§ 3 平均不等式

平均不等式在不等式理论中处于核心地位，AG 不等式（算术平均 − 几何平均不等式）是 Hardy 等名著[1]的三大主题之一（另两个主题是 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式）. 1988 年出版的专著“Means and their inequalities”[10]达 459 页，但仍有大量的平均不等式未能收入，本节仅介绍若干基本的结果和 20 世纪 90 年代以来的最新结果.

一、AG 不等式

（一） AG 不等式的基本形式

1. 中学数学中，常称以下三个不等式为基本不等式：

(1) $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ $(a, b \geqslant 0)$； (3.1)

(2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$ （a, b 同号）； (3.2)

(3) $2ab \leqslant a^2 + b^2$，（a, b 为实数）， (3.3)

仅当 $a = b$ 时，以上三个不等式中的等号成立.

应注意的是，仅当 $a, b > 0$ 时，以上三个不等式才等价，在一般情形下，它们对 a, b 所要满足的条件是不同的，(3.1) 式等价于 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

2. 设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$，$a_k \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant n$，则 $A_n(a) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 称为 $a_1, \cdots, a_n$ 的算术平均（值），$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 称为 $a_1, \cdots, a_n$ 的几何平均（值）.

$$G_n(a) \leqslant A_n(a) \text{ 即 } \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{3.4}$$

称为 AG 不等式，仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

AG 不等式是最重要的基本不等式，利用这个不等式，可将和的形式缩小为积的形式，或将积的形式放大为和的形式，因而可以叙述成两个等价的共轭命题：

(1) 其和为 S 的 n 个正数之积，在这些数都相等时为最大，最大值为 $(S/n)^n$；

(2) 其积为 σ 的 n 个正数之和，在这些数都相等时为最小，最小值为 $n\sigma^{1/n}$.

因此，AG 不等式有许多独特的应用价值，例如在几何学中求最大最小问题时，给定

表面积的所有长方体中,正方体具有最大的体积;而给定体积的所有长方体中,正方体具有最小的表面积等.

AG 不等式的加权形式是:

$$G_n(a,q) \leqslant A_n(a,q), \tag{3.5}$$

式中 $G_n(a,q) = \prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}, A_n(a,q) = \sum_{n=1}^{n} q_k a_k,\ q_k > 0, \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$

通过对数变换可以将这两种平均联系起来,记 $\ln a = (\ln a_1,\cdots,\ln a_n)$,则

$$\ln G_n(a,q) = \sum_{k=1}^{n} q_k \ln a_k = A_n(\ln a, q).$$

即正数 $a_1,\cdots,a_n$ 的加权几何平均 $G_n(a,q)$ 的对数等于 $a_1,\cdots a_n$ 的对数 $\ln a_1,\cdots,\ln a_n$ 的加权算术平均.

(3.5) 式的进一步推广是:设 $a_{jk} > 0, q_k > 0$,且 $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$,则

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{jk}^{q_k}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\right)^{q_k}, \tag{3.6}$$

仅当

$$\frac{a_{j1}}{\sum_{j=1}^{m} a_{j1}} = \frac{a_{j2}}{\sum_{j=1}^{m} a_{j2}} = \cdots = \frac{a_{jn}}{\sum_{j=1}^{m} a_{jn}}, (j = 1,\cdots,m)$$

时等号成立(见[1]定理 11).

3. **AG 不等式的证明**:早在公元前 500 多年的毕达哥拉斯(Pythagoras)时代,就有正数 a_1, a_2 的算术平均 $A_2(a)$ 和几何平均 $G_2(a)$ 等概念,而 $G_2(a) \leqslant A_2(a)$ 是欧几里得(Euclid)证明的. 1821 年 Cauchy 对(3.4)式用反向归纳法给出了一个精彩的证明. 此后,对 AG 不等式寻求各种不同的证法,一直是人们研究的一个热点. 20 世纪 60 年代以前的证明可参看[1],[2],[4]及其所引用的参考文献. 20 世纪 80 年代王挽澜教授在他的讲义"不等式方法"中总结了 53 种不同的证明. 事实上至今已有上百种不同的证明方法,下面仅介绍若干典型的、简洁的和新的精彩证明.

为了叙述方便,下面将(3.4)式简记为 $G_n \leqslant A_n$,并设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数(因为 $a_1 = \cdots = a_n$ 时,等号成立),与(3.4)式等价的两种形式是:

若 $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$,则 $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n$;

若 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$,则 $\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n$.

(1) **数学归纳法**:$n = 2$ 时,归结为$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$. 关键是如何从 $G_n \leqslant A_n$ 推出 $G_{n+1} \leqslant A_{n+1}$?这里有许多不同的技巧,例如:

① **用反向归纳法**:1821 年 Cauchy 巧妙地分为两步:第一步,从 $n = k$ 时(3.4)式成立容易推出 $n = 2k$ 时该式也成立:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2k}}{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{k}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}[(a_1\cdots a_k)^{1/k}+(a_{k+1}\cdots a_{2k})^{1/k}]$$
$$\geqslant [(a_1\cdots a_k)^{1/k}(a_{k+1}\cdots a_{2k})^{1/k}]^{1/2}=(a_1\cdots a_k a_{k+1}\cdots a_{2k})^{1/2k}.$$

由此推出 $n=2^m$ 时(3.4)式成立.

第二步　设 $n\neq 2^m$,则必存在 $r\in N$,使得 $n+r=2^m$.

$$A_n=\frac{(n+r)A_n}{n+r}=\frac{(a_1+\cdots+a_n)+(A_n+\cdots+A_n)}{n+r}$$
$$\geqslant [a_1\cdots a_n\cdot \underbrace{A_n\cdots A_n}_{r\text{个}}]^{\frac{1}{(n+r)}}=(G_n^nA_n^r)^{\frac{1}{(n+r)}}.$$

即 $A_n^{n+r}\geqslant G_n^n\cdot A_n^r$,从而 $A_n\geqslant G_n$.

另一思路是从 $A_{n+1}\geqslant G_{n+1}$ 推出 $A_n\geqslant G_n$ 成立.事实上

$$A_n=\frac{nA_n+A_n}{n+1}=\frac{a_1+\cdots+a_n+A_n}{n+1}\geqslant(a_1a_2\cdots a_nA_n)^{\frac{1}{n+1}},$$

即 $A_n^{n+1}\geqslant a_1\cdots a_nA_n$,从而 $A_n^n\geqslant a_1\cdots a_n=G_n^n$.即 $A_n\geqslant G_n$.

②　令 $b_k=\frac{a_k}{G_{n+1}}$.则 $b_1b_2\cdots b_{n+1}=1$.由于$\{a_k\}$不全相等,所以$\{b_k\}$也不全相等,不妨设 $b_1<1,b_{n+1}>1$.记 $c=\frac{a_1a_{n+1}}{G_{n+1}}$,则由 $G_n\leqslant A_n$ 得到

$$n=n\left(\frac{c}{G_{n+1}}\cdot b_2\cdots b_n\right)^{1/n}\leqslant\frac{c}{G_{n+1}}+b_2+\cdots+b_n.$$

两边各加上 $b_1+b_{n+1}-\frac{c}{G_{n+1}}$,得到

$$\sum_{k=1}^{n+1}b_k\geqslant n+b_1+b_{n+1}-\frac{c}{G_{n+1}}=n+1+(1-b_1)(b_{n+1}-1)>n+1,\text{即 }G_{n+1}<A_{n+1}.$$

③　不妨设 $G_n=1$.由假设 $A_n\geqslant G_n=1$,即$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\geqslant n$.设 $a_1\cdots a_na_{n+1}=1$,若 $a_1\geqslant1,a_2\leqslant1$,则$(a_1-1)(a_2-1)\leqslant0$,即 $a_1a_2+1\leqslant a_1+a_2$.从而 $a_1+\cdots+a_{n+1}\geqslant1+a_1a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}\geqslant1+n$.(Ehlers,1954,[2]11－12)

④　利用 Young 不等式:$a^{1/p}b^{1/q}\leqslant(1/p)a+(1/q)b$,　$1/p+1/q=1,1<p<\infty$,得到

$$a_{n+1}^{1/n}\cdot A_{n+1}^{(1-1/n)}\leqslant 1/na_{n+1}+(1-1/n)A_{n+1}.$$

记　$G=a_{n+1}^{1/n}A_{n+1}^{(1-1/n)},A=1/na_{n+1}+(1-1/n)A_{n+1}$.

则　$A_{n+1}=(A_n+A)/2\geqslant(A_nA)^{1/2}\geqslant(G_nG)^{1/2}=(G_{n+1}^{n+1}A_{n+1}^{n-1})^{1/2n}$,即　$A_{n+1}\geqslant G_{n+1}$.

(Diananda,P.H.,[305]1960,67:1007)

⑤　从 $G_n\leqslant A_n$ 证$G_{n+1}\leqslant A_{n+1}$.即要证

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}\geqslant(n+1)(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

由 $G_n\leqslant A_n$,只要证

$$n(a_1\cdots a_n)^{1/n}+a_{n+1}\geqslant(n+1)(a_1\cdots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

上式可改写成：

$$n\left(\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{a_{n+1}^{n+1}}\right)^{1/n}+1\geqslant(n+1)\left(\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{a_{n+1}^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

令 $\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{a_{n+1}^{n+1}}=x^{n(n+1)}$，则上式变成

$$nx^{n+1}+1\geqslant(n+1)x^n. \tag{3.7}$$

令 $f(x)=nx^{n+1}+1-(n+1)x^n$. 则

$$f'(x)=n(n+1)x^n-(n+1)nx^{n-1}=n(n+1)x^{n-1}(x-1).$$

于是 $x>1$ 时 $f'(x)>0$，$x<1$ 时 $f'(x)<0$. 所以当 $x>0$ 时，$f(1)$ 是最小值，即 $f(x)\geqslant f(1)=0$. 此即(3.7)式，而当 $x=0$ 时，(3.7)式显然成立.

⑥ 不妨设 $0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$a_1<a_n$，则 $a_1<A_n<a_n$. 从而

$$A_n(a_1+a_n-A_n)-a_1a_n=(a_1-A_n)(A_n-a_n)>0. \tag{3.8}$$

由于 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$ 和 $a_1+a_n-A_n$ 的算术平均是 A_n. 由归纳法假设 $G_{n-1}\leqslant A_{n-1}$，得到 $A_n^{n-1}\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A_n)$，两边乘上 A_n 并由(3.8)式. 有

$$A_n^n\geqslant A_n(a_1+a_n-A_n)a_2a_3\cdots a_{n-1}\geqslant a_1a_na_2a_3\cdots a_{n-1}.$$ 即 $A_n\geqslant G_n$.

(Kong-Ming Chong. [305]1976, 83: 369)

(2) **Lagrange 乘数法**：求 $f(x)=(x_1\cdots x_n)^{1/n}$ 在条件 $x_1+\cdots+x_n=a$ 下的最大值，作辅助函数 $F(x)=(x_1\cdots x_n)^{1/n}+\lambda(x_1+\cdots+x_n-a)$.

F 对 x_k 求偏导数 $F'_{x_k}=0$，得出

$$f(x)=-n\lambda x_k,\ k=1,\cdots,n. \tag{3.9}$$

对 k 求和，得到 $nf(x)=-n\lambda(x_1+\cdots+x_n)=-\lambda na$. 即

$$f(x)=-\lambda a. \tag{3.10}$$

从(3.9)式，(3.10)式得出 $x_k=\frac{a}{n}$. 于是 f 在 $\left(\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n}\right)$ 点取得最大值 $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)\cdots\left(\frac{a}{n}\right)}=\frac{a}{n}$，即 $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{a}{n}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$.

(3) **动态规则中的函数方程法**：设乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 在条件 $\sum_{k=1}^n x_k=a$ 下的最大值为 $f_n(a)$. 当 x_n 取定后，乘积 $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ 在条件 $\sum_{k=1}^{n-1}x_k=a-x_n$ 下的最大值为 $f_{n-1}(a-x_n)$，于是 $f_1(a)=a$，$f_n(a)=\max\limits_{0\leqslant x_n\leqslant a}\{x_nf_{n-1}(a-x_n)\}$，$n=2,3,\cdots$，作换元 $x_k=ay_k$，$k=1,\cdots,n$，得出 $f_n(a)=a^nf_n(1)$，从而

$$f_n(1)=f_{n-1}(1)\left[\max_{0\leqslant y\leqslant 1}y(1-y)^{n-1}\right]=\frac{f_{n-1}(1)(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

又 $f_1(1)=1$，从而 $f_n(1)=\frac{1}{n^n}$. 这表明在条件 $\sum_{k=1}^n y_k=1$ 下，$y_1y_2\cdots y_n\leqslant\frac{1}{n^n}$. 此即(3.4)式.

(Bellman, R., Dynamic programming, Princeton, 1957)

(4) 利用不等式 $e^x\geqslant 1+x$，得出

$$1 = e^{0} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A_n} - n\right\} = \prod_{k=1}^{n}\exp\left\{\frac{a_k}{A_n} - 1\right\} \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_n}\right) = \frac{G_n^n}{A_n^n}\text{，此即 } G_n \leqslant A_n.$$

(5) 利用不等式 $e^x > x^e (x \neq e)$，即 $x > e\ln x$. 于是

$$a_k \geqslant e\ \ln a_k, k = 1,\cdots,n. \tag{3.11}$$

我们可选择权系数 $q = (q_1,\cdots,q_n), q_k > 0$，且 $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$，使得

$$G_n(a,q) = \prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k} = e. \tag{3.12}$$

于是从(3.11)式对 k 求和，得到

$$\sum_{k=1}^{n} q_k a_k \geqslant e\sum_{k=1}^{n} q_k \ln a_k = e\ \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right) = e = \prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}.\text{此即(3.5)式.}$$

(6) 利用不等式 $\ln x \leqslant x - 1 \quad (x > 0)$，得到 $\log\frac{a_k}{A_n} \leqslant \frac{a_k}{A_n} - 1$，对 k 求和，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{a_k}{A_n}\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)/A_n - n = 0\text{，即 }\log\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A_n}\right) = \log\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n = n\log\left(\frac{G_n}{A_n}\right) \leqslant 0.$$

从而 $\log\frac{G_n}{A_n} \leqslant 0$，即 $\frac{G_n}{A_n} \leqslant 1$，此即(3.4)式.

(7) 利用不等式 $x(n - x^{n-1}) \leqslant n - 1, x > 0.$ (3.13)

取 $x = \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，则从(3.13)式得到 $A_n^n \geqslant a_1\left(\frac{a_2 + \cdots + a_n}{n-1}\right)^{n-1}$.

对上式右边逐次用(3.13)式，得到

$$A_n^n \geqslant a_1 a_2\left(\frac{a_3 + \cdots + a_n}{n-2}\right)^{n-2} \geqslant \cdots \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n = G_n^n.$$

(Akerberg, B., [305]1963, 76: 997 − 998)

(8) 利用函数的单调性：令

$$f(x) = \begin{cases}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^x\right)^{1/x}, & x \neq 0.\\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}, & x = 0.\end{cases}$$

则 f 在 $[-\infty,\infty]$ 上严格递增(当 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数时)，于是 $f(0) < f(1)$，即(3.4)式成立.(王继岳，徐沥泉，[345]1985, 6: 45 − 46)

(9) **利用凸函数的 Jensen 不等式**：设 f 是 $(0,\infty)$ 上的凸函数，$q_k > 0$，$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$，$a_k > 0$，则

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k f(a_k). \tag{3.14}$$

取 $f(x) = e^x$. 令 $y = \log x$，则 $x_k^{q_k} = \exp(q_k \log x_k) = \exp(q_k y_k)$. 由(3.14)式，有

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k \exp y_k = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k.\text{此即(3.5)式成立.}$$

(10) 利用积分的性质：不妨设 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，于是必存在某个 k，$1 \leqslant k$

$\leqslant n-1$,使得 $a_k \leqslant G_n \leqslant a_{k+1}$.用 A_n 表示 $A_n(a,q)$,G_n 表示 $G_n(a,q)$,则

$$\frac{A_n}{G_n}-1=\sum_{j=1}^{k} q_j\int_{a_j}^{G_n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G_n}\right)\mathrm{d}t+\sum_{j=k+1}^{n} q_j\int_{G_n}^{a_j}\left(\frac{1}{G_n}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

(11) **概率证法**:设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n):a_k>0$,构造离散型随机变量 ξ,使其取值 a_k 的概率 $p(\xi=a_k)=q_k$,式中 $q_k>0$, $\sum_{k=1}^{n} q_k=1$.因为 $f(x)=\ln x$ 为$(0,\infty)$上的凹函数,由 Jensen 不等式,$Ef(\xi)\leqslant f(E\xi)$,得到

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \ln a_k \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k\right).$$

此即(3.5)式成立.

此外,还有幂级数法,Bohr 的优化方法,Hurwitz 方法,Jacobsthal 方法,用 Bernoulli 不等式,等周不等式,逐步调整原理、反证法、排序不等式、图表法、微微对偶不等式、物理方法、矩阵法,等等.例如见[345]1984,12:45;1985,6:45;1987,10:28;1989,7;1994:3;1995,3.王中烈,[357]1980,6:149-152;王挽澜等,成都大学学报(自然版)1989,2:1-6;[305]1967,74:305-306;1981,88:192-194;[301]1980,76:209-212;[317]1935,10:114;[350]1986,1:27.

(二) AG 不等式的改进和推广

1. AG 不等式与下述三个不等式等价:

(1) **Rado 不等式**:设 $R_n(a)=n[A_n(a)-G_n(a)]$.则

$$R_{n-1}(a)\leqslant R_n(a). \tag{3.15}$$

仅当 $a_n=G_{n-1}(a)$ 时等号成立.

证 $R_n(a)-R_{n-1}(a)=a_n+(n-1)G_{n-1}-nG_n\geqslant 0$,这是因为由 AG 不等式,有

$$\frac{a_n+(n-1)G_{n-1}}{n}\geqslant (a_nG_{n-1}^{n-1})^{1/n}=G_n.$$

(2) **Popovic 不等式**:设 $P_n(a)=(A_n(a)/G_n(a))^n$,则

$$P_{n-1}(a)\leqslant P_n(a), \tag{3.16}$$

仅当 $a_n=A_{n-1}(a)$ 时等号成立.

(3) **Jacobsthal 不等式**:设 $a,b>0$,则

$$na^{n-1}b\leqslant (n-1)a^n+b^n, \tag{3.17}$$

仅当 $a=b$ 时等号成立.

证 $n=1$ 时,(3.17)式成立,要从(3.17)式(记为命题 $P(n)$)推出 $P(n+1)$ 成立,在(3.17)式两边乘以 a,得

$$(n-1)a^{n+1}+ab^n\geqslant na^nb.$$

上式两边加上 $a^{n+1}-b^na+b^{n+1}$,得到

$$na^{n+1}+b^{n+1}\geqslant na^nb+a^{n+1}-b^na+b^{n+1}\geqslant (n+1)a^nb.$$

这是因为上式右边的不等式等价于$(a^n-b^n)(a-b)\geqslant 0$.

