一、填空题。（每空 2 分，共 14 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+p+p^2+\cdots+p^n}{1+q+q^2+\cdots+q^n}=$ $\frac{1-q}{1-p}$ （ $0<p,q<1$ ）.

2、$f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x^2)x}$ ，则 $x=0$ 为 第二类 间断点；而 $x=-1$ 为 可去 间断点。

3、已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=$ -2 。

4、若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$ 2 ，$b=$ -1 .

5、当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$ 1 。 3

二、单项选择题 （每小题 2 分 ，共 8 分）

二、单项选择题 （每小题 2 分 ，共 8 分）

1、若 $f(x)$ 可导，$y=f(x)f(x^2)$， 则导数 $y'=$ D 。

A、$2xf'(x)f(x^2)$；

B、$f'(x)f'(x^2)$

C、$f'(x)+f'(x^2)$；

D、$f'(x)f(x^2)+2xf(x)f'(x^2)$ 。

2、下列叙述错误的是 C 。

A、$f(x)$ 在 x_0 可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

B、$f(x)$ 在 x_0 连续，则 $f(x)$ 在 x_0 有意义；

C、若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 有意义；

D、若 $f(x)$ 在 x_0 连续， 则存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 使 $f(x)$ 在其上有界。

3、若 $f'(x_0)=1$，则下列值不为 1 的是___A___。

A、 $(f(x_0))'$；　　B、曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线斜率；

C、 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(x_0+1/n)-f(x_0))$ ；　　D、 $f'_+(x_0)$。

4、 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ x^2, & x\le 0\end{cases}$，则 $f'(x)=$___B___。

A、 $\begin{cases}1, & x>0\\ 2x, & x\le 0\end{cases}$ ；　B、 $\begin{cases}1, & x>0\\ 2x, & x<0\end{cases}$ ，且在 0 点不可导；　C、 1；　D、 $2x$。

二、解答下列各题。（每小题 9 分）

1. 求积分 $\int \arctan\sqrt{x}dx$.

$\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

解： $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

$=\int \arctan t\, dt^2$

A、 $\begin{cases}1, & x>0\\ 2x, & x\le 0\end{cases}$ ；　B、 $\begin{cases}1, & x>0\\ 2x, & x<0\end{cases}$ ，且在 0 点不可导；　C、 1；　D、 $2x$。

二、解答下列各题。（每小题 9 分）

1. 求积分 $\int \arctan\sqrt{x}dx$.

$\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

解： $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

$=\int \arctan t\, dt^2$

设 $\sqrt{x}=t$ ∴ $x=t^2$

$\cancel{\int \arctan\sqrt{x}\,dx}$

$\cancel{=\int \arctan t\, dt^2}$

$\cancel{= \frac{\quad}{1+t}}$

$=t^2\arctan t-\int t^2 d\arctan t$

$=t^2\arctan t-\int \frac{t^2}{1+t^2}dt$

$=t^2\arctan t-\int (1-\frac{1}{1+t^2})dt$

$=t^2\arctan t-t+\arctan t+C$

$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$

2. 若 $e^{xy}+x+y=0$ 中 y 看作 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

$+\arctan x+C$

2. 若 $e^{xy}+x+y=0$ 中 y 看作 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：两边同时求导可得：

$$e^{xy}\cdot(xy)'+1+y'=0$$

$$e^{xy}(x'y+xy')+1+y'=0$$

$$y'(x\cdot e^{xy}+1)=-x'y\cdot e^{xy}-1$$

$$y'=\frac{-x'y\cdot e^{xy}-1}{x\cdot e^{xy}+1}=\frac{-y\cdot e^{xy}-1}{x\cdot e^{xy}+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y'=\frac{-y\cdot e^{xy}-1}{x\cdot e^{xy}+1}$$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{3x-1}\right)^{x+1}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{3x-1}\right)^{x+1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)^{3x-1\cdot\frac{x+1}{3x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)^{3x-1}\right]^{\frac{x+1}{3x-1}}$$

$$=e^{\frac{1}{3}}$$

题。

$1+$

$1+$

$=\frac{}{(1}$

$'(x_0$

$= e^{\frac{1}{3}}$

4. 求积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x+2x^2+3}{x^2(x^2+1)}dx$.

