第二章　基本结构：集合、函数、序列和和式

§2.1　　集合(Set)

一．集合

1. 定义：集合是一组对象的全体。

例子：{1,3,5}；　所有自然数的集合；一个班的学生的集合；英语字母表中 26 个字母的集合。

2. 元素

集合中的对象被称为该集合的元素(element)或成员(member)，并称该集合包含这些元素。若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$, 若 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\notin A$。

集合的严格定义会导致悖论(paradoxes).

例如：罗素悖论：

定义全集：$U = \{x \mid x\notin x\}$. 问：$U\in U$?

若 $U\in U$，由 U 的定义，$U\notin U$;

若 $U\notin U$，由 U 的定义，$U\in U$.

*我们介绍的是朴素集合论。还可以用公理严格地定义集合，回避罗素悖论，称为公理集合论。

3. 集合的例子：

例 1：英语字母表中所有元音字母的集合 V={a,e,i,o,u}.

例 2：所有小于 10 的奇正整数的集合 O = {1,3,5,7,9}.

集合通常用来描述具有同一性质的元素的全体，但集合中也可以包含任意的元素。例如：A = {张三, a, 2, 广州}.

*表示集合的方法有两种：列元素法和谓词表示法。

*列元素法：列出集合中的所有元素，元素间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来。例如：前面的例 1 和例 2.

有时，在集合元素的模式是明显的时候，也可以用省略号表示。

例如：$\{a, b, \cdots, z\}$, $\{1, 2, 3, \cdots, 99\}$等。

*谓词表示法：是用谓词来概括集合中元素的属性。

例如：O = {x | x 是小于 10 的奇正整数}

$= \{x \mid x \in Z^+ \wedge x$ 是奇数 $\wedge x<10\}$

$E = \{x \mid x=2m \wedge m \in Z\}$

其中：Z^+是正整数的集合，Z 是整数的集合。

*通常用 A, B, C, D 等大写字母表示集合，用 a,b,c,d 等小写字母表示元素。以下是一些常见的集合：

$N = \{0, 1, 2, \cdots\}$：自然数的集合；

$Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$：所有整数的集合；

$Z^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$:所有正整数的集合；

$Q = \{p/q \mid p \in Z \wedge q \in Z \wedge q \neq 0\}$:所有有理数的集合；

R: 所有实数的集合。

* 集合的元素是彼此不同的，如果同一个元素在集合中多次出现，应该认为是一个元素。

例如：$\{1,1,2,2,2,3\} = \{1,2,3\}$

*集合的元素是无序的。

例如：{1,2,3} = {3,1,2}。

*元素与集合的关系：

设 A = {a, {b,e}, d, {{d}}}. 问：

a ∈A? b∈A? {b,e}∈A?

d∈A? {d}∈A? {{d}}∈A?

*确定一个集合 A 就要确定哪些元素属于 A，哪些元素不属于 A。

二. 集合的关系

1. 集合的相等 (Equality of sets)

两个集合相等当且仅当它们有相同的元素。设 A 和 B 是两个集合，那么 A = B 当且仅当 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ 为真。

例如： {1,3,5} = {3,5,1}

2. 空集 Φ (Empty set)

不含任何元素的集合称为空集，记作 Φ 或 {}。

Φ 可写作：Φ={x | x≠x}.

例如：Φ={x | x∈R∧ $x^2+1=0$ }.

注意：{Φ}≠Φ。

3. 子集(Subset)

集合 A 称为是集合 B 的子集当且仅当 A 中的每一个元素都是 B 的元素，记作：A⊆B.

即 A⊆B 当且仅当∀x(x∈A→x∈B)为真。A⊆B 也称为 A 含于 B，或 B 包含 A。

例如：$\{1,2,3\}\subseteq N$;　$N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$.

但 $\{1,3,5\} \nsubseteq \{1,2,3\}$

定理 1：对于任意集合 S，有

(i) $\Phi\subseteq S$;　(ii) $S\subseteq S$.

证明：(i) 即要证$\forall x(x\in\Phi\rightarrow x\in S)$为真。因为 $x\in\Phi$ 为假，故 $x\in\Phi\rightarrow x\in S$ 为真，因而$\forall x(x\in\Phi\rightarrow x\in S)$为真。

(ii) 即要证$\forall x(x\in S\rightarrow x\in S)$为真。对任意 x，$x\in S\rightarrow x\in S \Leftrightarrow \neg(x\in S)\vee(x\in S)$，即$\neg p\vee p$. 已知$\neg p\vee p\Leftrightarrow T$. 故 $x\in S\rightarrow x\in S\Leftrightarrow T$.从而有$\forall x(x\in S\rightarrow x\in S)$为真。

*真子集(proper subset)：若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$. $A\subset B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$为真。

*用文氏图表示（见书,P120 图 2）。

三．集合的基数(Cardinality of a set)

如果集合 S 恰好有 n 个不同的元素，其中 n 是一个非负整数，那么我们称 S 为有穷集(finite set)，而 n 称为 S 的基数。用$|S|$表示 S 的基数(即$|S| = n$)。

例 9：设 A 是小于 10 的奇正整数的集合，$A=\{1,3,5,7,9\}$，那么$|A| = 5$.