推论 $A_n(a) \geqslant [A_{n-1}(a)]^{\frac{n-1}{2}} a_n^{1/n}$, (3.18)

仅当 $A_{n-1}(a) = a_n$ 时等号成立.

以上不等式等价性的证明见[348]1983,8,[350]1984,6.

注 1986 年杨克昌用数学归纳法证明了 $R_n(a)$ 的一个下界估计:

$$R_n(a) \geqslant (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2,$$

式中 $m = \min\{a_1, \cdots, a_n\}$, $M = \max\{a_1, \cdots, a_n\}$.(见[350]1986,4:19 - 20)

当 $a = \{a_k\}$ 是正的递减数列时,还可改进为

$$R_n(a) \geqslant \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n})^2}{n}.$$

1982 年 Rasa. I,将 Rado 和 Popovic 不等式改进为:设 $0 < m < a_k < M$, $k = 1, \cdots, n$, 则

$$\frac{1}{2} m\left(1 - \frac{1}{n}\right)\log^2\left(\frac{a_n}{G_{n-1}(a)}\right) \leqslant R_n(a) - R_{n-1}(a) \leqslant\leqslant \frac{1}{2} M\left(1 - \frac{1}{n}\right)\log^2\left(\frac{a_n}{G_{n-1}(a)}\right). \tag{3.19}$$

1984 年王中烈建立了凸函数 f 的 Rodo-Popovic 型不等式:

设 $a_k, b_k > 0$,令 $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $A_n = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $A_n(f) = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} b_k f(a_k)$, f 为$(0, \infty)$上的凸函数,则

$$B_{n-1}[A_{n-1}(f) - f(A_{n-1})] \leqslant B_n[A_n(f) - f(A_n)]; \tag{3.20}$$

$$\left(\frac{A_{n-1}(f)}{f(A_{n-1})}\right)^{B_{n-1}} \leqslant \left(\frac{A_n(f)}{f(A_n)}\right)^{B_n}. \tag{3.21}$$

见[301]1984,100(2):436 - 446.

记 $m = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,若 $\forall a_k > 0$,令 $C = M/m$,则

$$1 \leqslant \frac{A_n(a)}{G_n(a)} \leqslant \frac{(C-1)C^{\frac{1}{C-1}}}{e\log C} \quad \text{(Docev)};$$

$$\frac{A_n(a)}{G_n(a)} \geqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)\right\}^{1/n}.\text{(见[10]P98,124)}$$

1990 年,Alzer,H. 利用定义在$[0,1]$上的函数 $f(x) = (3/e)(1-x)e^{-x} + xe^{-\frac{1}{x}}$ 的性质,证明了

$$A_n(a) - G_n(a) \geqslant (e/3)\left[A_n(a)\exp\left(-\frac{G_n(a)}{A_n(a)}\right) - G_n(a)\exp\left(-\frac{A_n(a)}{G_n(a)}\right)\right], \tag{3.22}$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立, $e/3$ 是最佳常数,见[404](4)1990,8(2):195 - 197.

1988 年张先觉和 1991 年张尧先后将 Rado, Popovic 不等式统一推广为:

$$n[A_n(a) - \lambda^{n+1}G_n(a)] \leqslant (n+1)[A_{n+1}(a) - \lambda^n G_{n+1}(a)], \tag{3.23}$$

式中 $\lambda > 0$,仅当 $a_{n+1} = \lambda^{n+1}G_n(a)$ 时等号成立.

特别当 $\lambda = 1$ 时得 Rado 不等式(3.15);当 $\lambda = \left(\frac{A_n(a)}{G_n(a)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 时,得到 Popovic 不等式(3.16).(证明见[350]1988.2.和[99](6 - 9)270 - 272)

1989 年黄礼平证明:设 $b_1,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,\cdots,a_n$ 的任一排列,则

$$A_n(a)-G_n(a)\geqslant\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{k-1}})^2,$$

仅当 $b_1b_n=b_kb_{k-1}(1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立,其中 $b_0=b_n$;

$$A_n(a)-G_n(a)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{n+1-k}})^2,$$

式中 $m=[\frac{n+1}{2}]$,仅当 $b_1b_n=b_kb_{n+1-k}(1\leqslant k\leqslant m)$ 时等号成立.(见[348]1989,12:3 - 5.)

2. 在利用 $G_n(a)\leqslant A_n(a)$ 时,若 $a_1,\cdots,a_n$ 之间相差很大,就会造成很大的误差,例如设 $a_k\geqslant 0,\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$,要证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1\cdots a_n)^{1/n}<\infty$,即证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n(a)<\infty$.若用 AG 不等式,所得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n(a)$ 是发散的!这时可将 AG 不等式变形为:

$$G_n(a)=\frac{\sqrt[n]{a_1(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ka_k).\tag{3.24}$$

(见[67]P52 - 54)

3. 1981 年,Zaciu,Radu 证明

$$\left(\frac{A_n(a)}{A_n(b)}\right)^{A_n(a)}\leqslant\frac{G_n(a_k^{a_k})}{G_n(b_k^{a_k})}.\tag{3.25}$$

特别,若 $a_1=\cdots=a_n=1$,得到 $G_n(b)\leqslant A_n(b)$;若 $b_1=\cdots=b_n=1$,并令 $x_k=\frac{1}{n}a_k$,就得到 Reutter,O. 等的结果:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{(\sum_{n=1}^{n}x_k)}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(nx_k)^{x_k}.$$

(见[363]1981,86(10):376 - 380)

同一年,Fink,A.M. 又证明:设实函数 $q(x)$ 满足.

(1) $q^{(n+1)}\in L(0,1)$; (2) $q(0)\geqslant 0,q(x)=1,x\geqslant 1$;

(3) $q^{(k)}(1)=0,1\leqslant k\leqslant n-1$; (4) $(-1)^n\int_0^t x^nq^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,0\leqslant t\leqslant 1$;

(5) $(-1)^n\int_0^1 x^nq^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x\geqslant(-1)^nq^{(n)}(1)$;若 $x_k>0\ (k=1,\cdots,n)$,则

$$\sum_{k=1}^{n}[x_k^n\prod_{i=1}^{n}q(\frac{x_i}{x_k})]\geqslant n\prod_{k=1}^{n}x_k,\tag{3.26}$$

仅当所有 x_k 相等时,等号成立,特别,取 $q=1$,又得到 $G_n(a)\leqslant A_n(a)$.见[331]1981,716 - 734:35 - 40.

若取上述 q 为

$$q(x)=\begin{cases}1-(1-x)^n, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

又得到 Jodeit 的结果.(见[308]1976,61(2):255 - 261)

4. **Carlson 不等式：**

(1) 设 $a_{jk}\geqslant 0, j=1,2,\cdots,m; k=1,\cdots,n$；令

$G_j=(\prod_{k=1}^{n}a_{jk})^{1/n}, A_k=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}$，则

$$\frac{1}{m}(\sum_{j=1}^{m}G_j)\leqslant(\prod_{k=1}^{n}A_k)^{1/n}. \tag{3.27}$$

(2) 设正实数 $a_1,\cdots,a_n$ 中每次取 $n-1$ 个数的算术平均和几何平均分别定义为

$A_k=\frac{1}{n-1}(\sum_{j=1}^{n}a_j-a_k); G_k=(\frac{1}{a_k}\prod_{j=1}^{n}a_j)^{\frac{1}{n-1}}$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}G_k\leqslant(\prod_{k=1}^{n}A_k)^{\frac{1}{n}}\quad(n\geqslant 3). \tag{3.28}$$

证 对于 $j\neq k$，令 $A_{jk}=\frac{1}{n-2}(\sum_{i=1}^{n}a_i-a_j-a_k), G_{jk}=(\frac{1}{a_ja_k}\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n-2}}$. 而当 $j=k$ 时，记 $A_{kk}=A_k, G_{kk}=G_k$. 则 $\sum_{j=1}^{n}A_{jk}=nA_k, \prod_{k=1}^{n}G_{jk}=G_j^n$. 由 Hölder 不等式，有

$$\sum_{k=1}^{n}G_k=\sum_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{n}G_{jk})^{1/n}\leqslant\prod_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}G_{jk})^{1/n}\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}A_{jk})^{1/n}=\prod_{j=1}^{n}(nA_j)^{1/n}=n(\prod_{j=1}^{n}A_j)^{1/n}.$$

(见[8]P161－162)

注 (3.28) 中 A_k, G_k 不应与 $A_k(a)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j$ 与 $G_k(a)=(\prod_{j=1}^{k}a_j)^{1/k}$ 相混淆. 对于后者，成立 $A_m(G_k)\leqslant G_m(A_k)$，即

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}G_k(a)\leqslant(\prod_{k=1}^{m}A_k(a))^{1/m},$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立，见 Kiram, K.，[305]1994，101(4)：355－357.

5. Alzer, H. 先后证明了以下结果：

$$(1)\quad F(n)=n\frac{A_n(a)}{G_n(a)}-(n-1)\frac{A_{n-1}(a)}{G_{n-1}(a)}\quad(n\geqslant 2) \tag{3.29}$$

严格递增到 $e/2$. (见"Comment, Math, Univ, Carolin"1994, 35(2)：409－412)

(2) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为正数，记 $a^n=(a_1^n,\cdots,a_n^n)$.

$H_n(a)=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$ 称为 $a_1,\cdots,a_n$ 的调和平均，则

$$1\leqslant n\frac{A_n(a)}{H_n(a)}-(n-1)\leqslant\frac{A_n(a^n)}{H_n(a^n)}. \tag{3.30}$$

若 $n=2$，则右边的等式成立，否则仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立. ([372]1991, 34, 1992：11－13). 王挽澜利用 Schur 凸性理论进一步证明：

$$A_n^{r-1}(a)G_n(a)\leqslant\lambda A_n(a^r)+(1-\lambda)G_n(a^r). \tag{3.31}$$

相应的积分形式是

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^{r-1}\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f\right\}\leqslant\frac{\lambda}{b-a}\int_a^b f^r+(1-\lambda)\exp\left\{\frac{r}{b-a}\int_a^b \log f\right\},\tag{3.32}$$

式中 $\lambda=\frac{r^2-r+1}{r^2}$, $r\geqslant 1$, $f(x)>0$, $x\in[a,b]$. 当 $r=1$ 时(3.31)式归结为 $G_n(a)\leqslant A_n(a)$. 作者进一步提出,使(3.31)式,(3.32)式成立的最小 λ 是多少?见"成都大学学报"1994,2:1－3.

6. **HGA 不等式的加细**($H_n(a)$ 为调和平均).

(1)　设 $a=\{a_k\}$ 是递增数列, $0<a_k\leqslant 1$,则

$$\frac{1}{H_n(a)}\leqslant\frac{1+A_n(a)}{1+[H_n(a)]^{-1}}\leqslant G_n(a)\leqslant\frac{\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{1+a_k}}{\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+a_k}}\leqslant A_n(a).\tag{3.33}$$

相应的积分形式是:设 f 在$[0,1]$上递增. $0<f(x)\leqslant 1$,则

$$\int_0^1\frac{1}{f}\leqslant\frac{1+\int_0^1 f}{1+\int_0^1\frac{1}{f}}\leqslant\exp\int_0^1\ln f\leqslant\frac{\int_0^1\frac{f}{1+f}}{\int_0^1\frac{1}{1+f}}\leqslant\int_0^1 f.\tag{3.34}$$

(见成都大学学报 1996,15(2).).

(2)　设 $a_k>0$, $0<p<q\leqslant 1/2$, $a=(a_1,\cdots,a_n)$,令

$S_n(a,p)=2(\sum_{k=1}^n a_k^p)(\sum_{k=1}^n a_k^{1-p})-(\sum_{k=1}^n a_k)$, $n\geqslant 2$,则

$$n(2n-1)G_n(a)\leqslant S_n(a,q)\leqslant S_2(a,p)\leqslant n(2n-1)A_n(a).$$

(Alzer. H., Vtilitas Math. 1992,41:249－252)

(3)　设 $a_k>0$,则

$$\{G_n(a)\}^n\leqslant\left\{\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k^n+(n-1)\{G_n(a)\}^n}\right\}^{-1}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^n.$$

(见[351]2001,1:17－19)

7.　**幂平均不等式:**

(1)　$[G_n(a)]^{A_n(a)}\leqslant[A_n(a)]^{A_n(a)}\leqslant(\prod_{k=1}^n a_k^{a_k})^{1/n}$;

(2)　$[A_n(a)]^{A_n(a)}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^{a_k}$.

提示:考虑 $f(x)=x^x$ 在$(0,\infty)$内的凸性.

(3)　记　$S_n(a)=\sum_{k=1}^n a_k$,　$\sigma_n(a)=\prod_{k=1}^n a_k^{a_k}$,

$$R_n(a)=\frac{1}{\sigma_n(a)}[S_n(a)]^{S_n(a)},\quad Q_n(a,b)=\sum_{k=1}^n\frac{a_kb_k}{a_k+b_k},\text{则}$$

①　$R_n(a)R_n(b)\leqslant R_n(a+b)$.

提示:利用 AG 不等式或 $f(x)=x\ln x$ 的凸性.

② $S_n(a+b)Q_n(a,b) \leqslant S_n(a)S_n(b)$.

见[305]1987,94(1):77 – 78.

8. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数,则

$$1 < \frac{A_n(a) - H_n(a)}{A_n(a) - G_n(a)} < n. \tag{3.35}$$

(见[8]P.140)

9. **Sierpinski 不等式:**

$$A_n(a)[H_n(a)]^{n-1} \leqslant [G_n(a)]^n \leqslant [A_n(a)]^{n-1}H_n(a),(n \geqslant 2). \tag{3.36}$$

1990 年,Alzer,H. 对以上不等式加细为

$$\frac{1}{n}[G_n(a)]^{n-1}[G_n(a) - H_n(a)] \leqslant [A_n(a)]^{n-1}H_n(a) - [G_n(a)]^n;$$

$$\frac{1}{n}[H_n(a)]^{n-1}[A_n(a) - G_n(a)] \leqslant [G_n(a)]^n - A_n(a)[H_n(a)]^{n-1};$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. 见 Acta Math. Univ. Comenian,1990;158 – 159,1991:175 – 180.(3.36)式可用数学归纳法证明,详见[8]P140 – 141.

同年,Alzer,H. 还证明:设 $0 < a_k \leqslant 1/2$,则

$$\frac{1}{H_n(1-a)} - \frac{1}{H_n(a)} \leqslant \frac{1}{G_n(1-a)} - \frac{1}{G_n(a)} \leqslant \frac{1}{A_n(1-a)} - \frac{1}{A_n(a)},$$

式中 $A_n(1-a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)$,$G_n(1-a) = (\prod_{k=1}^{n}(1-a_k))^{1/n}$,$H(1-a)$ 类似定义,仅当所有 a_k 相等时等号成立. 见[366]1990,22(4):362 – 366.

10. **胡克不等式**(1982):设 f 是 (α,β) 上的凸函数,$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 是 (α,β) 中无穷数列,$p = (p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots)$ 是正数序列,令

$$g(n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k)\{A_n(f(x),p) - f[A_n(x,p)]\}, \tag{3.37}$$

式中 $f(x) = (f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),\cdots)$,则

$$0 = g(1) \leqslant g(2) \leqslant \cdots \leqslant g(n) \leqslant \cdots. \tag{3.38}$$

梁法驯用(3.38)式导出了一系列加权平均值不等式:

以下均设 $a = (a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ 为正数序列.

(1) 取 $f(x) = e^x$,$x_k = \ln a_k$,则(3.38)式中的 $g(n)$ 为:

$$g(n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k)\{A_n(a,p) - G_n(a,p)\};$$

(2) 取 $f(x) = e^x$,$x_k = -\ln a_k$ 则(3.38)式中的 $g(n)$ 为

$$g(n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k)\left\{\frac{1}{H_n(a,p)} - \frac{1}{A_n(a,p)}\right\};$$

(3) 取 $f(x) = \frac{1}{x}$,$x_k = \frac{1}{a_k}$,则(3.38)式中的 $g(n)$ 为

$$g(n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k)\{A_n(a,p) - H_n(a,p)\};$$

(4) 设 $f(x)=-\ln x$，若取 $x_k=a_k$，则从(3.38)式，得到

$$\frac{A_{n-1}(a,p)}{G_{n-1}(a,p)}\leqslant\frac{A_n(a,p)}{G_n(a,p)};$$

若取 $x_k=1/a_k$，得到

$$\frac{G_n(a,p)}{H_n(a,p)}\geqslant\frac{G_{n-1}(a,p)}{H_{n-1}(a,p)}\quad 和 \quad\frac{A_n(a,p)}{H_n(a,p)}\geqslant\frac{A_{n-1}(a,p)}{H_{n-1}(a,p)}.$$

见[348]1984.2:或[33]P60－61.

11. **郝稚传不等式**：

$$G_n(a,q)\leqslant\left\{p\int_0^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}\right]^{-p-1}\mathrm{d}x\right\}^{-1/p}\leqslant A_n(a,q),\tag{3.39}$$

式中 $p>0,a_k>0,q_k>0,\sum\limits_{k=1}^{n}q_k=1$.

证 在加权 AG 不等式 $G_n(a,q)\leqslant A_n(a,q)$ 中，将 a_k 换成 $x+a_k(x\geqslant0)$，得到

$0<\prod\limits_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}q_k(x+a_k)=x+\sum\limits_{k=1}^{n}q_ka_k$. 积分得到

$\int_0^{\infty}\left[\prod\limits_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}\right]^{-p-1}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\infty}\left[x+\sum\limits_{k=1}^{n}q_ka_k\right]^{-p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}q_ka_k\right)^{-p}=\frac{1}{p}[A_n(a,q)]^{-p}$；另一方面，由 Hölder 积分不等式(2.23)，有

$$\int_0^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)^{q_k}\right]^{-p-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\prod_{k=1}^{n}[(x+a_k)^{-p-1}]^{q_k}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\infty}(x+a_k)^{-p-1}\mathrm{d}x\right)^{q_k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{p}a_k^{-pq_k}=\frac{1}{p}(G_n(a,q))^{-p}.$$

于是(3.37)式得证.

