重积分

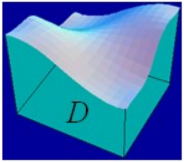
- 二重积分的概念和性质
- 二重积分的计算
  1. 直角坐标系下的计算
  2. 极坐标系下的计算
  3. 一般变量替换公式
- 三重积分
  1. 直角坐标系下的计算
  2. 柱坐标与球坐标系下的计算
  3. 一般变量替换公式
- 几何应用与物理应用

二重积分

引例

1.曲顶柱体的体积

$z = f(x, y)$



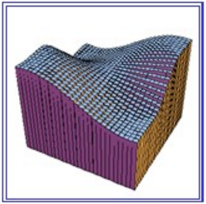
给定曲顶柱体:

底: xoy 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$

侧面: 以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面

求其体积V.



$V_{平顶} = 底面面积 \times 高.$

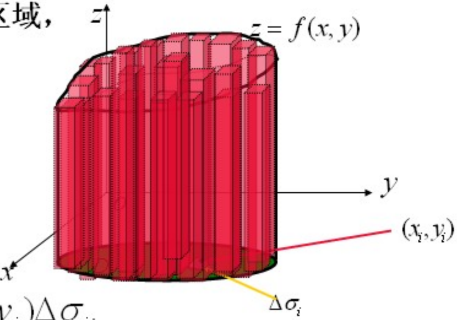
解法: 类似定积分解决问题的思想:

“分割，近似代替，求和，取极限”

步骤如下：

先分割曲顶柱体的底，并取典型小区域，

用若干个小平顶柱体体积之和近似表示曲顶柱体的体积，



曲顶柱体的体积

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i.$$

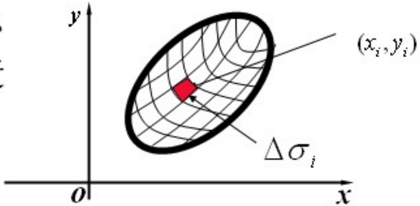
λ是n个小闭区域$\Delta\sigma_i$ 的直径中的最大值

二重积分

2. 求平面薄片的质量

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续，平面薄片的质量为多少?

将薄片分割成若干小
取典型小块，将其近
看作均匀薄片，
所有小块质量之和
近似等于薄片总质



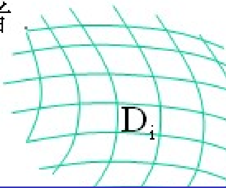
$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$$

二重积分

定义区域D(有界闭区域）的一种分割. 设想有两组曲线,它们彼此横截，并在(x, y)平面上形成了一个网格，这个网格将D分成有限个闭子区域 D_1，$D_2, \cdots$，D_n; 它们彼此互不重叠，且$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. 这样的一组子区域$\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ 就称作D的一种**分割**

用$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积，λ表示D_i的直径的最大者.

所谓D_i的直径是指D_i中任意两点的距离的最大值.



二重积分

定义 设 $z=f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的函数，

若对 D 的任意分割 $\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 及任意选择的

$(x_i,y_i)\in D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，　当 $\lambda\to 0$ 时，和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

总有极限，则称该极限为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分.

记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$　　即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i}_{\text{积分和}} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x, y)$ 可积，

$$\underbrace{\iint_D}_{\text{积分域}} \boxed{\underbrace{f(x, y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}$$

积分表达式

x, y 称为积分变量

二重积分几何与物理意义

曲顶柱体体积

曲顶$z=f(x,y)\geq 0$在底D上的二重积分,

即
$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

平面薄片D的质量

它的面密度$\mu(x,y)$在薄片D上的二重积分,

即
$$M=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

二重积分定义的注释

注1. 积分区域是有界闭区域；

二重积分定义的注释

注**1.** 积分区域是有界闭区域；

注**2.** 分法是任意的，取法也是任意的；

二重积分定义的注释

注1. 积分区域是有界闭区域；

注2. 分法是任意的，取法也是任意的；

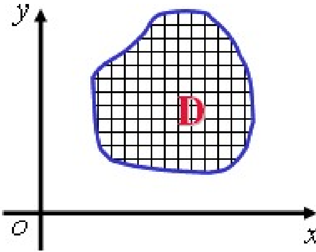
注3. 当被积函数是正时，二重积分的值是曲顶柱体的体积；当被积函数是负时，二重积分的值是曲顶柱体的体积的负值；

直角坐标系下的表达式

在直角坐标系下，用平行于坐标轴的直线族把D分成一些小区域，这些小区域中除去靠D的边界的些不规则小区域外，绝大部分都是小矩形，

故二重积分可写为

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$



二重积分的存在定理

闭区域上的连续函数或者分片连续函数都是可积的. 今后如无说明, 都假定被积函数在相应积分区域是连续的。

二重积分的性质

1. $\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ （ k 为常数）

2. $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

3. $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$(D = D_1 \cup D_2,\ D_1,\ D_2$ 无公共内点$)$

4. 若在D上 $f(x,y)\equiv 1$, σ 为D 的面积, 则

$$\sigma = \iint_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

5. 若在D上$f(x,y) \le \varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别，由于$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$

$$\therefore \quad \left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

6. 设$M = \max\limits_D f(x,y)$, $m = \min\limits_D f(x,y)$, D 的面积为σ，

则有
$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

7. (二重积分的中值定理)设函数 $f(x,y)$ 连续, σ 为D 的面积 则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证: 由性质6 可知,

