MATLAB 在线性代数中的应用

一、　基本应用（矩阵的基本操作，如矩阵求逆，转置等等）

1、　计算行列式

函数：det(A)　A 可以是数值矩阵，也可以是符号矩阵。

例 1：

```
>>A=[1,0,2,5;-1,2,1,3;2,1,0,1;1,3,4,2]
>>det(A)
ans =
       100
```

例 2：

```
>>A=sym('[a,0,0,1;0,a,0,0;0,0,a,0;1,0,0,a]')
>>det(A)
ans =
       a^4-a^2
```

2、　矩阵计算（加、减、数乘、乘、转置、乘方、逆、行化简、秩）

```
>>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
A =
       1    2    3
       4    5    6
       7    8    9
>>B=eye(3)
B =
       1    0    0
       0    1    0
       0    0    1
>>A+B
ans =
       2    2    3
       4    6    6
       7    8    10
>>A-B
ans =
       0    2    3
       4    4    6
       7    8    8
>>k = 3;
>>k*A
```

Ans =

3 6 9
12 15 18
21 24 27

>>A*B

Ans =

1 2 3
4 5 6
7 8 9

>>A=[1,0,3,1;2,1,0,2]

Ans =

1 0 3 1
2 1 0 2

>>B=[4,1,0;-1,1,3;2,0,1;1,3,4]

Ans =

4 1 0
-1 1 3
2 0 1
1 3 4

>>A*B

Ans =

9 -2 -1
9 9 11

>>B*A

>>A’ % A 的转置

A =

1 4 7
2 5 8
3 6 9

>>A^3 %A 的乘方

>> A^3

ans =

468 576 684
1062 1305 1548
1656 2034 2412

如果方阵 A 为非奇异方阵，则它存在逆矩阵A^{-1}，且A^{-1}A=E。

>>A=[2,5;1,3]

A =

2 5
1 3

>>inv (A) % 求逆，A 可以是数值矩阵，也可以是符号矩阵。

ans =

3 -5

```
    -1     2
```
关于左除右除：

若 AX=B，求 X

```
>> A=[2,5;1,3];
>> B=[4,-6;2,1];
>> X=inv(A)*B
X =
     2   -23
     0     8
```
或：>>X=A\B

```
X =
     2   -23
     0     8
```
若 XA=B，则 X=B/A

```
>>X=B/A
X =
   18.0000  -32.0000
    5.0000   -8.0000
```
求矩阵的行最简形：

```
>> A=[2,3,1,-3,-7;1,2,0,-2,-4;3,-2,8,3,0;2,-3,7,4,3]
A =
     2     3     1    -3    -7
     1     2     0    -2    -4
     3    -2     8     3     0
     2    -3     7     4     3
>>rref(A)   %把 A 化成行最简形矩阵，A 可以是数值矩阵，也可以是符号矩阵。
ans =
     1     0     2     0    -2
     0     1    -1     0     3
     0     0     0     1     4
     0     0     0     0     0
```

矩阵的秩：

```
>>rank(A)   % A 可以是数值矩阵，也可以是符号矩阵。
ans =
     3
```

3、 向量运算

行向量、列向量是矩阵的一行或一列。

（1） 向量的加减与数乘

```
>>x=[2,-3,1,5,7,8];
>>y=[12,-4,-5,3,2,-9];
>> x+y
ans =
```

```
     14     -7     -4      8      9     -1
>> x-y
ans =
   -10      1      6      2      5     17
>> k=2.5;
>> k*x
ans =
    5.0000   -7.5000    2.5000   12.5000   17.5000   20.0000
```

（2）　向量的点积

```
>>x*y'     %向量的点积
ans =
   -12
```

(3)向量组的规范正交化

利用施密特正交化过程可以对向量组规范正交化，在 MATLAB 中，利用 qr 函数：

例：将向量组 a1=(1,2,-1),a2=(-1,3,1),a3=(4,-1,0) 规范正交化

```
>> A=[1,-1,4; 2,3,-1;-1,1,0]
A =
     1    -1     4
     2     3    -1
    -1     1     0
>>[Q,R]=qr(A);
>>Q   %矩阵 Q 的列向量组就是所求的规范正交化向量组
Q =
   -0.4082    0.5774    0.7071
   -0.8165   -0.5774    0.0000
    0.4082   -0.5774    0.7071
```

