则 $a+\sum l_a \leqslant c+\sum t_a$.

6. $\sum t_a \leqslant \left\{\begin{matrix}\sqrt{3}p \\ 3(R+r)\end{matrix}\right\} \leqslant \sum r_a$.

7. $2r/R \leqslant (\sum h_a)/(\sum r_a) \leqslant (2/3)(1+(r/R))$.

8. $54r^4/R \leqslant \prod h_a \leqslant \prod t_a \leqslant \prod r_a \leqslant \prod l_a$.

9. $\prod h_a \leqslant 3^{3/4}S^{3/2} \leqslant \prod r_a$.

10. **Bager 不等式**: $\sum h_a^2 \leqslant \sum t_a^2 \leqslant p^2 \leqslant \sum l_a^2 \leqslant \sum r_a^2$. {等正}

11. 若 $-1<t<0$, 则 $\sum h_a^t \geqslant \sum r_a^t$, 若 $t>0$ 或 $t<-1$, 则不等号反向.

12. 若 $\lambda>1$, 则 $\sum t_a^\lambda \leqslant \sum l_a^\lambda$, 若 $t<0$, 则不等号反向. {等正}

13. 若 $\lambda \geqslant 1$ 或 $\lambda \leqslant 0$, 则 $\sum l_a^\lambda \leqslant \sum r_a^\lambda$. 见[348]1991,5:41.

14. $4h_a-r_a \leqslant 27R/2-\sqrt{27}a$.

15. $\sum h_ah_b \leqslant \sum r_ar_b$.

16. $\sum t_at_b \leqslant \sum r_ar_b$; $\sum t_a^2 \leqslant \sum r_ar_b$.

17. $\sum r_a t_a \leqslant p\sum\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant p^2$. 证明见[3]92. {等正}

18. $\sum \frac{1}{h_a} = \sum \frac{1}{r_a} \geqslant 3^{3/4}/\sqrt{S}$.

19. $3R\sum h_a \leqslant 2\sum l_a^2$.

20. $\sum h_a l_a \leqslant p^2$.

21. x, y, z 为非负实数，则 $\sum h_a^x h_b^y h_c^z \leqslant \sum r_a^x r_b^y r_c^z$. {等正}
见[305]1966, 73:82.

22. $3 \leqslant \sum \frac{t_a}{h_a} \leqslant \sqrt{3\left(1+\frac{R}{r}\right)} \leqslant \frac{3R}{2r}$.

23. (1) $3\sqrt{3}S \leqslant \sum t_a t_b \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum a t_a \leqslant \frac{1}{3}(\sum t_a)^2 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum a l_a \leqslant \sum t_a^2$. (王振) {等正}

(2) $\sum t_a t_b \leqslant \sum t_a r_a \leqslant \frac{1}{3}(\sum t_a)^2 \leqslant \frac{1}{3}(\sum h_a)(\sum r_a) \leqslant \sum t_a^2$
$\leqslant \frac{1}{3}(\sum l_a)(\sum r_a)$. (刘键，褚小光，[100]P.369－380) {等正}

24. $\sum h_a \leqslant l_a + t_a + r_a \leqslant \frac{9}{2}R$. (同上，P.566)

25. (1) $1 < \sum\left(\frac{h_a}{t_a}\right) \leqslant 3$; (2) $\sum\left(\frac{h_a}{t_a}\right)^\lambda \geqslant 3\left(\frac{2r}{R}\right)^{\lambda/2}$. $(\lambda > 0)$. {等正}

26. $\sum(h_a/t_a) \geqslant 2p/(R\sqrt{3})$.

27. $\sum(r_a/t_a)^\lambda \geqslant 3 \quad (\lambda > 0)$.

28. $\sum(l_a/r_a)^n \geqslant 3^\lambda(p/r)^n \geqslant 3$. {等正}
式中 $\lambda = 1-(3n/2), n \geqslant 2/3$. 已知 $\sum(r_a/l_a) \geqslant 3$，问 $\sum(r_a/l_a)^\lambda$ 的上下界是什么？

29. $\sum(r_a/h_a)^n \geqslant 3$, $(n \geqslant 1)$.

30. $\left(\frac{2R}{r}+5\right)^{1/2} \leqslant \left[\frac{2R}{r}+6\left(\frac{R}{2r}\right)^{1/3}-1\right]^{1/2} \leqslant \sum\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^{1/2} \leqslant \left(\left(\frac{4R}{r}\right)+1\right)^{1/2}$.
(见[348]1993.8)

31. $\sum \frac{1}{h_a r_a} \geqslant \frac{1}{r(2R-r)}$.

32. $3 \leqslant 2\left(2-\frac{r}{R}\right) \leqslant \sum \frac{h_a}{r_a} < 2\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}-1\right)$.

33. $4r\sum r_a \leqslant \sum a^2 \leqslant (27/4)R^4\sum h_a^{-2}$.

34. (1) $\sum(h_b/l_c) \leqslant 3$; (2) $\sum \frac{h_a}{l_b+l_c} \leqslant \frac{3}{2}$.

35. $3 \leqslant \sum(l_a/h_a)^{1/2} \leqslant 3\sqrt{R/(2r)}$.

36. $3 \leqslant \sum(l_a/h_a) \leqslant 1+(R/r)$.

37. (1) $p^2 \leqslant \sum l_a t_a \leqslant 3(2R^2+r^2)$; (2) $\sum l_a t_a \leqslant p^2+2Rr-4r^2$;
(3) $\sum l_a(t_b+t_c) \leqslant 2p^2$; ([100]P275. P489)

38. $6r/R \leqslant \sum(t_a/l_a) \leqslant 3$

39. $3 \leqslant 13/4 - (r/2R) \leqslant \sum(l_a/t_a) \leqslant (3R)/(2r)$.

40. $\frac{3}{2} \leqslant \frac{9\sqrt{3}R}{4p} \leqslant \sum \frac{r_a}{h_b + h_c} \leqslant \frac{p}{2\sqrt{3}r}$.

41. $\sum \frac{h_a + h_b}{r_a + r_b} \leqslant 3$.

42. $\sum(h_a - r_a)/(h_a + r_a) \leqslant 0$.

43. $\sum\left(\frac{h_a + h_b}{r_a + r_b}\right)^t \leqslant 3,\ 0 < t \leqslant 1$. 仅当 $t = 1, a = b = c$ 时等号成立.

44. $\sum \frac{(r_a + h_a)}{r + r_a} \geqslant \frac{9}{2}$. ｛等正｝

45. $\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} \leqslant \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b} \leqslant \frac{r_b + r_c}{t_a} \leqslant 2\frac{l_a}{h_a} \leqslant \frac{R}{r}$.(刘健等[100]P369)

46. $\sum \frac{t_a}{h_a + 2r_a} \geqslant 1$. ｛等正｝

47. $\sum\left(\frac{t_a}{h_a - 2\lambda}\right)^\lambda \geqslant 3^{\lambda+1}, (\lambda \geqslant 1)$. 仅当 $\lambda = 1, a = b = c$ 时等号成立.

48. $\sum\left(\frac{t_a}{h_b + h_c}\right)^\lambda \geqslant \left(\frac{r}{4R}\right)^{\lambda/3}, (\lambda > 0)$.

49. $\prod(h_b + h_c) \leqslant 24\sqrt{3}\prod(S/t_a)$. ｛等正｝

50. $\prod \frac{h_b + h_c}{r_a + h_a} \leqslant 1$. ｛等正｝

51. $\prod\left(\frac{r_a + h_a}{b + c}\right) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

52. $\frac{p}{2} \leqslant h_a + l_b + t_c \leqslant \sqrt{3}p$; $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{t_b} + \frac{1}{l_c} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{p}$.

