

授予学

， 计算题（每

1.  $y = f(x)$  由方程  $ye^x + \ln y = 1$  确定，求  $\frac{dy}{dx}$

2.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3.  $\int_{-1}^1 \frac{\sin x + x^2}{1+x^2} dx$

4.  $\int \arctan \sqrt{x} dx$

5.  $\int e^x \cos x dx$

二， 求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$

$$2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

三. (本题 7 分) 将  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$  在  $x=0$  处展开成泰勒公式

四. (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 平行四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (0, -1, 2)$ , 求两个对角线  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$  的夹角。

2. 求经过点  $(2, 0, -3)$  且与两平面  $2x - 2y + 4z + 7 = 0$ ,  $3x + y - 2z + 5 = 0$  垂直的平面的方程。

五. (共 15 分)

1. (本题 10 分) 曲线  $x = \sqrt{y}, y = 0, x = 1, x = 2$  围成图形 (1) 求所围成图形的面积; (2) 求所围成图形绕  $y$  轴旋转形成的旋转体体积;

2. (本题 5 分) 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$  绕极轴旋转所成的旋转体的侧面积

六, (本题 12 分) 设函数  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

- (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间与极值点; (2) 求函数  $f(x)$  的凸凹区间与拐点; (3) 求函数  $f(x)$  的渐近线; (4) 作图

七, (本题 8 分) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) > 0$ ,  $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ .

- (1) 证明: 若  $f(x)$  为偶函数, 则  $F(x)$  为奇函数。  
(2) 证明:  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加。

八, (本题 4 分)

设函数  $f(x)$  二阶可导, 且过曲线  $y = f(x)$  上点  $(x_1, y_1)$  的切线与曲线交于另一点  $(x_2, y_2)$ . 证明存在  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$