推论 1 $G_n(a)\leqslant\left\{p\int_0^{\infty}\left[\prod\limits_{k=1}^{n}(x+a_k)\right]^{-(\frac{p+1}{n})}\mathrm{d}x\right\}^{-1/p}\leqslant A_n(a)\quad(p>0)$ (3.40)

推论 2 设 $a_{jk}>0,p>0$，则

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n}a_{jk}^{q_k}\right)\leqslant\left\{p\int_0^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(x+\sum_{j=1}^{m}a_{jk}\right)^{q_k}\right]^{-p-1}\mathrm{d}x\right\}^{-1/p}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}q_ka_{jk}.\tag{3.41}$$

见[365]1990,143(1):43－46.此后，作者在[339]1993,1:84－88 和冯慈璜、王挽澜等又作了进一步的推广.例如 设 $r\geqslant0,\lambda>0$，并令

$$J(a,q,p,r,\lambda)=\left\{p\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{k=1}^{n}(r+\lambda(x+a_k))^{q_k}-r\right)\right]^{-p-1}\mathrm{d}x\right\}^{-1/p}.$$

则对 $p>0$，成立

$$G_n(a,q)\leqslant J(a,q,p,o,\lambda)\leqslant J(a,q,p,r,\lambda)\leqslant A_n(a,q).$$

(冯慈横，杭州大学学报，1995,22(3):222－225)

1997 年 Kittaneh, Fuad 将郝稚传的结果(3.39)式进一步推广为：设 $r\geqslant1$，则

$$\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\leqslant\left\{p\int_0^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}p_k(x+a_k)^r\right]^{-(\frac{p+1}{r})}\mathrm{d}x\right\}^{-1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^r\right)^{1/r},\tag{3.42}$$

当 $r\leqslant1$ 时(3.42)式中两个不等号均反向.([301]1997,214(1):307－313)

设 $p>0, 0<r\leqslant 1, \mu(E)=1, f\in L^1(E), f>0$，$f$ 在 E 的几何平均与算术平均分别为

$$G(f)=\exp\left\{\int_E \log f(x)\mathrm{d}\mu(x)\right\},\quad A(f)=\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

则成立

$$G(f)\leqslant\left\{p\int_0^\infty\left(\int_E(y+f(x))^r\mathrm{d}\mu(x)\right)^{-\left(\frac{p+1}{r}\right)}\mathrm{d}y\right\}^{-\frac{1}{p}}\leqslant A(f).$$

Kwon, Ern Gun 等, Finite or infinite dimensional complex analysis, Fukuoka. 1999, 233 – 235.

12. Alzer, H. 定义了伪 AG 平均：

设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 均为正数序列. 则

$$A_n(a,p)=a_1+\sum_{k=2}^n(a_1-a_k)\left(\frac{p_k}{p_1}\right),\qquad G_n(a,p)=a_1\prod_{k=2}^n\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{(p_k/p_1)}$$

分别称为 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 的伪算术平均和伪几何平均，并证明：

$$\frac{G_{n-1}(a,p)}{a_{n-1}(a,p)}\leqslant\frac{G_n(a,p)}{A_n(a,p)},$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立. 若 $a_1\leqslant a_k\leqslant\frac{1}{2}, k=2,\cdots,n$，则

$$\frac{A_n(a,p)}{A_n(1-a,p)}\leqslant\frac{G_n(a,p)}{G_n(1-a,p)},$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立. 式中 $A_n(1-a,p), G_n(1-a,p)$ 是将 $A_n(a,p), G_n(a,p)$ 中的 a_k 换成 $1-a_k$. 见[54]6.

13. 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 为两个正数序列，则成立几何 — 调和平均的 Minkowski 不等式：

(1) $H_n(a)+H_n(b)\leqslant H_n(a+b)$;

(2) $G_n(a)+G_n(b)\leqslant G_n(a+b)$.

仅当 $(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,\cdots,b_n)$ 线性相关时等号成立.

证 在[2]P26 中利用拟线性化技巧证明，以证(2) 为例.

令 $D=\{z=(z_1,\cdots,z_n): z_k\geqslant 0, \prod_{k=1}^n z_k=1\}$. 由 AG 不等式，有

$G_n(a)=\min_{z\in D}\left\{\sum_{k=1}^n\frac{a_kz_k}{n}\right\}$，从而

$$G_n(a+b)=\min_{z\in D}\left\{\sum_{k=1}^n\frac{(a_k+b_k)z_k}{n}\right\}\geqslant\min_{z\in D}\left\{\sum_{k=1}^n\frac{a_kz_k}{n}\right\}+\min_{z\in D}\left\{\sum_{k=1}^n\frac{b_kz_k}{n}\right\}$$
$$=G_n(a)+G_n(b).$$

14. **Henrici 不等式**(下述(1) ~ (3))：设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 是正数序列，记

$$P_n(a)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+a_k},\ Q_n(a)=\frac{n}{1+G_n(a)}.$$

$$g_k=\prod_{j=1}^k a_j,\ A_n(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k,\ G_n(a)=\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n},$$

(1) 若 $g_{n-1}>1$,且 $a_n\geqslant(g_{n-1})^{\frac{-1}{n+1}}$,则

$P_n(a)-Q_n(a)\geqslant P_{n-1}(a)-Q_{n-1}(a)$.

(2) 若 $g_k\geqslant 1$,且 $a_{k+1}\geqslant(g_k)^{-\frac{1}{k+2}}$,$1\leqslant k\leqslant n-1$,则 $Q_n(a)\leqslant P_n(a)$;

若(1)(2) 的条件中的不等式全部反向,则两个结论中的不等号也都反向.

(3) 设 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant 1$(上界 1 可放宽为$\frac{1}{G_{n-1}(a)}$),则

$$\frac{1}{n}P_n(a)\leqslant\frac{A_n(a)}{A_n(a)+[G_n(a)]^n}.$$

(以上见[4]P285 - 287)

(4) $[1+A_n(a)]P_n(a)\geqslant n$; $[1+G_n(a)]P_n(a)\geqslant n$,

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立.

(5) $\sum\limits_{k=1}^{n}(k!)^{1/k}\frac{G_k(a)}{k+1}<nA_n(a)$;(Akerberg,见[379]1961,57:184 - 186)

(6) 当 $p>1$ 时,$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p\geqslant n[A_n(a)]^p$,当 $0<p<1$ 时,不等号反向.

提示:求条件极值.

(7) 设 $p>0$,q 为实数,则当 $a_k>\max\{0,p/q\}$ 时,成立

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(p+a_k)^q}<\frac{n}{(p+G_n(a))^q},$$

当 $a_k<p/q$ 时,不等号反向.见[4]P389.

15. **Kober 不等式**:设 $a_k\geqslant 0$,$k=1,\cdots,n$,$n>2$,且 $\{a_k\}$ 不全相等,则

$$(n-2)A_n(a)+G_n(a)-\frac{2}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ia_j)^{1/2}\geqslant 0,$$

仅当对某个 k,$a_k=0$ 且 $a_1=\cdots=a_{k-1}=a_{k+1}=\cdots=a_n$ 时等号成立.证明见[4]P522 - 523.

二、 两个正数的各种平均

(一) 两个正数的各种平均的定义

1987 年,Borwein 等在研究了两个正数 a,b 各种平均的共同本质之后,将正数 a,b 的平均 $M(a,b)$ 定义为

$M:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 的二元连续函数,并满足条件:

(1) $\min\{a,b\}\leqslant M(a,b)\leqslant\max\{a,b\}$,即 $M(a,b)$ 要位于 a 与 b 之间;

(2) 对称性:$M(a,b)=M(b,a)$ 和正齐性:$M(ta,tb)=tM(a,b)(t\geqslant 0)$;

其中条件(1) 是本质的,而条件(2) 通常不是必要的.(见[305]1987,94(6):519 - 522).$M(a,b)$ 连续条件可换成单调性条件:$a_1\leqslant a_2,b_1\leqslant b_2\Rightarrow M(a_1,b_1)\leqslant M(a_2,b_2)$.事实上,正数 a,b 之间的任何数 c,在某种意义上,都是 a 与 b 的一个平均值.

下面是若干重要的平均:设 $a,b>0$.

1. **幂平均(Hölder 平均)**:

$$M_p(a,b)=[\frac{1}{2}(a^p+b^p)]^{1/p},p\neq 0.\tag{3.43}$$

当 $p\neq 0$ 时，$M_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数，且当 $0<a<b$ 时，$\lim\limits_{p\to-\infty}M_p(a,b)=a$，$\lim\limits_{p\to\infty}M_p(a,b)=b$，$M_0(a,b)=\lim\limits_{p\to 0}M_p(a,b)=\sqrt{ab}=G(a,b)$ 为几何平均；

$M_1(a,b)=(a+b)/2=A(a,b)$ 为算术平均；

$M_{-1}(a,b)=\dfrac{2}{1/a+1/b}=\dfrac{2ab}{a+b}=H(a,b)$ 为调和平均；

$M_2(a,b)=[\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)]^{1/2}$ 为平方根平均；

$M_{-2}(a,b)=(\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2})^{1/2}$ 为调和平方根平均.

2. **Lehmer 平均**：

$$L_p(a,b)=\frac{a^p+b^p}{a^{p-1}+b^{p-1}}.\tag{3.44}$$

当 $p>0,a\neq b$ 时，$L_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数. $L_2(a,b)=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ 称为反调和平均；只有 $L_1(a,b)=A(a,b)$，$L_{1/2}(a,b)=G(a,b)$，$L_0(a,b)=M_{-1}(a,b)=H(a,b)$ 这三个平均既是幂平均又是 Lehmer 平均.

注 $H(a,b)$ 与 $A(a,b)$，$G(a,b)$ 的关系：

$$H(a,b)=\frac{[G(a,b)]^2}{A(a,b)};$$

$G(a,b)$ 和 $H(a,b)$ 还可推广为参数形式：

$$G_{p,q}(a,b)=(pa^2+(1-p-q)ab+qb^2)^{1/2},$$

式中 $0\leqslant p,q\leqslant 1$，$G_{0,0}(a,b)=G(a,b)$；

$$H_{p,q,r,s}(a,b)=\frac{pa^2+(r+s-p-q)ab+qb^2}{ra+sb},$$

式中 $0\leqslant p\leqslant r,0\leqslant q\leqslant s$. $H_{0,0,1,1}(a,b)=H(a,b)$.

它们之间的不等式见“Seminar on Math. Analysis”(Cluj-Napoca 1988－1989:21－28)

3. 设 $0\leqslant t<\infty$，我们可以定义两个正数 a,b 的齐次平均：

$$K_t(a,b)=\frac{1}{2}(a^tb^{1-t}+a^{1-t}b^t).\tag{3.45}$$

特别，取 $t=r=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{p})$，$p\geqslant 0$，则 $s=1-t=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{p})$，就得到对称平均：

$$Q_p(a,b)=\frac{1}{2}(a^rb^s+a^sb^r).$$

$K_{\frac{1}{2}}(a,b)=Q_0(a,b)=G(a,b)$，$K_0(a,b)=K_1(a,b)=Q_1(a,b)=A(a,b)$.

4. **广义对数平均(Stolarsky 平均)**：

$$S_p(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{b^p-a^p}{p(b-a)}\right)^{\frac{1}{p-1}}, & a\neq b,p\neq 0,1,\\ b, & a=b.\end{cases}\tag{3.46}$$

当 $a\neq b$ 时，$S_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数.

$$S_0(a,b)=\lim_{p\to 0}S_p(a,b)=\begin{cases}\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}, & a\neq b\\ b, & a=b\end{cases} \tag{3.47}$$

称为对数平均;

$$S_1(a,b)=\lim_{p\to 1}S_p(a,b)=\begin{cases}e^{-1}(a^a/b^b)^{\frac{1}{a-b}}, & a\neq b\\ b, & a=b\end{cases} \tag{3.48}$$

称为指数平均(或恒等平均);而 $S_2(a,b)=A(a,b)$; $S_{-1}(a,b)=G(a,b)$.

5. **Gini 平均**:

$$S_{ab}(x,y)=\left(\frac{x^a+y^a}{x^b+y^b}\right)^{\frac{1}{a-b}},a\neq b;S_{aa}(x,y)=\exp\left(\frac{x^a\ln x+y^a\ln y}{x^a+y^a}\right). \tag{3.49}$$

Losonczi, L. 和 Pales, Zs. 证明了关于 $S_{ab}(x,y)$ 的 Minkowski 不等式:

$$S_{ab}(x_1+x_2,y_1+y_2)\leqslant S_{ab}(x_1,y_1)+S_{ab}(x_2,y_2). \tag{3.50}$$

仅当 $a+b\geqslant 1$ 和 $0\leqslant\min\{a,b\}\leqslant 1$ 时成立.(见[369]1996,62(3-4):413-425)

$S_{a1}(x,y)=\left(\dfrac{x^a+y^a}{x+y}\right)^{\frac{1}{a-1}}$ 称为广义反调和平均,记为 $C_a(x,y)$ 或 C_a.

特别地:$C_1=\lim\limits_{a\to 1}C_a=(x^xy^y)^{\frac{1}{x+y}},c_{-\infty}=\min\{a,b\},c_\infty=\max\{a,b\}$.

6. 1989 年杨任尔、曹冬极和 Alzer, H. 分别将对数平均 $S_0(a,b)$ 推广为**单参数平均**:

$$J_p(a,b)=\frac{p(a^{P+1}-b^{p+1})}{(p+1)(a^p-b^p)},p\neq 0,-1, \tag{3.51}$$

当 $a\neq b$ 时,$J_p(a,b)$ 是 p 的严格递增函数.

$J_0(a,b)=\lim\limits_{p\to 0}J_p(a,b)=S_0(a,b)$ 为对数平均;

$J_{-\infty}(a,b)=\lim\limits_{p\to-\infty}J_p(a,b)=\min\{a,b\}$;

$J_\infty(a,b)=\lim\limits_{p\to\infty}J_p(a,b)=\max\{a,b\}$;

$J_{-\frac{1}{2}}(a,b)=G(a,b)$ 为几何平均;$J_1(a,b)=A(a,b)$ 为算术平均;

$J_{-2}(a,b)=H(a,b)$ 为调和平均;

$J_{-1}(a,b)=\dfrac{[G(a,b)]^2}{S_0(a,b)}$;

$J_{\frac{1}{2}}(a,b)=\dfrac{1}{3}(a+\sqrt{ab}+b)=h(a,b)$ 称为 **Heron 平均**;

$J_2(a,b)=\dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}=g(a,b)$ 称为**形心平均**.

见"宁波大学学报"1989,(2):105-108,和[370]1989,20(1);186-189.

7. 1975 年 Stolarsky 定义了**双参数平均**:

$$E(p,q;a,b)=\left(\frac{p(b^q-a^q)}{q(b^p-a^p)}\right)^{\frac{1}{q-p}}, \tag{3.52}$$

式中 p,q 为实数,$pq(p-q)(a-b)\neq 0$,

$$E(p,p;a,b)=\exp(-1/p)\cdot(a^{a^p}/b^{b^p})^{1/(a^p-b^p)},(\text{式中 } p\neq 0); \tag{3.53}$$

$$\widehat{E}(0,p;a,b)=\left(\frac{b^p-a^p}{p(\ln b-\ln a)}\right)^{1/p}=[S_0(a^p,b^p)]^{1/p}.\ p\neq 0;\tag{3.54}$$

$E(0,0;a,b)=G(a,b)$ 为几何平均；

$E(1,2;a,b)=A(a,b)$ 为算术平均；

$E(-2,-1;a,b)=H(a,b)$ 为调和平均；

$E(0,1;a,b)=S_0(a,b)$ 为对数平均(见(3.47))；

$E(1,1;a,b)=S_1(a,b)$ 为指数平均(见(3.48))；

$E(1,p;a,b)=S_p(a,b)$ 为广义对数平均(见(3.46))；

$E(p,2p;a,b)=M_p(a,b)$ 为幂平均(见(3.43))；

$E(p,q;a,b)$ 关于 p 和 q 均递增. 见[371]1975,48:87－92.1997 年,祁锋等证明 $E(p,q;a,b)$ 分别关于 a,b 也是递增的,见[301]1998,224:356－359.1998 年,Losonczi L 等证明了 Minkowski 不等式:

$$E(p,q;a_1+a_2,b_1+b_2)\leqslant E(p,q;a_1,b_1)+E(p,q;a_2,b_2)$$

成立的充要条件是 $p+q\geqslant 3$,且 $\min\{p,q\}\geqslant 1$. 当 $(p,q)\neq(1,2),(p,q)\neq(2,1)$ 时,上述等号成立的充要条件是 $a_1/a_2=b_1/b_2$.

见[308]1998,126(3):779－789.另见[301]2003,278(2):274－284.

1997 年,祁锋还定义了**双参数加权广义平均**:

$$M_{\omega,f}(p,q;x,y)=\left[\frac{\int_x^y\omega(t)(f(t))^q\mathrm{d}t}{\int_x^y\omega(t)(f(t))^p\mathrm{d}t}\right]^{\frac{1}{q-p}},(p-q)(x-y)\neq 0;$$

$$M_{\omega,f}(p,p;x,y)=\frac{\int_x^y\omega(t)(f(t))^p\ln f(t)\mathrm{d}t}{\int_x^y\omega(t)(f(t))^p\mathrm{d}t},\ p(x-y)\neq 0.$$

式中 x,y,p,q 为实数,f,ω 是 $[x,y]$ 上非负可积函数,且 $\omega(t)\neq 0$,作者证明若 $f(t)$ 单调,则 $M_{\omega,f}(p,q;x,y)$ 关于 p,q 均递增;若 $f(t)$ 递增(或递减)时,$M_{\omega,f}(p,q;x,y)$ 关于 x,y 也递增(或递减).见[377]1998,454:2723－2732.

祁锋还定义了**双参数的非齐次平均**:

$$E_{2n}(p,q;x,y)=\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{2n+1}\frac{u_{2n}(q,y)-u_{2n}(q,x)}{u_{2n}(p,y)-u_{2n}(p,x)}\right\}^{\frac{1}{q-p}},pq(q-p)(x-y)\neq 0;$$

$$E_{2n}(p,p;x,y)=\exp\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{u_{2n+1}(p,y)-u_{2n+1}(p,x)}{u_{2n}(p,y)-u_{2n}(p,x)}\right),\quad p(x-y)\neq 0;$$

$E_{2n}(p,0;x,y)=L_{2n}(p;x,y),\quad x\neq y,p\in R^1.\ E_{2n}(p,q;x,x)=x.$ 式中

$$L_{2n}(p;x,y)=\left(\frac{2n+1}{p^{2n+1}}\cdot\frac{u_{2n}(p,y)-u_{2n}(p,x)}{(\ln y)^{2n+1}-(\ln x)^{2n+1}}\right)^{1/p},p(x-y)\neq 0.$$

$$L_{2n}(0;x,y)=\exp\left(\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(\ln y)^{2n+2}-(\ln x)^{2n+2}}{(\ln y)^{2n+1}-(\ln x)^{2n+1}}\right),x\neq y.$$

$L_{2n}(p;x,x)=x.\ u_n(t,y)$ 是满足下述方程的函数列:

$$t\frac{\partial u_n(t,y)}{\partial t}-(n+1)u_n(t,y)=u_{n+1}(t,y),u_0(t,y)=y^t,y>0$$

作者还证明了 $E_{2n}(p,q;x,y)$ 关于 p,q 及关于 x,y 均递增.

