

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - \frac{1}{2} \rho^2}{\rho} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ 与 } k \text{ 有关,}$$

A-4.

$\therefore f(x, y)$  在  $(0, 0)$  不可微。

3. 设  $f(x)$  为非负函数, 它在  $[a, b]$  的任一子区间内不恒等于 0, 在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f''(x) \geq 0$ , 证明方程  $f(x) = 0$  在  $(a, b)$  内若有实根, 则只能有一个。

证: 假定  $x_1, x_2 \in (a, b)$   $x_1 < x_2$  都是  $f(x)$  的根, 即  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ,

$\therefore \exists c \in (a, b)$ , 使  $f'(c) = 0$ ,  $\because f(x)$  为非负函数, 它在  $[a, b]$  的任一子区间内不恒等于 0,

$\therefore \exists x_0 \in (x_1, c)$  有  $f(x_0) > 0$ ,  $\therefore \exists \xi \in (x_1, x_0)$  使  $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} > 0$ ,

$\therefore f'(\xi) > f'(c)$ , 且  $\xi < c$ , 这与  $f''(x) \geq 0$  矛盾,  $\therefore \dots$