§3 三角多项式不等式

n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 的一般形式是:

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}=C_n(x)+S_n(x),$$

式中 $a_0=2c_0,a_k=c_k+c_{-k},b_k=i(c_k-c_{-k})$.

$C_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_n\cos kx$ 称为n 阶余弦多项式. $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\sin kx$ 称为n 阶正弦多项式. $\widetilde{T}_n(x)=-\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k\cos kx-a_k\sin kx)=-i\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k(\mathrm{sgn}k)e^{ikx}$ 称为 $T_n(x)$ 的共轭三角多项式. 记 $\|T_n\|_{C[\alpha,\beta]}=\max\{|T_n(x)|:x\in[\alpha,\beta]\}$. 特别地 $\|T_n\|_{C[-\pi,\pi]}$ 记为 $\|T_n\|_C$. $\|T_n\|_X$ 表示 $\|T_n\|_C$ 或 $\|T_n\|_P,1\leqslant p\leqslant\infty$.

因为 $\cos kx$ 与$\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$都是 $\cos x$ 的k 次代数多项式. 因此,令 $t=\cos x$,余弦多项式 $C_n(x)$ 可写成 $P_n(\cos x)=P_n(t)$,即 n 次代数多项式的形式;同理,正弦多项式 $S_n(x)$ 可写成$(\sin x)P_{n-1}(\cos x)=\sqrt{1-t^2}P_{n-1}(t)$ 的形式,其中 $P_{n-1}(t)$ 为 $n-1$ 次代数多项式,而一般形式 $T_n(x)$ 向 $P_n(x)$ 的转化见本章前言.

1. $\|T_n\|_C\leqslant(n+1)\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|T_n(x)\sin x|$,

2. 若$\{a_k\}$ 为凸序列,且 $a_0\geqslant a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$,则对于 $0<x<2\pi$,有

$$0\leqslant C_n(x)\leqslant\frac{1}{2}(a_0-a_1)\csc^2(\frac{x}{2}).$$

3. 若$\{a_k\}$ 为严格递减的凸序列,且 $a_{n-1}\geqslant 2a_n\geqslant 0$,则对于所有实数 x,有

$$C_n(x)\geqslant 0.$$

4. 若$\{a_k\}$ 递减,即 $a_0\geqslant a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$,且 $a_{2k}\leqslant[(2k-1)/(2k)]a_{2k-1}$ $(1\leqslant k\leqslant n/2)$,则对于 $0<x<\pi$,有

(1) **Vietoris 不等式**:$C_n(x)>0,\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx>0$,

特别,取 $a_0=2,a_k=1/k,\ k=1,\cdots,n$,即得

(2) **Young 不等式**:$1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos kx>0$.

(3) **Fejer-Jackson 不等式**:$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx>0$.

注 $0<x<\pi$ 时,$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}>0$ 的证明值得注意. 因为它要综合运用数学归纳法,反证法,极值法. 当 $n=1$时,不等式 $S_1(x)>0$显然成立. 设 $n<m$ 时,$S_n(x)$

>0,要证 $S_m(x)>0$.用反证法,设 $S_m(x)>0$ 不成立,则必存在 $\xi\in(0,\pi)$,使 $S_m(\xi)\leqslant 0$,考虑使 $S_m(\xi)\leqslant 0$ 达到极小值的点.不妨仍记为 ξ,这时 ξ 为 $(0,\pi)$ 的内点且 $S'_m(\xi)=0$.即

$$\sum_{k=1}^{m}\cos k\xi=0.$$

左边乘以 $2\sin(\xi/2)$ 并用积化和差公式,得 $\sin(m+(1/2))\xi=\sin(\xi/2)>0$.
上式说明 $(m+1/2)\xi$ 与 $\xi/2$ 相差 π 的整数倍,由 $0<\xi<\pi$,得

$|\cos(m+1/2)\xi|=\cos(\xi/2)>0$,从而 $\sin m\xi=\sin[m+(1/2)]\xi\cos(\xi/2)-\cos[m+(1/2)]\xi\cdot\sin(\xi/2)\geqslant 0$,于是 $S_m(\xi)-S_{m-1}(\xi)=(1/m)\sin m\xi\geqslant 0$,即 $S_{m-1}(\xi)\leqslant S_m(\xi)\leqslant 0$.即 $S_{m-1}(\xi)$ 在 $(0,\pi)$ 内能取到非正值,与归纳假设矛盾.证毕.

从这个不等式出发,再用数学归纳法,可进一步证明:若 $0<x_j<\pi,1\leqslant j\leqslant m$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{m}\frac{\sin kx_j}{k}\Big)>0.$$

见[334]1960:35－37、1－4.

我们还要指出,$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sin kx)/k$ 在 $[0,\pi]$ 内仅在 $x_k=(2k-1)\pi/(n+1)$ $(1\leqslant k\leqslant q)$ 取得极大值,而且这些极大值是递减的.所以,$S_n(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上的最大值为 $S_n(\pi/(n+1))$,它是 n 的递增数列,且

$$\lim_{n\to\infty}S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=1.8519\cdots.$$

$S_n(x)$ 仅在 $y_k=2k\pi/n$ $(1\leqslant k\leqslant q-1)$ 取得极小值.$C_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\cos kx)/k$ 在 $[0,\pi]$ 内仅在 $x_k=2\pi k/n$ $(0\leqslant k\leqslant p)$ 取得极大值,仅在 $y_k=2\pi k/(n+1)$ $(1\leqslant k\leqslant q)$ 取得极小值,而在 $2\pi q/(n+1)$ 处为最小值,其中 $q=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$,$p=[n/2]$.见[6]Vol.2.P.92－93.

5. **Bernstein 不等式及其推广:**

(1) $\|T_n^{(k)}\|_X\leqslant n^k\|T_n\|_X.$ (3.1)

此式不能再改进,因为取 $T_n(x)=\cos n(x-x_0)$ 时,$\|T_n\|_c=1$,$\|T_n^{(k)}\|=n^k$,$k=1,2,\cdots$.(3.1) 式有多种证法,不同的证法往往和它的不同方向的推广相联系.例如见[68]、[62]等.

