习题4-3. **中山大學 本科生考试草稿纸** 2011/5/18 —87.

(1)方法② $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=0\cdot x^0+x+0\cdot x^2+\frac{x^3}{3!}+0\cdot x^4+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+0\cdot x^{2n+2}+o(x^{2n+2})$

P.199.1. 求下列函数在 $x=0$ 点的局部泰勒公式：

(1) $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；

解：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$，$(x\to 0)$

$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!}+o(x^n)$，$(x\to 0)$

$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$，$(x\to 0)$

(2) $\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$；

解：$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$，$(x\to 0)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+o(x^n)$，$(x\to 0)$

$\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]=-(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1})+o(x^{2k+2})$，$(x\to 0)$

或 $-(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots+\frac{x^{2k-1}}{2k-1})+o(x^{2k})$，$(x\to 0)$

(3) $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}(2x)^{2k}+o(x^{2k+1})]$

$=\frac{1}{2}[\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\cdots\cdots+(-1)^{k+1}\cdot\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1})]$，$(x\to 0)$

(4) $\frac{x^2+2x-1}{x-1}=\frac{(x^2-1)+2x}{x-1}=(x+1)+\frac{2x}{x-1}$

$=(x+1)-2x\cdot\frac{1}{1-x}=x+1-2x(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x})$

$=1-x-2x^2-2x^3-\cdots\cdots-2x^n+o(x^n)$ $(x\to 0)$

(5) $\cos x^3=1-\frac{1}{2!}(x^3)^2+\frac{1}{4!}(x^3)^4-\frac{1}{6!}(x^3)^6+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n\cdot(x^3)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{6n+3})$

$=1-\frac{x^6}{2!}+\frac{x^{12}}{4!}-\frac{x^{18}}{6!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}+o(x^{6n+3})$，$(x\to 0)$