问：$h_a^\lambda + l_b^\lambda + t_c^\lambda$ 的上下界是多少？

53. $p \leqslant t_a + t_b + l_c \leqslant \sqrt{3}p$; $3p/4 \leqslant h_a + l_b + l_c \leqslant 2p$.

问：$h_a^\lambda + h_b^\lambda + t_c^\lambda, h_a^\lambda + h_b^\lambda + l_c^\lambda, l_a^\lambda + l_b^\lambda + h_c^\lambda, l_a^\lambda + l_b^\lambda + t_c^\lambda$,
$t_a^\lambda + t_b^\lambda + h_c^\lambda, t_a^\lambda + t_b^\lambda + l_c^\lambda$ 各个上下界是什么？

54. $2 \leqslant \sum \frac{a^2}{t_b^2 + t_c^2} \leqslant \sum \frac{a^2}{h_b^2 + h_c^2} \leqslant \frac{R}{r}$.(郝迎利，"中学数学"(武汉)2001.11:20)

55. $\sum h_a r_a \leqslant p^2$.

56. 设 $-1 < \lambda < 0$，则 $\sum(r_a r_b)^\lambda \leqslant \sum(h_a r_a)^\lambda$;
当 $\lambda \leqslant -1$ 或 $\lambda \geqslant 0$ 时，不等号反向 (郭要红，[345]2002.2)

57.(1) $\sum a l_a t_a \leqslant 2p(5R - r)$; (2) $\sum l_a t_b t_c \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}abc$; ｛等正｝

(3) $\sum t_a(l_b^2 + l_c^2) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}p^3$; (4) $\sum \frac{t_a + r_a}{a} \geqslant 3\sqrt{3}$.

(5) $\sum at_ar_a \leqslant \frac{2}{3}p^3$; (6) $\sum \frac{1}{l_a^2 + r_a^2} \leqslant \frac{1}{3Rr}$;

(7) $\sum a(r_a + l_a) \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}p^2$; (8) $\sum (r_a + l_a)(b + c) \geqslant \frac{16}{3}p^3$;

(9) $\sum t_a(l_a + r_a) \leqslant 2p^2$; (10) $\sum l_a(r_a^2 + t_a^2) \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}p^3$;

(11) $\sum r_al_at_a \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}abc$; (12) $\sum \frac{h_a}{l_b + l_c} \leqslant \frac{3}{2}$;

(13) $\sum \frac{l_a + h_a}{l_a + r_a} \leqslant 3$; 等价于 $\sum \frac{r_a - h_a}{l_a + r_a} \geqslant 0$;

以上是对刘健在[32]中“100个待解决的三角形不等式问题”的一部分解答,详见[100]P418 - 555.

58. $\sum \frac{1}{r_a - \lambda r} \geqslant \sum \frac{1}{h_a - \lambda r}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. $\lambda < 0$ 时不等号反向.

(尹华焱猜想,褚小光证明,见中学数学 1999,5:38)

五、 含参数的三角形不等式(母不等式)

在下述不等式中,λ, x, y, z 均为实数.对于这些实数的不同选取,并利用各种变形技巧,就可以推导出大量的几何不等式.因此,有的学者把这些不等式称为母不等式,或三角形嵌入不等式,

1. [MCM]. $\sum x^2 \geqslant \sum 2yz\cos A$. 它还等价于 $\sum x^2 \geqslant \sum 2yz\sin(A/2)$,

仅当 $x:y:z = \sin A : \sin B : \sin C$ 时等号成立.式中 $\sum A = \pi$ 的条件还可放宽,事实上,上述不等式对一切实数 x, y, z 成立的充要条件是 $A \pm B + C = (2k+1)\pi$, $(k \in Z)$. 见[348]1990,4:42.[350]1984,3:34 - 36.

2. $\sum x^2 \geqslant (-1)^m \sum 2yz\cos(mA)$, $(m \in Z)$.

3. $\sum x^2 \geqslant \pm \sum 2yz\sin(nA/2)$,

式中当 $n = 4m+1$ 时取“+”号,当 $n = 4m-1$ 时取“-”号,$m \in Z$.详见[34]110 - 113.

4. $\sum x^2 \geqslant (2\sqrt{3}/3)\sum yz\sin A$, 仅当 $x = y = z = 0$ 或 $x = y = z \neq 0$ 且 $A = B = C = \pi/3$ 时等号成立.

5.(1) $\sum x^2 \geqslant 2\sum yz\sin(A - \pi/6)$.

提示:令 $\alpha = A - (\pi/6)$, $\beta = B - (\pi/6)$, $\gamma = C - (\pi/6)$, 考虑 $(x - y\sin\gamma - z\sin\beta)^2 + (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2$.

(2) 设 $\sum A = k\pi$, k 为奇数, $m = n + [k/2]$, 则

$$\sum x^2 \geqslant 2(-1)^m \sum yz\sin(n + (1/2))A.$$

仅当 $x\sec(n+1/2)A = y\sec(n+1/2)B = z\sec(n+1/2)C$ 时等号成立,见[19]P77.

6. **三角形边的嵌入不等式:** $\sum a^2(x-y)(x-z) \geqslant 0$, ([36]P191 - 198)

7. 设 $\sum A = k\pi$, $k \in N$, 则

(1) $\sum x^2 \geqslant 2(-1)^{kn}(yz\cos nA - zx\sin nB - xy\sin nC)$,

(2)　$\sum x^2 \geqslant 2(-1)^{kn}(yz\sin nA - zx\cos nB + xy\sin nC)$.

提示:考虑$[x+(-1)^{kn}(y\sin nC + z\sin nB)]^2 + (y\cos nC - z\cos nB)^2 \geqslant 0$;

$$[x+(-1)^{kn}(y\sin nC - z\cos nB)]^2 + (y\cos nC - z\sin nB)^2 \geqslant 0.$$

8.　**Oppenheim 不等式:**　$(\sum x)^2 \geqslant 2\sqrt{3}\sum yz\sin A$.(见[19]681)

9.　设　$\sum A = k\pi, k \in N$,则　$(\sum x)^2 \geqslant 4\sum yz\sin^2(nA)$.

当 $x\csc(2nA) = y\csc(2nB) = z\csc(2nC)$ 时等号成立;若 x,y,z 均为正数,则

$$(\sum xy)^2 \geqslant 4(\prod x)(\sum x\sin^2 A).$$

在[19]第六章中,还可找到大量类似的不等式.

10.　设 x,y,z 为实数且 $xyz>0$,则

$$\sum(x\cos A) \leqslant \sum yz/(2x),$$

若 $xyz<0$,则不等号反向.仅当 $1/x:1/y:1/z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时等号成立.

提示:考虑$(xz\cos A + yz\cos B - xy)^2 + (xz\sin A - yz\sin B)^2 \geqslant 0$.

特别地,(1)　取 $x=1, y=z=\lambda$,得 $\cos A + \lambda(\cos B + \cos C) \leqslant 1 + (\lambda^2/2)$.

(2)　取 $x=y=1, z=2$,得 $\cos A + \cos B + 2\cos C \leqslant 9/4$.

见[3]P18－19.