例 10：设 S 为英文字母表中所有字母的集合，那么$|S|=26$.

例 11：$|\Phi| = 0$.

*无穷集(Infinite set)：一个集合 A 如果不是有穷集，那么 A

称为无穷集。

例 12：　Z^+是无穷集；　R 也是无穷集.

四．幂集(Power set)

1. 定义：给定集合 S，S 的幂集是 S 的所有子集的集合，记为 P(S)或2^S.

2. 例子：设 A={a,b}，那么 P(A)={Φ, {a}, {b}, {a,b}}.

例 13: 设 S={0,1,2}，那么 P(S)={Φ, {0}, {1}, {2}, {0,1}, {0,2}, {1,2}, {0,1,2}}.

例 14：空集 Φ 的幂集为 P(Φ)={Φ}，而 P({Φ})={Φ,{Φ}}.

*解释：n 个元素的集合 S 的幂集 P(S)有2^n个元素。即|P(S)|=2^n.

五．笛卡尔积(Cartesian products)

1. 有序 n-元组($a_1,a_2,...,a_n$): 是一个有序的集合，a_1是它的第 1 个元素，a_2是它的第 2 个元素，…, a_n 是它的第 n 个元素.

($a_1,a_2,...,a_n$) = ($b_1,b_2,...,b_n$)当且仅当$a_i = b_i$， i =1,2,…,n.

*一个有序 2-元组也称为一个序偶或有序对。

有序对(a,b)=(c,d)当且仅当 a=c 且 b=d.

(a,b)≠(b,a)除非 a=b.

2. 两个集合的笛卡尔积

设 A 和 B 是两个集合，A 和 B 的笛卡尔积，记作 A×B，定义为 A×B = {(a,b)| a∈A∧b∈B}.

例 16：设 A = {1,2}, B = {a,b,c}.

A×B = {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)}

B×A = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}

注意：一般情况下，A×B≠B×A 除非 A=Φ 或 B=Φ 或 A=B.

当 A=Φ 或 B=Φ 时，A×B=Φ。

3. 关系(relation)：A×B 的子集 R⊆ A×B 称为 A 到 B 的二元关系。

例子：A×B 如例 16， R={(1,a), (1,b), (2,b), (2,c)}是一个 A 到 B 的二元关系。

4. n 个集合的笛卡尔积

n 个集合 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的笛卡尔积，记作 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$，定义为

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$={$(a_1, a_2, ..., a_n)$ | $a_i \in A_i$, i = 1,2,⋯,n}.

例 18：设 A={0,1}, B={1,2}, C={0,1,2}, 求 A×B×C。

解：A×B×C={(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)}.

六．全集 (Universal set)

在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作 U（或 E）。

*严格地定义全集会产生罗素悖论。

七．在量词中使用集合记号

例 19：以下语句的含义是什么：$\forall x \in R(x^2 \geq 0)$；$\exists x \in Z(x^2 = 1)$.

解：$\forall x \in R(x^2 \geq 0)$表示对任意实数 x，有 $x^2 \geq 0$。相当于 $\forall x(x \in R \to x^2 \geq 0)$。而$\exists x \in Z(x^2 = 1)$表示存在一个整数 x 使得 $x^2 = 1$，相当于$\exists x(x \in Z \wedge x^2 = 1)$。

*给定论域 D 和谓词 P，我们定义 P 的取真集合 S={x∈D | P(x)}.

例 20：给定以下谓词 P(x), Q(x), R(x), 论域为所有整数的集合，求 P, Q, R 的取真集合：P(x): |x|=1; Q(x): $x^2=2$; R(x): |x| = x .

解：P 的取真集合 S_1={x∈Z | |x| =1} = {－1, 1}.

Q 的取真集合 S_2={x∈Z | $x^2=2$} = Φ.

R 的取真集合 S_3={x∈Z | |x| = x }= N.

作业：

1. 用列元素法写出以下集合：

(1) {x | x∈R∧$x^2=1$}

(2) {x | x∈Z∧3 < x < 12}

(3) {x | x∈Z∧$x^2=2$}

2. 判断以下命题是否为真：

(1) Φ$\subseteq$Φ；(2) Φ∈Φ；(3) Φ$\subseteq${Φ}；(4) Φ∈{Φ}；

(5) {a,b,c}$\subseteq${a, b, c, {a,b,c}}

(6) {a,b}∈{a, b, c, {a,b}}

(7) {a,b}$\subseteq${a, b, c, {a,b}}

(8) {a,b}∈{a, b, {{a,b}}}

3. 求下列集合的幂集

(1) {a, b, c}

(2) $\{1, \{2,3\}\}$

4. 设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y\}$, $C=\{0,1\}$. 求以下笛卡尔积

(1) $B\times A\times C$;　　　　(2) $C\times A$.