数字图像处理 第四次作业

16337341 朱志儒

4.31

对 $H(u)=e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$ 有 $h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(u)]=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\cdot e^{j2\pi ut}du$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[u^2-j\cdot 4\pi\sigma^2 ut]}du$$

$$=e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[u^2-j\cdot 4\pi\sigma^2 ut-(2\pi)^2\cdot\sigma^4 t^2]}du$$

$$=e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[u-j2\pi\sigma^2 t]^2}du$$

令 $r=u-j2\pi\sigma^2 t$ 则 $dr=du$

$$h(t)=e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2}dr$$

$$=\sqrt{2\pi}\sigma\cdot e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2t^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr\right]$$

$$=\sqrt{2\pi}\sigma\cdot e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2t^2}{2}}=\sqrt{2\pi}\sigma\cdot e^{-2\pi^2\sigma^2t^2}$$

则 $h(t,z)=\mathcal{F}^{-1}[Ae^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}]=A2\pi\sigma^2\cdot e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)}$

令 $\sigma^2=\frac{1}{2}$ 则 $h(t,z)=\mathcal{F}^{-1}[e^{-(u^2+v^2)}]=\pi e^{-2\pi^2(t^2+z^2)}$

4.38

（a）实际中，经过有限次滤波后，图像不再发生变化。100 次迭代的图片和 200 次迭代的图片几乎没有差别，如图所示。

迭代 100 次的图

迭代 200 次的图

（b）K 次高斯高通滤波函数：

$$H_k(u,v) = 1 - e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2}$$

滤波 K 次后，图像不变，K 将满足：

$$e^{-\frac{KD^2(u,v)}{2D_0^2}} < 0.5c_{min}$$

即

$$\mathrm{K} > -\frac{\ln(0.5c_{min})}{\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}} > -\frac{2D_0^2\ln(0.5c_{min})}{D^2(u,v)}$$

不考虑原点，u 和 v 均为离散数据，所以 D(u, v) >= 1，所以

$$\mathrm{K} > -2D_0^2\ln(0.5c_{min})$$