组合数学

第七章 递推关系和生成函数

第一部分: 递推关系

- 1. 特殊数列举例
- 2. 线性递推关系
- 3. 线性常系数齐次情形
- 4. 线性常系数非齐次情形

数列

数列 $h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots$, 例:

算术序列(等差数列), 如1,3,5,7,9,…

几何序列(等比数列), 如1,2,4,8,16,…

序列$h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots$的部分和序列是

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

其中$S_n = h_0 + h_1 + \ldots + h_n$, $n=0,1,\ldots$

例

求平面上n个两两交于两点的圆所围的区域数.

设为h_n, 则 $h_0=1$, $h_1=2$, $h_2=4$, $h_3=?$, (无三圆共点)

第n个圆与前n-1个圆有2(n-1)个交点,

每两个相邻的交点将原来的平面分成两块,

所以 $h_n = h_{n-1} + 2(n-1)$,

$= h_1 + 2 + 4 + \ldots + 2(n-1)$

$= 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2$

注意公式对 $n \geq 1$ 有效.

Fibonacci数列

初始: 有雌雄新生兔子一对,

假定: **1**月成熟期, 此后每月繁殖雌雄小兔各**1.**

问题: 求第**n**个月开始时有多少对兔子?

设第n个月开始时兔子对数为F_n,

设其中有新生兔New_n对,成熟兔Old_n对.

$$F_n=New_n+Old_n,\ Old_n=F_{n-1},\ New_n=Old_{n-1}=F_{n-2}$$

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ ,\ F_1=F_2=1$$

定理:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

多米诺骨牌覆盖方法数

求$2\times n$棋盘用多米诺骨牌覆盖的方法数h_n.

$$h_1 = 1,$$

$$h_2 = 2,$$

$$h_n = h_{n-1} + h_{n-2},$$

$$h_n = F_{n+1}.$$

线性齐次递推关系

对于序列$h_0, h_1, \ldots,$

若存在$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_n$, (可能依赖于$n$, $a_k \neq 0$)

使得对任意$n \geq k$,

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_k h_{n-k} + b_n,$$

则称该序列满足k阶线性递推关系.

若其中 $b_n = 0$, 则称之为齐次的.

若$a_1, a_2, \ldots, a_k$为常数, 则称为常系数的.

递推关系举例

错排数 D_n 满足:

$D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}$, 2阶线性齐次,

$D_n = n\, D_{n-1} + (-1)^n$, 1阶线性,

Fibonacci数 F_n 满足:

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, 2阶线性齐次常系数,

k阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \ldots - a_k h_{n-k} = 0 \qquad \text{--------(1)}$$

求形如q^n的解$(q \neq 0)$, 得q是下面方程的根

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \ldots - a_{k-1} x - a_k = 0 \qquad \text{--------(2)}$$

- 称(2)为(1)的特征方程
- 称(2)的k个根为(1)的特征根
- 若$p \neq q$是(1)的特征根, 则$c_1 p^n + c_2 q^n$是(1)的解.
- 若q是(2)的重根, 则 nq^n 是(1)的解.

例1. 特征根不同的情况

对于递推关系:

$$h_n - 5\,h_{n-1} + 6\,h_{n-2} = 0, \qquad \text{--------(1)}$$

$$h_1=1,\ h_2=5, \qquad \text{--------(2)}$$

(1)的一般解为$c_1 2^n + c_2 3^n$,

(1)+(2)必须 $2\,c_1 + 3\,c_2 = 1,$

$4\,c_1 + 9\,c_2 = 5,$

从而(1)+(2)的解为

$$h_n = 3^n - 2^n.$$

例2. 特征根有重根的情况

对于递推关系：

$$h_n - 4\, h_{n-1} + 4\, h_{n-2} = 0, \qquad \text{--------(1)}$$

$$h_0=2,\ h_1=6, \qquad \text{--------(2)}$$

(1)的一般解为$c_1\, 2^n + c_2\, n\, 2^n$,

(1)+(2)必须 $c_1 = 2$,

$$2\, c_1 + 2\, c_2 = 6,$$

从而(1)+(2)的解为

$$h_n = 2\cdot 2^n + n\cdot 2^n .$$

一般情况

对于线性常系数齐次递推关系

$$h_n + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_k h_{n-k} = 0 \quad \text{------}(1)$$

