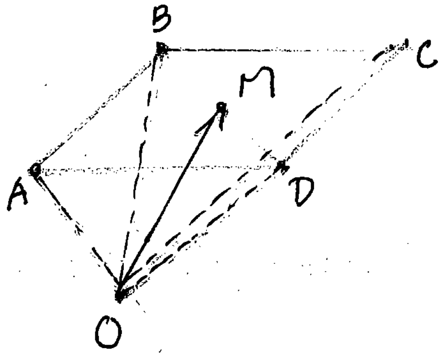
P.225.4. 设平行四边形 ABCD 对角线的交点为M，O为空间任意一点，证明：$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ 2011 21/4 —106.



证：$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DM}$，$\overrightarrow{DM}=-\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

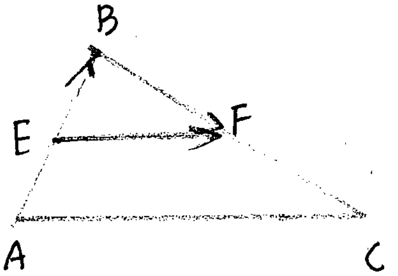
从而，$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}=0$

$$4\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

P.225.6. 利用向量证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，其长度等于第三边之半。

证：



$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}$$

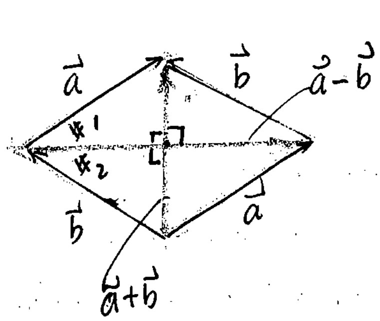
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

从而 $EF\parallel AC$，$|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$.

P.226.7 利用向量证明：

(1) 菱形的对角线互相垂直，且平分顶角。

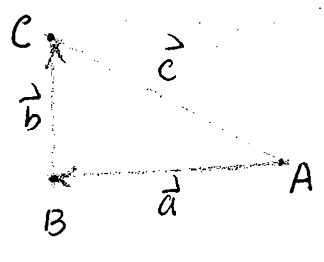


由于此菱形 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，对角线 $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$$

从而 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，并对角线互相垂直，故两个三角形可以重合，从而顶角平分。

(2) 用向量证明勾股定理。



如图：$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{b}$

则 $|\vec{c}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

$|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$，证毕。