$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

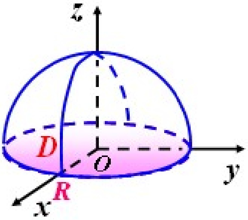
因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

二重积分的几何意义

例 设D为圆域 $x^2+y^2\le R^2$

二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$

$= ?$



二重积分性质应用

例

设$f(x,y)$是二元连续函数，求

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)d\sigma$$

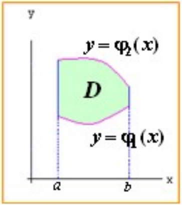
二重积分的计算：X型区域

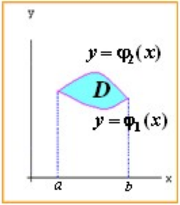
1.直角坐标系下的计算公式

用几何观点来讨论二重积分$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 的计算问题.

假定f(x,y)≥0.设积分区域D可以用不等式

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\\ a\le x\le b.\end{cases}$$





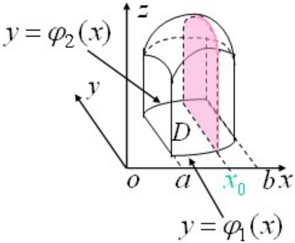
其中函数$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间$[a,b]$上连续.

二重积分的计算：X型区域

因为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$的值等于以积分区域$D$为底，以曲面$z=f(x,y)$为曲顶的曲顶柱体的体积. **用定积分计算此体积.**

设曲顶柱体的底为

$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{matrix}\right\}$$



在区间[a , b]上任意取一点x_0,作平行于yoz面的平面$x=x_0$,这平面截曲顶柱体所得截面是一个以区间$[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$为底，曲线$z=f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形，所以**截面面积为**

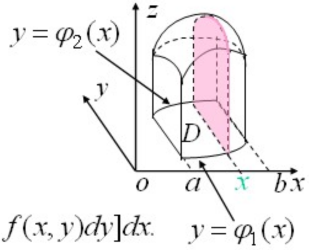
$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

同理对应于[a,b]上任意一点x处的截面面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$ 故曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

$$=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\Big]dx.$$



因而有 $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\Big]dx.$$

这就是把二重积分化为先对y、后对x的二次积分.

二重积分转化为累次积分：X型区域

定理 1　设函数f(x,y)在闭区域D上连续，D是由两直线

x=a,x=b及两连续曲线

$$y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x) \quad (\varphi_1(x)<\varphi_2(x), a\le x\le b)$$

围成，则有公式

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\underline{\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx}, \qquad (7.1)$$

累次积分

或写成

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \quad (7.2)$$

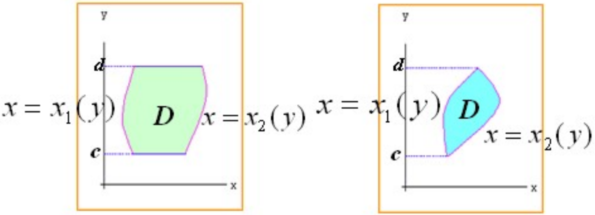
当闭区域D为矩形域$\mathrm{R}=\{a\le x\le b, c\le y\le d\}$时，则有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \quad (7.3)$$

二重积分转化为累次积分：Y型区域

类似地，

如果积分区域为： $c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y).$



$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \underbrace{\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx}_{\text{累次积分}}.$$

这就是把二重积分化为先对x、后对y的二次积分.

二重积分转化为累次积分：简单情形

当积分区域是方形$[a,b]\times[c,d]$时，

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy\\ &= \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx\end{aligned}$$

或记为

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\\ &= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy\end{aligned}$$

二重积分转化为累次积分：简单情形

当积分区域是方形$[a,b]\times[c,d]$ $f(x,y)=f_1(x)\times f_2(y)$时，

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\left(\int_a^b f_1(x)dx\right)\times\left(\int_c^d f_2(y)dy\right)$$

例

计算二重积分$I=\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}dxdy$，其中区域$D$是由$x=0,x=1,y=0,y=1$围成的矩形。

二重积分的计算

例

计算二重积分$I=\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}dxdy$，其中区域$D$是由$x=0,x=1,y=0,y=1$围成的矩形。

例

计算二重积分$I=\iint\limits_D (x^3+xy)dxdy$，其中区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1;x\le y\le 3x\}$。

例

计算二重积分$I=\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}dxdy$，其中区域$D$是由$x=0,x=1,y=0,y=1$围成的矩形。

例

计算二重积分$I=\iint\limits_D (x^3+xy)dxdy$，其中区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1;x\le y\le 3x\}$。

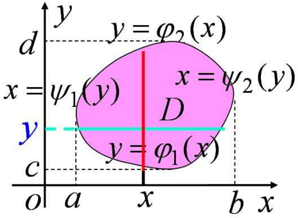
例

计算二重积分$\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域D是由抛物线$y^2=x$与直线$y=x-2$围成的图形。

二重积分的计算：重要情形

说明：（1）若积分区域既是X-型区域又是Y- 型区域，

则有
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

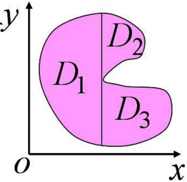


为计算方便，可**选择积分序**，必要时还可以**交换积分序**.