即 **q1**=（-0.4082，-0.8165，0.4082），**q2**=（0.5774，0.5774，-0.5774），**q3**=（0.7071，0.0000，0.7071）为所求的规范正交向量组。我们还可以用下述命令验证 **q1，q2，q3** 的规范正交性。

```
>>Q'*Q   %验证规范正交性，应得到 E，说明 Q 是正交矩阵。
ans =
    1.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000    1.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000
```

（4）　向量组的线性相关性

利用向量组构成的矩阵的秩 rank(A)，判定该向量组是否线性相关。

判定向量组 **a1**=（1,2,-1,4），**a2**=（9,100,10,4），**a3**=（-2，-4,2，-8），**a4**=（3,1,2,0）的线性相关性。

```
>>A=[1,9,-2,3;2,100,-4,1;-1,10,2,2;4,4,-8,0];
>> rank(A)
ans =
     3
```

因为 rank（A）<4，所以该向量组线性相关。

(5) 向量组的秩与最大无关组

向量组的秩等于它构成矩阵 A 的秩，再利用 rref(A)函数将 A 化成行最简型，即可求得向量组的最大无关组。

```
>> rref(A)
ans =
     1     0    -2     0
     0     1     0     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
```

即 **a1**，**a2**，**a4** 构成了向量组的一个最大无关组，且 **a3** = **-2a1**

二、 专题应用

- 线性方程组求解（直接法、迭代法）
- 求解矩阵的特征值和特征向量
- 对矩阵进行对角化
- 矩阵的分解（LU、QR 等）

1、 求解线性方程组

（1）齐次线性方程组的求解

若齐次线性方程组系数矩阵的秩小于未知数的个数，则该齐次线性方程组有非零解。在 MATLAB 中，可以利用函数 null(A)返回齐次线性方程组 AX=0 的一个基础解系，其中 A 可以是数值矩阵（返回的基础解系是规范正交的），也可以是符号矩阵。若 A 是数值矩阵，则返回的基础解系是规范正交的。

例：求齐次线性方程组$\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$的基础解系与通解。

```
>> A=sym('[3,4,-5,7;2,-3,3,-2;4,11,-13,16;7,-2,1,3]')
A =
   [ 3,   4,   -5,   7]
    [ 2, -3,     3, -2]
    [ 4, 11, -13, 16]
    [ 7, -2,     1,   3]

>> null(A)
ans =
        [   3/17, -13/17]
        [ 19/17, -20/17]
        [        1,          0]
        [        0,          1]
```

即$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 3/17 \\ 19/17 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} -13/17 \\ -20/17 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$是一个基础解系，通解为$x = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 (c_1, c_2 \in R)$

（2） 非齐次线性方程组的求解

非齐次线性方程组 Ax=b 有解的充要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 B 的秩，且当 r（A）=r（B）=n 时方程组有唯一解，当 r（A）=r（B）<n 时方程组有无穷多个解。在 Matlab 中，矩阵的除法可用来求非齐次线性方程组 Ax=b 的解，即 x=A\b。
当方程组无解时，利用矩阵的除法求解 Matlab 会给出警告信息，此时的解都为 Inf。
当方程组有唯一解时，可利用矩阵的除法直接求得，即 x=A\b。
当方程组有无穷多个解时，利用矩阵的除法只能求得其中的一个解。若还想求其通解，则还需利用函数 null(A)求出其对应齐次线性方程组 Ax=0 的基础解系。其通解即为对应齐次线性方程组的通解加上其本身的一个解。

例，求解下列非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

```
>> A=[2,1,-5,1;1,-3,0,-6;0,2,-1,2;1,4,-7,6]
A =
     2     1    -5     1
     1    -3     0    -6
     0     2    -1     2
     1     4    -7     6
>> b=[8;9;-5;0]
b =
     8
     9
    -5
     0
>> x=A\b
x =
    3.0000
   -4.0000
   -1.0000
    1.0000
```