(3)　取 $x=2\lambda_2\lambda_3, y=2\lambda_3\lambda_1, z=2\lambda_1\lambda_2$.得到 **Wolstenholme 不等式(三角形角的嵌入不等式):**

$$2\sum \lambda_2\lambda_3\cos A \leqslant \sum \lambda_1^2,$$

仅当 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = a:b:c$ 时等号成立.

11.　设 $0<\lambda \leqslant 1+(4+\frac{2r}{R})^{1/2}$,则　$\frac{1}{(1+\lambda)^2} < \frac{\prod(a+b)}{\prod(\lambda a+b+c)} \leqslant \left(\frac{2}{2+\lambda}\right)^3$.

(Janous. W. 提出,陈计等证明,[100]P583－584)

12.　对于{锐},成立　$\sum(x\cos\frac{A}{2})^2 \geqslant 2\sum yz\sin B\sin C$.(刘健等.[100]P.587)

13.　$(\sum x)^2 \geqslant 4\sum xy(\cos\frac{C}{2})^2$,　仅当 $x:y:z=a:b:c$ 时等号成立.

六、　特殊三角形不等式

1.　**C-B 角不等式**(Crelle-Brocard 角不等式):设 G 在 $\triangle ABC$ 内部满足:$\angle GAB = \angle GBC = \angle GCA = \omega$,则称 G 为 Brocard 点,或 C-B 点,ω 称为 G 的 Brocard 角,简称为 C-B 角.

注　ω 也是方程 $\mathrm{ctg}\omega = \sum \mathrm{ctg}A$ 在$(0,\pi)$内的惟一实根,这是证明有关 C-B 点、角不等式的一个关键. C-B 点最早在 1816 年由 Crelle 所研究,但长时间内没有受到注意.直到 1875 年由 Brocard 重新发现.在这以后,已发表了相当多的文章,直到今天,仍然是人们研究的一个热点.

(1)　设 G_1, G_2 是 $\triangle ABC$ 的两个 C-B 点,则　$2G_1G_2 \leqslant R$.　(见[3]14.25)

(2) Yff **不等式**:$\omega\leqslant\pi/6$. {等正}.

提示:$\operatorname{ctg}\omega=\sum\operatorname{ctg}A\geqslant\sum\operatorname{tg}(A/2)\geqslant\sqrt{3}$.

注 这是 Yff,P. 在 1963 年提出的一个猜想. 见[305]1963,70:500. 11 年后才由 Abi-Khuzam 给出了一个“巧妙、简捷又很有创造性的证明”,见 Elem. Math,1974,29:141 - 142. 事实上,这里给出的证明是 Lalesco,T. 早在 1937 年就给出了,因此,这个不等式至少应称为 L-Y 不等式.

(3) $\omega^3\leqslant\prod(A-\omega)$. {等正}

提示:利用 $f(x)=\log(x/\sin x)$ 在$(0,\pi)$上的严格凸性,由 Jensen 不等式,得到

$f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{1}{6}\sum A)=f(\frac{1}{6}\sum(\omega+(A-\omega)))\leqslant\frac{1}{6}\sum[f(\omega)+f(A-\omega)]$. 再利用 $x/\sin x$ 在$(0,\pi/6]$上的递增性.

1994 年,唐立华作了以下推广:设 O 为 $\triangle ABC$ 内任一点:$\alpha_1=\angle OAB,\alpha_2=\angle OBC,\alpha_3=\angle OCA,\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$,则

$\alpha^6\leqslant\alpha_1\alpha_2\alpha_3(A-\alpha_1)(B-\alpha_2)(C-\alpha_3)$. (见中学数学 1994,9:30 - 32).

(4) $8\omega^3\leqslant ABC$. {等正}

证 从(3),$64\omega^6\leqslant\prod[(4\omega)(A-\omega)]\leqslant\prod A^2$,而最后一个不等式等价于 $(A-2\omega)^2\geqslant 0$. (见[19]P330)

注 比较(3)(4),Abi-Khuzam 在 1980 年提出:$8\prod(A-\omega)\leqslant ABC$ 是否成立?

(5) 为了改进(3),(4),将(4)改写成 $2\omega\leqslant(\prod A)^{1/3}$.

Stroeker,R. J. 和 Hoogland,H. J. T 先后提出许多猜想. 例如,能否将上式右边的几何平均改为调和平均?即

① $\sum\frac{1}{A}\leqslant\frac{3}{2\omega}$; ② $\sum\frac{1}{A^2}\geqslant\frac{3}{4\omega^2}$. {等正}

Mascioni 证明了这两个猜想. 在证明中用到拉格朗日乘子法. 他还证明:若 t_1,t_2 分别是使 $M_{-t}(A,B,C)\leqslant 2\omega\leqslant M_{-s}\leqslant(A,B,C)$ 成立的最小与最大正实数,则

$$1\leqslant t_1\leqslant\frac{\log(3/2)}{\log(4/3)}<\frac{\log 3}{\log 2}\leqslant t_2\leqslant 2.$$

1989 年,Faruk,F. 等证明了比猜想 ①② 更精细的不等式:

③ $\frac{1}{\omega}+\frac{3}{\pi}\leqslant\sum\frac{1}{A}\leqslant\frac{3}{2\omega}-\frac{(2\cos\omega-\sqrt{3})^2}{3\sin 2\omega}$. {等正}

④ $\frac{3}{4\omega^2}\leqslant\sum\frac{1}{A^2}\leqslant\frac{1}{\omega^2}-\frac{9}{\pi^2}$. {等正}

若 A,B,C 不全相等,则对于 $0\leqslant t\leqslant\beta$,存在惟一的 $\beta\in(1,2)$,使得 $\sum A^{-t}\leqslant 3(2\omega)^{-t}$,当 $t\notin(0,\beta)$ 时,不等号反向. 仅当 $t=0$ 或 $t=\beta$ 时等号成立. 见[305]1989,96(7):576 - 589.

(6) $3\omega^{-1}\leqslant\sum(A-\omega)^{-1}$.

(7) $\sum A^{-4}\leqslant\omega^{-4}-3^4\times 13\pi^{-4}$. (见[305]1989,96:576 - 589)

(8) $9\sin^2\omega \leqslant \sum \sin^2 A$,从而有 $\sum \cos^2 A \leqslant 3(1-3\sin^2\omega)$. {等正}

(9) $18R\sin^2\omega \leqslant \sum a\sin A$. {等正}

(10) 设 C-B 点 G 到三角形三顶点的距离为 x, y, z,则 $6R\sin\omega \leqslant \sum x$.

(11) 设 C 为锐角.则对于{锐角 △},有 $\operatorname{ctg}\omega\sin 2C < 2$;
对于{钝角 △},不等号反向.

提示:利用 $\operatorname{ctg}\omega = \sum \operatorname{ctg}A$,得到

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\omega\sin 2C &= 2\cos C[\sin(A+B)(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)+\cos C]\\ &= 2\cos^2(A+B)+2\sin^2(A+B)\cos C\csc A\csc B.\end{aligned}$$

对于{锐角 △},$\cos C\csc A\csc B = 1-\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B < 1$.

(12) $8\prod\cos A \leqslant 6\sqrt{6}(\prod a)(\prod\cos A)^{1/2}(\sum a^2)^{-3/2} \leqslant 3\operatorname{tg}^2\omega$. {等正}

(13) $\prod\csc A \leqslant (8/27)(\operatorname{ctg}\omega)^3$.