（2）若积分域较复杂，可将它分成若干

X-型域或Y-型域 则

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}$$



二重积分的计算：既是X型也是Y型区域

例

计算二重积分$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中区域$D$是由抛物线$y^2=x$与直线$y=x^2$围成的封闭区域。

例

计算二重积分$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中区域$D$是由抛物线$y^2=x$与直线$y=x^2$围成的封闭区域。

例

求累次积分$\int_0^a dx\int_x^a e^{y^2}dy$，其中$a$是大于零的常数。

二重积分的计算:交换积分顺序

例

证明

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{b(x-a)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{b(x-a)} f(x) dx$$

其中，a, b均为常数，且$a > 0$.

二重积分的计算：对称性的应用

在计算二重积分时，可利用积分区域及被积函数的对称性来简化计算.

(1) 设积分区域D关于x轴对称.

若f(x,y)关于y是偶函数（f(x,-y)=f(x,y)），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma,$$

其中$D_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, y \geq 0\}$.

若f(x,y)关于y是奇函数（f(x,-y)=-f(x,y)），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0.$$

二重积分的计算：对称性的应用

(2) 设积分区域D关于y轴对称.

若f(x,y)关于x是偶函数（f(-x,y)=f(x,y)），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma,$$

其中$D_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, x \geq 0\}$.

若f(x,y)关于x是奇函数（f(-x,y)=-f(x,y)），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0.$$

例

计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D |xy| dxdy$;

(2) $\iint\limits_D (x+y) dxdy$;

(3) $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$,

其中区域D是闭圆域: $x^2+y^2 \le a^2$。

一、三重积分的概念

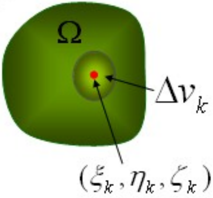
引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质, 密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$, 求分布在 Ω 内的物质的质量 M.

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

可得

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$



三重积分的概念

定义 设$f(x,y,z)$在空间有界闭区域Ω上有定义. 将Ω任意分割成n个互不重叠的小区域Ω_i, 在Ω_i上任取一点(x_i,y_i,z_i), $i=1,2,\cdots,n$. 作积分和 $\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$

其中 ΔV_i 表示小区域Ω_i的体积. 令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Omega_i\text{的直径}\}$.

若对区域Ω_i的任意一种分割法以及中间点(x_i,y_i,z_i)的任意取法，积分和的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

总存在，则称此极限为 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$ 或 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$

三重积分的概念

其中f(x, y, z)称为被积函数　Ω称为积分区域.

dv称为体积元素.

当极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ 存在时,称$f(x, y, z)$在区域Ω上是可积的.

有界闭区域Ω上的连续函或分块连续函数在区域Ω上是可积的.

若一物体占有空间位置Ω，又其体密度为$\rho(x, y, z)$该物体的质量为

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv.$$

注1. 在直角坐标系下，可以采用平行于坐标轴的分割网格，从而$dV = dxdydz$，

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

注1. 在直角坐标系下，可以采用平行于坐标轴的分割网格，从而$dV = dxdydz$，

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$

注2. 当$f(x, y, z) = 1$时，记V是Ω的体积，则

$$V = \iiint_{\Omega} dV$$

三重积分的计算：直角坐标系：方法一

思想是 直角坐标系中将三重积分化为三次积分

投影法（先一后二法）

如图，闭区域 Ω在xOy

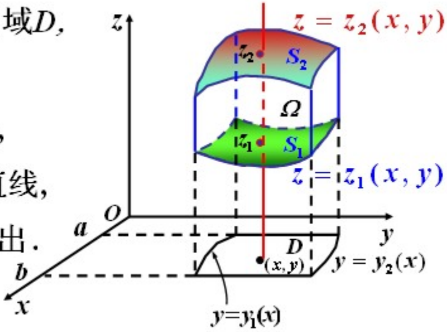
面上的投影为闭区域D，

$S_1: \quad z = z_1(x, y)$,

$S_2: \quad z = z_2(x, y)$,

过点 $(x, y) \in D$ 作直线，

从 z_1 穿入，从 z_2 穿出.



三重积分的计算：直角坐标系：方法一

先将x,y看作定值,将$f(x,y,z)$只看作z的函数，则

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

再计算$F(x,y)$在闭区间D上的二重积分

$$\iint_D F(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma$$

三重积分的计算：直角坐标系：方法一

先将x,y看作定值，将$f(x,y,z)$只看作z的函数，则

$$\boxed{F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z}$$

再计算$F(x,y)$在闭区间D上的二重积分

$$\iint_D F(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma$$

$\because D: y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b,$ X一型

得 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

投影法要点：

- （1）找出积分区域在XOY平面的投影；
  （2）找出上下两个函数$z_1 = z_1(x, y)$和$z_2 = z_2(x, y)$

投影法要点：

- （1）找出积分区域在XOY平面的投影；
  （2）找出上下两个函数$z_1 = z_1(x, y)$和$z_2 = z_2(x, y)$
- （1）找出积分区域在YOZ平面的投影；
  （2）找出前后两个函数$x_1 = x_1(y, z)$和$x_2 = x_2(y, z)$