设$q_1, q_2, \ldots, q_s$是其不同特征根, 且r_i是q_i的重数,

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_s = k,$$

则 $q_1^n, n\cdot q_1^n, n^2\cdot q_1^n, \ldots, n^{r_1-1}\cdot q_1^n,$

$q_2^n, n\cdot q_2^n, n^2\cdot q_2^n, \ldots, n^{r_2-1}\cdot q_2^n, \ldots$

$q_s^n, n\cdot q_s^n, n^2\cdot q_s^n, \ldots, n^{r_s-1}\cdot q_s^n$

是(1)的k个解, (1)的解是它们的线性组合.

其对应系数由$h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$确定. 举例.

Hanoi塔

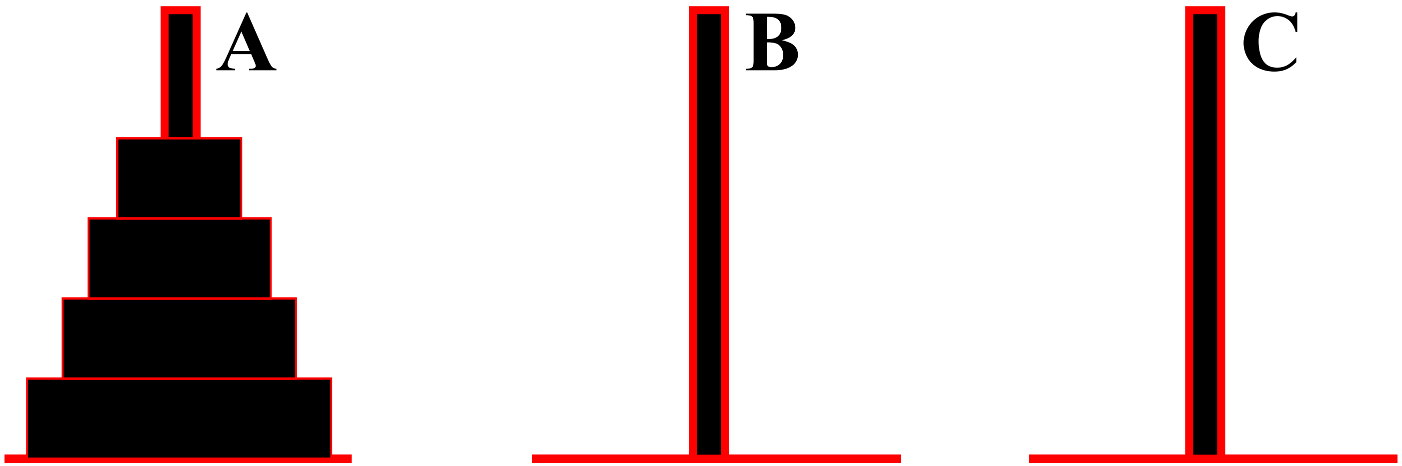
n个圆盘依其半径大小, 从下而上套在柱A上.

每次取一盘移到其它两柱,不能大盘放在小盘上.

目标:将柱A上的n个盘转移到柱C上,

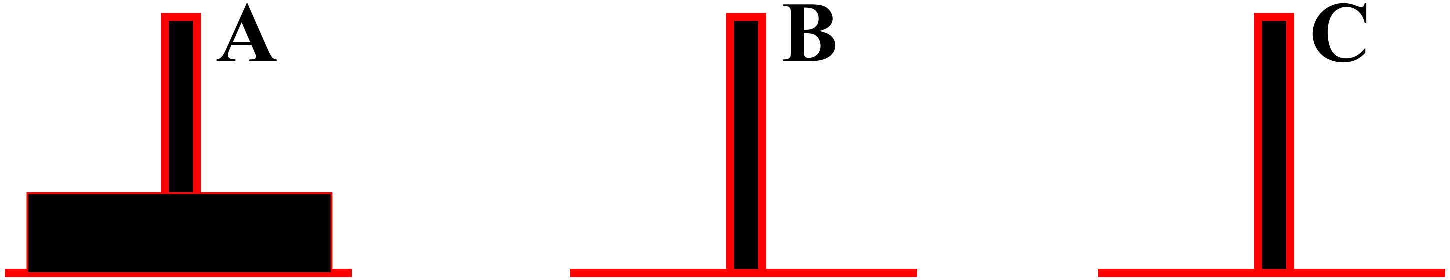
问题:设计移动方法并估计移动盘次.

n=4



递归算法

n=1



假设n-1个圆盘的转移算法已确定.

