4.

6．设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，证明存在$\eta\in(a,b)$，使得下式成立 C-4

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)\text{。}$$

令$g(x)=f(x)-f(x-\dfrac{b-a}{2})$,则$g(x)$在$[\dfrac{a+b}{2},b]$可导,

$g(b)=f(b)-f(\dfrac{a+b}{2}),g(\dfrac{a+b}{2})=f(\dfrac{a+b}{2})-f(a).$

由微分中值定理　$g(b)-g(\dfrac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\dfrac{b-a}{2},\xi\in(\dfrac{b+a}{2},b)$

即$f(b)+f(a)-2f(\dfrac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\dfrac{b-a}{2}\quad,\xi\in(\dfrac{b+a}{2},b)$　　(1)

$g'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi-\dfrac{b-a}{2}),$

又因为$f'(x)$在$[\xi-\dfrac{b-a}{2},\xi]$可导，由微分中值定理可得

$f'(\xi)-f'(\xi-\dfrac{b-a}{2})=f''(\eta)\cdot\dfrac{b-a}{2},\eta\in(a,b)$　　(2)

综合（1），（2)式可得

$f(b)+f(a)-2f(\dfrac{a+b}{2})=f''(\eta)(\dfrac{b-a}{2})^2\quad,\eta\in(a,b).$