《数理逻辑》期中考试试题（2012年04月）

（请将所有答案写在答题纸上，注意写清题号）

年级：2011级　　**专业**：计算机科学与技术　　**任课教师**：周晓聪，江联

一、(9分)写出命题"如果你努力尝试，那么你会成功"的逆命题(converse)、逆否命题(contrapositive)和否命题(inverse)。

解答：逆命题："如果你会成功，那么你努力尝试"；逆否命题："如果你没有成功，那么你没有努力尝试"；否命题："如果你不努力尝试，那么你不会成功"

二、(9分)给出公式$(\neg p \to q) \vee (q \wedge \neg r)$的真值表，并判断公式的类型。

解答：设$A \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\neg p \to q) \vee (q \wedge \neg r)$，该公式的真值表如下：

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \to q$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	A
F	F	F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T

根据该真值表，这个公式是非永真式的可满足式。

三、(12分)使用命题变量p："系统处在多用户状态"、q："系统运行正常"、r："系统内核正在工作"、s："系统处在中断模式"符号化下面的系统规范：(1) 系统处在多用户状态当且仅当系统运行正常；(2) 如果系统运行正常，则系统内核正在工作；(3) 系统内核没有工作或者系统处在中断模式；(4) 如果系统不处在多用户状态，则系统处在中断模式；(5) 系统处在中断模式。

说上述规范是**一致的**(consistent)，如果存在对其中命题变量（即p, q, r, s）的真值赋值，使得上述规范（符号化得到的命题）的真值都为真。试判断上述规范是否是一致的，并说明理由。

解答：上述规范可符号化如下：(1) $p \leftrightarrow q$；(2) $q \to r$；(3) $\neg r \vee s$；(4) $\neg p \to s$；(5) s，该规范是一致的，因为当p, q, r, s为的真值分别为TTTT, FFTT, 或FFFT时，这些规范的真值都为真。

四、(9分)设个体变量x的论域是所有学生构成的集合，个体变量y的论域是所有课程构成的集合，且谓词$M(y)$表示"y是数学课程"、$F(x)$表示"x是大一新生"、$B(x)$表示"x是全日制学生"、$T(x, y)$表示"学生x学习课程y"。使用这些谓词符号化下面的命题：(1) 每个学生都学习某门课程；(2) 有学生学习了所有课程；(3) 每个全日制的大一学生都学习某门数学课程。

解答：(1) $\forall x \exists y T(x, y)$；(2) $\exists x \forall y T(x, y)$；(3) $\forall x \exists y ((B(x) \wedge F(x)) \to (M(y) \wedge T(x, y)))$。

五、(11分)判断下面的推理是否有效。如果是有效的推理，请将它符号化，并给出证明序列加以验证。如果不是有效的推理，请给出理由。

李娟是数学专业或计算机专业学生；如果李娟不懂离散数学，那么她不是数学专业学生；如果李娟懂离散数学，那么她很聪明；李娟不是计算机专业学生。因此，李娟很聪明。

解答：设p表示"李娟是数学专业学生"、q表示"李娟是计算机专业学生"、r表示"李娟懂离散数学"、s表示"李娟很聪明"，上述推理可符合化为从前提$p \vee q, \neg r \to \neg p, r \to s, \neg q$推出结论$s$，这

个推理是有效，可使用证明序列验证如下：

(1) $\neg q$ // 前提引入

(2) $p \vee q$ // 前提引入

(3) p // (1),(2)析取三段论

(4) $\neg r \to \neg p$ // 前提引入

(5) r // (3),(4)拒取式

(6) $r \to s$ // 前提引入

(7) s // (5),(6)假言推理

六、(12分)证明$f: A \to B$是单函数当且仅当对A的任意子集S, T都有$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$。

证明 $(\Longrightarrow)$：设f是单函数，对A的任意子集S, T，及任意的$y \in B$，

(i) 若$y \in f(S \cap T)$，则存在$x \in S \cap T$使得$f(x) = y$，从而存在$x \in S$使得$f(x) = y$，及$x \in T$使得$f(x) = y$，这意味着$y \in f(S)$且$y \in f(T)$，即$y \in f(S) \cap f(T)$；

(ii) 反之，若$y \in f(S) \cap f(T)$，即$f \in f(S)$且$f \in f(T)$，从而存在$x_1 \in S$使得$f(x_1) = y$，且存在$x_2 \in T$使得$f(x_2) = y$，但f是单函数，所以由$f(x_1) = f(x_2) = y$可得$x_1 = x_2 = x$，且$x \in S \cap T$，所以$y \in f(S \cap T)$。