(2) $\|\widetilde{T}'_n\|_c\leqslant n\|T_n\|_c.$

(3) $\|T_n^{(k)}\|_p\leqslant n^k\|T_n\|_p,1\leqslant p\leqslant\infty.$

(4) $\|T'_n\|_c^2+n^2\|T_n^2\|_c\leqslant n^2\|T_n\|_c^2.$

(5) $\|\widetilde{T}'_n\|_c^2+\|T'_n\|_c^2\leqslant n\|T_n\|_c^2.$

(6) 设 φ 是 $[0,\infty)$ 上递减的凸或凹函数,$\varphi(x)>0,\varphi(0)=0$.令

$S_n(\varphi,x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\varphi(|k|)c_ke^{ikx}$,则

$\| S_n(\varphi) \|_X \leqslant 2\varphi(n) \| T_n \|_X, X = C$ 或 $p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

推论 1 设 $\varphi(x) = x^\alpha, \alpha > 0$,则 $\| S_n(\varphi) \|_X \leqslant 2n^\alpha \| T_n \|_X$.

推论 2 设 $\varphi(x) = e^{\alpha x} - 1, \alpha > 0$,则 $\| S_n(\varphi) \|_X \leqslant 2(e^{\alpha n} - 1) \| T_n \|_X$.

证明见[126]P325 - 337.

(7) 设 $0 < \delta < 2\pi/n$,则

$$\| T_n^{(k)} \|_c \leqslant \left(\frac{n}{2}\csc\frac{n\delta}{2}\right)^k \max_x \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} T_n(x + j\delta) \right|,$$

仅当 $T_n(x) = a\cos nx + b\sin nx + c$ 时等号成立.见[4]P352 - 353.

(8) **L^p 空间中的 Bernstein 不等式:**

$$\| T_n\cos\alpha + \frac{1}{n}T'_n\sin\alpha \|_p \leqslant \| T_n \|_p.$$

式中 $0 \leqslant p \leqslant \infty, \alpha \in R^1$,见[401]1989,19(1):145 - 156.

(9) $\left| \sum_{k=1}^{n} kC_{-k}e^{-ikx} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} kC_k e^{ikx} \right| \leqslant n \| T_n \|_X$.

类似的不等式及其证明见[373]1985,38(2):216 - 226.

(10) **Turan 不等式:**设 $T_n(x)$ 的所有零点都是实的,则

$$\| T'_n \|_p \geqslant C\sqrt{n} \| T_n \|_p. (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

式中 n 的阶不能再改进:证明见[352]1984,11(1):28 - 33.

(11) **尼科利斯基不等式:**设 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty. r = (1/p) - (1/q)$,则

$$\| T_n \|_q \leqslant 2n^r \| T_n \|_p.$$

特别地,$\| T_n \|_c \leqslant \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^{1/2} \| T_n \|_2$.

(12) $\| T'_n \|_\infty \leqslant \frac{n(n+1)}{2\pi} \| T_n \|_1$.

(13) $\| T_n \|_1 \leqslant \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} \left\{ [(n+1)(n+2) + \frac{1}{3}]^{1/2} + \frac{1}{20n} \right\} \| T_n(x)\sin x \|_1 (n \geqslant 3)$.

(14) 取 $\omega(x) = |\sin x|$, $\| T_n \|_{p,\omega} = \int_0^{2\pi} |T_n(x)|^p |\sin x| \mathrm{d}x$.则

$$\| T_n \|_p \leqslant C(n,p) \cdot n^{1/p} \| T_n \|_{p,\omega};$$

$$\| T_n \|_{p,\omega} \leqslant C(p)\left(n + \frac{2}{5}\right)^\alpha \| T_n(x)\sin x \|_p.$$

式中 $C(n,p) = (2p)^{1/p}\left(1 + \frac{1}{np}\right)^\beta$,

$$C(p) = \left(\frac{(2p+1)^{2+\frac{1}{p}}}{p(p+1)}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{1/p} \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{2}{p(p+1)}},$$

$\alpha = 1 - (1/p), \beta = n + (1/p), 1 \leqslant p < \infty$.以上(12)~(14)见[327]1990,62(2):197 - 205.

(15) $\| T_n \|_{L^p[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x)|^p |\sin x|^r \mathrm{d}x$.若 $0 < p < 1, r \geqslant 0$,则

$$\| T'_n \|_{L^p[-1,1]} \leqslant C(r,p)n \| T_n \|_{L^p[-\pi,\pi]}.$$

(周颂平,[352]1987,14(1):25 - 28)

(16)　**Jackson 不等式**: $\| T_n \|_1 \geqslant \frac{1}{n} \| T_n \|_c$.

(17)　设 $T_n(\omega)$ 表示形如

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \left[\sin\left(\frac{\omega - x}{2}\right)\right]^k \left[\sin\left(\frac{x + \omega}{2}\right)\right]^{2n-k}$$

的特殊形式的多项式集,式中 $\forall c_k \geqslant 0$ 或 $c_k \leqslant 0. 0 < \omega \leqslant \pi$,若 $t_n \in T_n(\omega)$, $q_k \in T_k(x), r = t_n q_k, n \geqslant 0, k \geqslant 0, m \geqslant 1$,则

$$\| r^{(m)} \|_c \leqslant C_m \left(\frac{(n + k)(k + 1)}{\omega}\right)^m \| r \|_c.$$

$$\| t'_n \|_c \leqslant \{n + 16\pi n^2[(\pi/\omega) - 1]\} \| t_n \|_c.$$

式中 C 范数在 $[-\omega, \omega]$ 上取. 见[391]1988,51(3 - 4):421 - 436.

(18)　设 $\omega \in L[0,2\pi], 1 \leqslant p < \infty$,

$$Y_{kn} = \{y = \frac{4m - 1 + (-1)^k \pi}{4n}; 1 \leqslant m \leqslant 2n\},\text{则}$$

$$\| T_n^{(k)} \|_{p,\omega} \leqslant n^k \max_{y \in Y_{kn}} \| T_n(\cdot + y) \|_{p,\omega}.$$

(19)　设 $\| T_n \|_C \leqslant 1$,则

$$\| T_n^{(k)} \|_{2r+2}^{2r+2} \leqslant \left(\frac{2r + 1}{2r + 2}\right) n^{2k} \| T_n^{(k)} \|_{2r}^{2r}.$$

式中 $r \in N, r \geqslant 0$,仅当 $T_n(x) = \cos(nx + \alpha)$ 时等号成立. (Varma, A. K., [327]1991, 65(3):273 - 278).