讨论n个圆盘的问题:

1. 将n-1个圆盘转移到柱B上;

2. 将柱A上剩下的一个圆盘转移到柱C上;

3. 将柱B上的n-1个圆盘转移到柱C上.

令$h(n)$表示n个圆盘所需的转移盘次, 则

$$h(n)=2\,h(n-1)+1,\ \ h(1)=1,\ \Rightarrow\ \mathrm{h(n)} = 2^{n} - 1.$$

叠加原理

设$x_0,x_1,x_2,\ldots$ 满足递推关系

$$h_n+a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}=c_n, \qquad (1)$$

设$y_0,y_1,y_2,\ldots$ 满足递推关系

$$h_n+a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}=d_n, \qquad (2)$$

则$x_0+y_0, x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots$ 满足递推关系

$$h_n+a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}=c_n+d_n.$$

特别的,令$c_n=0$, 则有

(2)的特解+(1)的通解 = (2)的通解

特解的求法

定理: 若d_n是q次多项式, r是

$$h_n+a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_ph_{n-p}=r^n d_n, \quad \text{----(1)}$$

的特征方程的m重根, 则将

$$c_1n^mr^n+c_2n^{m+1}r^n+\ldots+c_nn^{m+q}r^n$$

带入(1)可得(1)的特解.

例. $h_n = 2h_{n-1} + n^2$的特解? $-n^2 - 4n - 6$.

例. $h_n = 3h_{n-1} + 3^n + n^2 4^n$的通解为

$$c_1 3^n + n\,3^n + 4^n(4n^2 - 24n + 84)$$

第一部分小结

Fibonacci数列

线性常系数齐次递推关系的求解

线性常系数非齐次关系的求解

转移矩阵

对于线性齐次常系数递推关系, 以4阶为例

$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - a_3 h_{n-3} \ldots - a_4 h_{n-4} = 0$

我们有如下计算的h_n方法,

$$\begin{pmatrix} h_n \\ h_{n-1} \\ h_{n-2} \\ h_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_{n-2} \\ h_{n-3} \\ h_{n-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} h_3 \\ h_2 \\ h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}$$

转移矩阵与递推关系有相同的特征多项式.

第二部分: 生成函数

- 1. 生成函数(generating function)
- 2. 递推关系与生成函数
- 3. 指数生成函数(exponential GF)

生成函数

数列$h_0, h_1, h_2, h_3,\ldots$对应的生成函数定义为

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \ldots$$

有限序列$h_0, h_1,\ldots, h_m$可补0看作无限序列

$$h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots, h_m, 0, 0,\ldots$$

其生成函数为多项式

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_mx^m .$$

生成函数(GF)举例

例1. 每项都是1的无限序列1, 1, …, 1, …的GF是

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

在$|x|<1$时, 上式为 $g(x) = 1/(1-x)$

例2. 设$h_k=C(m,k)$, 其中整数$m>0$, $k\geq 0$,

$$g(x) = (1+x)^m.$$

常见的函数幂级数展开

除多项式外,经常用到的函数还有:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1 + x + \cdots)(1 + x + \cdots) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = (1 + x + \cdots)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

多重集的组合与生成函数

$S=\{3\cdot a,3\cdot b,3\cdot c\}$的n-组合数$h_n$对应不定方程

$$m + k + t = n,\quad 0\le m, k, t\le 3$$

解的个数, 又对应

$$\left(\sum_{m=0}^{3} x^m\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{3} x^k\right)\cdot\left(\sum_{t=0}^{3} x^t\right)$$

n次项系数, 从而$h_0,h_1,h_2,\ldots$的生成函数是

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3)\,(1+x+x^2+x^3)\,(1+x+x^2+x^3)$$

定理: 记$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的n-组合数为$h_n$, 则序列$h_0,h_1,h_2,\ldots$的生成函数为

$$g(x) = (1+x+\ldots+x^{n_1})\times\ldots\times(1+x+\ldots+x^{n_k}).$$

组合数与生成函数

2个1袋的苹果无限, 5个1提的香蕉无限, 4个散橘子, 1个梨子. 求从中组合出n个水果的方案数h_n.