即此方程组有唯一解。注意到系数矩阵 A 是一个方阵。因此，此题还可以通过求逆矩阵的方法求其解，即

```
>> x=inv(A)*b
x =
    3.0000
   -4.0000
   -1.0000
    1.0000
```

例，线性方程组$\begin{cases}(2-k)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-k)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-k)x_3=-1-k\end{cases}$，问 k 为何值时，此方程组有唯一解、无解、或有无穷多组解，并在有无穷多组解时，求出其通解。

解：由克莱姆法则知，当系数矩阵的行列式不等于零时，该方程组有唯一解。

```
>> A=sym('[2-k,2,-2;2,5-k,-4;-2,-4,5-k]')
 A =
 [ 2-k,     2,    -2]
[      2, 5-k,    -4]
[    -2,    -4, 5-k]

>> p=det(A)
 p =
 12*k^2 - k^3 - 21*k + 10

>> solve(p)
 ans =
     1
   1
 10
```

即当$k\neq 10$且$k\neq 1$时，方程组有唯一解。当 k=10 时，此时 A，b 分别为：

```
>> A=sym('[-8,2,-2;2,-5,-4;-2,-4,-5]')
 A =
 [ -8,    2, -2]
[    2, -5, -4]
[ -2, -4, -5]

>> b=sym('[1;2;-11]')
 b =
       1
     2
 -11

>> x=A\b
Warning: System is inconsistent. Solution does not exist.
> In sym.mldivide at 50
 x =
   Inf
 Inf
 Inf
```

即当 k=10 时，方程组无解。当 k=1 时，此时 A，b 分别为：

```
>> A=sym('[1,2,-2;2,4,-4;-2,-4,4]')
 A =
```

```
[    1,    2, -2]
[    2,    4, -4]
[ -2, -4,    4]

>> b=sym('[1;2;-2]')
 b =
     1
    2
  -2

>> x=A\b
Warning: System is rank deficient. Solution is not unique.      %解不唯一
> In sym.mldivide at 54
 x =
   1
  0
  0
>> null(A)
 ans =
 [ -2, 2]
[    1, 0]
[    0, 1]
```

所以当 k=1 时，方程组有无穷多个解。其通解为：$x = c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$(c_1, c_2 \in R)$

2、　求解特征值与特征向量

矩阵 A 的特征值 k 和特征向量 x 满足 Ax=kx。以特征值构成矩阵 D，相应的特征向量构成矩阵 V，则有 AV=VD。在 Matlab 中，函数 eig（）可以用来求解矩阵的特征值和特征向量。它的基本用法有：

（1）　d=eig（A）返回由矩阵 A 特征值组成的列向量。

（2）　[V,D]=eig(A)返回特征值矩阵 D 和特征向量矩阵 V。特征值矩阵 D 是以 A 的特征值为对角线元素生成的对角阵。矩阵 A 的第 i 个特征值所对应的特征向量是矩阵 V 的第 i 列列向量，即满足 AV=VD，其中 A 可以是数值矩阵，也可以是符号矩阵。若 A 是数值矩阵，则矩阵 V 中的列向量还是规范的（长度为 1）。

例，求矩阵 A=$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\0 & 2 & 0\\-4 & 1 & 3\end{bmatrix}$的特征值和特征向量。

```
>> A=[-2,1,1;0,2,0;-4,1,3]
A =
        -2          1          1
          0          2          0
        -4          1          3
>> d=eig(A)
d =
```

```
  -1
   2
   2

>> [V,D]=eig(A)
V =
   -0.7071   -0.2425    0.3015
         0         0    0.9045
   -0.7071   -0.9701    0.3015
D =
  -1     0     0
   0     2     0
   0     0     2
```

即对应于 k3=k2=2 的全部特征向量为 $c_2*(-0.2425,0,-0.9701)+c_3*(0.3015,0.9045,0.3015)$, ($c_2,c_3$不同时为零)，对应于 k1=-1 的全部特征向量为$c_1*(-00.7071,0,-0.7071)$, ($c_1\neq0$)

