组合数学
第二章 鸽巢原理

主要内容

- 1. 鸽巢原理及其应用
- 2. 中国剩余定理
- 3. 加强形式的鸽巢原理
- 4. Ramsey定理

鸽巢原理

定理: 若有n个鸽巢, n+1只鸽子,

则至少有一个鸽巢里至少有两只鸽子.

注意这里的任意性.

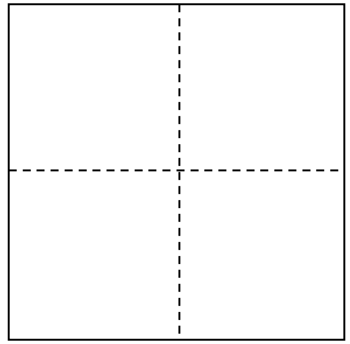
例1. 一年365天, 今有366个人,

则其中至少有两个人生日相同.

例2. 抽屉里有10双手套, 从中取11只出来,

其中至少有两只是完整配对的.

应用举例



例. 在边长为1的正方形内任取5点,则其中至少有2点的距离不超过$\sqrt{2}/2$

故事：**Halloween treats**

例. 设$a_1,a_2,\ldots,a_m$是正整数序列, 则至少存在整数k和l, $0 \le k < l \le m$, 使得$m|(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l)$.

令$r_k=a_1+a_2+\ldots+a_k \bmod m$, $k=1,2,\ldots,m$, 则

(a) 若有$r_h=0$, 即$m|(a_1+a_2+\ldots+a_h)$;

(b) 否则, $r_1,r_2,\ldots,r_m$取值为$\{1,2,\ldots,m-1\}$, 所以存在$k<l$使得$r_k=r_l$， 即$m|(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l)$.

m个和与m-1个余数，必存在两个数除以m有相同的余数

应用:国际象棋大师

一位国际象棋大师有11周的时间备战比赛,

他决定每天至少下1盘棋,但每周不超过12盘.

则存在连续若干天,他恰好下了21盘棋.

证明: 令a_i为到第i天下的总盘数, $(a_i+21=a_j?)$

$$1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{77} \le 11\times 12=132,$$

$$22 \le a_1+21 < a_2+21 < \ldots < a_{77}+21 \le 132+21=153$$

总共有153种取值, 却有154个数

所以存在i<j使得

$$a_i+21=a_j\,.$$

中国剩余定理(简单形式)

令m,n互素, $0 \le a \le m-1$, $0 \le b \le n-1$, 则方程组

$$x \equiv a \bmod m$$
$$x \equiv b \bmod n$$

在[0,mn)内有唯一解.

证明: 下面的n个数(模m都是a)

$$a,\ m+a,\ 2m+a,\ \ldots,\ (n-1)m+a,$$

模n的余数两两不同.

中国剩余定理(完全形式)

令$m_1,\ldots,m_r$两两互素, $a_1,\ldots,a_r$为整数,
则同余方程组

$$x \equiv a_i \bmod m_i,\ i=1,\ldots,r$$

模$M(=m_1 m_2 \ldots m_r)$有唯一解

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i M_i y_i \bmod M$$

其中$M_i = M/m_i$, $y_i M_i \equiv 1 \bmod m_i$.

例: (3,5,7)--(35,2), (21, 1), (15, 1)

$$x = 70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \bmod 105$$

射雕英雄传中的问题

黄蓉给瑛姑出题:
今有物不知其数,
三三数之剩二,
五五数之剩三,
七七数之剩二,
问物几何.

答案:
三人同行七十稀,
五树梅花廿一支,
七子团圆正半月,
除百零五便得知.

同余方程组

$$x \equiv a_1 \bmod 3, x \equiv a_2 \bmod 5, x \equiv a_3 \bmod 7$$

的解是

$$x = 70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \bmod 105$$

韩信点兵, 孙子算经, 数书九章(秦九韶)

补充: 不互素的情况

定理:设m,n是正整数, $0 \le a < m$, $0 \le b < n$, 则方程组

m,n不互素

$$x \equiv a \bmod m, \quad x \equiv b \bmod n \qquad (*)$$

有解当且仅当gcd(m,n)|(b-a).