解：$\cancel{\int_{-1}^{1}\frac{\sin x+2x^2+3}{x^2(x^2+1)}dx}$

$\cancel{=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\sin x\,dx}$

$\cancel{=\int_{-1}^{1}}$

再解 设 $g(x)=\frac{\sin x}{\cancel{x^2}(x^2+1)}$

$g(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cancel{x^2}(x^2+1)}=-g(x)$

即 $g(x)$ 为奇函数 $\therefore \int_{-1}^{1}g(x)dx=0$

$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{\sin x+2x^2+3}{\cancel{x^2}(x^2+1)}dx$

$=\int_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{\cancel{x^2}(x^2+1)}+2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\cancel{x^2}}+\int_{-1}^{1}\left(\cancel{\frac{3}{x^2}}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\cancel{0+\left[3\cdot(-1)x^{-1}\right]\Big|_{-1}^{1}+\left(-x^{-1}\right)\Big|_{-1}^{1}-\arctan x}$

$=\cancel{-3-2-\frac{\pi}{2}}\ 0+2x\Big|_{-1}^{1}+\arctan x\Big|_{-1}^{1}$

$=\cancel{-6-\frac{\pi}{2}}\ 4+\frac{\pi}{2}$

5. 求积分 $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

在 x_0 可导

在 x_0 连续

$f(x)$ 存在

在 x_0 连

5. 求积分 $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

解：$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

$=\int\frac{e^x dx}{(e^x)^2+1}$

$=\int\frac{de^x}{(e^x)^2+1}$

$=\arctan(e^x)+C$

6. 求积分$\int_0^9 \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}du$.

解: $\cancel{\int_0^9}$

设 $\sqrt{u}=x$

$\because$ $u=9$时 $x=3$

$u=0$时 $x=0$

$\therefore \int_0^9 \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}du$

$=\int_0^3 \frac{x\,dx^2}{1+x}$

$=\int_0^3 \left[2(x+1)-4+\frac{2}{x+1}\right]dx$

$\cancel{=2(x+1)|_0^3}$

$=\int_0^3 \left(2x-2+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$=x^2|_0^3-2x|_0^3+(2\ln|x+1|)|_0^3$

$=9-6+\cancel{2\ln 4}\ 2\ln 4$

$=3+\cancel{2\ln 2}\ 4\ln 2$

$-1\left(\cancel{\cdots}+\frac{1}{x+1}\right)dx$

7. 求星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 的周长。

7. 求星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 的周长。

$\arctan x$

$\tan x|_{-1}$

解: $\because x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $\therefore \cancel{\frac{dx}{dt}=3a\cos^2 t\sin^2 t}$

$\therefore S=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$

$=\int_0^{2\pi} a\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$

$=\int_0^{2\pi} 3a|\cos t\sin t|\,dt$

$=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt$

$=4\cdot\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$

$=-3a\cdot\cos 2t|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-3a(-1-1)$

$=6a$

8.设$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\\ 0, & x=0.\end{cases}$,求$f'(0)$, $f''(0)$。

解: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^4\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x})$

$=0$ 又 $f(0)=0$

$\therefore f'(0)=0$

~~$x\neq0$时~~ $f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}+x^4\cos\frac{1}{x}\cdot(-1)\frac{1}{x^2}$

$=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}$

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x}-\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x})-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x}$

$=0$

又 $f'(0)=0$

$\therefore f'(x)$ 在0处可导, 且 $f''(0)=0$

三、(6分) 设$F(x)\in C[a,b]$,且$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x$ [illegible]

三、(6分) 设$F(x)\in C[a,b]$,且$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$,其中$f(x)>0$,试证$F'(x)\geq 2$,

且$F(x)$在(a,b)上有一个实根.

证明: $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ ~~$\geq 2 f(x)+\frac{1}{f(x)}$~~

$\because x\in[a,b]$时, $f(x)>0$. $\therefore F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2$

$\because F(x)$ 在$[a,b]$上连续.

且 $F(a)=\int_a^a f(t)dt+\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_b^b\frac{1}{f(t)}dt=\int_a^b f(t)dt$

$\because f(x)>0\quad \therefore \frac{1}{f(x)}>0$

当 $a>b$时 $F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt>0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt=-\int_b^a f(t)dt<0$

$\therefore$ 由介值定理得: 一定存在 ~~[illegible]~~ $\xi\in(a,b)$, 使 $F(\xi)=0$