东校区 2010 学年度第一学期《高等数学一》期中考试题

专业__________学号__________姓名 没脸见人啊… 评分 85

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一. 完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1，用 $\varepsilon-\delta$ 法证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$，其中 $a>0$.

$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ 当 $|x-a|<\delta$

$|x-a|=|\sqrt{x}+\sqrt{a}||\sqrt{x}-\sqrt{a}|$

$|\sqrt{x}+\sqrt{a}|=|\sqrt{x}-\sqrt{a}+2\sqrt{a}|\le|\sqrt{x}-\sqrt{a}|+|2\sqrt{a}|$

$\therefore\ |\sqrt{x}-\sqrt{a}|^2+2\sqrt{a}\,|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon^2+2\sqrt{a}\,\varepsilon$

$\therefore\ \delta=\varepsilon^2+2\sqrt{a}\,\varepsilon$

当 $|x-a|<\delta$ 时 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$。

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$。

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x-1}{2+x}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2+x}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2}\div\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)^2$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{e}\div 1\right)$

$=\dfrac{1}{e}$

优

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$，其中 $a_i>0$，$i=1,2,\cdots,m$

不妨设 $a_1, a_2, \cdots a_m$ 中最大数为 a_i，最小数为 a_j

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m a_j^n} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m a_i^n}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m a_i^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m a_j^n} = \sqrt[n]{m} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_i^n} = \sqrt[n]{m}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} = \sqrt[n]{m}$$

5. 已知 $y=x^{\cos x}$，求 y'。

$$y = x^{\cos x}$$

$$\ln y = \cos x \ln x$$

两边同时对x求导

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}$$

$$y' = -\sin x \ln x \cdot x^{\cos x} + \frac{\cos x}{x}\cdot x^{\cos x}$$

6. 已知 $y=\sqrt[3]{1-\sin(2x^2)}$，求 y'。

$$y' = \frac{1}{3}\left[1-\sin(2x^2)\right]^{-\frac{2}{3}}\cdot\left[-\cos(2x^2)\right]\cdot(2\cdot 2x)$$

$$= -\frac{4}{3}x\left[1-\sin(2x^2)\right]^{-\frac{2}{3}}\cdot\cos(2x^2)$$

7. 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的函数 y 关于 x 的导数。

$$d(xy)-d(e^x)+d(e^y)=0$$

$$y\,dx+x\,dy-e^x dx+e^y dy=0$$

$$(e^x-y)\,dx=(x+e^y)\,dy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{x+e^y}$$

-2

8. 求由参数方程 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t); \\ y=a(\sin t-t\cos t); \end{cases}$ 所确定的函数 y 关于 x 的导数。

$$dx=-a\sin t\,dt+a\cos t\,dt+\cdots$$

$$dy=a\cos t\,dt+a\sin t\,dt+\cdots$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}$$

-4

9. 求 $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$。

令 $x=a\sin t$

$dx=a\cos t\,dt$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\frac{a\cos t\,dt}{a^2\cos^2 t}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{1}{a}\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int\left(\frac{\sin^2 t}{\cos t}+\cos t\right)dt$$

$$=\frac{\sin t}{a}+\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt+C$$

10. 求 $\int_{-1}^{1}\left(|x|+x^5\tan^2 x\right)dx$,

$= \int_{-1}^{1}|x|\,dx + \int_{-1}^{1} x^5\tan^2 x\,dx$

$= 2\int_{0}^{1} x\,dx + 0$

$= 2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1$

$= 1$

二. 完成下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 求 $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

令 $\sqrt{x}=t$

$x=t^2$

$dx=2t\,dt$

$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$=\int\frac{\sin t}{t}2t\,dt$

$= 2\int\sin t\,dt = -2\cos t+C = -2\cos\sqrt{x}+C$

2. 求 $\int x\arctan x\,dx.$

$=\int\frac{1}{2}\cdot 2x\arctan x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int\arctan x\,dx^2$

$=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int x^2\,d\arctan x\right)$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{arccot}x+C$

求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin x}$.

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=2+\left(-\frac{1}{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=2$$

4. 证明 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x} & x\neq 0; \\ 0 & x=0; \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导。

$$\lim_{x\to 0+0} x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0+0}x\cdot\lim_{x\to 0+0}\arctan\frac{1}{x}=0\cdot\lim_{x\to 0+0}\arctan\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0-0} x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0-0}x\cdot\lim_{x\to 0-0}\arctan\frac{1}{x}=0\cdot\lim_{x\to 0-0}\arctan\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+0} x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0-0}x\arctan\frac{1}{x}=f(0)$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0+0}\arctan\frac{1}{x}>0$$

$$\lim_{x\to 0-0}\arctan\frac{1}{x}<0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

5. 求由曲线 $y=x^2$ 及 $y=x$ 围成的平面图形的面积.

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$ 交点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$

$$S=\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$
$$=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{6}$$

-4

6. 证明另一种形式的积分中值定理：

若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，

则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。

∵ $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

∴ 存在 ξ_1,ξ_2 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi_1)(b-a)$　$\int_a^b g(x)dx=g(\xi_2)(b-a)$

记 $F(x)=f(x)g(x)$ 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

存在 ξ_3 使 $\int_a^b F(x)dx=F(\xi_3)(b-a)=f(\xi_3)g(\xi_3)(b-a)$

∵ $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号

~~则~~ $\xi_2=\xi_3$

∴ $f(\xi_3)g(\xi_3)(b-a)=f(\xi_3)\int_a^b g(x)dx$

∴ 至少存在一点 ξ 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.