(14) **Janous 不等式:**

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{(\prod\csc A)^{1/3}}{(\sum\csc^2 A)^{1/2}} \leqslant \cos\omega \leqslant \frac{9}{8}\cdot\frac{\prod\cos A}{(\sum\csc^2 A)^{1/2}}.\quad (见[19]333)$$

2. 设 O 为锐角 $\triangle ABC$ 内一点.令 $\alpha = \angle OAC, \beta = OBA, \gamma = \angle OCB$.则

(1) $\sum\operatorname{ctg}\alpha > 2\sqrt{3}+\sum\operatorname{ctg}A > 2^{3/2}3^{1/4}\cdot\sqrt{\sum\operatorname{ctg}A}$ (见[305]1990,97,E3314)

(2) $\sum\operatorname{ctg}\alpha > 3^{5/4}\operatorname{ctg}\omega$.(见[305]1990,97:851 - 852)

(3) $\sum\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{tg}\omega + 3(\prod\sin A)^{-1/3}$.(见[381]1990,16:20 和 1991,17:91 - 92)

3. **Morley 三角形不等式:**$\triangle ABC$ 的 Morley 三角形(记为 $\triangle_M$)是指一个等边三角形,它的顶点是 $\triangle ABC$ 内角三等分线相邻对的交点,用 p_M、R_M、r_M、S_M 分别表示 $\triangle_M$ 的半周长、外接圆半径、内切圆半径、面积.则

(1) $R_M/R \leqslant (8/\sqrt{3})\sin^3(\pi/9)$,仅当原 $\triangle ABC$ 为等边时等号成立.

(2) $(8/\sqrt{3})\sin^3(\pi/9) \leqslant r_M/r < 2/9$.左边等号仅当 $\triangle ABC$ 等边时成立.

注意:$r_M = R_M/2, r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,$\triangle_M$ 的边长 $a_M = 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

(3) $p_M/p \leqslant (8/\sqrt{3})\sin^3(\pi/9) = 0.18479\cdots$ 仅当 $\triangle ABC$ 为等边时等号成立.

(4) $S_M/S \leqslant (64/3)\sin^6(\pi/9) = 0.034148\cdots$ 仅当 $\triangle ABC$ 为等边时等号成立.

4. **直角三角形不等式:**设 $\triangle ABC$ 为直角三角形,C 为斜边.

(1) [MCM].$n > 2$ 时,$a^n + b^n < c^n$.

(2) $c < a + b \leqslant \sqrt{2}c$,仅当 $a = b$ 时等号成立;若 x, y 为正数,则

$$ax + by \leqslant c(x^2+y^2)^{1/2}.$$

(3) $r < \frac{1}{2}\max\{a, b\}$; $r \leqslant (\sqrt{2}-1)c/2 < c/4$,仅当 $a = b$ 时等号成立.

(4) $\sqrt{2}-1 \leqslant r/h_c < 1/2$; $h_c > a + b - c$.

(5) $R \geqslant (\sqrt{2}+1)r$.

(6) $c^3 \geqslant 8RS$.

(7) $S \leqslant (3-2\sqrt{2})p^2$; $S \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{8}$.

(8) $R + r \geqslant \sqrt{2S}$.

(9) $2ab/c^2 \leqslant \cos^2(\dfrac{A-B}{2})$.

(10) 设 x, y 为非负实数,令 $M = (b/a)^2$,则 $a^2x(x^M - y) \geqslant b^2y(x - y^{1/M})$.

提示:利用第 3 章 N27. Young 不等式,详见[348]1989,3 : 7.

(11) [MCM].对于直角 $\triangle ABC$ 内任意 n 个点,必可作适当编号 $P_1, \cdots, P_n$,使得 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} P_kP_{k+1} \leqslant c^2$.

(12) [MCM].设 $h_c = CD$,连接 $\triangle BDC$ 和 $\triangle ADC$ 的内心的直线分别交BC, AC 于 G, E,则 $\triangle GCE$ 的面积$S_1 \leqslant S/2$.

5. [MCU].设 A, B, C 是格点(即它们在平面上的坐标都是整数的点),则

$$\prod a \geqslant 2R; \quad S \geqslant 1/2.$$

6. [MCM].设 a, b, c 成等比数列,则其公比 q 满足$(\sqrt{5}-1)/2 < q < (\sqrt{5}+1)/2$;若 A, B, C 成等差数列,且 $a > b > c$,则 $a + c \leqslant 2b$.

7. **费马点不等式**:若平面上一点 O 对于每一个内角都小于 $2\pi/3$ 的三角形的三边所张的视角相等,则称 O 为费马点,记 $OA = x, OB = y, OC = z$,则

(1) $(4\sqrt{3}S)^{1/2} \leqslant \sum x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sum a$;

(2) $3\sum xy \leqslant \sum a^2 \leqslant 3\sum x^2$;

(3) $(\sum x)(\sum \dfrac{1}{a}) > 4 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} > 5$.(见[348]1992.10.和[31]$P$.247 – 250)

(4) $(\sum x)^2 \leqslant \sum ab - \sum[\sqrt{a(p-a)} - \sqrt{b(p-b)}]^2$.

(董林,“中学数学研究”,1999,4:17)

(5) 设 R_a, R_b, R_c 分别是 $\triangle BOC, \triangle AOC, \triangle AOB$ 的外接圆半径,R, r 为 $\triangle ABC$ 外接圆、内切圆半径,则

$$\sum \frac{1}{R_a} \leqslant \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$(赵振华,中学数学教学,1994,1:37)

8.若 D, E, F 分别位于BC, CA, AB 上,$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1,边长记为 a_1, b_1, c_1,周长记为 L_1,$\triangle AFE, \triangle BFD, \triangle DEC$ 的面积,周长依次记为 S_2, S_3, S_4 和 L_2, L_3, L_4,则

(1) $(\sum a)^2 \leqslant 12\sum a_1b_1$.

仅当 D, E, F 是正三角 ABC 三边中点时等号成立.见[348]1992,2:40 – 41.

(2) $3\sum AD < 5\sum a$.

(3) $\sum a^2b_1c_1 \geqslant 4S^2$.

(4) $S_1 \geqslant \min\{S_2, S_3, S_4\}$; $L_1 \geqslant \min\{L_2, L_3, L_4\}$;

当 $S_1 \geqslant S/4$ 时，$S_1 \geqslant (S_2S_3S_4)^{1/3}$；当 $S_1 \leqslant S/4$，且 $S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$ 时，$S_1 \geqslant (S_2S_3)^{1/2}$.（孔凡哲，[350]，1996.1:40）

(5) 若 $S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$，则

$S_1^3 \geqslant (1/2)(\sqrt{S_2^2+8S_2S_3}-S_2)$； $S_1^2+(S_2+S_3+S_4)S_1^2-4S_2S_3S_4 \geqslant 0$，

仅当 AD,BE,CF 共点时等号成立．证明见[19]340.

(6) [MCU].若 $BD \leqslant CD, CE \leqslant AE, AF \leqslant BF$，则 $S \leqslant 4S_1$.

(7) [MCM].若 $AF/FB = BD/DC = CE/EA = 1/3$，则 $p < L_1 < 3p/2$.

(8) 若 $\triangle ABC$ 为正三角形，边长为 a. D,E,F 分别在 BC,CA,AB 上移动，但要保持 $BD+CE+AF=a$，则 $S_1 \leqslant S/3$.

(9) 若 $AE+AF=BD+BF=CD+CE$，猜测 $L_1 \geqslant p$.{等正}见[19]P.347.N.1.20.

