§2　解析函数不等式

一、　指数函数不等式

1.　$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|$, $(0 < |z| < 1)$.([101]P.70)

2.　若 $|z| \leqslant 1$,则 $|e^z - z - 1| \leqslant |z|^2$.

证　$|e^z - z - 1| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} z^k/k!\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} |z|^k/k! \leqslant (|z|^2/2)\sum_{k=0}^{\infty}(|z|/2)^k \leqslant |z|^2$.

3.　设 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,则

$$|\alpha\exp\{(1-\alpha)z\} + (1-\alpha)\exp(-\alpha z)| \leqslant \exp(|z|^2).$$

4.　$|e^z - 1| < e^{|z|} - 1 < |z| e^{|z|}$, $(z \neq 0)$.

5.　对于任意实数 α,有

(1)　$|e^{i\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|$.

(2) $|e^{i\alpha}-1-i\alpha|\leqslant\frac{|\alpha|^2}{2!}$.

(3) $|e^{i\alpha}-1-i\alpha+\alpha^2/2|\leqslant|\alpha|^3/3!$.

证 因为每个不等式两边都是 α 的偶函数,故不妨设 $\alpha>0$. 于是,有

(1) $|e^{i\alpha}-1|=\left|\int_0^\alpha e^{ix}\mathrm{d}x\right|\leqslant\alpha$.

(2) $|e^{i\alpha}-1-i\alpha|=\left|\int_0^\alpha(e^{ix}-1)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^\alpha x\mathrm{d}x\right|=\alpha^2/2$.

(3) $$\left|e^{i\alpha}-1-i\alpha-\frac{(i\alpha)^2}{2}\right|=\left|\int_0^\alpha(e^{ix}-1-ix)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\int_0^\alpha|e^{ix}-1-ix|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\alpha\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\alpha^3.$$

6. 令 $f(\alpha)=\exp(-i\alpha)-(1-i\alpha-\alpha^2/2)$,则
$$|f(\alpha)|\leqslant\begin{cases}4\alpha^2,\alpha\in R^1,\\|\alpha|^3,\ |\alpha|\leqslant1,\\p\alpha^2,\ |\alpha|\leqslant p.\end{cases}$$

7. **Kloosterman 不等式:**
$$\left|e^z-(1+\frac{z}{n})^n\right|<\left|e^{|z|}-(1+\frac{|z|}{n})^n\right|<e^{|z|}\cdot\frac{|z|^2}{2n}.$$
见[4]P445 - 447.

8. $\left|e^z-\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|z|}$.

注 1 当 $|z|<n+2$ 时,上界可改进为 $\frac{(n+2)|z|^{n+1}}{(n+1)!(n+2-|z|)}$.

注 2 若 $\mathrm{Re}z\leqslant0$,则
$$\left|e^z-\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

9. 设 $|z|\leqslant\frac{2r-1}{4r^2}$,$1/2<r\leqslant1$,则

$\left|e^z-\frac{4r^2}{4r-1}\right|<\frac{2r(2r-1)}{4r-1}$. (Wall, H. S., [305]1942, 49:549)

10. 设 $0<\alpha<1$, $|z|\leqslant\alpha$, $\beta=\frac{1}{\alpha}(\frac{e^{-\alpha}}{1-\alpha}-1)$,则

$|e^z|\leqslant|1+z|(1+\beta|z|)$. ([355]1968, 20(5):117 - 119)

二、 对数函数不等式

1. 设 $|z|<1$,则

$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|\ln(1+z)|\leqslant|z|\frac{1+|z|}{|1+z|}$. (Wall, H. S., [305]1942, 49;72 - 75)

2. 若 $|z|<1$,则 $\exp(|z|/(|z|-1))\leqslant|1+z|\leqslant\exp(|z|)$.

3. 若 $|z|<1/2$,则 $(1/2)|z|\leqslant|\log(1+z)|\leqslant(3/2)|z|$.

提示:利用 $\ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}z^k/k$,当 $|z|<1/2$ 时,有

$$\left|1-\frac{1}{2}\ln(1+z)\right|\leqslant\frac{|z|}{2(1-|z|)}\leqslant\frac{1}{2}.$$

4. $|\ln(1+z)|<-\ln(1-|z|),(0<|z|<1)$.([101]P.68)

5. $\log^+|1+z|\leqslant 1+|z|$.

6. $|\log^+|z_1|-\log^+|z_2||\leqslant\log 2+\log^+|z_1\pm z_2|$.

三、 三角函数与双曲函数不等式

1. $|\cos z|<2,(|z|<1)$.

2. $|\sin z|<(6/5)|z|,(0<|z|<1)$.

注 在复数范围内,$|\sin z|\leqslant 1$,$|\cos z|\leqslant 1$ 不仅一般不成立,而且沿直线 $\arg z=\theta\neq k\pi$(k 为整数),$z\to\infty$ 时,有 $\cos z\to\infty$,$\sin z\to\infty$. 例如令 $z=iy$,则 $|\cos z|=(e^y+e^{-y})/2\to\infty(y\to\infty)$,但当 $z=x+iy$ 时,有

$$|\sin z|\geqslant|e^y-e^{-y}|/2,\ |\operatorname{tg}z|\geqslant\frac{|e^y-e^{-y}|}{e^y+e^{-y}}.$$

3. $|\operatorname{sh}y|\leqslant|\sin z|\leqslant\operatorname{ch}y$.

4. $|\operatorname{sh}y|\leqslant|\cos z|\leqslant\operatorname{ch}y$.

5. $|\cos z|\leqslant\operatorname{ch}|z|$.

6. $|\sin z|\leqslant\operatorname{sh}|z|$.

7. $|\csc z|\leqslant\operatorname{csch}|y|$.

(以上 1 – 7 见[101]P75)

四、 单叶解析函数不等式

设 f 是复平面上某区域 D 内的复变复值函数,若导数

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

在 D 内处处存在,则称 f 是 D 内的**解析函数**(或正则函数,全纯函数). D 中每点都称为 f 的解析点. 它等价于 f 在 D 内任一点附近都能展开成幂级数. D 内除极点外处处解析的函数称为 D 内的**亚纯函数**(或**半纯函数**).

若 $\forall z_1,z_2\in D$,$z=z_2$ 时,$f(z_1)=f(z_2)$,称 f 是 D 上单叶函数,定义函数类 S:

$S=\{f:f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$,在 $|z|<1$ 内单叶解析$\}$. 函数类 S 在单连通区域单叶函数论中起着特殊作用. 区域 D 内的解析函数 f 在点 z_0 的充分小的邻域 $B(z_0,r)$ 内单叶的充要条件是 $f'(z_0)\neq 0$. 但 f 在 D 内每一点的这种局部单叶性并不能保证 f 在整个 D 内的单叶性. 例如函数 $f(z)=e^z$ 在圆盘 $|z|\leqslant R(R>\pi)$ 内非单叶,尽管该函数在复平面上每一点均满足局部单叶性条件. 有关在 D 内单叶性的充要条件见[107]Vol.5.P343 – 345.

在第七章 §1 定义 21 中，我们定义了单位圆 $D=\{z\in C:|z|<1\}$ 内复变量的凸函数 f，该 f 有幂级数展开式：

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k.$$

若该函数 f 还满足规范化条件：$a_0=f(0)=0.a_1=f'(0)=1$，则记为 $f\in S^0$.

设 $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ 在圆盘 D 内解析，若存在 D 上的凸函数 φ，使得 $\varphi(0)=0$，且

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right)>0,z\in D.$$

则称 f 是 D 上近于凸的，记为 $f\in K$.

我们用 $\sum$ 表示形如 $F(z)=z+c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$ 为 $|z|>1$ 内单叶亚纯函数类.

1.　**Bieberbach 猜想**(1916)：设 $f\in S$，则

$$|a_n|\leqslant n,\forall n. \tag{2.1}$$

1984 年 De Brange 证明了上述猜想成立，同时证明了仅当 $f(z)=\frac{z}{(1-ze^{i\theta})^2}$（$\theta$ 为实常数）时等号成立. 见[322]1985,154:137－152.

注　若 $f\in S^0$，则 $|a_n|\leqslant 1,(\forall n)$.

在证明这个猜想的过程中，下面两个不等式起了重要作用.