见[330]1998,29(2):155－163.

1999 年,Pearce,C.E.M 等定义了更为一般的**泛函 Stolarsky 平均**:

设 g 是某个区间 I 上的严格单调的连续函数,f 是 g^{-1} 的值域上严格单调的连续函数,μ 是[0,1] 上的概率测度,则 $x,y\in I$ 的加权泛函 Stolarsky 平均定义为

$$F(f,g;x,y,\mu)=f^{-1}\left\{\int_0^1 f[g^{-1}(tg(y)+(1-t)g(x)]\mathrm{d}\mu(t)\right\}.$$

当　$f(x)=x^{q-p},g(x)=x^p,\mu$ 是 Lebesgue 测度时,就是 $E(p,q;x,y)$.

见[303]1999,2(4):479－489.

双参数平均 $E(p,q;a,b)$ 和 Gini 平均的另一种推广是 M 凸函数 f:设 $M(x,y)$ 是区间 $D\subset R$ 上的二元平均,若 $\forall x,y\in D$,定义在 D 上的函数 f 满足:

$$f(M(x,y))\leqslant M(f(x),f(y)),$$

则称 f 为 ***M* 凸函数.**

例如设 $f(x)=x^r,(x>0)$,则 f 为 M 凸且

$$M(x,y)=E(p,q;x,y)\Leftrightarrow(p+q)(r^2-r)\geqslant 0;$$

而 f 为 M 凹且 $M(x,y)=S_{a,b}(x,y)\Leftrightarrow(p+q)(r^2-r)\leqslant 0.$

见[54]7(1995).

8.　正数 a,b 关于权 ω 的加权平均:

$$M(\omega;a,b)=\frac{a+\omega b}{1+\omega},\omega>0. \tag{3.55}$$

特别地:$M(1;a,b)=A(a,b)$ 为算术平均;$M(\sqrt{\frac{a}{b}};a,b)=G(a,b)$ 为几何平均;$M(\frac{a}{b};a,b)=H(a,b)$ 为调和平均;

$$M(\frac{b}{a};a,b)=L_2(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}\text{ 为反调和平均;}$$

$$M((\frac{b}{a})^{p-1};a,b)=L_p(a,b)\text{ 为 Lehmer 平均(见(3.44)式);}$$

取 $\omega_1=\dfrac{-(\sqrt{ab}+b-2a)}{\sqrt{ab}+a-2b},\omega_2=\dfrac{-(\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2})}{\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{2}}$,则

$$M(\omega_1;a,b)=h(a,b)=\frac{1}{3}(a+\sqrt{ab}+b)\text{ 为 Heron 平均;}$$

$$M(\omega_2;a,b)=M_2(a,b)\text{ 为平方根平均(见(3.43)式);}$$

取 $\omega_3=-\dfrac{a^2+ab-2b^2}{b^2+ab-2a^2}$,则 $M(\omega_3;a,b)=g(a,b)$ 为形心平均.

可见从一个简单的表达式(3.55)式出发,通过选取不同的权 ω,就可以得到许多不同的平均,详见[10].

9.　设 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\binom{n}{k}x^{n-k}$,则 **Toader 指数平均**定义为

$$E_n(x,y)=\left(\frac{P_n(x)e^x-P_n(y)e^y}{e^x-e^y}\right)^{1/n},x\neq y,E_n(x,x)=x; \tag{3.56}$$

而 Stolarsky 型平均定义为：

$$E(n,m;x,y)=\left(\frac{P_n(x)e^x-P_n(y)e^y}{P_m(x)e^x-P_m(y)e^y}\right)^{\frac{1}{n-m}},x\neq y,n\neq m. \tag{3.57}$$

$E(n,m;x,x)=x$.

(Pearce,C.E.M.等,Octogon Math.Mag.1997,5(2):3 - 7)

10. **Moskovitz 方法**：连接点$(a,f(a))$与$(b,-f(b))$的直线与x轴交点的横坐标称为正数a,b关于函数f的平均值，记为$m_f(a,b)$：

$$m_f(a,b)=\frac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}. \tag{3.58}$$

式中$f:(0,\infty)\to(0,\infty)$为任意函数.特别，取$f(x)=x^p$，这时将$m_f(a,b)$改记为

$$m_p(a,b)=\frac{ab^p+ba^p}{a^p+b^p}. \tag{3.59}$$

于是$m_{-1}(a,b)=L_2(a,b)$为反调和平均；$m_0(a,b)=A(a,b)$为算术平均；

$m_{1/2}(a,b)=G(a,b)$为几何平均；$m_1(a,b)=H(a,b)$为调和平均；

当$a\neq b$时，$m_p(a,b)$是p的严格递减函数，从而

$$H(a,b)<G(a,b)<A(a,b)<L_2(a,b). \tag{3.60}$$

(见 Mays,E.,[301]1983,90).

11. 1990年，Horwitz,A，利用 Taylor 多项式来定义两个正数a,b的平均：设$P_n(x),Q_n(x)$分别表示f在点a和b的n阶 Taylor 多项式，当$f^{(n+1)}(x)>0,x\in[a,b]$，n为奇数时，$P_n(x)-Q_n(x)$在(a,b)内只有一个零点，用$M_f^n(a,b)$表示这个零点.当$n=1$时，相应的零点记为

$$M_f(a,b)=\frac{[bf'(b)-f(b)]-[af'(a)-f(a)]}{f'(b)-f'(a)}. \tag{3.61}$$

若f'在(a,b)上绝对连续，则

$$M_f(a,b)=\left(\int_a^b xf''(x)\mathrm{d}x\right)/\left(\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x\right). \tag{3.62}$$

特别，$f(x)=x^p$时的$M_f(a,b)$就是单参数平均$J_{p-1}(a,b)$，$(p\neq 0,1)$(见(3.51)式).而$p=0$或1的极限情形分别对应于$f(x)=\log x$和$f(x)=x\log x$.在后一情形下得到对数平均$S_0(a,b)$(见(3.47)式).

设f严格单调，f的值域包含$(0,\infty)$，记

$$N_f(a,b)=f[M_f(f^{-1}(a),f^{-1}(b))], \tag{3.63}$$

此外，若$f(\alpha)=a,f(\beta)=b$，定义$B_f(a,b)=L[M_f(\alpha,\beta)]$.式中$L=L_{a,b}$是通过$(\alpha,a)$和$(\beta,b)$两点的割线.

若f是$(0,\infty)$上严格单调的凸函数，f的值域包含$(0,\infty)$，则

$$N_{f^{-1}}(a,b)\leqslant N_f(a,b)\leqslant B_f(a,b); \tag{3.64}$$

若f为严格单调的凹函数，则(3.64)式中不等号均反向，且仅当$a=b$时等号成立，

特别,当 $f(x)=\sqrt{x}$ 时,又得到

$$H(a,b)\leqslant G(a,b)\leqslant A(a,b).$$

见[301]1990,149:220 - 235.

1999 年 Sandor,J. 定义了一种新的广义平均:

$$M(f,\omega;a,b)=f^{-1}\left(\frac{\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x}\right),\tag{3.65}$$

式中 ω 是$[a,b]$上正的可积函数,f 是$[a,b]$上严格单调的连续函数,见 Czechoslovak Math. J. 1999,49(1):53 - 62.

12. **高斯复合平均**:先取初始值 $a_0=a,b_0=b$,将两个平均 $M(a,b)$ 和 $N(a,b)$ 的高斯平均迭代定义为

$$a_{n+1}=M(a_n,b_n),b_{n+1}=N(a_n,b_n).\tag{3.66}$$

若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公共极限存在,则称这个公共极限值为 M,N 的高斯复合平均,记为 $M\otimes N(a,b)$,或简记为 $M\otimes N$. 例如取 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)=A(a_n,b_n),b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}=G(a_n,b_n)$,则

$$a_{n-1}>a_n>b_n>b_{n-1},a_n-b_n<\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1}),\text{且}$$

$$A\otimes G(a,b)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\tag{3.67}$$

称为 a,b 的 AG 平均,它与椭圆积分有密切联系. 例如

$$A\otimes G(1,x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-(1-x^2)\sin^2 t]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

若令 $G_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a_n^2\cos^2 x+b_n^2\sin^2 x}}$,则

(1) $\frac{\pi}{2a_n}<G_n<\frac{\pi}{2b_n}$;

(2) 令 $c_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2}$,则 $c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-b_n)=\frac{c_n^2}{4a_{n+1}}\leqslant\frac{c_n^2}{4A\otimes G(a,b)}$.

设 $M_p(a,b)$ 为幂平均(见(3.43)),则 $M_p\otimes M_p(a,b)=G(a,b)$ 为几何平均.

见[305]1987,94(6):519 - 522, [301]1997,216:69 - 85;2000,252:167 - 176;Far East J. Math, Sci. 1998,6(6):939 - 947. 另见第 11 章 §1 N.63.

若将 $b_{n+1}=G(a_n,b_n)$ 改为 $b_{n+1}=H(a_n,b_n)$,$1<a_1<b_1$,则 $0<b_{n+1}-a_{n+1}<\left[\frac{1}{2}(b_1-a_1)^2\right]^n$.(证明见[317]1968,43:429 - 432)

13. **拟算术平均**:设 $\varphi:(0,\infty)\to R$ 是严格单调的连续函数,$a,b>0$,则

$$M_\varphi(a,b)=\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\tag{3.68}$$

称为 a,b 的拟算术平均. 特别地:$\varphi(x)=x^p$,得 $M_p(a,b)=\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$,即为幂平均.

见(3.43)式.(见 Haruki, H.—Rassias. Th. M., [326]1995, 18:749 - 756)

我们可以进一步定义 a,b 的带权 $r(0\leqslant r\leqslant 1)$ 的**加权拟算术平均**:

$$M_\varphi(r;a,b)=\varphi^{-1}[r\varphi(a)+(1-r)\varphi(b)]. \tag{3.69}$$

特别,当 $\varphi(x)=x^p$ 时,就得**加权幂平均**:

$$M_p(r;a,b)=(ra^p+(1-r)b^p)^{1/p}; \tag{3.70}$$

$M_1(r;a,b)=ra+(1-r)b$ 就是加权算术平均.

$M_0(r;a,b)=\lim\limits_{p\to 0}M_p(r;a,b)=a^rb^{1-r}$ 为加权几何平均.

$M_{-1}(r;a,b)=\dfrac{ab}{rb+(1-r)a}$ 为加权调和平均.

加权幂平均(3.70)式的概念由 Jeong Sheok Vme 和 Young Hokim 于 1999 年引入,并讨论了它的若干性质.(见[301]2000, 252:167 - 176)

14. 1998 年, Toader, Gh 定义了一种新平均:设 g 是 $(0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 的严格单调函数,令

$$f(a,b;g,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g[(a^n\cos^2\theta+b^n\sin^2\theta)^{1/n}]\mathrm{d}\theta, & n\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g(a^{\cos^2\theta}b^{\sin^2\theta})\mathrm{d}\theta, & n=0,\end{cases}$$

则 a,b 的平均定义为

$$M_{g,n}(a,b)=g^{-1}[f(a,b;g,n)].$$

通过对 g 不同的选取,就得 $A,G,A\otimes G$ 等平均.例如,设 g 是二次可微函数,则

$$f(M_p(a,b),M_q(a,b);g,n)=f(a,b;g,n)$$

成立的充要条件是

$$g(t)=\begin{cases}c_1t^{p+q-n}+c_2, & p+q\neq n,\\ c_1\log t+c_2. & p+q=n\end{cases}$$

式中 c_1,c_2 是任意常数.见[301]1998, 218(2):358 - 368.

15. 1996 年, Seiffert 定义了两个正数 a,b 的另一新的平均:

$$B(a,b)=\begin{cases}\dfrac{a-b}{4\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\pi}, & a\neq b\\ a, & a=b,\end{cases}$$

并利用级数展开式证明了

$$G(a,b)A(a,b)<S_0(a,b)B(a,b),a\neq b.$$

(见[404], 1995, 13(2):195 - 198)

(二) 两个正数的各种平均不等式

下面不妨设 $0<a<b$,并将 $M_p(a,b),L_p(a,b),S_p(a,b),J_p(a,b)$ 等分别简记为 M_p,L_p,S_p,J_p 等.(见(3.43),(3.44),(3.46),(3.51)式,等)

1. 1986 年匡继昌证明了下述插值不等式:

$a<M_{-2}<H<G<Q_{1/3}<S_0<M_{1/3}<M_{1/2}<h<M_{2/3}<S_1<A<g<$

$$M_2 < M_3 < L_2 < b. \tag{3.71}$$

我们仅以证明 $M_3 < L_2$ 为例,令 $t = \frac{b}{a}$,$M_3 < L_2$ 就变成$(\frac{1+t^3}{2})^{1/3} < \frac{1+t^2}{1+t}$ $(t > 1)$.令　$f(t) = t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 3t + 1$.问题变成证明当 $t > 1$ 时,$f(t)$ 严格递增,通过导数的符号是容易证明的,见[350]1986,5:28 - 29.

若令　$D = e(a^b/b^a)^{\frac{1}{b-a}}$,还容易证明:

$$H < D < S_0^{-1} < G < Q_{1/3} < S_0 < D^{-1} < A. \tag{3.72}$$

(见[10]P.130)

1996 年 Stolarsky,K.B.将(3.71)中 $M_3 < L_2$ 推广为 $M_{2n+1} \leqslant L_{n+1}$.并证明这个结果是最佳的,见[301]1996,202(3):810 - 818.2000 年,Liu Zheng 则证明 $L_{p-1} + L_{-p-2} \geqslant 2G$.[301]2000,247(1):309 - 313.

Alzer,H.则证明 $L_{5/6} < S_1 < L_1$,式中下界中的常数5/6和上界中的常数1都是最佳的.(见 Ib. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser, Mat,1993,23(1):331 - 346)

设 $\lambda \geqslant 0, 0 < a < b, n > 1$,则

$$G(a,b) < \left\{\frac{a^n + b^n + \lambda[(a+b)^n - a^n - b^n]}{2 + \lambda(2^n - 2)}\right\}^{1/n} < A(a,b).$$

见[305]1996,103(6):509.

1996 年,Heinz-Seiffert,J.还证明:

$$A - S_1 < \frac{1}{3}(A - G);\ \frac{1}{3}(G + 2A) < H_{2/3} < S_1;$$

若 $0 < p < \frac{1}{2}$,则 $G^{1-p}A^p < H_p < (1-p)G + pA$;

若 $\frac{1}{2} < p < 1$,则 $H_p > (1-p)G + pA$.见[305]1996,103(8):696 - 697.

1996 年 Agarwal,R.P.证明:$0 \leqslant S_0 - H \leqslant S_0\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^2$.

见[394]1996,32(6):95 - 99.

1987 年,王振证明,在 $M_q \leqslant h \leqslant M_p$ 中,p 的最小值为 2/3,q 的最大值为 ln2/ln3.见[348]1987,11:3 - 4.

2.　**林同坡不等式**(1974):

$$G = M_0 < S_0 < M_{1/3}, \tag{3.73}$$

其中 1/3 不能再减小.1982 年王中烈、王兴华用带余项的求积公式证明

$$G^p M_p^{1-p} < S_0 < M_p \quad (p = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}). \tag{3.74}$$

见[352]1982,9(2):156 - 159;[326]1982,5(2):337 - 343.1988 年陈计等证明(3.74)左边不等式对任意实数 p 均成立,见成都科技大学学报 1990,2:100 - 102.

1980 年,Pittenger,A.O.对于实数 r,定义

$$\alpha = \frac{r+1}{3}, \beta = \frac{(r-1)\ln 2}{\ln r} \quad (r > 0, r \neq 1);$$

$$p_1 = p_1(r) = \begin{cases} \min\{\alpha,\beta\} & r > 0, r \neq 1, \\ 2/3, & r = 1, \\ \min\{\alpha,0\}, & r \leqslant 0; \end{cases}$$

$$p_2 = p_2(r) = \begin{cases} \max\{\alpha,\beta\} & r > 0, r \neq 1, \\ \ln 2, & r = 1, \\ \max\{\alpha,0\}, & r \leqslant 0; \end{cases}$$

证明了

$$M_{p_1} \leqslant S_r \leqslant M_{p_2}. \tag{3.75}$$

仅当 $a = b$ 或 $r = -1, 1/2$ 或 2 时等号成立,其中 p_1, p_2 不能再改进. 当 $r = 0$ 时又归结为林同坡不等式(3.73). 若 $a \neq b$, 且 $0 \leqslant q \leqslant 1/3 \leqslant p \leqslant 1$, 则 $Q_q < S_0 < M_p$, 而且 $q = 1/3$ 不能再改进. Q_q 与 M_p 可以比较的结果是:设 $a \neq b$, 若 $0 \leqslant q < 1$ 且 $q \leqslant p$, 则 $Q_q < M_p$; 若 $q > 1$ 且 $q \geqslant p$, 则不等号反向. 但当 $0 < p < q < 1$ 和 $1 < q < p$ 时, Q_q 与 M_p 不能比较,见[331]1980:678 – 715;1981:19 – 23.

2000 年,John,M. 等证明了关于对数平均 S_0 的反向 Hölder 型不等式:设 $0 < a < x < b$, 则

$$S_0(b,x)^{c_1} S_0(x,a)^{c_2} < S_0(a,b).$$

式中 $c_1 = \dfrac{\ln(b/x)}{\ln(b/a)}$, $c_2 = \dfrac{\ln(x/a)}{\ln(b/a)}$. 见[373]Ser 2000,B41,(3):401 – 409.

1995 年 Seiffert,H. – J. 证明

$$S_0 < S_0(G^2, A^2)^{1/2} < S_1(G^2, A^2)^{1/2} < S_1.$$

见[360]1995,64(2):129 – 131.

1996 – 1997 年,戴立新等证明:对于 $p > 0$, 成立

$$G^p M_p^{1-p} < S_0 < S_{p+1}(a^{\frac{1}{p+1}}, b^{\frac{1}{p+1}})^{p+1}; \quad S_p(a^{1/p}, b^{1/p})^p < S_0;$$

见[340]1996,16(2):231 – 232;"荆州师专学报"1997,20(2):27 – 28.

注意到(3.74) 左边不等式可改写成

$$S_{-1}(a^p, b^p)[S_2(a^p, b^p)]^{(1/p)-1} < S_0(a,b), (p \neq 0).$$

楼红卫将上式改进为

$$S_{-1}(a^p, b^p)[S_q(a^p, b^p)]^{(1/p)-1} < S_0(a,b).$$

并得到:设 $p > 1, r \geqslant p - 1$, 则 $S_0(a,b) < [S_r(a^{1/p}, b^{1/p})]^p$.

(见宁波大学学报 1997.)