(10) [MCM]若再在 $\triangle DEF$ 的三边 EF,FD,ED 上依次取 G,H,K. 若 $\triangle AFH$，$\triangle CDH$，$\triangle BDK$，$\triangle AEK$，$\triangle BGF$，$\triangle CEG$ 的面积依次记为 S_1 至 S_6，则

$$S \geqslant 8\left(\sum_{k=1}^{6} S_k\right)^{1/6}.\text{（见[348]1989,5:39）}$$

9. 设 D,E 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的两点，则：

(1) $\sum (a+b)\cdot CD \geqslant 8S$. (2) $\prod a \leqslant \sum a\cdot AD\cdot AE$.

提示：用复数方法．设 A,B,C,D,E 在复平面上对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3,z,ω. 令

$$f(z) = \sum \frac{(z-z_1)(\omega-z_1)}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}.$$

记 $g(z)=f(z)-1$. 因为 $g(z)$ 是 z 的一次多项式，且当 z 分别为 $z_k(k=1,2,3)$ 时 $g(z)=0$，从而 $f(z)\equiv 1$，于是在 $f(z)$ 右边各项取模不小于 1 即可得证.

(3) 若 D,E 重合，记为 D，则

$$\prod a \leqslant \sum a\cdot DB\cdot DC; \quad \prod a \leqslant \sum a\cdot DA^2.$$

10. [MCM].设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心或内切圆圆心，AG,BG,CG 分别交该三角形的外接圆于 D,E,F，则

$$AG+BG+CG \leqslant GD+GE+GF.\quad\text{（见[99](2):53 - 55 和 13,71 - 84）}$$

11. 设 d_a,d_b,d_c 为 $\triangle ABC$ 顶点到内心的距离，则

$$3Rr^5 \leqslant \left(\prod d_a\right)^2.$$

提示：用复数方法或利用三角形内切圆、外接圆的圆心距 $d^2=R^2-2Rr$. 详见[345]1980,2:21 - 23,1984,9:26 - 27.

12. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边于 D,E,F，$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1，边长记为 a_1,b_1,c_1，则 $\sum a_1b_1 \leqslant (1/4)\sum ab$； $S_1 \leqslant (1/4)S$.

13. [MCM].设 $\triangle ABC$ 内角平分线分别交外接圆于 D,E,F，$\triangle DEF$ 的面积记为

S_1,则

$$27R^4S \leqslant 16S_1^3.$$

14. 设 D,E,F 将 $\triangle ABC$ 的周长三等分. $\triangle DEF$ 的面积记为 S_1,边长记为 a_1,b_1,c_1,则

(1) $\sum a \leqslant 2\sum a_1$.{等正};

(2) $S_1 > (2/9)S$.(三分周界型面积不等式)

式中 2/9 是最佳常数,见[305]1990,97,E3397 和 1992,99(4).

(3) 1989 年陈计等提出猜想:

$$\sum(FE)^k \geqslant 2^{-k}\sum a^k, k \in N.$$

因为已知 $k = 1,2,3$,或 D,E,F 中某两点分布在 $\triangle ABC$ 的同一边且三等分周界时,对所有非负整数 k 成立.(朱玉杨,见[348]1994,9:25 - 26)

15. [MCM].直线 l 分 $\triangle ABC$ 为两个面积相等的部分,分别交 AB,AC 于 D,E,则

$$4(AD + AE) > BD + DE + EC + CB.$$

提示:从 $S_{\triangle ADC} > S/2$ 得 $AD > BD$,同理 $AE > EC$.

16. (1) 设 G 为正 $\triangle ABC$ 内一点,D,E,F 是 G 关于 BC,CA,AB 的对称点,$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1,则 $S_1 \leqslant S$,仅当 G 为 $\triangle ABC$ 的中心时等号成立.

证 设 G 到三边 BC,CA,AB 的距离依次为 h_1,h_2,h_3,,则 $S = (\sqrt{3}/3)(\sum h_1)^2$,$S_1 = \sqrt{3}\sum h_1h_2$,则 $S - S_1 = (\sqrt{3}/6)\sum(h_1 - h_2)^2 \geqslant 0$.

Veldkamp,G.R.指出,上述不等式可归结为:设 G 在正 $\triangle ABC$ 内部,S_1 是它的垂足三角形的面积,则 $S_1 \leqslant S/4$.它还可推广为:设 G 在任意 $\triangle ABC$ 所在平面上,O 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心,则按 Gergonne 公式,$S_1 = |R^2 - OG^2|[S/(4R^2)]$,对于 $\triangle ABC$ 内所有点 G,有 $S_1 \leqslant S/4$.这个不等式甚至对以 O 为圆心,$R\sqrt{2}$ 为半径的圆内所有点 G 仍成立.见[19]681.

(2) 设 G 为 $\triangle ABC$ 内部一点,连接 AG,BG,CG 分别交对边于 D,E,F,$\triangle DEF$ 的面积记为 S_1,则

① $S_1 \leqslant S/4$,仅当 G 为 $\triangle ABC$ 的重心时等号成立.

② 1989 年胡波证明 $S_{\triangle EGF} \leqslant 3[5\sqrt{5} - 11)/2]S$.见[348]1989,11:41.

注 从②推出 $S_1 = S_{\triangle EGF} + S_{\triangle DGE} + S_{\triangle DGF} \leqslant (3/2)(5\sqrt{5} - 11)S$,与①比较,说明②的结果还可以改进.那么②的最优上界是什么?

17. [MCU].设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,两个矩形的一部分内接于该三角形,其面积分别为 S_1,S_2,则

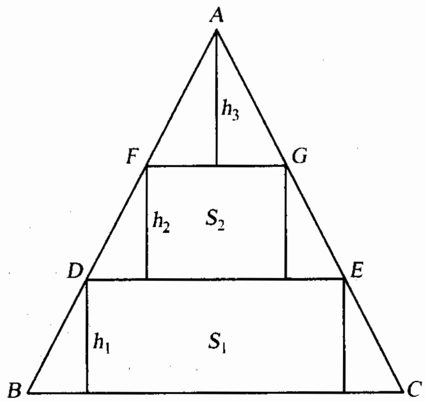
$$S_1 + S_2 \leqslant 2S/3.$$

证 如图所示,BC 边上的高 $h = \sum h_1$,记 $DE = a_1$,$FG = a_2$.由相似三角形的性质,得

$$\frac{a}{h}=\frac{a_1}{h_2+h_3}=\frac{a_2}{h_3}.$$

从而$\dfrac{S_1+S_2}{S}=\dfrac{h_1a_1+h_2a_2}{(ha)/2}=\dfrac{2}{h^2}\sum h_1h_2$.

问题变成在条件$\sum h_1=h$下求$Q=\sum h_1h_2$的最大值.先固定h_1,则$h_2+h_3=h-h_1$,从而$Q=h_1(h-h_1)+h_2h_3$,当$h_2=h_3$时,h_2h_3达到最大值.于是在条件$h_1+2h_2=h$下,使得$2h_1h_2+h_2^2$达到最大值,从而得出$h_1=h_2=h_3=h/3$时,Q达到最大值$h^2/3$.



图

注 这是第46届普特南数学竞赛题,1987年上海市又作为中学生数学竞赛题.它的推广见[99](19)P78－91.

18. [MCM].半径为R的圆内(包括圆周)有7个点,以其中任两点和圆心为顶点的三角形中,至少有一个三角形的面积不超过$\sqrt{3}R^2/4$.

提示:将圆等分为6个扇形,再利用"抽屉原理"证明.