令d=gcd(m,n), M=lcm(m,n).

若d|(b-a), 则(*)在[0,M)内有唯一解:

$$x \equiv a + c\, m\, [(b-a)/d] \bmod M.$$

参考多元一次同余方程组的解法.

加强形式

条件	鸽巢n个, 鸽子$m_1+m_2+\ldots+m_n-n+1$只, 其中 $m_1,m_2,\ldots,m_n$, n都是正整数,
结论	鸽巢1鸽子数 $\geq m_1$, 或,鸽巢2鸽子数 $\geq m_2$, … … 或,鸽巢n鸽子数 $\geq m_n$, 至少有一个成立.

证明:否则, 总鸽子数$\leq(m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_n-1)$

与总鸽子数为$m_1+m_2+\ldots+m_n-n+1$矛盾.

颜色重合扇形数目

大小两圆盘, 划分成200个恒等扇形.

大盘任选100个扇形涂红色, 其余涂蓝色.

小盘的200个扇形任选涂红或蓝色.

求证能大小盘对齐使得100个以上扇形同色.

- 固定大盘, 小盘转动, 有200种对齐方式.
- 小盘的每个扇形有200个对齐位置.
- 小盘的每个扇形有100个位置发生颜色重合.
- 所有对齐位置颜色重合总次数?
- 若小盘的每种对齐方式颜色重合数 ≤ 99?

Erdös-Szekeres定理

定理: 在由n^2+1个实数构成的序列中, 必然含有长为$n+1$的单调(增或减)子序列.

证明:设序列为 a_1, a_2, … , a_{n^2+1},

令m_k是从a_k开始的最长单调增子序列的长度.

若没有长于$n+1$的单增序列,则$m_1,\ldots,m_{n^2+1} \in [1,n]$

由加强鸽巢原理, 存在$k_1<k_2<\ldots<k_{n+1}$使得

n个笼子，n^2+1个鸽子，每个笼子放n个鸽子，必然有一个笼子有n+1个鸽子

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}}$$

若$a_{k_1} \le a_{k_2}$则必有$m_{k_1} > m_{k_2}$,于是:

$$a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_{n+1}}$$

a_k	5	4	6	3	4	2	3	1	9	2
m_k	3	3	2	3	2	3	2	2	1	1

Ramsey问题

命题: 6人中或者至少存在3人互相认识,

或者至少存在3人互相不认识.

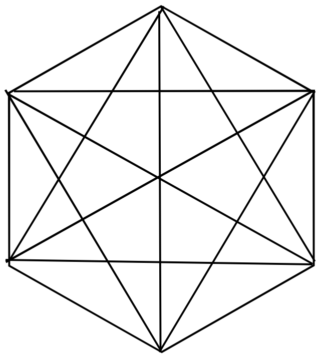
特点: 对所有具体互相认识情况(2^{15})都成立.

该Ramsey问题等价于:

六个顶点的完全图的边, 用红,蓝二色任意着色,

相互认识　相互不认识

则至少存在一红色边三角形, 或一蓝色边三角形.

