3

4. 求函数$u=\sin x\sin y\sin z$在条件$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$下的极值和极值点。 c-3

$$F(x,y,z,\lambda)=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z+\lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$$

$$F_x=\frac{\cos x}{\sin x}=0,F_y=\frac{\cos y}{\sin y}=0,F_z=\frac{\cos z}{\sin z}=0,F_\lambda=x+y+z-\frac{\pi}{2}=0.$$

$$x_0=y_0=z_0=\frac{\pi}{6},u_{\max}=\frac{1}{8}.$$

5. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数$f_x(x,y),f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2})$不存在，故$f_x(x,y)$不连续。

因为$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=y}}f_y(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(2y\sin\dfrac{1}{2y^2}-\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{1}{2y^2})$不存在，故$f_y(x,y)$不连续。

但是$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\upsilon}=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0.$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$点可微，且$df(0,0)=0$.