第十三章　积分不等式

在前面的12章中,除第2、3、4章外都涉及到许多积分不等式,特别是第一章的Hölder不等式,Minkowski不等式,各种平均的积分不等式,第8章中单调函数,BV及其他特殊函数的积分不等式,第12章中与微分有关的积分不等式等。本章讨论的积分不等式与前面已收入的不等式不重复.

1. **Opial—华罗庚不等式**:1960年Opial,Z.证明:

设 $f' \in C[0,a]$, $f(0)=f(a)=0$, $f(x)>0$, $x\in(0,a)$,则

$$\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{a}{4}\int_0^a (f')^2. \tag{1.1}$$

式中 $a/4$ 是最佳的.(见Ann. Polon. Math.,1960,8:29－32).Olech,C.减弱了上述条件,指出 $f(x)>0$, $x\in(0,a)$ 是不必要的,即若 $f\in AC[0,a]$, $f(0)=f(a)=0$,则(1)成立,且仅当

$$f(x)=\begin{cases} cx, & 0\leqslant x\leqslant a/2, \\ c(a-x), & a/2\leqslant x\leqslant a, \end{cases} (c\text{ 为常数})$$

时等号成立,为此,只要证明:设 $g\in AC[0,a]$, $g(0)=0$,则

$$\int_0^a |gg'| \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (g')^2. \tag{1.2}$$

式中 $a/2$ 是最佳的,仅当 $g(x)=cx$(c 为常数)时等号成立.(见Ann. Polon. Math. 1960, 8:61－63)

Opial最初是将(1.1)式作为研究常微分方程的工具,随即发现它有重要的理论价值和多方面的应用,导致40多年来对它的研究兴趣至今未减,[21]P114－142用了专门一章(第3章)讨论对(1.1)式的各种改进和推广,引用了前30年(1960至1990年)发表的有关文献达83篇,但仍不完整,特别是中国学者的工作。事实上,1964年,华罗庚在“中国科学”(外文版)发表他对Opial不等式的重要推广以来,一直有中国学者从事这方面的研究,陈文忠等对我国学者前20年的研究成果在[339]1982,2(4):151－166作了综述.在最近20年,胡克、杨国胜、杨恩浩、马庆华等仍陆续发表他们的重要研究成果.1995年出版的专著[131]专门收集了Opial—华罗庚不等式的研究成果及其在微分方程和差分方程中的应用,达393页.

(1)　设 $\omega(x)$ 在 $(0,a)$ 上连续且为正, $\int_0^a \omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x<\infty$, $q>1$, $f\in AC[0,a]$, $f(0)=0$, $1/p+1/q=1$,则

$$\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^a \omega^{1-q}\right)^{2/q}\left[\int_0^a \omega\,|f'|^p\right)^{1/p}.$$

仅当存在常数 c,使 $f'(x)=c\int_0^x \omega^{1-q}$ 时等号成立.

杨国胜推广了上述结果,见 Proc. Japan Acad. 1966,42:78 - 83.

若 ω 还满足 $\int_0^a \frac{1}{\omega(x)}\mathrm{d}x < \infty, f(0) = f(a) = 0$,则

$$\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{c}{2}\left(\int_0^a \omega |f'|^p\right)^{1/p},$$

式中由 $c = \int_0^b \omega^{1-q} = \int_b^a \omega^{1-q}$ 定义 c 与 b. 见[21]P116 - 118.

(2) **华罗庚不等式**:设 $f \in AC[0,a], f(0) = 0, p \geqslant 0, q \geqslant 1$,则

$$\int_0^a |f|^p |f'|^q \leqslant \frac{qa^p}{p+q}\int_0^a |f'|^{p+q}. \tag{1.3}$$

华罗庚证明(1.3)式对 $q = 1, p$ 为正整数时成立,并猜测 p 为正实数时也应该成立,陈道琦证明了这个猜测,见[333]1965,3:251;1980,8:383. 杨国胜等对 $p, q \geqslant 1$ 证明(1.3)式成立. 见[330]1985,16(4):123 - 129. 其余见[21]P.118. 若加上条件 $f(a) = 0$,则(1.3)式可改进为

$$\int_0^a |f|^p |f'|^q \leqslant \frac{q}{p+q}\left(\frac{a}{2}\right)^p \int_0^a |f'|^{p+q}.$$

相应的加权形式是:

$$\int_0^a (|f|^p |f'|^q \omega) \leqslant c(a,p,q)\int_0^a (|f'|^{p+q} u).$$

见[21]p.118 - 121. 1994 年,何兴钢对(1.3)式给出了一个简捷的证明:将(1.3)式中 a 换成变量 t,即令

$$F(t) = \frac{q}{p+q}t^p\int_0^t |f'|^{p+q} - \int_0^t |f|^p |f'|^q.$$

利用 Hölder 不等式证 $F'(t) \geqslant 0$,从而得出

$F(a) = \int_0^a F'(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$. 见[301]1994,182(1):299 - 300. 1985 年戚征给出了形如 $\int_0^a F(|f|)G(|f'|)$ 的不等式. 式中 $F(u)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增,$G(u)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增且凸. $F(0) = G(0) = 0$,见[334]英文版 1985,1(3):196 - 200.

(3) 设 $f \in AC[0,a], f(0) = 0, p > 0, 0 \leqslant \alpha < \beta < a$,则

$$\int_\alpha^\beta |f|^p |f'| \leqslant \frac{\beta^p}{p+1}\int_0^\beta |f'|^{p+1} - \frac{\alpha^p}{p+1}\int_0^\alpha |f'|^{p+1}.$$

([339]1982,1:61 - 62)

它的加数形式是:

$$\int_\alpha^\beta f^p |f'| \omega \leqslant (p+1)^r\left(\int_\alpha^\beta |f'|^{p+1}\omega_1\right)^{\frac{1}{p+1}}\left(\int_\alpha^\beta f^p |f'| \omega_2\right)^r, \text{式中 } r = \frac{p}{p+1}$$

见 Fiedler, B(ed.) Internat. conference on differential equations, Vol. 1. Singapore, 2000;556 - 557.

(4) **胡克不等式**:设 $f \in AC[0,a], f(0) = 0, p, q > 0, p + q > 1, 0 \leqslant \beta < a$,则

$$\int_\beta^a |f|^p |f'|^q + \frac{p(q-1)}{p+q}\int_\beta^a x^{-q}|f|^{p+q} + \frac{pqs}{2(p+q)}\omega(\beta,a)$$
$$\leqslant \frac{q}{p+q}\left\{a^p\int_0^a |f'|^{p+q} - \beta^p\int_0^\beta |f'|^{p+q}\right\},$$

式中

$$\omega(\beta,a) = \int_\beta^a t^{p-1}\left\{\int_0^t |f'|^{p+q}\left[\frac{1}{t}\int_0^t g - \left(\int_0^t g|f'|^{p+q}\right)\left(\int_0^t |f'|^{p+q}\right)^{-1}\right]^2\right\}\mathrm{d}t,$$

$1-g(x)+g(y)\geqslant 0, s=\min\{1,(p+q-1)\}$. 仅当 $f(x)=cx$ 时等号成立. 见[29]P. 25 - 26.

胡克还证明:设 $f\in AC[0,a], f(0)=f(a)=0, p>0, q>1, s=\dfrac{p}{p+q-1}$,则

$$\int_0^a |f|^p|f'|^q \leqslant \frac{1}{(p+q)^s}\left(\frac{a}{2}\right)^p\left(\int_0^a |f'|^{p+q}\right)\times$$
$$\times\left\{1-\frac{1}{4}\left[\int_0^a |f'|^{p+q}\left(\cos\frac{2\pi x}{a}\right)/\left(\int_0^a |f'|^{p+q}\right]^2\right\}^\beta.$$

式中

$$\beta=\begin{cases} s/2, & p+q>2 \\ p/2, & 1<p+q<2. \end{cases}$$

见[339]1994,14(2):249 - 254. [29]P13 - 16.

1995 年,胡克又证明:

$$\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2/q}\left(\int_0^a |f'|^p\right)^r\left\{\left(\int_0^a |f'|^p\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\int_0^a |f'|^p\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{q}},$$

式中 $1<p\leqslant 2, 1/p+1/q=1, r=2/p-2/q$,见江西师大学报,1995,19(1):23 - 26.

(5) 设 $f\in AC[0,a], \int_0^a |f'|^{p+1}<\infty, g(x)=(p+1)\int_0^x |f|^p|f'| - |f|^{p+1}\geqslant 0, 0\leqslant x\leqslant a, f(0)=a, p>0$,则

$$\int_0^a |f|^p|f'| + \frac{pa^p}{p+1}\int_0^a \frac{g(x)}{x^{p+1}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{a^p}{p+1}\int_0^a |f'|^{p+1}. \tag{1.4}$$

若 $\int_0^a |f|^p|f'|<\infty, -1<p<0$ 或 $p<-1$ 且加上 $\int_0^a |f'|^{p+1}<\infty$,则不等式(1.4)反向,见 Shum, D. G., [374]1974,17(3):385 - 389,或[21]127.

(6) 设 $p,q>0, p+q>1, f^{(n-1)}\in AC[0,a]. f^{(k)}(0)=0, 0\leqslant k\leqslant n-1$, $\int_0^a |f^{(n)}|^{p+q}<\infty$,则

$$\int_0^a |f^{(k)}|^p|f^{(n)}|^q \leqslant M(k)a^{(n-k)p}\left(\int_0^a |f^{(n)}|^{p+q}\right).$$

式中 $M(k)=\lambda q^{\lambda q}\left(\dfrac{(n-k)(1-\lambda)}{n-k-\lambda}\right)^{p(1-\lambda)}[(n-k)!]^{-p}, \lambda=1/(p+q)$. (Agarwal, R. P., 等. [21]P132) 杨国胜则进一步证明:将上述$[0,a]$改为$[a,b]$并加上条件 $q_k\geqslant 0, \sum_{k=0}^{n-1}a_k=1$,则

$$\int_a^b \left(\prod_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}|^{q_k}\right)^p |f^{(n)}|^q \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M(k) q_k (b-a)^{(n-k)p} \left(\int_a^b |f^{(n)}|^{p+q}\right). \quad (1.5)$$

见[330]1987,18(4):101－104,(1.5)式的加权形式则是在两边被积式中各乘上递减的权函数 $\omega(x)$,由此可得出一系列有用的推论,详见 Mathematika,1990,37:136－142.

(7) 设 $f^{(n)} \in C[0,a]$,$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(a) = 0$,$0 \leqslant k \leqslant n-1$,则

$$\int_0^a |ff'| \leqslant C_n a^{2n-1} \int_0^a [f^{(n)}]^2.$$

见[54]4:25－36.

(8) 设 $f^{(n-1)} \in AC[0,a]$,$f^{(k)}(0) = 0$,$0 \leqslant j \leqslant n-1$,则

$$\int_0^a |ff^{(n)}| \leqslant C_n a^n \int_0^a |f^{(n)}|^2.$$

式中 $C_n = \dfrac{b_n}{2n!}$,$\dfrac{1}{2} \leqslant b_n \leqslant \left[\dfrac{n}{4n-2} + \begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}^{-1}\right]^{1/2}$,$b_n \to \dfrac{1}{2}$,$(n \to \infty)$,(见[21]P122).

(9) 设 $f \in AC[0,a]$,$f(0) = 0$,$\omega(x)$ 递增,$\omega(0) = 0$,当 $u > 0$ 时,$\varphi(u)$ 与 $F(u)$ 为递增的凸函数,$F(0) = 0$,$Q(u)$ 为递增的凸函数,$g(u)$ 递增,$g(0) = 0$,

$h(x) = \displaystyle\int_0^x \omega'\varphi\left(\frac{|f'|}{\omega'}\right)$,若

$$F'(h(x))h'(x)g\left(\frac{1}{h'(x)}\right) \leqslant \left(\frac{F(h(a))}{h(a)}\right)g'\left(\frac{x}{h(a)}\right),\text{则}$$

$$\int_0^a F'\left(\omega\varphi\left(\frac{|f|}{\omega}\right)\right)G\left(\omega'\varphi\left(\frac{|f'|}{\omega'}\right)\right) \leqslant H\left[\int_0^a \omega'\varphi\left(\frac{|f'|}{\omega'}\right)\right],$$

式中 $G(u) = uQ[g(1/u)]$,$H(u) = F(u)Q[g(a/u)]$.特别,当 $f'(x) > 0$,$f(a) = b$,$\varphi(u) = u$,$F(u) = g(u) = u^2$,$Q(u) = \sqrt{1+u}$,$f(x) \leqslant xf'(x)$,则得到 **Polya 不等式**:

$$2\int_0^a f[1 + (f')^2]^{1/2} \leqslant b(a^2 + b^2)^{1/2}.$$

仅当 $f(x) = (b/a)x$ 时等号成立,见[21]P.125－126.

(10) **Pachpatte 不等式**:设 $f_k \in AC[a,b]$,$f_k(a) = f_k(b) = 0$,$k = 1,2,3$ 则

$$\int_a^b \left\{\left(\prod_{k=1}^{3} f_k\right)\left(\sum_{k=1}^{3} |f'_k|\right) + \left(\sum_{k=1}^{3} |f_k|\right)\left(|f'_1 f_2 f_3| + |f_1 f'_2 f_3| + |f_1 f_2 f'_3|\right)\right\}$$

$\leqslant \dfrac{b-a}{2}\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{3} |f'_k|^4\right)$.(见[357]1987,13(2):211－214)

(11) 设 $f_k \in AC[a,b]$,$f_k(a) = 0$;g_k 是$[0,\infty)$上非负连续可微严格递增函数,$g_k(a) = 0$;F_k 是$[0,\infty)$上非负可微函数,$F_k(0) = 0$,F'_k 非负递增可积,φ_k 是$(0,\infty)$上正的连续递增的凸函数,则

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} F'_k\left[g_k\varphi_k\left(\frac{|f_k|}{g_k}\right)\right] \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} F_j\left[g_j\varphi_j\left(\frac{|f_j|}{g_j}\right)\right] g'_r\varphi_k\left(\frac{|f'_k|}{g'_k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} F_k\left[\int_a^b g'_k\varphi_k\left(\frac{|f'_k|}{g'_k}\right)\right].$$

(Pachpatte, B. G. [330]1993, 24(2): 229-235)

(12) **Godunova-Levin 不等式**:设 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续,$f(a)=0$,F 是 $(0,\infty)$ 上递增的凸函数,$F(0)=0$,则

$$\int_a^b F'(|f(t)|)|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant F\left(\int_a^b |f'(t)\mathrm{d}t|\right).$$

(见[405],1967,2:221 - 224)1997 年 Pecaric 等将其推广到多元函数,见[301]1997,215(1):274 - 282.

(13) 设 $f \in AC[0,a]$,$g \in C[0,a]$,$f(0)=f(a)=0$,$p \geqslant 1$,则

$$\int_0^a g|f|^p \leqslant \left(\int_0^a [t^{1-p}+(a-t)^{1-p}]^{-1} g(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^a |f'|^p\right).$$

(Brnetic, I. 等. [303]1998, 1(3): 385 - 390)

(14) 设 $f,g \in AC[0,a]$,$f(0)=f(a)=0$,$g(0)=g(a)=0$,ω 是 $[0,a]$ 上有界且正的递减函数,$p \geqslant 0$,$q \geqslant 1$,则

$$\int_0^a \omega|f|^p|g|^p(|f|^q|g'|^q+|f'|^q|g|^q) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{2(p+q)}\left(\frac{a}{2}\right)^{2p+q}\int_0^a \omega(|f'|^{2(p+q)}+|g'|^{2(p+q)}).$$

([330]1985, 16(4): 123 - 129.)

(15) 设 f,g 在 $[a,b]$ 上的 $n-1$ 阶导数绝对连续,且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=g^{(k)}(a)=g^{(k)}(b)=0$. $0 \leqslant k \leqslant n-1$,$\omega_k$ 在 $[a,b]$ 上非负连续,则

$$\int_0^a\left(\sum_{k=1}^n \omega_{k-1}|f^{(k-1)}g^{(k-1)}|\right) \leqslant \frac{b-a}{8}\sum_{k=1}^n\left(\int_a^b \omega_{k-1}\right)\int_0^a(|f^{(k)}|^2+|g^{(k)}|^2).$$

见[301]1986, 117: 318 - 325.

(16) 2001 年,Koliha, J. J. 和 Pecaric, J. 给出了加权 Opial 型不等式的若干非常一般的形式,例如设 D 为 R^1 中闭区间,a 为 D 中一固定点,$K(x,y)$ 在 $D \times D$ 上非负连续. $f,g \in C(D)$,并且满足 $|f(x)| \leqslant \left|\int_0^x K(x,y)|g(y)|\mathrm{d}y\right|$,$x \in D$. 若 $\alpha,\beta > 0$,$r > \max\{1,\alpha\}$,$u,v \in C(D)$,使得 $u(x) \geqslant 0$,$v(x) > 0$,$\forall x \in D$,则

$$\left|\int_a^x u|f|^\beta|f|^\alpha\right| \leqslant C(x)\left|\int_a^x v|g|^r\right|^{(\alpha+\beta)/r},$$

式中 $C(x)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha/r}\left(\int_a^x (u^r v^{-\alpha})^{1/(r-\alpha)} G^{\frac{\beta(r-1)}{r-\alpha}}\right)^{\frac{r-\alpha}{r}}$,$G(x)=\left|\int_a^x v^{-\frac{1}{r-1}}G(x,\cdot)^{\frac{r}{r-1}}\right|$,

$$\left|\int_a^x u|f|^\beta|f|^\alpha\right| \leqslant \int_a^x u(t)\left|\int_a^x v(y)G(t,y)\mathrm{d}y\right|^{\frac{r-\alpha}{r}}\mathrm{d}t\,\|v\|_\infty^\beta\,\|g\|_\infty^{\alpha+\beta},$$

式中 $\|f\|_\infty=\sup\{|f(t)|: t \in [a,x] \cup [x,a]\}$,有关进一步结果和对分数阶导数的应用,详见[330]2002,33(1):93 - 102.

(17) **杨国胜不等式**:设 $f(x,y)$,f'_x,f''_{xy},在 $[0,a] \times [0,b]$ 上连续,若 $f(0,y)=f'_x(x,0)=0$,$0 \leqslant x \leqslant a$,$0 \leqslant y \leqslant b$,则

$$\int_0^a\int_0^b |f\cdot f''_{xy}| \leqslant \frac{ab}{2}\int_0^a\int_0^b |f''_{xy}|^2;$$

$$\int_0^a\int_0^b |f|^m |f''_{xy}|^n \leqslant \frac{n}{m+n}a^m b^m\int_0^a\int_0^b |f''_{xy}|^{m+n},(m,n\geqslant 1);$$

若 $f(0,y)=f(a,y)=f'_x(x,0)=f'_x(x,b)=0,0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,m,n\geqslant 1$，则

$$\int_0^a\int_0^b |f|^m |f''_{xy}|^n \leqslant \frac{n}{m+n}\left(\frac{a}{2}\right)^m\left(\frac{b}{2}\right)^m\int_0^a\int_0^b |f''_{xy}|^{m+n}.$$

杨国胜等还得到了这些不等式的加权形式，见[330]1982,13:255 - 259;1984,15:115 - 122;1986,17(2):31 - 36.

(18) 设 $f(x,y),f'_x,f'_y,f''_{xy}$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，$f(a,y)=f(b,y)=f'_x(x,c)=f'_x(x,d)=0.(x,y)\in D,1\leqslant p_k<\infty,k=1,2,3,4$，则

$$\int_a^b\int_c^d |f|^{p_1}|f'_x|^{p_2}|f'_y|^{p_3}|f''_{xy}|^{p_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C(p_k)\prod_{k=1}^4\left(\int_a^b\int_c^d |f''_{xy}|^{2p_k}\right)^{1/2},$$

式中 $C(p_k)=\dfrac{(b-a)^{p_1+p_3-1}(d-c)^{p_1+p_2-1}}{2^{(2p_1+p_2+p_3)}}$.

(Pachpatte,B. G. [388]1992,23(9):657 - 661).

(19) 设 f,g 及其二阶偏导数在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续. $0<m<\omega(x,y)\leqslant M.(x,y)\in D,h$ 在 D 上为正的连续函数，$f(a,y)=f(b,y)=f'_x(x,c)=f'_x(x,d)=0,g(a,y)=g(b,y)=g'_x(x,c)=g'_x(x,d)=0,p\geqslant 0,q\geqslant 1$，则

$$\int_a^b\int_c^d \omega|fg|^p(|fg''_{xy}|^q+|f''_{xy}g|^q)\leqslant C\frac{q}{2(p+q)}\left(\frac{(b-a)(d-c)}{4}\right)^{2p+q-1}$$

$$\cdot\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2p+q}{2(p+q)}}\int_a^b\int_c^d h\omega(|f''_{xy}|^{2(p+q)}+|g''_{xy}|^{2(p+q)}),$$

式中 $C=\max\left\{\int_a^{x_0}\int_a^{y_0}\left(\frac{1}{h}\right);\int_a^{x_0}\int_{y_0}^d\left(\frac{1}{h}\right);\int_{x_0}^b\int_c^{y_0}\left(\frac{1}{h}\right);\int_{x_0}^b\int_{y_0}^d\left(\frac{1}{h}\right)\right\}$,

$x_0=\frac{1}{2}(a+b),y_0=\frac{1}{2}(c+d)$.(见[330]1991,22(1):43 - 50)

(20) 2002 年，杨国胜等给出了二元 Opial 型不等式的一般形式. 设 $f(x,y),g(x,y),f'_x,g'_x,f''_{xy},g''_{xy}$ 都在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，$f(a,y)=f(b,y)=f'_x(x,c)=f'_x(x,d)=0,g(a,y)=g(b,y)=g'_x(x,c)=g'_x(x,d)=0,(x,y)\in D$. F,G 是 $[0,\infty)$ 上递增的凸函数，且 $F(0)=G(0)=0$，则当 $p\geqslant 1$ 时，成立

$$\int_a^b\int_c^d[F(|f|^p)G'(|g|^p)|g''_{xy}|^p+G(|g|^p)F'(|f|^p)|f''_{xy}|^p]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^4\frac{1}{c_k}\left[F\left(c_k\int_{a_k}^{x_k}\int_{c_k}^{y_k}|f''_{xy}|^p\right)+G\left(c_k\int_{a_k}^{x_k}\int_{c_k}^{y_k}|g''_{xy}|^p\right)\right],$$

式中 $k=1$ 时，$c_1=[(x_0-a)(y_0-a)]^{p-1},a_1=a,c_1=c,x_1=x_0,y_1=y_0,(x_0,y_0)\in D$; $k=2$ 时，$c_2=[(x_0-a)(d-y_0)]^{p-1},a_2=a,c_2=y_0,x_2=x_0,y_2=d$; $k=3$ 时，$c_3=[(b-x_0)(y_0-c)]^{p-1},a_3=x_0,c_3=c,x_3=b,y_3=y_0$; $k=4$ 时，$c_4=[(b$

$-x_0)(d-y_0)]^{p-1}, a_4=x_0, c_4=y_0, x_4=b, y_4=d$.(见[330]2002,33(4):379－386.)

(21) **三元 Opial 型不等式**:设 $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$,若 $f(x_1,x_2,x_3), f'_{x_k}, f'''_{x_1x_2x_3}$ 在 D 上连续,$f(a_1,x_2,x_3)=f(b_1,x_2,x_3)=f(x_1,a_2,x_3)=f(x_1,b_2,x_3)=f(x_1,x_2,a_3)=f(x_1,x_2,b_3)=0, x=(x_1,x_2,x_3)\in D$,则称 $f\in F(D)$.设 $f_k\in F(D), 1\leqslant p_k<\infty, \mu(D)=\prod_{k=1}^{3}(b_k-a_k)$,则

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\left(\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}|f_i|^{p_i}|f_j|^{p_j}\right)\leqslant\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\left(\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\mu(D)}{8}\right)^{2p_k}\left|(f_k)'''_{x_1x_2x_3}\right|^{2p_k}\right).$$

(Pachpatte,B.G.,Fasc.Math.1999,30:113－129.) 2001 年,Pachpatte,B.G.又证明:

$$\int_D|fg|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\mu(D)}{8}\right)^2\int_D(|f'''_{x_1x_2x_3}|^2+|g'''_{x_1x_2x_3}|^2).$$

(MR2001a:26017)

(22) **多元 Opial-华罗庚不等式**:设 $Q=\{x=(x_1,\cdots,x_n):a_k\leqslant x_k\leqslant b_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$.$u$ 在 Q 上有连续偏导数,且在 Q 的边界上为零.$p,q\geqslant 1$,则

$$\int_Q|u|^p|\nabla u|^q\leqslant M\int_Q|\nabla u|^{p+q}.$$

式中 $M=\dfrac{1}{n2^p}\left[\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^\alpha\right]^\beta, \alpha=\dfrac{p(p+q)}{q}, \beta=\dfrac{q}{p+q}$.

(Pachpatte,B.G.,[301]1987,126(1):85－89)

此外,见[301]1991,162(2):317－321;Agarwal,R.P.等[301]1995,189:85－103;1995,190:559－577;Internat.ser.Num.Math.1997,123:157－178;Tohoku Math.J.1995,47:567－593.Math.Nachr,1995,174:5－20.Applicable Analysis,1995,56:227－242;[403],1996,26(2):179－210,[304]2000,1(2)no 20.专著[131]等.

2. **Hilbert 不等式**:Hilbert 不等式的有限和与级数形式分别见第 3 章 N.157 和 11 章 §2N.42.此处是有关积分形式的基本结果及其新的研究成果.

(1) 设 $f\in L^p(0,\infty), g\in L^q(0,\infty), f,g\geqslant 0, p>1, (1/p)+(1/q)=1$,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right)\|f\|_p\|g\|_q.$$

(除非 $f\equiv 0$ 或 $g\equiv 0$),式中系数 $\dfrac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 是最佳的.(Hardy-Riesz,[1]P.255)

(2) 在(1)的条件下,成立

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{\max\{x,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<pq\|f\|_p\|g\|_q;$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{x-y}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right)^2\|f\|_p\|g\|_q.$$

除非 $f\equiv 0$ 或 $g\equiv 0$,[1]定理 341,342.

注 我们可以定义 Hilbert 算子 $T(f,x)=\int_0^\infty\dfrac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$,则

$\| Tf \|_p \leqslant C_p \| f \|_p, 1 < p < \infty$,式中 $C_p = \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)x^{1/p}} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$.

(3)　**Hilbert-Riesz 不等式**:设 $f \in L^p(0,\infty), g \in L^q(0,\infty), f, g \geqslant 0, p, q > 1$, $(1/p) + (1/q) > 1, \lambda = 2 - (1/p) - (1/q). 0 < \lambda < 1$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{|x+y|^\lambda} dx dy \leqslant c(p,q) \| f \|_p \| g \|_q, \tag{2.2}$$

如何求出 $c(p,q)$ 的最佳值,至今仍然是一个没有完全解决的问题,例如:Levin 将(2.2)式中的积分区间改为$(0,\infty)$时,求出

$$c(p,q) = \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\lambda p r}} \right)^\lambda, \text{式中} \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

但它仍不是最佳值(见 J. Indian Math. Soc. 1937, 11:111 − 115);若记 f^* 为 f 的递减重排,(定义见本章 N.20 或[132]P228 − 245), $F = \sup\{x[f^*(x)]^p : x > 0\}$,类似定义 $G = \sup\{x[g^*(x)]^q : x > 0\}$. p', g' 分别为 p, q 的共轭指数,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda} dx dy < c(p,q) F^{(1-\lambda)/\lambda p'} G^{(1-\lambda)/\lambda q'} \| f \|_p^{p/(\lambda q')} \| g \|_q^{q/(\lambda P')},$$

式中 $C(p,q) = \frac{\Gamma(1/p')\Gamma(1/q')}{\Gamma(\lambda)}$ 为最佳常数,在积分区间$(-\infty,\infty)$上也有类似的不等式. 见[317]1936, 11(1):119 − 124.

(2.2)式可写成以下等价形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \leqslant K(p,q) \| f \|_p \| g \|_q. \tag{2.3}$$

已知仅当 $p = q = \frac{2}{2-\lambda}$ 时, $K(p,q) = \pi^{(\lambda - \frac{1}{2})} \Gamma(\frac{1-\lambda}{2}) / \Gamma(1 - \frac{\lambda}{2})$.

(Lieb, E. H., [311]. 1983, 188:349 − 374)

但当 p, q 不满足上述关系时, $K(p,q)$ 的最佳值为何求?

(4)　设 f, g, h 在$[0,\infty)$上非负可测, a, b, c 为实数. $1 \leqslant p, q, r < \infty, p', q', r'$ 分别为 p, g, r 的共轭指数. $\lambda = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r'} = a + b + c, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,若以下三个条件之一成立:

① $\min\{p, q, r'\} > 1, \max\{ap', bq'\} < 1, \max\{a, b\} \leqslant \lambda$;

② $\min\{p, q, r'\} = 1, \max\{ap', bq'\} < 1, \lambda > 0, \max\{a, b\} < \lambda$;

③ $\min\{p, q, r'\} = 1, \max\{a, b\} \leqslant \lambda = 0$,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)h(x+y)}{x^a y^b (x+y)^c} dx dy \leqslant C(p,q,r,a,b) \| f \|_p \| g \|_q \| h \|_r, \tag{2.4}$$

(2.4)式又称为 **Hardy-Littlewood 不等式**. 式中系数的讨论及其证明见 Pitt, H. R., [317]1938, 13:95 − 101.

(5)　设 f, g 在$(0,\infty)$上非负可测, $p, q > 1, (1/p) + (1/q) \geqslant 1, \lambda = 2 - (1/p) - (1/q), \alpha < 1 - (1/p), \beta < 1 - (1/q), \alpha + \beta \geqslant 0$,且若$(1/p) + (1/q) = 1$,则 $\alpha + \beta > 0$,于是成立

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^\alpha y^\beta |x-y|^{\lambda-\alpha-\beta}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C(p,q,\alpha,\beta)\|f\|_p\|g\|_q.$$

见[1]P334－335,定理401.我们问常数 $C(p,q,\alpha,\beta)>0$ 的最佳值是多少?

[21]P.187－215 用了一章(第5章)的篇幅介绍了 Hilbert 不等式到20世纪80年代末的研究成果,收寻了共59篇文献.1990年,徐利治首先引入权系数:

$\omega(r,n)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi/r)}-\phi(r,n)$ (式中 $\phi(r,n)>0, r=p$ 或 q),使得(2.1)式中的最佳常数还可改进,其级数形式见第11章 §2.N.42.,下面是积分形式:

(6)　1992年,胡克通过引入实函数 $\varphi(x)$,使得 $1-\varphi(x)+\varphi(y)\geqslant 0, x,y>0, f, g\in L^2(0,\infty)$,$f,g$ 非负,则

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^4 \leqslant \pi^4(\|f\|_2^4-\|f\|_{2,\omega}^4)(\|g\|_2^4-\|g\|_{2,\omega}^4),$$

式中 $\omega(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\varphi(t^2x)}{1+t^2}\mathrm{d}t-\varphi(x)$,

$\|f\|_2=\left(\displaystyle\int_0^\infty |f|^2\right)^{1/2}$, $\|f\|_{2,\omega}=\left(\displaystyle\int_0^\infty |f|^2\omega\right)^{1/2}$.(见[29]P.28－29).

1979年,胡克还证明

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)f(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 \leqslant \pi^2\left\{\|f\|_2^4-\frac{1}{4}\left(\int_0^\infty f^2(x)\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_0^\infty f^2(x)e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)^2\right\}.$$

可由此改进 Hardy 不等式,Widder 不等式等,见江西师范学院学报 1979,1:3－4.

(7)　高明哲等证明:设 f,g 在 $(0,\infty)$ 上非负平方可积,则

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 \leqslant \pi^2\|f\|_2^2\|g\|_2^2-G(\xi,\eta,\delta),$$

式中 $\xi=\dfrac{1}{(x+y)^{1/2}}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/4}f(y)$, $\eta=\dfrac{1}{(x+y)^{1/2}}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/4}g(y)$,

$\delta=\delta(t)$ 为 $L^2[(0,\infty)\times(0,\infty)]$ 中某个单位向量.

$G(\xi,\eta,\delta)=\|\xi\|^2(\eta,\delta)^2-2(\xi,\eta)(\eta,\delta)(\xi,\delta)+\|\eta\|^2(\xi,\delta)^2>0.$

见[301]1999,229:682－689,同年,高明哲还建立了以下形式的不等式:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \pi\sqrt{1-R}\|f\|_2\|g\|_2,$$

式中 $R=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{u}{\|g\|}-\dfrac{v}{\|f\|}\right)^2, u=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(g,e), v=\sqrt{2\pi}(f,e^{-x}), e(y)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{x+y}\mathrm{d}x$.

见[390]1999,18(4):1117－1122.