19. 设O为$\triangle ABC$内任一点,记$OA=x,OB=y,OC=z$,延长AO,BO,CO分别与三边交于D_1,E_1,F_1,记$OD_1=l_1,OE_1=l_2,OF_1=l_3$,$O$到三边的距离为$OD=h_1,OE=h_2,OF=h_3$,$\angle BOC,\angle COA,\angle AOB$的平分线长分别记为$t'_a,t'_b,t'_c$.则

(1) 若$a>b>c$,则 $\sum l_1<a$.

(2) **Guggenheimer 不等式:** $p<\sum x<2p$.

1989年陈计作了指数推广:若$t\geqslant 1$,则 $\sum x^t<\sum a^t$.

见[348]1989,12:3.另见[350]1992,3:34－35.

(3) **Barrow 不等式:** $\sum x\geqslant 2\sum t'_a$;

1961年Oppenheim作了加权推广:

$$\sum\lambda_1x\geqslant 2\sum\frac{\lambda_2\lambda_3(y+z)}{\lambda_2y+\lambda_3z}t'_a,\quad \text{式中 }\lambda_k(1\leqslant k\leqslant 3)\text{ 为正数.}$$

(4) $6r\leqslant\sum x\leqslant 2(R+r)$; $\sum x\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{\sum a^{-2}}}$; $(\sum x)(\sum\dfrac{1}{a})>5$.

(5) 若$\triangle ABC$是锐角三角形,l是$\triangle ABC$的内切圆的切点为顶点形成的三角形的周长,则$\sum x\geqslant 2l/3$.仅当$\triangle ABC$为等边,且O为其中心时等号成立.

(6) $\sum x^2\geqslant(1/3)\sum a^2$,仅当$O$为重心时等号成立.

(7) **托勒密不等式:** $zc\leqslant xa+yb$.

(8) **Steiner 不等式:** 设在$\triangle ABC$中除点O外,还取一点M,使得

$(1/a)\sin\angle BMC=(1/b)\sin\angle AMC=(1/c)\sin\angle AMB$,则 $\sum ax\geqslant\sum a\cdot MA$.

仅当O与M重合时等号成立.

证 用面积比较法. 过 A,B,C 分别作 MA,MB,MC 的垂线,相交构成一个新的 $\triangle EDF$. 由于 $\sin\angle D=\sin\angle BMC,\sin\angle E=\sin\angle AMC,\sin\angle F=\sin\angle AMB$,从而由正弦定理得 $EF/a=DF/b=DE/c=q>0$. 又 $S_{\triangle EOF}\leqslant(1/2)EF\cdot AO=(1/2)qax$; $S_{\triangle EMF}=(1/2)qaAM.(1/2)q\sum ax\geqslant S_{\triangle DEF}=(1/2)q\sum a\cdot MA$.

(9) **Klamkin 不等式:** $\prod a\leqslant\sum ax^2$.

(10) $\sum(p-a)x\geqslant 2S$.

(11) **Bilcev 不等式:** $\sum x\sqrt{a(p-a)}\geqslant 2p\sqrt{Rr}$.

(12) $\sum(xy/ab)\geqslant 1$.

(13) $\sum xa^2<(\sum x)(\sum yz)$.

(14) $\sum h_1$ 介于 $\triangle ABC$ 的最短与最长高线之间,而且

$$(1/2)\sum x\sin A\leqslant\sum h_1\leqslant\sum\left(x\sin\frac{A}{2}\right).$$

(15) $\sum h_1\geqslant 4S^2/(\sum a^2)$.

(16) $\sum\sqrt{h_1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2R}}(\sum a^2)^{1/2}$,仅当 O 为三角形内心且三角形等边时等号成立.

(17) $\sum\sqrt{h_1}\leqslant\sqrt{3\sqrt{3}p}$. (Bager, A)

(18) $\sum(a/h_1)\geqslant 2p^2/S$. (22 届 IMO).

$0<t<1$ 时 $\sum(ah_1^t)\leqslant 2pr^t$,当 $t<0$ 或 $t>1$ 时不等号反向.

(19) $\sum(h_1+h_2)\cos\frac{C}{2}\leqslant 2p_1$,

式中 $2p_1$ 为 $\triangle DEF$ 的周长. 仅当 O 为 $\triangle ABC$ 内心时等号成立.

(20) $\sum ah_2h_3\leqslant(1/4)\prod a$,

仅当 O 为三角形外心时等号成立.

(21) $\sum(p-a)h_2h_3\leqslant pr^2$.

(22) $\sum ah_1^2+\sum(p-a)h_2h_3\leqslant 3r^2p$.

(23) $\sum\frac{h_1h_2}{ab}\leqslant\frac{1}{4}$.

(24) $\sum(h_a/h_1)\geqslant 9$.

(25) **Caragea 猜测:** $h_2+h_3<(p+h_a)/2$. (见[363]1968. B19:751)

(26) $\prod h_1\leqslant 8S^3/(27\prod a)$,仅当 O 为三角形重心时等号成立.

(27) $\prod h_1\leqslant(\prod h_a)/27$,仅当 O 为等边三角形中心时等号成立.

(28) **Erdös-Mordell 不等式:**

$$\sum x\geqslant 2\sum h_1 \qquad \{等正, O 为中心\}$$

见[305]1935,42:396;1937,44:252 - 254.

该不等式可写成另一形式：

$$2\sum xh_1 \leqslant \sum xy.$$

推论 $2\sum(1/x) \leqslant \sum(1/h_1)$.

1948 年 Hardy 用复数方法给出了一个有趣的证明. 1993 年 Arez 给出了一个简短的初等证明，并指出该不等式不能推广到高维，见[305]1993:60 - 62. 这个不等式已有许多推广. 例如：

当 $t>1$ 时，$2\sum h_1^t < \sum h_1^t[(\frac{b}{c})^t + (\frac{c}{b})^t] < \sum x^t < \sum a^t$;

当 $0<t\leqslant 1$ 时，$2^t\sum h_1^t \leqslant 2^{t-1}\sum h_1^t[(\frac{b}{c})^t + (\frac{c}{b})^t] \leqslant \sum x^t < (1+2^{\frac{1}{t-1}})^{1-t}\sum a^t$，当 $t<0$ 时，第一、二两个不等式反向. 见[19]P313 - 319.

1992 杨学技证明：$\sum \frac{1}{h_1} \geqslant 2\sqrt{3}\sum \frac{1}{a}$，{等正}. 并提出了两个猜想：

① $\sum \frac{1}{h_1^2} \geqslant 12\sum \frac{1}{a^2}$; ② $\sum \frac{1}{h_1h_2} \geqslant 12\sum \frac{1}{ab}$,

见[350]1992.2:35 - 37.

1994 年唐立华、冷岗松加强了猜想 ①，否定了猜想 ②，并将 ② 修正为

$\sum \frac{1}{h_1^2} > 8(\sum \frac{1}{a^2})(\sum \frac{1}{h_1h_2})^2 \geqslant 432\sum(\frac{1}{ab})^2$. (见[348]1994,6:23 - 24)

我们还可以进一步问：$\sum(h_1h_2)^t$ 与 $\sum(ab)^t$ 的大小关系如何？

$$\sum \frac{1}{h_1h_2} \geqslant 2\sum \frac{1}{xh_2}. \text{([345]1994,3:39)}$$

1988 年陈计李广兴猜想：

当 $t>1$ 时，$\sum x^t \geqslant 2\sum h_1^t + 6(2^{t-1}-1)(\prod h_1)^{t/3}$；当 $t<-1$ 时，$\sum h_1^t \geqslant 2\sum x^t + 6(2^{-t-1}-1)(\prod x)^{t/3}$，仅当 $\triangle ABC$ 为等边，O 为三角形中心时等号成立，并对 $|t|\geqslant 2$ 证明了这个猜想，但对于 $1<|t|<2$ 是否成立，还未解决，见宁波大学学报 1989,2(2):12 - 14. [348]1988,12.