投影法要点：

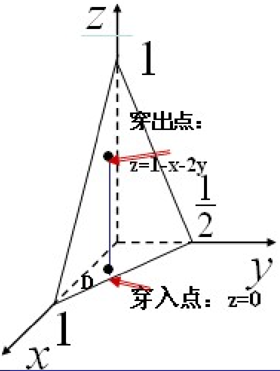
- （1）找出积分区域在XOY平面的投影；
  （2）找出上下两个函数$z_1 = z_1(x, y)$和$z_2 = z_2(x, y)$
- （1）找出积分区域在YOZ平面的投影；
  （2）找出前后两个函数$x_1 = x_1(y, z)$和$x_2 = x_2(y, z)$
- （1）找出积分区域在ZOX平面的投影；
  （2）找出左右两个函数$y_1 = y_1(x, z)$和$y_2 = y_2(x, z)$

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz$, 其中$\Omega$是由三个坐标面和平面$x+2y+z=1$所围成的封闭区域。

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz$，其中$\Omega$是由三个坐标面和平面$x+2y+z=1$所围成的封闭区域。



三重积分的计算：直角坐标系：方法一

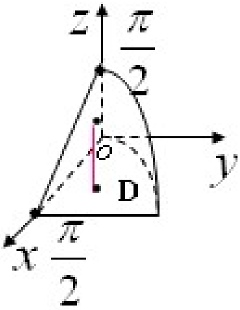
例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz$, 其中$\Omega$是由平面$y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$及柱面$y=\sqrt{x}$围成的闭区域。

三重积分的计算：直角坐标系：方法一

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz$, 其中$\Omega$是由平面$y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$及柱面$y=\sqrt{x}$围成的闭区域。

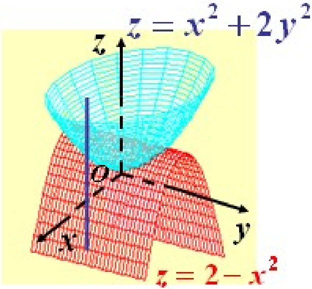


例

化三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$为三次积分，其中$\Omega$是由曲面$z=x^2+2y^2$及$z=2-x^2$围成的闭区域。

例

化三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$为三次积分，其中$\Omega$是由曲面$z = x^2 + 2y^2$及$z = 2 - x^2$围成的闭区域。



截面法(先二后一法)

截面法的一般步骤

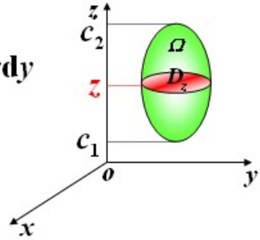
(1) 把积分区域Ω向某轴(如z轴)**投影**，得投影区间$[c_1, c_2]$；

(2) 对$z \in [c_1, c_2]$用过z轴且平行xOy的平面去截Ω，得截面D_z；(红色部分)

(3) 计算二重积分$\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其结果为z的函数$F(z)$；

(4) 最后计算单积分$\int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$.



即 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$$

截面法要点：

- 容易找出截面D_z，且被积函数只与z有关

即 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$$

截面法要点：

- 容易找出截面D_z，且被积函数只与z有关
- 容易找出截面D_x，且被积函数只与x有关

即 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$$

截面法要点：

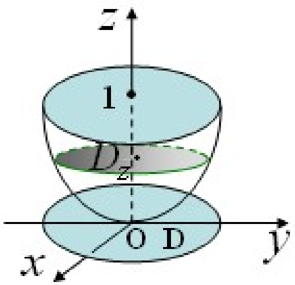
- 容易找出截面D_z，且被积函数只与z有关
- 容易找出截面D_x，且被积函数只与x有关
- 容易找出截面D_y，且被积函数只与y有关

例

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} e^{-z^2} dxdydz$，其中$\Omega$是由曲面$z = x^2 + y^2$及平面$z = 1$围成的闭区域。

例

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} e^{-z^2}dxdydz$，其中$\Omega$是由曲面$z = x^2 + y^2$及平面$z = 1$围成的闭区域。



三重积分的计算：对称性的应用

假如积分区域Ω关于oxy平面对称.

$$\begin{cases} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = 0 & f(x,y,-z) = -f(x,y,z), \\ \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f(x,y,-z) = f(x,y,z). \end{cases}$$

其中区域$\Omega_1 = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \Omega, z \geq 0\}$.

其它的对称情形，可类推.

三重积分的计算：对称性的应用

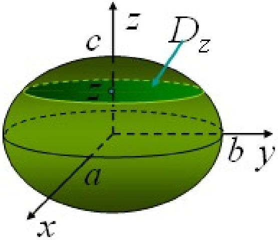
例

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2 dxdydz$，其中$\Omega$是椭球体$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \ (a,b,c>0)$。

三重积分的计算：对称性的应用

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$，其中$\Omega$是椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\ (a,b,c>0)$。



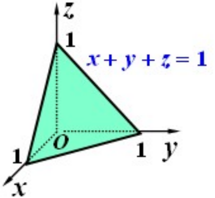
三重积分的计算：说明

三重积分的计算有投法和截面法，每种方法又有三种坐标选择，共计六种公式，所以积分方法的选择与被积函数和积分区域有紧密关系。特别是有些区域，六种公式都可以应用，计算时变换适合被积函数的积分次序可以方便得出答案。

