# 东校区 2013 学年第一学期 13 级《高等数学一》期末考试题 A

学院 ____________ 专业 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________ 评分____________

阅卷教师签名 ____________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

解答下列各题（1-10 题每小题 8 分，11-14 题每小题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}$,其中$xy \neq 0$.

$$\xlongequal{u=xy} \lim_{u\to 0} \frac{3-\sqrt{9+u}}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{(3-\sqrt{9+u})(3+\sqrt{9+u})}{u(3+\sqrt{9+u})}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{9-9-u}{u(3+\sqrt{9+u})} = \lim_{u\to 0} \frac{-1}{3+\sqrt{9+u}}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)})$.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(x+1)\ln(x+1)+x} \xlongequal{\text{洛必达}} -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)+1+1}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

3. 计算积分$\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

$$\xlongequal[(x=-\ln t)]{t=e^{-x}} \int \frac{-\frac{1}{t}\,dt}{(1+\frac{1}{t})^2} = -\int \frac{t\,dt}{(t+1)^2} = -\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= -\left[\int \frac{1}{t+1}\,dt - \int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt\right] = -\ln|1+t| - \frac{1}{t+1} + C$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}} + C$$

或原式 $= \int \frac{1+e^x-e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+e^x}\,dx - \int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,de^x$

$$= \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx - \int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \int 1\,dx - \int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x} - \int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C$$

4. 求函数$f(x)=xe^{-2x}$的极值及该函数图形的拐点和渐近线。.

$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$

$f''(x) = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x} = e^{-2x}(4x-4)$

因 $x<\frac{1}{2}$ 时. $f'(x)>0$，$x>\frac{1}{2}$ 时. $f'(x)<0$. 故 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e}$ 为函数的极大值

因 $x<1$ 时 $f''(x)<0$，$x>1$ 时 $f''(x)>0$，故 $(1, \frac{1}{e^2})$ 为函数的拐点.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，故函数有水平渐近线 $y=0$

因 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-0\cdot x)=0$. 故斜渐近线也为 $y=0$ (水平)

5. 已知$z=f(xy^2,x^2y), f\in C^2$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cdot y^2 + f_2'\cdot 2xy = y^2 f_1' + 2xy f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = y^2(f_{11}''y^2 + f_{12}''\,2xy) + 2y f_2' + 2xy(f_{21}''y^2 + f_{22}''\,2xy)$$

$$= y^4 f_{11}'' + 2xy^3(f_{12}'' + f_{21}'') + 4x^2y^2 f_{22}'' + 2y f_2'$$

$$= y^4 f_{11}'' + 4xy^3 f_{12}'' + 4x^2y^2 f_{22}'' + 2y f_2'$$

6. 设函数$z(x,y)$由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定，求在点$(1,0,-1)$处的$dz$.

两边同时对x求偏导得 $yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$

代入点 $(1,0,-1)$，得 $0+0+\frac{1-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+1}}=0$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=1$

两边同时对y求偏导得

$$xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

代入点$(1,0,-1)$得

$$-1+0+\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{2}}=0$$，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\sqrt{2}$. 故 $dz=dx-\sqrt{2}dy$

7. 求$f(x)=\ln\dfrac{1-2x}{1+3x}$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的 $n$ 阶泰勒公式，并求 $n\geq 2$ 时的$f^{(n)}(0)$.

利用 $\ln(1+t)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k}+o(x^n)$

$$f(x)=\ln\frac{1-2x}{1+3x}=\ln(1-2x)-\ln(1+3x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(-2x)^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(3x)^k}{k}+o(x^n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-3)^k-2^k}{k}x^k+o(x^n)$$

$$=-5x+\frac{5}{2}x^2-\frac{35}{3}x^3+\cdots+\frac{(-3)^n-2^n}{n}x^n+o(x^n)$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-3)^n-2^n}{n}\cdot n!=[(-3)^n-2^n](n-1)!$$

上面是通过间接方法展开，若函数与常见的那几个泰勒公式相差比较远，那就只能用直接方法展开，即求展开系数 $f^{(k)}(x_0)$，直接展开主要针对高阶导数有规律情况，所以带拉格朗日余项的一般也只能利用直接方法展开，因为要计算 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

8. 求过直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

$\vec{s_1}=(1,0,-1)$ $\vec{s_2}=(2,1,1)$

$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=(1,-3,1)$

$M_0=(1,2,3)$

点斜式：$1\cdot(x-1)-3(y-2)+1\cdot(z-3)=0$

即 $x-3y+z+2=0$

9. 求$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3+x^2+y^2}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ 在 (0,0) 点的偏导数, 并讨论该点的可微性。