(8)　杨必成证明:设 $f,g\geqslant 0, 0<\|f\|_{p,\omega}=\left(\displaystyle\int_0^\infty |f|^p\omega\right)^{1/p}<\infty, 0<\|g\|_{q,\omega}=\left(\displaystyle\int_0^\infty g^q\omega\right)^{1/q}<\infty, \omega(x)=x^{1-\lambda}, p>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, \lambda>2-\min\{p,q\}$,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < B\left(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q}\right)\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega},$$

式中 $B(u,v)$ 为 Beta 函数,更一般情形和证明见[336]2000,21A(4):401－408,$p=q=2$ 时见[301]1998,220:778－785.

(9)　1998 年,匡继昌证明:设 $f \in L^p(0,\infty), g \in L^q(0,\infty), f, g \geqslant 0$, $(1/p) + (1/q) = 1, 1 < p < \infty, \max\{(1/p),(1/q)\} < \lambda \leqslant 1$,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{\pi}{\lambda(\sin(\pi/p\lambda))^{1/p}(\sin(\pi/q\lambda))^{1/q}}\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}.$$

式中 $\omega(x) = x^{1-\lambda}$, $\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_0^\infty |f|^p\omega\right)^{1/p}$.

更一般情形及其证明见[301]1999,235:608－614.

1999 年,匡继昌与 Rassias, T. M. 证明:在上述条件下,成立

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant B\left(\frac{1}{p},\lambda-\frac{1}{p}\right)^{1/p}B\left(\frac{1}{q},\lambda-\frac{1}{q}\right)^{1/q}\|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}.)$$

更一般地设 $K(x,y)$ 是非负对称且为 -1 次齐次的核,$K(1,y)$ 是 y 的严格递减函数,$1 < p < \infty. \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. 令 $M(r) = \int_0^\infty K(1,y)y^{-\frac{1}{r}}\mathrm{d}y < \infty, r = p, q$,若 f, g 是$(0,\infty)$上非负可测函数,则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant [M(q)]^{1/p}[M(p)]^{1/q}\|f\|_p\|g\|_q.$$

证明及其他情形见[303]2000,3(4):497－510.

(10) 杨必成证明:设 $\lambda > 0, 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1. f, g \geqslant 0, \omega_p(x) = x^{(p-1)(1-\lambda)}$.

$$0 < \|f\|_{p,\omega_p} = \left(\int_0^\infty |f|^p\omega_p\right)^{1/p} < \infty, 0 < \|g\|_{q,\omega_q} = \left(\int_0^\infty g^q\omega_q\right)^{1/q} < \infty.$$ 则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}\|f\|_{p,\omega_p}\|g\|_{q,\omega_q}.$$

式中常数是最佳的,见[336],2002,23A(2):247－254.

(11)　2003 年,匡继昌与 Debnath, L. 证明了 Hilbert 不等式及其逆的一般形式:设 f, g 在$(0,a)$上非负可测,$\alpha(x), \beta(y)$ 是$(0,a)$上正的可测函数,$1/p + 1/q = 1, a < \infty$ 或 $a = \infty$,令

$$F(u) = e^{-u}\int_0^a f(x)\frac{u^{\alpha(x)-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha(x)+1/2)}\mathrm{d}x,\quad G(u) = e^{-u}\int_0^a g(x)\frac{u^{\beta(x)-1/2}}{\Gamma(\beta(x)+1/2)}\mathrm{d}y,$$

若 $1 < p < \infty$,则

$$\int_0^a\int_0^a \frac{f(x)g(y)}{\alpha(x)+\beta(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|F\|_p\|G\|_q.$$

若 $0 < p < 1$,则不等号反向.

该文还将上述结果推广到更一般形式

$$\int_0^a\int_0^a\cdots\int_0^a \frac{\prod_{k=1}^n f_k(x_k)}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k(x_k)\right)^\lambda}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \leqslant \prod_{k=1}^n \Gamma(1-\frac{1}{p_k})\|F_k\|_{p_k}, \tag{2.5}$$

式中 $F(u)=a^{-u}\int_0^a f_k(x)\frac{u^{(\alpha_k(x))^{\lambda}-\frac{1}{2}}}{\Gamma((\alpha_k(x))^{\lambda}+1/2)}\mathrm{d}x, 1<p_k<\infty, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}=1, \lambda\geqslant 1.$

$$(2.6)$$

当 $0<\lambda<1$ 时(2.6)式中 $\{\alpha_k(x)\}^{\lambda}$ 要换成 $n^{\lambda-1}\{\alpha_k(x)\}^{\lambda}$.

(12)　1998 年 Pachpatte, B. G. 证明了 Hilbert 不等式的积分类似：设 f,g 在 $(0,\infty)$ 上连续可微. $f(0)=g(0)=0$，则

$$\int_0^a\int_0^b\frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{\sqrt{ab}}{2}\left(\int_0^a(a-x)|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\int_0^b(b-x)|g'(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

见[301]1998，226：166－179，[330]1999，30(2)：139－146. 赵长键与 Debnath, L. 又作了进一步推广与改进，例如见[301]2001，262：411－418.

(13)　设 f,g 在 $(0,\infty)$ 上非负可测，则

$$\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy\right)^2\leqslant\frac{\pi^2}{2}\left[\left(\int_0^{\infty}f^2\right)\left(\int_0^{\infty}g^2\right)+\left(\int_0^{\infty}fg\right)^2\right].$$

Zhang Kewei, [301]2002, 271(1)：288－296.

3.　**Hardy 不等式**：设 $p>1$，f 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{\infty}[f(x)]^p\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

仅当 $f(x)\equiv 0$ 时等号成立，其中 $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ 是最佳常数.

自从 1920 年 Hardy 首先证明这个不等式以来，已有大量的改进和推广工作．专著[27]和[21]第 4 章 P143－186 有专门讨论，收集了到 1990 年为止的 174 篇论文，但收录并不全，1990 年以后仍继续有大量新的结果发表，下面仅整理出常用的基本结果和最新的结果(离散形式见第 3 章 N.110 和第 11 章 §2).

(1)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测，$p>1$，$r\neq 1$，当 $r>1$ 时，令 $F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，当 $r<1$ 时，令 $F_2(x)=\int_x^{\infty}f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^{\infty}x^{-r}[F_k(x)]^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{|r-1|}\right)\int_0^{\infty}x^{-r}(xf(x))^p\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

仅当 $f(x)\equiv 0$ 时等号成立. 式中 $k=1,2$，$r=p$ 时又得(3.1)式(见[1]P276，定理 330.)

当 $p\geqslant 1$，$r>0$ 时，我们用到以下的方便形式：

$$\left(\int_0^{\infty}x^{-r-1}[F_1(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\frac{p}{r}\left(\int_0^{\infty}x^{-r-1}(xf(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}; \tag{3.3}$$

$$\left(\int_0^{\infty}x^{r-1}[F_2(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\frac{p}{r}\left(\int_0^{\infty}x^{r-1}(xf(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{3.4}$$

(3.3)式可用 Jensen 不等式的积分形式证明，而(3.4)式可由(3.3)式推出，证明细节参看[65]P210.

(2)　若 $f\in L^p(0,\infty)$,令

$$Tf(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y,Sg(x)=\int_x^\infty y^{-1}g(y)\mathrm{d}y,\|f\|_p=\left(\int_0^\infty |f|^p\right)^{1/p}.$$

$1/p+1/q=1,1<p\leqslant\infty$,则 Hardy 不等式可写成:

$$\|Tf\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_p,\tag{3.5}$$

$$\|Sg\|_q\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_q.\tag{3.6}$$

其中$\frac{p}{p-1}$是最佳系数.下面以(3.5)式的证明为例:

固定 $a>0$,令 $y=\frac{x}{a}u$,则当 $y=x$ 时,$u=a$,所以,

$$Tf(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{xu}{a}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{x}{a}y\right)\mathrm{d}y.$$

$$\|Tf\|_p=\left(\int_0^a |Tf(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a\left\{\int_0^a\left|f\left(\frac{x}{a}y\right)\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^a\left\{\int_0^a|f(t)|^p\frac{a}{y}\mathrm{d}t\right\}^{1/p}\mathrm{d}y=\frac{p}{p-1}\left\{\int_0^a|f(t)|^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p}.$$

令 $a\to\infty$,得

$$\|Tf\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty|f(t)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}=\frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

另一种证法见[73]P.363－364.

(3)　设 f 在$(0,\infty)$上非负可积,且不恒等于零,令

$F(x)=\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t,\|f\|_p=\left(\int_0^\infty|f|^p\right)^{1/p}$,则

当 $p>1$ 时,　　$\|F\|_p<p\|xf(\cdot)\|_p$;

当 $0<p<1$ 时,　　$\left\|\frac{F(\cdot)}{x}\right\|_p>\frac{p}{p-1}\|f\|_p.$

1984 年,Bergh,J.证明.若 $0<p<1$,则

$$\left\|\frac{F(\cdot)}{x}\right\|_p\leqslant\left(\frac{\pi p}{\sin(\pi p)}\right)^{1/p}\|f\|_p.$$

仅当 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$ 时等号成立.系数是最佳的.见[354].1989,202(1):147－149.

(4)　设 f 是$(0,\infty)$上非负可测函数,$p>1,\alpha\neq p-1$,则

$$\left(\int_0^\infty x^{\alpha-p}(F(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\frac{p}{|\alpha-p+1|}\left(\int_0^\infty x^\alpha(f(x))^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

式中　$F(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,若\ \alpha<p-1,\\ \int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t,若\ \alpha>p-1.\end{cases}$

(Kufner,A.,Pokroky Mat.Fyz.Astronom,1984,29(1):29－40).

$\alpha = p$ 时,得 $\|F\|_p \leqslant p\|xf(\cdot)\|_p$.

Boyd 利用 Hardy 不等式证明了下述结果:

设 f 在(a,∞)上非负可测,$a \geqslant 0, \lambda > 0, p, q \geqslant 0$,使得 $p+q>1, q\lambda<1$,则

$$\int_a^\infty x^{(p+q)\lambda-2}[f(x)]^p\left\{\int_x^\infty [f(t)]^q \mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1-q\lambda}\int_a^\infty x^{(p+q)\lambda-1}[f(x)]^{p+q}\mathrm{d}x.$$

式中$\frac{1}{1-q\lambda}$是最佳常数.见[323]1971,23:355 - 363.

设 f 在$(0,1)$上非负可测,$1<p<\infty$,则

$$[1-p^{-(\frac{1}{p-1})}]\int_0^1\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1[f(x)]^p\mathrm{d}x + \\ + \frac{1}{p-1}\left[\int_0^1[f(x)]^p\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p\right].$$

(MR97c:26020)

(5)　设 $p>q>1$,f 在$(0,\infty)$上非负,$f\in L^q(0,\infty)$,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.$r=\frac{p}{q}-1$,则

$$\left(\int_0^\infty x^{r-p}[F(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{p-r-1}\right)^{1/p}\left(\frac{r\Gamma(p/r)}{\Gamma(1/r)\Gamma((p-1)/r)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_q.$$

Bliss,G.A.,[317]1930,5:40 - 46.

(6)　设 $1\leqslant p\leqslant\infty$,$bp<-1$,$f$ 在$(0,\infty)$上非负可测,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$,则

$$\left(\int_0^\infty x^b[F(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{-p}{bp+1}\right)\left\{\int_0^\infty x^{b+1}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

[338]1985,5(1):86.

(7)　设 f 在$(0,\infty)$上非负递减,$0<r<p\leqslant\infty$,$q=\min\{1,p\}$,$\alpha=p/q$,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p x^{r-1}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-r}\right)^\alpha\int_0^\infty x^{r-1}(f(x))^p\mathrm{d}x.$$

[133]P300 - 301.

(8)　设 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,$r\geqslant 1$,$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-1\geqslant 0$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$\beta=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{q}$,则当 $\alpha\geqslant p$ 时

$$\left\{\int_0^\infty x^{(\alpha/p)-1}[F(x)]^\alpha\mathrm{d}x\right\}^{1/\alpha} \leqslant \left(\frac{q}{\alpha}+1\right)^\beta\|f\|_p.$$

当 $\alpha=p$ 时,又得到(3.1)式.证明见[73]P.364 - 367.

(9)　设 f 在$(0,\infty)$上非负可测,$F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,$F_2(x)=\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$.

①　设 $q\geqslant p\geqslant 1$,$\lambda\neq -1$,$F(x)=\frac{1}{x}F_k(x)$.式中 $\lambda>-1$ 时取 $k=1$,$\lambda<-1$ 时取 $k=2$,则

$$\left[\int_0^\infty x^{-1-q\lambda}[F(x)]^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}\leqslant C(p,q,\lambda)\left[\int_0^\infty x^{-1-p\lambda}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}.$$

见 Flett, T. M., Proc. Glasgow Math. Assoc. 1959, 4: 7 - 15. 在某些特殊情形下，常数的确定见[21]P150 及所引用的文献，但在一般情况下，$c(p,q,\lambda)$ 的最佳值如何确定？

② 设 $q\leqslant p<0$，$(1/p)+(1/p')=1$ 若 $\alpha<0$，则

$$\left\{\int_0^\infty x^{\alpha q-1}(F_1(x))^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\leqslant\frac{|p|}{|\alpha q||\alpha|^{q/p'}}\left\{\int_0^\infty x^{(\alpha+1)p-1}(f(x))^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $\alpha>0$，则

$$\left\{\int_0^\infty x^{\alpha q-1}(F_2(x))^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\leqslant\frac{|p|}{|\alpha q||\alpha|^{q/p'}}\left\{\int_0^\infty x^{(\alpha+1)p-1}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

(见 Heinig, H., Real Analysis Exchange, 1979 - 1980, 5: 61 - 81, [21]P168)

(10)　任意区间上的 Hardy 不等式：设 $0\leqslant a<b\leqslant\infty$，$1<p<\infty$，则当 $\alpha<1-1/p$ 时，

$$\int_a^b\left|x^{\alpha-1}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|x^\alpha f(x)|^p\mathrm{d}x;\tag{3.7}$$

而当 $\alpha>1-1/p$ 时，

$$\int_a^b\left|x^{\alpha-1}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|x^\alpha f(x)|^p\mathrm{d}x.\tag{3.8}$$

它可推广为：

$$\int_a^b\left|u(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|v(x)f(x)|^p\mathrm{d}x;\tag{3.9}$$

$$\int_a^b\left|u(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b|v(x)f(x)|^p\mathrm{d}x.\tag{3.10}$$

若 $a=0$，$b=\infty$，则仅当

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty|u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^x|v(t)|^{-p}\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\infty$$

时，(3.9) 式成立；而仅当

$$\sup_{x>0}\left(\int_a^x|u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_x^\infty|v(t)|^{-p}\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\infty$$

时，(3.10) 式成立. 见[107]2: 819. 我们问：上述常数 c 的最佳值是多少？

1968 年，Izumi 证明：设 f 在 $[0,\pi]$ 上是正的可积函数，$p,q>1$，则

$$\left\{\int_0^\pi x^{-q}\left(\int_{x/2}^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant\left(\frac{p}{q-1}\right)\left\{\int_0^\pi x^{-q}\left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

见[396]1968, 21: 277 - 291.

1979 年，Kokilasvili, V. M. 证明

$$\left(\int_0^\infty\left|u(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_0^\infty|v(x)f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\tag{3.11}$$

成立的充要条件是

$$B=\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty|u(t)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_0^x|v(t)|^{-p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}<\infty,\tag{3.12}$$

式中 $1 < p \leqslant q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. 见 Soobšč. Akad. Nauk Gruzin, 1979, SSR96(1):37 - 40.

若 C^* 表示(3.11)式中 C 的最佳常数,则

$$B \leqslant C^* \leqslant Bp^{1/q}(p')^{1/p'} \qquad (1 < p \leqslant q < \infty).$$

而当 $p = 1$ 或 $p = \infty$ 时, $C^* = B$. (3.11)式中 $\int_0^x f$ 换成 $\int_x^\infty f$ 仍成立. 类似的结果见[21]P157 - 160 及 166 - 171.

(11)　设 $1 < p < \infty$, f 在 $(0,1)$ 上非负可测,使得 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \infty$, $x \in (0,1)$,则

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{x}(F(x))^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant p\left\{\int_0^1 x^{p-1}(|\ln x| f(x))^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

Pachpatte, B. G. 还利用 Fubini 定理考虑了多元情形.

(见 Fasc. Math. 1999, 30:107 - 112). 1992 年. 作者还证明:

$\int_a^b [F(x)]^p \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant C\int_a^b [f(x)\ln x]^p \frac{\mathrm{d}x}{x}$,式中 $F(x) = \frac{1}{\omega(x)}\int_{I_x}\omega(t)f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$,

$1 < b \leqslant \infty$. 当 $(a,b) = (1,b)$ 时, $I_x = (x,b)$,当 $(a,b) = (0,1)$ 时, $I_x = (0,x)$. 见[388]1992, 23:773 - 776.

(12)　设 $p > 1$, $K(x) > 0$, $L(f,x) = \int_{R^1} K(xy)f(y)\mathrm{d}y$ 是 f 的 Laplace 变换. $\int_{R^1} K(x)x^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \varphi(\alpha) < \infty$, $0 < \alpha < 1$. 则

$$\| L(f) \|_p < \varphi(1/p) \| x^{1-(2/p)} f(\cdot) \|_p,$$

$$\| x^{1-(2/p)} L(f) \|_p < \varphi(1/p') \| f \|_p.$$

特别当 $K(x) = e^{-x}$ 时, $\varphi(1/p) = \Gamma(1/p)$, $\varphi(1/p') = \Gamma(1/p')$, $1/p + 1/p' = 1$.

(Hardy, G. H., [317]1933, 8:114 - 119)

若 f, g 是 $(0,\infty)$ 上非负可测函数, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. 则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(xy)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \varphi\left(\frac{1}{p}\right)\left[\int_0^\infty x^{p-2}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty [g(x)]^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}.$$

见[64]P. 196.

(13)　**Schur-Hardy** 不等式:设 $K(x,y)$ 是 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上非负可测函数,并且为 -1 次齐次,使得

$C(p) = \int_0^\infty K(x,y)y^{-1/p}\mathrm{d}y < \infty$. $1 \leqslant p < \infty$,则下述积分算子 $T: L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)$: $T(f,x) = \int_0^\infty K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$,成立

$$\| Tf \|_p \leqslant C(p) \| f \|_p.$$

特别地,若 $K(x,y) = x^{-r}\varphi_E(y)$, $E = (0,x)$, $1/p \leqslant r \leqslant 1$,则

$$\| Tf \|_p \leqslant \left(\frac{1}{1+(1-r)p}\right)^{1/p}\left(\frac{p}{pr-1}\right)^2 \| f \|_q.$$

式中 $q=\dfrac{p}{1+p(1-r)}$.

它们的推广见[54]2:277 - 286,459 - 460,[21]P171 - 172 及所引用的文献.

(14)　**Levinson 不等式**:设 $p>1,f(x)\geqslant 0,\omega(x)>0,x>0,\omega$ 在$(0,\infty)$上绝对连续,若 $\exists\lambda>0$,使得

$$1-\frac{1}{p}+\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}\geqslant\frac{1}{\lambda}\quad \text{a.e. } x\in(0,\infty).$$

记

$$F(x)=[x\omega(x)]^{-1}\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t.\quad \|f\|_p=\left(\int_0^\infty |f|^p\right)^{1/p}.$$

则

$$\|F\|_p\leqslant\lambda\|f\|_p.$$

见[324]1964,31:389 - 394,[21]P.150 - 151.

1987 年 Pachpatte,B.G.将上述结果推广为:

$$\left\{\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{\omega(x)}\int_E\frac{\omega(t)f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant\frac{\lambda p}{|\alpha-1|}\left\{\int_0^\infty x^{-\alpha}[f(x)]^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

式中当 $\alpha>1$ 时 $E=[0,x]$,当 $\alpha<1$ 时 $E=[x,\infty)$.还可用满足 $\varphi\varphi''\geqslant(1-1/p)(\varphi')^2$ 的 φ 来代替 p 幂.见[357]1987.13(2):203 - 210.

(15)　设 f,g 在$(0,\infty)$上非负可测,并对 $x>0$,积分 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t,F(x)=\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t(c>1)$ 或 $F(x)=\int_x^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t(c<1)$ 存在.则:

①　若 $0<b\leqslant\infty,p\geqslant 1,c>1,\int_0^b[F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\left\{\int_0^b[F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant\left(\frac{p}{c-1}\right)\left\{\int_0^b[f(x)]^p[G(x)]^{p-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $0<p\leqslant 1,c<1$ 则不等号反向,其中系数$\dfrac{p}{c-1}$ 换成$\dfrac{p}{1-c}$.

②若 $a>0,p\geqslant 1,c<1.\int_a^\infty[F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x$ 存在,则

$$\left\{\int_a^\infty[F(x)]^p[G(x)]^{-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant\left(\frac{p}{1-c}\right)\left\{\int_a^\infty[f(x)]^p[G(x)]^{p-c}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $0<p\leqslant 1,c>1$,则不等号反向,其中常数$\dfrac{p}{1-c}$ 换成$\dfrac{p}{c-1}$.

当 $c=1$ 时,将 $F(x)$ 改记为

$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t)(p\geqslant 1)$ 或 $F(x)=\int_x^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t,(0<p\leqslant 1)$.

若 $p\geqslant 1,b>0,\int_0^b[F(x)]^p[G(x)]^{-1}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\left\{\int_0^b[F(x)]^p[G(x)]^{-1}g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant p\left\{\int_0^b[f(x)]^p[G(x)]^{p-1}\left[\log\frac{G(b)}{G(x)}\right]^p g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p};$$

若 $0 < p \leqslant 1, a > 0, \int_a^\infty [F(x)]^p [G(x)]^{-1} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\left\{\int_a^\infty [F(x)]^p [G(x)]^{-1} g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant p\left\{\int_a^\infty [f(x)]^p [G(x)]^{p-1}\left[\log\frac{G(x)}{G(a)}\right]^p g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

见 Copson,E.T.,[392]1975 - 1976,75,13:157 - 164.

(16)　设 f 在$[0,\infty)$上非负递增连续,$g(0) = 0, g(\infty) = \infty, x > 0$ 时 $g(x) > 0$,令

$$F(x) = \int_0^x f\mathrm{d}g \quad (\alpha > 1) \text{ 或 } F(x) = \int_x^\infty f\mathrm{d}g \quad (\alpha < 1).$$

若 $p \geqslant 1$,则当 $\alpha > 1$ 时,

$$\int_0^b g^{-\alpha} F^p dg + \frac{p}{\alpha - 1} g(b)^{1-\alpha} [F(b)]^p \leqslant \left(\frac{p}{\alpha - 1}\right)^p \int_0^b g^{p-\alpha} f^p \mathrm{d}g;$$

而当 $\alpha < 1$ 时,

$$\int_a^\infty g^{-\alpha} F^p \mathrm{d}g + \frac{p}{1 - \alpha} g(a)^{1-\alpha} [F(a)]^p \leqslant \left(\frac{p}{1 - \alpha}\right)^p \int_a^\infty g^{p-\alpha} f^p \mathrm{d}g.$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时,上述不等号均反向.仅当 $p = 1$ 或 $f \equiv 0$ 时等号成立.(Imoru,C.O.,[374]1977,20:307 - 312).

(17)　**高维 Hardy 不等式**:设 $p > 1, r > \frac{2}{p}$, $F(x) - F(0) = F(r,\theta) - F(0,0) = \int_0^r f(t,\theta)dt$, $f(x) = f(r,\theta)$. $|x| = r$,则

$$\left(\int_{R^2} \frac{|F(x) - F(0)|^p}{|x|^{pr}}\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{pr - 2}\left\{\int_{R^2} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{p(r-1)}}\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

(Ding.Y. [340]1981,1(1):31 - 39) 此外见[338]1985,15(1):85 - 86. [21]P172. [54]7:3 - 16.

(18)　**加权 Hardy 不等式**:令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. $\| f \|_{p,u} = \left(\int_a^b |f|^p u\right)^{1/p}$,则

$$\| F \|_{p,\omega} \leqslant c \| f \|_{p,u}$$

Oguntuase 等就 $w(x) = x^{-(p/r')}, u(x) = 1, 0 < a < b \leqslant \infty, 1 < p, r < \infty, 1/p + 1/q + 1/r = 1, p', q', r'$ 分别为 p, q, r 的共轭指数,求出

$$c = q^{1/r'}(r')^{-1/r'}[1 - (a/b)^{r'/q}]^{1/r'}$$ 见[301]2000,241(1):73 - 82.

设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负递增. $1 < p \leqslant q < \infty$. ω, u 为非负权函数,$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.则

$\| F \|_{q,\omega} \leqslant c \| f \|_{p,u}$ 成立的充要条件是　$\max\{B_0, B_1\} < \infty$,

式中 $B_0 = \sup\limits_{x>0}\left(\int_x^\infty (t - x)^q t^{-q} w(t)\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_x^\infty u(t)\mathrm{d}t\right)^{-1/p}$,

$$B_1 = \sup_{x>0}\left\{\int_x^\infty t^{-q} w(t)\mathrm{d}t\right\}^{1/q}\left\{\int_0^x (x - t)^{p'}\left(\int_t^\infty u\right)^{-p'} u(t)\mathrm{d}t\right\}^{1/p'}.$$

(Heinig,H.P.等,[323]1993,45(1):104 - 116)

1997 年 Burenkov, V. I. 等证明了**差分型加权 Hardy 不等式**:

设 $0 < p < \infty, 0 < a \leqslant \infty, 0 \leqslant b < \infty, w, u$ 是$(0,a)$上非负权函数,使得

$$u(x) = b + \int_x^a w(t)\mathrm{d}t, \quad \int_0^x u(t)\mathrm{d}t \leqslant cxu(x), x \in (0,a).$$

若存在 $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$,使得

$$u\left(\frac{x}{\alpha+1}\right) - u\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant \beta u(x), x \in (0, \min\{1,\alpha\}a), f \text{ 在}(0,x)\text{ 上可测}, x \in [0,a],$$

则 ∃ 常数 c_1,使得

$$\left(\int_0^x |f(t)|^p u(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left\{\left[u(x)\int_0^x |f(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{1/p} + \left(\int_0^x\int_0^x |f(t)-f(y)|^p w(|t-y|)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\right)^{1/p}\right\}.$$

见[302]1997,1(1):1 - 10.

1999 年,Peter, W. 等证明了**三维加权混合范数 Hardy 不等式**:设 $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant p < \infty$, $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < \infty, 0 < a < b \leqslant \infty, q = 1 - 1/p_1 + 1/p_2$,则

$$\int_0^b\left\{\int_0^a x^{-1-\alpha_1-\alpha_2\alpha_3 p_2}\int_0^{x^{\alpha_1}}\left[\int_0^{x^{\alpha_2}} y^{-1+\alpha_3+\frac{1}{p_1}}|f(y,t+z)|\mathrm{d}y\right\}^{p_2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right\}^{p/p_2}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \left(\frac{p}{p_2\alpha_2}\right)^{p/p_2}\left(\frac{q}{\alpha_3}\right)^{pq}\int_0^{b+a^{\alpha_1}}\left[\int_0^{a^{\alpha_2}} |f(y,z)|^{p_1}\mathrm{d}y\right]^{p/p_1}\mathrm{d}z.$$

见[301]1999,234(1):287 - 292.

1989 年丁勇证明了**加权弱型 Hardy 不等式**:设 $1 \leqslant p, q < \infty, x = (x_1, x_2) \in R_+^2 = (0,\infty)\times(0,\infty)$. $f(x), w(x), u(x)$ 在 R_+^2 上非负可测,记

$$(T_1 f)(x) = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2, \quad (T_2 f)(x) = \int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty} f(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

T_1, T_2 称为二维 Hardy 算子,下面统一记为 T.

$$\|f\|_{p,u} = \left(\int_{R_+^2} |f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

若 ∃$c > 0$,使得

$$\|Tf\|_{q,w} \leqslant c\|f\|_{p,u}, \tag{3.13}$$

则称(w,u)关于算子 T 为强(p,q)型权对.

$$\text{若}\left(\int_{E_\alpha} u\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant \frac{c}{\alpha}\|f\|_{p,u}, \tag{3.14}$$

则称(w,u)关于算子 T 为弱(p,q)型权对,式中

$$E_\alpha = \{x = (x_1,x_2):(Tf)(x) > \alpha\}.$$

使(3.13),(3.14)式成立的 c 的下确界,分别称为算子 T 的强、弱范数. 记为 $\|T\|$, $\|T\|_w$.

Muckenhoupt, B. 证明:若(w,u)关于算子 T_1 为强(p,p)型权对,则

$$\sup_{x_1,x_2>0}\left(\int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty} w(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}[u(t_1,t_2)]^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{p-1} < \infty.$$

但已找到满足上式的(w,u)不能使(3.13)式对于所有f成立 $(1<p<\infty)$.因此,作者分别于1978,1984年指出,给出高维形式的加权Hardy不等式的权函数特征,是一个有意义而又困难的问题.1989年,丁勇证明:

① 若$1\leqslant p,q<\infty$,则(w,u)关于算子T_1为弱(p,q)型权对的充要条件是

$$\| T_1 \|_w = \sup_{x_1,x_2>0}\left(\int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty} w(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{1/q}\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} u(t_1,t_2)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty;$$

② 若$1\leqslant p,q<\infty$,则(w,u)关于算子T_2为弱(p,q)型权对的充要条件是

$$\| T_2 \|_w = \sup_{x_1,x_2>0}\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} w(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{1/q}\left(\int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty} u(t_1,t_2)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right)^{-\frac{1}{p}} < \infty,$$

式中$1/p+1/p'=1$.见[339]1989,9(4):569 - 575.

其他文献见[368]1984,33(2):257 - 270;33(3):360 - 361;[329]1972,34:31 - 38;1988,88(3):209 - 219; [308]1990,109(1):85 - 95; [301]1990,149:17 - 25;1987,122(1):7 - 15,1991.160:434 - 445;[374]1981.24(4):393 - 400;[388]1990.21(7):617 - 620.[21]P176和专著[27](列出84篇参考文献);[50]P271 - 288等.

(19) **高阶导数Hardy不等式**:Kheinig-Kufner指出:设$1<p\leqslant q<\infty$,f为$(0,\infty)$上非负可测函数,ω_0,ω_1为非负权函数.令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.\ \| f \|_{p,\omega_1}=\left(\int_0^{\infty}|f(x)|^p\omega_1(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

则

$$\| F \|_{q,\omega_0}\leqslant C\| f \|_{p,\omega_1} \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow\quad \| F \|_{q,\omega_0}\leqslant C\| F' \|_{p,\omega_1}, \tag{3.16}$$

则(3.15),(3.16)式成立的充要条件是

$$\sup_{0<x<\infty}\left(\int_0^x\omega_0(t)\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^x\omega_1^{1-p'}(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p'}=C_1<\infty, \tag{3.17}$$

式中$p'=\dfrac{p}{p-1}$,$F(0)=0$,若将(3.15)式中F换成$\int_x^{\infty}f(t)\mathrm{d}t$,则(3.17)式中$\left(\int_0^x[\omega_1(t)]^{1-p'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'}$换成$\left(\int_x^{\infty}[\omega_1(t)]^{1-p'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'}$,以及$F(0)=0$换成$F(\infty)=0$.

更一般地,设$1<p\leqslant q<\infty,m,n\in N$.$F$满足$F^{(k)}(0)=0,0\leqslant k\leqslant m-1$.式中约定$F^{(0)}(0)=F(0)$.当$m\leqslant k\leqslant m+n-1$时$F^{(k)}(\infty)=0$,则

$$\| F \|_{q,\omega_0}\leqslant C\| F^{(m+n)} \|_{p,\omega_{mn}},$$

成立的充要条件是非负权函数ω_0,ω_{mn}满足:

$$\sup_{0<x<\infty}\left(\int_x^{\infty}\omega_0(t)t^{(m-1)q}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^x\omega_{mn}^{1-p'}(t)^{np'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'}=C_1<\infty \quad 和$$

$$\sup_{x>0}\left(\int_0^x\omega_0(t)t^{mq}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^{\infty}\omega_{mn}^{1-p'}(t)t^{(n-1)p'}\mathrm{d}t\right)^{1/p'}=C_2<\infty,$$

式中$1/p+1/p'=1,1/q+1/q'=1$.

见Proc. Steklov Institute of Math. 1990,192(2):113 - 121.

Kufner 等在[54]6 中还给出了形如

$$\| f \|_{q,\omega_0} \leqslant C \| f^{(k)} \|_{p,\omega_k}$$

的高阶导数 Hardy 不等式成立的充要条件,式中 ω_0,ω_k 为非负权函数.

$$\| f \|_{q,\omega_0} = \left(\int_0^1 |f(x)|^q \omega_0(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}, 1 < p \leqslant q < \infty$$

类似的结果见[27],[21]P.176, 近期工作见 Nasyrova, Masha 等[302]1997,1(3):223 - 238, MR84h:26018, MR97i:26021, MR98g:26017;[392]1999,129(5):947 - 958. Math. Bohem, 1998,123(3):279 - 293 等.