三重积分的计算：说明

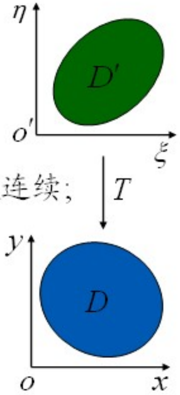
三重积分的计算有投法和截面法，每种方法又有三种坐标选择，共计六种公式，所以积分方法的选择与被积函数和积分区域有紧密关系。特别是有些区域，六种公式都可以应用，计算时变换适合被积函数的积分次序可以方便得出答案。

例如计算积分$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$，其中$\Omega$是三个坐标平面与平面$x + y + z = 1$做围成的闭区域。分别计算当$f = e^{-x^2}, e^{-y^2}, e^{-z^2}$时的三重积分值。



二重积分的计算：变量代换法

3. 二重积分的一般变量替换公式



定理 设$f(x,y)$在闭域D上连续，变换：

$$T:\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases} \quad (\xi,\eta)\in D' \to D$$

满足 (1) $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$在D'上一阶偏导数连续；

(2) 在D'上 雅可比行列式

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \neq 0;$$

(3) 变换$T: D' \to D$是一一对应的，

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\,|J|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$,

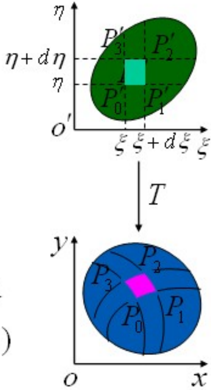
证 根据定理条件可知变换 T 可逆.

在 $\xi o' \eta$ 坐标面上，用平行于坐标轴的直线分割区域 D'，任取其中一个小矩形，其顶点为

$$P_0'(\xi,\eta),\qquad P_1'(\xi+d\xi,\eta),$$

$$P_2'(\xi+d\xi,\eta+d\eta),\quad P_3'(\xi,\eta+d\eta).$$

通过变换 T，在 xoy 面上得到一个四边形，其对应顶点为 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=0,1,2,3)$



令 $\rho=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$，则

$$x_1-x_0=x(\xi+d\xi,\eta)-x(\xi,\eta)=\left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(\xi,\eta)} d\xi+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$.

二重积分的计算：变量代换法

$$x_3 - x_0 = x(\xi,\eta + d\eta) - x(\xi,\eta) = \left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{(\xi,\eta)} k + o(\rho);$$

同理得 $y_1 - y_0 = \left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{(\xi,\eta)} d\xi + o(\rho)$

$$y_3 - y_0 = \left.\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|_{(\xi,\eta)} d\eta + o(\rho).$$

当 $d\xi$，$d\eta$ 充分小时，曲边四边形 $p_0p_1p_2p_3$ 近似于平行四边形，故其面积近似为

$$\Delta\sigma = |\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_3}| = \left|\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{vmatrix}\right|$$

$$\approx \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta\right| = |J| \cdot d\xi d\eta$$

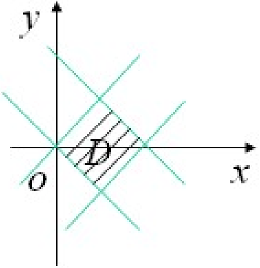
例

计算二重积分$I=\iint\limits_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy$, 其中$D=\{(x,y)|0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1\}$。

二重积分的计算：变量代换法

例

计算二重积分$I = \iint\limits_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dxdy$，其中$D = \{(x,y)|0 \le x+y \le 1, 0 \le x-y \le 1\}$。

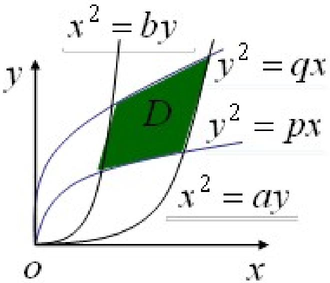


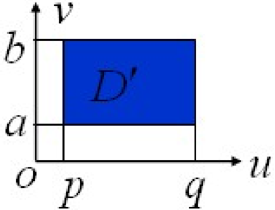
例

计算二重积分$I = \iint\limits_D xydxdy$，其中$D$是由$y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$ $(0 < p < q, 0 < a < b)$所围成的封闭区域。

例

计算二重积分$I = \iint\limits_D xydxdy$, 其中$D$是由$y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$ $(0 < p < q, 0 < a < b)$所围成的封闭区域。





例

计算二重积分$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$，其中$a > 0, b > 0$，$D$为椭圆：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$。

极坐标下二重积分的计算

2.在极坐标系下的计算公式

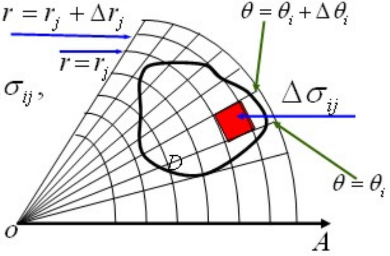
用以极点为中心的一族同心圆：$r=$常数，以及从极点出发的一族射线:$\theta=$常数将区域D分割成若干个小的扇形区域，记为

$$D_{ij}=\{(r,\theta)\mid r_j\le r\le r_{j+1},\theta_i\le\theta\le\theta_{i+1}\}.$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j}f(p_{ij})\Delta\sigma_{ij},$$