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x^2}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^3+y^2}{y^2}=1$$

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x^3-\Delta y^3-2\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,(\Delta x+\Delta y)}$$

因 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}}\dfrac{\Delta x^3-\Delta y^3-2\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,(\Delta x+\Delta y)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2(\Delta x)^2}{\sqrt{2}|\Delta x|\cdot 2\Delta x}$, 不存在

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

10. 求曲线 $L:\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=45\\ x^2+2y^2=z\end{cases}$ 在点 P(-2, 1, 6) 处的切线方程.

$$\vec{n}_1=(4x,2y,2z)\Big|_{(-2,1,6)}=(-8,2,12)$$

$$\vec{n}_2=(2x,4y,-1)\Big|_{(-2,1,6)}=(-4,4,-1)$$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=-2(25,28,12)$$

切线方程: $\dfrac{x+2}{25}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{12}$

11. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$.

方法①

令 $f(x)=(2^x+3^x+4^x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(2^x+3^x+4^x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3+4^x\ln4}{2^x+3^x+4^x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\frac{2}{4})^x\ln2+(\frac{3}{4})^x\ln3+\ln4}{(\frac{2}{4})^x+(\frac{3}{4})^x+1}}=e^{\ln4}=4$

方法②

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}4\left[(\frac{1}{2})^n+(\frac{3}{4})^n+1\right]^{\frac{1}{n}}$

$=4\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[1+(\frac{1}{2})^n+(\frac{3}{4})^n\right]^{\frac{1}{(\frac{1}{2})^n+(\frac{3}{4})^n}}\right\}^{\left[(\frac{1}{2})^n+(\frac{3}{4})^n\right]\cdot\frac{1}{n}}$

$=4\cdot e^0=4$

12. 求曲线$\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+4z^2=1\end{cases}$上的点到原点的最大距离和最小距离.

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+4z^2-1)$

$$\begin{cases}F_x=2x+\lambda+2x\mu=0 & ①\\F_y=2y+\lambda+2y\mu=0 & ②\\F_z=2z+\lambda+8z\mu=0 & ③\\F_\lambda=x+y+z=0 & ④\\F_\mu=x^2+y^2+4z^2-1=0 & ⑤\end{cases}$$

由①②③得 $x=y=\frac{-\lambda}{2(1+\mu)}$, $z=\frac{-\lambda}{2(1+4\mu)}$

或 $\lambda=0$, $\mu=-1$, $z=0$

第一组代④,⑤得

$\begin{cases}x=\sqrt{2}/6\\y=\sqrt{2}/6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}/6\\y=-\sqrt{2}/6\end{cases}$

第二组代入④,⑤得

$\begin{cases}x=\sqrt{2}/2\\y=-\sqrt{2}/2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}/2\\y=\sqrt{2}/2\end{cases}$

故得4个点 $A(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{3})$, $B(-\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{3})$, $C(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$, $D(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$

A,B到原点的距离最小，最小距离 $=\sqrt{3}/3$

C,D到原点的距离最大，最大距离 $=1$

13. 计算$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

$\arcsin x$为奇函数，故 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$

原式$=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{3}$

14. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^{\pi}f(x)dx=0,\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=0$, 证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1$和$\xi_2$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

令$F(x)=\int_0^x f(x)dx$. 则$F(0)=F(\pi)=0$，$F'(x)=f(x)$

$0=\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=\int_0^{\pi}\cos x\, dF(x)\xlongequal[\text{积分}]{\text{分部}}F(x)\cdot\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin x dx$

$=\int_0^{\pi}F(x)\sin x dx$

由积分中值定理，$\exists\xi\in(0,\pi)$，使$0=\int_0^{\pi}F(x)\sin x dx=F(\xi)\sin\xi\cdot\pi$

当$\xi\in(0,\pi)$时，$\sin\xi\neq0$，故$F(\xi)=0$

在$[0,\xi]$上，$F(0)=F(\xi)=0$，由罗尔定理，$\exists\xi_1\in(0,\xi)$，使$F'(\xi_1)=0$，即$f(\xi_1)=0$

在$[\xi,\pi]$上，$F(\xi)=F(\pi)=0$，由罗尔定理，$\exists\xi_2\in(\xi,\pi)$，使$F'(\xi_2)=0$，即$f(\xi_2)=0$