6.　下面用 $\| C_n \|_{[-a,a]}$ 表示 $\max\{| C_n(x) |: -a \leqslant x \leqslant a\}$.

(1)　设 $a_k = 1, 0 < a \leqslant \pi$,则 $\| C_n \|_{[-a,a]} \geqslant (\sin \frac{a}{2})^{2n}$. 证明见[112]P. 90.

(2)　若 $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$,则对于所有 $C_n(x)$,有

$$(1 - \frac{2}{\pi}) \frac{1}{n + 1} \leqslant \min_{C_n} \frac{\| C_n \|_{[\frac{\pi}{2},\pi]}}{\| C_n \|_{[0,2\pi]}} \leqslant (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{1}{n + 1},\text{证明见[73]}P.446 - 448.$$

7.　若 $T_n(0) = 0, \left| T_n\left(\frac{2k + 1}{2n}\pi\right) \right| \leqslant 1, k = 0, 1, \cdots, 2n - 1$. 则对于 $|x| \leqslant \frac{\pi}{2n}$,有 $| T_n(x) | \leqslant | \sin nx |$. 仅当 $T_n(x) = c\sin nx$ 时等号成立.

8.　若 $0 < a < \pi$, $\| T_n \|_{[-a,a]} \leqslant 1$,则

$$\| T_n \|_C \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{tg} \frac{a}{4}\right)^{2n} + \left(\operatorname{tg} \frac{a}{4}\right)^{-2n}\right].$$

9.　**Erdös 不等式**:若 $a_0 = 1$,且 $\max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{| a_k |, | b_k |\} = 1$, $\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = An$,则存在只依赖于 A 的常数 $a > 0$,使得 $\lim_{A \to 0} a(A) = 0$　而且

$$\| T_n \|_C > \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + a(A))\{\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\}^{1/2},$$见 Ann. Polon. Math. 1962, 12:151 - 154.

10.　[MCU]. 设 $| S_n(x) | \leqslant | \sin x |$,则 $\left| \sum_{k=1}^{n} kb_k \right| \leqslant 1$.

证 不等式左边 $= |S'_n(0)| = \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{S_n(x)-S_n(0)}{x-0}\right| \leqslant \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 1.$

11. (1)[MCU].设 $|S_n(x)| \leqslant |\sin x|$,且 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_{n-k+1}\sin kx\right| \leqslant |\sin x|$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

证 令 $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{n-k+1}\sin kx$,则 $S'_n(0) + f'_n(0) = (n+1)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)$.
再利用 $|S'_n(0)| \leqslant 1$, $|f'_n(0)| \leqslant 1$ 即可得证.

(2) 若 $|S_n(x)| \leqslant |\sin x|$,则 $|S'_n(0)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} kb_k\right| \leqslant 1$.

12. (1) 若 $|S_n(x)| \leqslant 1$,则 $\sum\limits_{k=1}^{n} |kb_k| \leqslant n$;

(2) 若 $\| S_n \|_c \leqslant 1$,则 $\left|\dfrac{S_n(x)}{\sin x}\right| \leqslant n$.

13. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 不全为 0,而 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cos kx \geqslant 0$, $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$,则当 $0 < x < \pi$ 时,有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j\right)\sin kx > 0.$$

14. 若 $b_k \geqslant b_{k+1} \geqslant 0$, $b_k \leqslant \dfrac{A}{k}$,则 $|S_n(x)| \leqslant 2A\sqrt{\pi} < A(\pi+1)$.

证 不妨设 $0 < x < \pi$,令 m 满足 $1 \leqslant m \leqslant n-1$,而且若 $1 \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{x} < n$,则取 $m = \left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{x}\right]$,若 $x > \sqrt{\pi}$,则取 $m = 0$,若 $x \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{n}$,则取 $m = n$,于是

$|S_n(x)| \leqslant \left|\sum\limits_{k=1}^{m} b_k\sin kx\right| + \left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k\sin kx\right| = \sigma_1 + \sigma_2$,估计 σ_1 用 $|\sin kx| \leqslant kx$,而估计 σ_2 用

$$\left|\sum_{k=p}^{q}\sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{\pi}{x}.\quad \text{(见[73]P484 − 485)}$$

15. 设 $\Delta b_k = b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, $0 < |x| \leqslant \pi$,则

$$\left|\sum_{k=n}^{m} b_k\sin kx\right| \leqslant \frac{\pi b_n}{|x|}.$$

提示:利用

$$\left|\sum_{k=n}^{m} b_k\sin kx\right| = \left|b_m\left(\sum_{k=n}^{m}\sin kx\right) + \sum_{k=n}^{m-1}\Delta b_k\left(\sum_{j=n}^{k}\sin jx\right)\right| \text{和} \left|\sum_{k=n}^{m}\sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{\pi}{|x|}.$$

16. $\| T_n \|_C \leqslant \dfrac{1}{2}|a_0| + \sum\limits_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|) \leqslant \sqrt{4n+2}\, \| T_n \|_C$.

提示:利用

$$\frac{1}{2}|a_0|+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\|T_n\|_C.$$

见[60]上册 P67.

17. 设 $|T_n(x)|\leqslant 1$，则当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，存在常数 $c>0$，使得 $\left\{\frac{1}{2}|a_0|^p+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{1/p}\leqslant cn^r$，式中 $r=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}$.

当 $p>2$ 时，上式不成立，特别当 $p=1$ 时，有

$$\frac{1}{2}|a_0|+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)\leqslant cn^{1/2}.$$

提示：用 Hölder 不等式. 见[57]Vol.1. P245.

