§2.2 集合的运算

一．集合的运算

１． 集合Ａ与Ｂ的并：Ａ ∪ Ｂ(union)

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

*文氏图见书 P127,图 1.

例 1：设 A={1,3,5}, B={1,2,3}, 那么$A \cup B$={1,2,3,5}.

2. 集合Ａ与Ｂ的交：Ａ ∩ Ｂ(intersection)

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

*文氏图见书 P127,图 2.

例 3：设 A={1,3,5}, B={1,2,3}, 那么$A \cap B$={1,3}.

*两个集合 A 和 B 称为是不相交的(disjoint)是说：$A \cap B = \emptyset$.

例 5：设 A={1,3,5,7,9}, B={2,4,6,8,10}, 那么$A \cap B = \emptyset$。

*容斥原理(principle of inclusion and exclusion)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

*用文氏图说明。

3. 集合 A 与 B 的差：$A - B$(difference of Aand B)

$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

*文氏图见书 P129,图 3.

例 6：设 A={1,3,5}, B={1,2,3}, 那么$A - B$={5}，$B - A = \{2\}$.

4. 集合 A 的补：$\overline{A}$ (complement).

设 U 是全集，那么$\overline{A}$=$U - A$.

$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$.

例 8：假设全集 U 包含且仅包含英文字母表中的 26 个字母，A 是所有元音字母的集合，即 A={a,e,i,o,u}，那么 $\overline{A}$={b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z}.

例 9：假设 U 是所有正整数的集合，A 是所有大于 10 的整数的集合，那么 $\overline{A}$={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

二．集合的恒等式

*回忆：两个集合相等当且仅当这两个集合的所有元素相同。

*集合运算有以下定律：

1. $A \cup \emptyset = A$ 同一律

   $A \cap U = A$ (Identity laws)

2. $A \cup U = U$ 零律

   $A \cap \emptyset = \emptyset$ (Domination laws)

3. $A \cup A = A$ 幂等律

   $A \cap A = A$ (Idempotent laws)

4. $\overline{(\overline{A})}$ = A 双重否定律(Complementation law)

5. $A \cup B = B \cup A$ 交换律

   $A \cap B = B \cap A$ (Commutative laws)

6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 结合律

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Associative laws)

7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 分配律

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributive laws)

8. $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$ 德·摩根律

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morgan’s laws)

9. $A \cup (A \cap B) = A$ 吸收律

$A \cap (A \cup B) = A$ (Absorption laws)

10. $A \cup \overline{A} = U$ 排中律(Complement laws)

11. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ 矛盾律(Complement laws)

*下面我们举几个例子，证明几个集合恒等式。

例 10：证明：$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

证：要证明$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，就要证$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$以及$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

1. 首先证：$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$。假设$x \in \overline{A \cap B}$, 由补集的定义，有$x \notin A \cap B$, 由交的定义，有$\neg(x \in A \wedge x \in B)$为真，由逻辑中的德·摩根律，有$\neg(x \in A)$或$\neg(x \in B)$, 即$x \notin A$或$x \notin B$，由补集的定义，有$x \in \overline{A}$或$x \in \overline{B}$, 再由集合并的定义，$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$。

所以，$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$。

再证：$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$。假设$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, 由集合并的定义，$x \in \overline{A}$或$x \in \overline{B}$。再由补集的定义，有$x \notin A$或$x \notin B$，即$\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$，再由逻辑中的德·摩根律，有$\neg(x \in A \wedge x \in B)$，由集合交的定义，有$\neg(x \in A \cap B)$,再由集合补的定义，有$x \in \overline{A \cap B}$。所以$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$。

从而有$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

例 11：我们可以用逻辑等值式直接证明：$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

证明：对任意元素 x,

$x \in \overline{A \cap B}$

$\Leftrightarrow x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \neg(x \in A \land x \in B)$

$\Leftrightarrow \neg(x \in A) \lor \neg(x \in B)$

$\Leftrightarrow x \notin A \lor x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \lor x \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

所以$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

例 12：证明分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

解：我们将证等式两边互相包含。

先证：$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。假设$x \in A \cap (B \cup C)$。由交的定义，$x \in A$且$x \in B \cup C$, 再由并的定义，$x \in A$且，$x \in B$或$x \in C$,由逻辑中“与”对“或”的分配律，有$x \in A$且$x \in B$, 或$x \in A$ 且 $x \in C$, 再由集合交的定义，有$x \in A \cap B$或$x \in A \cap C$, 再由集合并的定义，有$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。所以有$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

再证：$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。假设$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。由集合并的定义，有$x \in A \cap B$或$x \in A \cap C$，再由集合交的定义，有$x \in A$且$x \in B$, 或$x \in A$ 且 $x \in C$, 由逻辑中“与”对“或”的分配律（反过来用），$x \in A$且，$x \in B$或$x \in C$，由

集合并的定义，有$x \in A$且$x \in B \cup C$，再由集合交的定义，有$x \in A \cap (B \cup C)$。故$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。

从而有$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

三．集合等式（包含式）的证明

例 14：设 A, B, C 是集合，证明：$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

证明：

$\overline{A \cup (B \cap C)}$

$=\bar{A} \cap \overline{(B \cap C)}$　　　德·摩根律

$=\bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$　　　德·摩根律

$=(\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$　　　交换律

例子:　证明：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证:对任意 x,

$x\in A-(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\in(A-C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

所以 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

例子：证明：　$A\cap U=A$

证明:对任意 $x\in A\cap U$,有 $x\in A$ 且 $x\in U$,故有 $x\in A$,从而 $A\cap U\subseteq A$.