解: **h_n**对应不定方程

$$2a + 5b + r + p = n,\ \ a,b\geq 0,\ 0\leq r\leq 4,\ 0\leq p\leq 1,$$

解的数目，又对应

x的2次方的a次方，苹果一次供两个

$$\left(\sum_{a=0}^{\infty} x^{2a}\right)\cdot\left(\sum_{b=0}^{\infty} x^{5b}\right)\cdot\left(\sum_{r=0}^{4} x^{r}\right)\cdot\left(\sum_{p=0}^{1} x^{p}\right)$$

n次项系数, 从而h_0, h_1, h_2,…的生成函数是

$$(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$

解出 $h_n = n+1$.

递推关系与生成函数

递推关系:

$$h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} = 0, \qquad \text{--------(1)}$$

$$h_1=1,\ h_2=5, \qquad \text{--------(2)}$$

的解为$h_n = 3^n - 2^n$.

其生成函数为

$$g(x) = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}$$

特征根有重根的情况

递推关系:

$$h_n - 4h_{n-1} + 4h_{n-2} = 0, \qquad \text{--------(1)}$$

$$h_0=2,\ h_1=6, \qquad \text{--------(2)}$$

的解为 $h_n = 2\cdot 2^n + n\cdot 2^n$.

其生成函数为

$$g(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(1-2x)^2}$$

指数生成函数(EGF)

序列$h_0,h_1,h_2,\ldots$的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1\frac{x}{1!} + h_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + h_k\frac{x^k}{k!} + \cdots$$

例. 排列数序列 P(n,0), P(n,1), …, P(n,n)的**EGF**是

$$g^{(e)}(x) = (1+x)^n .$$

对比组合数序列C(n,0), C(n,1), …, C(n,n)的**GF**是

$$g(x) = (1+x)^n .$$

注: h_k = 指数生成函数的k次项系数×k!

指数生成函数举例

例. 序列 1, 1, …, 1, …的指数生成函数是

$$g^{(e)}(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots = e^x.$$

例. 指数生成函数 $g^{(e)}(x) = e^{ax}$对应的序列是

$$1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$$

多重集S={3·a,3·b,3·c}的排列

S的n-排列数 $$\sum_{\substack{0\le e_a,e_b,e_c\le 3\\ e_a+e_b+e_c=n}} \frac{n!}{e_a!e_b!e_c!}$$

S的n组合GF: $g(x)=(\sum_{e_a=0}^{3} x^{e_a})(\sum_{e_b=0}^{3} x^{e_b})(\sum_{e_c=0}^{3} x^{e_c})$

将x^{e_a}换为$(x^{e_a})/(e_a!)$得到**S的排列数对应的EGF**

$$g^{(e)}(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

注意$g^{(e)}(x)$的n次项系数是 $$\sum_{\substack{0\le e_a,e_b,e_c\le 3\\ e_a+e_b+e_c=n}} \frac{1}{e_a!e_b!e_c!}$$

多重集的组合与排列

定理: S={$n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k$}的n-排列数记为$p_n$，则序列$p_0, p_1, p_2, \ldots$的指数生成函数为

$$g^{(e)}(x) = (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_1}}{n_1!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_2}}{n_2!})$$

$$\times\cdots\times(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_k}}{n_k!})$$

对比: S={$n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k$}的n-组合数记为$h_n$，则序列$h_0, h_1, h_2, \ldots$的生成函数为

$$g(x)=(1+x+\ldots+x^{n_1})\times\ldots\times(1+x+\ldots+x^{n_k}).$$

EGF应用举例

用红白蓝3色对1×n棋盘涂色, 若要偶数个格涂红色,求涂色方案数.