由线性代数的知识知，特征值是特征多项式的根。在 Matlab 中可以利用 poly 函数计算矩阵的特征多项式，再利用 solve 函数即可求得矩阵的特征值。

例，

```
>> A=sym('[-2,1,1;0,2,0;-4,1,3]')
 A =
 [ -2, 1, 1]
[    0, 2, 0]
[ -4, 1, 3]

>> p=poly(A)
 p =
 x^3 - 3*x^2 + 4

>> solve(p)
 ans =
   -1
   2
   2
```

3、 二次型的运算

（1） 化二次型为标准型

对于二次型 Q=X’AX，其中 X=$(x_1,x_2,\dots,x_n)'$，A 是一个对称矩阵。若要将其化为标准型，即 f=$k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$，就是要找到一个矩阵 P，使得 P’AP=diag($k_1,k_2,\dots,k_n$)。令 X=PY，则 Q=X’AX=Y’P’APY=Y’diag($k_1,k_2,\dots,k_n$)Y=$k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$。

例，化简二次型$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$。

```
>> A=[0,1,1,-1;1,0,-1,1;1,-1,0,1;-1,1,1,0]
A =
     0     1     1    -1
     1     0    -1     1
     1    -1     0     1
    -1     1     1     0

>> [P,D]=eig(A)
P =
   -0.5000    0.2887    0.7887    0.2113
    0.5000   -0.2887    0.2113    0.7887
    0.5000   -0.2887    0.5774   -0.5774
   -0.5000   -0.8660         0         0

D =
   -3.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
```

P 就是所求的正交矩阵，令 X=PY，化简后的二次型为 f=$-3y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$

（2）　正定二次型的判定

对称矩阵 A 为正定的充要条件是 A 的特征值全为正，A 为负定的充要条件是 A 的特征值全为负。

例，判定二次型$f = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$的正定性。

```
>> A=[-5,2,2;2,-6,0;2,0,-4]
A =
    -5     2     2
     2    -6     0
     2     0    -4

>> d=eig(A)
d =
   -8.0000
   -5.0000
   -2.0000
```

因为 A 的特征值全为负，所以 f 是负定的。

三、　综合应用

线性代数在实际生活中有着极其广泛的应用，以下是几个常见的应用问题，让我们了解线性代数在自然科学与社会科学等方面的实际应用。

1、 投入产出模型

投入产出分析是美国哈弗大学教授列昂节夫（Leontief）在 20 世纪 30 年代提出的一种数量经济分析方法，通过编制投入产出表，运用矩阵和线性方程组的方法，通过电子计算机的计算，来揭示国民经济各部门的内在联系。因此他获得 1973 年诺贝尔经济学奖。
投入产出分析方法以表格形式反映经济问题，比较直观，便于推广应用，因此已成为一种应用较广的数量分析方法，无论是国家、地区。部门还是企业都可以应用。

投入产出模型是一种进行综合平衡的经济数学模型，它是研究某一经济系统中各部门之间的“投入”与“产出”关系的线性模型，它通过投入产出表来反映经济系统中各部门之间的数量依存关系。

投入是从事一项经济活动的各种消耗，其中包括原材料、设备、动力、人力和资金等的消耗。产出是指从事一项经济活动的结果，若从事的是生产活动，产出就是产出的产品。

设有 n 个经济部门，x_i为 i 部门的总产出，a_{ij}为 i 部门单位产品对 j 部门产品的消耗，d_i为外部对 i 部门的需求，f_i为 i 部门新创造的价值，则可列表如下：

产出 / 投入		消耗部门				外部需求	总产出
		1	2	…	n		
生产部门	1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	d_1	x_1
	2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	d_2	x_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	d_n	x_n
新创造价值		f_1	f_2	…	f_n		
总投入		x_1	x_2	…	x_n		