3. **Alzer 不等式:**

(1) $(G S_1)^{1/2} < S_0 < (G + S_1)/2.$ (3.76)

(见 C.R.Math.Acad.Sci.Soc.R.Can1987,9:11 – 16)

(2) $(GA)^{1/2} < (S_0 S_1)^{1/2} < \dfrac{1}{2}(S_0 + S_1) < \dfrac{1}{2}(G + A);$ (3.77)

(3) $G < (S_0 S_1)^{1/2} < M_{1/2} = (G + A)/2.$ (3.78)

(见[360]1986,47(5):422 – 426)

(4)　$G < (S_{-p}S_p)^{1/2} < S_0 \quad (p \neq 0).$　(3.79)

Alzer, H. 进一步提出猜想：

$$S_0 < \frac{1}{2}(S_{-p} + S_p) < A. \tag{3.80}$$

(见[307]601:26014)

1996年，鲁宁证明了Alzer的上述猜想：存在常数 $R > 1$，使得 $|p| > R$ 时，(3.80)式成立. 见[344]1996, 26(3):275－277.

(5)　Alzer和杨任尔，曹冬极分别证明：

$$G < (J_{-p}J_p)^{1/2} < S_0 < \frac{1}{2}(J_{-p} + J_p) < A \quad (p \neq 0); \tag{3.81}$$

$$(G^2A)^{1/3} < (J_{-p}J_p)^{1/2} < S_0 < \frac{1}{2}(J_{-p} + J_p) < \frac{1}{3}(3G + A); \tag{3.82}$$

式中第一个不等式对 $0 < p \leqslant 1/2$ 成立，第三个不等式对 $0 < p < 1/2$ 成立.

$$a < G^2/S_0 < G < G^{2/3}M_{1/3}^{1/3} < S_0 < h < A < b. \tag{3.83}$$

见[306]MR89m:26030和"宁波大学学报"，1989, 2(2):105－108.

4.　Sandor不等式：

(1)　$S_1 > \frac{1}{2}(A + S_0);$　(3.84)

(2)　$S_0S_1^{p-1} < S_0S_p^{p-1} < M_p^p \quad (p \neq 0).$　(3.85)

见[367]1990, 40(2－3):261－270.

5.　(1)　$\frac{1}{8b}(b-a)^2 < A - G < \frac{1}{8a}(b-a)^2.$　(3.86)

(2)　利用第七章Hadamard不等式的加细，可推出：设 $p \geqslant 1, 0 < t \leqslant 1$，则

$$A^p \leqslant \frac{1}{t(p+1)(b-a)}\left\{\left[A + t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]^{p+1} - \left[A - t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]^{p+1}\right\} \leqslant S_{p+1}^p \leqslant M_p^p; \frac{1}{A} \leqslant \frac{1}{t(b-a)}\ln\left|\frac{A + t\left(\frac{b-a}{2}\right)}{A - t\left(\frac{b-a}{2}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{S_0}.$$
(见[301]1992, 167(1):49－56)

6.　设 f 是 $[a, b]$ 上正的可积函数，g 是 $[G, A]$ 上严格递增函数，式中 $G = \sqrt{ab}$，$A = (a+b)/2$，则

$$g(G) < \frac{\int_a^b f(t)g(\sqrt{t(a+b-t)})\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} < g(A). \tag{3.87}$$

(Seiffert, H. J. (1987)，见[306]MR88g:26025)

7.　设 $p > q > r$，则

$$G(a,b) < [S_0(a^{1/p}, b^{1/p})]^p < [S_0(a^{1/q}, b^{1/q})]^q < M_{\frac{1}{2q}}(a,b) < [S_1(a^{1/q}, b^{1/q})]^q < [S_1(a^{1/r}, b^{1/r})]^r < M_{1/r}(a,b). \tag{3.88}$$

(严子浚，[344]1989, 2:67)

8.　令　$B = (a^ab^b)^{\frac{1}{a+b}}$，则

$$\frac{A^2}{S_1} < \frac{4A^2 - G^2}{3S_1} < B < \frac{A^4}{S_1^3} < \frac{A^2}{G}; \tag{3.89}$$

$$AS_0 + BS_1 < 2A^2 < B^2 + G^2; \tag{3.90}$$

$$\frac{4A^2 - 2G^2}{e} < BS_1 < (\frac{AS_0}{G})^2; \tag{3.91}$$

$$(\frac{B}{A})^2 < (\frac{S_1}{G})^3;\ \frac{B-G}{B-A} > \sqrt{2}; \tag{3.92}$$

$$\frac{A^2 - G^2}{A^2} < \frac{\ln B}{G} < \frac{A^2 - G^2}{G};$$

见[404]IV.1997,15(1 - 2):51 - 55.

9. 楼红卫证明了广义对数平均 S_p 的下述不等式:

(1) 设 $a > 1, b > 1$.若 $p < -1$,则 $S_p(1, ab) \leqslant S_p(a, b)$;若 $p > -1$,则不等号反向;

(提示:考虑 $t > 1, x > 1$ 时 $f(x) = \dfrac{x^{1+t} - 1}{x^t - x}$ 的单调性)

(2) 设 $a > 1, b > 1, 1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.若 $r > -1$,则

$S_r(1, ab) \leqslant [S_r(1, a^p)]^{1/p}[S_r(1, b^q)]^{1/q}$,

若 $r < -1$,则不等号反向,仅当 $a^p = b^q$ 时等号成立.

(见“宁波大学学报”1996.)

1997年,石敏琪、石焕南给出了 S_p 的一个上界估计:

$$S_p(a, b) < \frac{a + b}{p^{\frac{1}{p-1}}} \quad (p > 2). \tag{3.93}$$

为证上述不等式,只要证 $p > 2$ 时,$(b^p - a^p)/(b - a) \leqslant 1$.见[345]1997.5:37 - 38.它与1988年杨镇杭证明的 S_p 的另一个上界:$S_p(a, b) < M_{p-1}(a, b)$(见[345]1988.2),是不可比较的.

1999年李康海则进一步证明,当 $0 < p < 2, p \neq 1$ 时,(3.93)式中不等号反向.见[351]1999,1:7 - 8,[100]P117 - 118.于是得到 S_p 的上下界估计:设 $p > 2$ 时,成立

$$\frac{a + b}{2} < S_p(a, b) < \frac{a + b}{p^{\frac{1}{p-1}}},$$

当 $0 < p < 2$ 且 $p \neq 1$ 时两个不等号均反向.

10. Alzer, H. 证明了单参数平均 $J_p(a, b)$ 不等式:

(1) 设 $p \geqslant 1$,则 $J_p(a + b) \leqslant J_p(a) + J_p(b)$.当 $p \leqslant 1$ 时,不等号反向;

(2) 设 $p < -\dfrac{1}{2}$,则 $J_p(a, b) \geqslant J_p(a)J_p(b)$,当 $p \geqslant -\dfrac{1}{2}$ 时,不等号反向;

(3) 设 $r < s < p \leqslant -\dfrac{1}{2}$,则

$$(J_s(a, b))^{p-r} \leqslant (J_r(a, b))^{p-s}(J_p(a, b))^{s-r},$$

当 $-\dfrac{1}{2} \leqslant r \leqslant s \leqslant p$ 时,不等号反向.

问:$p\ln J_p(a,b)$ 是否为凸函数?

(见 Bayer, Akad. Wiss. Math. - Natur, kl. Sitzungsber, 1988, 23 - 39. (1989))

11. 1988 年陈计、王振将匡继昌建立的 Heron 平均和幂平均不等式 $M_{1/2} < h < M_{2/3}$ 推广为均值比的形式:设 $b_1 \geqslant b_2 > 0, \frac{a_1}{b_1} \geqslant \frac{a_2}{b_2} > 0$,则

$$\frac{M_{\frac{1}{2}}(a_1,a_2)}{M_{\frac{1}{2}}(b_1,b_2)} \leqslant \frac{h(a_1,a_2)}{h(b_1,b_2)} \leqslant \frac{M_{2/3}(a_1,a_2)}{M_{2/3}(b_1,b_2)}. \tag{3.94}$$

仅当$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$时等号成立. 并证明下界中的$\frac{1}{2}$和上界中的$\frac{2}{3}$均不能再改进. 见[350]1988, 2:15 - 16.

1989 年,陈计、胡波证明:当 $0 < a < b \leqslant \frac{1}{2}$ 时,使得

$$\frac{M_p(a,b)}{M_p(1-a,1-b)} < \frac{S_1(a,b)}{S_1(1-a,1-b)} < \frac{M_q(a,b)}{M_q(1-a,1-b)} \tag{3.95}$$

成立的 p 的最大值为 $2/3$, q 的最小值为 $\log_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$;

而当$\frac{2}{3} < p < \log_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 时, $\frac{M_p(a,b)}{M_p(1-a,1-b)}$ 与$\frac{S_1(a,b)}{S_1(1-a,1-b)}$ 不能比较,详见 Facta Univ, 1989, 4:9 - 12.

1990 年胡波、陈计证明:当 $0 < a < b \leqslant \frac{1}{2}$ 时,使得

$$\frac{M_p(a,b)}{M_p(1-a,1-b)} < \frac{h(a,b)}{h(1-a,1-b)} < \frac{M_q(a,b)}{M_q(1-a,1-b)} \tag{3.96}$$

成立的 p 的最大值是指数方程$(3+\sqrt{2})^x = 2^x + 1$ 的根 $r \approx 0.630$,而 q 的最小值是 $2/3$. 由此推出对任意两个不同的正数 a, b,有

$$M_{3/5}(a,b) < h(a,b) < M_{2/3}(a,b).$$

见宁波大学学报 1990, 3(2):32 - 35.

12. 1987 年,王挽澜等将林同坡不等式(3.73) 式推广为:

设 $b_1 > b_2 > 0, \frac{a_1}{b_1} \geqslant \frac{a_2}{b_2} > 0$,则

$$\frac{G(a_1,a_2)}{G(b_1,b_2)} \leqslant \frac{S_0(a_1,a_2)}{S_0(b_1,b_2)} \leqslant \frac{M_{1/3}(a_1,a_2)}{M_{1/3}(b_1,b_2)}, \tag{3.97}$$

仅当$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 时等号成立.

推论 设 $0 \leqslant a < b \leqslant 1/2$,则

$$\frac{G(a,b)}{G(1-a,1-b)} < \frac{S_0(a,b)}{S_0(1-a,1-b)} < \frac{M_{1/3}(a,b)}{M_{1/3}(1-a,1-b)}. \tag{3.98}$$

见"成都科技大学学报"1988, 6:83 - 88; 1990, 2:100 - 102.

三、 加权平均不等式的一般形式

(2.135) 式定义的加权平均包括了通常的离散量求和和连续量求积分的形式,为了

使用上的方便,我们还是将以上两种情形分开讨论.

(一) 离散量的加权平均

设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $p=(p_1,\cdots,p_n)$, $a_k\geqslant 0$, $p_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n}p_k>0$,

$k=1,\cdots,n$,则 $a_1,\cdots,a_n$ 的 r 阶加权平均定义为:

$$M_r(a,p)=\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_ka_k^r}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}\right)^{1/r},0<|r|<\infty; \tag{3.99}$$

$$M_0(a,p)=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{p_k}\right)^{1/\sum\limits_{k=1}^{n}p_k},r=0;$$

$$M_{-\infty}(a,p)=\min\{a_1,\cdots,a_n\},M_{\infty}(a,p)=\max\{a_1,\cdots,a_n\},$$

式中 p_k 称为加权系数,p 称为权,特别,$M_{-1}(a,p)=H_n(a,p)$ (加权调和平均),

$M_0(a,p)=G_n(a,p)$ (加权几何平均),$M_1(a,p)=A_n(a,p)$ (加权算术平均);

$\lim\limits_{r\to 0}M_r(a,p)=M_0(a,p)$, $\lim\limits_{r\to -\infty}M_r(a,p)=M_{-\infty}(a,p)$,

$\lim\limits_{r\to\infty}M_r(a,p)=M_{\infty}(a,p)$,

在应用中,常常将加权平均标准化,即令

$q_k=p_k/\left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right)$, $k=1,2,\cdots,n$,于是,$\sum\limits_{k=1}^{n}q_k=1$,从而得到 $a_1,\cdots,a_n$ 的 r 阶标准平均:

$$M_r(a,q)=\left(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^r\right)^{1/r},0<|r|<\infty, \tag{3.100}$$

$$M_0(a,q)=\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k},\quad r=0. \tag{3.101}$$

其中 $M_0(a,q)$, $M_1(a,q)$ 在(3.5)中分别记为

$G_n(a,q)=\prod\limits_{k=1}^{n}a_k^{q_k}$ 和 $A_n(a,q)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kq_k$. 而 $M_{-1}(a,q)$ 改记为

$$H_n(a,q)=\frac{1}{\sum\limits_{k}(q_k/a_k)}.$$

特别地,取所有 $p_k=1$,即 $q_k=\dfrac{1}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$. 就得到 r 阶均匀加权平均,简称为 r 阶平均,这时,将(3.100)式改记为

$$M_n(a,r)=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{1/r},0<|r|<\infty,$$

其中 $M_n(a,-1)=\dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}}=H_n(a)$, $M_n(a,0)=\left(\prod\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}=G_n(a)$,

$$M_n(a,1)=\frac{1}{n}\sum_{kl=1}^{n}a_k=A_n(a).$$

上述定义中的有限和可推广为收敛的无穷级数,还可进一步定义 $a_1,\cdots,a_n$ 的非对称拟算术平均:

$$M_\varphi(a,p)=\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_k p_k\varphi(a_k)}{\sum_n p_k}\right),\tag{3.102}$$

式中 φ 是$(0,\infty)$上严格单调函数,φ^{-1} 是 φ 的反函数,$a_k\geqslant 0,p_k\geqslant 0$,且 $\sum_k p_k>0$,特别地,可标准化为

$$M_\varphi(a,p)=\varphi^{-1}(\sum_k q_k\varphi(a_k)),\tag{3.103}$$

式中 $q_k\geqslant 0$ 且 $\sum_k q_k=1$,特别地,当 $\varphi(x)=x^r$ 时,(3.102)、(3.103)分别归结为(3.99)和(3.100).

祁锋等将(3.102)进一步推广为加权广义抽象平均:

$$M_n(p,a,f_1,f_2)=\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kf_1(a_k)}{\sum_{k=1}^{n}p_kf_2(a_k)}\right).$$

式中,$\varphi=f_1/f_2$ 为严格单调函数,φ^{-1} 为 φ 的反函数,作者还讨论了该平均的基本性质和单调性.见[344]1999,29(2):169－173.另见[301]2002,270(2):499－518.

(二)　连续量的加权平均

设 E 为(L)可测集,f,ω 是E上非负(L)可积函数,$\omega(E)=\int_E\omega(x)\mathrm{d}\mu>0$,则 f 关于权函数 ω 在 E 上的 r 次加权平均定义为:

$$M_r(f,\omega,E)=\left(\frac{1}{\omega(E)}\int_E(f(x))^r\omega(x)\mathrm{d}\mu\right)^{1/r},0<|r|<\infty,\tag{3.104}$$

$$M_0(f,\omega,E)=\exp\left(\frac{1}{\omega(E)}\int_E(\ln f(x))\omega(x)\mathrm{d}\mu\right),\tag{3.105}$$

$$M_{-\infty}(f,\omega,E)=\inf\{f(x):x\in E\},M_\infty(f,\omega,E)=\sup\{f(x):x\in E\}.$$

在所讨论的问题中,若函数都定义在 E 上,则 $M_r(f,\omega,E)$ 也可简记为 $M_r(f,\omega)$,当 $\omega(E)=1$ 时,表示平均的标准化.特别当 $\omega(x)=1,M_r(f,1)$ 改记为 $M_r(f)$,这时

$$M_1(f)=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\mathrm{d}\mu=A(f),\tag{3.106}$$

$$M_0(f)=\exp\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E(\ln f)\mathrm{d}\mu\right\}=G(f),\tag{3.107}$$

$$M_{-1}(f)=\frac{\mu(E)}{\int_E\left(\frac{1}{f}\right)\mathrm{d}\mu}=H(f),\tag{3.108}$$

分别称为 f 在 E 上的算术平均,几何平均和调和平均.

$$\lim_{r\to 0}M_r(f,\omega,E)=M_0(f,\omega,E);\tag{3.109}$$

$$\lim_{r\to-\infty} M_r(f,\omega,E) = M_{-\infty}(f,\omega,E); \tag{3.110}$$

$$\lim_{r\to\infty} M_r(f,\omega,E) = M_\infty(f,\omega,E). \tag{3.111}$$

为证(3.109)式,可以对标准化即 $\omega(E) = 1$ 进行证明,即证

$$\lim_{r\to 0} M_r(f) = \lim_{r\to 0}(\int_E (f(x))^r \omega(x)\mathrm{d}\mu)^{1/r} = M_0(f). \tag{3.112}$$

设 $f > 0$. $f^r = e^{r\ln f} = 1 + r\ln f + 0(r^2)$.

$$\begin{aligned} M_r(f) &= (\int_E f^r \omega \mathrm{d}\mu)^{1/r} = \exp[\frac{1}{r}\ln\int_E f^r\omega\mathrm{d}\mu] \\ &= \exp[\frac{1}{r}\ln\int_E (1 + r\ln f + O(r^2))\omega\mathrm{d}\mu] \\ &= \exp\{\frac{1}{r}\ln[1 + r\int_E (\ln f)\omega\mathrm{d}\mu + O(r^2)]\}. \end{aligned}$$

所以,$\lim_{r\to 0} M_r(f) = \exp\{\int_E (\ln f)\omega\mathrm{d}\mu\} = M_0(f)$.

同理,可以在标准化情况下证明(3.111)式,即证

$$\lim_{r\to\infty}(\int_E f^r\omega\mathrm{d}\mu)^{1/r} = M_\infty(f). \tag{3.113}$$

实际上,$M_\infty(f) = \| f \|_\infty = \inf_{\mu(A)=0}\{\sup_{x\in E-A} | f(x) |\}$. $\| f \|_{r,\omega} = (\int_E | f |^r\omega\mathrm{d}\mu)^{1/r}$.

$$\forall A \subset E, \mu(A) = 0, \| f \|_{r,\omega}^r = \int_E | f |^r\omega\mathrm{d}\mu =$$

$$= \int_{E-A} | f |^r\omega\mathrm{d}\mu \leqslant (\sup_{x\in E-A} | f(x) |)^r\mu(E - A).$$

两边 $\forall A : \mu(A) = 0$ 取下确界得 $\| f \|_{r,\omega}^r \leqslant \| f \|_\infty^r\mu(E)$,于是

$$\limsup_{r\to\infty} \| f \|_{r,\omega} \leqslant \| f \|_\infty \lim_{r\to\infty}(\mu(E))^{1/r} = \| f \|_\infty.$$

另一方面,令 $B = \{x \in E : | f(x) | > \| f \|_\infty - \varepsilon\}$. 则 $\mu(B) > 0$,且

$$\| f \|_{r,\omega} \geqslant (\int_B | f |^r\omega\mathrm{d}\mu)^{1/r} \geqslant (\| f \|_\infty - \varepsilon)(\mu(B))^{1/r}.$$

从而 $\liminf_{r\to\infty} \| f \|_{r,\omega} \geqslant \| f \|_\infty - \varepsilon$. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性,得 $\liminf_{r\to\infty} \| f \|_{r,\omega} \geqslant \| f \|_\infty$. 所以,$\lim_{r\to\infty} \| f \|_{r,\omega} = \| f \|_\infty$.