解: 本例对应的指数生成函数是

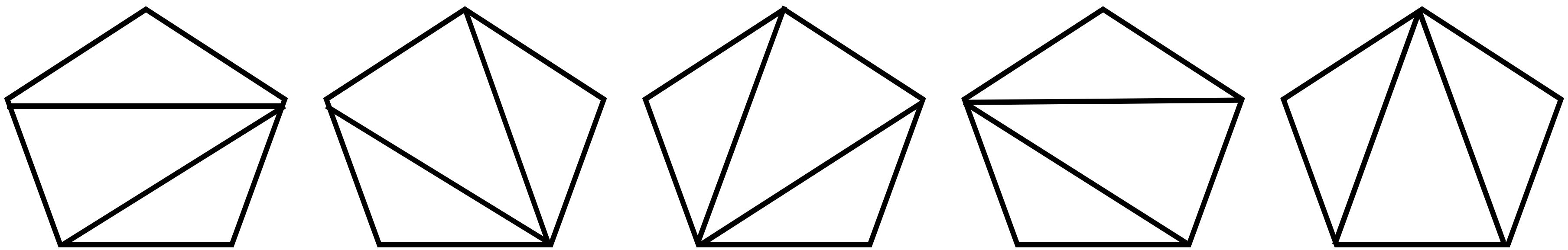
$$g^{(e)}(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}e^{2x}=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x)$$

所以方案数是$(3^n+1)/2$.

三角剖分

一凸n+1边形, 利用不交于内部的对角线,
拆分成若干三角形, 不同拆分的方案数用h_n表示.
约定 $h_1 = 1$. 例 $h_4 = 5$:



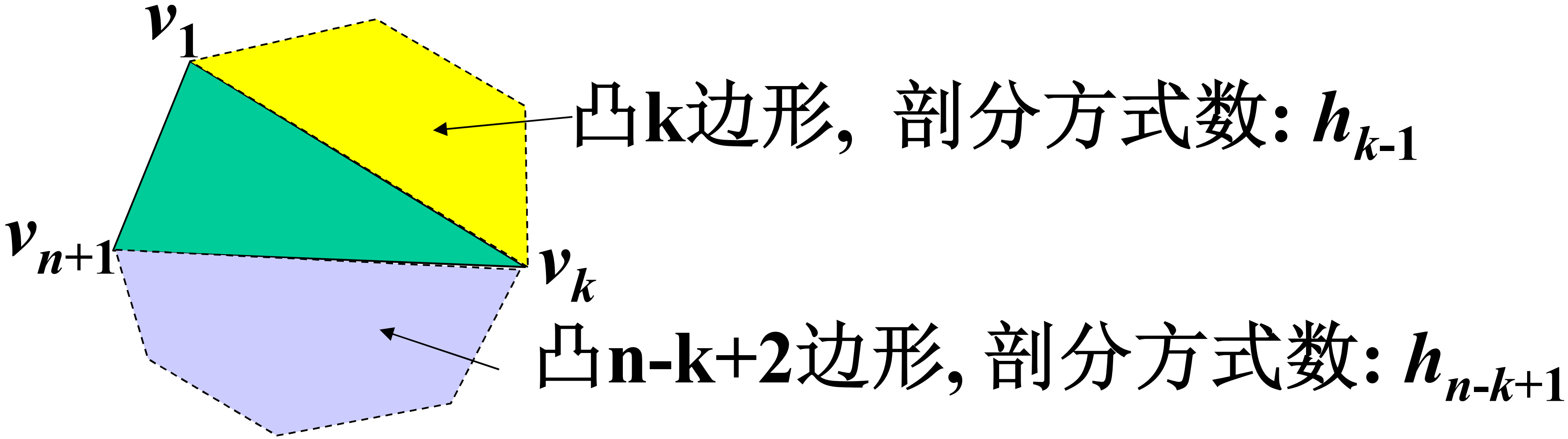
定理: $h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1$, 且

$$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

递推关系的证明

边v_1v_{n+1}所在的剖分三角形可为 $v_1v_{n+1}v_k$, v_k = ?

凸n+1边形还剩两部分需要剖分:



令v_k取遍$v_2,v_3,\ldots,v_n$得到

$$h_n=h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\ldots+h_{n-2}h_2+h_{n-1}h_1.$$

第二部分小结

生成函数

递推关系与生成函数

指数生成函数