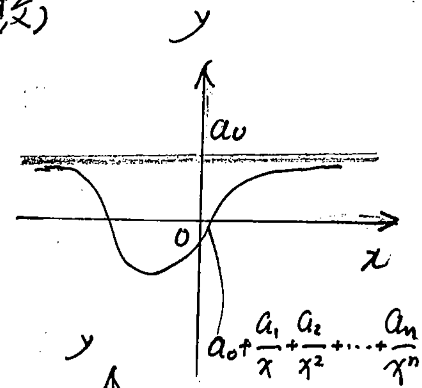
习题1-6 中山大學 本科生考试草稿纸 2011/5-19

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.62.1. 证明：任一奇数次实系数多项式至少有一个实根。

证：设 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ （$a_0>0$，n为奇数）

$=x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n})$



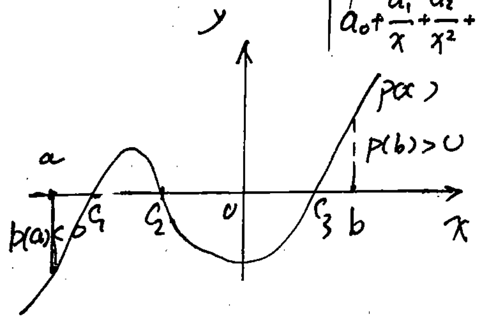
当 $x\to\infty$ 时，$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}\longrightarrow a_0>0$

因此，$|x|$充分大时，$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}>0$

这时，$p(x)$ 与 x^n 同号。

由此可知，$x\to+\infty$，$p(x)\to+\infty$

$x\to-\infty$，$p(x)\to-\infty$



这样，存在一点 b 使 $p(b)>0$

存在一点 a 使 $p(a)<0$

而 $p(x)$ 在实轴上连续，由介值定理，在(a,b)之间存在一点 c，

使 $p(c)=0$，c 是 $p(x)$ 的一个根。

P.62.2 设 $0<\varepsilon<1$，证明对任意一个实数y_0，$y_0\in R$，方程$y_0=x-\varepsilon\sin x$有解，

且有唯一解。

证：① 令 $f(x)=x-\varepsilon\sin x-y_0$

则 $f(y_0+1)=1-\varepsilon\sin(y_0+1)\geq1-1=0$

$f(y_0-1)=y_0-1-\varepsilon\sin(y_0-1)-y_0=-1-\varepsilon\sin(y_0-1)\leq-1+\varepsilon<0$

在$[y_0-1,y_0+1]$上，由介值定理可知，有 $\xi\in(y_0-1,y_0+1)$ 使 $f(\xi)=0$，即 $y_0=\xi-\varepsilon\sin\xi$。

ξ是 $y_0=x-\varepsilon\sin x$ 的解。

注：$|\sin x_2-\sin x_1|\leq|x_2-x_1|$

② 设 $x_1<x_2$。

$\sin x_2-\sin x_1\leq|x_2-x_1|$

则 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)-\xi(\sin x_2-\sin x_1)$

$\geq(x_2-x_1)-\xi|x_2-x_1|=(x_2-x_1)\cdot(1-\varepsilon)>0$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 单增。所以解存在时必唯一。