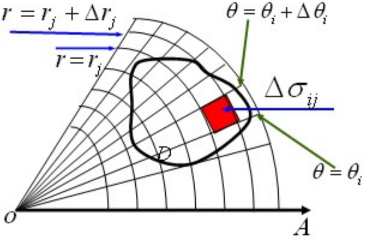
$$p_{ij}=(r_j\cos\theta_i,r_j\sin\theta_i),$$

求$\Delta\sigma_{ij}=?$



极坐标下二重积分的计算

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(r_j + \Delta r_j)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2} r_j^{\,2} \cdot \Delta\theta_i$$
$$= \frac{1}{2}(2r_j + \Delta r_j)\Delta r_j \cdot \Delta\theta_i$$
$$= r_j \Delta r_j \Delta\theta_i + \frac{1}{2}(\Delta r_j)^2 \Delta\theta_i,$$



当 $\lambda \to 0$ 时 $\frac{1}{2}(\Delta r_j)^2 \Delta\theta_i = o(\Delta r_j \Delta\theta_i)$, $\quad \therefore \Delta\sigma_{ij} \approx r_j \Delta r_j \Delta\theta_i$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i,j} f(r_j \cos\theta_i, r_j \sin\theta_i)\, r_j \Delta r_j \Delta\theta_i.$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

$$D' = \{(r,\theta) \mid (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\},\ d\sigma = dxdy = rdrd\theta$$

二重积分的计算：变量代换法

极坐标变换是这个定理的特殊情况. 事实上,

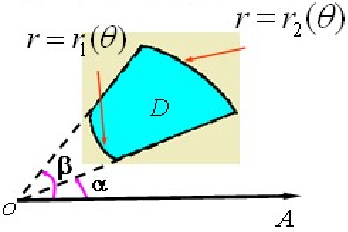
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

与前面得到的关于极坐标变换的公式完全一致.

二重积分的计算---化为极坐标的累次积分



若积分区域为:

$$D=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta, r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\},$$ 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

积分区域D的几种特殊情况:

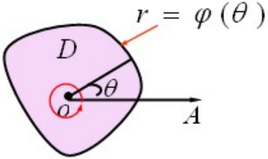
(1) D 为环形域: $\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi, R_1\le r\le R_2\}$,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{R_1}^{R_2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

(2) D 为关于极点的星形域，即极点o在D的内部

设D的边界曲线的方程为

$$r=r(\theta)\ (0\le\theta\le 2\pi)$$

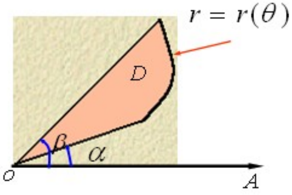


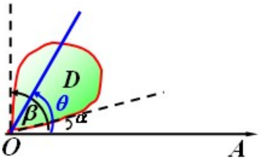
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

极坐标下二重积分的计算

(3) 极点在D 的边界曲线 $r = r(\theta)$上，即有

$$\alpha \le \theta \le \beta, \quad 0 \le r \le \varphi(\theta).$$





$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

极坐标下二重积分的计算

例 将二重积分

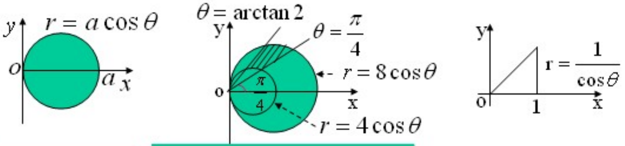
$$\iint_D f(x,y)d\sigma.$$

用极坐标化成累次积分，其中D为

(1) 圆形域：$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le ax,\ \ a>0\}$;

(2) 由直线$y=x, y=2x$及曲线 $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$所围成.

(3) 由直线$y=0, y=x$及$x=1$所围成.



$x^2+y^2=ax$ $\Rightarrow (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2.$

极坐标下二重积分的计算

例

计算二重积分

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}},$$

其中$D=\{(x,y),0\le x\le a;0\le y\le a\}$。

极坐标下二重积分的计算

例

计算二重积分

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}},$$

其中$D=\{(x,y),0\le x\le a;0\le y\le a\}$。

例

求球面$x^2+y^2+z^2=4$与$x^2+y^2=3z$做围成的$z\ge 0$部分的立体图形的体积。

极坐标下二重积分的计算

例

计算二重积分

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy,$$

其中D为圆$x^2+y^2 \le a^2$在第一象限的部分。

极坐标下二重积分的计算

例

计算二重积分

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy,$$

其中D为圆$x^2+y^2\leq a^2$在第一象限的部分。

例

计算$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

变量变换下的计算公式

定理3 设函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续,又设变换

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \quad (u,v,w) \in \Omega'$$

在 Ω' 上连续,有连续的一阶偏导数,

将 Ω' 一一对应地变到 Ω,

且变换的雅可比行列式 $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$

则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\Omega'} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\,|J|\,du\,dv\,dw.$$

柱坐标下的计算公式

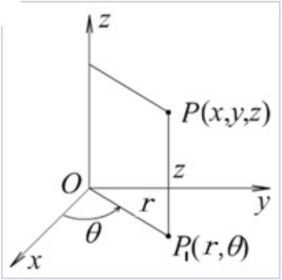
空间点的柱面坐标

设M(x, y, z)为空间内一点，并设点M在xOy面上的投影P的极坐标为P(r, θ)，则这样的三个数r、θ 、z就叫做点M的柱面坐标，这里规定ρ、θ 、z的变化范围为：

$$0\le r<+\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\infty<z<+\infty.$$