(29) $ax \geqslant bh_2 + ch_3$.

(30) $\sum ax \geqslant 2\sum ah_1$. (见[305]1956,63:571 - 572)

(31) $\sum ax \geqslant \prod(ch_2 + bh_3)$,(见[53]117); $\sum ax \geqslant 4S$. 仅当 O 为重心时等号成立.

(32) $\sum(ax)^2 \leqslant 12R^2\sum h_1^2$.

(33) $\sum xh_1 \geqslant 2\sum h_1h_2$. 有许多推广：$t>1$ 时 $\sum(xh_1)^t > \sum[(b/c)^t + (c/b)^t](h_2h_3)^t \geqslant 2\sum(h_2h_3)^t$；$t<-1$ 时，$\sum(xh_1)^t < 2\sum(h_2h_3)^t$；$0<t\leqslant 1$ 时，$\sum(xh_1)^t \geqslant 2^{t-1}\sum[(b/c)^t + (c/b)^t](h_2h_3)^t \geqslant 2^t\sum(h_2h_3)^t$. 在[19]313 - 319 还可找到大量类似的结果.

(34)　$\sum xy \geqslant 4\sum h_1h_2$.

推广　$0 < t \leqslant 1$ 时，$\sum (xy)^t \geqslant 4^t \sum (h_1h_2)^t$，而当 $-1 \leqslant t < 0$ 时，不等号反向；当 $t > 1$ 时，$\sum (xy)^t > 4\sum (h_1h_2)^t$，而当 $t < -1$ 时，不等号反向．另见[99](15)(1992)80－100.

(35)　$\sum xy \geqslant \sum (h_1+h_2)(h_1+h_3)$；　$2\sum ah_2h_3 \leqslant \sum axh_1 \leqslant 2RS$，

仅当 O 为外心时等号成立．

(36)　$\prod x \geqslant R/(2r)\prod (h_1+h_2) \geqslant \prod (h_1+h_2)$；

$$\prod x \geqslant (4R/r)\prod h_1 \geqslant 8\prod h_1;\quad \frac{\prod a}{\prod x} \leqslant \sum \frac{p-a}{h_1} \leqslant \frac{rS}{\prod h_1}.$$

(37)　$8\prod h_1 \leqslant 8\prod l_1 \leqslant \prod x \leqslant (32/27)R_0^3$，式中 R_0 是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小圆半径．见[348]1990，3：17.

(38)　$8\prod h_1 \leqslant r\sum (xy)$.

(39)　$12\prod h_1 \leqslant \sum (h_1yz)$；　$12\prod h_1 \leqslant \sum h_1x^2$.

(40)　$\sum (x/l_1) \geqslant 6$；　$\sum (l_1/x) \geqslant 3/2$.

(41)　$(5/R) < 2\sum (1/x) \leqslant \sum (1/h_1)$.

(42)　1991 年安振平提出两个猜想：设 $\triangle D_1E_1F_1$ 的三边记为 a_1, b_1, c_1，证明或否定

$$h_ah_{a1} + l_bl_{b1} + t_ct_{c1} \leqslant (3/4)\sum (aa_1);\quad \frac{1}{h_ah_{a1}} + \frac{1}{l_bl_{b1}} + \frac{1}{t_ct_{c1}} \geqslant \frac{12}{\sum aa_1}.$$

见[348]1991，8．问题征解 74.

我们还可以进一步问，它们的推广 $(h_ah_{a1})^\lambda + (l_bl_{b1})^\lambda + (t_ct_{c1})^\lambda$ 的上下界是多少？

(43)　记 $AD_1 = l_4, BE_1 = l_5, CF_1 = l_6$，安振平 1991 年提出证明或否定：$\lambda \geqslant 1$ 时，

$$① \quad l_4^\lambda + l_5^\lambda + l_6^\lambda < \sum a^\lambda;\quad ② \quad \frac{1}{l_4} + \frac{1}{l_5} + \frac{1}{l_6} > \frac{5}{p}.$$

见[348]1991，8：21－24．但已有反例说明①不成立．见[348]1992，2：20．我们仍可进一步问，$l_4^\lambda + l_5^\lambda + l_6^\lambda$ 的上下界是多少？

(44)　$\sum \dfrac{xy}{l_1l_2} \geqslant 12$；　$\sum \dfrac{l_1l_2}{xy} \geqslant \dfrac{3}{4}$.

20．[MCM]．设 O 是 $\triangle ABC$ 的内心．AO, BO, CO 的延长线分别与三边交于 D_1, E_1, F_1．仍记 $OA = x, OB = y, OC = z, AD_1 = l_4, BE_1 = l_5, CF_1 = l_6$，则

$$1/4 < (xyz)/(l_4l_5l_6) \leqslant 8/27.$$

这是 32 届 IMO 试题．苏化明证明，不等式左边对于 O 是 $\triangle ABC$ 内任一点均成立，并给出了几十个类似的不等式．详见[99]13：71－84.

七、　联系两个三角形的不等式

设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的边长、面积等元素的记号分别加下标 1，2．如 a_1, b_1, c_1.

S_1, a_2, b_2, c_2, S_2 等.

1. **N-P 不等式(Neuberg-Pedoe 不等式)**:令 $H_p = \sum a_2^{2p}(-a_1^{2p}+b_1^{2p}+c_1^{2p})$.

1891 年 Neuberg,J. 提出,1943 年 Pedoe,D. 第一个给出证明的著名不等式是:

$$H_1 \geqslant 16S_1S_2. \qquad \{等似\}$$

这个 N-P 不等式已有几十种证法和各种推广. 例如,1963 年 Oppenheim,A. 证明了与 N-P 不等式等价的下述不等式(一般称为 **Oppenheim 不等式**):

定义 a_3, b_3, c_3 为 $a_3=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ 等,则以 a_3, b_3, c_3 为边可以构成一个三角形,记其面积为 S_3,三个三角形 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ 任一边的高依次记为 h_1, h_2, h_3,则

$$S_3 \geqslant S_1+S_2, \quad h_3^2 \geqslant h_1^2+h_2^2; \qquad \{等似\}$$

而 $S_3 \geqslant 2\sqrt{S_1S_2}$,仅当 S_1 与 S_2 全等时等号成立. 见[305]1963,70. 1964,71:444.

1973 年 Carlitz,L. 证明在某些附加条件下,有 $H_1 \geqslant 8(S_1^2+S_2^2)$.

见[305]1973,80:910 - 911.

1988 年陈计、何明秋证明

$$H_1 \geqslant 16S_1S_2+2\sum(a_1b_2-a_2b_1)^2. \quad 见[348]1988.1:3-4.$$

1981 年高灵证明 $H_{1/2} \geqslant \sqrt{48S_1S_2}$. 1989 年宋庆证明 $H_{1/2} \geqslant 2\sqrt{3}(\frac{p_1}{p_2}S_2+\frac{p_2}{p_1}S_1)$. 另见[350]1994.4:43. 1987 年马援证明:若 $0 \leqslant p \leqslant 1$,则

$$H_p \geqslant 3[(16/3)S_1S_2]^p.$$

当 $0<p<1$ 时,仅当 $\triangle_1, \triangle_2$ 均为等边时等号成立.