与(3.102)式相应的积分形式是:

$$M_\varphi(f,\omega) = \varphi^{-1}\left\{\frac{\int_E \varphi(f(x))\omega(x)\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}, \tag{3.114}$$

式中 φ 是 E 上严格单调函数,φ^{-1} 是 φ 的反函数.

特别当 $\varphi(x) = x^r$ 时,(3.114)式归结为(3.104)式.

注 对于不熟悉 Lebesgue 积分理论的读者,可以将可测集 E 理解为$[a,b]$,(L) 积分理解为(R)积分. 我们比较加权平均的离散形式(3.99)式和连续形式(3.104)式,就会发现,正如 Hardy[1] 所指出的那样,对于渴望避免陷入不必要细节的读者,可以认为适用于求和的式子,经过简单的修改,将求和号改为积分号,就适用于积分,反之亦然. 徐利治[8] 则进一步指出将求和号改为积分号的一个判别标准,即对有穷不等式而言,符号 $\sum$

在不等式两端出现的幂次必须是齐次的，因此，$M_r(a,p)$ 的许多性质都可按上述标准推广到 $M_r(f,\omega,E)$ 上，这也是发现新的积分不等式的重要方法之一，而且积分往往比级数更容易处理，事实上，当(3.104) 式中的 μ 是计数测度时，就归结为离散量的加权平均. 下面讨论加权平均不等式时，就对离散量(级数) 与连续量(积分) 对比叙述.

（三）　加权平均不等式

1.　**单调性：**

(1)　设除所有 a_k 相等或某个 $a_j=0$ 且 $r\leqslant 0$ 外，由(3.99) 式定义的 $M_r(a,p)$ 关于 r 严格递增，即对于所有 α,β: $-\infty<\alpha<\beta<\infty$，成立

$$M_{-\infty}(a,p)<M_\alpha(a,p)<M_\beta(a,p)<M_\infty(a,p). \tag{3.115}$$

证　当 $t\neq 0$ 时，令

$$f(t)=\left(\frac{\sum_k p_k a_k^t}{\sum_k p_k}\right)^{1/t},F(t)=t^2\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

因为 $f(t)>0$，所以 f' 与 F 同号，于是只要证 $F(t)>0$，而这只要考虑 $F'(t)$ 的符号.

因为　$\lim_{t\to 0}f(t)=f(0)=M_0(a,p)$. 于是 $f(0)\leqslant f(1)$，即

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k^{p_k}\right)^{1/\sum_k p_k}\leqslant\frac{\sum_k p_k a_k}{\sum_k p_k}. \tag{3.116}$$

令 $q_k=\dfrac{p_k}{\sum_k p_k}$，得到 AG 不等式(3.5) 式.

推论 1　设 $a_k,p_k>0,k=1,\cdots,n$. 且至少存在一对 $i\neq j,a_j\neq a_j$，则

$$\exp\left(\frac{\sum_k\frac{p_k}{a_k}\ln a_k}{\sum_k(p_k/a_k)}\right)<\frac{\sum_k p_k}{\sum_k(p_k/a_k)}<\left(\prod_{k=1}^n a_k^{p_k}\right)^{1/\sum_k p_k}$$

$$=\exp\left(\frac{\sum_k\frac{p_k}{a_k}\ln a_k}{\sum_k p_k}\right)<\frac{\sum_k p_k a_k}{\sum_k p_k}<\exp\left(\frac{\sum_k p_k a_k\ln a_k}{\sum_k p_k a_k}\right). \tag{3.117}$$

提示：不等式各端取对数，并利用 $\ln t$ 的凸性.

特别地，当 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数，$r<0<\alpha<\beta$，则

$M_n(a,r)<M_n(a,0)<M_n(a,\alpha)<M_n(a,\beta)$，即

$$\left(\frac{1}{n}\sum_k a_k^r\right)^{1/r}<\left(\prod_k a_k\right)^{1/n}<\left(\frac{1}{n}\sum_k a_k^\alpha\right)^{1/\alpha}<\left(\frac{1}{n}\sum_k a_k^\beta\right)^{1/\beta}; \tag{3.118}$$

$H_n(a)<G_n(a)<A_n(a)$，　即　$\dfrac{n}{\sum_k\frac{1}{a_k}}<\left(\prod_k a_k\right)^{1/n}<\dfrac{1}{n}\sum_k a_k.$

(2)　设 $\omega\geqslant 0,\int_E\omega(x)\mathrm{d}\mu=\omega(E)>0$，$f$ 不是常值函数，$\inf\{f(x):x\in E\}>0$，则由(3.104)，(3.105) 所定义的 $M_r(f,\omega,E)$ 是 r 的严格递增函数，进而成立

$$\exp\left\{\frac{\int_E \frac{\omega(x)}{f(x)}\ln f(x)\mathrm{d}\mu}{\int_E \frac{\omega(x)}{f(x)}\mathrm{d}\mu}\right\} < \frac{\omega(E)}{\int_E \frac{\omega(x)}{f(x)}\mathrm{d}\mu} < \exp\left\{\frac{\int_E \omega(x)\ln f(x)\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\} <$$

$$< \frac{\int_E f(x)\omega(x)\mathrm{d}\mu}{\omega(E)} < \exp\left\{\frac{\int_E \omega f\ \ln f\mathrm{d}\mu}{\int_E \omega f}\right\}; \tag{3.119}$$

特别地,有 $H(f) < G(f) < A(f)$;

$$\exp\left\{\frac{\int_E \omega\ln f\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\} < \left\{\frac{\int_E \omega f^r\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}^{1/r} < \left\{\frac{\int_E \omega f^s\mathrm{d}\mu}{\omega(E)}\right\}^{1/s}, (0 < r < s).$$

仅当 $f(x) = c \quad a.e.x \in E$ 时等号成立.

2. 1988 年,罗承辉、陈计证明:

(1) **Rado 型不等式:**

$$(n+1)[M_{n+1}(a,r_2) - M_{n+1}(a,r_1)] \geqslant n[M_n(a,r_2) - M_n(a,r_1)]$$

成立的充要条件是 $r_1 \leqslant 1 \leqslant r_2$.

(2) **Popovic 型不等式:**

$$\left(\frac{M_{n+1}(a,r_2)}{M_{n+1}(a,r_1)}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{M_n(a,r_2)}{M_n(a,r_1)}\right)^n$$

成立的充要条件是 $r_1 \leqslant 0 \leqslant r_2$.

(见“蛙鸣”34 期 P31 - 35)

3. 1989 年,Alzer,H. 得到 Rado 型几何平均与调和平均不等式:

设 $0 < a_k \leqslant \frac{1}{2}, q_k > 0, Q_n = \sum_{k=1}^n q_k = 1$,

$$G_n(a,q) = \prod_{k=1}^n a_k^{q_k}, G_n(1-a,q) = \prod_{k=1}^n (1-a_k)^{q_k};$$

$$H_n(a,q) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{a_k}\right)^{-1}, \qquad H_n(1-a,q) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{1-a_k}\right)^{-1};$$

$$R_n(a,q) = G_n(1-a,q) - G_n(a,q);$$

$$S_n(a,q) = n\left[\frac{G_n(a,q)}{H_n(a,q)} - \frac{G_n(1-a,q)}{H_n(1-a,q)}\right].$$

则

(1) $R_{n-1}(a,q) \leqslant R_n(a,q)$;

(2) $S_{n-1}(a,q) \leqslant S_n(a,q)$.

见[374]1989,32(9):199 - 206.

1997 年 Alzer,H. 又证明:

$$\frac{1}{2M}\sum_{k=1}^n q_k(a_k - G_n(a,q))^2 \leqslant A_n(a,q) - G_n(a,q),$$

式中 $a_k > 0, a = (a_1,\cdots,a_n), q_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^n q_k = 1, M = \max\{a_1,\cdots,a_n\}$.

见[401],1997,27(3):663－667.

若加上条件 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,则

$$\frac{G_n(a,q)}{2a_n^2}\sum_{k=1}^{n} q_k[a_k - H_n(a,q)]^2 \leqslant G_n(a,q) - H_n(a,q)$$
$$\leqslant \frac{G_n(a,q)}{2a_1^2}\sum_{k=1}^{n} q_k[a_k - G_n(a,q)].$$

(Mercer,[301]2000,243(1):163－173)

4. 设 $1 \leqslant a_k \leqslant c, k = 1,\cdots,n$,则

$$\frac{(c-1)^2}{n(c+1)} \leqslant A_n(a) - H_n(a) \leqslant (\sqrt{c}-1)^2. \tag{3.120}$$

更一般地,令 $B_n = n[A_n(a) - M_n(a,r)]$.则当 $r<1, r\neq 0$ 时,有 $B_{n-1}\leqslant B_n$.特别,当 $r=-1$ 时,就得到 $n[A_n(a)-H_n(a)]$ 的递增性.

见 Math,Comp.1975,29:84－836,1984,42:193－194.

5. 1988 年,Pecaric,J.E.将 Sierpinski 不等式(3.36)推广为加权形式:令 $q=(q_1,\cdots,q_n), q_k>0, Q_n=\sum_{k=1}^{n} q_k,\quad x+t=(x_1+t,\cdots,x_n+t),\quad x_k,t>0.$

$$F(t) = \frac{[M_r(x+t;q)]^{Q_{n-1}}[M_{-r}(x+t;q)]^{Q_n}}{[M_0(x+t;q)]^{Q_n}}.$$

则当 $r>0$ 时,$F(t)$ 递增;$r<0$ 时,$F(t)$ 递减;而当 $t\to\infty$ 时,$F(t)\to 1$,见[301]1990,149(2):497－512;Punime Mat.1988,3:9－11.

6. (1)　设 $a_{jk}>0, a_j=(a_{j1},\cdots,a_{jn})\quad (j=1,\cdots,m)$ 不都成比例,则

$$\sum_{j=1}^{m} G_n(a_j) < G_n(\sum_{j=1}^{m} a_j); \tag{3.121}$$

若 $q_i>0, \sum_{j=1}^{m} q_j = 1, r>0$,则

$$M_n(\prod_{j=1}^{m} a_j; r) \leqslant \prod_{j=1}^{m} M_n(a_j; \frac{r}{q_j}). \tag{3.122}$$

相应的积分形式为

$$\sum_k G(f_k) \leqslant G(\sum_k f_k),$$

仅当 $f_n = c_n\sum_k f_k$ 或 $G(\sum_k f_k)=0$ 时等号成立.式中 $\sum$ 为有限和或无限和,$G(f)$ 是 f 在 E 上的几何平均,见(3.107)式.

(2)　设 $a_k\geqslant 0, M_n(a,p)=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{1/p}$. $A_n(a^{p+q})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q}$,$p,q$ 为实数,$p\neq 0$,则

$$[A_n(a)]^{p+q} \leqslant [M_n(a,p)]^{p+q} \leqslant A_n(a^{p+q}).$$

(Kin Young-Ho,见[301]2000,245(2):628－632)

(3)　设 $a_k>0, M_n(a,r)=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^r)^{1/r}$,则对于 $p>q$,成立

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(a,q)]^p\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(a,p)]^q\right\}^{1/q}$$，仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.(唐立华,[351]2001,1:19－22)

(4) **Specht 不等式**:设 $0<p\leqslant a_k\leqslant q,k=1,\cdots,n,\quad t=q/p,s>r,sr\neq 0$,则

$$1\leqslant\frac{M_s(a,q)}{M_r(a,q)}\leqslant\left(\frac{r}{t^r-1}\right)^{1/s}\left(\frac{t^s-1}{s}\right)^{1/r}\left(\frac{t^s-t^r}{s-r}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}. \tag{3.123}$$

$M_s(a,q)$ 与 $M_r(a,q)$ 的比与差的上、下界估计详见[4]P104－107.

1964 年,Goldman 证明下述不等式:若 $rs<0$,则

$$(q^s-p^s)(M_r(a,q))^r-(q^r-p^r)[A_s(a,q)]^s\leqslant p^rq^s-q^rp^s,$$

若 $rs>0$,则不等号反向,利用上述不等式可证明(3.123)式.

(5) **混含 AG 不等式**:设 $0<r<1$,则

$$n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k(a,r)\right)^r\leqslant[A_n(a)]^r+(n-1)\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}M_k(a,r)\right)^r,$$

若 $0<p<q$ 或 $p<q<0$,则

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[M_k(a,p)]^q\right\}^{1/q}\leqslant\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k(a,q)]^p\right\}^{1/p},$$

猜想 $\forall\, p<q$ 时,上式仍成立.(马统一,[351]2003,2:7－16)

7. **Lyapunov 不等式**:

(1) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数,且 $0<b<r<c$,则 $g(r)=r\ln M_r(a,p)$ 是 r 的严格凸函数,即

$$g(r)<\frac{c-r}{c-b}g(b)+\frac{r-b}{c-b}g(c). \tag{3.124}$$

(2) 令 $g(r)=r\ln M_r(f,\omega,E)$,若 $0<b<r<c$,且 $M_c(f,\omega,E)<\infty$,则(3.124)式成立.见[1]定理 18 和 196.

8. **徐利治不等式**:

(1) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全相等的正数,$0<t<s$.则 r 阶幂平均 $M_r=M_n(a,r)$ 满足:

$$\frac{t}{s}\left(\frac{dM_t}{dt}\right)\leqslant\frac{M_s-M_t}{s-t}\leqslant\frac{s}{t}\left(\frac{dM_s}{ds}\right). \tag{3.125}$$

当 $M_r=M_r(f)$ 为函数 f 在 E 上的幂平均时,上式仍成立.

证 设 $0<t<r<s$,取 $\lambda=\dfrac{(r-t)s}{(s-t)r}$,则 $0<\lambda<1$.由(2.25)式,有 $a^\lambda b^{1-\lambda}\leqslant\lambda a+(1-\lambda)b.(a,b\geqslant 0)$.再由(3.124)式,得到 $\lambda M_s+(1-\lambda)M_t\geqslant M_s^\lambda M_t^{1-\lambda}=(M_s^s)^{\frac{\lambda}{s}}(M_t^t)^{\frac{1-\lambda}{t}}>(M_r^r)^{1/r}=M_r$.由此推出

$$t\left(\frac{M_s-M_t}{s-t}\right)<r\left(\frac{M_s-M_r}{s-r}\right).$$

令 $r\to s-0$,即得(3.125)右边不等式;令 $r\to t+0$,即得(3.125)左边不等式.(见[8]1958 年新 1 版 P144－145)

9. **Chebyshev 不等式**:

(1)　若 $\forall k,j,(a_k-a_j)(b_k-b_j)\geqslant 0$,则称 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 成似序;若不等号反向,则称 a 与 b 成反序.设 a,b 都不是常数列,$r>0$,则当 a,b 成似序时,有

$$M_n(a,r)M_n(b,r)<M_n(ab,r). \tag{3.126}$$

特别,当 a 与 b 同时递增或同时递减时,成立

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}<\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j\Big)<\sum_{k=1}^{n}a_kb_k. \tag{3.127}$$

令

$$D_k=k\sum_{j=1}^{k}a_jb_j-\Big(\sum_{j=1}^{k}a_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k}b_j\Big),$$

则当 a,b 成似序时,成立 **Janic 不等式:**

$$0\leqslant D_1\leqslant D_2\leqslant\cdots\leqslant D_n, \tag{3.128}$$

而当 a,b 成反序时,上述不等号均反向;仅当

$a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号成立.

证　$D_{n+1}-D_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{n+1}-a_k)(b_{n+1}-b_k)\geqslant 0$.若 $\alpha\leqslant a_k\leqslant A,\beta\leqslant b_k\leqslant B,k=1,\cdots,n$,则

$$(A-\alpha)(B-\beta)\leqslant|D_n|\leqslant(A-\alpha)(B-\beta)\Big[\frac{n}{2}\Big]\Big(n-\Big[\frac{n}{2}\Big]\Big).\text{(Grüss)}$$

推论 1　设 $0\leqslant a_{j1}\leqslant\cdots\leqslant a_{jn},j=1,2,\cdots,m$,则

$$\prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\Big)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{m}a_{jk}\Big).$$

特别地,$\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)^m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^m$.此即 $A_n(a)\leqslant M_n(a,m)$.

推论 2　设 $b_j>0,j=1,\cdots,m,0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,则

$$\prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{b_j}\Big)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{B_m},\text{式中 } B_m=\sum_{k=1}^{m}b_j.$$

1985 年,Behdzet 证明:设 $p_k,q_k\geqslant 0$,令

$$\begin{aligned}2D_n(a,b;p,q)&=\Big(\sum_k p_k\Big)\Big(\sum_k q_ka_kb_k\Big)+\Big(\sum_k q_k\Big)\Big(\sum_k p_ka_kb_k\Big)\\&\quad-\Big(\sum_k p_ka_k\Big)\Big(\sum_k q_kb_k\Big)-\Big(\sum_k q_ka_k\Big)\Big(\sum_k p_kb_k\Big),\end{aligned}$$

则当 a,b 成似序时,成立

$$D_n(a,b;p,q)\geqslant 0, \tag{3.129}$$

仅当 a 或 b 为常数列时等号成立,见 Rad. Mat. 1985,1(2):185－190.特别当 $p_k=q_k$ 时,(3.129) 式变成

$$\Big(\sum_k p_ka_k\Big)\Big(\sum_k p_kb_k\Big)\leqslant\Big(\sum_k p_k\Big)\Big(\sum_k p_ka_kb_k\Big).$$

当 $\forall p_k=1$ 时,上式变成 Chebyshev 不等式的最初形式:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

Chebyshev 不等式有许多推广，例如 1959 年 Popoviciu 证明了

$$F(a,b)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}a_jb_k\geqslant 0$$

的充要条件：

① 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 同时递增. 则 $F(a,b)\geqslant 0$ 成立的充要条件是

$$\sum_{j=r}^{n}\sum_{k=s}^{n}x_{jk}\geqslant 0,r=1,\cdots,n;s=2,\cdots,n;\quad \sum_{j=r}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}=0,r=1,\cdots,n.$$

或 ② 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 非负且同时递增，则 $F(a,b)\geqslant 0$ 成立的充要条件是

$$\sum_{j=r}^{n}\sum_{k=s}^{n}x_{jk}\geqslant 0,r=1,\cdots,n;s=1,\cdots,n.$$

特别当 $j\neq k$ 时 $x_{jk}=-1,x_{kk}=n-1$，就得到 Chebyshev 不等式，见 Gaz. Mat. Fiz. A. 1959, 11(64): 451 - 461.