(1)　**Lebedev-Milin 不等式**：设 $f\in S,\ln(f(z)/z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}k|c_k|^2(n+1-k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{k}.$$

(2)　**Fitz-Gerald 不等式**：设 $f\in S,a_k,z_k$ 为复数且 $0\leqslant|z_k|<1,k=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_k\bar{a}_j\left|\frac{f(z_k)-f(z_j)}{(z_k-z_j)(1-z_k\bar{z}_j)}\right|^2\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\left|\frac{f(z_k)}{k}\right|^2\right|.$$

1981 年，S. kung 改进了这个不等式，见[317]1981,24:227－242.

注　设 $f\in S$ 且 $\ln\frac{f(z)}{z}=2\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k$，则 c_k 称为 f 的对数系数，这时成立 Milin 不等式：

$$\sum_{k=1}^{n}k|c_k|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\delta,$$ 式中 $0<\delta<0.312$，见[121]P39－41.

2.　设 $f\in S,f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$，则

$$|a_n|\leqslant 1/n.$$

提示：$f'(z)=\sum_{k=1}^{n}ka_kz^{k-1}(a_1=1)$ 的全部零点都落在单位圆外.

3.　**Littlewood 系数不等式**：

设 $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{2n+1}\in S$，则 b_n 称为 f 的 Littlewood 系数，Littlewood 证明 $|b_n$

$|<c$,$(c<16)$ 后,许多数学家如陈建功、龚昇,Levin,Milin. 胡克等都作出了贡献,特别是胡克证明 $|b_n|<1.1305$. 见[121]$P107-109$.

注　设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是整函数,$\forall r>0$,满足 $|f(re^{i\theta})|\leqslant M\exp(r^k)$,式中 M,k 为正数,则对所有 n,有

$$|a_n|\leqslant\frac{M\exp(n/k)}{(n/k)^{(n/k)}}.$$

4.　**龚昇不等式:**

设 $f(z)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 中解析,则经 Möbius 变换后,得到

$$f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{z}\zeta}\right)=f(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\delta^nf(z)}{\delta s^n}\zeta^n, \tag{2.2}$$

其中 $|\zeta|<1$,$\delta/\delta s$ 是相对于 Poincare 度量的固有导数,由此得到(2.2) 式等价于:

$$\left|\frac{\delta^nf}{\delta s^n}\right|\leqslant n!n\left|\frac{\delta f}{\delta s}\right|, \tag{2.3}$$

因为固有导数是不变量. 所以,不等式(2.3) 是对不变量的估计,从这个意义上讲,不等式(2.3) 比等式(2.2) 更有意义. 龚昇从(2.3)式还推出了一系列不等式. 特别,若 $f(z)\in S$,则

$$|a_3-\mu a_2^2|\leqslant\begin{cases}4\mu-3, & 若\ \mu>1,\\ 1, & 若\ \mu=1,\\ 1+2\exp\left(\dfrac{-2\mu}{1-\mu}\right), & 若\ 0<\mu<1,\\ 3-4\mu, & 若\ \mu\leqslant 0.\end{cases}$$

见[333]1986,31(16):1209 - 1212.

5.　**胡克不等式:** 设 $f\in S$,令 $d_n=|a_{n+1}|-|a_n|$,则 $-2.793<d_n<3.26.(\forall n)$. 它改进了 Ye Z. Q. 和 Grinspan, A. Z. 的结果. 见[336]1989,10B(1):38 - 42.

胡克进一步提出,d_n 的最佳上下界是什么?称为 Hayman 常数问题. 见[121]P.2,73.

6.　设 $F(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{z^k}\in\sum$,

则 $|b_1|\leqslant 1$, $|b_2|\leqslant\frac{2}{3}$, $|b_3|\leqslant(1/2)+e^{-6}$.

若 f 是$\sum$ 中星形函数,则 $|b_n|\leqslant\frac{2}{n+1}$, $n\geqslant 1$.

(Hayman, W. K., [317]1965,40(3):385 - 406)

问题:若 $f\in\sum$,则当 $n>3$ 时 $|b_n|$ 的精确上界是多少?

7.　**外部面积定理(Cronwall 不等式):** 设 $F(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}$,在 $|z|>1$ 中为单叶正则,并除去在无穷远点有一极点,则 $\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\leqslant 1$,仅当 $F(z)=z+\frac{e^{ia}}{z}$ 时等号成立. 证明见[120]Vol.2. No.1. P.159.

注　面积定理的推广:若 $F(z)$ 在 $|z|>1$ 上解析且为 m 叶(即其所取每一值至多

m 次)且有展开式

$$F(z)=\sum_{h=-m}^{\infty}b_k z^{-k},b_{-m}\neq 0,\text{则}\quad \sum_{k=1}^{\infty}k\mid b_k\mid^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}k\mid b_{-k}\mid^2.$$

8. **Milin-Lebejev 不等式**:设 $F\in\sum$,C_r 是 $w=F(z)$ 将圆 $|z|=r(r>1)$ 映成的闭曲线,G_r 为其内部区域,$Q(w)$ 是 G_r 内的解析函数.若 $Q(F(z))$ 在 $1<|z|<\infty$ 内的展开式为

$$Q(F(z))=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k z^{-k}+\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^k,\text{则}\quad \sum_{k=1}^{\infty}k\mid\lambda_k\mid^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k\mid\beta_k\mid^2.$$

证明见[121]$P.16-17$.

9. **畸变不等式**:

(1) **Bieberbach 不等式**:设 $f\in S^0$,则

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}.\tag{2.4}$$

若 $f\in K$,则

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.\tag{2.5}$$

(2) **Koebe 不等式**:设 $f\in S^0$,则

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2},\tag{2.6}$$

若 $f\in K$,则

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},\tag{2.7}$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}.\text{([121]}P.6)$$

(3) 设 $f\in S^0$,则

$$|\arg f'(z)|\leqslant 2\arcsin|z|,z\in D.\tag{2.8}$$

若 $f\in K$,则

$$|\arg f'(z)|\leqslant 4\arcsin|z|,z\in D.\tag{2.9}$$

上述函数的辐角在(2.8)式中理解为当 $\mathrm{Re}z=0$ 时取值为零的分支,在(2.9)式中理解为当 $z=0$ 时取零值的分支.

在(2.4),(2.6),(2.8)式中是仅当 $f(z)=\dfrac{z}{1-\varepsilon z}$ $(|\varepsilon|=1)$ 时等号成立;

在(2.5),(2.7),(2.9)式中仅当 $f(z)=\dfrac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$ $(|\varepsilon|=1)$ 时等号成立.

注 当 $f\in S^0$ 时,(2.8)式有精确估计:

$$|\arg f'(z)|\leqslant\begin{cases}4\arcsin|z|,\ |z|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\[2ex] \pi+\ln\left(\dfrac{|z|^2}{1-|z|^2}\right),\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqslant|z|<1.\end{cases}$$

(见[120]Vol 2 No1:162)

(4) 设 $F(z)=z+c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}\in\sum$, $\forall z_0:1<|z_0|<\infty$,成立

$$1-\frac{1}{|z_0|^2}\leqslant|F'(z_0)|\leqslant\frac{|z_0|^2}{|z_0|^2-1}.$$

左边等号仅对 $F_1(z)=z+\alpha_0+z_0(\bar{z}_0z)^{-1}$ 成立,而右边等号仅对 $F_2(z)=\frac{z-z_0}{1-(\bar{z}_0z)^{-1}}+\beta_0$ 成立.式中 α_0,β_0 是两个任意固定的数.

(5) **Grunsky 不等式**:设 $F\in\sum$, $1<|z_0|<\infty$,则

$$|\ln F'(z_0)|\leqslant-\ln\left[1-\frac{1}{|z_0|^2}\right].$$

(6) 设 $F\in\sum$,则 $\forall z_1,z_2:|z_1|=|z_2|=r>1$,成立

$$\left|\ln\frac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}\right|\leqslant-\ln\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\quad(\text{Goluzin}),$$

仅当 $F(z)=z+\frac{1}{2}e^{i\alpha}$($\alpha$ 为实常数)时等号成立;

$\left|\frac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant1-\frac{1}{r^2}$ (**弦畸变不等式**),仅当 $F(z)=z+c+\frac{1}{2}e^{2i\alpha}$($c$ 为常数,$\alpha=\frac{1}{2}(\arg z_1+\arg z_2)$)时等号成立.

(4)~(6)及其各种推广形式见[122].