18. 设 $T_n(x_0)=\|T_n\|$，则对于 $|x|<\pi/n$，有

$$T_n(x_0+x)\geqslant T_n(x_0)\cos nx=\|T_n\|\cos nx.$$

证 不妨设 $x_0=0,x>0$，令 $A=\|T_n\|$. 用反证法，若存在 y，使 $0<y<\pi/n$，而且 $T_n(y)<A\cos ny$. 对于 $\varepsilon>0$，令 $g_\varepsilon(x)=T_n(x)-(A+\varepsilon)\cos nx$. 选取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $g_\varepsilon(x)<0$，而且若 $x_k=k\pi/n$，则

$$g_\varepsilon(x_k)\begin{cases}\geqslant\varepsilon,\text{若 } k \text{ 为奇数},\\ \leqslant-\varepsilon,\text{若 } k \text{ 为偶数},\end{cases}$$

从而对于 $\varepsilon>0$，g_ε 在每个区间 $[y,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{2n-2},x_{2n-1}]$ 内至少有一个零点. 于是令 $\varepsilon\to 0$，得出 g_0 在区间 $[y,2\pi]$ 内至少有 $2n-1$ 个零点，此外，$g_0(0)=g'_0(0)=0$，g_0 必为不超过 $2n$ 次的三角多项式，并且在区间 $[0,2\pi]$ 内至少有 $2n+1$ 个零点，然而这是不可能的(因为 $g_0(y)<0$，所以 $g_0\neq 0$).

推论 $\|T_n^{(k)}\|_C\leqslant\left(\dfrac{n}{2\sin nk}\right)^k\|\Delta_{2h}^k(T_n)\|_C.$

19. 设 $m>n$，$a=\min\left\{\dfrac{\pi}{2m},\dfrac{(m-n)\pi}{2mn}\right\}$. $0\leqslant\beta<a$，若对任意 $x_0\in R^1$，n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 满足 $2m$ 个不等式：

$$|T_n(x_k)|\leqslant M,0\leqslant k\leqslant 2m-1.$$

式中 $x_k=x_0+(k\pi/m)+\sigma_k$，$|\sigma_k|\leqslant\beta$，则

$$\|T_n\|\leqslant M\sec n((\pi/2m)+\beta).$$

上界不能再改进，当 $\beta=0$ 时得到 Bernstein 不等式(1931).

提示：用反证法，并考虑 n 阶三角多项式

$$\varphi(x)=M\sec n((\pi/2m)+\beta)\cdot\cos nx-T_n(x)$$

的零点特征. 详见[82]P.244－246.

20. 设 $T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\exp(ikx)$ 是正的三角多项式，$c_k=\overline{c}_{-k}$，则

$$|c_k|\leqslant c_0\cos\left(\frac{\pi}{[k/n]+2}\right).$$

21. **Abel 不等式**：若 $x\neq 2k\pi$，则

(1)　$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\exp(ikx)\right|\leqslant\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-1}$;

(2)　$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\sin kx\right|\leqslant\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-1}$;　　(3)　$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\cos kx\right|\leqslant\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-1}$.

证　$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\exp(ikx)\right|\leqslant\left|\exp[i(m+1)x]\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right|$

$=|\sin(nx/2)|\cdot|\sin(x/2)|^{-1}\leqslant|\sin(x/2)|^{-1}$

(4)　若 a_n 是正的递减数列,则对于 $x\neq 2j\pi, j\in N$,有

$$\left|\sum_{k=n}^{m+n}a_k\exp(ikx)\right|\leqslant a_n/|\sin(x/2)|.$$

(5)　当 $0<x\leqslant\pi, m\geqslant n$ 时,有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\sin(k+(1/2))x\right|\leqslant\pi/x.$$

22.　**指数和不等式:**

(1)　令 $S(n,m,q)=\sum_{k=0}^{m-1}\exp(2\pi ink^2/q), q\in N,(n,q)=1$.高斯证明 $|S(n,q,q)|\leqslant\sqrt{q}$.华罗庚将指数中的 k^2 推广到一般整系数多项式.见[76]196－201.若 $q\geqslant 60$,$2a$ 与 q 互为素数,自然数 p,m 满足 $m<m+p\leqslant q$,则

$$|S(\alpha,m+p,q)-S(\alpha,m,q)|\leqslant\sqrt{q}\ln q;$$

若 2 除不尽 q,则 $|S(1,m,q)-(m/q)S(1,q,q)|\leqslant\sqrt{q}\log q$.(见[76]187)

(2)　令 $S(\alpha)=\sum_{k=1}^{m}\exp(2\pi i(\alpha+k)^2/n)$,则当 $m\leqslant(n/4)-\alpha$, $|\alpha|<1$ 时, $|S(\alpha)|\leqslant c\sqrt{n}$;当 $m\leqslant n-1$ 时, $|S(0)|\leqslant c\sqrt{n}$.

(3)　设 $\langle a\rangle=\min\{\alpha-[\alpha],[\alpha]+1-\alpha\}$,即 $\langle\alpha\rangle$ 表示 α 和它最靠近的整数间的距离.记

$S(m,n)=\sum_{k=n}^{m}\exp(2\pi ik\alpha)$,则 $|S(m,1)|\leqslant\min\{m,|\sin\pi\alpha|^{-1}\}$,而且

$|S(m,n)|\leqslant\min\{m-n,\frac{1}{2\alpha}\}$.见[76]187.

(4)　Vinogradov 三角和定义为 $S(m,n)=\sum_{k=1}^{m-1}(|\sin(\pi kn/m)|/\sin(\pi k/m))$.1989 年,俞孔樾证明: $(\frac{1}{m})\sum_{n=1}^{m}S(m,n)<\frac{4m}{\pi^2}(\log m+c-\log\frac{\pi}{2})+\frac{2}{\pi}(2-\frac{1}{\pi})-\frac{\pi}{6m}(1-\frac{1}{m})$,式中 c 为 Euler 常数.见浙江师大学报 1989,12:4.

(5)　**华罗庚不等式:**设 $N,n_1,\cdots,n_m$ 无公因子,$\varepsilon>0$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{2\pi i\left(\sum_{j=1}^{m}(k^j\cdot n_j)/N\right)\right\}\right|\leqslant cN^p,$$

式中 $p=1-(1/m)+\varepsilon$,c 只依赖于 m,ε.