(20) **分数阶 Hardy 不等式**:设 f 在$(0,\infty)$上局部可积,$p \geqslant 1$,当 $x \to 0$ 或 $x \to \infty$ 时$\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \to 0$. 若 $\alpha > 0, 1/p < \beta < 1$,或 $\alpha < 0, 0 < \beta < 1/p$,则

$$\int_0^\infty |f(x)|^p x^{-\alpha p-1}\mathrm{d}x \leqslant c(\alpha)\int_0^\infty \left| f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \right|^p x^{-\alpha p-1}\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^\infty |f(x)|^p x^{-\beta p}\mathrm{d}x \leqslant c(p,\beta)\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x) - f(y)|^p |x - y|^{-\beta p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(Krugljak. Natan 等,[308]2000,128(3):727 - 734) 此外,见[302]1997,1(1):25 - 46.

(21) 1998 年以来,杨必成等对 Hardy 不等式作了一系列改进和推广。例如,设 $0 < a < b < \infty, 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1, f(x) \geqslant 0, f \not\equiv 0, f \in L^p(0,\infty)$,令

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.\ \| f \|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p},\text{则}$$

① $\| F \|_p < q[1 - (a/b)^{1/q}] \| f \|_p$;

② $\| F \|_p < q\, C_p(a,b) \| f \|_p$,

式中 $$C_p(a,b) = \max_{a \leqslant x \leqslant b}\left\{\frac{1}{q}x^{1/q}\int_x^b t^{-1-(1/q)}\left[1 - \left(\frac{a}{t}\right)^{1/q}\right]^{p-1}\mathrm{d}t\right\}^{1/p},$$

$$p^{-\frac{1}{p}}[1 - (a/b)^{1/q}] < C_p(a,b) < 1 - (a/b)^{1/q}.$$

③ $a = 0$ 时,

$$\| F \|_p < q\left\{\int_0^b \left[1 - \left(\frac{t}{b}\right)^{1/q}\right][f(t)]^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p};$$

④ $$\left\{\int_a^\infty \left(\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p} < p\left\{\int_a^\infty [1 - (a/t)^{1/p}][tf(t)]^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p};$$

见[301]1998,217(1):321 - 327;[326]1999,22(3):535 - 542.

(22) 胡克对 Hardy 不等式的改进和推广见江西师大学报 2000,24(2):95 - 98.

4. **Carleman 不等式**.设 $f(x) > 0$. 则

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x < e\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

它是 N3 中 Hardy 不等式(3.1)当 $p \to 1$ 的情形. 系数 e 是最佳的. 1928 年由 Knopp 证明,见[317]1928,3:205 - 211. 离散形式见第 11 章 §2.N.38.

Carleman 不等式有许多改进和推广.

(1) **Levin 不等式**:非负函数 f 的加权几何平均定义为

$$G(f,\omega)=\exp\left\{\frac{1}{\omega(x)}\int_0^x\omega'(t)\ln f(t)\mathrm{d}t\right\}.$$

式中权函数 ω 满足：$\omega'(t)\geqslant 0,\omega(0)=0.x\to\infty$ 时 $\omega(x)\to\infty,x\to 0$ 时 $\omega(x)\ln\omega'(x)\to 0$，于是 $\omega(x)=\int_0^x\omega'(t)\mathrm{d}t$．若 $g(x)\geqslant 0,g$ 是g' 的积分且$\omega(x)\ln g(x)\to 0(x\to 0)$，则

$$\int_0^\infty g(x)G(f(x);\omega)\mathrm{d}x<\int_0^\infty F(x)f(x)dx. \tag{4.2}$$

式中 $F(x)=g(x)\exp\left\{1-\frac{\omega(x)\omega''(x)}{[\omega'(x)]^2}+\frac{\omega(x)g'(x)}{\omega'(x)g(x)}\right\}$，

特别，设 $\lambda>0,\alpha$ 为实数，则

$$\int_0^\infty x^\alpha G(f(x);x^\lambda)\mathrm{d}x<\exp\left\{\frac{\alpha+1}{\lambda}\right\}\int_0^\infty x^\alpha f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

式中系数 $\exp\left\{\frac{\alpha+1}{\lambda}\right\}$是最佳的．（见[Matem. Sbornik 4,1938,46(2):325－331]）．

类似情形见[21]P149－150.

(2) 设 f 在[0,1]上非负可测，则

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x}\int_0^x f\right)<\frac{e}{e-1}\int_0^1 f[1+\ln\frac{f}{\int_0^1 f}]. \tag{4.4}$$

(MR97c:26020)

(3) 设 $\omega(x)$ 满足：① $\omega(0)=0$， ② $\omega(\infty)=\infty$， ③ $\omega'(x)>0,x>0$.

若 $$\int_0^\infty\varphi(x)\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x\ln f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty h(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.5}$$

则

$$\int_0^\infty\varphi_1(y)\exp\left\{\frac{1}{\omega(y)}\int_0^y\omega'(t)\ln g(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y\leqslant\int_0^\infty h_1(y)g(y)dy, \tag{4.6}$$

式中 $h_1(g)=h[\omega(y)]\omega'(y)$， $\varphi_1(y)=\omega'(y)\varphi[\omega(y)]$．见[21]$P$153－154.

5. **Carlson 不等式**：设 $f(x)\geqslant 0,f(x)\not\equiv 0,f,xf\in L^2(0,\infty)$，则

$$\left(\int_0^\infty f\right)^4\leqslant\pi^2\left(\int_0^\infty f^2\right)\left(\int_0^\infty x^2f^2\right). \tag{5.1}$$

式中 π^2 是最佳常数，相应的级数形式见第 11 章 §2.N.35.

证 令 $s=\int_0^\infty f^2$， $\sigma=\int_0^\infty(xf)^2$，用 Cauchy 不等式，有

$$\left(\int_0^\infty f\right)^2=\left[\int_0^\infty(f\sqrt{\sigma+sx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma+sx^2}})\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_0^\infty f^2(\sigma+sx^2)\right]\left[\int_0^\infty(\sigma+sx^2)^{-1}\mathrm{d}x\right]=\pi\sqrt{\sigma s}.$$ 证毕.

(5.1)式已有许多改进和推广．[21]第 8 章专门讨论了 1935 至 1990 年的一部分成果.

(1) 1936 年，Hardy 证明(5.1)式与下式等价：

$$[f(0)]^4 \leqslant 4\left(\int_0^{\infty} f^2\right)\left(\int_0^{\infty}(f')^2\right). \tag{5.2}$$

仅当 $f(x)=c_1\exp(-c_2t)$ 时等号成立.

(5.2) 式的推广是下述 **Sz－Napy 不等式**:设 $a>0, p>1, r=1+a(1-p)/p$,则

$$\|f\|_{\infty} \leqslant (r/2)^{1/r}\|f\|_a^{1-(1/r)}\|f'\|_p^{1/r};$$

$$\|f\|_{a+b}^{a+b} \leqslant \left[\frac{r}{2}H\left(\frac{r}{b},\frac{p-1}{p}\right)\right]^{b/r}\|f\|_a^{a+b-\frac{b}{r}}\|f'\|_p^{\frac{p}{br}}.$$

式中 $b>0, H(u,v)=\dfrac{(u+v)^{-(u+v)}\Gamma(1+u+v)}{u^{-u}\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)}$.

设 f 在 $[a,b]$ 上非负递增, g_k 在 $[a,b]$ 上非负递增连续可微, $p_k>0, \sum_{k=1}^{n}p_k=1$,则

$$\int_a^b\left(\prod_{k=1}^{n}g_k^{p_k}\right)'f \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b g'_k f\right)^{p_k}. \tag{5.3}$$

若 f 改为递减, $g_k(a)=0, \forall k$,则不等号反向,见 Pearce, C. E. M. 等, Handbook of analytic-computational methods in applied mathematics, 465－505, Chapman, FL, 2000.

(2)　设 f,g 在 $(0,1)$ 上非负递增, $a,b\geqslant -1/2$,则

$$2(a+b+1)^2\left(\int_0^1 fx^{a+b}\right)\left(\int_0^1 gy^{a+b}\right)\geqslant$$

$$\geqslant(2a+1)(2b+1)\left\{\left(\int_0^1 x^{2a}f\right)\left(\int_0^1 y^{2b}g\right)+\left(\int_0^1 x^{2b}f\right)\left(\int_0^1 y^{2a}g\right)\right\}, \tag{5.4}$$

仅当 $f(x)=f(0), g(y)=g(0)$ 时等号成立.更一般的情形见[21]P261－262.

(3)　设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可积, $p>1, \lambda>0$,则

$$\int_0^{\infty} f \leqslant C(p,\lambda)\left\{\int_0^{\infty} x^{p-1-\lambda}f^p\right\}^{\frac{1}{2p}}\left\{\int_0^{\infty}x^{p-1+\lambda}f^p\right\}^{\frac{1}{2p}}. \tag{5.5}$$

式中 $C(p,\lambda)=2^{1/p}\left\{\dfrac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2p-1}\right)\right]^2}{2\lambda\Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)}\right\}^{1-\frac{1}{p}}$.

(见 Gabriel, R. M., [317] 1937, 12:130－132)

(4)　设 f 是 $(0,\infty)$ 上非负函数 . $p,q>1, \lambda,\mu>0, \alpha=\dfrac{\mu}{p\mu+q\lambda}, \beta=\dfrac{\lambda}{p\mu+q\lambda}$,则

$$\int_0^{\infty} f \leqslant c\left(\int_0^{\infty}x^{p-1-\lambda}f^p\right)^{\alpha}\left(\int_0^{\infty}x^{q-1+\mu}f^q\right)^{\beta}, \tag{5.6}$$

式中　$C=\left(\dfrac{1}{p\alpha}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{1}{q\beta}\right)^{\beta}\left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\right)}{(\lambda+\mu)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\right)}\right]^{1-\alpha-\beta}$ 是最佳常数.

当 $p\to 1, q\to 1$ 时,得到

$$\int_0^{\infty} f < \left(\int_0^{\infty}x^{-\lambda}f\right)^{\alpha}\left(\int_0^{\infty}x^{\mu}f\right)^{\beta}. \tag{5.7}$$

式中　$\alpha=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda}, \beta=\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}$.(我们假设上述所有积分均为有限)

(见 Levin, V. I. [21]P263 - 266). [2]P176 - 177 利用 Holder 不等式给出一个简洁的证明。

(5) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，则

$$\int_0^\infty f \leqslant 2\left(\int_0^\infty \sqrt{x}f\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/4}. \tag{5.8}$$

(Klefsjö, B., [21]P. 269)

(6) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负递减，$a,b \geqslant 0, p > 1, 1/p + 1/q = 1$. 则

$$\int_0^\infty x^{a+b}f \leqslant C\left(\int_0^\infty x^{ap}f\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty x^{bq}f\right)^{1/q}, \tag{5.9}$$

式中 $C = \dfrac{(ap+1)^{1/p}(bq+1)^{1/q}}{1+a+b}$. (Volkov, V. N., (5.9) 式的进一步推广见[21]P269 - 273)

(7) 设 f, g 在 $(0,\infty)$ 上可测，g 可微，$g(0) = 0, g(\infty) = \infty$，而且 $0 < \alpha = \inf\{g'(x) : x \in (0,\infty)\} < \infty$，则

$$\left(\int_0^\infty f\right)^4 \leqslant \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\left(\int_0^\infty f^2\right)\left(\int_0^\infty (gf)^2\right).$$

(Barza, Sorina, [330]1998, 29(1): 59 - 64)

(8) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测，$0 < \alpha < 1, 1 \leqslant p, q < \infty$，则

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{f(x)}{x^\alpha}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\alpha}{p}}\left(\int_0^\infty \frac{(f(x)x^{1-\alpha})^q}{x}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha}{q}},$$

证明见[301]1984, 100(1): 302 - 306.

(9) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上非负可测，$a > 0$，则

$$\int_0^\infty f \leqslant \sqrt{2\pi}\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/4}\left(\int_0^\infty (x-a)^2 f^2\right)^{1/4}. \tag{5.10}$$

$\sqrt{2\pi}$ 也是最佳常数. (Barza, S. 等[302]1998, 2(2): 121 - 135)

(10) 2001 年，匡继昌—Debnath, L. 证明：设 f 在 (a,∞) 上非负可测，$a > 0, 0 < \beta < p - 1 < \alpha, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, S_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty x^\alpha f^p, S_\beta = \int_a^\infty x^\beta f^p$. 若 $0 < S_\alpha, S_\beta < \infty$，则 $f \in L(a,\infty)$，且

$$\left(\int_a^\infty f\right)^p \leqslant 2\left\{\frac{S_\alpha^{\lambda_\alpha}}{(\alpha-\beta)S_\beta^{\lambda_\beta}}B(\lambda_\beta, (-\lambda_\alpha)) - C(p,\alpha,\beta)\right\}^{p/q}\left(\int_a^\infty x^\alpha f^p\right)\left(\int_a^\infty x^\beta f^p\right), \tag{5.11}$$

仅当 $f(x) = (S_\beta x^\alpha + S_\alpha x^\beta)^{-q/p}$ 时等号成立. 式中

$$C(p,\alpha,\beta) = \int_0^a (S_\beta x^\alpha + S_\alpha x^\beta)^{-q/p}\mathrm{d}x > 0.$$

$\lambda_\alpha = \dfrac{p - \alpha q}{p(\alpha-\beta)}, \lambda_\beta = \dfrac{p - \beta q}{p(\alpha-\beta)}$. $B(u,v)$ 为 Beta 函数.

特别 $p = q = \alpha = 2, \beta = 0$ 时，(5.11) 式归结为

$$\left(\int_a^\infty f\right)^4 < \left\{\pi - 2\arctan\left(\frac{S_0}{S_2}\right)^{1/2} a\right\}^2\left(\int_a^\infty f^2\right)\left(\int_a^\infty x^2 f^2\right).$$

仅当 $f(x) = (S_2 + S_0 x^2)^{-1}$ 时等号成立. (见[301]2002, 267(1): 395 - 399.)

杨国胜等的工作见[388]1999,30(10):1031 - 1040.

6. **Grüss 型不等式**:我们在第一章 § 3 介绍了 Gruss 不等式(3.133) 及其改进和推广,由于这类不等式在统计、编码理论、数值分析等领域均有重要应用,本章介绍它的进一步推广,称为 Grüss 型不等式.

(1) 设 $f,g\in L[a,b]$,记 $A(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$, 则

$$|A(fg)-A(f)A(g)|\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)-A(f)][g(x)-A(g)]\mathrm{d}x,$$

取 $f(x)=g(x)=\mathrm{sgn}(x-\frac{a+b}{2})$,可看出不等式是最佳的,由此导出**梯形不等式**:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-A(f)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{p+1}\right)^{1/p}\left\{\int_a^b\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|^q\mathrm{d}x\right\}^{1/q}.$$

$1<p,q<\infty,1/p+1/q=1$. 令 $p\to 1$ 得

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-A(f)\right|\leqslant\frac{b-a}{2}\sup_{x\in(a,b)}\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,$$

令 $p\to\infty$,得

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-A(f)\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\mathrm{d}x.$$

(Dragomir—Mcandrew,[330]2000,31:193 - 201,和 2002,33(3):241 - 244)

设 $M=\sup\{f'(x):x\in[a,b]\}<\infty,m=\inf\{f'(x):x\in[a,b]\}>-\infty$, $m<M$, 则

$$\left|A(f)-\frac{f(b)+f(a)}{2}\right|\leqslant\frac{[f(b)-f(a)-m(b-a)][M(b-a)-f(b)+f(a)]}{2(M-m)(b-a)}$$

$$\leqslant\frac{(M-m)(b-a)}{8};$$

特别若 $\|f'\|_\infty=\sup\{|f'(x)|:x\in[a,b]\}<\infty$,则

$$\left|A(f)-\frac{f(b)+f(a)}{2}\right|\leqslant\frac{(b-a)}{4}\|f'\|_\infty$$

(Agarwal, R. P. 等. Computers Math. Applic. 1996,32(6):95 - 99)

设 $-\infty<m\leqslant f(x)\leqslant M<\infty,x\in[a,b]$,则

$$0\leqslant\frac{1}{b-a}\|f\|_2^2-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^2\leqslant\frac{1}{4}(M-m)^2;$$

见[22]P296.

Lupas 不等式:$0\leqslant\frac{1}{b-a}\|f\|_2^2-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^2\leqslant\frac{b-a}{\pi^2}\|f'\|_2^2.$

见[22]P301.

1998 年,Dragomir. S,S,等证明:设 f 在$[a,b]$上 RS 可积,$m\leqslant f(x)\leqslant M$, $|g(x)-g(y)|\leqslant C|x-y|,x,y\in[a,b]$,则

$$\left|\int_a^b f\mathrm{d}g-\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{C}{2}(M-m)(b-a);$$

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q| dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q (f(x)-f_Q)^2 dx$$
$$\leqslant (M-f_Q)(f_Q-m) \leqslant \frac{(M-m)^2}{4}.$$

式中 $Q=[a,b]$, $\mu(Q)=b-a, f_Q=\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f$. 见[330]1998,29(4):287 - 292.

2000 年,Dragomir,S.S.证明:设 f,g 满足 Hölder 型连续:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M_1|x-y|^{\alpha},\ |g(x)-g(y)| \leqslant M_2|x-y|^{\beta},$$

$0<\alpha,\beta\leqslant 1$,则

$$|A(fg)-A(f)A(g)| \leqslant \frac{M_1M_2(b-a)^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}.$$

见[330]2000,31(1):43 - 47.

下面设$(X,\sum,\mu)$为测度空间,$E\subset X,\mu(E)=1$.

(2) 若 $f\in L(E)$,则

$$\int_E \left|f-\int_E f\right| \leqslant \|f\|_2;$$

(3) 设 $f,g\in L^2(E)$,则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2.$$

(4) 设 $f,g\in L^{\infty}(E)$,且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$ a.e. $x\in E$.则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right| \leqslant \frac{1}{4}(M_2-m_2)(M_1-m_1).$$

若$\int_E f=0$,则$\int_E |f| \leqslant \frac{1}{2}(M_1-m_1)$.

推广到加权情形:设 ω 是E 上非负权函数,记 $\omega(E)=\int_E \omega(x)d\mu$,则

$$\left|\left(\int_E fg\omega\right)\omega(E)-\left(\int_E f\omega\right)\left(\int_E g\omega\right)\right| \leqslant \frac{1}{4}(M_2-m_2)(M_1-m_1)(\omega(E))^2$$

$E=[a,b]$时见楼宇同[353]1991,4:24 - 28.

(5) 设 $E_{n,p}(f)=\inf\limits_{\{P_n\}}\{\|f-P_n\|_p\}$,式中 $P_n(x)$ 为 n 次代数多项式,若 $f,g\in L^2(E)$,则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right| \leqslant E_{0,2}(f)E_{0,2}(g);$$

若 $f,g\in L^{\infty}(E)$,则

$$\left|\int_E fg-\left(\int_E f\right)\left(\int_E g\right)\right| \leqslant E_{0,\infty}(f)E_{0,\infty}(g).$$

若 $\int_E f=0$,则 $\int_E |f| \leqslant E_{0,\infty}(f)$.

(见 Li Xin 等,[301]2002,267(2):434 - 443.) Pachpatte 还得出二重积分的 Grüss 型不等式,见[301]2002,267(2):454 - 459.

(6) 设 $\alpha(t)$ 在$[a,b]$上递增,若 f,g 在$[a,b]$上同时递增或递减,则

$$\left(\int_a^b f\mathrm{d}\alpha\right)\left(\int_a^b g\mathrm{d}\alpha\right)\leqslant[\alpha(b)-\alpha(a)]\int_a^b fg\mathrm{d}\alpha.$$

若 f 递增而 g 递减,则不等号反向.

7. **Heisenberg 不等式:** 设 $f,f',xf\in L^2(R^1)$, $\|f\|_2=\left(\int_{R^1}|f|^2\right)^{1/2}$. $\hat{f}(w)=\int_{R^1}f(t)e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t$ 为 f 的 Fourier 变换．则

(1) $\|f\|_2^2\leqslant 2\|xf\|_2\|f'\|_2$; (7.1)

(2) $\forall t_0,\omega_0\in R^1$,成立

$$\left(\int_{R^1}(t-t_0)^2|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{R^1}(\omega-\omega_0)^2|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}\geqslant\left(\frac{\|f\|_2^2}{4\pi}\right). \tag{7.2}$$

注　设 $f\in L^2(R^1)$ 且 $tf(t)\in L^2(R^1)$,称 f 为窗函数.

$t_0=\dfrac{1}{\|f\|_2^2}\int_{R^1}t|f(t)|^2\mathrm{d}t$ 称为窗函数 f 的中心.

$\sigma_f=\dfrac{1}{\|f\|_2}\left\{\int_{R^1}(t-t_0)^2|f(t)|^2\mathrm{d}t\right\}^{1/2}$ 称为窗函数 f 的半径. $2\sigma_f$ 称为 f 的宽度,于是(7.2)式可写成

$$\sigma_f\cdot\sigma_{\hat{f}}\geqslant\frac{1}{4\pi}, \tag{7.3}$$

仅当 f 为 Gauss 函数 g_α 时等号成立,其中,

$$g_\alpha(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4\alpha}\right\},\alpha>0.$$

(7.3)式在量子力学中称为**测不准原理**,在信号分析中,时间 t 与频率 ω 的最高分辨率受到 Heisenberg 测不准原理的制约．在小波分析中,为了得到小波正交基,需要对时域 t 与频域 ω 双重局部化,一般先对频域 ω 作局部化,再对时域 t 作局部化,为使第二次局部化不致破坏第一次局部化,就应当遵循上述测不准原理,而多尺度分析恰好就能满足这些要求.(7.2)式可写成为:

$$\left(\int_{R^1}(t-t_0)^2|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{R^1}(\omega-\omega_0)^2|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}\geqslant\frac{\|f\|_2\|\hat{f}\|_2}{4\pi},$$

式中 $t_0=\int_{R^1}t|f(t)|^2\mathrm{d}t,\omega_0=\int\omega|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$

见[311]1975,102(1):159－182.另见[366]2001,33(1):52－58.

(3) 若将(7.1)中积分限改为$(0,\infty)$,就得到 **Weyl 不等式:**

$$\int_0^\infty f^2\leqslant 2\left(\int_0^\infty x^2f^2\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty(f')^2\right)^{1/2}. \tag{7.4}$$

仅当 $f(x)=c\exp(-\alpha x^2)$ 时等号成立.

更一般地,设 $\alpha>1,\beta>-1$, f 为正的可积函数.

$p=\dfrac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-1},q=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-1},\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha'}=1$,则

$$\int_0^\infty (x^\beta f^\alpha) \leqslant \frac{\alpha}{\beta+1}\left\{\int_0^\infty x^p f^\alpha\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\left\{\int_0^\infty |f'|^\alpha\right\}^{1/\alpha}. \tag{7.5}$$

仅当 $f(x) = c_1\exp\{-c_2x^q\}$ 时等号成立,式中 $c_1 \geqslant 0, c_2 > 0$. 见[1]P.184,定理 226.

(4)　1998 年,高明哲通过 Cauchy-Schwarz 不等式的改进,将(7.1)式改进为

$$\|f\|_2^4 \leqslant 4\|xf\|_2^2\|f'\|_2^2 - a^2, \tag{7.6}$$

式中 $a = 2(x_0\|xf\|_2 - y_0\|f'\|_2) > 0$,

$$x_0 = \int_{R^1}\frac{|tf(t)|}{\sqrt{\pi(1+t^2)}}\mathrm{d}t,\quad y_0 = \int_{R^1}\frac{|f'(t)|}{\sqrt{\pi(1+t^2)}}\mathrm{d}t,$$

(7.6)式中仅当 $f(t) = c_1\exp\{-c_2t^2\}(c_2 > 0)$ 时等号成立,而将 Weyl 不等式(7.4)式改进为

$$\|f\|_2^4 \leqslant 4\|tf\|_2^2\|f'\|_2^2 - 4(x_0\|tf\|_2 - y_0\|f'\|_2)^2. \tag{7.7}$$

式中

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/2}, x_0 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}\int_0^\infty f'(t)e^{-(\frac{1}{2})t^2}\mathrm{d}t, y_0 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}f(0) + x_0, \tag{7.8}$$

$f(0) = \lim\limits_{t\to 0}f(t)$ 存在.

由(7.7)式还可导出一个新的不等式:设 $tf', f'' \in L^2(0,\infty)$, $f'(t)f''(t) \leqslant 0$,则

$$\|f'\|_2^4 \leqslant 4\left(\int_0^\infty [f(t) - f(0)]^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^\infty (f'')^2\right) - a^2. \tag{7.9}$$

式中 $a = 2(x_0\|tf'\|_2 - y_0\|f''\|_2)$,

$$x_0 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}\int_0^\infty f''(t)\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\mathrm{d}t, y_0 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}f'(0) + x_0.$$

(5)　设 $f \in AC(R^1)$,且 $\int_{R^1}(x|f|)^2 < \infty$, $\int_{R^1}|f'|^2 < \infty$,则 $\forall x \geqslant 0$ 成立

$$x|f(x)|^2 \leqslant 4\left(\int_x^\infty (t|f(t)|)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_x^\infty |f'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{7.10}$$

证　令 $\alpha = (\int_x^\infty (t|f(t)|)^2\mathrm{d}t)^{1/2}$, $\beta = (\int_x^\infty |f'(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}$, $\forall x \geqslant 0, t \geqslant 0$,由 Cauchy 不等式,有

$$|f(x+t) - f(x)| = \left|\int_x^{x+t} f'(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant \beta\sqrt{t}.$$

取 $0 \leqslant h \leqslant (1/\beta|f(x)|)^2, 0 \leqslant t \leqslant h$,则 $|f(x+t)| \geqslant |f(x)| - \beta\sqrt{h} \geqslant 0$.

从而 $\alpha \geqslant x\sqrt{h}(|f(x)| - \beta\sqrt{h})$,取 $h = \left(\frac{1}{2\beta}|f(x)|\right)^2$,即得 $x|f(x)|^2 \leqslant 4\alpha\beta$,见[73]P.297 - 298.

(6)　**Hardy-Littlewood 型不等式:**

$$\int_{R^1}\{|f'(x)|^2 + (x^2 - t)|f(x)|^2\}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant C(t)\left\{\int_{R_1}|f''(x) - (x^2 - t)f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\|f\|_2,$$

式中 $\|f\|_2=\left(\int_{R^1}|f|^2\right)^{1/2}$.(Evans 等.[396]1986,46:118 - 147)

(7)　设 ω 为 $[a,b]$ 上正的权函数,则

$$\int_a^b[p(f')^2+qf^2]\leqslant C\left(\int_a^b\omega^{-1}[(pf')'-qf]^2\right)^{1/2}\|f\|_{2,\omega},$$

式中 p,q 为实值函数,$\|f\|_{2,\omega}=\left(\int_a^b|f|^2\omega\right)^{1/2}$.(Everitt,W.N.[307]582 - 26006)

(8)　设 $-\infty\leqslant a<\infty$,$\omega$ 是 (a,∞) 上正的递增函数,则

$$\|f'\|_{2,\omega}\leqslant 2\|f\|_{2,\omega}\|f''\|_{2,\omega},$$

式中 $\|f\|_{2,\omega}=\left(\int_0^\infty|f|^2\omega\right)^{1/2}$.([54]5:29 - 63)

(9)　设 $f\in L^p(R^1)$,$f''\in L^q(R^1)$,$f\neq 0$,　$1<p<\infty$,$1/p+1/q=1$,则

$$\|f'\|_2\leqslant\|f\|_p\|f''\|_q.$$

8.　**Ostrowski 不等式**(1938 年):设 f 在 (a,b) 上可微,且 $\|f'\|_\infty=\sup\{|f'(x)|:x\in(a,b)\}<\infty$.则 $\forall x\in(a,b)$,成立

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right](b-a)\|f'\|_\infty.\tag{8.1}$$

(见 Commt,Math.Helv.1938,10:226 - 227).

(8.1) 式已有许多改进和推广:

(1)　设 $f'\in L[a,b]$,记 $\|f'\|_1=\int_a^b|f'|\mathrm{d}x$,则

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{(b-a)}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\|f'\|_1,\forall x\in[a,b],\tag{8.2}$$

(Dragomir,S.S.,[330]1997,28(3):239 - 244)

1995 年,Anastassiou,G.A.证明:设 $f^{(n+1)}\in C[a,b]$,$\exists y\in[a,b]$,使得 $f^{(k)}(y)=0$,$k=1,2,\cdots,n$,则

$$\left|f(y)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{(y-a)^{n+2}+(b-y)^{n+2}}{b-a}\right)\|f^{(n+1)}\|_\infty;$$

若 $f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$,$1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

见[308]1995,123(12):3775 - 3781.

(2)　将(8.1)式推广到多元函数;设 f 在 $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上可微.

$$\|f'_{x_k}\|_\infty=\sup\{|f'_{x_k}(x)|:x=(x_1,\cdots,x_n)\in Q\}<\infty,$$

$\omega(x)$ 是 Q 上正的可积函数,$\omega(Q)=\int_Q\omega(t)\mathrm{d}t$.则 $\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in Q$,成立

$$\left|f(x)-\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q f(y)\omega(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{\omega(Q)}\sum_{k=1}^n\|f'_{x_k}\|_\infty\int_Q|x_k-y_k|\omega(y)\mathrm{d}y.\tag{8.3}$$

式中 $y=(y_1,\cdots,y_n)$.(Milovanovic,G.V.[331]1975.(498 - 541):119 - 124.).

(3)　设 $\|f^{(n)}\|_\infty = \sup\{|f^{(n)}(x)|: x\in[a,b]\} < \infty$,

$F_k(x) = \dfrac{(n-k)}{k!(b-a)}[f^{(k-1)}(a)(x-a)^k - f^{(k-1)}(b)(x-b)^k]$. 则

$$\left|\frac{1}{n}\left(f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}F_k(x)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right| \leqslant \frac{(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}}{n(n+1)!(b-a)}\|f^{(n)}\|_\infty, \tag{8.4}$$

$x\in[a,b]$.　([331]1976,544 - 576:155 - 158,或[21]P469 - 470)

特别,当 $n=2$ 时,得到

$$\left|\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}(b-a)^2\left[\frac{1}{12}+\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right]\|f''\|_\infty, \forall x\in[a,b]. \tag{8.5}$$

1999 年,Cerone,P. 等利用下述引理对(8.4)式作了进一步改进:

引理　设 $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$,则

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x) + (-1)^n\int_a^b K_n(x,t)f^{(n)}(t)\mathrm{d}t,$$

式中 $$K_n(x,t) = \begin{cases}\dfrac{1}{n!}(t-a)^n, t\in[a,x],\\ \dfrac{1}{n!}(t-b)^n, t\in[x,b]\end{cases} \qquad x\in[a,b].$$

设 $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$, $f^{(n)}\in L^\infty[a,b]$,则 $\forall x\in[a,b]$,

$$\left|\int_a^b f - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}] \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n)}\|_\infty.$$

见 Demonstratio Math. 1999,32(4):697 - 712. Fink,A.M. 对(8.4)式的推广见[21]P.470 - 471. 2001 年,Hanna,G. 等将上述不等式推广到二元函数的积分,见[330]2002,33(4):319 - 333.

(4)　2000 年 Dedic,Lj 等利用著名的 Euler 公式:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-a)^{k-1}}{k!}B_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)]$$

$$-\frac{(b-a)^{n-1}}{n!}\int_a^b f^{(n)}(t)\left[B_n^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right)-B_n^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]\mathrm{d}t, x\in[a,b].$$

式中 $f^{(n)}$ 连续, $B_k(\cdot)$ 为 k 阶 Bernoulli 多项式. $B_k = B_k(0) = B_k(1)$ 为 Bernoulli 数, $B_k^*(\cdot)$ 是 Bernoulli 多项式的一种周期性扩充,当 $f:[a,b]\to R$ 是 $(2r+2)$ 阶凸函数时,成立

$$\frac{(b-a)^{2r}|B_{2r}|}{(2r)!}f^{(2r)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leqslant(-1)^r\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{(b-a)^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]\right\}$$

$$\leqslant (b-a)^{2r}\frac{|B_{2r}|}{(2r)!}\frac{1}{2}[f^{(2r)}(b)+f^{(2r)}(a)]. \tag{8.6}$$

当 f 为 $(2r+2)$ 阶凹函数时,(8.6) 式中不等号反向,见[303]2000,3(2):211－221.

(5)　设多项式 $\{P_n\}$ 满足:$P'_n=P_{n-1},n\geqslant 1,P_0=1,f^{(n-1)}\in \mathrm{Lip}_M 1$. 令

$$G_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k P_k(x)f^{(k)}(x);$$

$$F_k(x)=\frac{(-1)^k(n-k)}{b-a}[P_k(a)f^{(k-1)}(a)-P_k(b)f^{(k-1)}(b)],$$

$$H_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}F_k(x);K(t,x)=\begin{cases}t-a,a\leqslant t\leqslant x\\ t-b,x<t\leqslant b,\end{cases}\quad 则$$

$$\left|\frac{1}{n}[f(x)+G_{n-1}(x)+H_{n-1}(x)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n(b-a)}\int_a^b|P_{n-1}(t)K(t,x)|\,\mathrm{d}t. \tag{8.7}$$

特别当 $P_k(t)=\dfrac{(t-x)^k}{k!},k\geqslant 0,n=1$ 时,(8,7) 式就是原来的 Ostrowski 不等式.