(7) 设 $F\in\sum$,则 $\forall z_1,z_2:|z_1|>1,|z_1|>1$,成立

$$\left|\frac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant\sqrt{\left(1-\frac{1}{|z_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|z_2|^2}\right)}.\quad(\text{Goluzin})(\text{见}[121]\text{P}.18)$$

(8) **Fan Ky 不等式**:设 $D=\{z:|z|<1\}$, $z_1,z_2\in D$ 的非欧距离定义为

$$d(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z_1\bar{z}_2|+|z_1-z_2|}{|1-z_1\bar{z}_2|-|z_1-z_2|},$$

若 $f\in S$,则

$$\frac{|1-z_1\bar{z}_2|}{1-|z_1|^2}\exp(-2d(z_1,z_2))\leqslant\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z_1-z_2)f'(z_2)}\right|\leqslant\frac{|1-z_1\bar{z}_2|}{1-|z_1|^2}\exp(2d(z_1,z_2));$$

$$\frac{|1-z_1\bar{z}_2|}{(1+|z_1|)^2}\left(\frac{1-|z_2|}{1+|z_2|}\right)\leqslant\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z_1-z_2)f'(z_2)}\right|\leqslant\frac{|1+z_1\bar{z}_2|}{(1-|z_1|)^2}\left(\frac{1+|z_2|}{1-|z_2|}\right);$$

$$\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right|\leqslant\frac{1-|z_2|^2}{1-|z_1|^2}\exp(4d(z_1,z_2)).$$

特别地,

$$\frac{|z|(1-|z|)}{1+|z|}\leqslant\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|\leqslant\frac{|z|(1+|z|)}{1-|z|},z\in D.$$

若 $f\in S^0$, D 的像集 $f(D)$ 为复平面中的凸集,则

$$\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_1\bar{z}_2|+|z_1-z_2|}\leqslant\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z_1-z_2)f'(z_2)}\right|\leqslant\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_1\bar{z}_2|-|z_1-z_2|};$$

$$\frac{1-|z_2|}{1+|z_1|}\leqslant\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z_1-z_2)f'(z_2)}\right|\leqslant\frac{1+|z_2|}{1-|z_1|};$$

$$\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right|\leqslant\left(\frac{1-|z_2|^2}{1-|z_1|^2}\right)\exp(2d(z_1,z_2)).$$

见[301]1978,66(3):626 - 631.

10. **Beiberbach 不等式**:设 $f\in S$,则

$$\left|\left(\frac{1-|z|^2}{2}\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}-\bar{z}\right|\leqslant 2,\text{仅当 } f(z)=\frac{(z-z_0)(1-\bar{z}_0z)}{[(1-e^{i\alpha}z_0)+(\bar{z}_0-e^{i\alpha}z)]^2},$$

且 $z=z_0$ 时等号成立.证明见[120]Vol.2.No1:161.

11. 设 $f\in S$, $|z_1|\leqslant r$, $|z_2|\leqslant r$,则

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4\leqslant\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right|\leqslant\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4.$$

见[120]Vol.2.No1:162.

12. 设 $f\in S$,则

$$\left|\frac{z}{f(z)}+c_2z+1-|z|^2-2\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right|\leqslant 2\left[1-\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right],\ |z|<1.$$

式中 E,K 为完全椭圆积分:

$$E(|z|)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-|z|^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,\quad K(|z|)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-|z|^2\sin^2 t}}.$$

见[107]5:346.

13. 设 $f\in S$,则

(1) $|f'(z)|\leqslant\dfrac{1}{1-|z|^2}\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|^2(1-x^2)^2\left|\dfrac{x}{2}\right|^{\frac{4x^2}{1-x^2}}$

式中 $|x|<|z|<1$ 由下式确定:$\left|\dfrac{f(x)}{z}\right|(1+x^2)\left|\dfrac{z}{x}\right|^y=1$,式中 $y=\dfrac{2x}{1+x}$,

(见[107]5:346).

(2) $\left|z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant a(r)\left[|f(z)|\dfrac{(1-r)^2}{r}\right]^{a(r)^2}$,式中 $a(r)=\dfrac{1+r}{1-r}$,$0<r<1$.

(龚昇,[334]1953,3:208 - 210)

(3) 设 $0<r<\rho=\operatorname{th}\dfrac{\pi}{4}$, $|z|=r$,则 $\operatorname{Re}\left(z\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)\geqslant\dfrac{\rho-r}{\rho+r}$.

证明见[121]P.124.

14. **Goluzin 不等式**:设 $f\in S$,则

(1) $|f(re^{i\theta})|+|f(-re^{i\theta})|\leqslant\dfrac{r}{(1-r)^2}+\dfrac{r}{(1+r)^2}$;

(2) $|f'(re^{i\theta})|+|f'(-re^{i\theta})|\leqslant\dfrac{1+r}{(1-r)^3}+\dfrac{1-r}{(1+r)^3}$.

式中 $0\leqslant\theta<2\pi, 0\leqslant r<1$.

(见[107]5:346).证明及胡克的改进见[121]P114 - 122.

15. 设 $f(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$, $|z|<1$.对 f 作变换 G:

$$G(f)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^{\lambda}a_kz^k, a>0, \lambda\geqslant 0,$$

(1) 若 $\mathrm{Re}f>0$, $|z|<1$,则

$$\mathrm{Re}G(f)>\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\lambda}\right\};$$

(2) 若 $\mathrm{Re}f>\alpha$, $|z|=r$,则

$$\mathrm{Re}G(f)\geqslant\frac{1+(1-2\alpha)r^2-2(1-\alpha)r}{1-r^2}.$$

(Chan Kim Yong 等. Panamer, Math. J, 1997, 7(3):105 - 111)

16. 设 $f\in S, 0<\lambda\leqslant 1$. $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$,

$A_n(\lambda)=\left||D_{n+1}(\lambda)|-|D_n(\lambda)|\right|\leqslant cn^{\frac{b(\lambda)-1}{2}}, d_n(\lambda)=\frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{n!}$.

胡克提出以下问题:

(1) $0<\lambda<1$ 时,$b(\lambda)$ 的最佳值是什么?已知 $b(1)=1$.

(2) $|D_n(\frac{1}{2})|$ 的最佳上界是什么?

(3) $\forall\varepsilon>0$,Duren 猜测(证明或否定):

$$\left||D_{n+1}(\tfrac{1}{2})|^2-|D_n(\tfrac{1}{2})|^2\right|\leqslant cn^{-\frac{1}{2}+\varepsilon};$$

(4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(\lambda)}{d_k(\lambda)}\leqslant cn, 0<\lambda<1$ 是否成立?

其中(3)、(4)已为胡克所解决,详见胡克的专著[121].

17. **平均模数不等式**:设 $f\in S, p>0, 0<r<1, M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\leqslant p\int_0^r\frac{[M(t)]^p}{t}\mathrm{d}t.$$

证明见[121]P27 - 28. $p=1$ 时,称为 **Littlewood 不等式.**

推论 设 $f\in S, p>\frac{1}{2}, 0<r<1$,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\leqslant p\int_0^r\frac{t^{p-1}}{(1-t)^{2p}}\mathrm{d}t.$$

18. 若 $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_kz^k(\alpha_1=1)$ 是单位圆内的单叶解析函数,则当 $0<r<1$ 时

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\leqslant r/(1-r);\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\leqslant r^2/(1-r^2).$$

见[56]Vol. 2. P. 29. Ex155,158.

19. 若 $f\in S^0$,则

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2},\tag{2.10}$$

从而
$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqslant\frac{6}{1-|z|^2}.\tag{2.11}$$

(2.10),(2.11)式对Koebe函数 $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ 成立等号.实际上,(2.10),(2.11)式对 D 中任何单叶函数均成立.特别,若 f 在 D 内单叶,从(2.10)式有精确的不等式

$$|f''(0)/f'(0)|\leqslant 4,$$

1982年Osgood,B.G.作了进一步推广.见[368]1982,31(4):449－461.

20.　设 $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_kz^k$ 在圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内单叶解析,则

(1)　$|f(z)|\leqslant\dfrac{r}{(1-r^2)^{1/2}},\ |z|=r,0<r<1$,(Jinkins-夏道行);

(2)　$|f'(z)|\leqslant\dfrac{|1-[f(z)]^2|}{1-|z|^2},\ |z|<1.$

胡克将(1)改进为:

$$|f(z)|\leqslant\frac{r}{(1-r^2)^{1/2}}\{1-[(1-r^2)r^{2n-2}-|c_n|^2]^2\}^{1/4}$$

仅当 $|c_n|=r^{n-1}(1-r^2)^{1/2}$ 时等号成立,其证明和进一步的改进见[121]P.137－138.