(6)　**华罗庚不等式:**令 $q=2^m-m+\varepsilon,\varepsilon>0$,则

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \exp(2\pi i t k^m) \right|^{2^m} \mathrm{d}t \leqslant cN^q,$$

式中常数 c 只依赖于 m,ε.

(5)(6) 见 Selected papers of Loo-Keng Hua. Edited by H. Halberstam, Springer, 1983.

23. 若 $k \to \infty$ 时 α_k 递减趋于 $0, 0 < x < 2\pi$,则

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \exp(ikx) \right| \leqslant \alpha_n / \sin(x/2). \quad ([305]1957,64:47-48)$$

24. 设 $\alpha_{n,k} \geqslant 0, \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} = 1$,令 $A_n(u) = \sum_{j=0}^{[u]} \alpha_{n,n-j}, u \geqslant 0, 0 < t \leqslant \pi, 0 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$,则

$$\left| \sum_{k=p}^{q} \alpha_{n,n-k} \exp i(n-k)t \right| \leqslant cA_n(\pi/t).$$

见[324],1942,9:168-207.

25. 设 $\{\lambda_n\}$ 为递增实数列,若 $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \alpha > 1$,记 $\| c \|_2 = (\sum | c_n |^2)^{1/2}$.则存在只与 α 有关的常数 A, B,使得

$$A \| c \|_2 \leqslant \left\| \sum c_n \exp(i\lambda_n t) \right\|_2 \leqslant B \| c \|_2,$$

注意 α 不能换成 1.但对上界估计,条件可换成 $\{\lambda_n\}$ 递增且 $\{\exp(i\lambda_n t)\}$ 为 $L^2(-\pi,\pi)$ 中的基本列(Ingham, A. E.).见[308]1984,92(4):549-553.

26. 设 $S(x) = \sum_{k=M+1}^{M+N} \alpha_k \exp(2\pi i k x)$,式中 $\{\alpha_k\}$ 为复数列,若 $0 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant 1, x_{k+1} - x_k \geqslant \delta > 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n} | S(x_k) |^2 \leqslant (N + \delta^{-1} - 1) \sum_{k=M+1}^{M+N} | \alpha_k |^2.$$

这是 1974 年蒙哥马利 - 沃恩利用泛函分析的对偶原理得到的最佳估计. 见[154]P560.

27. 对于任意实数 x,有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant \begin{cases} 2\sqrt{\pi} < 1 + \pi. \\ \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = 1.8519\cdots < \frac{\pi}{2} + 1. \end{cases}$$

证 因为 $f(x) = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right|$ 是以 2π 为周期的偶函数,又 $x = 0, \pi$ 时,不等式显然成立,所以只要对于 $0 < x < \pi$,证明不等式.取自然数 m 满足 $m \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{x} < m + 1$,则 $f(x) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\sin kx}{k} \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| = \sigma_1 + \sigma_2$,若 $m = 0$,则 $\sigma_1 = 0$,若 $m \geqslant n$,则 $\sigma_2 = 0$,利用 $| \sin t | \leqslant | t |$,有 $\sigma_1 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{kx}{k} = mx \leqslant \sqrt{\pi}$.另一方面,从 $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$ 及 Abel 不等式,有

$$\sigma_2 \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot\frac{1}{m+1} \leqslant \frac{1}{\frac{x}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{x}} = \sqrt{\pi}.$$

所以 $f(x) \leqslant \sigma_1 + \sigma_2 \leqslant 2\sqrt{\pi}$.

注 当 x 充分小时，可取 m 满足 $\frac{2n-1}{3} < m < \frac{1}{2x}$，这时不等式可改进为 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant 1$.

28. [MCM]. $\sum_{k=n}^{3n-1}\frac{1}{k}|\sin k| > \frac{1}{9}$.

提示：先证对任意实数 x，$|\sin x|$，$|\sin(x+1)|$ 中至少有一个大于 1/3.

29. 设 $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(|\sin kx|/k)$，$M_n = (\pi/2)\max\{f_n(x): x\in R\}$，$S_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$，则 $S_n < M_n < S_{n+1}$.

证 令 $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(\cos kx/k)$，则

$$f_n(x) = (2/\pi)S_n - (4/\pi)\sum_{k=1}^{\infty}B_n(2kx)/(4k^2-1) \leqslant (2/\pi)S_n + (4/\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$$

$= (2/\pi)(S_n+1)$，另一方面，有 $M_n > \frac{1}{2}\int_0^{\pi}f_n(x)\mathrm{d}x = S_n$.

30. $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (x\in R^1)$.

31. 若 $x \neq 2j\pi \quad (j\in Z)$，则

$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-1}$，$(m = 0,1,\cdots)$；而当 $|x| > \frac{1}{n}$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n^2+1}^{n^3}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{2\pi}{n^2|x|}.$$

见[327]，1990，62(2)：258.

32. 设 $0 < x < 2\pi$，则

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(m+1)\sin(x/2)}.$$

提示：利用 Abel 恒等变换及 Abel 不等式.

33. 若 $0 < x < \pi, n > 1$，则

$$0 < 4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} < \pi - x.$$

34. 设 $0 < x \leqslant \pi, 0 < \alpha < 1$，则

(1) $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\right| \leqslant C_{\alpha}x^{\alpha-1}$. (2) $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k^{\alpha}}\right| \leqslant C_{\alpha}x^{\alpha-1}$.

(3) $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\right| \leqslant \ln\frac{1}{x} + c$. (4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k} \leqslant -\ln\sin\frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2}$.

(5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} > 4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{\pi-x}{2}\right).(0 < x < \pi).n > 1.$

注意这几个不等式的证明技巧都有典型意义.下面仅以(1)的证明为例.

