

2015 年计算机科学与技术数学分析复习：
杨展富

水题练手：

一，极限原理：

用 $\varepsilon - N$ 或 $\varepsilon - \delta$ 语言证明如下极限：

1:

用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$

2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^2 - 3} = 2$$

*3:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + 3} = 3$$

二：极限应用：

求下列极限（给出解答过程）：

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n^2}{n+1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$

*4, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n (a, b, c > 0)$

*5, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

三，求导：

1. $y = x^3 e^x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

2. $y = x^{5x}$

3. $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1$

4. $y = \sin^3(2x) \bullet \cos(3x)$

*5,

$y = x^3 \sin(2x)$, 求 $y^{(10)}$.

四，微商：

1,

设 $y = \tan(x + y)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2,

$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 求 dy .

3,

$y = e^{-x} \cos x$, 求 d^2y .

难题突破:

2013: 极限, 导数类:

7. (10 分) 设 $f(0)=0, f'(0)$ 存在, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

求: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2013: 有理数, 无理数, 连续性类

8. (10 分) 设 f 在实轴 \mathbb{R} 上连续, $f(0) \neq 0$, 且对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 有

$f(x+y)=f(x)f(y)$. 求证: 存在常熟 C 使得

$f(x)=e^{Cx}, \forall x \in \mathbb{R}$.