21.　设 $f\in S$,圆周 $A=\{z:|z|=r<1\}$ 的像集 $f(A)$ 称为等高线,记为 $L(f,r)$.它的曲率记为 $K(f,r)$,则

$$K(f,r)\geqslant\frac{1-4r+r^2}{r}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2,$$

仅当 $f(z)=\dfrac{z}{(1+z)^2}$ 在 $z=r$ 时等号成立;

我们问:$K(f,r)$ 的精确上界是什么?

目前已知 f 属于 S 的星形函数子类时,

$$K(f,r)\leqslant\frac{1+4r+r^2}{r}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2,$$

仅当 $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ 在 $z=r$ 时等号成立.有关参考文献见[107]3:391－392.

22.　设 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内具有级数展开式:

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k\ \text{并设}\quad \ln\frac{f(t)-f(z)}{t-z}=\sum_{k,n=1}^{\infty}\omega_{k,n}t^kz^n$$

式中 a_k 与 $\omega_{k,n}$ 为常数系数,则 f 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内单叶解析的充要条件是 $\forall N$,$\forall x_k,1\leqslant k\leqslant N$.成立 **Grunsky 不等式**:

$$\left|\sum_{k,n=1}^{N}\omega_{k,n}x_kx_n\right|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}|x_k|^2.$$

(见 Duren,P.L.,Univalent functions,Springer,1983)

五、　一般解析函数不等式

1.　设 f 在 $D=\{z\in C:|z|<1\}$ 上解析,$|f(z)|\leqslant 1.f(0)=0$,若存在数 $r\in$

$(0,1)$,使得 $f(r)=f(-r)=0$.则

$$|f(z)|\leqslant|z|\left|\frac{z^2-r^2}{1-r^2z^2}\right|.$$

(美国加州大学贝克利分校 1991 年试题)

2. **Schwarz 不等式**:设 f 在圆 $|z|<R$ 内解析并满足 $|f(z)|\leqslant M$. $f(0)=0$,则

$$|f(z)|\leqslant\frac{M|z|}{R},(|z|=R);\ |f'(0)|\leqslant\frac{M}{R},$$

这是最大模原理的一个直接推论,Lindelöf,E.还把 Schwarz 引理推广到一般域的情形.

3. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析且 $|f(z)|<1$,则

$$|f(z)-f(0)|\leqslant|z|\frac{1-|f(0)|^2}{1-|f(0)|\cdot|z|},0<|z|<1,$$

仅当 $f(z)=\dfrac{e^{i\alpha}z+w_0}{1+\overline{w_0}e^{i\alpha}z}$ $(\alpha\in R^1)$ 时等号成立,$w_0=f(z_0)$。

4. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,且 $|f(z)|\leqslant 1$,则

(1) $\dfrac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)|\cdot|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\dfrac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)|\cdot|z|},(|z|<1)$;

(2) **Pick 不等式**:设 $|z|<1$, $|\omega|<1$,则

$$\left|\frac{f(z)-f(\omega)}{1-\overline{f(\omega)}(z)}\right|\leqslant\left|\frac{z-\omega}{1-\overline{\omega}z}\right|.$$

特别有 $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{z}\right|\leqslant|1-\overline{f(0)}f(z)|$;

(3) 若 $|z_1|<r<1$, $|z_2|<r<1$,则

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right|\leqslant\frac{1}{1-r^2}.$$

5. [MCU].设 $f(z)$ 是将单位开圆盘 D 映入自己的解析函数,$f(0)=0$,则在 D 上成立

$$|f(z)+f(-z)|\leqslant 2|z|^2.$$

仅当 $f(z)=\lambda z^2$, $|\lambda|=1$ 时等号成立.

6. 若 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,且 $|f(z)|<1$, $f(0)=\beta>0$,则当 $|z|\leqslant r<1$ 时,

$$\left|f(z)-\frac{\beta(1-|z|)}{1-(\beta|z|^2)}\right|\leqslant\frac{|z|(1-\beta^2)}{1-(\beta|z|)^2}.$$

7. 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析,且 $|f(z)|\leqslant M$,则

$$M|a_1|\leqslant M^2-|a_0|^2.$$

8. 若 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$,则

$$|f(z)|\geqslant\frac{|z|(1-2|z|)}{1-|z|}\quad(0<|z|<1).$$

9. 设 $b_n\geqslant 0$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$,当 $|z|<1$ 时收敛,则当 $0<\alpha<\pi$, $z=re^{i\theta}(0<$

$r<1$) 时,有

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|\varphi(z)|^2\mathrm{d}\theta \geqslant \frac{1}{6\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(z)|^2\mathrm{d}\theta.$$

提示:令 $g(\theta)=\begin{cases}1-|\theta/\alpha|, & \text{若 } |\theta|\leqslant\alpha,\\ 0, & \text{若 } \alpha<|\theta|\leqslant\pi.\end{cases}$

考虑

$$\int_{-x}^{x}|g(\theta)|^2\exp(i(n-m)\theta)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{4}{\alpha(n-m)^2}\left(1-\dfrac{\sin(n-m)\alpha}{\alpha(n-m)}\right)\geqslant 0, & m\neq n,\\ 2\alpha/3, & m=n,\end{cases}$$

见[76]P.154 - 155.

10. 设 $|z|<1,(1-z)^{-r}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,则存在两个常数 c_1,c_2,使得

$$0<c_1<a_n/n^{r-1}<c_2<\infty. \tag{2.12}$$

提示:(2.12) 式等价于.

$$\log a_n=(r-1)\log n+0(1). \tag{2.13}$$

而由二项式定理,得到

$$a_n=\frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}.$$

所以 $\log a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\log(r+k-1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\log k$.

再利用$\int_{c-1/2}^{c+1/2}\log t\mathrm{d}t=\int_0^{1/2}\{\log c^2+\log(1-t^2/c^2)\}\mathrm{d}t=\log c+O(c^{-2})$ 即可得证.

11. **Caratheodory 不等式:** 设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant R$ 上解析,$M(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\leqslant R\}$,$A(r)=\max\{\mathrm{Re}f(z):|z|=r\leqslant R\}$, $\lim\limits_{r\to R-0}A(r)=A(R)$,则对于 $0\leqslant|z|=r<R$,有

(1) $|f(z)|\leqslant|f(0)|+\dfrac{2r}{R-r}[A(R)-\mathrm{Re}f(0)]$;

(2) $\mathrm{Re}f(z)\leqslant\mathrm{Re}f(0)+\dfrac{2r}{R-r}[A(R)-\mathrm{Re}f(0)]$;

(3) $|\mathrm{Im}f(z)-\mathrm{Im}f(0)|\leqslant\dfrac{2Rr}{R^2-r^2}[A(R)-\mathrm{Re}f(0)]$;

(4) $A(r)\leqslant\dfrac{R-r}{R+r}A(0)+\dfrac{2r}{R+r}A(R),(0<r<R)$;

(5) $M(r)\leqslant M(0)+\dfrac{2r}{R+r}[A(R)-A(0)]\leqslant\dfrac{R+r}{R-r}M(0)+\dfrac{2r}{R-r}A(R)$.

(6) 若 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析,非零且有界,令 $\alpha=\dfrac{R-r}{R+r},\beta=\dfrac{2r}{R+r},0<r<R$,则

$$M(r)\leqslant M(0)^{\alpha}M(R)^{\beta}.$$

其中 $\lim\limits_{r\to R-0}M(r)=M(R)$. 除了 $f(z)$ 是常数外,$M(r),A(r)$ 都是 r 的严格递增函数.

(7) 若 $A(r)\geqslant 0$,则

$$M(r)\leqslant\frac{R+r}{R-r}[A(R)+|f(0)|].$$

而且

$$\max_{|z|=r}|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{2^{n+2}n!R}{(R-r)^{n+1}}(A(R)+|f(0)|).$$

提示：利用 $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}}\mathrm{d}\omega$，式中 C 是以 $\omega=z$ 为心，$\delta=(R-r)/2$ 为半径的圆，在圆 C 上，$|\omega|\leqslant(R+r)/2$. 再利用(5)，改进见[344]1992.4:88－89.