(Dedic,Li.,等[303],2000,3(1):1－14)

(6)　设 $f\in BV[a,b],g:[a,b]\to R^1$ 满足:

$|g(x)-g(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha,x,y\in[a,b],0<\alpha\leqslant 1,M>0$,则

$$|f(x)[g(b)-g(a)]-\int_a^b f(t)dg(t)|\leqslant M[(x-a)^\alpha V_a^x(f)+(b-x)^\alpha V_x^b(f)],$$

$x\in[a,b]$;

$$\left|f(a)[g(b)-g(a)]-\int_a^b f(t)dg(t)\right|\leqslant M(b-a)^\alpha V_a^b(f). \tag{8.8}$$

(Dragomir,S.S.,Korean J. Comput. Appl. Math. 2000,7(3):611－627)

(7)　设 $f''\in L(a.b]$,则

$$\left|f(x)-(x-\frac{a+b}{2})f'(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2(b-a)}\left[\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+\frac{1}{2}(b-a)\right]^2\|f''\|_1$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(b-a)\|f''\|_1.\ \forall x\in[a,b]. \tag{8.9}$$

(Cerone,P.等. Honam Math. J. 1999,21(1):127－137).

(8)　设 $m\leqslant f'(x)\leqslant M,x\in[a,b]$,则

$$\left|f(x)-\left(\frac{x-(a+b)/2}{b-a}\right)[f(a)-f(b)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|\leqslant \frac{1}{4}(b-a)(M-m). \tag{8.10}$$

(Dragomir,S.S.等,[394]1997,33(11):15－20).

(9)　设 $m\leqslant f''(x)\leqslant M.x\in[a,b]$,则

$$\left|f(x)-(x-\frac{a+b}{2})f'(x)+\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\right.$$

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\bigg|\leqslant\frac{1}{8}(M-m)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2. \tag{8.11}$$

(Cerone,P.,[395]1999,39(2):333 - 341).

(10)　设 $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ 为$[a,b]$的分划,$\alpha_0=a,\alpha_k\in[x_{k-1},x_k],k=1,2,\cdots,n.\alpha_{n+1}=b$,若 $f\in BV[a,b]$,则

$$\left|\int_a^b f-\sum_{k=1}^{n+1}(\alpha_k-\alpha_{k-1})f(x_{k-1})\right|\leqslant\|T\|\,V_a^b(f). \tag{8.12}$$

式中 $\|T\|=\max\{x_k-x_{k-1}:k=1,\cdots,n\}$. $V_a^b(f)$ 是 f 在$[a,b]$上的全变差.

(Dragomir,S.S.,[359]1999,60(3):495 - 508) 此外还可见[303]2000,3(3):337 - 353;[330]1997,28(3):239 - 244,1999,30(3):203 - 211.

下述(11) ~ (15) 也称为 Ostrowski 型不等式.

(11)　设 g 在$[a,b]$上递减,$g(a)g(b)\geqslant 0,f\in L[a,b]$,则

$$\left|\int_a^b fg\right|\leqslant|g(a)|\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|. \tag{8.13}$$

更一般地,设 $f\in L[a,b],g$ 在$[a,b]$上单调可积,则

$$\left|\int_a^b fg\right|\leqslant|g(a)|\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|+|g(b)|\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right|. \tag{8.14}$$

([4]P.414)

(12)　设 g 在$[a,b]$上单调可积,则

$$\left|\int_a^b g(x)\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2(|g(a)-g(b)|+|g(b)|).([4]P.413) \tag{8.15}$$

(13)　设 $0<a<b,f(x)\geqslant 0,(xf(x))'\geqslant 0$,则

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(\ln x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2bf(b).\qquad([4]P.412)$$

(14)　设 $f\in L^2[a,b]$,则

$$\left|\left[f(x)-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right]^2-\frac{1}{4}[f(b)-f(a)]^2\right|$$
$$\leqslant\left\{\int_a^b\left[f(x)-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right]^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\|f'\|_2,\forall x\in[a,b].$$

([4]P.411)

(15)　设 $f\in AC[0,1]$ 则

$$\int_0^1\int_0^1\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|^\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant(\ln 4)\int_0^1|f'|^\lambda,\lambda\geqslant 1.(见[21]P.533.) \tag{8.16}$$

2000 年 Fink,A.M.将(8.16)式推广到 n 阶差分的 n 重积分,见[303]2000,3(3):327 - 336.

9. **Iyengar 不等式**:设在区间$[a,b]$上,f 的导数f' 的绝对值有界:$|f'(x)|\leqslant M$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]\right|\leqslant\frac{1}{4}M(b-a)\left[1-\left(\frac{f(b)-f(a)}{M(b-a)}\right)^2\right]. \tag{9.1}$$

提示:利用微分中值定理,此外,1938 年,Mahajani,G.S.用几何方法也证明了这个不等式,见 Math. Student. 1938,6:75 - 76,125 - 128.

(9.1) 式有许多改进和推广:

(1)　设 $\|f'\|_\infty=\sup\{|f'(x)|:x\in(a,b)\}<\infty$，权函数 $\omega\in L[a,b]$，$\exists c>0,\lambda\geqslant 1$，使得 $0<c\leqslant\omega(x)\leqslant\lambda c.x\in[a,b]$. 令 $q=\dfrac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)\|f'\|_\infty}$，则

$$\left|\frac{1}{\int_a^b\omega(x)\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]\right|$$
$$\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot\frac{(\lambda+q)(1-q^2)+2(\lambda-1)q}{2\lambda(1+q)-(\lambda-1)(1+q^2)}.\tag{9.2}$$

(见[331]1976,544－576:18－24).

(2)　设 $f\in\mathrm{Lip}1$. 即 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|,x,y\in[a,b]$，则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-f(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}(b-a).$$

(3)　设 $\Delta(f)=\left|\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f-\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]\right|$.

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in[a,b]\},\ \|f\|_p=\left(\int_a^b|f|^p\right)^{1/p}.$$

①　若 $\|f^{(n)}\|_\infty<\infty,f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,k=1,\cdots,n-1$. 则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{(b-a)^n}{(n+1)!}\left\{x_0^n-\frac{q}{2}[1+n(2x_0-1)]\right\},\tag{9.3}$$

式中 $q=\dfrac{n!}{(b-a)^n}[f(b)-f(a)]\dfrac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty}$. x_0 是方程 $x^n-(1-x)^n=q$ 的实根.

②　若 $f'\in\mathrm{Lip}_M1$. 即 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|,x,y\in[a,b]$，$f'(a)=f'(b)=0$，则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2\left[\frac{1}{12}-\left(\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2M}\right)^2\right].\tag{9.4}$$

(9.3),(9.4) 式及更一般的结果见[331]1976,544－576:166－170.

③　**Hadamard 型不等式**：若 $f\in\mathrm{Lip}_M1$，则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{M(b-a)}{3};\qquad\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\frac{M}{4}(b-a).$$

(Dragomir,S.S.等[301]2000,245(2):489－501)

④　**梯形不等式**：设 f 在 $[a,b]$ 上递增，则

$$\Delta(f)\leqslant 1/2[f(b)-f(a)].\tag{9.5}$$

式中 1/2 是最佳常数. 2000 年 Cerone,P. 等推广了梯形不等式：设 $f\in BV[a,b]$，则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f-\frac{f(a)(x-a)+f(b)(b-x)}{b-a}\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{|x-(a+b)/2|}{b-a}\right)V_a^b(f).$$

见 Turkish J. Math. 2000,24(2):147－163，此外，另见 Wang Song, Math. Comput Modelling 2000,31(6－7):61－70.

⑤　设 $f^{(n)}\in L^p[a,b],f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,k=1,2,\cdots,n-1,1\leqslant p\leqslant\infty$，$1/p+1/q=1$，则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{R(n,p)}{n!}\|f^{(n)}\|_p.\tag{9.6}$$

式中 $R(n,p)=\min\limits_{P_{n-2}}\left\{\dfrac{\|(b-t)^n-(a-t)^n-P_{n-2}(t)\|_q}{2(b-a)}\right\}$.

特别 $R(1,p)=\dfrac{(b-a)^{1/q}}{2(1+q)^{1/q}}$，$R(1,1)=\dfrac{1}{2}$，$R(2,p)\leqslant\dfrac{(b-a)^{1+1/q}}{2(2q+1)^{1/q}}$，$R(2,1)=\dfrac{b-a}{2}$，…，(Fink. A. M. [21]P473).

⑥ 若 $f''\in L^\infty[a,b]$，则 $\Delta(f)\leqslant\dfrac{1}{12}(b-a)^2\|f''\|_\infty$；

若 $f''\in L^p[a,b]$，$p>1$，$1/p+1/q=1$. 则

$$\Delta(f)\leqslant\frac{1}{2}[B(q+1,q+1)]^{1/q}(b-a)^{1+\frac{1}{q}}\|f''\|_p;$$

若 $f''\in L^1[a,b]$，则 $\Delta(f)\leqslant(1/8)(b-a)\|f''\|_1$.

式中 $B(r,s)$ 为 Beta 函数，见 Dragomir. S. S. 等[388]2000，31:475 - 494.

(4) 记 $G(f)=\left|\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f-\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]+\dfrac{(b-a)}{12}[f'(b)-f'(a)]\right|$.

$M=\sup\{f''(x):x\in[a,b]\}<\infty$；$m=\inf\{f''(x):x\in[a,b]\}>-\infty$；

$\Delta(f')=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in[a,b]\}$.

$\|f\|_p=\left(\displaystyle\int_a^b|f|^p\right)^{1/p}$. 则

① $G(f)\leqslant\dfrac{1}{24\sqrt{5}}(M-m)(b-a)^2$；

② 若 $f''\in L^\infty[a,b]$，则 $G(f)\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{12}\|f''-\Delta(f')\|_\infty$；

③ 若 $f''\in L^\infty[a,b]$，$1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，则

$G(f)\leqslant(1/2)[B(q+1,q+1)]^{1/q}(b-a)^{1+1/q}\|f''-\Delta(f')\|_p$；

④ 若 $f''\in L^\infty[a,b]$，则

$G(f)\leqslant(1/8)(b-a)\|f''-\Delta(f')\|_1$.

证明、推广及其应用见 Barnett, N. S. 等[330]2002，33(2):119 - 128.

(5) **祁锋不等式**：设 $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 为 n 维方体. $\alpha=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$ 为 n 重指数，即 α_k 为非负整数，$\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k=|\alpha|$. $D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\alpha x_n^{\alpha_n}}$. 记 $C(\alpha)=\prod\limits_{k=1}^n\dfrac{(b_k-a_k)^{\alpha_k+1}}{(\alpha_k+1)!}$.

$$(Tf)(x)=\prod_{k=1}^n\left[\frac{(b_k-a_k)^{\alpha_k+1}}{(\alpha_k+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\alpha_k}\right]f(x).$$

$$S_m=\sum_{k=0}^m\sum_{|\alpha|=k}(Tf)(a)t^{n+k}-\sum_{k=0}^m(-1)^k\sum_{|\alpha|=k}(Tf)(b)g(t).$$

式中 $g(t)=\prod\limits_{k=1}^n\{1-(1-t)^{\alpha_k+1}\}-1$，$t\in[0,1]$.

若 $f\in C^{m+1}(Q)$，$C_1(\alpha)\leqslant(D^\alpha f)(x)\leqslant C_2(\alpha)$，$x\in Q$.

$|\alpha|=m+1$，$C_1(\alpha)$，$C_2(\alpha)$ 是与 m,α 有关的常数. 若 n 为偶数，则

$$\sum_{|\alpha|=m+1}C(\alpha)C_1(\alpha)t^{m+n+1}+\sum_{|\alpha|=m+1}C(\alpha)C_2(\alpha)g(t)\leqslant\int_Q f-S_m$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|=m+1}C(\alpha)C_2(\alpha)t^{m+n+1}+\sum_{|\alpha|=m+1}C(\alpha)C_1(\alpha)g(t).$$

若 n 为奇数，则

$$\sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_1(\alpha)[t^{m+n+1}+g(t)] \leqslant \int_Q f - S_m \leqslant \sum_{|\alpha|=m+1} C(\alpha)C_2(\alpha)[t^{m+n+1}+g(t)].$$

见[391]1999,84(1-2):19-26,作者还将上述结果推广到加权积分$\int_Q f\omega$的估计,见[301]2001,253:381-388.

10.　设在区间$[a,b]$上,$|f''(x)| \leqslant M$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{8}(1+Q^2)(b-a)[f'(b)-f'(a)]\right|$$
$$\leqslant \frac{M(b-a)^2}{24}(1-3Q^2).$$

式中　$Q^2 = \dfrac{[f'(a)+f'(b)+f(a)-f(b)]^2}{M^2(b-a)^2-[f'(b)-f'(a)]^2}$.([8]P.163-164.)

11.　**Atkinson 不等式**:设$f^{(3)} \in AC[a,b]$,则

$$-c_1 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{12}(b-a)[f'(b)-f'(a)] \leqslant c_2.$$

式中$c_1 = \dfrac{1}{384}(b-a)^3\displaystyle\int_a^b \max\{-f^{(4)}(x),0\}\mathrm{d}x$,$c_2 = \dfrac{1}{384}(b-a)^3\displaystyle\int_a^b \max\{f^{(4)}(x),0\}\mathrm{d}x$.

类似地,有

$$-c_2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{24}(b-a)[f'(b)-f'(a)] \leqslant c_1.$$

见[8]P93-96,该书还给出更一般的情形.

12.　**Mahajani 不等式**:(1)　设$f' \in C[a,b]$且$f(a)=0$,则

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2}\|f'\|_c.\ x \in [a,b];$$

(2)　设在区间$[a,b]$上,$|f'(x)| \leqslant M$,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$,则对于$a \leqslant x \leqslant b$,有

$$\left|\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{8}. \tag{12.1}$$

若加上条件$f(a)=f(b)=0$,则

$$\left|\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{12}. \tag{12.2}$$

见 Mat. Sudent, 1938,6:125-128.

(3)　设函数f在区间$[a,b]$上有$2n$阶连续导数,且$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,k=0,1,2,\cdots,n-1$,则

$$\left|\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\|f^{(2n)}\|_c. \tag{12.3}$$

提示:令$g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$,对于积分$\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x$,逐次作分部积分.

(4)　设双参数多项式$P_n^{(m,k)}$　$(0 \leqslant m \leqslant k < n)$定义为

$$P_n^{(m,k)}(x;a,b) = \frac{(-1)^{n-k}(n-m)!}{m!(k-m)!(n-k-1)!}\sum_{j=0}^{k-m}\frac{(b-a)^{m-n+j}}{n-m-j}\binom{k-m}{j}(x-a)^m$$

$\times(x-b)^{n-m-j}$,若$|f^{(n)}(x)| \leqslant M.(x \in [a,b])$,$\int_a^b f(x)dx = 0$,则

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - S_{n,k}(x)\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^k(b-x)^{n+1-k} \leqslant \frac{k^k(n-k+1)^{n-k+1}}{(n+1)^{n+1}(n+1)!}M(b-a)^{n+1}. \tag{12.4}$$

式中

$$S_{n,k}(x) = \sum_{m=1}^{k-1} P_n^{(m,k-1)}(x;a,b)f^{(m-1)}(a) + \sum_{m=1}^{n-k} P_n^{(m,n-k)}(x;b,a)f^{(m-1)}(b). \tag{12.5}$$

(12.5)式中当 $k=1$ 时,第一个和式为 0,$k=n$ 时,第二个和式为 0.

若加上条件 $f^{(j)}(a)=f^{(j)}(b)=0, j=0,1,\cdots,n-1$,则

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n(n+1)!}. \tag{12.6}$$

证明及其各种特例见[21]P474－477.

(5)　设 $f^{(n-1)}$ 绝对连续,$f^{(n)} \in L^p[a,b]. 1 \leqslant p \leqslant \infty, 1/p+1/q=1$, $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0, k=0,1,\cdots,n-1$.则

$$\left|\frac{1}{n}f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\right| \leqslant \frac{M(n,p,x)}{n!}\|f^{(n)}\|_p. \tag{12.7}$$

式中

$$M(n,p,x) = \min_{P_{n-1}}\left\{\frac{\|(x-t)^{n-1}K(t,x) - P_{n-1}(t)\|_q}{b-a}\right\},$$

$$K(t,x) = \begin{cases} t-a, a \leqslant t \leqslant x \leqslant b, \\ t-b, a \leqslant x < t \leqslant b. \end{cases}$$

(Fink, A.M., [21]. P477－480)

(6)　设 $f' \in L^p[a,b], 1 \leqslant p \leqslant \infty, \int_a^b f = 0$,则 $\forall x \in [a,b]$,成立

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^{1/p}} \frac{\|f'\|_p}{(1+q)^{1/q}}, 1 < p \leqslant \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;$$

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)}\|f'\|_1.$$ ([32]P.480－483)

(7)　设 $f' \in L[a,b]$,则

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f| + \int_a^b |f'|$$

特别当 $f(a)=0$ 时,$|f(x)| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t, x \in [a,b]$.

([317]1988,38:290)

(8)　[MCU],设 $f' \in L[0,1]$,则

$$\int_0^1 |f| \leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'|, \left|\int_0^1 f\right|\right\}; \quad \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \int_0^1 |f| + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'|.$$

([63]P26.[375]1985,1(1):46)

(9)　[MCU].设 $f' \in L[a,b]$,且 $f(a)=0$,则

① $\|f'\|_2 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{b-a}}\|f\|_\infty$;

② $\int_a^b f^2 \leqslant \frac{1}{2}\left\{(b-a)^2\int_a^b (f')^2 - \int_a^b (f')^2(x-a)^2 \mathrm{d}x\right\}$.

提示:用 Cauchy 不等式.

(10) [MCU].设 f 是 R^1 上正的连续函数, $\forall t \in R^1, F(t) = \int_{R^1} e^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$,则 $\forall a,b,a<b$,成立

$$\int_a^b f \leqslant \frac{1}{2}(b-a)+1.$$ 见[63]P.26,107.

(11) 设 $f \in C[0,\frac{a}{2}]$, $f(x)+f(a-x)>0$, 则 $\int_a^b f > 0$.

13. **Lyapunov 不等式**:设 p 是 $[a,b]$ 上实值连续函数,若微分方程

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{13.1}$$

有非平凡解 y,且 y 在 $[a,b]$ 的两点为零,1907 年,Lyapunov,A.M. 证明,p 必满足不等式:

$$(b-a)\int_a^b |p(x)|\mathrm{d}x > 4. \tag{13.2}$$

1967 年,Fink,A.M. 进一步证明当 $p(x)\geqslant 0$ 时,成立

$$\frac{9}{8}\lambda_0^2 \leqslant (b-a)\int_a^b p(x)\mathrm{d}x \leqslant \pi^2, \tag{13.3}$$

式中 $\frac{9}{8}\lambda_0^2 = 9.478132\cdots$ 与 π^2 都是最佳上下界.(13.2) 可写成以下形式:设二阶导数 f'' 在 $[0,1]$ 上连续.且 $f(0)=f(1)=0$,则

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x > 4. \tag{13.4}$$

其中 4 是最佳下界.

证 由题设,f 必在区间 $[0,1]$ 的内点 x_0 处取得最大值,令 $y_0 = f(x_0)$,则 $y_0>0$ 且

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x > \frac{1}{y_0}\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{y_0}\left|\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{|f'(1)-f'(0)|}{y_0}.$$

注意并不能由此直接得出 $|f'(1)-f'(0)|>4y_0$,但是,由微分中值定理,存在 ξ_1, ξ_2,使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} = \frac{y_0}{x_0} \quad (0<\xi_1<x_0);$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} = \frac{-y_0}{1-x_0} \quad (x_0<\xi_2<1).$$

于是,

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x > \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{y_0}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)\mathrm{d}x\right| = y_0^{-1}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|$$

$$= y_0^{-1}\left|\frac{-y_0}{1-x_0} - \frac{y_0}{x_0}\right| = \frac{1}{x_0(1-x_0)} > 4,$$

其中用到不等式:$x(1-x)\leqslant 1/4, (0<x<1)$.

注 这个不等式在常微分方程中有重要应用.

(1) 若(13.4) 中积分限由 $[0,1]$ 改为 $[a,b]$,则

$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| \mathrm{d}x > \frac{4}{b-a}.$$

(2) [MCU]. 设 $f' \in L[0,1]$ 且 $f(1)-f(0)=1$,则

$$\int_0^1 (f')^2 \geqslant 1;$$

(3) 若 $f' \in C[0,1]$ 且 $f(0)=0, f(1)=1$,则

$$\int_0^1 |f'-f| \geqslant \frac{1}{e}.$$

式中 $1/e$ 是最大下界.(提示:利用 $f'-f=(fe^{-x})'e^x$.)

(4) 若 $y(t)$ 是微分方程 $y''+g(t)y'+f(t)y=0, y(0)=y(h)=0$ 的非平凡解,则 Opial 证明:

$$\pi^2 \leqslant \pi \|g\|_\infty h + \|f\|_\infty h^2. \tag{13.5}$$

说明 Lyapunov 不等式的改进与推广与微分方程的解密切相关.[21] 专门用了一章(第 6 章)讨论这些问题,引用到 1990 年为止所发表的文献达 84 篇.

14. **Gronwall 不等式**:1919 年 Gronwall 在研究微分方程解关于参数可微时证明了以下不等式:

设 a, b 是非负常数,连续函数 u 在 $[t_0, t_1]$ 上满足不等式:

$$u(t) \leqslant a + b\int_{t_0}^t u(s)\mathrm{d}s. \tag{14.1}$$

则 $u(t) \leqslant a\ \exp\{b(t-t_0)\}, t \in [t_0, t_1].$ (14.2)

见[311]1919,20:292 - 296. 1934 年,Bellman 给出它的推广:

设 $u(t), b(t)$ 都是 $[t_0, t_1]$ 上非负连续函数,并满足

$$u(t) \leqslant a + \int_{t_0}^t b(s)u(s)ds. \tag{14.3}$$

则 $u(t) \leqslant a\ \exp\left\{\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{d}s\right\}, t \geqslant t_0,$ (14.4)

证 从(14.3)式,得

$$\frac{u(t)b(t)}{a+\int_{t_0}^t b(s)u(s)\mathrm{d}s} \leqslant b(t).$$

两边从 t_0 到 t 积分,得

$$\ln\left(a+\int_{t_0}^t b(s)u(s)\mathrm{d}s\right) - \ln a \leqslant \int_{t_0}^t b(t)\mathrm{d}t. \tag{14.5}$$

从(14.3)与(14.5)式即得 $u(t) \leqslant a + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\mathrm{d}s \leqslant a\ \exp\int_{t_0}^t b(t)\mathrm{d}t.$

上述不等式对于 Henstock 积分也成立. 见[301]1987,127:370 - 374.

这类不等式有时也称为 Bellman-Gronwall 不等式或 Gronwall-Bellman 不等式,由于这类不等式在常微分方程解的存在性、惟一性、稳定性的研究及方程解的估计中经常用到. 因此,对它的各种改进和推广,一直是不等式研究的热点之一.[21] 就用了三章的篇幅(第 12 ~ 14 章),从一元到多元,从 R^n 到各种抽象空间概述了直到 1990 年的部分研究成果,引用的文献达 393 篇,但收录的文献仍远非完整,1990 年以后又有大批新文献,下面仅

扼要叙述最基本而常用的若干结果.

(1)　2000 年,Pachpatte 证明:设 $u(t),a(t),b(t)$ 均为$[0,\infty)$ 上非负连续函数,而且 $a(t)$ 递减,若

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_t^{\infty}b(s)u(s)ds\quad(t\geqslant 0),\tag{14.6}$$

则

$$u(t)\leqslant a(t)\exp\left\{\int_t^{\infty}b(s)\mathrm{d}s\right\},t\geqslant 0.\tag{14.7}$$

证　不妨设 $a(t)>0$,令 $z(t)=1+\int_t^{\infty}b(s)\dfrac{u(s)}{a(s)}\mathrm{d}s$. 则从(14.6)式知$\dfrac{u(t)}{a(t)}\leqslant z(t)$, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=1$. 从而 $z'(t)=-b(t)\dfrac{u(t)}{a(t)}\geqslant -b(t)z(t)\Rightarrow z(t)\leqslant\exp\left\{\int_t^{\infty}b(s)\mathrm{d}s\right\}$,于是(14.7)式得证.

将它用于下述微分方程终值问题($P-P_{\infty}$ 问题)解的性质研究中:

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t))+p(t)\\ u(\infty)=u_{\infty}\end{cases}.\tag{14.8}$$

式中设 $f:R_+^1\times R^1\to R^1,p:R_+^1\to R^1$ 均连续,$u_{\infty}\in R^1$. $R_+^1=[0,\infty),a(t),b(t)$ 在 R_+^1 上非负连续,并满足:

$$\begin{cases}|f(t,u)|\leqslant b(t)|u(t)|,\\ \left|u_{\infty}-\int_t^{\infty}p(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant a(t).\end{cases}\tag{14.9}$$

若 $u(t)$ 是(14.8)式的解,则

$$|u(t)|\leqslant a(t)\exp\left\{\int_t^{\infty}b(s)\mathrm{d}s\right\}.\tag{14.10}$$

证　若 $u(t)$ 为(14.8)式的解,则 $u(t)$ 可写成(见[46]P80.)

$$u(t)=u_{\infty}-\int_t^{\infty}[f(s,u(s))+p(s)]\mathrm{d}s,t\geqslant 0.$$

从而 $|u(t)|\leqslant a(t)+\int_t^{\infty}b(s)|u(t)|\mathrm{d}s$. 于是由(14.7)式即可得证.

见[330]2002,3(3):199－208.

(2)　设 $u(t),b(t)$ 在(α,β) 上连续,$b(t)$ 非负.

若 $u(t)\leqslant u(t_0)+\int_{t_0}^{t}b(s)u(s)\mathrm{d}s,t_0,t\in(\alpha,\beta)$,

则 $\forall\, t\geqslant t_0$,成立:

$$u(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}b(s)u(s)\mathrm{d}s\right\}\leqslant u(t)\leqslant u(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}b(s)u(s)\mathrm{d}s\right\}.\tag{14.11}$$

(Bellman. R. [21]P. 355)

(3)　**Beesack 不等式**:设 $u(t),b(t)$ 在 $D=(\alpha,\beta)$ 上连续,$a(t),q(t)\in L[\alpha,\beta]$, $b(t),q(t)$ 非负,若

$$u(t)\leqslant a(t)+q(t)\int_{t_0}^{t}b(s)u(s)\mathrm{d}s,\quad t\in D.\tag{14.12}$$

则

$$u(t) \leqslant a(t) + q(t)\int_{t_0}^{t} a(s)b(s)\exp\left\{\int_s^t q(r)b(r)\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}s, \quad t \in D. \qquad (14.13)$$

若(14.12)式中不等号反向,则(14.13)式中不等号也反向.

若上述不等式中,将$\int_{t_0}^{t}$,$\int_s^t$ 分别换成$\int_t^{\beta}$,$\int_t^s$,结论仍成立.见[21]$P356-357$.

(4) 设 $u(t)$,$a(t)$ 在 $D=(\alpha,\beta)$ 上连续,$b(t,s)$ 在 $D\times D$ 上非负连续,若 $\forall\, t_0$, $t\in D$.

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_{t_0}^{t} b(t,s)u(s)\mathrm{d}s, \qquad (14.14)$$

则

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_{t_0}^{t} B(t,s)a(s)\mathrm{d}s, \qquad (14.15)$$

式中 $B(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t,s)$ 是 $b(t,s)$ 的预解核,而 $b_k(t,s)$ 是 $b(t,s)$ 的迭代核.

(Chu,S.等[308]1967,18:439-440)

(5) 1987 年 Zahrout,A.A,等证明了 **GBR 型积分不等式(Gronwall-Bellman-Reid 型积分不等式)**:设 f,g,u,v 在$D=[0,\infty)$上连续,若存在非负的常数 c,p $(0\leqslant p<1)$,使得 $u(t) \leqslant c + \int_0^t v(s)\left[u(s) + \int_0^s v(r)\left\{\int_0^r [f(t)u(t) + g(t)u^p(t)]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s, t\in D$,则

$$u(t) \leqslant c + \int_0^t v(s)\Bigg(c + \int_0^s v(r)\exp\Big(\int_0^r [v(t)+f(t)]\mathrm{d}t\Big)$$
$$\times \left\{c^{1-p} + (1-p)\int_0^r g(t)\exp\left[-(1-p)\int_0^t (v(y)+f(y))\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t\right\}^{1/(1-p)}\mathrm{d}r\Bigg)\mathrm{d}s.$$

见[395].1987,27(2):153-161.

(6) 设 $u(t)$,$g(t)$ 是$(0,\infty)$上非负的连续函数,$\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ 递增到 ∞,$t_n\geqslant 0$,若 $u(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} g(s)u(s)\mathrm{d}s + \sum_{t_0<t_k<t} \beta_k u(t_k)$,式中 $t\geqslant t_0$,c,β_k 为非负的常数,则 $\forall\, t\geqslant t_0$,有

$$u(t) \leqslant c\prod_{t_0<t_k<t}(1+\beta_k)\exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s\right).$$

见 MR90k:26030.

(7) 1989 年毛学荣证明:设 f,g,h_j $(1\leqslant j\leqslant 4)$ 当 $t\geqslant 0$ 时是非负的连续函数,h_j 有界,使得对于所有 $t\geqslant 0$,有

$$f(t) \leqslant c_1 + \int_0^t h_1(s)f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t h_2(s)g(s)\exp(\mu s)\mathrm{d}s,$$
$$g(t) \leqslant c_2 + \int_0^t h_3(s)f(s)\exp(-\mu s)\mathrm{d}s + \int_0^t h_4(s)g(s)\mathrm{d}s,$$

式中 c_1,c_2,μ 为非负常数,则存在常数 β_k,M_k,使得对于所有非负的 t,都有

$$f(t) \leqslant M_1\exp(\beta_1 t),\ g(t) \leqslant M_2\exp(\beta_2 t).$$

作者还给出了离散类似.见 Chin.J.Math.1989,17(1):295-305.

(8) **Bihari-Lasalle不等式(B-L不等式)**:设 $u(t)$,$v(t)$是在$D=[\alpha,\beta]$上正的连续

函数,a,b 为非负常数,$g(z)$ 在$[0,\infty)$ 上为正的递增函数,若 $\forall t_0,t\in D$,成立

$$u(t)\leqslant a+b\int_{t_0}^{t}v(s)g(u(s))\mathrm{d}s. \tag{14.16}$$

则

$$u(t)\leqslant G^{-1}\left(G(a)+b\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right), \tag{14.17}$$

式中　$G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}t}{g(t)},\qquad (u>u_0>0).$

与此相关的 Langenhop 不等式见[2]P.136.原文见[391]1956,7:81－94;[311]1949,50:722－730,或见[21]P363,将积分限$[t_0,t]$ 换成$[\varphi(t_0),\varphi(t)]$,见[301]2000,252:389－401.