设 $m_1\leqslant a_k\leqslant M_1,m_2\leqslant b_k\leqslant M_2,1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\right|\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\left(1-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\right)(M_1-m_1)(M_2-m_2),$$

式中 $[x]$ 是 x 的整数部分. (Li Xin 等, [301]2002, 267(2): 434-443)

1989 年 Alzer, H. 证明：设 $n\geqslant k\geqslant 2$, $q_j>0$, $0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$; $0<b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n$; $a_1<a_k,b_1<b_k$，则

$$\frac{T_n}{T_k}>\frac{Q_k(Q_n-q_1)}{Q_n(Q_k-q_1)},\tag{3.130}$$

式中 $T_m=\sum_{j=1}^{m}(q_ja_jb_j)-\frac{1}{Q_m}\left(\sum_{j=1}^{m}q_ja_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m}q_jb_j\right),Q_m=\sum_{j=1}^{m}q_j$. (3.130) 式中 T_n/T_k 的下界是最优的. 见 Southeast Asian Bull. Math, 1989, 13(2): 97 - 100. Chebyshev 不等式可进一步推广为排序不等式见第 3 章 N. 86.

(2) 若 $\forall x_1,x_2\in E$，有 $[f(x_1)-f(x_2)][g(x_1)-g(x_2)]\geqslant 0$. 即 f,g 在 E 上同时递增或同时递减，则称 f,g 在 E 上成似序，若不等号反向，则称 f,g 在 E 上成反序. 设权函数 $\omega(x)>0,x\in E$，令

$$T(f,g;\omega)=\left(\int_E\omega\right)\left(\int_E fg\omega\right)-\left(\int_E f\omega\right)\left(\int_E g\omega\right).$$

则当 f,g 在 E 上成似序时，成立

$$T(f,g;\omega)\geqslant 0,\tag{3.131}$$

当 f,g 在 E 上成反序时，不等号反向.

证 将差式化为重积分：

$$T(f,g;\omega)=\int_E\int_E f(x)[g(x)-g(y)]\omega(x)\omega(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在右边积分中交换 x,y 位置,两式相加即可得证.

特别地,若 $\forall x\in E$,有 $|f'(x)|\geqslant m_1$, $|g'(x)|\geqslant m_2$,则(3.131) 可改进为

$$T(f,g;\omega)\geqslant m_1m_2T(x-a,x-a;\omega)\geqslant 0. \tag{3.132}$$

见[301]1984,102(2):479 - 487.

1999 年,Dragomir,S. S. 等证明:若二元连续函数 $f(x,y)$ 满足条件:

$$f(x,y)+f(y,x)\leqslant f(x,x)+f(y,y),\ \forall x,y\leqslant[a,b],\text{则}$$

$$F(u)=\int_a^u\omega(x)\mathrm{d}x\int_a^u\omega(x)f(x,x)\mathrm{d}x-\int_a^u\int_a^u\omega(x)\omega(y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

$\forall u\in[a,b]$.此外,若 ω 连续,则 $F(u)$ 递增.见[331]1999,10:63 - 67.

(3) 反向 Chebyshev 不等式——Grüss 不等式

设 f,g 在$[a,b]$上可积,$m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1$, $m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$, $x\in[a,b]$,令

$$T(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b fg-\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right).\text{则}$$

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{4}(M_1-m_1)(M_2-m_2). \tag{3.133}$$

取 $f(x)=g(x)=\operatorname{sgn}(2x-1)$,可看出(3.133) 式中的常数 1/4 是最佳的.

若对 f,g 再加上其他条件,则(3.133) 式还可改进,例如

① 设 f,g 是(0,1) 上正的凸函数,则

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right);$$

② 设 f,g 在$(0,\infty)$上完全单调,则在积分区间$(0,a)$上,成立

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{12}(M_1-m_1)(M_2-m_2);\text{(Hardy)}.$$

③ 设 f,g 在$[a,b]$上绝对单调或 4 阶单调,则

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{4}{45}(M_1-m_1)(M_2-m_2). \tag{3.134}$$

上述常数$\frac{1}{12}$与$\frac{4}{45}$都是最佳的.

注 绝对单调与 n 阶单调的定义见第 8 章 §1.

④ 设 f,g 在$[a,b]$上有连续导数,则

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{12}\|f'\|_c\|g'\|_c.$$

若 f,g 的导数有界,则

$$|T(f,g)|\leqslant\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\|f'\|_2\|g'\|_2.$$

式中 $\|f'\|_2=\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b(f')^2\right]^{1/2}$.

以上见[4]§2.5 和 2.13.

注 Grüss 不等式(3.133) 可作如下推广:设 $f,g\in L_\omega(E)$, $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1$, $m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$. $x\in E$,不妨设 $\int_E\omega=\omega(E)=1$,记

$$T(f,g)=\left(\int_E\omega\right)\left(\int_E fg\omega\right)-\left(\int_E f\omega\right)\left(\int_E g\omega\right),\quad 则$$

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{4}(M_1-m_1)(M_2-m_2).\tag{3.135}$$

证 记 $F=\int_E f\omega, G=\int_E g\omega$. 因为 $\int_E\omega=1$, 于是

$$T(f,g)=\int_E gf\omega-FG=\int_E(f-F)(g-G)\omega.\tag{3.136}$$

由 Cauchy 不等式, 有 $T(f,f)=\int_E f^2\omega-F^2\geqslant 0$.

另一方面, $T(f,f)=(M_1-F)(F-m_1)-\int_E(M_1-f)(f-m_1)\omega$

$$\leqslant(M_1-F)(F-m_1).\tag{3.137}$$

再由 Cauchy 不等式, 有

$$T(f,g)^2=\left(\int_E(f-F)(g-G)\omega\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_E(f-F)^2\omega\right)\left[\int_E(g-G)^2\omega\right]=T(f,f)T(g,g)\leqslant$$

$$\leqslant(M_1-F)(F-m_1)(M_2-G)(G-m_2)\leqslant\frac{1}{4}(M_1-m_1)^2\cdot\frac{1}{4}(M_2-m_2)^2.$$

注 (3.133) 式的进一步推广见第 13 章 N.6.

(4) **Karamata 不等式**: 设 f,g 在 $(0,1)$ 上可积, $0<m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2, x\in(0,1)$,

令 $c=\dfrac{\sqrt{m_1m_2}+\sqrt{M_1M_2}}{\sqrt{m_1M_2}+\sqrt{m_2M_1}}\geqslant 1$, 则

$$\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right)}{\int_0^1 fg}\leqslant c^2.\tag{3.138}$$

见 Acad. Serbe Sci, Publ, Inst. Math, 1948, 2: 131 - 145.

10. ***k* 次对称平均不等式**: 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 为正数序列, 即 $\forall a_k>0, 1\leqslant k\leqslant n$, a 的 k 次对称函数 $E_n(a,k)$ 定义为

$$E_n(a,k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\prod_{j=1}^k a_{i_j},\tag{3.139}$$

式中 $(i_1,\cdots,i_k)$ 取遍数集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 k- 组合, 而 a 的 k 次对称平均定义为

$$P_n(a,k)=\left[\frac{E_n(a,k)}{\binom{n}{k}}\right]^{1/k}, 式中\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.\tag{3.140}$$

特别地, $P_n(a,1)=A_n(a)$ 为 a 的算术平均. $P_n(a,n)=G_n(a)$ 为 a 的几何平均;

$$Q_n(a,k)=\left\{\frac{[A_n(a)]^k-\dfrac{k!}{n^k}E_n(a,k)}{1-\dfrac{k!}{n^k}\binom{n}{k}}\right\}^{1/k}\tag{3.141}$$

称为 a 的 k 次剩余对称平均($2\leqslant k\leqslant n$),特别地 $Q_n(a,2)=M_n(a,2)=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{1/2}$ 为 a 的 2 阶幂平均.我们在第 3 章 $N.132$ 还要讨论 $E_n(a,k)$ 的有关不等式.

(1)　**Maclaurin 不等式(对称平均值基本定理):**

$$G_n(a)=P_n(a,n)\leqslant P_n(a,n-1)\leqslant\cdots\leqslant P_n(a,2)\leqslant P_n(a,1)=A_n(a). \tag{3.142}$$

(2)　$[A_n(a)]^p[G_n(a)]^{1-p}\leqslant P_n(a,k)\leqslant qA_n(a)+(1-q)G_n(a)$,　(3.143)

式中 $p=\frac{n-k}{k(n-1)}$ 与 $q=(\frac{n}{n-1})(1-\frac{k}{n})^{1/k}$ 均为最佳值(文家金、石焕南,成都大学学报,2000,19(3):1－8)

(3)　文家金等证明:使不等式

$$M_n(a,p)\leqslant P_n(a,k)\leqslant M_n(a,q) \tag{3.144}$$

成立的 p 的最小值为 0,q 的最大值为 $\frac{2[\ln n-\ln(n-1)]}{\ln n-\ln(n-2)}$.

(见西南民族学院学报 2000,26(3):244－250)

(4)　$A_n(a)\leqslant Q_n(a,n)\leqslant Q_n(a,n-1)\leqslant\cdots\leqslant Q_n(a,3)\leqslant Q_n(a,2)=M_n(a,2).$

$$\tag{3.145}$$

(张日新,文家金,成都大学论文集,2001)

(3.142)式与(3.145)式中的等号仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

(5)　1982 年,莫颂清用数学归纳法证明

$$[P_n(a,k)]^{2k}\geqslant[P_n(a,k+1)]^{k+1}[P_n(a,k-1)]^{k-1}. \tag{3.146}$$

式中 $k=1,2,\cdots,n-1$.规定 $P_n(a,0)=1$,由此推出(3.142)式,见[345]1982,12:25－27.

(6)　我们还可考虑对称函数的各种推广和变形,如 1979 年 Detemple,D.W 和 Robertson,J.M.定义了 a 的广义 k 次对称平均:

$$P_n^*(a,k)=\binom{n+k-1}{n-1}^{-1}\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\left(\prod_{m=1}^{n}a_m^{i_m}\right). \tag{3.147}$$

并证明当 $k\geqslant1$ 时,成立

$$[P_2^*(a,k)]^2\leqslant P_2^*(a,k-1)\cdot P_2^*(a,k+1); \tag{3.148}$$

$$P_2^*(a,1)\leqslant[P_2^*(a,2)]^{1/2}\leqslant\cdots\leqslant[P_2^*(a,k)]^{1/k}\leqslant\cdots$$

而对于 $n\geqslant3$,只证明

$$[P_n^*(a,k)]^2\leqslant P_n^*(a,k-1)\cdot P_n^*(a,k+1) \tag{3.149}$$

对 $k=1,2,3$ 成立.1995 年张志华则进一步证明(3.149)式对任意 k 成立.(见湖南教育学院学报 1995)

1998 年关开中则进一步证明:

①　$[P_n^*(a,k)]^{1/k}\leqslant[P_n^*(a,k+1)]^{1/(k+1)}$;

② 当 $k=1,2$ 时成立 $\dfrac{P_n^*(a+b,k)}{P_n^*(a+b,k-1)}\leqslant\dfrac{P_n^*(a,k)}{P_n^*(a,k-1)}+\dfrac{P_n^*(b,k)}{P_n^*(b,k-1)}$.

$$(3.150)$$

并猜想(3.150)式 $\forall k\in N$ 成立,见重庆师院学报 1998,15(3):40－43.

1987 年孙家昶证明

$$[P_n^*(a,k)]^{1/k}\leqslant[P_n^*(a,k+1)]^{\frac{1}{k+1}}. \tag{3.151}$$

我们要问:$P_n(a,k)$,$P_n^*(a,k)$ 与 $Q_n(a,k)$ 有什么关系?

$$E_n^*(a,k)=\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{j=1}^k a_{i_j} \tag{3.152}$$

称为 $E_n(a,k)$ 的对偶式. $E_n(a,k)$ 与 $E_n^*(a,k)$ 都是 $R_+^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n):x_k\geqslant 0,1\leqslant k\leqslant n\}$ 上递增的 Schur 凹函数,(见[9]59－60,石焕南,东北师范大学学报(自),2001,33(增刊):24－27). Schur 凹函数的概念见第 7 章 §1.

$E_n(a,k)$ 的另一种变形是 Hamy 对称函数:

$$F_n(a,k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\prod_{j=1}^k a_{i_j}\right)^{1/k}, \tag{3.153}$$

$$\sigma_n(a,k)=\frac{F_n(a,k)}{\binom{n}{k}},1\leqslant k\leqslant n. \tag{3.154}$$

1981 年,张运筹证明了与(3.142)式类似的不等式:

$$G_n(a)=\sigma_n(a,n)\leqslant\sigma_n(a,n-1)\leqslant\cdots\leqslant\sigma_n(a,2)\leqslant\sigma_n(a,1)=A_n(a). \tag{3.155}$$

(见[348]1981.4)

(7) **Fan Ky 不等式**:设 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$,$k=1,2,\cdots,n$.则

$$\frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^n}\leqslant\frac{\prod_{k=1}^n(1-a_k)}{\left(\sum_{k=1}^n(1-a_k)\right)^n}. \tag{3.156}$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. $\frac{1}{2}\leqslant a_k\leqslant 1$ 时不等号反向. 这是[2]P.5.引用的 Fan Ky 未发表的结果. 可以用反向归纳法证明. 这个有趣而有用的结果引起了广泛的研究兴趣.

记 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,$\frac{1}{a}=\left(\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)$,$a_k>0$,

$1-a=(1-a_1,\cdots,1-a_n)$,$1+a=(1+a_1,\cdots,1+a_n)$.

利用对称函数 $E_n(a,k)$ 的记号. (3.156)可改写成

$$\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)}=\left(\frac{E_n(a,n)}{E_n(1-a,n)}\right)^{1/n}\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1-a,1)}=\frac{A_n(a)}{A_n(1-a)}. \tag{3.157}$$

1993 年,Alzer,H. 给出了 Fan Ky 不等式的加细:

$$\frac{A_n(1-a)}{G_n(1-a)}\leqslant\frac{1-G_n(1-a)}{1-A_n(1-a)}\leqslant\frac{A_n(a)}{G_n(a)};\quad \frac{A_n(1-a)}{G_n(1-a)}\leqslant\frac{1-G_n(a)}{1-A_n(a)}\leqslant\frac{A_n(a)}{G_n(a)};$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.并进一步指出,仅当 $n=2$ 时

$$\frac{1-G_2(1-a)}{1-A_2(1-a)}\leqslant\frac{1-G_2(a)}{1-A_2(a)},$$

仅当 $a_1=a_2$ 时等号成立.而当 $n>2$ 时,上式两边不能比较.见[308]1993,117(1):159－165.同一年,Sandor,J.给出了 Fan Ky 不等式的一种推广:设 $x_k\geqslant1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\geqslant\frac{n}{1+G_n(x)},\quad 式中\ G_n(x)=(\prod_{k=1}^{n}x_k)^{1/n}.$$

特别,当 $x_k=\frac{1}{a_k}-1,0<a_k<\frac{1}{2}$ 时,又得到 Fan Ky 不等式(3.156).(见[306] MR93e:26015)

1996 年 Kwon,Ern Gun 将 Fan Ky 不等式推广为:

$$\left(\frac{A_{n-1}(a)G_{n-1}(1-a)}{A_{n-1}(1-a)G_{n-1}(a)}\right)^{n-1}\leqslant\left(\frac{A_n(a)G_n(1-a)}{A_n(1-a)G_n(a)}\right)^{n};$$

$$(n-1)\left(A_{n-1}(a)-\frac{G_{n-1}(a)}{G_{n-1}(a)+G_{n-1}(1-a)}\right)\leqslant n\left(A_n(a)-\frac{G_n(a)}{G_n(a)+G_n(1-a)}\right).$$

见[395]1996,35(3):665－670.

1997 年 Alzer.H.证明:

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{1-a_k}\leqslant\frac{A_n(1-a)-G_n(1-a)}{A_n(a)-G_n(a)}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{1-a_k}.$$

见 Indag.Math.1997,8(1):1－6.

2000 年,Mercer 证明:设 $p\geqslant1,0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant2^{-1/p},b_k>0$,且 $a_k^p+b_k^p=1$,则 $A_n(b)G_n(a)\leqslant A_n(a)G_n(b)$.仅当 $\forall a_k$ 相等时等号成立.见[301]2000,243(1):163－173.

王王不等式:1984 年王挽澜、王鹏飞得到了(3.157)的加细:

$$\left(\frac{E_n(a,n)}{E_n(1-a,n)}\right)^{1/n}\leqslant\left(\frac{E_n(a,n-1)}{E_n(1-a,n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{E_n(a,k)}{E_n(1-a,k)}\right)^{1/k}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\left(\frac{E_n(a,2)}{E_n(1-a,2)}\right)^{1/2}\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1-a,1)};\tag{3.158}$$

$$\left(\frac{E_n(1-a,1)E_n(a,k)}{E_n(a,1)E_n(1-a,k)}\right)^{\frac{1}{k-1}}\leqslant\left(\frac{E_n(a,k)}{E_n(1-a,k)}\right)^{1/k},k\geqslant2;$$

$$\frac{H_n(a)}{H_n(1-a)}\leqslant\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)},\tag{3.159}$$

式中 $H_n(a)$ 是 a 的调和平均,仅当所有 a_k 相等时等号成立.见[334]1984,27:485－497.

2000 年,樊益武证明在 $a_k>0,\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant1$ 的条件下(3.157)式和下式成立:

$$\left(\frac{E_n(a,k)}{E_n(1-a,k)}\right)^{1/k}\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1-a,1)},\ 2\leqslant k\leqslant n.$$

并猜想(3.158)式也成立.见[100]P75－78.