(8) 令 $T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$，式中

$$\log^+x=\begin{cases}\log x, & x\geqslant 1\\ 0, & 0<x<1.\end{cases}$$

则当 $0\leqslant|z|=r<R$ 时，有

$$T(r)\leqslant\log^+M(r)\leqslant\frac{R+r}{R-r}T(R).$$

12. **Reza 不等式**：设 $f(z)$ 在区域 $\mathrm{Re}z\geqslant 0$ 内除去虚轴上可能有极点外是解析的，又设 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ 且 $\mathrm{Re}f(z)\geqslant 0$ $(\mathrm{Re}z\geqslant 0)$，则对于 $\mathrm{Re}\,z\geqslant 0$，有

$$|f'(z)|\leqslant\frac{f(z)+f\overline{(z)}}{z+\bar{z}}.$$

13. 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 上解析，在 $|z|=r(r<R)$ 上，$A(r)=\sup\mathrm{Re}f(z)$，则 $|a_n|r^n\leqslant\max\{4A(r),0\}-2\mathrm{Re}f(0)$，$n=0,1,2,\cdots$，式中 a_n 为 $f(z)$ 的 Taylor 展开式的系数.

14. 设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 上解析，$|f(z)|\leqslant M$，$f(z)$ 的 Taylor 级数为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，则

(1) **Gutzmer 不等式**：$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2R^{2n}\leqslant M^2$.

(2) Gauchy 不等式：$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}$；$|a_n|\leqslant\frac{M}{R^n}$.

由此推出 Cauchy-Hadamard 不等式：$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{d(z_0,\partial D)}$.

式中 $d(z_0,\partial D)$ 是从 z_0 到 $f(z)$ 的全纯域的边界 ∂D 的距离. 见[107]Vol.1,P512.

15. 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，令

$$\Delta(f)=\sup\{|\mathrm{Re}f(z_1)-\mathrm{Re}f(z_2)|:|z_1|<R,|z_2|<R\},$$

$D(f)=\sup\{|f(z_1)-f(z_2)|:|z_1|<R,|z_2|<R\}$，则：

(1) $|a_1|R\leqslant\frac{2}{\pi}\Delta(f)$.

(2) $|a_1|R\leqslant\frac{1}{2}D(f)$.

式中因子 $2/\pi$，$1/2$ 都不能再改进.

(3) 对于所有 $r<R$，当 $|z_1|\leqslant r$，$|z_2|\leqslant r$ 时，有

$$|\operatorname{Re}f(z_1)-\operatorname{Re}f(z_2)|\leqslant\frac{4}{\pi}\Delta(f)\operatorname{arctg}(r/R);$$

$$|\operatorname{Im}f(z_1)-\operatorname{Im}f(z_2)|\leqslant\frac{2}{\pi}\Delta(f)\ln\frac{R+r}{R-r}.$$

16. **Harnack 不等式**:设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,$\operatorname{Re}f(z)>0$,$f(0)$ 为实数,则

(1) $f(0)\dfrac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\operatorname{Re}f(z)\leqslant f(0)\dfrac{1+|z|}{1-|z|}$.

(2) $|\operatorname{Im}f(z)|\leqslant f(0)\dfrac{2|z|}{1-|z|^2}$.

(3) $f(0)\dfrac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant f(0)\dfrac{1+|z|}{1-|z|},0<|z|<1$.

式中仅当 $f(z)=w_0\dfrac{1+e^{i\alpha}z}{1-e^{i\alpha}z}$ (w_0,α 为实数且 $w_0>0$)时等号成立.

Fan ky 将上述不等式推广到算子,即 设 X 为复 Hilbert 空间,T 为 X 上有界线性算子. T 的实部和虚部分别为

$$\operatorname{Re}(T)=\frac{1}{2}(T+T^*),\operatorname{Im}(T)=\frac{1}{2i}(T-T^*).$$

设 T_1,T_2 为 X 上 Hermite 算子. $T_1\leqslant T_2$ 表示 T_2-T_1 为正算子,即$((T_2-T_1)x,x)\geqslant 0,x\in X$. $T_1<T_2$ 表示 T_2-T_1,为可逆的正算子,I 为恒等算子. 设 $\|T\|<1$,g 为 $D=\{z:|z|<1\}$ 上解析函数,$g(T)$ 是由 Riesz-Dunford 积分所定义的算子(见本节后面 $N.45.$) $\operatorname{Re}g(z)>0,z\in D,g(0)=1,g'(0)=g''(0)=\cdots=g^{(n-1)}(0)=0,(n\geqslant 2)$,则

(4) $[I-g(T)^*][I-g(T)]\leqslant[I+g(T)^*](T^n)^*(T^n)[I+g(T)]$;

(5) $\dfrac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}\leqslant\|g(T)\|\leqslant\dfrac{1+\|T^n\|}{1-\|T^n\|}$;

(6) $\left\|g(T)-\dfrac{1+\|T^n\|^2}{1-\|T^n\|^2}I\right\|\leqslant\dfrac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}$;

(7) $\dfrac{1-\|T^n\|}{1+\|T^n\|}I\leqslant\operatorname{Re}g(T)\leqslant\dfrac{1+\|T^n\|}{1-\|T^n\|}I$;

(8) $-\dfrac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}I\leqslant\operatorname{Im}g(T)\leqslant\dfrac{2\|T^n\|}{1-\|T^n\|^2}I$;

(9) $\left\|(I+T)(I-T)^{-1}-\dfrac{1+r^2}{1-r^2}I\right\|\leqslant\dfrac{2r}{1-r^2},(0<r<1)\Leftrightarrow\|T\|\leqslant r$;

(10) 若 $\|T\|\leqslant r<1$,则

$$\operatorname{Re}T(I-T)^{-1}\geqslant-\frac{r}{1+r}I.$$

仅当 $T=-rI$ 时等号成立;

(11) 设 $\|T\|<1$,复数 z 满足 $\|z\|<1,0\leqslant r\leqslant 1$,则

$\|(T-zI)(I-\bar{z}T)^{-1}\|<1$. 而且 $\|(T-zI)(I-iT)^{-1}\|\leqslant r\Leftrightarrow$

$$\left\|T-\frac{(1-r^2)z}{1-(r|z|)^2}I\right\|\leqslant\frac{(1-|z|^2)r}{1-(r|z|)^2}.$$

见[354]1982,179:293−298;54(2):333−339,另见第 14 章 §2N42,43.

17. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析,$\operatorname{Re}f(z)\leqslant A$,则

$$|f(z)-f(0)|\leqslant 2\mathrm{Re}\{A-f(0)\}|z|(1-|z|)^{-1}.$$

18. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析，$|f(z)|\leqslant 1, f(0)=0$，则

(1) $$|f'(z)|\leqslant\begin{cases}1, & 若 |z|\leqslant\sqrt{2}-1,\\ \dfrac{(1+|z|^2)^2}{4|z|(1-|z|^2)}, & 若 \sqrt{2}-1<|z|<1.\end{cases}$$

(2) 若 f 还满足 $|f'(0)|=a$，则

$$|z|(a-|z|)\leqslant(1-a|z|)|f(z)|.$$

19. 设 $f(z)$ 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析.

(1) 若 $f(0)=0, \mathrm{Re}f(z)\leqslant A\quad(A>0)$，则 $|f(z)|\leqslant\dfrac{2A|z|}{1-|z|}, (z\in D)$.

(2) 若 $f(0)=\alpha>0, \mathrm{Re}f(z)>0$，则

$$\left|\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}\right|\leqslant|z|,\ |f'(0)|\leqslant 2\alpha.$$

(3) 若 $|f(z)|\leqslant\dfrac{1}{1-|z|}\quad(z\in D)$，则

$$|f'(z)|\leqslant 4(1-|z|)^{-2}(z\in D);\quad |f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!}{r^n(1-r)}, (0<r<1).$$

取 $r=n/(n+1)$ 时，得到 $|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!(1+1/n)^n\leqslant e(n+1)!$.

20. 设 $f(z)$ 解析，且当 $\mathrm{Im}z=y>0$ 时 $\mathrm{Im}f(z)\geqslant 0$，则

(1) $\dfrac{|f'(z)|}{\mathrm{Im}f(z)}\leqslant\dfrac{1}{y}, (z=x+iy)$.