(9)　Györi 推广了上述 B-L 不等式:设 $u(t),v(t)$ 在$[t_0,\infty)$ 上非负连续,$a(t)$,$b(t),g(u)$ 均为可微函数,且 $a(t)\geqslant 0,g>0$ 且递增,$b(t)\geqslant 0$ 且递减,若 $\forall t\geqslant t_0$,$u(t)\leqslant a(t)+b(t)\int_{t_0}^{t}v(s)g(u(s))\mathrm{d}s$,和所有非负连续函数 φ,成立

$$a'(t)\left\{\frac{1}{g(\varphi(t))}-1\right\}\leqslant 0,\qquad \text{则}$$

$$u(t)\leqslant G\left\{a(t_0)+\int_{t_0}^{t}[b(s)v(s)+a'(s)]\mathrm{d}s\right\}, \tag{14.18}$$

式中 $G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)}.\ u>u_0>0.$　(14.19)

(见[389]1971,6:137－145,或[21]P.364)

(10)　设 u,f,g 在R_+^1 上非负连续,$c_1,c_2\geqslant 0$,若 $\forall t\geqslant 0$,

$$u(t)\leqslant\left(c_1+\int_0^t f(s)u(s)\mathrm{d}s\right)\left(c_2+\int_0^t g(s)u(s)\mathrm{d}s\right).$$

且 $c_1c_2\int_0^t F(s)G(s)\mathrm{d}s<1$,则 $\forall t\geqslant 0$,成立

$$u(t)\leqslant\frac{c_1c_2G(t)}{1-c_1c_2\int_0^t F(s)G(s)\mathrm{d}s},$$

式中

$$F(t)=g(t)\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+f(t)\int_0^t g(s)\mathrm{d}s,\quad G(t)=\exp\left(\int_0^t[c_1g(s)+c_2f(s)]\mathrm{d}s\right).$$

(Pachpatte,B.G.,[301]1995,195(3):638－644)

(11)　设 $u(t),b(t)$ 在 $D=[\alpha,\beta]$ 上非负连续,$g(u)$ 是$(0,\infty)$ 上正的递增函数,若 $\forall t_0,t\in D,u(t)\leqslant u(t_0)+\int_t^{t_0}b(s)g(u(s))ds$,则

$$u(t)\geqslant G^{-1}\left\{G(u(\alpha))-\int_{\alpha}^{t}b(s)\mathrm{d}s\right\}, \tag{14.20}$$

式中 $G(u)==\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)},\quad u>u_0>0.$

(Langenhop,C.E.,[308]1960,11:795－799)

(12)　设 $u(t),a(t),b(t)$ 在 $R_+=(0,\infty)$ 上非负连续. $a(t)$ 递减, $L(t,u)$ 在 R_+^2 上连续且满足: $0\leqslant L(t,u)-L(t,v)\leqslant M(t,v)(u-v)$, $u\geqslant v\geqslant 0$. 式中 $M(t,v)$ 为 R_+^2 上非负连续函数, 若 $\forall t\geqslant 0$, 成立

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_t^{\infty}b(s)u(s)\mathrm{d}s+\int_t^{\infty}L(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

则

$$u(t)\leqslant B(t)\left(a(t)+A(t)\exp\left\{\int_t^{\infty}M[s,B(s)a(s)]B(s)\mathrm{d}s\right\}\right), \tag{14.21}$$

式中　$B(t)=\exp\left\{\int_t^{\infty}b(s)\mathrm{d}s\right\}, A(t)=\int_t^{\infty}L[s,B(s)a(s)]\mathrm{d}s, t\geqslant 0.$

(见 Pachpatte, [330]2002, 33(3): 200 – 201)

将 $\int_t^{\infty}$ 换成 $\int_{t_0}^{t}$, 类似的结果见[21]P. 368 – 391.

(13)　**Wendroff 不等式**: 设 $a(x),b(y)>0, a'(x),b'(y)\geqslant 0, u(x,y),v(x,y)\geqslant 0$, 若

$$u(x,y)\leqslant a(x)+b(y)+\int_0^x\int_0^y v(t,s)u(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\qquad 则$$

$$u(x,y)\leqslant\frac{[a(0)+b(y)][a(x)+b(0)]}{a(0)+b(0)}\exp\left\{\int_0^x\int_0^y v(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\}. \tag{14.22}$$

(见[2]P. 154 – 155 和[301]1993, 178: 438 – 449)

(14)　1971 年 Nurimóv, T. 推广了上述(14.22)式: 设 $u(x,y),v(x,y),a(x,y),b(x,y)$ 在 $D=[0,x_0]\times[0,y_0]$ 上非负连续, 若 $\forall(x,y)\in D$, $u(x,y)\leqslant(a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y v(t,s)u(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$, 则

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y\exp\left\{\int_t^x\int_s^y v(r,z)b(r,z)\mathrm{d}r\mathrm{d}z\right\}a(t,s)v(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \tag{14.23}$$

([21]P. 402 – 403)

(15)　若 $u(x,y)\leqslant c+a\int_0^x u(s,y)\mathrm{d}s+b\int_0^y u(x,s)\mathrm{d}s$, 则

$$u(x,y)\leqslant c\exp(ax+by+abxy);$$

(16)　设 $u(x,y)\leqslant a(x)+b(y)+c_1\int_0^x u(s,y)\mathrm{d}s+c_2\int_0^y u(x,s)\mathrm{d}s$, 则

$$u(x,y)\leqslant\frac{a(0)+b(0)+\int_0^y b'(t)\exp(-c_2t)\mathrm{d}t}{a(0)+b(0)}\times$$
$$\times\left[a(0)+b(0)+\int_0^x a'(t)\exp(-c_1t)\mathrm{d}t\right]\exp\{c_1x+c_2y+c_1c_2xy\}.$$

(17)　设 $u(t)$ 是 $D=[\alpha,\beta]$ 上非负连续函数. $a(t,s),b(t,s)$ 在 E 上非负连续, 且关于 t 递增, 其中 $E=\{(t,s)\in D\times D:\alpha\leqslant s\leqslant t\leqslant\beta\}$. 若

$$u(t)\leqslant c+\int_{\alpha}^{t}a(t,s)u(s)\mathrm{d}s+\int_{\alpha}^{\beta}b(t,s)u(s)\mathrm{d}s, t\in D, c>0,$$

且

$$p(t)=\int_a^\beta b(t,s)\exp(\int_a^s a(s,r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s<1,$$

则

$$u(t)\leqslant\frac{c}{1-p(t)}\exp\left(\int_a^t a(t,s)\mathrm{d}s\right).\ t\in D.$$

特别当 $a(t,s)=a(s),b(t,s)=b(s)$ 就得到 **Bainov-Simeonov 不等式**.

见[330]2002,33(4):353 - 358, 该文还得出离散类似并应用于非线性 Volterra-Fredholm 积分方程解的性质的研究.

(18) 设 u,a,b 在 R_+^2 上非负连续,$a(x,y)$ 分别关于 x,y 递减,若 $\forall(x,y)\in R_+^2$.

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)+\int_x^\infty\int_y^\infty b(s,t)u(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\quad 则$$

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)\exp\left\{\int_x^\infty\int_y^\infty b(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\}. \tag{14.24}$$

(19) 设 $u(t),a(t),b(t)$ 在 $R_+=(0,\infty)$ 上非负连续,L,M 满足(12)中的条件,若 $\forall t\geqslant 0.\ u(t)\leqslant a(t)+b(t)\int_t^\infty L[s,u(s)]\mathrm{d}s$, 则

$$u(t)\leqslant a(t)+b(t)\left\{\int_t^\infty L[s,a(s))]\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{\int_t^\infty M[s,a(s)]b(s)\mathrm{d}s\right\}. \tag{14.25}$$

(20) 设 $u(t),a(t),b(t)$ 在 R_+^1 上非负连续,$L:R_+^2\to R_+^1$ 连续并满足:

$$0\leqslant L(t,u)-L(t,v)\leqslant M(t,v)g^{-1}(u-v),u\geqslant v\geqslant 0.$$

$M(t,v)$ 在 R_+^2 上非负连续,g 在 R_+^1 上严格递增连续.且 $g(0)=0,g^{-1}$ 为 g 的反函数,且

$$g^{-1}(uv)\leqslant g^{-1}(u)g^{-1}(v),\quad u,v\geqslant 0.$$

若 $u(t)\leqslant a(t)+b(t)g\left(\int_t^\infty L[s,u(s)]\mathrm{d}s\right)$,则

$$u(t)\leqslant a(t)+b(t)g\left\{\left(\int_t^\infty L(s,a(s))\mathrm{d}s\right)\exp\left[\int_t^\infty M(s,a(s))g^{-1}(b(s))\mathrm{d}s\right]\right\}. \tag{14.26}$$

(21) 设 $u(x,y),a(x,y),b(x,y)$ 在 R_+^2 上非负连续. $a(x,y)$ 分别关于 x,y 递减,$L:R_+^3\to R_+^1$ 连续并满足

$$0\leqslant L(x,y,u)-L(x,y,v)\leqslant M(x,y,v)(u-v),\quad u\geqslant v\geqslant 0,$$

$M(x,y,v)$ 为 R_+^3 上连续函数,若 $\forall x,y\geqslant 0$,成立

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)+\int_x^\infty\int_y^\infty b(s,t)u(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s+\int_x^\infty\int_y^\infty L(s,t,u(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

则

$$u(x,y)\leqslant B(x,y)\left\{a(x,y)+F(x,y)\exp\left[\int_x^\infty\int_y^\infty M(s,t,B(s,t)a(s,t))B(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right]\right\}. \tag{14.27}$$

式中 $B(x,y)=\exp\left(\int_x^\infty\int_y^\infty b(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right)$, $F(x,y)=\int_x^\infty\int_y^\infty L[s,t,B(s,t)a(s,t)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.

(22) 设 $u(x,y),a(x,y),b(x,y)$ 在 R_+^2 上非负连续. L,M 满足(21)中的条件,若 $\forall x,y\geqslant 0,u(x,y)\leqslant a(x,y)+b(x,y)\int_x^\infty\int_y^\infty L[s,t,u(s,t)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$. 则

$$u(x,y)\leqslant a(x,y)+b(x,y)f(x,y)\exp\left\{\int_x^\infty\int_y^\infty M[s,t,a(s,t)]b(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right\}, \tag{14.28}$$

式中 $f(x,y)=\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}L(s,t,a(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$

(18) ~ (22) 以及更多的结果及其对终值问题的应用，见 Pachpatte,S.B. 等[330]2002.33(3):204 - 208.

(23) 1998 年 Oguntuase.J.A.证明:若 $u(t)\leqslant a(t)+\left(\int_a^t K(t,s)(u(s))^p\mathrm{d}s\right)^{1/p}$,则

$$u(t)\leqslant a(t)+\frac{\left\{\int_a^t v(s)[a(s)]^p b(s)\mathrm{d}s\right\}^{1/p}}{1-[a-v(t)]^{1/p}},$$

式中 $v(t)=\exp\left\{-\int_a^t K(t,s)\mathrm{d}s\right\},b(t)=K(t,t)+\int_a^t K(t,s)\mathrm{d}s,a\leqslant s\leqslant t\leqslant\leqslant b.$ $1\leqslant p\leqslant\infty$.见 Zb.Rad.(Kragujevac)1998,20:77 - 81.

王中烈等对B-G不等式的各种推广作了统一的探讨,见[337]1991,3:48 - 55,其他文献见胡适耕[347]1993,26(2):6 - 14;[339]1995.15(4):525 - 532;李文荣,[353],1985,1:65 - 69;Period.Math.Hunger 1991,23(1):93 - 96; [301]1986,120:631 - 646;Pachpatte,B.G. [388]1992,23(2):131 - 140;Hristova,S.G.J.Appl.Math.Stochastic Anal.1997,10(1):89 - 94;四川师大学报 1999,22(2):136 - 140;[347]2000,33(1):65 - 71;ANIJAM J。2000,42(2):267 - 276;Laszlo Horvath 在一般测度空间中讨论了B-G不等式的推广,见[301]1996,202:183 - 193.

15. **Gauss 不等式:**

(1) 设 $g:[a,b]\to R$ 是严格递增的凸函数.令 $t(x)=g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)$, $x_0\in[a,b]$. $\varphi(x)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)+g(a)$.

D 是包含 $a,b,g(a),g(b),\varphi(a),t(b)$ 的区间,若 $f:D\to R^1$ 是递减函数,则

$$\int_a^b f[\varphi(x)]g'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(t(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

([307]744 - 26012.)

(2) $g:[a,b]\to R^1$ 是非负递增可微函数,$f:[a,b]\to R^1$ 是非负函数且 f/g' 递增,

则 $F(p)=(p+1)\int_a^b[g(x)]^p f(x)\mathrm{d}x$ 为对数凹函数.

若 $g(a)=0,a\leqslant b\leqslant\infty$,且 f/g' 递减,则 $F(p)$ 是对数凸函数.

(Varosanec,S.等.Z.Anal.Anwend.1995,14(1):175 - 183.).

(3) 设 f 是 R^1 上正的偶函数,且在 $[0,\infty)$ 上递减,并满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1,\quad\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\sigma^2<\infty,$$

令 $E=\{x:|x|\geqslant\lambda\sigma\}$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\begin{cases}1/(2\lambda^2), & 若\ \lambda\geqslant\sqrt{3/2},\\ 1-(2\lambda/3)\sqrt{2/3}, & 若\ 0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3/2}.\end{cases}$$

证明见[73]P161 - 164.

16. **Steffensen 不等式(1918 年)**:设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积,f 递减,$0\leqslant g(x)\leqslant1$,则

$$\int_{b-c}^{b}f\leqslant\int_a^b fg\leqslant\int_a^{a+c}f,\tag{16.1}$$

式中　$c=\int_a^b g$.

证 1　$\int_a^{a+c} f-\int_a^b fg=\int_a^{a+c}[1-g]f-\int_{a+c}^b fg\geqslant$

$$\geqslant f(a+c)\int_a^{a+c}(1-g)-\int_{a+c}^b fg=\int_{a+c}^b g[f(a+c)-f(x)]\geqslant 0.$$

左边不等式可类似证明见[4]P.142－143.

证 2　Bellman 在 f 非负情形下给出了另一个证明：设 $u(s)$ 由下式定义：

$$\int_a^s fg=\int_a^{u(s)} f. \tag{16.2}$$

则 $u(s)$ 递增连续且 $u(a)=a$，将(16.2)式两边对 s 求导数，得 $f(s)g(s)=f(u)u'(s)$，从而

$$u'(s)=\frac{f(s)}{f(u)}g(s)\leqslant g(s),\Rightarrow u(s)\leqslant a+\int_a^s g.$$

由此即可证明(16.1)右边不等式，细节见[4]P.146－147.

证 3　胡克在[29]P74－75 给出了一个更为简洁的证明：

令　$F(x)=\int_a^{a+c(x)} f-\int_a^x fg$，式中 $c(x)=\int_a^x g$.

则 $F'(x)=f[a+c(x)]g(x)-f(x)g(x)=\left\{f\left[a+\int_a^x g\right]-f(x)\right\}g(x)\geqslant 0.$

Steffensen 不等式已有许多的改进和推广.

(1)　**Hayashi 不等式**：设 f 在$[a,b]$上递减. $g\in L[a,b]$ 且 $0\leqslant g(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，则

$$M\int_{b-c}^b f\leqslant\int_a^b fg\leqslant M\int_a^{a+c} f. \tag{16.3}$$

式中　$c=\frac{1}{M}\int_a^b g$.（见[22]P.311－312）

(2)　设 $f\in L^p[a,b]$，$p>1$，$1/p+1/q=1$，f 在$[a,b]$上非负递减，$g(t)\geqslant 0$，$t\in[a,b]$，且　$\int_a^b g^q\leqslant\frac{f(b-0)}{f(a+0)}$. 则

$$\left(\frac{f(b-0)}{f(a+0)}\right)^{p-1}\int_{b-c_p}^b f^p\leqslant\left(\int_a^b fg\right)^p\leqslant\int_a^{a+c} f^p. \tag{16.4}$$

式中　$c_p=\left(\int_a^b g\right)^p$；$c=\begin{cases}\left(\frac{f(a+0)}{f(b-0)}\right)^{p-1}\left(\int_a^b g\right)^p, & \text{若 } f(b-0)>0,\\ b-a, & \text{若 } f(b-0)=0.\end{cases}$

（陈安平，[350]1995，3：35－36）.

注　[2]P.49 定理 33 和[4]P.148 定理 4 均有误，陈安平的上述结果是对这些结果的更正.

(3)　设 f 在$[a,b]$上非负递减，$g\in L^1[a,b]$，若

$$0\leqslant g(x)\left(\int_a^b g\right)^{p-1}\leqslant M,\quad x\in[a,b].\quad c=\frac{1}{M}\left(\int_a^b g\right)^p.$$

则当 $p\geqslant 1$ 时　$\left(\int_a^b fg\right)^p\leqslant M\int_a^{a+c} f$；　(16.5)

而当 $p\leqslant 1$ 时 $\quad M\int_{b-c}^{b} f^{p}\leqslant\left(\int_{a}^{b} fg\right)^{p}$. (16.6)

(见[353],1995,21(1):29 - 33).当 $M=1$ 时,(16.5)式就是[301]1984,104(2):432 - 434 的结果.

(4) Gauchmann,Hillel 研究了测度空间上的 Steffensen 型不等式,见[304]2000,1(1).此外,见 Southeast Asian Bull. Math. 1999,23(2):277 - 284.

17. **Zmorovic 不等式**:设导数 f' 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续,则

$$\int_{a}^{b}[f''(x)]^{2}\mathrm{d}x\geqslant\frac{12}{(b-a)^{3}}\left\{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)\right\}^{2}, \tag{18.1}$$

式中系数 $\dfrac{12}{(b-a)^{3}}$ 不能再改进.另见[352]1983,10(1):46 - 49.和 MR85j:26026.

Zmorovic 不等式已有许多推广,例如

(1) 设导数 f' 在区间 $[-1,1]$ 上绝对连续,$f(-1)=-1,f(1)=1$,$f'(-1)=f'(1)=0$.则对于 $p>1$,有

$$\int_{-1}^{1}|f''(x)|^{p}\mathrm{d}x\geqslant 2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}.$$

仅当 $\quad f(x)=\dfrac{2p-1}{p}x-\dfrac{p-1}{p}|x|^{(2p-1)/(p-1)}\operatorname{sgn}x\quad$ 时等号成立.见[8]P168.

(2) 设导数 f' 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续,则对于任意 $c,a<c<b,p>1$.有

$$\int_{a}^{b}|f''(x)|^{p}\mathrm{d}x\geqslant\left\{\frac{p-1}{2p-1}(b-a)\right\}^{1-p}\left|\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|^{p}.$$

证明及等号成立的条件见[8]P.166 - 167.

(3) **Zmorovic-Chernei 不等式**(1983):设 f 在区间 $[a,a+nh]$ 上有 n 阶连续导数,$h>0,n\geqslant 2$,则

$$\int_{a}^{a+nh}[f^{(n)}(x)]^{2}\mathrm{d}x\geqslant A_{n}h^{1-2n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right]^{2},$$

式中 $A_{n}>0$ 为与 n 有关的常数,当 $n=2\sim 7$ 时,A_{n} 的最佳值已求出.但 $n>7$ 时 A_{n} 的最佳值是多少?见 Dokl. Akad. Nauls Ukrain. SSR Ser. A 1983,6:13 - 16.

(4) 设 r 阶导数 $f^{(r)}$ 在区间 $[-1,1]$ 上绝对连续,$r\geqslant 1$,整数 k 满足 $r/2\leqslant k\leqslant r$,令 $g(t)=(t^{2}-1)^{k}$,若正值可测函数 $\varphi(x)$,使得

$$c=\int_{-1}^{1}[\varphi(t)]^{1/(1-p)}\left|\frac{1}{k!2^{k}}(g(t))^{(2k-r)}\right|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}t<\infty,$$

则对于 $p>1$,有

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)|f^{(r+1)}(t)|^{p}\mathrm{d}t\geqslant c^{1-p}\left|\sum_{j=0}^{k}\frac{(2k-j)!}{j!(k-j)!2^{k-j}}\{f^{(j)}(-1)-(-1)^{j}f^{(j)}(1)\}\right|^{p},$$

式中系数 c^{1-p} 是最佳的,证明见[8]P167 - 168.其他相关结果见[21]P240 - 258.

18. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数,$f(a)=f(b)=0$,则

(1) $\displaystyle\int_{a}^{b}|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{(b-a)}\|f\|_{c}$.

(2) $\displaystyle\int_{a}^{b}|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\frac{f(x)(b-a)}{(x-a)(x-b)}\right|,(a<x<b)$;

(3)　若加条件 $f'(a)=1, f'(b)=0$,则

$$\int_a^b |f''(x)|^2 dx \geqslant \frac{4}{b-a}.$$

19.　**由变分法导出的积分不等式**:[1] 第 7 章专门讨论了用变分法可以建立的若干特殊的积分不等式．设泛函 f 的定义域是:

$$D(f)=\{x' \in C[a,b]; x(a)=x_0, x(b)=x_1\}.$$

求泛函 $f: f(x)=\int_a^b F(t,x,x')dt$ 在 $x^*(t)\in D(f)$ 处达到极大值或极小值,就得到积分不等式:

$$f(x)\leqslant f(x^*) \text{ 或 } f(x)\geqslant f(x^*). \tag{19.1}$$

这时 x^* 必满足 Euler 方程:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0. \tag{19.2}$$

所以,对于给定的 F,由(19.2)式求出其解 x^* 后,就可得到积分不等式(18.1),这往往是发现和建立若干积分不等式的有效手段之一,当然它也往往受到求解(19.2)式的困难的制约.下面是用上述变分法导出的若干积分不等式,这些不等式的证明见[1] 第 7 章 P193 – 219.

(1)　设 $x'\in L^2(0,\infty), x(0)=0, \|x\|_2\neq 0$,则

$$\int_0^\infty \left[4(x')^2-\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2\right]dt>0.$$

(2)　设 $x'\in L^2(0,1), x(0)=0, x(1)=1, \alpha>0, \beta>4$ 并满足 $\alpha^2+1/\beta=1/4$,则

$$\int_0^1\left\{\beta[x'(t)]^2-\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2\right\}dt\geqslant\frac{1}{1-2\alpha},$$

仅当 $x=t^{\alpha+\frac{1}{2}}$ 时等号成立.

(3)　设 $x'\in L^p(0,1), p>1, \beta>\left(\frac{p}{p-1}\right)^p, x(0)=0, x(1)=1$,则

$$\int_0^1\left[\beta(x'(t))^p-\left(\frac{x(t)}{t}\right)^p\right]dt\geqslant\frac{1}{(p-1)(1-\lambda)},$$

式中 λ 是方程 $\beta(p-1)\lambda^{p-1}(\lambda-1)+1=0$ 的惟一根.$1-(1/p)<\lambda<1$.

(4)　设 $x'\in L^{2m}[0,1], x(0)=0$,则 $\|x\|_{2m}\leqslant C_m\|x'\|_{2m}$,

式中　$\|x\|_{2m}=\left\{\int_0^1|x(t)|^{2m}dt\right\}^{1/2m}$; $C_m=\left(\frac{1}{2m-1}\right)^{\frac{1}{2m}}\left(\frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi}{2m}\right)$.

仅当 $x(t)$ 为某些超椭圆曲线时等号成立.

若将积分限由(0,1)改为$[0,\pi/2]$,则 $c_1=1$.

若 $x'\in L^2[0,2\pi], \int_0^{2\pi}x(t)dt=0$,则得 **Wirtinger 不等式**:

$$\int_0^{2\pi}[x(t)]^2dt\leqslant\int_0^{2\pi}[x'(t)]^2dt.$$

仅当 $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$ 时等号成立.(见第 12 章式中 §3.N.9)

(5)　设 $x, x''\in L^2(0,\infty), \|x\|_2=\left(\int_0^\infty|x(t))|^2dt\right)^{1/2}$,则

$$\|x'\|_2^2 \leqslant 2\|x\|_2\|x''\|_2,\ \|x'\|_2^2 \leqslant \|x\|_2^2 + \|x''\|_2^2,$$

仅当 $x(t) = c_1\left[\exp\left(-\frac{c_2}{2}t\right)\right]\sin\left(c_2 t\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ 时等号成立.

若将积分限改为$(-\infty,\infty)$,则

$$\|x'\|_2 \leqslant \|x\|_2\|x''\|_2.$$

仅当 $x(t) = 0$,a.e.时等号成立.(另见本章 N.7.(9)).

(6) 设 $x' \in L^2[0,1]$,$x(0) = x(1) = 0$,则

$$\int_0^1 \frac{[x(t)]^2}{t(1-t)}\mathrm{d}t < \frac{1}{2}\int_0^1 [x'(x)]^2\mathrm{d}t.$$

仅当 $x(t) = ct(1-t)$ 时等号成立.

(7) 设 $x' \in L^2(0,\infty)$,则

$$\int_0^\infty \frac{[x(t)]^4}{t^3}\mathrm{d}t \leqslant \frac{3}{2}\left(\int_0^\infty [x'(t)]^2\mathrm{d}t\right)^2.$$

更一般地,若 $p > q > 1$,$r = (p/q) - 1$,$x'(t) > 0$,$x' \in L^q[0,\infty)$,则

$$\int_0^\infty \frac{[x(t)]^p}{t^{p-r}}\mathrm{d}t \leqslant C\left\{\int_0^\infty [x'(t)]^q\mathrm{d}t\right\}^{p/q},$$

式中 $C = \frac{1}{p-r-1}\left(\frac{r\Gamma(p/r)}{\Gamma(1/r)\Gamma((p-1)/r)}\right)$.仅当 $x(t) = \frac{t}{(at^r+b)^{1/r}}$,$(a,b>0)$时等号成立.

(8) 设 f 在$[0,\infty)$上 2 次可微,则

$$\int_0^\infty (f + 2(f')^2 + (f'')^2) \geqslant \frac{3}{2}[f(0)]^2,$$ 仅当 $f(x) = ce^{-x}(x+2)$ 时等号成立.

20. **函数重排不等式**:设 f 是测度空间$(X,\sum,\mu)$上的可测函数,$\forall\lambda > 0$.

$$\sigma(\lambda) = \sigma_f(\lambda) = \mu\{|f| > \lambda\} \tag{20.1}$$

称为 f 的**分布函数.**

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : \sigma(\lambda) \leqslant t\}.\ (\forall t > 0) \tag{20.2}$$

称为 f 的**递减重排函数.**

注 $\{|f| > \lambda\}$ 表示集$\{t \in X : |f(t)| > \lambda\}$.(见[118]P.62).

(1) $\sigma(\lambda)$,$f^*(t)$ 都是右连续的递减函数,且

$$\sigma(f*(t)) \leqslant t,\ \forall t > 0;\ f*(\sigma(\lambda)) \leqslant \lambda,\ \forall \lambda > 0. \tag{20.3}$$

(2) f 与 f^* 有相同的分布函数,这是因为 $\forall\lambda > 0$,有

$$\{t : f^*(t) > \lambda\} = \{t : \sigma(\lambda) > t\}. \tag{20.4}$$

(3) 次可加性:$\forall f,g$,$\forall\lambda_1,\lambda_2 > 0$,$\forall t_1,t_2 > 0$,有

$$\sigma_{f+g}(\lambda_1+\lambda_2) \leqslant \sigma_f(\lambda_1) + \sigma_g(\lambda_2);\ (f+g)^*(t_1+t_2) \leqslant f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

(4) 设 f,g 是$(0,a)$上非负可积函数,a 为有限或 ∞,则

$$\int_0^a fg \leqslant \int_0^a f^* g^*.$$

由于 f^* 的次可加性,我们需要找出它的适当代替,即定义:设 f 是$(X,\sum,\mu)$上任意可测函数,令

$$f^{**}(t)=\begin{cases}\sup\left\{\dfrac{1}{\mu(E)}\displaystyle\int_E|f|:\mu(E)\geqslant t\right\}, & 若 0<t<\mu(X),\\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_X|f|, & 若 \mu(X)\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

于是,$\forall$ 可测函数 f,成立

$$f^*(t)\leqslant f^{**}(t)\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s,\ \forall\, t. \tag{20.5}$$

以上见[132]P228 - 241.

我们还可定义 f 的对称递减重排,即利用 $f_*^*(x)=f^*(2x)(x>0)$ 和 $f_*^*(-x)=f_*^*(x)$ 来定义一个偶函数 f_*^*,称 f_*^* 是 f 的**对称递减重排**.当 f,g,h 非负时,成立 **Riesz 不等式:**

$$\int_{R^1}\int_{R^1}f(x)g(y)h(-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_{R^1}\int_{R^1}f_*^*(x)g_*^*(y)h_*^*(-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明见[1]P.313 - 322.

(5) **等侧重排的导数不等式:**设 f 在$[a,b]$上 $a.e.$ 可微,$G(y)$ 在$(0,\infty)$上递增,则

$$\int_a^b G(|(f^*)'(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b G(f'(x))\mathrm{d}x; \tag{20.6}$$

若 $F(y_1,y_2)$ 在 $R^1\times R_+^1$ 上 Borel 可测,使得对每个固定的 y_1,$F(y_1,y_2)$ 是 y_2 的递增函数,则

$$\int_0^1 F(f^*(\xi),|(f^*)'(\xi)|)\mathrm{d}\xi\leqslant\int_0^1 F(f(x),|f'(x)|)\mathrm{d}x. \tag{20.7}$$

见[21]P.299 - 300 和[301]1993.175:448 - 457.

由(20.6)可推出:$\|f^*\|_p=\|f\|_p,0<p<\infty$.

(6) **递减重排积分不等式:**设 f 在区间 D(可以是无穷区间)上非负可积,若 $\sigma(\lambda)$ 是严格递减的连续函数,则它的反函数就是 f 的递减重排 $f^*(t)$.若 E 为 D 的可测子集,令 $b=\mu(D),C=\mu(E),a=b-c$,则

$$\int_a^b f^*\leqslant\int_E f\leqslant\int_0^c f^*.$$

证明见[61]P114 - 116

(7) **好 λ 不等式:**

设 μ 是 R^n 上正的双倍正则 Borel 测度,若算子 T_1,T_2 满足下述三个性质:

① T_1,T_2 是次线性和正的算子;

② $\forall f\in C_0^\infty(R^n),t>0.\{T_1f>t\}$ 是有限(L)测度的开集;

③ 若球 B 包含点 x,使得 $T_1f(x)\leqslant\lambda$,则

$\forall\,\eta:0<\eta<1$,存在与 f,λ,B 无关的 $\alpha=\alpha(T_1,T_2,\eta)$.使得

$$\mu\{y\in B:T_1f(y)>3\lambda,T_2f(y)\leqslant\alpha\lambda\}\leqslant\eta\mu(B). \tag{20.8}$$

则称 T_1,T_2 满足关于 μ 的好 λ 不等式.

好 λ 不等式是证明各种算子不等式的有力工具,例如设 T_1,T_2 满足关于 μ 的好 λ 不等式,并且 $\forall f\in C_0^\infty(R^n)$,$\|T_1f\|_p<\infty,0<p<\infty$,则存在与 f 无关的常数 $c=c(\mu,$

p),使得

$$\| T_1 f \|_p \leqslant c \| T_2 f \|_p. \tag{20.9}$$

见[87]P.328 - 330.

我们可以在一般测度空间上用函数的重排定义更一般的好 λ 不等式,即设 f,g 是 σ 有限测度空间上非负可测函数,若存在 $\alpha > 1, \beta > 1$,及常数 c,使得

$$f^*(t) \leqslant c g^*(\beta t) + f^*(\alpha t), \forall t > 0. \tag{20.10}$$

反复利用上式,可得

$$f^*(t) \leqslant C g^*(\beta t) + \frac{c}{\ln\alpha}\int_{\beta t}^{\infty} \frac{g^*(t)}{s} \mathrm{d}s + \lim_{t\to\infty} f^*(t). \tag{20.11}$$

见[132].$P240 - 241$.

21. **H-L(Hardy-Littlewood)上限定理**:设 f 在有限区间 $(0,a)$ 上非负可积,记

$$\theta(x) = \theta(f,x) = \sup\left\{\frac{1}{x-u}\int_u^x f(t)\mathrm{d}t : 0 \leqslant u < x\right\},$$

f^* 为 f 的递减重排. Q 为 R^n 中方体. $M(f,x) = \sup\limits_{x\in Q} \dfrac{1}{\mu(Q)}\displaystyle\int_Q |f(y)| \mathrm{d}y$ 称为 f 的 Hardy-Littlewood 极大算子.

(1) $\theta^*(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f^*(t)\mathrm{d}t$; (21.1)

(2) 设 g 是 $[0,a]$ 上递增函数,则

$$\int_0^a g(\theta(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a g\left(\frac{1}{x}\int_0^x f^*(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x; \tag{21.2}$$

注　(1)(2)中 $f^*(t)$ 换成 $M(f,t)$,仍成立.

(3) 若 $1 < p < \infty$,则 $\| \theta(f) \|_p \leqslant \dfrac{p}{p-1} \| f \|_p$; (21.3)

(4) 若 $0 < p < 1$,则 $\| \theta(f) \|_p \leqslant \left(\dfrac{1}{1-p}\right)^{1/p} \| f \|_1$; (21.4)

推广见 Ricerche Mat. 1989, 38(1): 119 - 136.

(5) $\displaystyle\int_0^1 \theta(f,x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 f(x)\ln^+ f(x)\mathrm{d}x + c_1\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + c_2, c_1, c_2 > 0.$ (21.5)

(6) 设 $g \in AC[a,b]$, $\dfrac{g(x)}{x^{1+\alpha}}$ 在 (a,b) 上递增. $\dfrac{g(x)}{x^{\beta}}$ 在 (a,b) 上递减, $\alpha,\beta > 0$,则 $\exists c > 0$,使得

$$\int_a^b g(\theta(x))\mathrm{d}x \leqslant c\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x; \tag{21.6}$$

(7) 设 $1 < p < \infty, -1 < \alpha < p - 1$,则

$$\int_a^b x^{\alpha}[\theta(x)]^p \mathrm{d}x \leqslant c\int_a^b x^{\alpha}[f(x)]^p \mathrm{d}x. \tag{21.7}$$

见[322]1930,54:81 - 116;[73]P421 - 428;[57]P32 - 33;[21]P303 - 305.