1991 年杨世国证明了反向 N-P 不等式和反向 Oppenheim 不等式:令 $d_k=(b_k^2+c_k^2-a_k^2)/2$, $D_k=\begin{pmatrix} b_k^2 & d_k \\ d_k & c_k^2 \end{pmatrix}$, α_k, β_k 分别是矩阵D_1, D_2 的特征值. $0<m \leqslant \alpha_k, \beta_k \leqslant M, k=1, 2$. 则

$$H_1 \leqslant 8[(M/m)(S_1+S_2)^2-(S_1^2+S_2^2)], \quad S_3 \leqslant \sqrt{M/m}(S_1+S_2).$$

见[345]1991,12:37 - 39.

[19] 指出,在 H_1 与 $16S_1S_2$ 之间还可作不同的插值. 例如

$$H_1 \geqslant (\sum a_1^2)(\sum a_2^2)-2\sqrt{(\sum a_1^4)(\sum a_2^4)} \geqslant 16S_1S_2.$$

上述不等式还可作各种指数或加权推广. 例如

令 $H_{p,q}=\sum a_2^{2/q}(-a_1^{2/p}+b_1^{2/p}+c_1^{2/p}), t=1/p+1/q, p, q \geqslant 1$,则

$$H_{p,q} \geqslant 3(\frac{4}{\sqrt{3}})^t S_1^{1/p}S_2^{1/q}. \quad (详见[19]354-371)$$

1994 年尹华焱证明

$$H_1 \leqslant 16S_1S_2\left[3\left(\frac{R_1R_2}{4r_1r_2}\right)^{3/2}-2\right],$$

仅当 $\triangle_1, \triangle_2$ 均不等边时等号成立. 作者还猜想:

$16S_1S_2\left(\frac{R_1R_2}{4r_1r_2}\right)^{1/2} \leqslant H_1 \leqslant 16S_1S_2\left(\frac{R_1R_2}{4r_1r_2}\right)^{3/2}$.(见[350]1994,4:41 – 42)

2. [MCU].设以 $a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2$ 为边构成的三角形面积为 S,则

$$\sqrt{S} \geqslant \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}. \qquad \{等似\}$$

(第 43 届普特南数学竞赛,见[305]1983,90:546 – 553)

3. 设 x, y 为非负实数,令 $t=x+y, q=1+(t/2)$,则

$$\sum a_1^x a_2^y \geqslant 2^t 3^q r_1^x r_2^y.$$

4. 若 $x, y \geqslant 1$,令 $\lambda = x+y-2$,则 $\sum a_1^x a_2^y \leqslant 9 \times 2^\lambda R_1^x R_2^y$.

5. $36r_1r_2 \leqslant 4\sqrt{3S_1S_2} \leqslant \sum a_1a_2 \leqslant 9R_1R_2$.

6. $432(r_1r_2)^2 \leqslant 16S_1S_2 + \sum a_2^2(b_1^2-c_1^2) \leqslant \sum (a_1a_2)^2 \leqslant 36(R_1R_2)^2$.

7. (1) $\sum (a_1a_2)^{-1} \geqslant (4r_1r_2)^{-1} \geqslant (R_1R_2)^{-1}$;

(2) $\sum \frac{1}{a_1(-a_2+b_2+c_2)} \geqslant \frac{1}{R_1R_2}$.

8. 1990 年李世杰证明:设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为正数,则

$$\sum(\lambda_1a_1a_2) \geqslant 4\sqrt{(\sum\lambda_1\lambda_2)S_1S_2},$$ 仅当两个三形角相似且

$$\frac{a_1^2}{\lambda_2+\lambda_3} = \frac{b_1^2}{\lambda_3+\lambda_1} = \frac{c_1^2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

时等号成立.由此推出

$$\sum a_1a_2(a_1+a_2) \geqslant 8 \cdot 3^{1/4}\sqrt{S_1S_2}(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}),$$

$$\sum (a_1+a_2)^3 \geqslant 64 \times 3^{1/4}(S_1S_2)^{3/4}.$$(见[348]1990,1:22 – 26)

9. $\sum \frac{a_2}{b_1^2+c_1^2} \leqslant \frac{9R_2}{8S_1}$,

10. $\sum \frac{1}{a_2(p_1-a_1)} \geqslant \frac{2}{R_1R_2}$.

11. $\sum \frac{a_1}{p_2-a_2} \geqslant 6\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{1/2}$.

12. $4(3R_1R_2)^{-1} \leqslant \sum (l_{a_1}l_{a_2})^{-1} \leqslant (3r_1r_2)^{-1}$.

仅当两个三角形等边时等号成立,见[348]1990,4:18.

13. $\sum l_{a_1}l_{a_2} \geqslant 3\sqrt{3S_1S_2}$.

14. $\sum a_1^2 r_{a_2} \geqslant 2S_1p_2$.

15. $\sum a_2 r_{a_1}^2 \geqslant 18S_1S_2/p_2$.

16. $\sum \frac{a_1^2}{r_{c_2}r_{b_2}} \geqslant \frac{4S_1}{S_2}$.

17. $\sum (r_{a_1}/h_{a_2}) \geqslant 3 \cdot \sqrt{S_1/S_2}$.

18. $8\sqrt{3} \cdot (S_1/S_2)^{1/2} \leqslant \sum (b_1+c_1)/r_{a_2} \leqslant 18R_1R_2/S_2$.

19. [MCM]若$\triangle_1$,$\triangle_2$均为等边三角形且内接于一个半径为r的圆,它们公共部分的面积为S_0,则$2S_0 \geqslant \sqrt{3}r^2$.

20. 令$Q_k = \sum(p_k - a_k)(p_k - b_k)$,$M_k = (\sum a_2^2)/(4Q_k)$,则

$$\sum a_2^2 a_1(p_1 - a_1) \geqslant 4(M_1 S_1^2 + S_2^2/M_1) \geqslant 8S_1S_2;$$

$$\sum a_1 a_2(p_1 - a_1)(p_2 - a_2) \geqslant 2[M_2 S_1^2/M_1 + M_1 S_2^2/M_2].$$

仅当两个三角形均为等边时等号成立.见[348]1988,3.4;[350]1990.3:27-29.

21. $\sum(a_1^2/a_2) \leqslant R_1^2(\sum a_2)^2/\prod a_2$.

其中等号成立的充要条件是:$\triangle_1$为锐角三角形且$\triangle_2$与$\triangle_3$相似,其中$\triangle_3$的三内角为$A_3 = \pi - 2A_1, B_3 = \pi - 2B_1, C_3 = \pi - 2C_1$,而$R_1$是$\triangle_1$的外接圆半径.

提示:利用正弦定理和三角恒等变换,将所要证的不等式转化为

$$(a_2 - b_2\cos C_3 - c_2\cos B_3)^2 + (b_2\sin C_3 - c_2\sin B_3)^2 \geqslant 0.$$

22. **涉及两个三角形角的不等式**:利用边角变换,可以将许多三角形边的不等式转化为角的不等式.例如:

(1) $\sum \operatorname{ctg} A_1 \geqslant \sum(\cos A_2/\sin A_1)$; {等似}

(2) $\sum \operatorname{ctg} A_1(\operatorname{ctg} B_2 + \operatorname{ctg} C_2) \geqslant 2$.

这是角元的N-P不等式.见[350]1984,3:34-36.

23. $\dfrac{R_1}{r_2} \geqslant \dfrac{2}{3}\sum \dfrac{a_1}{a_2}$.(宋庆.[32]P.131-136) {等正}