P.76.13 求 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左右导数。

解: $f'(0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0$

$(\Delta x\to 0+,\ \dfrac{1}{\Delta x}\to+\infty,\ e^{\frac{1}{\Delta x}}\to+\infty)$

$f'(0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

$(\Delta x\to 0-,\ \dfrac{1}{\Delta x}\to-\infty,\ e^{\frac{1}{\Delta x}}\to 0)$

P.76.14 设 $f(x)=|x-a|\cdot\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 且 $\varphi(a)\neq 0$

证明: $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

证: $f'(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{|x-a|\cdot\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a).$

$f'(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{|x-a|\cdot\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{(a-x)\cdot\varphi(x)}{x-a}=-\varphi(a).$

$f'(a+0)\neq f'(a-0)$, 从而 $f(x)$ 在 $x=a$ 不可导。

方法2. $f'(a+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{|a+\Delta x-a|\cdot\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}=\varphi(a)$

$f'(a-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{|a+\Delta x-a|\cdot\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}=-\varphi(a).$

$f'(a+0)\neq f'(a-0)$. 从而 $f(x)$ 在 $x=a$ 不可导.