22. 设 $f \in L_{2\pi}^1$,令

$$f^+(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)| \mathrm{d}t, \quad f^-(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x-t)| \mathrm{d}t,$$

$$f^{\Delta}(x) = \max\{f^+(x), f^-(x)\} = \sup_{h\neq 0}\left\{\frac{1}{h}\left|\int_0^h |f(x+t)| \mathrm{d}t\right|\right\},$$

则

(1) $\mu(\{f^+ > \lambda\} \cap [-\pi,\pi]) \leqslant \frac{4\pi}{\lambda}\|f\|_1, \quad (\forall \lambda > 0);$ (22.1)

(2) $\|f^+\|_p \leqslant 4^{1/p}\left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_p, (1 < p < \infty);$

(3) $\|f^+\|_p \leqslant \left(4\frac{p^{1-p}}{1-p}\right)^{1/p}\|f\|_1, \quad (0 < p < 1);$

(4) $\|f^+\|_1 \leqslant 8\int_{-\pi}^{\pi}(|f|\ln^+|f|) + c.$

将 f^+ 换成 f^- 时,(1) ~ (4) 仍成立,但 f^+ 换成 f^Δ 时,应注意 $\{f^\Delta > \lambda\} = \{f^+ > \lambda\} \cup \{f^- > \lambda\}$,所以(22.1) 应换成

$$\mu(\{f^\Delta > \lambda\} \cap [-\pi,\pi]) \leqslant \frac{8\pi}{\lambda}\|f\|_1, \forall \lambda > 0.$$

证明见[73]P.386 - 389 或[57].Vol.1.P33.当 f 为非周期函数时相应的类似结论见[98]P.611 - 620.

23. **有界平均振动函数不等式**(*BMO* **不等式**):设 f 在 R^n 上局部可积,Q 为 R^n 中任一方体.f 在 Q 上的平均值记作 $f_Q = \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f(x)\mathrm{d}\mu$.若 f 满足:

$$\|f\|_* = \sup_Q\left\{\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(x) - f_Q|\mathrm{d}\mu\right\} < \infty, \tag{23.1}$$

则称 f 为**有界平均振动函数**,记为 $f \in BMO$.

(1) 若 $f \in BMO$,则成立 **John-Nirenberg 不等式**:存在常数 $c_1, c_2 > 0$,使得 $\forall \lambda > 0$,成立

$$\mu\{x \in Q: |f(x) - f_Q| > \lambda\} \leqslant c_1\exp\left\{-\frac{c_2\lambda}{\|f\|_*}\right\}\mu(Q). \tag{23.2}$$

反之,若 $f \in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$,且存在两个正常数 c_1, c_2.使得 $\mu\{x \in Q: |f(x) - f_Q| > \lambda\} \leqslant c_1\exp\{-c_2\lambda\}\mu(Q)$.$(\forall Q, \forall \lambda > 0)$,则 $\forall c: 0 < c < c_2$,成立

$$\int_Q \exp\{c|f(x) - f_Q|\}\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{c_1 c}{c_2 - c}\mu(Q). \tag{23.3}$$

由此推出 $f \in BMO$(具有范数 $\|f\|_*$)$\Leftrightarrow$

$$\sup_Q\left\{\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(x) - f_Q|^p\mathrm{d}\mu\right\}^{1/p} \leqslant c_p\|f\|_*, c_p \sim p, \tag{23.4}$$

$1 \leqslant p < \infty$,这说明(23.2)式刻画了 *BMO* 中函数 f 的本质特征.证明见[87]P.202 - 204.

(2) 设 $f \in BMO$,则 $\forall \lambda > 0$,成立

$$\int_{\lambda Q}|f(x) - f_Q|\mathrm{d}\mu \leqslant c\ln(2 + \lambda)\|f\|_*\mu(\lambda Q),\text{式中 } \mu(\lambda Q) = \lambda^n\mu(Q).$$

(3) 设 $f \in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$,则 Fefferman-Stein 的 # 函数定义为

$$f^\#(x) = \sup_{x \in Q}\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(y) - f_Q|\mathrm{d}\mu(y).$$

则 $f \in BMO(R^n) \Leftrightarrow f^\# \in L^\infty(R^n)$; $f \in L^p(R^n) \Leftrightarrow f^\# \in L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$;

$$f^\#(x) \leqslant 2M(f,x).$$

(4) **BDS(Bennett-Devore-Sharpley) 不等式**:设 $f \in BMO$,则 f 的 *HL* 极大函数 $M(f) \in BMO$,而且

$$\| M(f) \|_* \leqslant c \| f \|_* . \tag{23.5}$$

证明见[87]P.204－206.

(5) **Spanne-Stein 不等式**：设 $f \in BMO$，则 f 的共轭函数 $\tilde{f} \in BMO$，且

$$\| \tilde{f} \|_* \leqslant c \| f \|_* . \tag{23.6}$$

$\tilde{f}$ 的定义及(23.6)的证明见[87]P206－209;52－52.

(6) 设 $f \in L^{\infty}(T)$，则 $\tilde{f} \in BMO(T)$，且

$$\| \tilde{f} \|_* \leqslant c \| f \|_{\infty} . \tag{23.7}$$

(见[87]P206.).

(7) f 的递减重排 f^* 满足：$\| f^* \|_* \leqslant \| f \|_*$.

(8) 设 $f \in BMO(R^n)$，则 $f(x)(1+|x|^{n+1})^{-1} \in L^1(R^n)$. 且

$$\int_{R^n} \frac{|f(x)-f_Q|}{a^{n+p}+|x|^{n+p}} d\mu \leqslant \frac{c}{a^p} \| f \|_* .$$

式中 Q 是中心在原点，边长为 a 的方体，$p > 0$，常数 c 只与维数 n 有关，见[137]P219－220;$p = 1$ 的情形见[322]1972,129:137－193.

(9) **Poincare 不等式**：

$$\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x)-f_B|^q \omega(x) dx\right)^{1/q} \leqslant C\mu(B)^{1/n}\left(\frac{1}{v(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p v(x) dx\right)^{1/p},$$

式中 $1 < p \leqslant q < \infty$，$\omega(B) = \int_B \omega(x) dx$. ∇f 为 f 的梯度 .(见 Chanillo;S. 等[368]1992.41(3):605－623).

24. **A_p 权不等式**：设 $\omega(x)$ 是 R^n 上局部可积的正函数，Q 是其边平行于坐标轴的方体，$E \subset Q$，

$$\omega(E) = \int_E \omega(x) dx . \; M_s(f,x) = \sup_{x \in Q}\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(y)|^s dy\right)^{1/s}, s > 0.$$

$M_1(f,x)$ 即为 N21 中 $M(f,x)$，$\mu(Q) = v(Q)$ 为 Q 的体积.

若存在正常数 c，使得 $\forall Q$，成立

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega(x) dx\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q [\omega(x)]^{-1/(p-1)} dx\right)^{p-1} \leqslant c, \tag{24.1}$$

则称 ω 为 A_p 权函数，记为 $\omega \in A_p (1 < p < \infty)$;

若
$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega(x) dx\right) \exp\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \log \frac{1}{\omega(x)} dx\right) \leqslant C. \tag{24.2}$$

则称 ω 为 A_{∞} 权函数，记为 $\omega \in A_{\infty}$;

若
$$M(\omega,x) \leqslant c\omega(x) \text{ a.e. } x \in R^n . \tag{24.3}$$

则称 $\omega \in A_1$.

BMO 与 A_p 关系十分密切，即若 $\omega \in A_p$，$(1 < p < \infty)$，则 $\ln\omega \in BMO$；反之，若 $\ln\omega \in BMO$，则存在 $\delta > 0$，使得 $\omega^{\delta} \in A_p$. 见[137]P240. 下面仍记

$$\| f \|_{p,w} = \left(\int_{R^n} |f|^p w\right)^{1/p}, 1 < p < \infty .$$

(1) 设 $\omega \in A_p$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，则 ω 满足反向 **Hölder** 不等式，即存在正的常数 c，δ，使得

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega^{1+\delta} \leqslant c\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega\right)^{1+\delta}, \forall Q. \tag{24.4}$$

(2)　**反向双倍不等式**：$\omega \in A_\infty$，$\Leftrightarrow$ 存在正的常数 c,δ，(与 Q 无关)，使得 $\forall E \subset Q$，成立

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leqslant c\left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)}\right)^{\delta} \Leftrightarrow \frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \leqslant c\left(\frac{w(E)}{w(Q)}\right)^{\delta}. \tag{24.5}$$

(3)　设 $w \in A_p, 1 < p < \infty$.

$$\| M_s(f) \|_{p,w} \leqslant c \| f^{\#} \|_{p,w}. \tag{24.6}$$

(4)　设 $w \in A_{p/s}, 1 < s < p < \infty$，则

$$\| M_s(f) \|_{p,w} \leqslant c \| f \|_{p,w}. \tag{24.7}$$

(5)　**Gehring 不等式**：设定义在方体 Q_0 上的非负函数 w 满足：

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^p\right)^{1/p} \leqslant c_1\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w\right), \forall Q \subset Q_0, p > 1.$$

则 $\exists \eta > 0$，使得 $\forall Q \subset Q_0, \forall r: p \leqslant r < p + \eta$，成立

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^r\right)^{1/r} \leqslant c_2\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w\right), \tag{24.8}$$

若取 $Q = [0,1], \int_Q w^p = 1, E_\lambda = \{x \in Q: w(x) > \lambda\}$. 则(24.7)可化为

$$\int_{E_\lambda} w^p \leqslant c\lambda^{p-1}\int_{E_\lambda} w, \qquad \lambda \geqslant 1. \tag{24.9}$$

见[322]1973.130:265 – 277. Canale, Anna 推广了 Gehring 不等式，证明：

设 ω 为双倍测度，$h \in L^1(Q_0, w(x)\mathrm{d}x), h \geqslant 0$，并满足：

$\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)\omega(x)\mathrm{d}x \leqslant C_1 \operatorname*{essinf}_{x\in Q} h(x), \forall Q \subset Q_0$，则 $\exists r > 1$，使得

$$\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)^r\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/r} \leqslant c\,\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)\omega(x)\mathrm{d}x.$$

此外，若 $\omega \in A_p, p > 1, 0 \leqslant h \in L^p(Q_0, \omega(x)\mathrm{d}x)$，并满足

$\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q (h(x)^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant c\,\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)\mathrm{d}x$，则 $\exists r > 1$，使得

$$\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)^{pr}\omega(x)dx\right)^{1/pr} \leqslant c\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q h(x)\mathrm{d}x\right).$$

见[307]1993,754:26011.

(6)　若 $w \in A_p, p \geqslant 1, t > 1$，则 $w(tQ) \leqslant ct^{np}w(Q)$. 式中 tQ 是和 Q 同心，边长为 Q 的边长 t 倍的方体. 见[142]P153.

(7)　设 $w \in A_p, 1 < p < \infty$，则

$$\int_{|x|>M>0} \frac{w(x)}{|x|^{np}}\mathrm{d}x < \infty.$$

(8)　设 $w \in A_1$，则　$\inf_{x\in Q} w(x) \leqslant \frac{w(B)}{\mu(B)} \leqslant c \operatorname*{essinf}_{x\in B} w(x)$，且对于 $E \subset B$，成立 $\frac{\mu(E)}{\mu(B)} \leqslant c\,\frac{w(E)}{w(B)}$.

(9)　$w \in A_\infty \Leftrightarrow \forall$ 非负可测函数 f，成立　$\| G(f) \|_{1,w} \leqslant c \| f \|_{1,w}$.

式中 $G(f,x) = \sup\limits_{x\in Q}\exp\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \ln|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)$.

以上的证明及进一步的结果见[87]$P223-258$.

(10) **Fujii 不等式**:设 $f_Q = \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f$, 则 $f\in A_\infty \Leftrightarrow \exists\, c>0$,使得

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \frac{f}{f_Q}\log^+\left(\frac{f}{f_Q}\right)\mathrm{d}\mu \leqslant Cf_Q.$$

Gioconda,M. 等推广了这一结果. 见 MR98h:26024.

(11) 设 $\omega\in A_p, 1\leqslant p<\infty, 0<\alpha<1$, E 为方体 Q 的子集并满足:$\mu(E)\leqslant \alpha\mu(Q)$,则存在 $\beta: 0<\beta<1$,使得 $\omega(E)\leqslant\beta\omega(Q)$.

(12) 设 $\omega\in A_p, 1\leqslant p<\infty$,则存在 $\delta>0$ 和常数 $c>0$,使得 $\forall E\subset Q$,成立

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)}\leqslant c\left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)}\right)^\delta,\ \text{即}\quad \omega\in A_\infty,$$

(11) ~ (12) 时证明见[142]$P154,157$.

25. **Korn 不等式(1908)**:设 $f_k(x^j)$ 是 R^n 中有界域 D 上的向量函数($k,j=1,2,\cdots,n$),令

$$\|f\| = \int_D\left(\sum_{k,j=1}^n\left(\frac{\partial f_k}{\partial x^j}\right)^2 + \sum_{k=1}^n f_k^2\right)\mathrm{d}x.\ \text{则}$$

$$\int_D\left\{\sum_{k,j=1}^n\left(\frac{\partial f_k}{\partial x^j}+\frac{\partial f_j}{\partial x^k}\right)^2 + \sum_{k=1}^n f_k^2\right\}\mathrm{d}x \geqslant C\|f\|.$$

Korn 曾用于获得弹性理论中非齐次方程的解的先验估计. 见 Fichera,G.,Existence theorems in elasticity theory,Springer,1972,Vol.4:347 - 389.

26. **能量不等式**:以膜振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ 为例,能量积分

$$E(t) = \iint_D[u_t^2 + a^2(u_x^2+u_y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

表示时刻 t 在积分区域 D 上薄膜的能量 . 式中

$$D = \{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2(t-t_0)^2, 0<t<t_0\}.$$

$E(t)\leqslant E(0)$ 称为**能量不等式**,利用它可以得到膜振动方程柯西问题解的惟一性与稳定性,还可用于研究存在性问题,这种方法称为**能量方法**,这是偏微分方程研究中常用的一种方法,详见 John,F.,偏微分方程,科学出版社 1986).

27.(1) **Friedrichs 不等式**:设 D 为 R^n 中有界区域,其$(n-1)$ 维边界 ∂D 满足局部 Lipschitz 条件,$f\in W^{1,2}(D)$(Sobolev 空间),则

$$\int_D f^2\leqslant C\left\{\int_D\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2+\int_{\partial D}f^2\right\}.$$

上式还可推广到加权空间,见[138].

(2) **FP 不等式(Friedrich - Poincare 不等式)**:设 $f'\in C[a,b]$, $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$, $p>0$, $0<\lambda<\pi/(b-a)$,则

$$\int_a^b f^2\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_a^b(f')^2+\frac{2\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2)\cos\lambda(b-a)}{\lambda\sin\lambda(b-a)};$$

证明及更多的不等式见 Burton,A.P. 等,Rad,Mat,1989,5(1):107 - 114.

28. **梯度不等式**:设 ∇f 为 f 的梯度: $|\nabla f(x)| = \left(\sum_{k=1}^{n}(\partial f/\partial x_k)^2\right)^{1/2}$.

(1) 设 f 的支集是 R^n 中的开方体 Q_0,且有连续的一阶偏导数,则对于 Q_0 中任意 x,有

$$|f(x)| \leqslant c\int_{Q_0}\frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y;$$

而对于任意 $Q \subset Q_0, x \in Q$,有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \leqslant c\int_Q\frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y,$$

式中常数 c 与 x 无关,而与维数 n 有关,

提示:利用 $f(x) = \frac{1}{w_n}\int_{R^n}\frac{y\nabla f(x-y)}{|y|^n}\mathrm{d}y$,其中 $w_n = 2\int_{R^{n-1}}(1+|x|^2)^{-n/2}\mathrm{d}x$ 是 R^n 中单位球面 $\sum_{n-1} = \{x \in R^n: |x| = 1\}$ 的表面积. 见[87]P.270 – 271.

(2) **PS 积分不等式(Ponicare-Sobolev 型积分不等式)**:

1987 年 Pachpatte, B. G 证明:设 $B = \{x = (x_1,\cdots,x_n): 0 \leqslant x_k \leqslant a_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 是 R^n 中的有界域,f 在 B 上有连续的一阶偏导数,且在 B 的边界上为零. 则对于 $p \geqslant 2$,有

$$\|f\|_p \leqslant (a/2)n^{-1/p}\|\nabla f\|_p,$$

式中 p 范数在 B 上取,$a = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 见[330]1987,18(1):1 – 7.

(3) 1989 年 Gordon, S. 证明了**加权梯度不等式**:

$$\left(\int |g(x)|^q v(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int |x\nabla g(x)|^p u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

式中 u, v 为非负数函数,$1 < p < \infty, 0 < q \leqslant p$,见[392]1989,111(3 – 4):329 – 335.

(4) 在[87]中还对加数情形证明了 **Sobolev 嵌入不等式**:

$$\left(\int_Q |f(x)|^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_Q |\nabla f(x)|^p \mathrm{d}v(x)\right)^{1/p},$$

(式中 $1/p - 1/n \leqslant 1/s < 1/p, p \leqslant q < s$) 和 **Poincare 不等式**:

$$\int_Q |f(x) - f_Q|^p \mathrm{d}\mu(x) \leqslant c\int_Q |\nabla f(x)|^p \mathrm{d}v(x),$$

式中 $1 < p < \infty, f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x$. 见[87]P.272 – 274.

(5) 设 $f \in S(R^n)$(见[118]P362),f_*^* 是 f 的对称递减重排(见本章 N.20),φ 是 $(0,\infty)$ 上递增的凸函数,$\varphi(0) = 0$,则

$$\int_{R^n}\varphi(|\nabla f|)\mathrm{d}x \geqslant \int_{R^n}\varphi(|\nabla f_*^*|)\mathrm{d}x.$$

Talenti, Giorgio 引入了加权重排函数的概念,得到了上述不等式的加权形式.

(见 Ann. Univ. Ferrara Sez. VII. 1997,43;121 – 133)

(6) **广义 Hardy 不等式**:设 Ω 为 R^n 中区域,$1 < p < \infty, \delta(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$,1998 年 Marcus, M 等对于 $f \in W^{1,p}(\Omega)$,求出广义Hardy 不等式

$$\int_\Omega |\nabla f|^p \geqslant c_p\int_\Omega \left|\frac{f}{\delta}\right|^p$$

中最佳常数 c_p,$c_1 = (1 - 1/p)^p$. 见[309]1998,350:3237-3255.

29. Sobolev 不等式：

(1) **仿射 Sobolev 不等式**：设 $f \in C_0^1(R^n)$. 则

$$\int_{S^{n-1}} \| \nabla_u f \|_1^{-n} \mathrm{d}u \leqslant c_n \| f \|_p^{-n}, \tag{17.1}$$

式中 $\mathrm{d}u$ 是单位球上标准球面测度. $p = \dfrac{n}{n-1}$. $c_n = n\left(\dfrac{w_n}{2w_{n-1}}\right)^n$ 是最佳常数,(w_n 是 n 维单位球的体积,见第 4 章 §3.N.8.)

(Zhang Gaoyong, J. Differential Geom. 1999, 53(1): 183 – 202)

(2) (17.1) 包含了**古典的 Sobolev 不等式**：设 D 为平面区域, f 是 D 内有紧支集的光滑函数,则

$$\left(\int_D |\nabla f|\right)^2 \geqslant 4\pi \int_D f^2. \tag{17.2}$$

(17.2) 式等价于等周不等式 $L^2 \geqslant 4\pi S$ (见第 4 章 §3 三.)

(3) 1992 年, Pearson, J. M. 证明了形如

$$\| f \|_{L^q(R^n)} \leqslant \frac{\sqrt{q}}{n\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1/2)}\right]^{1/n} \| \nabla f \|_{L^2(R^n)}$$

的不等式,式中 $1/q = 1/2 - 1/n$. 细节见[397]1992, 116(4): 361 – 374.

(4) **Gauss 型对数 Sobolev 不等式(GLS 不等式)：**

$$\int_{R^n} |f|^2 \ln |f| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_{R^n} |\nabla f|^2 \mathrm{d}\mu + \| f \|_2^2 (\ln \| f \|_2).$$

式中 $d\mu = (2\pi)^{-n/2}\left(\exp\left\{-\dfrac{|x|^2}{2}\right\}\right)\mathrm{d}x$, (见[366]1998, 30(1): 80 – 84.).

Gross, L. 在[140]1563 中对该不等式的研究背景及一些最主要的结果(包括证明)和应用作了详细的论述.

(5) **Hölder 嵌入不等式**：设 $f \in W^{1,p}(\Omega)$ (Sobolev 空间), $p > n$, 则

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c |x - y|^{1-(n/p)} \left(\int_\Omega |\nabla f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(Buckley, S. M., Internat. Math. Res. Notices, 1996, 18: 881 – 901)

(6) **Fefferman 不等式：**

$$\| u \|_{2,w} \leqslant c \| \nabla u \|_2,$$

式中 $\| u \|_{2,w} = \left(\int_B u^2(x) w(x) \mathrm{d}x\right)^{1/2}$, $\| \nabla u \|_2 = \left(\int_B |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$,

B 为 R^n 中的球, (Boll. Unione Mat. Ital Sez. B, 1999, (8)2(3): 629 – 637)

(7) **SVD 型不等式**(Sobolev-Visik-Dubinskii 型不等式)：设 $p \geqslant 0, q \geqslant 1, r \geqslant 1, \alpha > 0$, $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 为 n 维方体, f 在 Q 上连续,在 Q 的内部可微,且 $f(a_k) = f(b_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 则

$$\int_Q |f(x)|^{r(p+q)} \mathrm{d}x \leqslant c^q \int_B \left(\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|^\alpha\right)^{\frac{r(p+q)}{\alpha}} |f(x)|^{rp} \mathrm{d}x.$$

(Pachpatte, B. G. [330]1999, 30(3): 213 – 218.).

问：常数 c 的最佳值是多少？

30. 1989 年 Gatto, A. E. 和 Wheeden, R. L, 对于 $f \in C_0^\infty(R^n)$, $1 < p \leqslant q < \infty$, 证明了**加权 Sobolev 不等式**:

$\left(\int_{R^n} |f(x)|^q u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_{R^n} |\nabla f(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}$. 见[309]1989, 314, (2):727 - 743. 1991 年龙瑞麟, 聂伏生在不同条件下证明了上述不等式, 见[333]1991, 36(11):801 - 803.

31. 1986 年 Pachpatte, B. G. 证明: 设 $u_k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 是 R^n 中有紧支集的光滑函数, 则

$$\left(\int \prod_{k=1}^m |u_k(x)|^p \mathrm{d}x\right)^q \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\frac{1}{m}\right)^q \sum_{k=1}^m \int |\nabla u_k(x)| \mathrm{d}x,$$

式中　$p = \dfrac{n}{m(m-1)}$, $q = n - (1/n)$,

见[392]1986, 103(1 - 2):1 - 14.

32. **加权 Sobolev 插值不等式**: 设 B 为 R^n 中的球, $u \in \mathrm{Lip}(\overline{B})$, v, w_1, w_2 为非负权函数, $v(B) = \int_B v(x)\mathrm{d}x$, 则

$$\frac{1}{w_2(B)}\int_B |u(x)|^{pq} w_2(x)\mathrm{d}x \leqslant c\left(\frac{1}{v(B)}\int_B |u(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right)^{q-1}$$
$$\times\left(\frac{|B|^{p/n}}{w_1(B)}\int_B |\nabla u(x)|^p w_1(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{v(B)}\int_B |u(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right),$$

式中 $1 < p < \infty$, $q > 1$. 见[309]1991, 323(1):263 - 281.

33. **Poincare 不等式**: 设 $1 < p \leqslant q < \infty$, $v \in A_p$. w 为双倍权函数, $u_B = \dfrac{1}{\mu(B)}\int_B u(x)\mathrm{d}x$, 则 $\left(\dfrac{1}{w(B)}\int_B |u - u_B|^q w\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant c(\mu(B))^{(1/n)}\left(\dfrac{1}{v(B)}\int_B |\nabla u|^p v\mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

N32, 33 见[309]1991, 323(1):263 - 281.

34. [MCU] 设 f 在 R^n 中连续可微、绝对可积且各个一阶偏导数均有界, 则存在常数 c, 使得

$$\|f\|_\infty \leqslant c\|\nabla f\|^{n/(n+1)}\|f\|^{1/(n+1)},$$

式中　$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\vec{e_k}$ 为 f 的梯度. 还可求出 c 的最小值为 $c_{\min} = \left(\dfrac{n+1}{\omega_n}\right)^{n/(n+1)}$, 式中 ω_n 为 n 维单位球的体积.

证　对于 $x_0 \in R^n$, 令 $E = \left\{x \in R^n: |x - x_0| < \dfrac{f(x_0)}{\|\nabla f\|}\right\}$, 对于任意 $x \in R^n$, 有

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}f(x_0 + (x - x_0))\mathrm{d}t$$
$$= f(x_0) + \int_0^1 (\nabla f(x_0 + t(x - x_0)), (x - x_0))\mathrm{d}t,$$

从而 $\|f(x)\| \geqslant |f(x_0)| - \|\nabla f\| \cdot |x - x_0|$, 于是

$$\int_{R^n} |f| \geqslant \int_E |f| \geqslant |f(x_0)| \frac{\omega_n}{n+1}\left(\frac{|f(x_0)|}{\|\nabla f\|}\right)^n,$$

即　$|f(x_0)|^{n+1} \leqslant \left(\dfrac{n+1}{\omega_n}\right)\|f\|_1 \cdot \|\nabla f\|^n$,

两边对所有 $x_0 \in R^n$ 取上确界即可得证. 见[63]P78.

35. (1) **单调函数的反向 Poincare 不等式**：设 f 在 $(0,a)$ 上非负递增，$g' \in C(0,a)$，若 $2 < p < \infty, q \geqslant 1$，则

$$\frac{\left[\int_0^a (f')^{1/p}\right]^p}{\int_0^a f(x)x^{q-1}\mathrm{d}x} \leqslant \frac{a^{p-q-1}}{q^{p-2}} B\left(\frac{1}{q}, \frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}.$$

式中 $B(u,v)$ 为 Beta 函数. (Benguria, R. D. 等. [302]2000, 5(1): 91 - 96.).

(2) **Poincare 不等式**：设 $C_0^m(\Omega)$ 表示有界开区域 $\Omega \subset R^n$ 上一切 m 次连续可微，并在 Ω 的边界的某邻域内为 0 的函数集. 则对于所有 $f \in C_0^m(\Omega)$，有

$$\sum_{|\alpha|<m}\int_\Omega |D^\alpha f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant C\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha f(x)|^2\mathrm{d}x,$$

式中常数 C 只与区域 Ω 和 m 有关.

提示：将 Ω 放在边长为 a 的方体 B 内，选择坐标系，使得 $B = \{x_1, \cdots, x_n) : 0 \leqslant x_k \leqslant a\}$. 在 $B - \Omega$ 上补充定义 $f(x) = 0$，先证

$$|f(x)|^2 \leqslant a\int_0^a \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2 \mathrm{d}x_1, \text{两边在 } B \text{ 上积分.}$$

36. **整体 Landau 不等式**：设 $v \in A_p$，w 是双倍权函数，$1 < p \leqslant q < \infty, 0 < \alpha < 1$，则当 u 有紧支集时，成立

$$\|\nabla u\|_{q,w} \leqslant \|u\|_{p,v}^{1-\alpha}\|\nabla^2 u\|_{p,v}^{\alpha}.$$

见[309]1991, 323(1): 263 - 281.

37. **插值不等式**，设 Ω 是 R^n 中具有锥性质的开集，则存在常数 $c = c(m,\Omega)$，使得对于任给的正数 ε，$0 \leqslant k \leqslant m-1$，以及所有 $u \in W^{m,k}(\Omega)$，成立

$$|u|_{k,p} \leqslant c\varepsilon|u|_{m,p} + c\varepsilon^\beta|u|_{0,p},$$

式中 $\beta = -\dfrac{k}{m-k}$，m 为非负整数，$1 \leqslant p < \infty$，$|u|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$，式中 $W^{m,k}(\Omega)$ 是 Sobolev 空间，见浙江大学学报，1986, 20(2): 57 - 62. 加权插值不等式见[323]1990, 42(2): 959.

38. 设 f 在 $[0,\infty)$ 上非负连续，$p > 1$，$1/p + 1/q = 1$，g 是 $[0,\infty)$ 上正的局部绝对连续函数. 令 $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$. 若存在两个正的常数 A, B，使得对所有的正数 x，有 $x|g'(x)| \leqslant Ag(x)$，$xg(x) \leqslant BG(x)$，而且

$$\int_0^\infty g(x)\left\{\frac{1}{G(x)}\int_0^x \frac{1}{t}(g(t))^{1/q}\int_0^t g(u)^{1/p}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t\right\}^p\mathrm{d}x < \infty,$$

则

$$\int_0^\infty g(x)\left\{\frac{1}{G(x)}\int_0^x g(t)f(t)\mathrm{d}t\right\}^p\mathrm{d}x \leqslant (A+B)^p\int_0^\infty\left\{\frac{1}{x}\int_0^x g(t)^{1/p}f(t)\mathrm{d}t\right\}^p\mathrm{d}x.$$

取　$g(u) = 1/(u+1)$，得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1}\left\{\int_x^\infty \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t+1)\log(t+1)}\right\}^p\mathrm{d}x \leqslant (1+3p)^p\int_0^\infty\left\{\int_x^\infty \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t(t+1)^{1/p}}\right\}^p\mathrm{d}x.$$

见[373]1990, 48(1): 124 - 132.

39. **Djokovic 不等式**:1965 年 Djokovic,D. Z. 提出猜想:设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$,记 $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$,

$$f(t,x) = \prod_{k=0}^{n}(t - x_k), \tag{39.1}$$

$$M = \max\{|f(t,x)|: x_0 < t < x_n\}, \tag{39.2}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{M}\int_{x_0}^{x_n} f(t,x)\mathrm{d}t, \tag{39.3}$$

则

$$(-1)^k \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k} > 0. \tag{39.4}$$

第二年,他又指出(39.4)式应改为

$$(-1)^{n+1-k}\partial\varphi(x)/\partial x_k > 0. \tag{39.5}$$

见[305]1965,72,(7):794,和1966,73:788E5311. 在[4]P. 422 中指出这个猜想还未解决.

1990 年,胡冠初、汤健康证明,对于任意分布的 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$,(39.5)式是不成立的. 同时证明了(39.5)式成立的几种特殊情形:

(1)　当 $n = 2$, $x_0 < x_1 < x_2$,而且 $a(x_2 - x_0) < x_1 - x_0 < (1-a)(x_2 - x_0)$(其中 $a = 0.1824879\cdots$)时,(39.5)式成立,当 $x_1 - x_0 < a(x_2 - x_0)$ 或 $x_1 - x_0 > (1-a)(x_2 - x_0)$ 时,(39.5)式不成立.

(2)　设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 是 $n+1$ 个等距分布的点,则当 $n \leqslant 6$ 时,(39.5)式成立,而对较大的 n,(39.5)式不成立.

(3)　若将(39.3)式改为

$$\varphi(x) = \frac{1}{M}\int_a^b \omega(t) f(t,x)\mathrm{d}t \tag{39.6}$$

式中 $\omega(t)$ 为非负权函数,若 $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$ 是 $n+1$ 次正交多项式(具有权 $\omega(t)$)的零点,则相应的(39.5)式成立. 见[339]1990,10(2):271.

我们还可以进一步问:使(39.5)式成立的的充要条件是什么?

40. **Bernstein-Mordell 不等式**:由 Gauss 求积公式:

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k) + R_n, \tag{40.1}$$

式中 f, w 为非负可积函数,$c_k \geqslant 0$,

$$R_n = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}\int_a^b w(x)[Q_n(x)]^2\mathrm{d}x, a < \xi < b, \tag{40.2}$$

$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k), \quad \int_a^b w(x)Q_n(x)x^k\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0,1,\cdots,n-1,$$ 则

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)[Q_n(x)]^2\mathrm{d}x. \tag{40.3}$$

(1)　取 $w(x) = 1$, $[a,b] = [-1,1]$, x_k 是 n 次 Legendre 多项式 $P_n(x)$(第 6 章 §2,二)的零点. 这时

$$c_k = \frac{2(1-x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2}, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad R_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}f^{(2n)}(\xi), \ \xi \in [-1,1].$$

(2)　取 $w(x)=e^{-x}$, $[a,b]$ 换成 $[0,\infty)$, x_k 为 n 次 Laguerre 多项式 $L_n(x)$(第6章§2,五中 $\alpha=0$) 的零点. 这时

$$c_k=\frac{(n!)^2}{x_k[L'_n(x_k)]^2}.\qquad R_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi).$$

(3)　取 $\omega(x)=\exp(-x^2)$, $[a,b]$ 换成 $(-\infty,\infty)$, x_k 是 n 次 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 的零点, 这时

$$c_k=\frac{2^{n+1}\sqrt{\pi}n!}{[H'_n(x_k)]^2},\quad R_n=\frac{\sqrt{\pi}n!}{2^n(2n)!}f^{(2n)}(\xi).$$

($H_n(x)$ 的定义见第6章§2,三.)

当 f 为多项式时, 见第6章, 一般情形的讨论见[21]第11章, P485－499.