(2) $\dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)-\overline{f(z_0)}|}\leqslant\dfrac{|z-z_0|}{|z-\overline{z}_0|}$.

21. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，则在 $|z|<1$ 时成立

$$(1-|z|^2)|f(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

提示：先证 $(1-|z|^2)f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\left(\frac{1-\overline{z}\zeta}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta,\ |z|<1$.

22. 若 f 在一个包含圆 $\overline{B}(z_0,R)$ 的开集 G 内是解析的，则

$$|f(z_0)|^2\leqslant\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R|f(z_0+re^{i\theta})|^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

23. 设 $F(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n z^n=\frac{h(z)}{1-h(z)}$，其中 $h(z)$ 是方程 $w-ze^{w-1}=0$ 在 $|z|<1$ 内的根：$w=h(z)$，$h(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$h(0)=0$，$|h(z)|<1$，则当 $|z|<1$ 时，有

(1) $\dfrac{|z|}{e(1+|z|)}\leqslant|F(z)|\leqslant\dfrac{|z|}{1-|z|}$.

(2) $\dfrac{|h(z)|}{1+|h(z)|}\leqslant|F(z)|\leqslant\dfrac{|h(z)|}{1-|h(z)|}$.

(3) $\dfrac{|h(z)|}{|z|(1+|h(z)|)^3}\leqslant|F'(z)|\leqslant\dfrac{1+|h(z)|}{(1-|h(z)|)(1-|z|^2)}$.

(4) $\dfrac{1-|z|}{e(1+|z|)^3}\leqslant|F'(z)|\leqslant\dfrac{1+|z|}{e(1-|z|)^3}$.

证明见[375]1986,2(3):127 - 130.

24. **Schottky 不等式**:设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 上解析,并且 $f(z)\neq 1$,而当 $|z|<1$ 时 $f(z)\neq 0$,则在 $|z|\leqslant \theta R$ $(0\leqslant\theta<1)$ 上,有 $|f(z)|<S(f(0),\theta)$,式中 $S(f(0),\theta)$ 是由 $f(0)$ 与 θ 确定的正常数.

25. [MCU].设 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点,则存在正数 c_1,c_2 及 $\varepsilon>0$,使得 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时,有

$$c_1|z-z_0|^{-m}\leqslant|f(z)|\leqslant c_2|z-z_0|^{-m}.$$

26. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内解析且 $\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|d\theta=1$,则当 $k>-1$ 时,有

$$\left|\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{当 } k \text{ 为整数}.\\ (2|\sin k\pi|)^{-1}, & \text{当 } k \text{ 不为整数}.\end{cases}$$

27. (1) 设 $f(z)=1+\alpha_1 z+\cdots$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析,$\alpha<1$,若 $|z|\leqslant 1$ 时,$\mathrm{Re}[z^2f''(z)+3zf'(z)-\alpha f^2(z)]>-1$,则 $\mathrm{Re}f(z)>0$.

证明见[305]1984,91:446.

(2) 设 $f(z)$ 在单位圆 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析,$f(0)=0$ 且

$$\left|\sum_{k=0}^n z^k f^{(k)}(z)\right|<1 \text{ 则 } \quad |f(z)|<1\quad(z\in D).$$

28. 设 $\varphi(\gamma)$ 在 $0\leqslant\gamma<1$ 上递增,$\varphi(0)>0$,$f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析,$f(0)=0$,若 $|f(z)|\leqslant\varphi(|z|)$,则 $\quad|f(z)|\leqslant k|z|\varphi(|z|)$,

式中常数 $k=\dfrac{2\varphi(1/2)}{\varphi(0)}$.

29. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r<R$ 内解析,则

(1) **Jensen 不等式**:

$$\log|f(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\log|f(re^{it})|\,\mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

若 $f(z)$ 在 $z=0$ 有 m 重零点,则

$$\log\left|\lim_{\varepsilon\to 0}z^{-m}f(z)\right|+\log(r^m)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\log|f(re^{it})|\,\mathrm{d}t.$$

Jensen 不等式还有以下形式:

$$\log|f(0)|+\sum_{k=1}^n\log(r|z_k|^{-1})\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\log|f(re^{it})|\,\mathrm{d}t,$$

式中 $z_1,\cdots,z_n$ 为 f 在 $|z|\leqslant r$ 内的零点(m 重零点作 m 个零点计算).

提示:利用 Poisson-Jensen 公式:

$$\log|f(0)|+\log\prod_{k=1}^n r|z_k|^{-1}=\frac{1}{2\pi}\int\log|f(e^{it})|\,\mathrm{d}t.$$

详见[85]P.82.

(2) **Polya-Szegö 均值不等式**:

$$I_p(r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2x}|f(re^{it})|^p\mathrm{d}t.\right)^{1/p} \tag{2.15}$$

是 r 的严格递增函数,而且 $\log I_p(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数.当 $p=2$ 时就是 Hardy 均值不等式.

这个不等式还包括了著名的 Hadamard 三圆定理.

(3) **几何平均不等式**:

$$G(r)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,\mathrm{d}t\right) \tag{2.16}$$

是 r 的递增函数,而且 $\log G(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数, $\lim\limits_{p\to+0}(I_p(r)))^{1/p}=G(r)$. 式中 $I_p(r)$ 由 (2.15) 式定义.

30. **Hadamard 三圆定理**:设 f 在开集 $G=\{z\in C:0\leqslant R_1<|z|<R_2\}$ 上解析, $\forall r:R_1<r<R_2$,令 $M(r)=\sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$. 若 $R_1<r_1<r<r_2<R_2$,则

$$\ln M(r)\leqslant\frac{\ln r-\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_2)+\frac{\ln r_2-\ln r}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_1),$$

它表明 $\ln M(r)$ 是 $\ln r$ 的凸函数. 见[74]Vol.1:238.

31. **三线定理**:设 F 是闭带域 $D=\{z\mid z=x+iy,0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上有界连续复值函数,并在 D 的内部解析. 若对于所有 y,有 $|F(iy)|\leqslant m_0$, $|F(1+iy)|\leqslant m_1$. 则对于所有 $z=x+iy\in D$,有

$$|F(x+iy)|\leqslant m_0^{1-x}m_1^x.$$

即若令 $k_x=\sup\{|F(x+iy)|:-\infty<y<\infty,0\leqslant x\leqslant 1\}$,则

$$\psi(x)=\ln k_x \text{ 是凸函数},$$

注 定理的证明见[65]P.180－181,利用三线定理可以证明 Riesz 凸性定理,这是 L^p 空间的基本插值定理,由它可以推出很多重要的不等式,有关三线定理的类似结果及其应用,参看[56]P.174－183.

32. **Lindelöf 不等式**:设区域 D 含有 z_0,并且以 z_0 为中心 r 为半径 α 为中心角的圆弧在 D 的外部,以 C 表示 D 的边界 ∂D 与圆盘 $|z-z_0|<r$ 的交,若 f 在 D 内单值解析, $|f(z)|\leqslant M$,并且对于所有 $\zeta\in C$,有

$$\limsup_{z\to\zeta}|f(z)|\leqslant m<M,$$

则对于所有 $n>2\pi/\alpha$,有

$$|f(z_0)|\leqslant M^{1-\frac{1}{n}}\cdot m^{1/n}.$$

33. **Carleman 不等式**:设 D 是线段 OA, OB 以及连接 A, B 的 Jordan 弧 $\overset{\frown}{AB}$ 围成的区域, $\angle AOB=\alpha\pi$, R 是 O 与 $\overset{\frown}{AB}$ 的最大距离, $f(z)$ 是 D 上的解析函数,若对于 OA, OB 上的 ζ,有 $\limsup\limits_{z\to\zeta,z\in D}|f(z)|\leqslant M$,而对于 $\overset{\frown}{AB}$ 上的 ζ,有 $\limsup\limits_{z\to\zeta,z\in D}|f(z)|\leqslant m<M$,则在 $\angle AOB$ 的角平分线上的点 $z\in D$,有 $|f(z)|\leqslant M^{1-p}m^p$,式中 $p=(|z|/R)^{1/\alpha}$.

