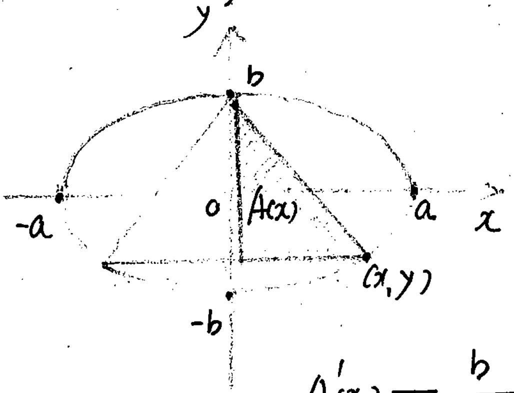
中山大學 本科生考试草稿纸 2011/5/20 —99.

P.207-11. 试求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，且底边平行于 x 轴的最大等腰三角形的面积。



解： $A(x)=\frac{1}{2}|x|\cdot(|y|+b)$

$$=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}+b\right)$$

$$=\frac{b}{2a}x\left(\sqrt{a^2-x^2}+a\right)$$

$$A'(x)=\frac{b}{2a}\left[\sqrt{a^2-x^2}+a+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right]$$

$$=\frac{b}{2a}\left[\sqrt{a^2-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+a\right]$$

$$=\frac{b}{2a}\cdot\frac{a^2-x^2-x^2+a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{2a}\cdot\frac{a^2-2x^2+a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

令 $A'(x)=0$，则 $a\cdot\sqrt{a^2-x^2}=a^2-2x^2$

$$a^2(a^2-x^2)=a^4-4a^2x^2+4x^4$$

$$4x^4=3a^2x^2$$

$$x^2=\frac{3a^2}{4},\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$|y|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{3}{4}a^2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{2}=\frac{b}{2}.$$

$$A_{最大}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}a}{2}\times\left(b+\frac{b}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}ab}{4}.$$