41.　**数值积分不等式:** 令 $\Delta_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(1)[MCU]　若 f 在区间 $[0,1]$ 内可微, 且当 $0<x<1$ 时, $|f'(x)|\leqslant M$, 则

$$|\Delta_n|\leqslant\frac{M}{n}.$$

证　令 $E_k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, $k=1,\cdots,n$, 由积分中值定理, 存在 η_k, 使得

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}f(\eta_k).\left(\frac{k-1}{n}<\eta_k<\frac{k}{n}\right).$$

又由微分中值定理, 存在 ξ_k, 使得

$$f(\eta_k)-f\left(\frac{k}{n}\right)=f'(\xi_k)\left(\eta_k-\frac{k}{n}\right),\eta_k<\xi_k<\frac{k}{n},$$

所以, $|E_k|\leqslant\frac{M}{n^2}$, 从而　$|\Delta_n|\leqslant\sum_{k=1}^n|E_k|\leqslant\frac{M}{n}$.

注　当 f 在区间 $[0,1]$ 内满足 Lipschitz 条件: $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$ 时, 上界可改进为 $M/(2n)$.

(2)　若函数 f 是区间 $[0,1]$ 上的有界变差函数, $V_0^1(f)$ 是 f 在区间 $[0,1]$ 上的全变差, 则

$$|\Delta_n|\leqslant\frac{1}{n}V_0^1(f).$$

(3)　若存在 ξ: $0<\xi<1$, 使得 f 在区间 $[0,\xi]$ 上递增, 在 $[\xi,1]$ 上递减, $f(\xi)=M$, 则

$$-\frac{M-f(0)}{n}\leqslant\Delta_n\leqslant\frac{M-f(1)}{n},$$

特别, f 在区间 $[0,1]$ 上递减时, 有

$$0\leqslant\Delta_n\leqslant\frac{f(0)-f(1)}{n}.$$

(4) 一般地, 寻找积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的求积公式 $Q=\sum_{k=0}^n\lambda_k f(x_k)$, 可用 Lagrange 插值公式: $f(x)\approx L_n(f,x)=\sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x)$, 令　$\lambda_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$,

$$\|f^{(n+1)}\|_c=\max\{|f^{(n+1)}(x)|: a\leqslant x\leqslant b\}.$$

则 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^n\lambda_k f(x_k)\right|\leqslant\frac{\|f^{(n+1)}\|_C}{(n+1)!}\int_a^b\left|\prod_{k=0}^n(x-x_k)\right|\mathrm{d}x,$$
而在所有首项系数为 1 的 n 次多项式 $p_n(x)$ 中，有积分估计式：
$$\int_{-1}^1|p_n(x)\mathrm{d}x|\geqslant 2^{1-n}.$$

(5)　**梯形公式：**

设 $R_n=\int_a^b f-T_n(f)$. 式中 $T_n(f)=\left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$. $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a)$. 则 $$|R_n|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty.$$

Romberg 外插值可按下式递归定义；
$$T_{n,0}(f)=T_n(f);$$
$$T_{2n,m+1}(f)=\frac{2^{2m+2}T_{2n,m}(f)-T_{n,m}(f)}{2^{2m+2}-1}.$$

T. von Petersdorff 证明：设 $f^{(2m+2)}\in C[a,b]$，则
$$\left|\int_a^b f-T_{2^m n,m}(f)\right|\leqslant c_m\frac{(b-a)^{2m+3}}{n^{2m+2}}\|f^{(2m+2)}\|_c.$$
见[305]1993. 100(8)：783 － 785.

(6)　**抛物线公式(Simpson 公式)：**

设 $$R_n=\int_a^b f-\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^n f(x_{2k-1})\right].$$
式中 $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{2n}, x_0=a, x_{2n}=b$.

则 $$|R_n|\leqslant\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{n}\right)^4\|f^{(4)}\|_c.$$

(7)　$R_1=\int_a^b f-\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$. 若 $f^{(n)}\in L^2[a,b]$. 则
$$|R_1|\leqslant c_n(b-a)\left\{\frac{1}{b-a}\|f^{(n)}\|_2^2-\left(\frac{f^{(n)}(b)-f^{(n)}(a)}{b-a}\right)^2\right\}^{1/2},$$
式中 $c_1=\frac{1}{6}, c_2=\frac{1}{12\sqrt{30}}, c_3=\frac{1}{48\sqrt{105}}$；若　$m\leqslant f''(x)\leqslant M, x\in[a,b]$，则
$$|R_1|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12\sqrt{30}}\left[\frac{(M-m)^2}{4}-\left(\frac{f'(a)-2f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'(b)}{b-a}\right)^2\right]^{1/2}.$$
证明及更一般的情形见 Ujevic. N. [330]2002, 33(2)：129 － 138.

(8)　设 $h_k, t_k>0, h_0=t_0=0, \sum_{k=1}^n h_k=h$,　$\sum_{k=1}^n t_k=1-h, 0<h<1$,

$x_k=\sum_{j=0}^k(h_j+t_j), 0\leqslant k\leqslant n-1$, $A=\{f: f\in C(0,1], f$ 分段可微, $\|f'\|_2\leqslant M\}$,

$\triangle_n(f)=\left|\int_0^1 f-\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}\int_{x_k}^{x_k+h_{k+1}}f(u)\mathrm{d}u\right|$，则
$$\sup_{f\in A}\triangle_n(f)\geqslant\frac{M}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-h}{2n-1}\right).$$

Bezulik, A. V, Math Today, 1993, 8: 153 - 162.

42. **Chebyshev 不等式**：设 f 在 E 上可测，记 $\{|f|>\alpha\}=\{x\in E: |f(x)|>\alpha\}$. 则

$$\mu\{|f|>\alpha\}\leqslant\frac{1}{\alpha^p}\int_E|f|^p\mathrm{d}\mu,\quad\forall\alpha>0,p>0,$$

推广　设 φ 是 $(0,\infty)$ 上非负递增函数，且 $\varphi(x)=0$ 时 $x=0$，则

$$\mu\{|f|>\alpha\}\leqslant\frac{1}{\varphi(\alpha)}\int_E\varphi(|f|)\mathrm{d}\mu.$$

见[103]P.147.

43. **Kolmogorov 不等式**：设 f 是 R^n 上可测函数，若 $\|f\|_w=\sup\limits_{\lambda}(\lambda\mu\{|f|>\lambda\})<\infty$. 则称 $f\in \mathrm{WL}^1(R^n)$.

若 $f\in\mathrm{WL}^1(R^n)$，则 $\forall E\subset R^n,\mu(E)<\infty, 0<p\leqslant 1$，成立

$$\left(\int_E|f|^p\right)^{1/p}\leqslant c(n,p)\mu(E)^{\frac{1}{p}-1}[\sup_{\lambda>0}\mu\{|f|>\lambda\}].$$

见[125]Vol.2.P.48 - 49.

44. 设 E 为 R^n 中测度有限的可测集，$f. g$ 是 E 上正的可测函数，令 $E_\alpha=\{|f|>\alpha\}=\{x\in E: |f(x)|>\alpha\}$，若 $\mu\{|f|>\alpha\}\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha}g, \forall\alpha>0$，则

$$\|f\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|g\|_p, 1<p<\infty.$$

见[73]P.264.

45. 设 $h>0$，A 为 $[a,b]$ 中可测集，则

$$\frac{1}{2h}\int_a^b\mu\{A\cap(x-h,x+h)\}\mathrm{d}x\leqslant\mu(A).$$ （见[305]1982.89:594.）.

46. 设 a,b,p,q 均为正数，f 为正的递增函数，则

$$\int_a^{a+p}f\left(\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_b^{b+q}f\left(\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_{a+b}^{a+b+p+q}f\left(\frac{a+b}{x}\right)\mathrm{d}x.$$ （见[1]P333 定理 397）

47. 设 $f,g\in L^p$，且 f,g 为正函数，$1\leqslant r<p$，则

$$\left|\exp\left(-\int f^rg^{p-r}\right)-\exp\left(-\int f^{r-1}g^{p+1-r}\right)\right|\leqslant C_{r,p}\|f-g\|_p,$$ 式中 $c_{r,p}>0$.

(Potze-Urbach, [399]1990, 3(3): 95 - 96.).

48. 设 $f,g\in L^p(E)$.

(1) 若 $0<p<1$，则

$$\int_E\big||f|^p-|g|^p\big|\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E|f-g|^p\mathrm{d}\mu;$$

(2) 若 $1\leqslant p<\infty$，且 $\|f\|_p\leqslant M,\|g\|_p\leqslant M$，则

$$\int_E\big||f|^p-|g|^p\big|\mathrm{d}\mu\leqslant 2pM^{p-1}\|f-g\|_p.$$

49. 设 μ 为集 Ω 上的概率测度，$1\leqslant p<q<\infty$，$f\in L^q(\Omega)$ 且 $|f|$ 不几乎处处为常数，则对于 $q>3^{1/3}p$，有

$$\|f\|_q^p-\|f\|_p^p\geqslant\Delta(f,p,q)>0,$$

式中　$\Delta(f,p,q)=(q-p)/q[\|f\|_q^p-\|f\|_p^p-\|f\|_p^p\log\|f\|_q^p$

$$+\int_{\Omega}|f|^p\log|f|^p\mathrm{d}\mu].$$

见[359]1990,41(2):245－248.

50.　**HLP(Hardy-Littlewood-Polya)不等式:**

(1)　设 $f\in L^2(0,\infty),g^{-1},h\in L^1_{loc}(0,\infty),g>0$,则

$$\int_0^\infty(g|f'|^2+h|f|^2)\leqslant c\left(\int_0^\infty|1-(gf')'+hf|^2\right)^{1/2}\|f\|_2.\qquad(49.1)$$

1995 年由 Brown,B.M.等推广为:

设 $g_n>0,g_n^{-1},g_{n-1},\cdots,g_1,g_0\in L^1_{loc}(a,b)$,则

$$\int_a^b\left(\sum_{k=0}^n g_k|f^{(k)}|^2\right)\leqslant c\left(\int_a^b\omega|\omega^{-1}M_{2n}[f]|^2\right)^{1/2}\|f\|_{2,\omega},\qquad(49.2)$$

式中 $M_{2n}[f]=\sum\limits_{k=0}^n(-1)^k(p_kf^{(k)})^{(k)}$,$f$ 及(49.2)式中出现的 f 的各阶导数 $\in L^2_\omega[a,b]$(加权 Hilbert 空间).加权内积定义为 $(f,g)_\omega=\int_a^b f\bar{g}\omega$.见[54]7:179－192.

(2)　设 $p\geqslant2,n\geqslant2,q\in R^1,n-q\neq2$,$f$ 是 $R^n-\{o\}$ 上有紧支集的无穷可微函数,$x\in R^n$,则　$$\int_{R^n}\frac{|f(x)|^p}{|x|^{q+2}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{|n-q-2|}\right)^p\int_{R^n}\frac{|\nabla f|^p}{|x|^{q-p+2}}\mathrm{d}x.$$

(Khajeh 等.[327]1991,66(2):115－124)

(3)　设 $f:[0,\pi]\to R^1,f,f'\in AC[0,\pi],f''\in L^2[0,\pi]$,则

$$\int_0^\pi[(f')^2-f^2]\leqslant C\left[\int_0^\pi(f''+f)^2\right]^{1/2}\|f\|_2.$$

若 $f(\pi)=0$,则 $C\approx4.64$;若 $f(0)=f(\pi)=0$,则 $c=1$.

(Brown,B.M.等.[54](6))此外见[326].1994,17(1):193－196.

51.　[MCU]**Kantorovich 不等式:**设 $f,1/f\in L[a,b]$ 且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$,则

$$(b-a)^2\leqslant\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2.$$

提示:利用 Cauchy 不等式,[345]1988.9.给出了六种证法.

推论 1　设 $f\in L[a,b],0<m\leqslant f(x)\leqslant M$,则 $\forall\alpha\in R^1$,成立

$$(b-a)^2\leqslant\left(\int_a^b f^\alpha\right)\left(\int_a^b f^{-\alpha}\right)\leqslant\frac{[(m^\alpha+M^\alpha)(b-a)]^2}{4(mM)^\alpha}.$$

推论 2　设 f 在[0,1]上递增,$f(0)>0$,则

$$1\leqslant\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{[f(0)+f(1)]^2}{4f(0)f(1)}.$$

推论 3　设 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上可积,且 $0<m\leqslant f(x,y)\leqslant M$,则 $\forall\alpha\in R^1$,

$$\left(\iint_D f^\alpha\right)\left(\iint_D f^{-\alpha}\right)\leqslant\frac{[(m^\alpha+M^\alpha)\mu(D)]^2}{4(Mm)^\alpha}.$$

(赵明方,[345]1986,1:46).离散类似见第 3 章 N.95.

推论 4　设 $f,1/f,\omega\in L(E),0<m\leqslant f(x)\leqslant M,\omega(x)\geqslant0,x\in E$,则

$$\left(\int_E f\omega\right)\left(\int_E\frac{\omega}{f}\right)\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\int_E\omega\right)^2.$$ (楼宇同,[353]1991,4:24－28)

52. 设 $f,g\in L^2[a,b]$, $f\neq 0$, $m\leqslant\frac{g(x)}{f(x)}\leqslant M\quad a.e.\ x\in[a,b]$,则

$$\int_a^b g^2+mM\int_a^b f^2\leqslant(M+m)\int_a^b fg,$$

仅当 $g(x)=mf(x)$ 或 $g(x)=Mf(x)\quad a.e.\ x\in[a,b]$ 时等号成立.[376]1963,69:415 - 418.1986 年邵剑波证明了一个类似的结果.见[344]1986,3:76 - 78.

53. **Natanson 不等式**:设 g 在 $[a,b]$ 上非负递减,且

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M(x-a).\ x\in[a,b],\text{则}$$

$$\left|\int_{a+0}^b fg\right|\leqslant M\int_a^b f.$$

提示:作分部积分,细节见[8]P26.

54. 设 $f,g\in C[a,b]$, g 可微,令 $F(x)=\int_a^x f$,则

$$\left|\int_a^b fg\right|\leqslant\left[\int_a^b|g'|+|g(b)|\right]\|F\|_c.$$

特别当 $g'(x)\leqslant 0$, $g(x)>0$ 时成立

$$\left|\int_a^b fg\right|\leqslant g(a)\|F\|_c.$$

(提示:作分部积分,见[76]P136 - 137)

55.(1) 设 $f,g\in L[a,b]$, $f,g>0$,则

$$\int_a^b fg\geqslant\frac{1}{b-a}\left[\int_a^b(fg)^{1/2}\right]^2.$$

(2) 设 $f\in L^1[0,1]$, $f\geqslant 0$, $1\leqslant p<\infty$,令 $g(x)=\int_0^{1-x}f(t)\mathrm{d}t$,则

$$\left\{\int_0^1 f(g^p)\right\}^{1/p}\leqslant\int_0^1 f(g^{1/p}).$$

它的离散类似见第 3 章 N122(5).(Alzer,H.[358]1994,133(1 - 3):279 - 283)

56. **Steffensen 不等式**:设 $g_1,g_2\in L[a,b]$,且 $\int_a^x g_1\leqslant\int_a^x g_2$, $\forall x\in[a,b]$ 且 $\int_a^b g_1=\int_a^b g_2$.若 f 在 $[a,b]$ 上递减,则 $\int_a^b fg_1\leqslant\int_a^b fg_2$.若 f 递增,则不等号反向.

提示:令 $g=g_2-g_1$, $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$,作分部积分:

$$\int_a^b fg=\int_a^b f\mathrm{d}G=-\int_a^b G\mathrm{d}f.\text{详见[4]P.152 - 153.}$$

57. [MCU] 设 $f\in C[0,1]$, $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, $x\in[a,b]$, $f(0)=0$,则

$$\int_0^1 f^3\leqslant\left(\int_0^1 f\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2.$$

仅当 $f(x)=0$ 或 $f(x)=x$ 时等号成立.

证 令 $F(x)=\left(\int_0^x f\right)^2-\int_0^x f^3$,见[66]P435 - 436.

58. 设 $f,g\in L[a,b]$, $g>0$,则

$$\int_a^b (f^2/g) \geqslant \left(\int_a^b f\right)^2 / \left(\int_a^b g\right).$$

提示:用 Cauchy 不等式.

59.　设 φ 是开区间 (a,b) 上正的连续函数. 令 $h = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$. $r(x) = 1/\varphi(x)$, $a < x < b$, 又设 f,g 是开区间 (a,b) 上局部绝对连续函数, 而且 $r(x)[f'(x)]^2$ 和 $r(x)[g'(x)]^2$ 都在开区间 (a,b) 上可积, 记 $A(f,\varphi) = \left(\int_a^b \varphi f\right)\left(\int_a^b \varphi\right)^{-1}$, 则

$$|A(fg,\varphi) - A(f,\varphi)A(g,\varphi)| \leqslant h\pi^{-2}\left\{\int_a^b (rf')^2 \int_a^b (rg')^2\right\}^{1/2}.$$

仅当 $f(x) = A + B\sin\theta(x)$, $g(x) = C + D\sin\theta(x)$ 时等号成立, 其中 A,B,C,D 为实常数, $\theta(x)$ 定义为

$$\theta(x) = \frac{\pi}{2h}\left(\int_x^b \varphi - \int_a^x \varphi\right) \quad a < x < b,$$

见[33]1979,634－677:62－69.

60.　设 $0 < p \leqslant q < \infty$, $t > 0$ 时 $f(t)$ 非负可测, 且满足

$$[f(s)]^p \leqslant (B/s)\int_0^s [f(t)]^p \mathrm{d}t, \ (s > 0), \tag{60.1}$$

则对 $(0,\infty)$ 上任意非负递减函数 $g(s)$, 都有

$$\| s^r f(s) g(s) \|_q \leqslant B^r \| fg \|_p, \text{式中 } r = 1/p - 1/q. \tag{60.2}$$

证　因为 $F = fg$ 满足(60.1)式, 所以, 不妨设 $g \equiv 1$. 令 $A = \| f \|_p < \infty$, 则从(60.1)式有

$f(s) \leqslant A(B/s)^{1/p}$, $s > 0$. 从而

$$\int_0^\infty S^{(q/p)-1}[f(x)]^q \mathrm{d}s \leqslant \int_0^\infty s^{q/p-1}[A(B/s)^{1/p}][f(x)]^p \mathrm{d}s$$

$$\leqslant A^{q-p}B^{q/p-1}\int_0^\infty [f(s)]^p \mathrm{d}s = A^q B^{q/p-1},$$

两边开 q 次方即可得证. 见[368]1984.33:267－268.

61.　设 $\{f_n\}$ 是 E 上可测函数列, 若存在 $g \in L(E)$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$　a.e. $x \in E$, 则

$$\int_E (\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

见[118]P110.

62.　设 $0 \leqslant f' \leqslant 1$, $0 \leqslant g(x) < x$. 若 $p > 1$, 则

$$\int_0^1 \left(\frac{f(x) - f(g(x))}{x - g(x)}\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \frac{pf(1) - [f(1)]^p}{p - 1};$$

若 $p = 1$, 则

$$\int_0^1 \frac{f(x) - f(g(x))}{x - g(x)} \mathrm{d}x \leqslant f(1)[1 - \ln f(1)]. \text{(见[1]P.334 定理 400)}$$

63.　设 $x > 0$, $f_0(x) > 0$, $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$, 则

$$nf_{n+1}(x) < xf_n(x).$$

提示:用数学归纳法.

64. 设 $f\in C[0,1]$,且 $0\leqslant f(x)<1, x\in[0,1]$,则

$$\int_0^1\frac{f}{1-f}\geqslant\left(\int_0^1 f\right)/\left(1-\int_0^1 f\right)$$

65. **二重积分不等式:**

(1) 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,f 在 D 的边界 ∂D 上为零,且 $\left|\dfrac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right|\leqslant M$,则

$$\left|\iint_D f\right|\leqslant\frac{M}{144}.\quad[\mathrm{MCU}]$$

(2) 设 $D=\{z:|z-z_0|\leqslant r, z_0=x_0+iy_0, 0<r<y_0\}$,则

$$\left|\iint_D\ln\left(1-\frac{4y\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{c\eta}{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2}.$$

对上半平面内的 $\zeta=\xi+i\eta$ 一致成立,常数 C 与 D 有关.[83]P.290－291.

(3) 设 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ 为单位圆,∂D 为 D 的边界,若 f 在 ∂D 上为零,则存在 $(x_0,y_0)\in D$,使得

$$\iint_D f<\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\Bigg|_{(x_0,y_0)}.$$

([56]Vol.2.P197)

(4) [MCU].设 $D=\{(x,y):r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2\}$,$0<c=(a^2+b^2)^{1/2}<r<R$,则

$$\frac{1}{R+r}\leqslant\frac{1}{\pi(R^2-r^2)}\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{1/2}}\leqslant\frac{1}{r-c}.$$

(5) [MCU]　设 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$,则

$$\frac{61\pi}{165}\leqslant\iint_D\sin(x^2+y^2)^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{2\pi}{5}.$$

66. **Jensen 不等式:** $E\subset R^n$. $\mu(E)=1$. f 是 E 上正的可测函数,则

$$\left[1+\left(\int_E f\right)^2\right]^{1/2}<\int_E\sqrt{1+f^2}\leqslant 1+\int_E f.$$

[73]P.170－172.

67. **Rellich 不等式:** 设 $u\in C_0^\infty(R^n-\{0\})$,并且不恒等于零,则

$$\|\Delta u\|_2\geqslant\frac{n(n-4)}{4}\left(\int_{R^n}\frac{|u(x)|^2}{|x|^4}\mathrm{d}x\right)^{1/2}\ (n\neq 2).$$

若加上条件:$\displaystyle\int_0^{2\pi}u(|x|\cos\theta, |x|\sin\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$;

$$\int_0^{2\pi}u(|x|\cos\theta, |x|\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0, 0<|x|<\infty,$$

则上述不等式对 $n=2$ 也成立.它的推广见[308]1989,106(4):987－993,和[330]1991,22(3):259－265.

68. **Khinchin 不等式:** 这是独立函数的和按 L^p 范数的估计.

(1) 若 $\forall n\in N, \forall c_k$,可测函数列 $\{f_k\}$ 满足:

$$\mu\{x: f_k(x) < c_k, 1 \leqslant k \leqslant n\} = \prod_{k=1}^{n} \mu\{x: f_k(x) < c_k\},$$

则称$\{f_k\}$为独立函数系.设$\{f_k\}$为独立函数系,若$p > 2, \sup\limits_k \| f_k \|_p < \infty, \int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = 0$.令$f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k f_k, \| x \|_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} | x_k |^2\right)^{1/2}$,则

$$\| f \|_p \leqslant C \| x \|_2. \tag{68.1}$$

(2)　独立函数系$\{f_k\}$的最简单例子就是Rademacher函数系:$r_k(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^k \pi t)$, $t \in [0,1]$.设$x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2, f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t), 0 < p < \infty$,则

$$\frac{1}{2} \| x \|_2 \leqslant \| f \|_p \leqslant C_p \| x \|_2. \tag{68.2}$$

式中$\| f \|_p = \left(\int_0^1 | f |^p\right)^{1/p}, C_p = 0(\sqrt{p}), p \to \infty$.见[354]1923,18:109 - 116.

若令$f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k x_k(t)$,则当$p \geqslant 3$时,成立

$$\| x \|_2 \leqslant \| f_n \|_p \leqslant c(p,n) \| x \|_2. \tag{68.3}$$

式中　$c(p,n) = n^{-1/2}\left(\int_0^1 | \sum\limits_{k=1}^{n} r_k |^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$

(Komorowski,R.,[366]1988,20:73 - 75).

1989年,冯慈璜证明:当$p \geqslant 2$时,(68.3)式仍成立,

而且　$c(p,n) = \left(2^{-n} n^{-(p/2)} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} | n - 2k |^p\right)^{1/p}$

所用的证明方法是概率方法,用到第15章 §1,N.24. Whittle不等式

(见[352]1989,16(3):350 - 351.

(3)　设X为赋范线性空间,$x_1, \cdots, x_n \in X$,则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \| \mathrm{d}t. \tag{68.4}$$

(Latala,R. [329]1994,109(1):101 - 104;Podkorytov,A.N.等,Petersburg Math.J. 1999,10(1):211 - 215)

(4)　设Ω是乘积集合$\{-1,1\}^{\alpha}, \alpha \in I$,我们赋予它一个Bernoulli概率测度$d\mu(\omega)$,这个测度是每个因子在$-1$和1处有质量$\frac{1}{2}$的测度之积,因此,$\Omega$的元$\omega$就是一个由$\pm 1$组成的序列$\omega(\alpha)$,从而由$S(\omega) = \sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha \omega(\alpha)$组成的$L^2(\Omega)$的闭子空间中,所有的$L^p(\Omega, d\mu(\omega))$范数$\| S \|_p = \left(\int_\Omega | S(\omega) |^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} (0 < p < \infty)$都是被此等价的.即存在两个正常数$C_1, C_2$,使得

$$C_1 \| x \|_2 \leqslant \| S \|_p \leqslant C_2 \| x \|_2, \tag{68.5}$$

式中$\| x \| = \left(\sum\limits_{\alpha \in I} | x_\alpha |^2\right)^{1/2}$.见[125]Vol.1.P218 - 219.

(5)　**Kahane不等式**:设$(X, \| \cdot \|)$为Banach空间,$1 < p < \infty$,则存在常数$C_p >$

0,使得 $\forall\{x_k\}\subset X$,成立

$$\|f\|_1\leqslant\|f\|_p\leqslant C_p\|f\|_1.$$

$f(t)=\sum_{k=1}^{n}r_k(t)x_k$,式中 $\|f\|_p=\left(\int_0^1|f|^p\right)^{1/p}$.

(见俞鑫泰,Banach 空间选论.上海:华东师范大学出版社,1992,P.231－237)

(6)　设 $0<p,q<\infty$.存在常数 $C(p,q)$,使得对 Banach 空间$(X,\|\cdot\|)$中任何元 x_k,令 $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kr_k(t)$,成立

$$\left(\int_0^1\|f(t)\|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\leqslant C(p,q)\left(\int_0^1\|f(t)\|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}. \tag{68.6}$$

(见 Kahane,J.-P.,Some random series of functions,Cambridge Univ. Press,1985).

(7)　进一步推广见[329]1998,130(2):101－107.Khinchin 不等式在调和分析、小波分析等领域有广泛的应用,例如见[57][125][133]等.

69.　**Dresher 不等式**:Dresher,M 和 Danskin,J.M.分别利用矩量空间的技巧和基本不等式证明了第3章 Beckenbach 不等式的积分形式:设 f,g 是非负函数,$0\leqslant r\leqslant1\leqslant p$,则

$$\left[\frac{\int|f+g|^p}{\int|f+g|^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}\leqslant\left[\frac{\int f^p}{\int f^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}+\left[\frac{\int g^p}{\int g^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}.$$

见[305]1952,59:687－688,[324]1953,20:261－271,[2]P.28 指出也可由拟线性化方法证明.1985 年王挽澜,王鹏飞证明:设 f,g 是 $E=[0,1]$ 上正值可积函数,$1<p<2$,则

$$\|fg\|_1\leqslant\frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_{p-1}^{p-1}}\cdot\frac{\|g\|_\alpha^p}{\|g\|_\beta^{p-1}},\qquad\frac{\|f+g\|_\alpha^p}{\|f+g\|_\beta^{p-1}}\leqslant\frac{\|f\|_\alpha^p}{\|f\|_\beta^{p-1}}+\frac{\|g\|_\alpha^p}{\|g\|_\beta^{p-1}},$$

式中 $\alpha=p/(p-1)$,$\beta=(p-1)/(p-2)$.见"成都科技大学学报"1987,4:121－124.

70.　(1)　**Beckenbach 不等式**:设 $E=[0,\beta]$,a,b,c,p,q 均为正数,$1/p+1/q=1$,$f\in L^p(E)$,$g\in L^q(E)$,$f,g\geqslant0$,令 $h=(\frac{a}{b}g)^{q/p}$,$G(f)=(a+c\int_E f^p)^{1/p}/(b+c\int_E fg)$,则 $G(h)\leqslant G(f)$.仅当 $f=h$,a.e.时等号成立。

1994 年,胡克将其改进为

$$G(H)\leqslant G(f)\{1-[a/(a+c\int_E f^p)-(\frac{b}{a^{1/p}})^qG(h)]^2\}^{\varphi(p)},$$

式中　当 $p>q$ 时 $\varphi(p)=1/(2p)$,当 $p\leqslant q$ 时,$\varphi(p)=(p-1)/(2p)$,仅当 $f=h$ a.e.时等号成立,见江西师大学报 1994,18(2):140－141.

(2)　**反向 Beckenbach 不等式**:设$(X,\sum,\mu)$为有限测度空间,$f\in L^p(X)$,$g\in L^q(X)$,$1<p<\infty$,$1/p+1/q=1$,$a,b,c>0$,$h=\left(\frac{a}{b}g\right)^{q/p}$,$a-c\int_X f^p\mathrm{d}\mu>0$,$a-c\int_X h^p\mathrm{d}\mu>0$,则

$$\frac{\left(a-c\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}}{b-c\int_X fg\mathrm{d}\mu}\leqslant\frac{\left(a-c\int_X h^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}}{b-c\int_X hg\mathrm{d}\mu}.$$

作者们还由此导出离散类似,并推广了王中烈的结果. 见 Mond,B. 等[359]1995,51(3):417 - 420,

71. **Moser 不等式:**设 $f\in L^p(0,\infty)$,$1<p<\infty$,$1/p+1/q=1$,定义 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,$x>0$,则 $\forall a\leqslant 1$,$\|f\|_p\leqslant 1$,存在常数 C_p,使得

$$\int_0^\infty \exp\{ax^q|F(x)|^q-x\}\mathrm{d}x\leqslant C_p. \tag{71.1}$$

若 $f\in L^p(R^1)$,$f\geqslant 0$,$\|f\|_p\leqslant 1$,F 定义为

$$F(x)-F(0)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\text{并满足}\quad\int_{-\infty}^\infty F(t)e^{-|t|}\mathrm{d}t=0.$$

设 $1<p<\infty$,$1/p+1/q=1$,$a\leqslant 1$,则

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\{a|F(x)|^q-|x|\}\mathrm{d}x\leqslant C_p. \tag{71.2}$$

Holland,F. 与 Walsh. D. 先后将上述结果推广到一般的积分算子:

$$F(x)=(Tf)(x)=\int_{R^1}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

其中核 $K(x,y)$ 为非负且 -1 次齐次,见[329]1995,113(2):141 - 168 和[360]1999,73(6):442 - 458.

72. 设 f,g 在$[a,b]$上满足条件:

$g(x)/f'(x)$ 单调且 $\frac{f'(x)}{g(x)}\geqslant m>0$ 或 $\frac{f'(x)}{g(x)}<-m<0$, 则

$$\left|\int_a^b g(x)\exp(if(x))\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{m},$$

见 Titchmarsh,E. C. Theory of Riemann Zeta-function,Onford 1951.

73. **单调函数的加权不等式:**设 f 是$(0,\infty)$上正的可测函数且 $x^{-a}f(x)$ 递减,$0<p\leqslant q<\infty$,u,v 为权函数,则

$\|f\|_{q,u}\leqslant C\|f\|_{p,v}$ 成立的充要条件是

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t x^{qa}u(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_0^t x^{pa}v(x)\mathrm{d}x\right)^{-1/q}<\infty.$$

(Maligranda,L.,Collect. Math. 1997,48(4 - 6):687 - 700 和[317]1998,57(2):363 - 370). 多重积分的相应不等式见 Math. Bohem 1999. 121(2 - 3):329 - 335.

74. 设 F 是$(0,\infty)$上实值函数,使得 $g(x)=\frac{F(x)-F(0)}{x}$ 是$(0,\infty)$上正的递增函数. $P_n(x)$ 为 n 阶代数多项式,且 $P_n'(x)$ 的所有零点均位于$[-1,1]$内. $|P_n(x)|\leqslant 1$,$x\in[-1,1]$. $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 是 Chebyshev 多项式,则

$$\int_1^1 F(|P''_n(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^1 F(|T''_n(x)|)\mathrm{d}x,$$

仅当 $P_n=\pm T_n$ 时等号成立.(Avvakumova. L. S.,East J. Approx. 1997,3(2):187 - 201).

75. **椭圆积分不等式:**

(1) $\frac{\pi}{4}(a+b)\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\,dx\leqslant\frac{\pi}{6}(a+2b).$

当 $b<7a$ 时,上限可改进为$\frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

(2) $\frac{\pi}{6}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx<\frac{\sqrt{2}}{8}\pi.$

祁锋利用构造辅助函数方法,将上下限分别改进为$\frac{79}{192}+\frac{\sqrt{2}}{10}$与$\frac{3}{10}+\frac{27\sqrt{2}}{160}$.

见[344]1996,26(3):285-288.

注 清华大学1985年数学竞赛试题为:$\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}}<\frac{\pi}{6}$.