其中，$a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$称为直接消耗系数。

在投入产出表中反映的基本平衡关系是：

从左到右：中间需求+外部需求=总产出　　（1）

从上到下：中间消耗+新创造价值=总投入　　（2）

由这两个平衡关系，可得两组线性方程组。由式（1）可得

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + d_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + d_2 = x_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + d_n = x_n \end{cases} \qquad (3)$$

称为分配平衡方程组。由（2）式可得

$$\begin{cases} (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1})x_1 + f_1 = x_1 \\ (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2})x_2 + f_2 = x_2 \\ \cdots \\ (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn})x_n + d_n = x_n \end{cases} \qquad (4)$$

称为消耗平衡方程组。

用矩阵表示如下：

设 A=$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，x=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，D=$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$，F=$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

则方程组(3)可化为

Ax+D=x

移项得

（E-A）x=D

这里成 A 为直接消耗矩阵，E-A 称为列昂杰夫矩阵。

令$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{bmatrix}$

则方程组(4)可化为

Cx+F=x

移项得

（E-C）x=F

将方程组（3）中各个方程相加得

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_n + \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

将方程组（4）中

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_n + \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

比较上面两方程得

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

这表明系统外部对各部门产值的需求总和等于系统内部各个部门新创造价值的总和。

可以证明直接消耗系数有如下性质：

1） 每个　都是小于 1 的非负数，即　$0 \le a_{ij} < 1(i,j = 1,2,..$

2） 矩阵 A 中每列元素之和小于 1，即　$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1\ (j = 1,2,...$

由以上性质可知：

在分配平衡方程组中，列昂杰夫矩阵 E-A 可逆，且$(D-A)^{-1}$为非负矩阵，所以

$$x=(D-A)^{-1}D$$

在消耗平衡方程组中，显然 C 的主对角元素全为正数，E-C 可逆，且$(E-C)^{-1}$为非负矩阵，所以 $x=(E-C)^{-1}F$

例，某经济系统有三个企业：煤矿，电厂和铁路，设在一年内，企业之间直接消耗系数及外部对各企业产值需求量如下表所示：

产出 投入		消耗企业			外部需求	总产出
		煤矿	电厂	铁路		
生产企业	1	0	0.65	0.55	50000	x_1
	2	0.25	0.05	0.10	25000	x_2
	n	0.25	0.05	0	0	x_3

为使各企业产值与系统内外需求平衡，各企业一年内总产值应为多少？

解　　设直接消耗矩阵 A，外部需求向量 D，生产向量 x 分别为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0.65 & 0.55\\ 0.25 & 0.05 & 0.10\\ 0.25 & 0.05 & 0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}50000\\ 25000\\ 0\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

由分配平衡方程（E-A）x=D 得

$$\begin{bmatrix}1.00 & -0.65 & -0.55\\ -0.25 & 0.95 & -0.10\\ -0.25 & -0.05 & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50000\\ 25000\\ 0\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{503}\begin{bmatrix}756 & 542 & 470\\ 220 & 690 & 190\\ 200 & 170 & 630\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50000\\ 25000\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120087\\ 56163\\ 28330\end{bmatrix}$$

2、　　线性规划模型

在工农业生产、经济管理以及交通运输等方面，经常要涉及到使用或分配劳动力、原材料和资金等，而使得费用最小或利润最大，这就是规划问题。而线性规划是帮助我们解决这类问题的一个常用方法。

20 世纪 40 年代末，美国数学家丹捷格（Dantzing）等人发明了求解线性规划问题的单纯形法，为线性规划作为一门学科奠定了基础。随着计算机的不断发展，线性规划在经济，生产和社会生活各方面广泛应用。

下面通过例子来说明线性规划建模和求解过程。

例，某企业生产甲、乙两种产品，要用三种不同的原料。从工艺资料知道：每生产一件产品

甲，需要三种原料分别为 1,1,0 单位；每生产一件产品乙，需要三种原料分别为 1,2,1 单位；每天原料供应能力分别为 6,8,3 单位。又知道，每生产一件产品甲，企业利润收入为 300 元，每生产一件产品乙，企业利润收入为 400 元，企业应如何安排计划，使一天的总利润最大？