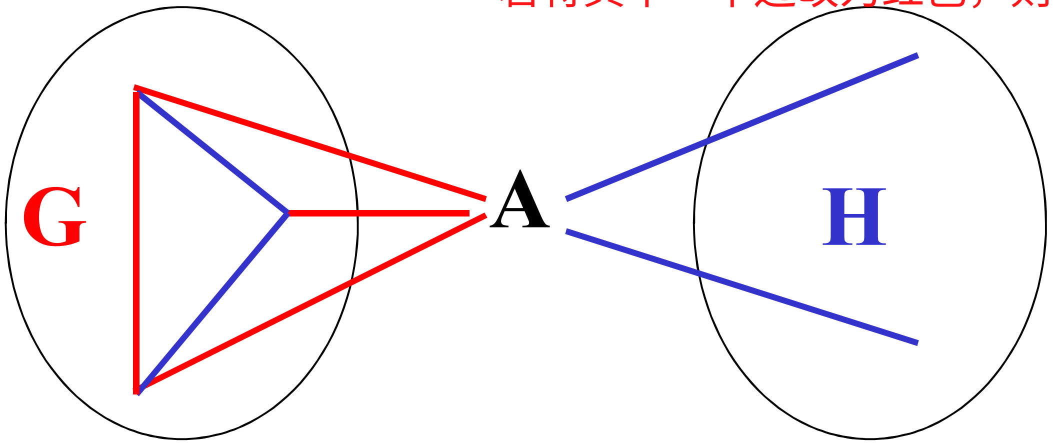


完全图, C(6,2)条边

图示证明

从6人任取一人A.

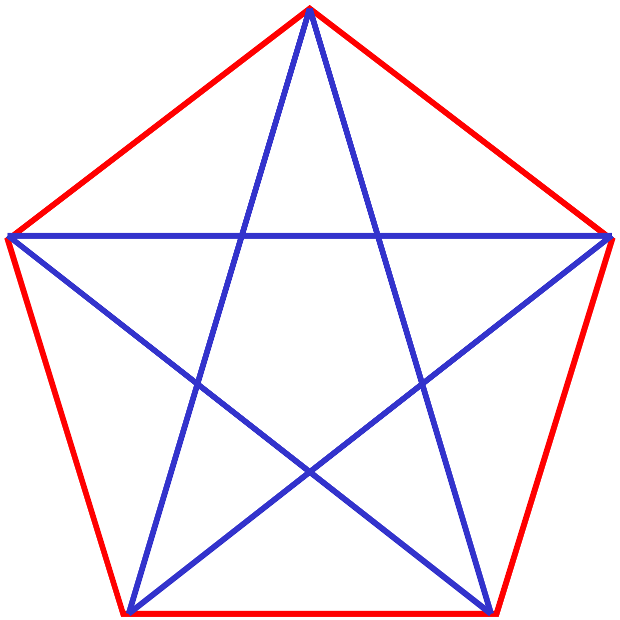
必然是三个认识或是三个不认识的
假设三个认识，将端点用蓝边连接，则存在一个蓝色三角形，
若将其中一个边改为红色，则存在一个红色三角形。



和A互相认识的人的集合G

和A互不认识的人的集合H

5个人的反例



$$K_6 \to K_3, K_3, \quad \neg(K_5 \to K_3, K_3)$$

Ramsey数与Ramsey定理

Ramsey数r(a,b)定义为:

r(a,b) = min{ n | n个人中必有 a个互相认识,
或者b个互相不认识}

$$= \min\{ n \mid K_n \to K_a, K_b \}$$

例如: r(3,3)=6, r(3,4)=9, r(4,4)=18.

Ramsey定理: $\forall a,b \geq 2, \exists p\ K_p \to K_a, K_b$.

即 $r(a,b) < \infty$

Ramsey定理的证明

$r(a,b)=r(b,a)$, $r(a,2)=r(2,a)=a$

性质: 当$a,b\geq 2$时, $r(a,b)\leq r(a-1,b)+r(a,b-1)$.

在$r(a-1,b)+r(a,b-1)$个人中任选一人A,

其他人分成两个集合Know, Unknow.

$|Know|+|Unknow|= r(a-1,b) + r(a,b-1) - 1$

$\Rightarrow |Know|\geq r(a-1,b)$ 或者 $|Unknow|\geq r(a,b-1)$

$K_{r(a-1,b)}\to K_{a-1}, K_b \Rightarrow A\cup Know$有$K_a$或$K_b$.

Ramsey数表

b \ a	3	4	5
3	6	9	14
4	9	18	25
5	14	25	[43,49]
6	18	[35,41]	
7	23	[49,61]	
8	28	[55,84]	
9	36	[69,115]	
10	[40,43]		

Ramsey定理的推广

Ramsey定理: $\forall n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 2$,

$\exists p\ K_p \rightarrow K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_k}$.

例: $K_{17} \rightarrow K_3, K_3, K_3$.

证明:若$n>1$, $t=[(\log_2 n)/2]$, 则$r(t,t) \leq n$.