对任意 $x\in A$,由于 $A\subseteq U$,故有 $x\in U$,也就有 $x\in A\wedge x\in U$,故 $A\subseteq A\cap U$.从而 $A\cap U=A$.

*以上证明的基本思想是:设 P,Q 为集合公式,欲证 P=Q,可证 $P\subseteq Q$ 且 $Q\subseteq P$ 为真.也就是要证,对任意的 x,有

$x\in P\Rightarrow x\in Q$ 和 $x\in Q\Rightarrow x\in P$ 成立.

对于某些恒等式可以将这两个方向的推理合到一起,就是

$$x\in P\Leftrightarrow x\in Q\ .$$

*证明集合恒等式的另一种方法是利用已知的恒等式来代入.

例子: 已知集合恒等式(1)-(8),证明:$A\cup(A\cap B)=A$。

证明: $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$　　同一律

$=A\cap(U\cup B)$　　分配律

$=A\cap(B\cup U)$　　交换律

$=A\cap U$　　零律

$=A$　　同一律

*定义:$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$(称为 A 与 B 的对称差)(symmetric difference of A and B)。

*一些常用的集合运算性质:

(1) $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$

(2) $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$

(3) $A-B\subseteq A$

(4) $A-B=A\cap\overline{B}$

(5) $(A\cup B)=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\Phi$

(6) $A\oplus B=B\oplus A$

(7) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(8) $A\oplus\Phi=A$

(9) $A\oplus A=\Phi$

(10) $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

例子: $A-B=A\cap\overline{B}$

证明:对任意 x,

$x\in A-B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in U\wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\overline{B}$

$\Leftrightarrow x\in A\cap\overline{B}$.

例子: 证明: $(A-B)\cup B = A\cup B$。

证明: $(A-B)\cup B = (A\cap\overline{B})\cup B$

$= (A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)$

$= (A\cup B)\cap U$

$= A\cup B$.

例子:证明: $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\Phi$ 。

证明:先证 $A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$.

对任意 x,

$x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in B$(因为 $A\cup B=B$), 所以

$A\subseteq B$.

再证: $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$.

显然有 $A\cap B\subseteq A$，下面证 $A\subseteq A\cap B$.

对任意 x,

$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in B$(因为 $A\subseteq B$) $\Rightarrow x\in A\cap B$.

从而有 $A\subseteq A\cap B$, 故 $A\cap B=A$.

然后证 $A\cap B=A\Rightarrow A-B=\phi$.

$A-B=A\cap\overline{B}$

$=(A\cap B)\cap\overline{B}$ (因为 $A\cap B=A$)

$=A\cap(B\cap\overline{B})$

$=A\cap\phi$

$=\phi$.

最后证 $A-B=\phi\Rightarrow A\cup B=B$

由上例及 $A-B=\phi$, 有

$A\cup B=B\cup(A-B)=B\cup\phi=B$.

例子:化简 $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$.

解:因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$, $A\subseteq A\cup(B-C)$, 由上例, 有

$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$

$=(A\cup B)-A$

$=(A\cup B)\cap\overline{A}$

$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})$

$=\phi\cup(B\cap\overline{A})$

$=B\cap\overline{A}$

$=B-A$.

例子:已知 $A\oplus B=A\oplus C$,证明 $B=C$.

证:已知 $A\oplus B=A\oplus C$,所以有

$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$

$\Rightarrow(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$

$\Rightarrow\phi\oplus B=\phi\oplus C$

$\Rightarrow B=C$

四. 广义并和广义交

*集合的交和并可以推广到 3 个或 3 个以上的集合的交和并。

*文氏图见书 P127, 图 5.

例 15：设 A={0,2,4,6,8}, B={0,1,2,3,4}, C={0,3,6,9}.

求：$A\cup B\cup C$和$A\cap B\cap C$.

解：$A\cup B\cup C=\{0,1,2,3,4,6,8,9\}$, $A\cap B\cap C=\{0\}$.

1. 广义并(generalized union)

$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_i$对某个 i $(1\le i\le n)\}$.

2. 广义交(generalized intersection)

$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid x\in A_i$对所有 $i=1,2,\ldots,n\}$.

3. 例子：

例 16：设$A_i=\{i, i+1, i+2, \cdots\}$，那么

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$=$\bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, i+2, \cdots\}$={1,2,3,⋯}.

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$=$\bigcap_{i=1}^{n}\{i, i+1, i+2, \cdots\}$={n,n+1,n+2,⋯ }.

*我们还可以定义无穷个集合的交和并

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$=$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$=$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

更一般地，使用记号$\bigcup_{i\in I} A_i$和$\bigcap_{i\in I} A_i$

$\bigcup_{i\in I} A_i$=$\{x | \exists i \in I(x \in A_i)\}$

$\bigcap_{i\in I} A_i$=$\{x | \forall i \in I(x \in A_i)\}$

例 17：设A_i={1,2,3,⋯, i}, i = 1,2,3,⋯. 那么

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{1,2,\cdots,i\}$={1,2,3,⋯}=$Z^+$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{1,2,\cdots,i\}$={1}.

*证明以上结论。

作业：

1. 设 A,B 为任意集合，证明：

   $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$。

2. 设 A,B,C 是任意集合，证明：$(A-B)-C = A-(B \cup C)$.

3. 设 A,B,C 是任意集合，证明：

   $(A \cap C \subseteq B \cap C) \wedge (A - C \subseteq B - C) \Rightarrow A \subseteq B$.

4. 设$A_i = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, i\}$，求：

(a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$; (b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 。