$(\Longleftarrow)$：若对A的任意子集S, T都有$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$。对任意$x_1, x_2 \in A$，若$x_1 \neq x_2$但$f(x_1) = f(x_2)$，则考虑$S = \{x_1\}, T = \{x_2\}$，显然$S \cap T = \varnothing$，即$f(S \cap T) = \varnothing$，但$f(S) = \{f(x_1)\}, f(T) = \{f(x_2)\}$，则$f(S) \cap f(T) \neq \varnothing$，矛盾！所以有$f(x_1) = f(x_2)$，即$f$是单函数。 $\square$

七、(8分)试用伪码给出一个算法，对输入的任意n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，输出这些数中第二大的数。进一步，使用大O记号估计你的算法在最坏情况下的时间复杂度。

解答：参考算法如下，该算法的时间复杂度为$O(n)$：

procedure *secondlargest*$(a_1, \cdots, a_n$: integers)

  $largest := a_1$; $secondlargest := a_2$

  if $(a_2 > a_1)$ **then begin**

    $secondlargest := a_1$; $largest := a_2$

  end

  if $(n = 2)$ **then return**

  for $(i := 3$ **to** $n)$ **begin**

    if $(a_i > largest)$ **then begin**

      $secondlargest := largest$; $largest := a_i$

    end

    if $(a_i > secondlargest$ **and** $a_i \leq largest)$ **then**

      $secondlargest := a_i$

  end

八、(12分)设p是素数，证明整数x是同余方程$x^2 \equiv 1(\mod p)$的解当且仅当$x \equiv 1(\mod p)$或$x \equiv -1(\mod p)$。

证明　显然当$x \equiv 1(\mod p)$或$x \equiv -1(\mod p)$，即存在k_1或k_2分别使得$x = k_1p + 1$或$x = k_2p - 1$时，$x^2 = p(k_1^2p + 2k_1) + 1$或$x^2 = p(k_1^2p - 2k_1) + 1$，从而$x^2 \equiv 1(\mod p)$，即$x$是该方程的解;

反之，若x是$x^2 \equiv 1(\mod p)$的解，即$p \mid x^2 - 1$，即$p \mid (x-1)(x+1)$，从而$p \mid (x-1)$或$p \mid (x+1)$，即$x \equiv 1(\mod p)$或$x \equiv -1(\mod p)$。 □

九、(12分)使用数学归纳法证明：对任意的正整数n有：

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

归纳基：当$n = 1$时，等式左边等于$(2 \cdot 1 - 1) \cdot \frac{1}{1} = 1$，等式右边等于$(1 \cdot 2)/2 = 1$，因此等式成立。

归纳步：设$n = p$时成立，考虑$n = p + 1$，我们有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{(p+1)}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{(p+1)}\frac{1}{k}\right)\\
=&\sum_{j=1}^{p}(2j-1)\left(\sum_{k=j}^{(p+1)}\frac{1}{k}\right) + (2\cdot(p+1)-1)\cdot\frac{1}{p+1}\\
=&\sum_{j=1}^{p}(2j-1)(\left(\sum_{k=j}^{p}\frac{1}{k} + \frac{1}{p+1}\right) + \frac{2p+1}{p+1}\\
=&\sum_{j=1}^{p}(2j-1)(\left(\sum_{k=j}^{p}\frac{1}{k}\right) + \sum_{j=1}^{p}(2j-1)\frac{1}{p+1} + \frac{2p+1}{p+1}\\
=&\frac{p(p+1)}{2} + \sum_{j=1}^{p}(2j-1)\frac{1}{p+1} + \frac{2p+1}{p+1}\\
=&\frac{p(p+1)}{2} + \frac{p^2}{p+1} + \frac{2p+1}{p+1}\\
=&\frac{p(p+1)}{2} + (p+1)\\
=&\frac{(p+1)(p+2)}{2}
\end{aligned}$$

所以由数学归纳法，要证明的等式成立!

十、(6分)指出下面证明中的错误：证明对所有的自然数n有$5n = 0$。

归纳基：当$n = 0$时，显然$5 \cdot 0 = 0$；归纳步：假定对所有自然数$0 \leq j \leq k$都有$5j = 0$。考虑$n = k + 1$，这时存在小于$k + 1$（即小于等于k）的两个自然数i, j使得$n = k + 1 = i + j$，根据归纳假设有$5i = 0, 5j = 0$，因此$5n = 5(k + 1) = 5i + 5j = 0$。从而根据强归纳法，对所有自然数$n$有$5n = 0$。

解答：当$k = 0$，即$n = k + 1 = 1$时，n并不能表示成两个非负整数（自然数）的和。