解　　首先建立问题的数学模型。问题中条件列表如下：

产出 投入		消耗部门 甲	乙	原料供应量
生产部门	1	1	1	6
	2	1	2	8
	3	0	1	3
利润		300	400	

设产品甲的日产量为x_1件，设产品乙的日产量为x_2件，显然$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，企业一天所获得总利润为 S，则 S 是x_1，x_2的线性函数，即

$$S=300x_1+400x_2$$

这个线性函数称为目标函数。求目标函数的最大值，记为

$$\max S=300x_1+400x_2$$

但在追求目标函数的最大值时，同时要满足问题中的一些限制条件，这些限制条件称为线性规划问题的约束条件，在本例中约束条件为：

$x_1+x_2 \leq 6, x_1+2x_2 \leq 0, x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

这样，这个问题的数学模型可写成

$$\max S=300x_1+400x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2 \leq 6 \\ x_1+2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

对约束条件中的线性不等式，可以通过适当添加新变量，使其转化为线性等式，如（5）式可转化为

$$\max S=300x_1+400x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+2x_2+x_4=8 \\ x_2+x_5=3 \\ x_j \geq 0, (j=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

这种形式称为线性规划问题的标准形式。一般情况时的标准形式为

$$\max S=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (6)$$

其中$b_i \ge 0$, a_{ij}, $c_j(i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$均为常数。

设$=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,C=$(c_1,c_2,\dots,c_n)$,b=$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,x=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,则(6)式可用矩阵表示为

$$\max S = C\mathbf{x}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} A\mathbf{x} = b \\ \mathbf{x} \ge 0 \end{cases}$$

可以看出线性规划问题就是要在非齐次线性方程组 Ax=b 的解空间中找出使目标函数达到最大值的解向量。

对上例按照线性方程组的解法求解：

```
>> B=[1,1,1,0,0,6;1,2,0,1,0,8;0,1,0,0,1,3]

B =

     1     1     1     0     0     6
     1     2     0     1     0     8
     0     1     0     0     1     3

>> rref(B)

ans =

     1     0     0     1    -2     2
     0     1     0     0     1     3
     0     0     1    -1     1     1
```

得到的对应的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 + 2x_5 + 2 \\ x_2 = -x_5 + 3 \\ x_3 = x_4 - x_5 + 1 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in R)$$

令$x_4 = x_5$=0，得到一个特解为

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,\ x_4 = x_5 = 0$$

这时目标函数值为 S=1800。

在线性规划中称方程组通解中的自由未知量为非基变量，如x_4，x_5；而由它们决定的变量为基变量，如x_1，x_2，x_3。

由线性方程组的解法知，也可选其他变量为自由未知变量，即选其他变量为非基变量，如选x_3, x_4为非基变量，x_1，x_2，x_5为基变量，则对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 + 4 \\ x_2 = x_3 - x_4 + 2 \\ x_5 = -x_3 + x_4 + 1 \end{cases}$$

方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in R)$$

令$x_3 = x_4$=0，得到一个特解为

$$x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_5 = 1,\ x_3 = x_4=0$$

则目标函数值为 S=2000。

可以证明，当$x_1 = 4$，$x_2 = 2$时，目标函数的值达到最大值。

在线性规划中，用单纯形法交换基变量和非基变量，从而在方程组的解空间中求出使目标函数值最大的最优解。

3、 人口模型

在对自然资源进行规划利用时，对各种生物种群的数量和年龄构成进行估测是非常重要的。在教育、生产等领域内，对人口构成的估计和预测也是十分重要和必须的。因此，从 18 世纪以来，人们不断地提出各种人口模型，有确定性的和随机性的，有离散的和连续的等等。

本节介绍的人口模型是莱斯利（Leslie）在 20 世纪 40 年代提出的，它是一个预测人口按年龄组发展变化得离散模型。模型以女性人口的发展变化为其所研究对象，人口变化的基本因素是生育、老化和死亡，而不考虑人口迁移。