34. **Doetsch 不等式**:设 $f(z)$ 在带状区域 $S=\{z\mid z=x+iy,x_1\leqslant x\leqslant x_2,-\infty<y<\infty\}$ 上有界解析. 若对于 $x_1<x_2<x_3$, $|f(z)|$ 在 $x=x_j$ 上的上限为 $M(x_j)$, $j=1,2,3$,则 $M(x_2)\leqslant M(x_1)^{\alpha}M(x_3)^{\beta}$.

式中 $\alpha=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, $\beta=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$.

35. **Gabriel 不等式**:若可求长曲线 L 位于另一闭曲线 C 的内部,并且 f 是 C 内的解析函数,则存在绝对常数 A,使得

$$\int_L |f(z)||dz| < A\int_C |f(z)||dz|.$$

但 A 的最佳值还不知道,猜想 $A=2$. 当 C 是圆的情形,已证明是正确的. 见[4]§3.8.45.

36. **积分估值不等式**:(1) 设在曲线 C 上定义的连续函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\leqslant M$,曲线 C 的长为 L. 则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant \int_C |f(z)||dz| \leqslant ML.$$

式中 $|dz| = \sqrt{dx^2+dy^2}$ 是曲线 C 的弧元.

提示:$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)||\Delta z_k| \leqslant M\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$.

令 $\max|\Delta z_k|\to 0$ 取极限即可得证.

特别地,若 $C=\{z: z=re^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,则

$$\left|\int_C \frac{dz}{z}\right| \leqslant 2\pi.$$

(2) $\left|\int_0^\pi \frac{i\mathrm{R}e^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}d\theta\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1}, (R>1)$.

(3) $\left|\int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{R}e^{i\theta})^{\alpha-1}i\mathrm{R}e^{i\theta}}{1+Re^{i\theta}}d\theta\right| \leqslant 2\pi\frac{R^2}{R-1}$ $(R>1, 0<\alpha<1)$.

37. [MCU]. 设 $f(z)$ 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析,且在 D 内 $|f(z)|\leqslant M$. $z_1,\cdots,z_n$ 是 $f(z)$ 在 D 内按重数计算的零点,则在 D 内,有

$$|f(z)| \leqslant M\prod_{k=1}^n \left|\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}\right|.\text{特别有 } |f(z)| \leqslant M\prod_{k=1}^n |z_k|.$$

38. [MCU] 设 $\omega = f(z)$ 是从 $D=\{z:|z|<1\}$ 到平面区域 Q 上的保角映射,$\omega_0 = f(z_0)$,则

$$\inf\{|\omega-\omega_0|: \omega \notin \Omega\} \leqslant |f'(z_0)|(1-|z_0|^2).$$

提示:将 Schwarz 引理用于 f^{-1} 上.(美国 1984 年博士资格考试题).

39. **Phragmen-Lindelöf 定理**:设 f 在单连通域 D 内解析,若存在 D 中复值解析函数 φ,φ 在 D 中有界且不取零值,若存在正常数,$\partial D = A\cup B$,使得:

(1) $\forall a\in A, \limsup\limits_{z\to a}|f(z)|\leqslant M$;

(2) $\forall b\in B, \forall\eta>0, \limsup\limits_{z\to a}|f(z)||\psi(z)|^\eta \leqslant M$.

则 $\forall z\in D, |f(z)|\leqslant M$.

40. **准素因子不等式**:整函数

$$E(z,p) := \begin{cases} 1-z, & p=0, \\ (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^p z^k/k\right), & p\geqslant 1 \end{cases}$$

称为准素因子(或基本因子).

(1) 若 $|z|\leqslant 1/2$,则 $|E(z,p)-1|\leqslant 4|z|^{p+1}$;

(2) 若 $|z|\leqslant 1, p\geqslant 0$ 时,则 $|E(z,p)-1|\leqslant |z|^{p+1}$;

(3) 设 $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-p} < \infty, p>0, c>0$,则

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} E(z/a_n, p-1)\right| \leqslant \exp(c\,|\,z\,|^{p}).$$

(4)　$|E(z,p-1)| \leqslant \exp(b\,|\,z\,|^{p-1})$　(b 为常数).

注　(3) 的证明用到(4). 见[74]Vol. 1, P. 260 – 261.

41.　**Milin-Lebedev 不等式**:设 f 在 $D=\{z: |z|<1\}$ 内解析, $f(0)=0$, $\iint_D |f'(z)|^2 dxdy < \infty$,则当 $p>0$ 时,成立

$$\frac{p}{\pi}\iint_D (1-|z|^2)^{p-1}|\exp f(z)|^2 dxdy \leqslant \exp\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\iint_D |f'(z)|^2 dxdy\right\}.$$

当 $p=0$ 时,成立

$$\frac{1}{2\pi}\iint_0 |\exp f(z)|^2 |dz| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint_D |f'(z)|^2 dxdy\right\},$$

仅当 $f(z)=-(p+1)\log(1-\bar{c}z)$ 时等号成立, $c\in D$ 为常数. 见[344]1992,3.

42.　**Marcinkiewicz-Zygmund 不等式**:设 $P_{n-1}(z)$ 为 $n-1$ 次代数多项式,则当 $1<p<\infty$ 时,有

$$\int_{|z|} |P_{n-1}(z)|^p |dz| \leqslant \frac{c_p}{n}\sum_{k=1}^{n} |P_{n-1}(z_k)|^p, \tag{2.17}$$

当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时,有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |P_{n-1}(z_k)|^p \leqslant c'_p\int_{|z|} |P_{n-1}(z)|^p |dz|, \tag{2.18}$$

式中 $\{z_k\}$ 为 n 次单位根: $z_k=\exp\left(\frac{2k\pi}{n}i\right), 1\leqslant k\leqslant n$　　(2.19)

c_p, c_p' 为只依赖于 p 的常数.

1989 年沈燮昌、钟乐凡将其推广为:

对于任意整数 $q\geqslant 0$,任取 $q+1$ 个不同的自然数 $0=m_0<m_1<m_2<\cdots<m_q$, $m_k\leqslant kn, 1\leqslant k\leqslant q$. 则对于任意 N 次多项式 $P_N(z)$ $(N=(q+1)n-1)$,有

(1)　当 $1<p<\infty$ 时,

$$\int_{|z|=1} |P_N(z)|^p |dz| \leqslant c_1\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{q}\{|P_N^{(m_j)}(z_k)|^p\}/n^{pm_j+1},$$

(2)　当 $0<p<\infty$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{q} |P_N^{(m_j)}(z_k)|^p/n^{pm_j+1} \leqslant c_2\int_{|z|} |P_N(z)|^p |dz|,$$

式中 $\{z_k\}$ 是由(2.19)式所确定的单位根, $c_k(k=1,2)$ 是依赖于 $p, m_1, \cdots, m_q$ 的常数.

见北京大学学报 1990.3.P.257 – 265. 其他推广见[332]1991.7(1):100 – 107. [335]1994,23(1):66.

43.　**超几何函数不等式**:超几何级数定义为:

$$F(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\cdot\frac{z^n}{n!}.$$

式中 $(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$, $(a)_0=1$. a,b,c 可以是实数或复数. $F(a,b,c;z)$ 在单位圆 $D=\{z\in C: |z|<1\}$ 内解析. 它可解析延拓到整个复平面(奇点 $z=1$ 和 $z=\infty$

除外),这样延拓后的函数称为超几何函数.

(1)　令 $H = F(a,1,c,;1), a,c > 0, c - a > 1$,则当 $|z| \leqslant 1$ 时,

$\left|F(a,1,c;-z) - \dfrac{H^2}{2H-1}\right| \leqslant \dfrac{H(H-1)}{2H-1}$. 当 $z=-1$ 时等号成立;

$$\operatorname{Re}F(a,1,c;-z) \geqslant \frac{H}{2H-1},$$

(2)　设 $c > a > 0$,则当 $|z| \leqslant 1$ 时,成立

$$\left|F(a,1,c+1;-z) - \frac{c^2}{c^2-a^2}\right| \leqslant \frac{ac}{c^2-a^2};$$

$$\left|\frac{1}{F(a,1,c;-z)} - \frac{2c-a+cz}{2c-a}\right| \leqslant \frac{c-a}{2c-a}|z|;$$

若 $\operatorname{Re}z \geqslant -1/2$,则

$$\left|F(a,1,c+1;-z) - \frac{c}{2c-a}\right| \leqslant \frac{c}{2c-a};$$

$$\left|\frac{1}{F(a,1,c;-z)} - \frac{c+a+az}{c+a}\right| \leqslant \frac{a}{c+a}|z|、$$

见 Wall, H. S., [324]1940,7:146 - 153;[305]1942,49:72 - 75.