2001 年王挽澜等否定了上述猜想.(见成都大学第二届学术论文交流会论文集.2001.5.P1－12)

联合(3.157)与(3.159)式,得到:若 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,$0<a_k\leqslant 1/2$,$k=1,\cdots,n$,则 $\frac{H_n(a)}{H_n(1-a)}\leqslant\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)}\leqslant\frac{A_n(a)}{A_n(1-a)}$;类似地,可得到

$$\frac{H_n(a)}{H_n(1+a)}\leqslant\frac{G_n(a)}{G_n(1+a)}\leqslant\frac{A_n(a)}{A_n(1+a)};$$

$$\frac{1}{H_n(1-a)}-\frac{1}{H_n(a)}\leqslant\frac{1}{G_n(1-a)}-\frac{1}{G_n(a)}\leqslant\frac{1}{A_n(1-a)}-\frac{1}{A_n(a)};$$

上式中将 $1-a$ 换成 $1+a$ 仍成立.(Govedarica,V.等,[301]2002,270(2):709 - 712)

1982 年,朱尧辰将 Fan Ky 不等式推广到 $\forall a_k\geqslant 1$ 的情形,得到

$$\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)}\geqslant\frac{A_n(a)}{A_n(1-a)}.\text{即}$$

$$\left(\frac{E_n(a,n)}{E_n(1+a,n)}\right)^{1/n}\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1+a,1)} \tag{3.160}$$

(见[345]1982,11:63)

1986 年陈计对(3.160)式作了加细:

$$\left(\frac{E_n(a,n)}{E_n(1+a,n)}\right)^{1/n}\leqslant\left(\frac{E_n(a,n-1)}{E_n(1+a,n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{E_n(a,1)}{E_n(1+a,1)}. \tag{3.161}$$

见[347]1986.1.1998 年,王挽澜用极值方法对 Fan Ky 不等式的下述加权形式(3.162)给出两个证明:

$$\frac{G_n(a,q)}{G_n(1-a,q)}\leqslant\frac{A_n(a,q)}{A_n(1-a,q)}, \tag{3.162}$$

式中 $a_k>0$,$Q=\sum_{k=1}^n q_k$,$0<a_k\leqslant 1/2$,$1\leqslant k\leqslant n$.为此定义 $f_k:(0,1/2]\to R^1$ 为 $f_k(x)=q_k\left[\frac{a_k}{x}-\frac{1-a_k}{1-x}-\log\frac{1-x}{x}\right]$.易证 f_k 在 $x_{k,0}=a_k$ 处达到最小值:

$$f_k(a_k)=-q_k\log\left(\frac{1-a_k}{a_k}\right).\text{从而 } f=\sum_{k=1}^n f_k \text{ 在 } x_0=A_n(a,q) \text{ 处达到最小值:}$$

$$f(x_0)=-Q\log\frac{A_n(1-a,q)}{A_n(a,q)}.$$

再利用

$$-\sum_{k=1}^n q_k\log\frac{1-a_k}{a_k}\leqslant -Q\log\frac{A_n(1-a,q)}{A_n(a,q)},$$

即得(3.162)式.其次定义 $g_k:(0,\frac{1}{2}]\to R^1$ 为

$$g_k(x)=q_k\left(\frac{x}{a_k}-\frac{1-x}{1-a_k}+\log\frac{1-x}{x}\right).$$

用类似的极值方法,又证明了反向 Fan Ky 不等式:

$$\frac{G_n(a,q)}{G_n(1-a,q)}\geqslant\frac{x_0}{1-x_0}\exp\left[\frac{1}{1-m}\left(1-\frac{x_0}{m}\right)\right]$$
$$\geqslant\frac{A_n(a,q)}{A_n(1-a,q)}\exp\left[\frac{1}{1-m}\left(1-\frac{M}{m}\right)\right], \tag{3.163}$$

式中 $x_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\{1-4Q(\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{a_k(1-a_k)})^{-1}\}^{1/2}$, $m=\min\{a_1,\cdots,a_n\}$, $M=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$. 仅当 $m=M$,即所有 a_k 相等时以上等号成立,作者还对以上结果作了进一步的推广. 见[301]1999,238:567 - 579.

1990 年,Alzer. A 证明

$$\frac{H_n(a,q)}{H_n(1-a,q)}\leqslant\frac{G_n(a,q)}{G_n(1-a,q)},$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立,式中 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$, $q_k>0$, $\sum_{k=1}^{n}q_k=1$. 见[326]1990,13(2):295 - 298.

我们还可以考虑更一般的加权形式:设 $a_k\geqslant 1$, $a_k>0$, $0<\alpha<\beta$,则

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}q_k(a_k-1)^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{\alpha}}\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}q_k(a_k-1)^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{\beta}}\right)^{1/\beta}\tag{3.164}$$

提示:令 $b_k=a_k-1$. 记

$$F(x)=\frac{1}{\alpha}\ln\sum_{k=1}^{n}q_k(b_k+x)^{\alpha}-\frac{1}{\beta}\ln\sum_{k=1}^{n}q_k(b_k+x)^{\beta}.$$

证 $x\geqslant 0$ 时 $F(x)$ 递增.

1999年,Alzer,H. 证明:设 $0<\alpha<\beta<1$, $a_k\in[\alpha,\beta]$,令 $c_1=(\frac{\alpha}{1-\alpha})^2$, $c_2=(\frac{\beta}{1-\beta})^2$. 则

$$\left(\frac{A_n(a,q)}{G_n(a,q)}\right)^{c_1}\leqslant\frac{A_n(1-a,q)}{G_n(1-a,q)}\leqslant\left(\frac{A_n(a,q)}{G_n(a,q)}\right)^{c_2}.$$

见[392]1999,129(2):221 - 228. 另见[301]2002,269(1):129 - 136.

若将(3.156)式改为

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}a_k^{p}}{\sum_{k=1}^{n}a_k^{q}}\leqslant\frac{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^{p}}{\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^{q}},\tag{3.165}$$

式中 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$. 当 $p=1$, $q=n$ 时,见第 3 章 N.76(1). 我们可以进一步问:p,q 满足什么条件时,(3.165) 式成立?

利用幂平均 $M_n(a,r)=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{r})^{1/r}$ 和 $M_n(1-a,r)=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)^{r})^{1/r}$,(3.156) 还可写成

$$\frac{M_n(a,0)}{M_n(1-a,0)}=\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)}\leqslant\frac{M_n(a,1)}{M_n(1-a,1)}.$$

于是,Segaiman 提出猜想:当 $p<q$ 时成立

$$\frac{M_n(a,p)}{M_n(1-a,p)} < \frac{M_n(a,q)}{M_n(1-a,q)}. \tag{3.166}$$

1974 年 Chan, F 等对于 $0 < 2^p/p < 2^q/q$ 或 $p+q>9$ 的情形给出了反例,而当 $p+q=0>p$ 或 $0 \leqslant p \leqslant 1 \leqslant q \leqslant 2$ 时证明了(3.166)式成立.见[308]1974,42:202-207.

当 $p=-1, q=0$ 时(3.166)式归结为(3.159)式.

1989-1990 年,王振和陈计又先后证明当 $-1 \leqslant p < q \leqslant 1$ 时(3.166)式成立,而 $p=0, q=4$ 时(3.166)式不成立.见"Mathematica Balcanica",1991.5.

1987 年,王挽澜等证明,若加上条件:$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1/2$,则(3.166)式对于包含原点的开区间 (α, β) 内的任何 $p, q (p<q)$ 都成立,同时,进一步问:对于给定的 $\{a_k\}$,如何确定 α, β? 是否还有使(3.166)式成立的其他区间? 见"成都科技大学学报"1988,6:83-84.

1988 年,Alzer, H 将(3.156)式推广为

$$\left(\frac{G_n(a)}{G_n(1-a)}\right)^n \leqslant \left(\frac{M_n(a,1)}{M_n(1-a,1)}\right)^{n-1}\left(\frac{M_n(a,-1)}{M_n(1-a,-1)}\right), \tag{3.167}$$

式中 $0 < a_k \leqslant 1, n \geqslant 3$.同时利用优化方法证明了反向 Fan Ky 不等式的另一形式:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{1-a_k}\right)^{\beta_k}, 0 < a_k < 1. \tag{3.168}$$

式中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \beta_k = \frac{a_k}{S_n}$.见[367]1988,36(2-3):246-250.[301]1992,163:317-321.

1993 年陈计提出,由(3.153)式定义的 Hamy 对称函数 $F_n(a,k)$,当 $0 < a_k \leqslant 1/2$ 时,是否也成立

$$\frac{F_n(a,n)}{F_n(1-a,n)} \leqslant \frac{F_n(a,n-1)}{F_n(1-a,n-1)} \leqslant \cdots \leqslant \frac{F_n(a,2)}{F_n(1-a,2)} \leqslant \frac{F_n(a,1)}{F_n(1-a,1)}. \tag{3.169}$$

见[348]1993,7:39.

1995 年陈计证明:$0 < r \leqslant 1, 0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{2}$ 时,

$$(G_n(a))^r - (G_n(1-a))^r \leqslant (A_n(a))^r - (A_n(1-a))^r \leqslant (M_n(a,2))^r - (M_n(1-a,2))^r. \tag{3.170}$$

当 $r<0$ 时,不等号均反向,并提出猜想:当 $r \geqslant n$ 时,上述反向不等式也成立.

见[350]1995.5.1993 年,Alzer, H.证明:

$H_n(a) - H_n(1-a) \leqslant A_n(a) - A_n(1-a)$.

$(0 < a_k \leqslant \frac{1}{2})$ 仅当所有 a_k 相等时等号成立.见[367]1993,46(3):257-263.

1964 年,Levinson, N.利用 $f(x) - f(2a-x)$ 在 $(0,2a)$ 上的严格凹性,其中 $f^{(3)}(x) \geqslant 0$,证明对于 $0 < x_k \leqslant a, q_k > 0, Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$ 成立

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)-f\Big(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\Big)\leqslant\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(2a-x_k)-f\Big(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_k(2a-x_k)\Big).\tag{3.171}$$

若 $f^{(3)}(x)>0$，则仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时等号成立. 见[301]1964,8:133－134,1992,163:317－321.

1992 年 Dragomir, S. S. 将(3.169)推广为：设 $f:[0,a]\to R^1$ 使得 $g(x)=f(x)-f(a-x)$ 为$[0,b]$上的凹函数，$b\leqslant a,0\leqslant x_k\leqslant b,q_k\geqslant0,Q_n=\sum\limits_{k=1}^{n}q_k>0$，则

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)-\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kf(a-x_k)\leqslant f\Big(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\Big)-f\Big(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_k(a-x_k)\Big).$$

见[301]1992,163(2):317－321.

11.　**混合幂平均不等式**：设 $a_k,q_k>0,1\leqslant k\leqslant n$. 令 $Q_n=\sum\limits_{k=1}^{n}q_k$. 若 $Q_kq_n<Q_nq_k$，$2\leqslant k\leqslant n-1$，则

$$\left\{\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_k\Big(\frac{1}{Q_k}\sum_{j=1}^{k}q_ja_j^r\Big)^{s/r}\right\}^{1/s}\leqslant\left\{\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_k\Big(\frac{1}{Q_k}\sum_{j=1}^{k}q_ja_j^s\Big)^{r/s}\right\}^{1/r}\tag{3.172}$$

对 $s>r(rs\neq0)$ 成立，且仅当所有 a_k 相等时等式成立. 见[303]1999,2(2):175－181.

12.　**加权 AGH 不等式的推广**：设 $a=(a_1,\cdots,a_n),q=(q_1,\cdots,q_n)$，式中 $a_k\geqslant0$，$q_k>0,1\leqslant k\leqslant n,,\sum\limits_{k=1}^{n}q_k=1$.

我们已知，加权算术平均 $A_n(a,q)$，加权调和平均 $H_n(a,q)$ 和加权几何平均 $G_n(a,q)$ 分别定义为

$$A_n(a,q)=\sum_{k=1}^{n}q_ka_k,H_n(a,q)=\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{a_k}\Big)^{-1},G_n(a,q)=\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k}.$$

再令

$$\Delta_n(a,q)=A_n(a,q)-G_n(a,q);S_n(a,q)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}q_iq_j(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2.$$

(1)　1963 年 Diananda, P. H. 证明：

$$\frac{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{q_k}{q'_k}\right\}}{1-\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{q'_k\}}\leqslant\frac{\Delta_n(a,q)}{S_n(a,q')}\leqslant\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{q_k}{q'_k}\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{q'_k\}},\tag{3.173}$$

式中 $q'=(q'_1,\cdots,q'_n),q'_k>0,1\leqslant k\leqslant n,\sum\limits_{k=1}^{n}q'_k=1$，上下界均可达到.

见[319]1963,59:837－839.

(2)　1993 年，Dragomir. S. S. 证明：设 $0<a_k\leqslant M$. 则

$$G_n(a,q)\leqslant M\exp\Big(\frac{1}{M}A_n(a,q)-1\Big)-M\sum_{k=1}^{n}q_k\exp\Big(\frac{a_k}{M}-1\Big)\leqslant A_n(a,q).$$

仅当 $\forall a_k=M$ 时等号成立. 见[404], IV, Ser. 11. 1993, 11(1):9－12.

(3)　**王中烈不等式**：设 $f(x)=\big(b_1x+\frac{b_2}{x}\big)^{\alpha}$，式中 $b_1\geqslant0,b_2,\alpha>0,a=(a_1,\cdots,$

$a_n), p=(p_1,\cdots,p_n), a_k, p_k>0, 1\leqslant k\leqslant n$. 令 $Q_k=\sum\limits_{j=1}^{k}p_j, A_k=A_k(a,p), G_k=G_k(a,p), H_k=H_k(a,p)$. 1979 - 1980 年,王中烈先后证明:

① $$Q_nf(A_n)\leqslant Q_nf(G_n)\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_kf(a_k), \tag{3.174}$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立. 特别,当 $b_1=0, b_2=\alpha=1$ 时,又得到加权 AGH 不等式: $H_n\leqslant G_n\leqslant A_n$. 见[357]1980,6:149 - 152.

② 若 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n>0, a_1\geqslant a_2$,并令

$$g(k)=\frac{A_k^{Q_{k-1}}H_k^{Q_k}}{G_k^{Q_k}}, \varphi(k)=\frac{A_k^{Q_k}H_k^{Q_{k-1}}}{G_k^{Q_k}}.$$

则

$$\begin{aligned}&1\leqslant g(2)\leqslant g(3)\leqslant\cdots\leqslant g(n-1)\leqslant g(n);\\&1\geqslant\varphi(2)\geqslant\varphi(3)\geqslant\cdots\geqslant\varphi(n-1)\geqslant\varphi(n).\end{aligned} \tag{3.175}$$

仅当对某个适当的 $k, a_1=a_2=\cdots=a_k$ 时等号成立. 其中 $a_1\geqslant a_2$ 的假设只在证明 $g(2)\geqslant 1$ 时用到,但这不是必要条件. 见[331]1979,634 - 677:94 - 96.

③ 若 $0<a_k<1$,不妨设 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$,记 $A'_k=A_k(1-a,p); G'_k=G_k(1-a,p); F_n=Q_n\{A_n(G_n+G'_n)-G_n\}$. 则 $F_{n-1}\leqslant F_n$. 见[301]1980,73(2):501 - 505.

四、 保序线性泛函的平均

设 E 为非空集, X 是具有下述性质的实值线性泛函 $g: E\to R^1$ 的集合:

① $f,g\in X\Rightarrow c_1f+c_2g\in X, c_1,c_2\in R^1$;

② $1\in X$(即 $f(x)\equiv 1, x\in E$)$\Rightarrow f\in X$.

若 $L: X\to R^1$ 满足: $L(1)=1$,而且

① 线性: $L(c_1f+c_2g)=c_1L(f)+c_2L(g), f,g\in X, c_1,c_2\in R^1$;

② 保序性: $f\in X, f(x)\geqslant 0, x\in E\Rightarrow L(f)\geqslant 0$,

则称 L 是保序线性泛函.

设 $f(x)>0, x\in E, p$ 为实数, $f^p\in X, \log f\in X$. 则 L 的平均定义为

$$M_p(f,L)=\begin{cases}L(f^p)^{1/p}, & p\neq 0,\\ \exp\{L(\log f)\}, & p=0,\end{cases} \tag{3.176}$$

若 $f^p\log f\in X$. p,q 为实数,还可以定义 L 的双参数平均:

$$B_{p,q}(f,L)=\begin{cases}\left(\dfrac{L(f^p)}{L(f^q)}\right)^{\frac{1}{p-q}}, & p\neq q,\\ \exp\left\{\dfrac{L(f^p\log f)}{L(f^p)}\right\}, & p=q,\end{cases} \tag{3.177}$$

$M_p(f,L), B_{p,q}(f,L)$ 包括了许多著名的平均. 例如,取 $E=\{1,2,\cdots,n\}, f(k)=a_k>0, k\in E$. $L(f)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,这时 $B_{p,q}(f,L)$ 就是下述 Dresher 平均:

$$D_{p,q}(a)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}, & p\neq q,\\ \exp\left\{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p\log a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}\right\}, & p=q,\end{cases}\tag{3.178}$$

关于保序线性泛函不等式有以下基本结果:

1. **Hölder 不等式**:设 $0<\alpha<1,f,g,f^\alpha,g^{1-\alpha}\in X$,则

$$L(f^\alpha g^{1-\alpha})\leqslant\{L(f)\}^\alpha\{L(g)\}^{1-\alpha};\tag{3.179}$$

2. **Minkowski 不等式**:设 $1\leqslant p<\infty,L:X\to R^1$ 为保序线性泛函.

$|f-g|^p,|f-h|^p,|h-g|^p\in X$,则

$$L(|f-g|^p)^{1/p}\leqslant L(|f-h|^p)^{1/p}+L(|h-g|^p)^{1/p};\tag{3.180}$$

3. **Lyapunov 不等式**:设 $0<r<s<t,\ p=\frac{r}{s}(\frac{t-s}{t-r}),q=\frac{t}{s}(\frac{s-r}{t-r})$.则

$$M_s(f,L)\leqslant M_r(f,L)^pM_t(f,L)^q,$$

再由 AG 不等式,得

$$M_s(f,L)\leqslant pM_r(f,L)+qM_t(f,L).\tag{3.181}$$

4. 设 $L:X\to R^1$ 为保序线性泛函.$1\leqslant p<\infty.f,g\geqslant 0,f^p,g^p,|f-g|^p,|f-g|\in X$,并且 $|f(x)-g(x)|\leqslant L(|f-g|),x\in E$.则

$$|L(f^p)^{1/p}-L(g^p)^{1/p}|\leqslant L(|f-g|).$$

5. **Dresher 不等式**:设 $f_1,f_2:X\to R^1$ 为保序线性泛函,$g_k,\varphi_k:E\to[0,\infty)$ 满足:

$g_k^p,(\sum\limits_{k=1}^{n}g_k)^p,\varphi_k^q,(\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k)^q\in X,0<q<1\leqslant p,f_1(\varphi_k^q)>0,1\leqslant k\leqslant n$.则

$$\left\{\frac{f_1(\sum\limits_{k=1}^{n}g_k)^p}{f_2(\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k)^q}\right\}^\alpha\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f_1(g_k^p)}{f_2(\varphi_k^q)}\right)^\alpha,\tag{3.182}$$

式中 $\alpha=\dfrac{1}{p-q}$.以上见[301]1986,118(1):125-144.

6. 对任意实数 $p,q,r,s,D_{p,q}(a)\leqslant D_{r,s}(a)$ 成立的充要条件是 $\min\{p,q\}\leqslant\min\{r,s\};\max\{p,q\}\leqslant\max\{r,s\}$.

见[301]1988,131:265-270.$D_{p,q}(a)$ 由(3.178)式定义.