将某地区女性人口分为 n 个年龄组，例如年龄区间长为 15 年，则各个年龄组为$[0,15), [15,30), [30,45), [45,60), [60,75), [75,90)$(模型不考虑大于或等于 90 岁以上的人口的变化)

用a_i表示第 i 年龄组女性的存活率（即第 i 年龄组女性能存活到 i+1 年龄组的人数与第 i 年龄组女性人数之比）；用b_i表示第 i 年龄组女性的生育率（即第 i 年龄组女性平均每人生女孩数）。假定a_i，b_i都是常数。设$X_i(t)$表示 t 时刻第 i 年龄组的女性人数，$X_i(0)$是初始时刻女

性人口数，且为已知量。在 t+1 时刻第 1 年龄组的人口是由在时刻 t 到时刻 t+1 这段时间内出生，并且能够活到时刻 t+1 的人口构成的，其人口数为：

$$X_1(t+1)=b_1X_1(t)+b_2X_2(t)+\cdots+b_nX_n(t)$$

对第 2 至第 n 年龄组，在 t+1 时刻，第 i 年龄组的人口数是第 t 时刻的第 i-1 年龄组的人存活到 t+1 时刻的人数，所以

$$X_i(t+1)=a_{i-1}X_{i-1}(t),(i=2,3,\ldots,n)$$

则可得

$$\begin{cases}X_1(t+1)=b_1X_1(t)+b_2X_2(t)+\cdots+b_nX_n(t)\\ X_2(t+1)=a_1X_1(t)\\ X_3(t+1)=a_2X_2(t)\\ \vdots\\ X_n(t+1)=a_{n-1}X_{n-1}(t)\end{cases}$$

设$x(t)=\begin{bmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\\\vdots\\X_n(t)\end{bmatrix}$，L=$\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ a_1 & & \cdots & & \\ & a_2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & \cdots & a_{n-1} & 0\end{bmatrix}$

则上述方程组可写成

$$x(t+1)=Lx(t)$$

逐次递推可得

$$x(t)=L^tx(0),(t=1,2,\ldots,n)$$

这样就可根据初始时段女性人口数推算出以后各时段的女性人数。

例，某农场饲养的某种动物所能达到的最大年龄为 15 岁，将其分成三个年龄组：第一年龄组：0~5 岁；第二年龄组：6~10 岁；第三年龄组：11~15 岁。动物从地二年龄组开始繁殖后代，经过长期统计，地二年龄组在其年龄段平均繁殖 4 个后代，第三个年龄组的动物在其年龄段平均繁殖 3 个后代。第一年龄组和第二年龄组的动物能顺利进入下一个年龄组的存活率分别为 1/2 和 1/4。假设农场现在有三个年龄段的动物各 1000 头，问 15 年后农场三个年龄段的动物各有多少头？

解　因年龄分组为 5 岁一段，故将时间周期也取为 5 年，15 年后就经过了三个周期，设$X_i(t)$表示 t 个时间周期第 i 组年龄段动物的数量(t=1,2,3;i=1,2,3)，由题设可知

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{4},\ b_1=0,\ b_2=4,\ b_3=3,x(0)=\begin{bmatrix}1000\\1000\\1000\end{bmatrix}$$

有莱斯利人口模型可得

$$x(3)=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1000\\1000\\1000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & 8 & 6\\ 1 & \frac{3}{8} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\1000\\1000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14375\\1375\\875\end{bmatrix}$$

所以，15 年后，农场饲养的动物总数将达到 16625 头，其中 0~5 岁的有 14375 头，占 86.47%；6~10 岁的有 1375 头，占 8.27%；11~15 岁的有 875 头，占 5.26%。

4、 数据的最小二乘处理

一个线性方程组 Ax=b 可能有解，也可能无解。如果无解，也称方程组不相容。例如线性方程组$\begin{cases}2x=b_1\\3x=b_2\\4x=b_3\end{cases}$，仅当右边的$b_1:b_2:b_3=2:3:4$时才有解，否则就是不相容方程组，因而无解。