选取 γ,β,使 $0 < \gamma < \alpha < \beta < \infty$,并使 γ 充分小,β 充分大,则

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha}\sin kx = \sum_{k<r/x}+\sum_{r/x\leqslant k\leqslant\beta/x}+\sum_{k>\beta/x} = S_1+S_2+S_3.$$

利用 $\sum_{k<M}k^{-\alpha} < \int_0^M t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} = C_\alpha M^{1-\alpha}.$

可得

$$|S_1|\leqslant\sum_{k<r/x}k^{-\alpha}|\sin kx|\leqslant\sum_{k<r/x}k^{-\alpha}(kx) < r\sum_{k<r/x}k^{-\alpha} < C_\alpha\left(\frac{r}{x}\right)^{1-\alpha} = C_\alpha r^{1-\alpha}x^{\alpha-1}. \quad (3.2)$$

再利用 Abel 不等式,有

$$\left|\sum_{k\geqslant M}k^{-\alpha}\sin kx\right|\leqslant M^{-\alpha}\max\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|:0 < x\leqslant\pi\right\}\leqslant M^{-\alpha}\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|^{-1}.$$

于是

$$|S_3|\leqslant\left(\frac{\beta}{x}\right)^{-\alpha}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{-1} = C_\alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}. \quad (3.3)$$

再利用

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}\sin kx\approx x^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\alpha.(x\to+0,0 < \alpha < 1)$$(见[57]Vol.1.P.70)

对于固定的 $\varepsilon > 0$,有

$$(\beta-\varepsilon)x^{\alpha-1}\leqslant S_2\leqslant(\beta+\varepsilon)x^{\alpha-1}. \quad (3.4)$$

从(3.2),(3.3),(3.4)式即可推得

$\left|\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha}\sin kx\right|\leqslant C_\alpha x^{\alpha-1}$.见[57]Vol.1.P187.

35. $\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{n-k+1}\right|\leqslant A\int_0^\pi|C_n(x)|\mathrm{d}x$.式中 $\frac{\pi}{2}\leqslant A < \int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 1.85\cdots$.

特别地,若所有 α_k 同号,则 $A = \pi/2$.

36. 对于任意实数 $C_k,k = 0,1,\cdots,n$,有

$$\max\left||\cos x|-\sum_{k=0}^{n}C_k\cos^k x\right| > \frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

证明见[60]上册 P.177 – 178.

37. **Lebed 不等式**:记 $A_s = \{\{\alpha_k\}:\alpha_k\geqslant0$ 且 $s\geqslant0$ 时,$\alpha_k k^{-s}$ 递减$\}$,$A_{-s} = \{\{\alpha_k\}:\alpha_k\geqslant0$ 且 $s < 0$ 时 $\alpha_k\cdot k^s$ 递增$\}$.设 $f(x) = \cos x$ 或 $\sin x$,则当 $x\neq2k\pi,k = 0,\pm1,\pm2\cdots$ 时,有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\alpha_k f(kx)\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{a_n}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left(\dfrac{m}{n}\right)^s,\text{当}(a_k)\in A_s,\\[2ex]\dfrac{a_m}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left(\dfrac{m}{n}\right)^s,\text{当}(a_k)\in A_{-s}.\end{cases}$$

见[4]P361 - 362.

38. $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sqrt{2}\,|x|$.

证 令 $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\sin kx}{k}$,及 $y = x - \pi$,

(1) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,则

$$|f'(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cos kx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(y/2)|} \leqslant \sqrt{2},$$

从而 $|f(x)| \leqslant \sqrt{2}\,|x|$.

(2) 若 $x \geqslant \frac{\pi}{2}$,则

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin ky}{k}\right| < \int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u < 2 < \sqrt{2}\,|x|.$$

(Gaier-Todd, Numer. Math. 1967, 9:452 - 459)

39. 设 $-\pi < x < \pi$, $m = 0,1,2,\cdots$,则

$$\sum_{k=m+1}^{m+n}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} \leqslant 2\left[(m+1)\cos\frac{x}{2}\right]^{-1}.$$

40. 设 $0 < x < \frac{\pi}{n+1}$, $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} - \frac{x}{2}$. 则 n 为奇数时,$T_n(x) > 0$, n 为偶数时,$T_n(x) < 0$.

一般地,有 **Sz-Nagy 不等式**:设数列 $\{\alpha_{n+m}\}$ 满足:$\alpha_{n+1} > 0$,而当 $k \geqslant n+1$ 时,$\{\alpha_k\}$ 为凸序列,即 $\alpha_k \geqslant 0$, $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k+1} \geqslant 0$, $\Delta^2\alpha_k = \alpha_k - 2\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} \geqslant 0$. 并且 $\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0$,则当 $\frac{n}{n+1}\pi < x < \pi$ 时,有 $(-1)^n \sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k \sin kx > 0$. 见[4]$P$.339 - 340.

41. **Dirichlet 核不等式**:n 阶 Dirichlet 核定义为:

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \begin{cases}\dfrac{\sin(n+(1/2))x}{2\sin(x/2)}, & x \neq 2m\pi \quad (m \in Z)\\ n + 1/2, & x = 2m\pi.\end{cases}$$

(1) $|D_n(x)| \leqslant (1/2)\,|\csc(x/2)|$, $x \neq 2k\pi$, $k \in Z$

(2) $|D_n(x)| \leqslant \begin{cases} n + (1/2), & (x \in R^1)\\ (1/2)\,|\csc(\sigma/2)| \leqslant \pi/(2\sigma), & (0 < \sigma \leqslant |x| < \pi),\end{cases}$

(3) $\sum_{k=0}^{m} D_n(2\pi k/p) > 0$, $(p \in N, m, n = 0,1,2,\cdots)$

(4) 若 $0 \leqslant n < p$, $1 \leqslant m < p$,则

$$\sum_{k=1}^{m} D_n(2\pi k/p) < \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} D_n(2\pi k/p) < \frac{p - n + m}{2}.$$

(5) 设 $0 < a \leqslant \frac{\pi}{2}$,则

$\frac{1}{2n-1}D_{n-1}\left(\frac{a}{n}\right)$ 关于 n 递减,$\frac{1}{2n+1}D_n\left(\frac{a}{n}\right)$ 关于 n 递增,见[301]2000,252:410 - 430.

