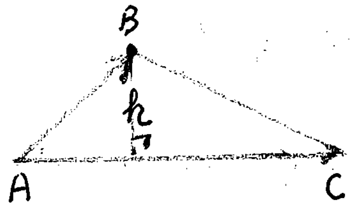
中山大學 本科生考试草稿纸 2011 21/7—107.

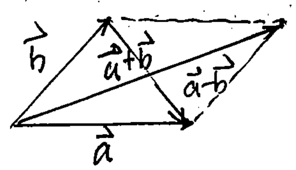
P.225.9. 用向量 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 表示△ABC的面积.



$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AC}|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot|\vec{AC}|\cdot|\vec{AB}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{AC}\times\vec{AB}|.$$

P.225.10. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为任意两个向量, 证明: $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$

证: $$(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=2\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$



几何意义: 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为边的平行四边形,

其对角线的平方和=边长平方和的2倍.

P.225.11. 对任意向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 证明: $(\vec{a}\times\vec{b})^2\le\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$. 并问等号成立的充要条件是什么?

证: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

$(\vec{a}\times\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2(\vec{a},\vec{b})\le|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$

等号成立的充要条件是 $\vec{a}\perp\vec{b}$。