44.　**(复)H^p 函数不等式**:设 f 在圆 $D = \{z: |z| < 1\}$ 中解析,$0 < p < \infty$,

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p}.$$

若 $\|f\|_p < \infty$,则称 $f \in H^p$(圆盘的 Hardy 类). H^∞ 表示 D 内有界解析函数类.

(1)　**Fejer-Riesz 不等式**:设 f 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析,则 $\forall \theta: 0 \leqslant \theta < 2\pi, p > 0$,成立

$$\int_{-1}^1 |f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}r \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})|^p\mathrm{d}t,$$

仅当 $f \equiv 0$ 时等号成立. 式中系数 1/2 是最好的. 证明及其早期推广见[4]P460 - 461.

1983 年潘一飞证明:设 $f \in H^p, 0 < p < \infty$. 若 $0 < \alpha < 1$,则

$$\int_0^1 x^{-\alpha}|f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\sin(\alpha\pi)}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\mathrm{d}t;$$

若 $\alpha > 0$,则

$$\int_{-1}^1 |x|^{\alpha-1}|f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant M_\alpha\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\mathrm{d}t.$$

式中　$M_\alpha = \begin{cases}[2\sin(\alpha\pi/2)]^{-1}, & 0 < \alpha < 1,\\ 1/2, & \alpha \geqslant 1,\end{cases}$

见[333]1983,28(5):316.

(2)　**Riesz 不等式**:设 $F = u + iv \in H^p(T_\Gamma), 1 < p < \infty$,其中 Γ 是 R^n 中一个开凸锥,则存在常数 $A_p < \infty$,使得对于 $y \in \Gamma$ 和 $y = 0$,成立

$$\left(\int_{R^n}|v(x+iy)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant A_p\left(\int_{R^n}|u(x+iy)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

注　Γ 为开凸锥指:子集 $\Gamma \subset R^n$ 满足: ① $0 \notin \Gamma$, ② 若 $x, y \in \Gamma, \alpha, \beta > 0$,则 $\alpha x + \beta y \in \Gamma$. C^n 为 n 维复欧氏空间,Γ 为基的管 $T_\Gamma = \{z: z = (z_1, \cdots, z_n) = (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n) = x + iy \in C^n$,且 $y \in \Gamma\}$. $F \in H^p(T_\Gamma)$ 指在 F 在 T_Γ 上解析且对所有 $y \in \Gamma$,有

$$\int_{R^n} |F(x+iy)|^p dx \leqslant A^p \quad (p>0).$$ 见[65]P.138－139.

45. **Jilia-Fan 不等式**：设 f 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 上解析且 $|f(z)|<1$，若 $z_n \in D$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1, \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 1, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} = \alpha < \infty$.

设 T 是Hilbert空间 X 上的有界线性算子且 $\|T\|<1$. $f(T)$ 是Riesz-Dunford积分：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)(zI-T)^{-1}dz.$$

式中 C 为 D 中正定向简单闭可求长围道. I 为恒等算子. 则

(1) $$\|\{I-f(T)\}\{I-f(T)^*f(T)\}^{-1}\{I-f(T)^*\}\| \leqslant \alpha\|(I-T)(I-T^*T)^{-1}(I-T^*)\|;$$

(2) 若 $(I-T^*)(I-T)<\beta(I-T^*T), \beta>0$，则
$$[I-f(T)^*][I-f(T)]<\alpha\beta[I-f(T)^*f(T)];$$

(3) 若 $\left\|T-\dfrac{1}{1+\beta}I\right\|<\dfrac{\beta}{1+\beta}, \beta>0$，则
$$\left\|f(T)-\frac{1}{1+\alpha\beta}I\right\|<\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}.$$

见[321]1979,239:241－245.

46. **Von Neumann 不等式**：设 f 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 上解析，$f(D)\subset D$. $f(T)$ 是Riesz-Dunford 积分(见 N.45.)，若 T 是 Hilbert 空间上有界线性算子，且 $\|T\|<1$，则
$$\|f(T)\|<1.$$

Fan Ky 改进了该不等式，例如，$f(0)=0$ 时，得到
$$\|f(T)\| \leqslant \frac{\|T\|+|f'(0)|}{1+\|T\|\cdot|f'(0)|}\|T\|<1.$$

见[354]1987,194:7－13.

47. **Wolff 不等式**：设 f 是 $D=\{z=|z|<1\}$ 上解析函数，$f(D)\subset D, f(z)\neq z$，$z\in D$，$f^{[n]}$ 是 f 的 n 次迭代，即 $f^{[1]}=f, f^{[n]}=f\circ f^{[n-1]}, n\geqslant 2$，则存在复数 w，$|w|=1$，使得
$$|f^{[n]}(z)-c(w,z)w| \leqslant r(w,z), z\in D.$$

式中 $c(w,z)=\dfrac{1-|z|^2}{2[1-\mathrm{Re}(\overline{w}z)]}, r(w,z)=\dfrac{|1-\overline{w}z|^2}{2[|1-\mathrm{Re}(\overline{w}z)|]}$,

Fan ky将其推广到算子上. 见[354]1982,179:293－298,和[387]1983,12:295－304.

48. **Pick 不等式**：设 $w=f(z)$ 在单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析. $|z|<1$ 时
$$|f(z)|\leqslant 1, \qquad dw = f'(z)dz.$$

则
$$\frac{|dw|}{1-|w|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$ (见[321]1916,77:1－6)

49. **Grötzsch 原理**：设 $0<r<R<\infty$，圆环 $K(r,R)=\{z:r<|z|<R\}$ 包含有限个互不相交的单连通域 $D_k(1\leqslant k\leqslant n)$，$D_k$ 具有 Jordan 边界，边界上分别包含圆周 $|z|=r$，$|z|=R$ 上不退化为点的弧 C_k 和 l_k. 若 D_k 被映入某个矩形 $G=\{w:0<\mathrm{Re}w<a_k, 0<\mathrm{Im}w<b_k\}$，使得 C_k 和 l_k 分别贯穿长度为 a_k, b_k 的边，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\leqslant\frac{2\pi}{(\ln R-\ln r)},$$

仅当 $D_k=\{z:r<|z|<R,\alpha_k<\arg z<\beta_k\}$($\alpha_k,\beta_k$ 为常数),且 $\bigcup_{k=1}^{n}D_k$ 覆盖 $K(r,R)$ 除去射线 $\arg z=\alpha_k$ 和 $\arg z=\beta_k$ 上属于 $K(r,R)$ 的那些区间时等号成立,(见[107]Vol.2:780.)

50. Bloch **常数不等式**:设 H 是单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的解析函数 $f(z)$ 类,$f(z)$ 的 Riemann 曲面在其一叶上包含一个半径为 $B_f>0$ 的最大开圆盘,令 $B=\inf\{B_f:f\in H\}$.则 $\frac{\sqrt{3}}{4}<B\leqslant 0.472$.见[317]1970,2:689－695.

1982 年,Minda 证明 $B\leqslant\dfrac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{1+\sqrt{3}}\Gamma(\frac{1}{4})}$.并猜想等号成立.见 J,d'Analyse Math.1982,41:54－84).

六、 多叶解析函数不等式

设 f 在域 D 内取所有的值至多 m 次,且恰取到某个值 m 次,则称 f 在 D 内是 m 叶的,当 $m>1$ 时,称 f 为多叶函数.

1. 设 $|z|=1$ 时,$m-1<\operatorname{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)<m+1$, 或

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_{m-1+n}|<|a_m|-\sum_{k=2}^{m}k|a_{m+1-k}|.$$

则 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内是 m 叶的.

2. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^m}\sum_{n=2}^{\infty}a_kz^k(a_0=1)$ 在 $0<|z|\leqslant 1$ 内是 m 叶解析函数,则对所有递增函数 $F(t),t\geqslant 0$,成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{2\pi}F(|f(re^{i\theta})|)\mathrm{d}\theta\leqslant 0.$$

特别,当 $F(t)=t^2$ 时,就成为**面积定理**.

我们还可以定义该 $f(z)$ 在 $0<|z|\leqslant 1$ 内平均 m 叶解析的概念(例如见[122]),这时面积定理变成:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)|a_n|^2\leqslant m.$$