42. **Fejér 核不等式：** Fejér 核定义为：

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{n+1}\left[\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x}{2\sin(x/2)}\right]^2, & x\neq 2m\pi,\\ (n+1)/2, & x=2m\pi.\end{cases}$$

(1) $$0\leqslant K_n(x)\leqslant\begin{cases}(n+1)/2<n, & x\in R^1\\ \dfrac{\pi^2}{2(n+1)x^2}, & 0<|x|\leqslant\pi,\\ \dfrac{[\csc(\sigma/2)]^2}{2(n+1)}<\dfrac{\csc(\sigma/2)}{2}. & 0<\sigma\leqslant|x|\leqslant\pi.\end{cases}$$

(2) $$x^{\alpha}K_n(x)\leqslant\begin{cases}2^{\alpha-3}\pi^2(n+1)^{1-\alpha}, & 0<x<1/n,0<\alpha\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi^2x^{\alpha-2}}{2(n+1)}, & 0<x\leqslant\pi,0<\alpha\leqslant 2.\end{cases}$$

43. (C,α) 核（**Fejér 核的推广，** 如 $(C,1)$ 核就是 Fejér 核）：

$$K_n^{\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}D_k(t)\quad(\alpha>0),$$

式中 $A_n^{\alpha}=\begin{pmatrix}n+\alpha\\ n\end{pmatrix}=\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}$，

$$K_n^{\alpha}(x)\leqslant\begin{cases}n+1\leqslant 2n, & x\in R^1,\\ \dfrac{A_{\alpha}}{n^{\alpha}x^{\alpha+1}}, & 0<x\leqslant\pi,0<\alpha<1,\\ \dfrac{nA_{\alpha}}{(1+nx)[1+(nx)^{\alpha}]}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,0<\alpha<1.\end{cases}$$

式中 A_{α} 是只依赖于 α 的常数. 见[57]Vol.1.P.94.

注　$D_n(x),K_n(x)$ 的积分不等式见第 13 章 N.98,99.

44. **共轭 Dirichlet 核不等式：** 共轭 Dirichlet 核定义为

$$\widetilde{D}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos(x/2)-\cos[n+(1/2)]x}{2\sin(x/2)}.$$

$$|\widetilde{D}_n(x)|\leqslant\begin{cases}n, & x\in R^1\\ \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}\leqslant\dfrac{\pi}{|x|}, & 0<|x|<\pi\end{cases}$$

45. **共轭 Fejer 核不等式：** 共轭 Fejer 核定义为

$$\widetilde{K}_n(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k+(1/2))x}{2\sin(x/2)}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{\sin(n+1)x}{[2\sin(x/2)]^2}.$$

(1)　$|\widetilde{K}_n(x)|\leqslant n/2$.

(2)　$\widetilde{K}_n(x)>0,0<t<\pi$.

(3)　$\widetilde{K}_n(x)\operatorname{sgn}x\geqslant 0,\ -\pi<x<\pi$.

(4)　$\left|\widetilde{K}_n(x)-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right|\leqslant\dfrac{\pi^2}{4(n+1)x^2},0<|x|<\pi$.

46. **共轭(C,α)核定义为:**

$$\widetilde{K}_n^\alpha(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\widetilde{D}_k(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x/2)-H_n^\alpha(x),$$

式中 $H_n^\alpha(x)=\dfrac{1}{2A_n^\alpha\sin(x/2)}\operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}\exp n\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x\right]$.

$$|\widetilde{K}_n^\alpha(x)|\leqslant\begin{cases}n, & x\in R^1, 0<\alpha<1,\\ \dfrac{A_\alpha}{n^\alpha x^{\alpha+1}}, & 0<x\leqslant\pi, 0<\alpha<1.\end{cases}$$

式中 A_α 是依赖于 α 的常数,见[57]Vol.1.P.95.[87]P.60.

47. **Poisson 核不等式:** Poisson 核定义为

$$P(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nt=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}\quad(0\leqslant r<1).$$

(1) $P(r,t)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{1-r}, & 0\leqslant r<1\\ \dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{(1-r)}{t^2}, & 1/2\leqslant r\leqslant 1, |t|<\pi.\end{cases}$

(2) $\dfrac{1-r}{2(1+r)}\leqslant P(r,t)\leqslant\dfrac{1+r}{2(1-r)},\quad 0\leqslant r<1.$

(3) $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)\displaystyle\int_0^{1-r}t^\alpha P(r,t)\mathrm{d}t\leqslant(1-r)^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1.$

(4) $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)\displaystyle\int_{1-r}^{\pi}t^\alpha P(r,t)\mathrm{d}t\leqslant\begin{cases}\dfrac{\pi(1-r)^\alpha}{4r(1-\alpha)}, & 0<\alpha<1,\\ \dfrac{\pi(1-r)}{4r}\log\dfrac{\pi}{1-r}, & \alpha=1.\end{cases}$

(5) $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)\displaystyle\int_0^{\pi}t^{1+\alpha}P(r,t)\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{\pi^{1+\alpha}}{4\alpha r}(1-r),\quad 0<\alpha\leqslant 1.$

(6) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|P'(r,t)|\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{2}{\pi(1-r)},\quad 0<r<1.$

(7) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|P''(r,t)|\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{4}{(1-r)^2},\quad 0<r<1.$

式中 P 的导数是对 t 求的.

48. 若 $0\leqslant x\leqslant\pi$,则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin kx+\left(\frac{1}{2}\right)\sin(n+1)x\geqslant 0$. (Fejer).

49. 若 $0\leqslant x\leqslant 2\pi/3$,则

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n+2-k}{2}\right]k\sin kx>0.$$

50. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)|\sin kx|\leqslant\frac{(n+1)^2}{\pi}$;

51. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\sin kx>0,\ 0<x<\pi$. (Lukács)

52. 设 $T_n^\alpha(t)=\dfrac{1}{1+\alpha}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kt}{k+\alpha}$,则当 $-1<\alpha\leqslant 1$ 时,$T_n^\alpha(t)\geqslant 0$. (**Young 不等**

式).进一步推广见[4]P342－343.

53.　记 $C_n(x,a)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx$，$C_n(x,1)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$，则

$$\frac{\int_0^{\pi}|C_n(x,a)|\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi}|C_n(x,1)|\mathrm{d}x}\geqslant\min_{1\leqslant m\leqslant n+1}\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}a_{n+1-k}\right\},$$

仅当 $a_0=a_1=\cdots=a_n\geqslant 0$ 时等号成立,(Alzer,H.,[301]1997,208(2):567－570.)