(3) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}.$

(4) $\alpha>2$ 时,

$$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^\alpha}}<\frac{\pi}{6}.$$

(5)[MCU] $\frac{1}{20\sqrt[3]{2}}<\int_0^1\frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx<\frac{1}{20}.$

更一般地,当 $p\geqslant1,q,\alpha>0$ 时,有

$$\frac{1}{p\times2^{1/q}}<\int_0^1\frac{x^{p-1}}{(1+x^\alpha)^{1/q}}dx<\frac{1}{p}.$$

(6) **扁旋转椭球面的表面积:**

$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(\varepsilon\sin t)^2}\,dt>\frac{4\pi^2}{3}(2a^2+b^2).$$

式中 $0<\varepsilon\leqslant1,\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.a>b$.(另见第4章 §3N.5)

(7) 设 $f(t)=\int_0^1(1-2x\cos t+x^2)^{-3/2}dx,0<t<\pi$,则

$$f(t)<\frac{\pi^2(\pi-t)}{8t^2},\left(0<t\leqslant\frac{\pi}{2}\right);f(t)<(\sin t)^{-3},(0<t<\pi).$$

提示:作换元 $x=\cos t+y\sin t$,得

$$f(t)=(\sin t)^{-2}\left(\sin\frac{t}{2}-\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

再利用 $\sin x-\sin y<|x-y|,(x\neq y).\sin t>\frac{2}{\pi}t,(0<t<\pi/2)$.即可得证.

(8) $\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-(1/2)(\sin x)^2}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})\cdot$

(9) [MCU] $f(y)=\int_0^y\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}\,dx\leqslant\frac{1}{3}\quad(0\leqslant y\leqslant1).$

提示:证 $f'(y)>0$,[305]1992:715-724.

(10) 第一类完全椭圆积分为 $E(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-(r\sin t)^2}},0<r<1$,令

$$f(r)=\frac{1}{1-r^2}[E(r)/\ln(\frac{4}{\sqrt{1-r^2}})-1],\text{则}$$

$$0.13309\cdots=\frac{\pi}{\ln 16}-1<f(r)<\frac{1}{4}.$$

上下界均为最佳,见[319]1998,124(2):309－314.

76.　**概率积分不等式**:设

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x[\exp(-t^2)]\mathrm{d}t.\ R(x)=\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\int_x^\infty\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

$F(x)$ 称为概率积分(或误差函数),$R(x)$ 称为 Mills 比,它们在概率统计中占有十分重要的地位.因而,有关 $F(x)$,$R(x)$ 的不等式也有许多研究.常用的有:

(1)　$F(x)$ 是单调递增的凸函数;

(2)　对于 $x>0$,有 $1-\exp(-c_1x^2)<F^2(x)<1-\exp(-c_2x^2)$,式中 $0\leqslant c_1\leqslant 1$,$c_2\geqslant\frac{4}{\pi}$; $1-\exp(-x^2)<F^2(x)<1-\exp(-\frac{4}{\pi}x^2)$;[MCU].

(3)　对任意实数 x,有

$$F(x)>1-\exp(-2x^2)-\frac{1}{2}\exp(-x^2);$$

(4)　对于任意非负实数 x,y,有 $F(x)F(y)\geqslant F(x)+F(y)-F(x+y)$,仅当 x 或 y 等于 0 或 ∞ 时等号成立;

(5)　**Gordon 不等式:对于 $x>0$,有**

$$\frac{x}{x^2+1}\leqslant R(x)\leqslant\frac{1}{x};$$

(6)　$$\frac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}<R(x)<\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x},(x>0);$$

提示:利用当 $x>0$ 时,有不等式:

$$\left(\int_x^\infty t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_x^\infty\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\int_x^\infty t^2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

(7)　$R(x)$ 的最好上、下界是;当 $x>0$ 时,

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}<R(x)<\frac{2}{\sqrt{x^2+8/\pi}+x},$$

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+2\pi+(\pi-1)x}}<R(x)<\frac{\pi}{\sqrt{(\pi-2)^2x^2+2\pi}+2x}.$$

有关 $R(x)$ 的不等式的详细讨论见[4]§2.26.

77.　令 $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty[\exp(-\frac{t^2}{2})]\mathrm{d}t.\ x>0.$

(1)　$G(x)<\min\{\frac{1}{4}\exp(-\frac{x^2}{2});\frac{1}{2\sqrt{2\pi}x}\exp(-\frac{x^2}{2})\}$;

(2)　$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(\sqrt{4+x^2}-x)\exp(-\frac{x^2}{2})\\ \frac{1}{2}-[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\exp(-x^2)]^{1/2}\end{array}\right\}\leqslant F(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp(-\frac{x^2}{2})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi x^2}\exp(-x^2))]^{1/2}.$$

注意不等式左边的两个下界不能比较:见[4]P238.

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\exp(-\frac{2x^2}{\pi})-\frac{2(\pi-3)}{3\pi^2}x^4\exp(-\frac{x^2}{2})\right\}^{1/2}\leqslant G(x)\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{2}\left\{1+[1-\exp(-\frac{2x^2}{\pi})]^{1/2}\right\}$;

(4) $x>1.4$ 时,$G(x)\leqslant 1-\frac{1}{2}[(4+x^2)^{1/2}-x](2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{x^2}{2})$;

(5) $x\geqslant 2.2$ 时,$G(x)\geqslant 1-\frac{1}{x}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{x^2}{2})$. 见[101]P933.

78. 令 $R_p(x)=\exp(x^p)\int_x^{\infty}\exp(-t^p)\mathrm{d}t,p>1,0\leqslant x<\infty$,则

$$\frac{1}{2}[(x^p+2)^{1/p}-x]<R_p(x)<C_p[(x^p+c_p^{-1})^{1/p}-x],$$

式中 $C_p=\left\{\Gamma(1+\frac{1}{p})\right\}^{p/(p-1)}$.[101]P298.

79. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$ 称为**正态分布函数**:

(1) **Esseen 不等式**:对于非负实数 x,y,有 $f(-x-y)\leqslant 2f(-x)f(-y)$.

(2) 1984 年 Petkovic,M.S.用更一般的凸函数 φ 来代替(1)中的指数 $t^2/2$,证明了:设 φ 是$(-\infty,\infty)$上可微的凸函数,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\infty$,对于 $c>0$,令 $f(x)=c\int_{-\infty}^{x}\exp(-\varphi(t))\mathrm{d}t$,$\lambda=[f(0)]^{-1}$,则对于正实数 x,y 有

$$f(-x-y)\leqslant\lambda f(-x)f(-y).$$

若 φ 还满足条件:$\varphi(-x)\equiv\varphi(x)$,并且令 $g(x)=b\int_0^x\exp\{-\varphi(\alpha t)\}\mathrm{d}t,b>0,\alpha\in R^1$,则

$$g(x)+g(y)-g(x+y)\leqslant\mu\lambda g(x).$$

式中 $\mu=\alpha c/b$.见[331]1984,11-14.

80. (1)**Conte 不等式**:设 $x>0$,则

$$(x+\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{12})\exp(-\frac{3}{4}x^2)<\exp(-x^2)\int_0^x\exp(t^2)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi^2}{8x}(1-\exp(-x^2));$$

(2) $\int_0^x\exp(t^\alpha)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\exp(x^\alpha)-1}{x^{\alpha-1}},\alpha\geqslant 1$;

(3) [MCU] $2\exp(-\frac{1}{4})\leqslant\int_0^2\exp(x^2-x)\mathrm{d}x\leqslant 2e^2$.

(4) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}<\int_0^{\infty}\exp(-x^2)\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2e}$.

(5) $1-\frac{1}{e}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp(-\sin x)\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e})$.

(6) [MCU]. $\frac{5\pi}{2}<\int_0^{2\pi}\exp(\sin x)\mathrm{d}x<2\pi e^{1/4}$.

81. 设 $x>0$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\exp(-x^2\sin^2 t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi^2}{8x^2}[1-\exp(-x^2)].\ ([4]\mathrm{P}.400)$$

祁锋将式中$\frac{\pi^2}{8}$改进为1.见[303]1999,2(1):48.

82.　(1)[MCU],设 $\alpha>0$,则

$$1-\frac{1}{\alpha+1}<\int_0^1\exp(-x^\alpha)\mathrm{d}x<1;$$

(2)　[MCU]　$\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})<\left(\int_0^1\exp(-x^2)\mathrm{d}x\right)^2<\frac{16}{25}$.

(3)　令 $h_p(x)=\int_0^x\exp(-t^p)\mathrm{d}t, x>0$,则

$$\Gamma(1+\frac{1}{p})[1-e^{-\beta x^p}]^{1/p}<h_p(x)<\Gamma(1+1/p)[1-e^{-\alpha x^p}]^{1/p},$$

式中,$0<p<1$ 时,$\alpha=1,\beta=[\Gamma(1+1/p)]^{-p}$,$p>1$ 时 $\alpha=[\Gamma(1+1/p)]^{-p},\beta=1$. 见 Alzer,H. Math. Comput. 1997,66:771－778.

1999年,祁锋等证明:若 $0<p\leqslant 1, x>0$,则

$$x\exp[-(x/2)^p]\leqslant h_p(x)\leqslant(x/2)[1+\exp(-x^p)].$$

若 $p>1, 0<x<(1-(1/p))^{1/p}$,则上述不等号反向.

其证明和进一步的结果见[303]1999,2(1):47－53.

83.　设 $x\geqslant 1$,则对于任意实数 t,有

$$\int_0^x\frac{x^{[t]}}{[t]!}\mathrm{d}t\geqslant e^{x-1}.$$

式中$[t]$是不超过 t 的最大整数.

84.若 $x>0$,则

$$0<\int_0^\infty\frac{[t]-t+1/2}{t+x}\mathrm{d}t<\frac{1}{12x}.$$

85.设 $f(t)=\prod_{k=1}^{n-1}(t-k)$,则

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_n^\infty e^{-t}f(t)\mathrm{d}t<(e-1)^{-n}<\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

春中$(e-1)^{-n}$是最佳上界.见[77]Ex261.

86.设 $f_n(x)=\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.若 $0<x<1$,则

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant f_n(x)\leqslant\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

若 $x<0$,则

$$\frac{(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)[n+2-(n+1)x]}<(-1)^{n+1}f_n(x)\leqslant\frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)(2-x)}\quad(祁锋).$$

87.　**Littlewood 猜想**:设 $0<n_1<n_2<\cdots<n_N$,1949年,Littlewood 猜测:

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^N\exp(in_kx)\right|\mathrm{d}x>c\ln N.$$

1981年,Konjagin 和 McGehee-Pigno-Smith 分别独立地证明了这个著名的猜测,而且证明了一个更强的结果:

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^N c_k\exp(in_kx)\right|\mathrm{d}x>c\sum_{k=1}^N\left|\frac{c_k}{k}\right|.$$

见[376]1981,5:71 - 72.

88. 对于任意复数 $a_1,\cdots,a_n$,有

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^n a_k\exp(it_k)\right|\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\|a\|_2.$$

式中 $\|a\|_2=\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^2\right)^{1/2}$,$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 是最佳常数,证明见[329]1985,81(1):107 - 126.

89. 设$\{n_k\}$是递增数列,且 $\forall k,n_{k+1}/n_k\geqslant\lambda>1,0<p<\infty$,则存在与 p 无关的常数 $c>0$,使得

$$\frac{1}{c}\|a\|_2\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^N a_k\exp(in_kx)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant c\|a\|_2,$$

式中 $\|a\|_2=\left(\sum_{k=1}^N|a_k|\right)^{1/2}$.(见[57])

90. 设 f 在区间$[0,\pi]$上递增连续,且 $f(0)=0,f(\pi)=\pi$,则

$$\left|\int_0^x\exp(if(x)-ix)\mathrm{d}x\right|>2.$$

其中 2 是最佳下界. 见 Michigan Math. J. 1963,10:181 - 192.

91. 设 $\alpha,\beta>0,p=\beta/(\beta+1)$,则

$$\int_0^1 e^{\alpha t}\cdot\exp[-(1-t)^{-\beta}]\mathrm{d}t\leqslant 2\exp(\alpha-\alpha^p).$$

92. $\frac{3}{4}<\int_0^1 x^x\mathrm{d}x<\frac{5}{6}$.

93. 设 $p\geqslant 1,1-1/p<\alpha<2-1/p$,对于 $f\in L^p(0,\infty)$,令

$$F(x)=\int_0^\infty f(t)\frac{\sin xt}{t^\alpha}\mathrm{d}t,$$

则对于所有 $\beta\geqslant p$,存在常数 $A(\beta,p,a)$,使得

$$\left(\int_0^\infty x^q|F(x)|^\beta\mathrm{d}x\right)^{1/\beta}\leqslant A(\beta,p,a)\|f\|_p.\text{式中 } q=\beta(1-(1/p)-\alpha)-1.$$

证明见[73]P370 - 373. 问题:如何估计常数 $A(\beta,p,\alpha)$?

94. **Salem 不等式**:设$\{E_k\}$是$(0,2\pi)$中任意递增或递减集列,则

$$\sum_{k=2}^\infty(\log k)^{-1}\left\{\left(\int_{E_k}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{E_k}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\right\}\leqslant c\|f\|_2^2.$$

若 $0<n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, $n_{k+1}/n_k>q>1$,记 $E_k=E_{n_j}$, $(n_{j-1}<k\leqslant n_j$, $j=1,2,\cdots)$,则

$$\sum_{k=1}^\infty\left\{\left(\int_{E_k}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{E_k}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\right\}\leqslant c_q\|f\|_2^2$$

见[57]Vol. 2. p. 197.

95. 设二阶导数 φ'' 在区间$[a,b]$上连续且不为0,若存在常数 $c>0$,使对于$[a,b]$中所有 x,有 $\varphi'(x)\geqslant c$,则

$$\left|\int_a^b\sin\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{c}.$$

提示:在被积式中乘上和除以 $\varphi'(x)$,然后用积分第二中值公式.

96.(1)　**Dunkel 不等式**:设函数 f 在$[a,b]$上可积,不恒等于0,且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$0\leqslant f(x)\leqslant M$,则

$$0<\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}M^2(b-a)^4.$$

注　上界可改进为

$$M^2(b-a)^2\left[1-\left\{\frac{\sin\left(\dfrac{b-a}{2}\right)}{\dfrac{b-a}{2}}\right\}^2\right].$$

提示:令 $D=[a,b]\times[a,b]$,将不等式中的积分差化为二重积分处理.

$$J=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\iint_D f(x)f(y)(1-\cos(x-y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\text{从而}$$

$$0<J<M^2\iint_D[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[305]1925,32:319－321.

(2)　[MCU].设 $f\in C[a,b]$,$f(x)\geqslant 0$,$\int_a^b f=1$,$\beta\in R^1$,则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos\beta x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin\beta x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1.$$

97.　设 f 在区间$[0,\pi]$上有二阶连续导数,$f(0)=f(\pi)=0$,若 f 的 Fourier 级数展开式的部分和为 $S_n(f,x)=\sum_{k=1}^n a_k\sin kx$,则

$$\int_0^\pi[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{3(n+1)^3}\int_0^\pi[f''(x)]^2\mathrm{d}x.$$

98.　**Dirichlet 核 $D_n(t)$ 的积分不等式:**

(1)　$\displaystyle\int_0^\pi|D_n(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\mathrm{d}t<\pi\left(1+\frac{\log n}{2}\right)\quad(n\geqslant 2).$

提示:$\displaystyle\int_0^\pi|D_n(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}}+\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi/2}=I_1+I_2.$

利用 $|\sin nt|\leqslant n|\sin t|$ 估计 I_1,而利用 $\sin t\geqslant\dfrac{2}{\pi}t$,以及 $|\sin(2n+1)t|<1$ 估计 I_2.

(2)　$\displaystyle\frac{2}{\pi}\ln(n+1)\leqslant\int_0^\pi|D_n(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi}{2}(1+\ln(2n+1))$;

(3)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t<\begin{cases}\pi(\ln n+\ln\pi)+2\left(1+\dfrac{1}{2n}\right);\\ \pi\ln n\left(1+\dfrac{\ln\pi}{\ln 2}+\dfrac{5}{2\pi\ln 2}\right);\end{cases}$

(4)　$\displaystyle\int_0^{1/n}D_n(t)|\mathrm{d}t\leqslant 1+\frac{1}{2n}$;

(5)　$\displaystyle\int_{1/n}^\pi|D_n(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\pi}{2}(\ln\pi+\ln n)$;

(6)　$\displaystyle\left|\int_x^\pi D_n(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\pi}{(n+1)x},0<x<\pi.$

(见[327]1992,71:344 - 358)

注 $D_n(t)$的定义见第6章§3.N41. $L_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t$ 称为$D_n(t)$的 Lebesgue 常数,已知 $L_n=\frac{4}{\pi^2}\ln n+R_n$. $|R_n|\leqslant 3$.

99. Fejèr 核 $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$ 的积分不等式:

(1) 若 $0<\alpha\leqslant 1$,则 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n}x^{\alpha}K_n(x)\mathrm{d}x\leqslant n^{-\alpha}$;

(2) $$\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi}x^{\alpha}K_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\begin{cases}\dfrac{\pi n^{-\alpha}}{2(1-\alpha)}, & 0<\alpha<1,\\[2mm] \left(\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{\log n+\log\pi}{(n+1)}, & \alpha=1;\end{cases}$$

(3) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x^{1+\alpha}K_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\pi^2/(n\cdot 2^{\alpha}),0<\alpha\leqslant 1$;

(4) $\int_{\delta}^{\pi}K_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi^2}{2(n+1)\delta}$, $0<\delta<\pi$.

100. 从 Dirichlet 核 $D_n(t)$ 还可得到 **n 阶 Rogosinski 核:**

$$R_n(t)=R_n(t,\gamma_n)=\frac{1}{2}[D_n(t-\gamma_n)+D_n(t+\gamma_n)]=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\gamma_n\cos kt,$$

式中 $\gamma_n=0(\frac{1}{n})$. 特别当 $\gamma_n=\frac{\pi}{2n}$ 时,$R_n(t)=R_n(t,\pi/2n)$ 可以表示为

$$R_n(t)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\cos nt}{\cos t-\cos(\pi/2n)}=c\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos t-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

它有以下常用的估计式:

(1) $\|R_n\|_c=\max_t|R_n(t)|=|R_n(0)|<\frac{2n}{\pi}$.

(2) $R_n(t)$ 的 Lebesgue 常数为

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|R_n(t)|\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\gamma_n,$$

式中 $\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t<1.851$, $0<\gamma_n<\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{n^2}$.

(3) $\int_{\delta}^{\pi}|R_n(t)|\mathrm{d}t<\frac{\pi^3}{4n\delta}$, $0<\delta<\pi$.

101. 我们还可以进一步研究与它非常接近的 Tригуб 核 $\tau(t,k,n)$:

$$\tau(t,k,n)=2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[D_n(t)+(-1)^{j+1}D_n\left(t+\frac{j\pi}{n}\right)\right]=$$
$$=D_n(t)+2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1}D_n\left(t+\frac{j\pi}{n}\right).$$

它的 Lebesgue 常数为

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tau(t,k,n)|\mathrm{d}t<2k.$$

从 Fejer 核的周期性出发可以得到非周期的代数核:

$$F_n(x)=\frac{2n}{\gamma_n}K_n(\arccos(1-(x^2/2)))$$
$$=\frac{1}{\gamma_n}\cdot\frac{\sin^2\left[\frac{n+1}{2}\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right]}{\sin^2\left[\frac{1}{2}\arccos\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right]},$$

$-2\leqslant x\leqslant 2$,选择 γ_n 满足$\int_{-1}^{1}F_n(x)\mathrm{d}x=1$,于是 $\gamma_n>n(n\geqslant 3)$,且

$$\int_{\delta}^{1}F_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi^2}{\pi\sigma}\quad(0<\sigma<1,n\geqslant 3).$$

见[82]P.129 - 136.143 - 144.

102.　设 $\alpha,\beta>0$,则

$$\left|\int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\sqrt{\beta^2+x^2}}{\sqrt{x^2+\beta^2}(x^2+\alpha^2+\beta^2)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

103.　$\int_0^{\pi/2}\sqrt{x\sin x}\,\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

104.　设 $0<a\leqslant 1,p>1$,则

$$\frac{a^{p+1}}{(p+1)(n+1/5)^{p+1}}<\int_0^{a/n}(\sin x)^p\mathrm{d}x<\frac{1}{p+1}\left(\frac{a}{n}\right)^{p+1}.$$

左边不等式见[327]1990,62(2):197 - 205.

105.　(1)[MCU].　$\frac{2}{\pi}\leqslant\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<1<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}<\frac{\pi}{2}.$

提示:左边第一、二个不等式利用$(2/\pi)x<\sin x<x\quad(0<x<\pi/2)$即可得证.右边不等式利用 $\cos x\geqslant 1-(x^2/2)$,得到

$$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}>1,$$

另一方面,由 $\cos x<1-2(x/\pi)^2\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 得到:

$$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}.$$

(2)　$\frac{4\sin 1}{\pi}\leqslant\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}\ln(\sec 1+\mathrm{tg}1)$.　(祁锋);

(3)　$\frac{2\sin 1}{\pi}<\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cos x\,\mathrm{d}x<\frac{\pi}{4}\ln(\sec 1+\mathrm{tg}1)$.　(祁锋);

(4)　$\frac{2\ln(\sec 1+\mathrm{tg}1)}{\pi}<\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{4}\sin 1.$

106.　设 $x>a>0$,则

(1)　$\left|\int_a^x\sin(t^2)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2}{a}$;　(2)　$\left|\int_a^{a+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{a}$;

(3)　$2-\sqrt{2}\leqslant\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t<\sqrt{2}$;

(4)　$0\leqslant x\leqslant\pi/2$ 时,有$\int_0^x(t-t^2)(\sin t)^{2n}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2(n+1)(2n+3)}$.[MCU].

(5) $\int_0^x (\sin t)^p \mathrm{d}t \geqslant \frac{x(\sin x)^p}{p+1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}], p > 0.$

107. **陈建功不等式**:设 $0 \leqslant a < b, \beta > 0, A > 0$,则

$$\left|\int_a^b \frac{\sin}{\cos}(nt - At^{-\beta})\mathrm{d}t\right| < \frac{2}{n}.$$

提示:作换元 $x = t - n^{-1}At^{-\beta}(t > 0)$,由上式确定的 $t = \varphi(x)$ 及其导函数均严格递增,然后再用积分第二中值公式. 见[334]1954 或 P263 - 277. [8]P. 24.

108. $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+2)}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1}\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$

提示:利用公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{若 } n \text{ 为偶数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

109. $\left|\int_{\frac{2}{(2n+1)\pi}}^{\frac{2}{(2n-1)\pi}} \sin\left(\frac{1}{\sin(1/t)}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{c}{n^3}.$

式中常数 c 与 n 无关. 见[74]Vol. I. P. 185.

110. 设 $a > 0$,则 $\left|\int_a^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}$; $\left|\int_a^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}.$

提示:令 $u = x^2$,再用积分第二中值公式.

111. $\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x > 0$,特别 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\mathrm{d}x > 0$. [MCU].

提示: $\int_0^\infty = \sum_{n=0}^\infty \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}$. 再令 $x = \varphi(t) = \sqrt{t^2 + \pi}$.

112. [MCU]. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

证 令 $f(x,n) = \frac{\sin x}{x + n\pi}$. 则

$$\int_0^\infty f(x,0)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x,0)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,0)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \int_0^\pi f(x,n)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \left(-\int_0^\pi f(x,2k-1)\mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x,2k)\mathrm{d}x\right)$$

$$= (-\pi)\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin x}{[x + (2k-1)\pi](x + 2k\pi)}\mathrm{d}x < 0.$$

113. $1.17 < \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \frac{2}{\pi} \times 1.852 = 1.1790.$

提示:从 $\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$ 得到

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - 2\sum_{k=0}^n \frac{\pi^{2k}(-1)^k}{(2k+1)^2(2k)!}\right| \leqslant \frac{2\pi^{2n+1}}{(2n+3)^2(2n+2)!}.$$

取 $n = 4$,得左边不等式.

114. $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

115. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx>0.$

提示:左边 $=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

$=\pi\int_0^{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{\pi+x}dx=\pi\frac{\sin\xi}{\xi}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\pi+x}$.其中 $0<\xi<\pi$.

116. 对于任意常数 a,b,都存在绝对常数 c,使得

$$\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant c. \tag{116.1}$$

式中 $c=2.704$.

注 1 若取 $c=6$,(116.1)式的证明就可大大简化,这时只要对于 $0\leqslant a<b$,证明 $c=3$,为此,先取 $1\leqslant a<b$,由积分第二中值公式,存在 $\xi:a\leqslant\xi\leqslant b$,使得

$$\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx=a^{-1}\int_a^{\xi}\sin x dx=a^{-1}(\cos a-\cos\xi),\text{所以},\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant 2.$$

若 $0\leqslant a<b\leqslant 1$,则

$$0\leqslant\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\int_a^b dx\leqslant 1;$$

而当 $0\leqslant a\leqslant 1\leqslant b$ 时,有

$$\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\left|\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\right|+\left|\int_1^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant 1+2=3.$$

总之,对于 $0\leqslant a<b$,取 $c=3$,即证得(116.1)式.但要证明 $c=2.704$,难度就大得多.详见河田龙夫,应用数学概论,岩波,1950、1952 年.

注 2 $$\frac{1}{4}(\pi+2)<\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}; \tag{116.2}$$

设 $0\leqslant a<b\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$\frac{2(\cos a-\cos b)}{a+b}<\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\leqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right); \tag{116.3}$$

$$\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\frac{2}{a}\quad(a>0).$$

(116.2)与(116.3)式的左边不等式由祁锋证明.

117. 若 $p\geqslant 2$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|^p dt\leqslant\sqrt{\frac{2}{p}}\cdot\pi,$$

仅当 p = 2 时等号成立.见[305]1990,97(8):P.663.

118. 设 $a>1,x\geqslant 0$,则

$$\int_x^{xa}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\leqslant\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

119. 设 $0<a<\pi$,则

$$\int_{a/2}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt\leqslant\frac{2}{2n+1}\csc\frac{a}{2}+\frac{2}{\pi}\log\frac{4}{a}.$$

见[327]1990,62(2):209.

120. $\dfrac{\pi}{(1+(n+1)^{a}\pi^{a})^{1/2}} < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(1+x^{a}\sin^{2}x)^{-1}\mathrm{d}x < \dfrac{\pi}{(1+n^{a}\pi^{a})^{1/2}}.(\alpha>0)$

注 这是Glasgow大学1958年试题,关于这个不等式的改进见[4]Ex3.7.11的评注.

121. $\dfrac{\pi^2}{9} < \int_{\pi/6}^{\pi/2}\dfrac{x}{\sin x}\mathrm{d}x < \dfrac{\pi^2}{6}.$

122. 当 $0 < x \leqslant 1/3$ 时,成立

$$\int_0^x \frac{t}{\sin t}\mathrm{d}t \leqslant x + \frac{3}{53}x^3.$$

123. $\int_0^x \dfrac{\sin t}{1+t}\mathrm{d}t \geqslant 0,(x \geqslant 0).$

124. $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|\dfrac{\sin n\pi x}{\sin \pi x}\mathrm{d}x\right| \geqslant \dfrac{2}{k\pi}.$

式中 $2 \leqslant k \leqslant n$,见[74]Vol.I.P.390.

125. $\int_{1/n}^{n}\dfrac{|\sin(k+1)x|}{2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \leqslant c_1(k+1)+c_2(k+1)\ln\dfrac{n}{k},\ (1\leqslant k < n).$

126. $\int_{1/n}^{\pi}\dfrac{|\sin x|}{2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \leqslant c\ln n,(n \geqslant 2).(c$ 为常数).

问题:$N125-126$ 中常数 c_1,c_2,c 为何估计?

127. $1+2\ln n < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x < 1+\dfrac{1}{2}\ln(2n-1).$

提示:利用 $(\sin nx)^2 = (\sin x)\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x$,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin nx)^2}{\sin x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}.$$

128. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x < \dfrac{1}{4}\pi^2n^2.$

提示:将不等式左端的积分折成 I_1,I_2 两个积分,其中

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x,\quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x.$$

利用 $|\sin x| \leqslant n|\sin x|$ 估计 I_1,用 $|\sin x| \leqslant 1$ 和 $\sin x \leqslant \dfrac{2}{\pi}x$ 估计 I_2.

记 $$f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x$$

1990年叶南发将 $f(n)$ 的上界从 $(n\pi/2)^2$ 改进为 $f(n) < (n^2/9+89/288)\pi^2(n>2)$.见[338]1990,10(1):144.同一年,庄碧如又证明 $n^2\log 2 < f(n) < 17n^2/24$.左边不等式对所有 n 都成立,而右边不等式对于 $n \geqslant 9$ 成立,当 $n \geqslant 4$ 时,上限为 $17n^2/24+14/24$.见新疆大学学报,1990,7(2):17-26.

徐利治等则证明:$f(n) = n^2\ln 2+(1/4)\ln 2+0(1)\quad(n\to\infty)$.

(见[139]P.22-23),进一步,我们可以令

$$G(k,m)=\int_0^{\pi/2}x^k\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^{2m}\mathrm{d}x,$$

已知　$G(2,2)<\frac{n}{6}\pi^3$.问:$G(k,m)$的最佳上下界是什么?

129.　令 $f_{k,m}(x)=x^k\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^{2m}$,则

(1)　$c_1n^{2m-1}\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f_{0,m}(x)\mathrm{d}x\leqslant c_2n^{2m-1}$.　(129.1)

$K_{m,n}(t)=\dfrac{1}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{0,m}(x)\mathrm{d}x}f_{0,m}(t)$　称为 **n 阶 Jackson 型核**,$\forall\delta>0,\delta<\pi$,有

$$\int_\delta^\pi K_{m,n}(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{c}{(n\delta)^{2m-1}}.\tag{129.2}$$

(129.1)式中 $c_1=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m}$, $c_2=2(1+\frac{1}{2m-1})$, (129.2)式中 $c=\frac{\pi^{4m}}{(2m-1)2^{2m+1}}$.见[82]P.138 - 140.

(2)　$\int_0^\pi f_{k,m}(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{c_m}{(n+1)^{k+1}}$, $0\leqslant k\leqslant 2m-2$.

130.　$\frac{4\pi}{3}<\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(1/2)\cos x}<\frac{\pi}{2}(\ln 3-\ln 2)$.

131.　对于所有实数 $a_k,k=1,2,\cdots,n-1$,有

$\int_0^\pi\left|x-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\sin kx\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^2}{2n}$.(证明见[62]$P$74 - 76.)

132.　$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{2n+1}{2}t\right|\cdot\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right|\mathrm{d}t<8\pi^2$.

证明见[60]上册 P.225.

133.　设 $f_\alpha(x)=\int_0^x(\mathrm{tg}t)^\alpha\mathrm{d}t$.

(1)　$f_\alpha(x)\leqslant\frac{x}{\alpha+1}(\mathrm{tg}x)^\alpha$, $\alpha>0$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

(2)　$\frac{1}{2(n+1)}<f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2(n-1)}$　$(n>2)$.

(3)　$f_{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)<f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

134.　**Marcinkiewicz 不等式**:设 F 为单位圆周 Q 的闭子集,$G=Q-F$,$\delta(x)$是 Q 中 x 到 F 的圆弧距离,则 $\forall\lambda>0$,Marcinkiewicz 积分

$M_\lambda(x)=\int_Q\frac{[\delta(y)]^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\mathrm{d}y=\int_G\frac{[\delta(y)]^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\mathrm{d}y$　在 F 上 $a.e.$有限,而且

$\int_F M_\lambda(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\lambda}\mu(G)$.证明见[141]P252.

135.　设 f 是$(a,b]$上递减的概率密度函数,则 $\forall p>0$ 成立

$$\int_a^b x^{2p}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b^{2p+1}-a^{2p+1}}{(2p+1)(b-a)}\int_a^b f$$

若 f 递增,则不等号反向.提示:用概率方法,见[143]P201.

136. [MCU] 设 f 在 R^1 上非负有界连续 . $f(x)=f(-x)$，且

$$0<\int_{R^1}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{R^1}f(x)\mathrm{d}x<\infty,$$则 $\forall x>0$，成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{R^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\alpha_n}f(x_1)\cdots f(x_{n-1})f(x_n)\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}}{\left(\int_{R^1}f\right)^n}\geqslant 1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

式中 $\alpha_n=\sqrt{n}x-\sum_{k=1}^{n-1}x_k$.（证明用概率方法）.

137. 设 f,g，是 X 上非负可测函数，且存在 $y_0\in X$，使得 f 与 g 的分布函数之差在 y_0 点从(一) 到(十) 变号，$f^p-g^p\in L(X,\mu)$，则

$$\varphi(p)=\frac{1}{py_0^p}\int_X(f^p-g^p)\mathrm{d}\mu$$ 递增，从而

$p>p_0>0$ 时，$\Delta(p)=\int_X(f^p-g^p)\mathrm{d}\mu\geqslant 0$.

Nazarov, F. L, 等, Complex analysis, operators and related topics, Birkhauser Basel, 2000, p247 - 267.