P.153.23. 求 $\int_0^{\pi}\frac{x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 2011年5月—66.

解：由上题结果 $\int_0^{\pi}\frac{x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}d\cos x$

$=(-\pi)\cdot[\arctan\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=(-\pi)(0-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{4}$

P.153.24 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，以 T 为周期.

证明：(1) $F(x)=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$ 也以 T 为周期。

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

证 (1) 由条件 $f(x)=f(x+T)$，从而 $\int_0^T f(t)dt=\int_x^{x+T}f(t)dt$

$$F(x+T)=\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)dt-\int_0^{x+T}f(t)dt$$
$$=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt+\int_0^T f(t)dt-\int_0^x f(t)dt-\int_x^{x+T}f(t)dt$$
$$=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt-\int_0^x f(t)dt=F(x).$$

(2) 由条件及(1)的结果有：

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt-\frac{F(x)}{x}$$

由 $f(x)$ 连续，从而 $F(x)$ 连续；又 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界. 即 $|F(x)|\le M$

从而. 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

从而. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$