54.　设 $|T_n(\frac{k\pi}{n})|\leqslant 1$，$k=0,1,\cdots,2n-1$，$T'_n(0)=0$，则

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|T'_n(x)|^2}{1-\cos x}\mathrm{d}x\leqslant n^3$，仅当 $T_n(x)=e^{i\alpha}\cos nx\ (\alpha\in R^1)$ 时等号成立.

(Guessab,A.等.[327]1997,90(2):255－282)

55.　设 $\|T_n\|_C=\max\{|T_n(x)|:x\in[0,\pi]\}\leqslant 1$，$\omega_r(x)=(\sin x)^r$，

$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_r}=\int_0^{\pi}|T_n^{(k)}(x)|^2\omega_r(x)\mathrm{d}x$.则:

(1)　$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_4}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{4}n^k\left(1-\frac{16}{n^2}\right)^{1/2}$，$k\geqslant 2$，$n\geqslant 4$.

仅当 $T_n(x)=\cos n(x-x_0)$ 时等号成立.

(2)　$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_1}\leqslant n^k\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)^{1/2}$.

特别地,当 $T_n(x)$ 为奇函数或偶函数时,成立 $\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_1}\leqslant n^k\left(1-\frac{1}{4n^2-1}\right)^{1/2}$.

(3)　$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_2}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^k$.仅当 $T_n(x)=\cos n(x-x_0)$ 时等号成立.

(4)　$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_3}\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}n^k\left(1+\frac{9}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\right)^{1/2}$.

$k\geqslant 2$，$n\geqslant 3$，仅当 $T_n^{(k-1)}(x)=\pm n^{k-1}\sin nx$ 时等号成立.特别地,当 $T_n(x)$ 为偶或奇函数时,成立

$$\|T_n^{(k)}\|_{2,\omega_3}\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}n^k\left(1-\frac{9}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\right)^{1/2}.$$

(Chen Weiyu,[309]1995,347(5):1753－1761)

56.　设 $\|T_n\|_q=\left(\int_0^{2\pi}|T_n(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$，$2\leqslant q<\infty$，

$$\|T_n\|_c=\max\{|T_n(x)|:x\in[0,2\pi]\}\leqslant 1,\text{则}$$

(1)　$\|T_n^{(k)}\|_q\leqslant\left(1-\frac{1}{q}\right)^{1/q}n^{2k/q}\|T_n^{(k)}\|_{q-2}^{t}$.　　(3.5)

仅当 $T_n(x)=\cos(nx+a)$ 时等号成立.式中 $t=1-(2/q)$

(2)　若 q 为大于 2 的整数,则重复应用(3.5)式得出

$$\|T_n^{(k)}\|_q\leqslant\left(\frac{2\pi(q-1)!!}{q!!}\right)^{1/q}n^k.$$

(3) 设 $m\geqslant 2, a=(q-1)/2, b\neq 0, q>2, b\in R^1$,则

$(2a)^{k(k-3)}\|T_n^{(k)}\|_q^2\leqslant(2a)^{m(m-3)}b^{2(k-m)}\|T_n^{(m)}\|_q^2+\dfrac{1}{4}(m-k)b^{2k}\|T_n\|_q^2.$

$k=1,2,\cdots,m-1$,(Wang Sen[332]1997,13(2):78 - 82)

57. 设 u 是 2π 周期的偶 A_p 权,则 $\forall k\in N$,成立

$$\|T_n^{(k)}\|_{p,u}\leqslant 3k(2n)^k\omega\left(T_n,\frac{\pi}{4n}\right)_{p,u}.$$

式中 $\omega(T_n,\delta)_{p,u}=\sup\limits_{|h-t|\leqslant\delta}\|T_n(\cdot+h)-T_n(\cdot+t)\|_{p,u}$.

(Kilgore,Theodone 等,Result. Math. 1996,30(1 - 2):79 - 92)

58. 设 m,M 分别是 $T_n(x)$ 的极小极大值,则

$$m+\frac{M-m}{n+1}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}T_n(x)\mathrm{d}x\leqslant M-\frac{M-m}{n+1}.$$

这是积分第一中值定理关于实值三角多项式的加强.见[56]Vol.2.P99.

59. 令 $M(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f|, M_n(f)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\left|f\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right|$,

(1) 若 $1\leqslant p\leqslant\infty$,则 $M_n(T_n^p)\leqslant C_1^pM(T_n^p)$;

(2) 若 $1<p<\infty, M(T_n^p)\leqslant C_2^pM_n(T_n^p)$;

$M_n(\widetilde{T}_n^p)\leqslant C_3^pM(T_n^p); M(\widetilde{T}_n^p)\leqslant C_4^pM_n(T_n^p)$.

(3) 若 $0<p<1$,则 $M(T_n^p)\leqslant C_5^p[M_n(T_n)]^p; M(\widetilde{T}_n^p)\leqslant C_6^p([M_n(T_n)]^p$.

见 Fund. Math. 1936,28:131 - 166.

60. **Erdös 猜想:**

$$\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant 4.$$

见[376]1940,46:954 - 958.这个猜想至今仍未看到证明或否定.

61. **Arestov 不等式**(1981 年):设 $\varphi, x\varphi'$ 都在 $(0,\infty)$ 上递增,则

$$\int_0^{2\pi}\varphi(|T'_n(t)|)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi(n|T_n(t)|)\mathrm{d}t.$$

62. 设 φ 是 $[0,\infty)$ 上递增的凸函数,$\varphi(0)=0$, $\|P_n\|_C\doteq 1$, $P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上交错地通过 $m+1$ 个点 $\{x_k\}_{k=0}^m(1\leqslant m\leqslant n)$: $-1=x_0<\cdots<x_n=1$.使得 $P_n(x_k)=(-1)^{m-k}, k=0,1,\cdots,m$. $P_n(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上单调 $(0\leqslant k\leqslant m-1)$,则

$$\int_{-1}^{1}\varphi(P'_n(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{1}\varphi(|T'_n(x)|)\mathrm{d}x,$$

仅当 $P_n=T_n$ 时等号成立.见[327]1982,35(2):181.