直角坐标与柱面坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z.$$



柱坐标下三重积分的计算

柱面坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ 的雅可比行列式

$$J = \frac{D（x,y,z)}{D(r,r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

三重积分在柱面坐标下的计算公式是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

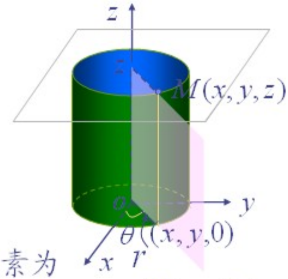
其中$\Omega' = \{(r,\theta,z) \mid (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \Omega\}$.

坐标面分别为

$r =$ 常数 ⟶ 圆柱面

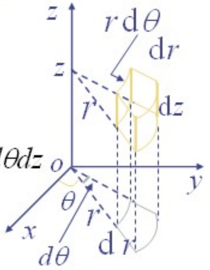
$\theta =$ 常数 ⟶ 半平面

$z =$ 常数 ⟶ 平面



如图所示，在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

其中$\Omega' = \{(r,\theta,z) \mid (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \Omega\}$.

柱坐标下三重积分的计算：情形一

(1) 是一个正的柱体，在oxy平面上的投影的极坐标区域 为D，其底曲面与顶曲面用柱坐标分别表示为

$$z=\varphi(r,\theta)\text{与}z=\psi(r,\theta).$$

则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iint_{D} rdrd\theta\int_{\phi(r,\theta)}^{\psi(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz.$$

柱坐标下三重积分的计算:情形一

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z}}$，其中$\Omega$是柱面$x^2+y^2=1$与两平面$z=0$，$z=1$所围成的区域。

柱坐标下三重积分的计算:情形一

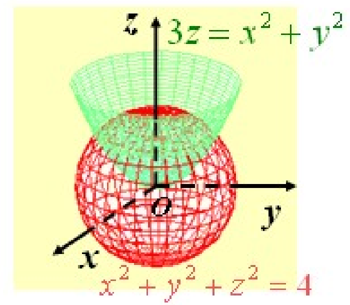
例

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围成的区域。

柱坐标下三重积分的计算:情形一

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围成的区域。



柱坐标下三重积分的计算：情形二

(2) Ω介于半平面$\theta=\alpha$与$\theta=\beta$（$0\le\alpha\le\beta<2\pi$)之间，且极角为$\theta\in[\alpha，\beta]$的任意一半平面与Ω相截得平面闭区域D(θ)，则有计算公式：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\iint\limits_{D(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrdz.$$

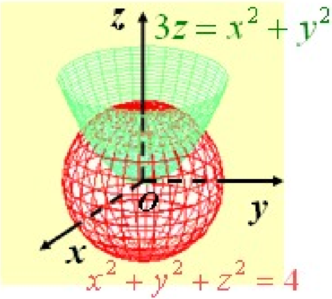
柱坐标下三重积分的计算:情形二

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围成的区域。

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围成的区域。



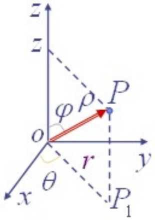
球坐标下三重积分的计算

球坐标下的计算公式

设$P(x,y,z)$为空间内一点,P到原点的距离计作 ρ，向径 $\overrightarrow{OP}$ 与Z轴正向的夹角计作φ ($0\le\varphi\le\pi$),P在Oxy平面上的投影点P_1 的极角计作θ ($0\le\theta\le 2\pi$),则数组(ρ,φ,θ)与点P 有一一对应关系，称(ρ,φ,θ)为点P 的**球坐标**.

直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$



$$r=\rho\sin\varphi$$
$$z=\rho\cos\varphi$$

球坐标下三重积分的计算

球坐标变换 $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$ 的雅可比行列式

$$J=\frac{D\,(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi.$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Omega'=\{(\rho,\theta,\varphi)\,|\,(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\in\Omega\}.$$

$$F(\rho,\theta,\varphi)=f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)$$

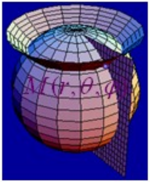
球坐标下三重积分的计算

坐标面分别为

$\rho =$ 常数 → 球面

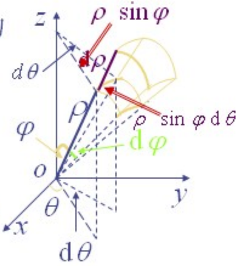
$\theta =$ 常数 → 半平面

$\varphi =$ 常数 → 锥面



如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$



因此有 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint_\Omega F(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

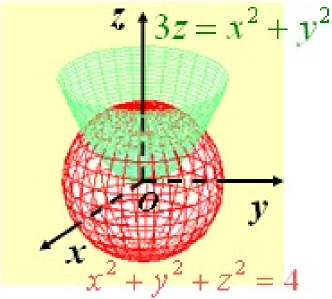
其中 $F(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$

例

计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围成的区域。

例

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围成的区域。



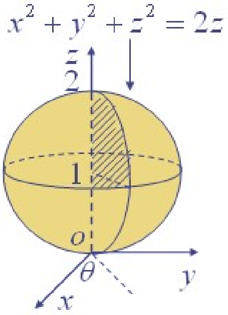
例

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV$，其中$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$。

球坐标下三重积分的计算

例

计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV$，其中$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$。



广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2\sin\varphi.$$

广义球坐标下三重积分的计算

例 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}})^2dv$,

其中$\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1(a>0,b>0,c>0)$.