在实际问题中，大量数据所满足的方程往往构成不相容方程组，而我们又必须去求解。这是我们不能期望求出一组解满足方程组。而是通过求一组解，使得所有方程的误差平方和最小。如在上例中，求 x，使$S=(2x-b_1)^2+(3x-b_2)^2+(4x-b_3)^2$最小。这样的解称为方程组 Ax=b 的最小二乘解。

一般地，n 个未知数 m 个方程的不相容方程组 Ax=**b** 的最小二乘解$\hat{x}$满足

$$A^TA\hat{x}=A^Tb$$

这个方程称为“正规方程”。

当 A 的秩为 n 时，矩阵A^TA可逆，则

$$\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

例， 外出旅行或行军作战等，都可能涉及到两地路程的估计问题。从地图上量出的距离却是两地的直线距离 d，由此能估计处两地的世纪路程 S 吗？下面是《中国地图册》成渝地区图中，量得彭县到其他几个城市的直线距离，并按照比例尺（1cm 为 20km）进行转换和对应实际路程，列表如下：

彭县	成都	郫县	灌县	什邡	德阳	广汉	温江	重庆	新繁
量距	1.8	1.08	1.55	1.32	2.3	1.64	1.7	2.38	0.75
d(km)	36	21.6	31	26.4	46	32.8	34	47.6	15
S(km)	42	30	58	43	68	43	50	65	16

解 将数据放入坐标系中，发现他们大致在一条直线附近，又因为 d=0 时，S=0。从而设模型为

S=ad

将数据代入模型得

$$\begin{cases} 42 = 36a \\ 30 = 21.6a \\ 58 = 31a \\ 43 = 26.4a \\ 68 = 46a \\ 43 = 32.8a \\ 50 = 34a \\ 65 = 47.6a \\ 16 = 15a \end{cases}$$

这是一个不相容方程组。设

$$A = (36, 21.6, 31, 26.4, 46, 32.8, 34, 47.6, 15)^T$$

$$b = (42, 30, 58, 43, 68, 43, 50, 65, 16)^T$$

故可得

$$Aa = b$$

其最小二乘解为

$$\hat{a} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

而$A^T A$=10259.12，$A^T b = 14665.6$所以

$$\hat{a} = \frac{1}{10259.12} \times 14665.6 = 1.42952$$

由此，得到经验模型

$$S = 1.42952d$$

例， 弹簧在弹性限度内，作用在弹簧上的拉力 y 与弹簧的伸长长度 x，满足线性关系

$$y = a + bx$$

其中 b 是弹簧的弹性系数。已知某弹簧，通过实验测得的数据如下表所示：

x_i(cm)	2.6	3.0	3.5	4.3
y_i(N)	0	1	2	3

试求该弹簧的弹性系数 b。

解 将实验数据代入关系式，得

$$\begin{cases} a + 2.6b = 0 \\ a + 3.0b = 1 \\ a + 3.5b = 2 \\ a + 4.3b = 3 \end{cases}$$

这是一个不相容方程组，设 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2.6 \\ 1 & 3.0 \\ 1 & 3.5 \\ 1 & 4.3 \end{bmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，则方程组为

$Ax = b$

其最小二乘解为

$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

其中$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.6 & 3.0 & 3.5 & 4.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2.6 \\ 1 & 3.0 \\ 1 & 3.5 \\ 1 & 4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13.4 \\ 13.4 & 46.5 \end{bmatrix}$,

$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6.44}\begin{bmatrix} 46.5 & -13.4 \\ -13.4 & 4 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 6 \\ 22.9 \end{bmatrix}$

故

$\hat{x} = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.326 \\ 1.739 \end{bmatrix}$

所以弹簧的弹性系数$b^* = 1.739N/cm$。

参考文献：

1、 MATLAB 6 数学建模基础教程，云舟工作室编著，人民邮电出版社，2001

2、 线性代数及应用，谢国瑞编著，高等教育出版社，1999

3、 线性代数及其应用，上海市教育委员会组编；王建军主编，上海交通大学出版社，2005

4、 MatLab 工程数学应用，许波，刘征编著，清华大学出版社，2000