解 $\begin{cases} x=a\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0\le\rho\le 1, \\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi\le\pi, \\ z=c\rho\cos\varphi & 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1(\sqrt{(1-\rho^2)})^2abc\rho^2\sin\varphi d\rho$$

而 $\int_0^1(\sqrt{(1-\rho^2)})^2\rho^2d\rho \xlongequal{\rho=\sin t} \int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^2 t dt$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\cdot(1-\cos^2 t)dt=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{32},$$

得到:

$I=2\pi\cdot 2\cdot$

$abc\cdot\frac{\pi}{32}$

$=\frac{\pi^2}{8}abc.$

多重积分的几何应用：二维图形面积

二维区域上图形D的面积S公式：

$$S = \iint_D 1 d\sigma = \iint_D 1 dxdy.$$

1. 设曲面方程为$z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$，则以$D$为底，以$z = f(x, y)$为顶的曲顶柱体的体积$V$如下：

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

多重积分的几何应用：体积

1. 设曲面方程为$z = f(x,y) \geq 0, (x,y) \in D$，则以$D$为底，以$z = f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积$V$如下：

$$V = \iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_D f(x,y) dxdy.$$

2. 三维区域上区域Ω的体积V公式：

$$S = \iiint_\Omega 1 dV = \iiint_\Omega 1 dxdydz.$$

多重积分的几何应用：体积

例

求$(x^2+y^2+z^2)^2 = az(a>0)$所围区域的体积。

例

求$(x^2+y^2+z^2)^2=az(a>0)$所围区域的体积。

$\frac{1}{3}\pi a$

曲面的面积

设曲面S的方程$z=f(x, y)$在区域D上具有连续的一阶偏导数，则曲面S的面积为

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,d\sigma,$$

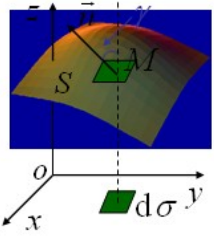
或 $$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

多重积分的几何应用：曲面面积

设光滑曲面 $S: z = f(x,y), (x,y) \in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x,y,z)$

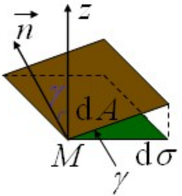
处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.



设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$



$$\mathrm{d}A = \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

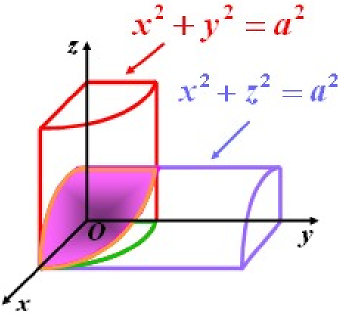
(称为面积元素)

例

求圆柱面$x^2+z^2=a^2$被圆柱面$x^2+y^2=a^2$所割部分的面积。

例

求圆柱面$x^2 + z^2 = a^2$被圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$所割部分的面积。



多重积分的几何应用：曲面面积

例

求$x^2+y^2+z^2=R^2$被圆柱面$x^2+y^2\le Rx$所割部分的面积。

例

求$x^2+y^2+z^2=R^2$被圆柱面$x^2+y^2\le Rx$所割部分的面积。

$4R^2(\frac{\pi}{2}-1)$

曲面面积：参数方程曲面

利用曲面的参数方程求曲面的面积

若曲面S 由参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D' \\ z = z(u,v) \end{cases}$

给出，其中D是一个平面有界闭区域,又x(u,v),y(u,v),z(u,v)在

D上具有连续的一阶偏导数，且

$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)},$ 不全为零,则曲面S 的面积

$S = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,dudv,$ 其中 $\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v, \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{cases}$

曲面面积：参数方程曲面

例 求螺旋曲面 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = h\theta, \end{cases}$ $\begin{matrix} 0 \le r \le a, \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{matrix}$ **的面积.**

解 由已知条件得

$$x_r = \cos\theta,\ x_\theta = -r\sin\theta,\ y_r = \sin\theta,$$
$$y_\theta = r\cos\theta,\ z_r = 0,\qquad z_\theta = h.$$

$$E = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 = 1,\quad F = x_r x_\theta + y_r y_\theta + z_r z_\theta = 0,$$
$$G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = r^2 + h^2.$$

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,drd\theta = \iint_D \sqrt{r^2 + h^2}\,drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2}\,dr = \pi\Big[a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln\Big(\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}\Big)\Big].$$

多重积分的物理应用（微元法）：质量

(1) 质量

平面薄片的质量 $M = \iint\limits_{D} \rho(x,y)d\sigma,$

$\rho(x,y)$**是薄片** D **在**(x,y) **处的面密度.**

空间物体 的质量 $M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dV,$

$\rho(x,y,z)$ **是物体**Ω **在**(x,y,z)**处的体密度.**

多重积分的物理应用（微元法）：质心

(2) 力矩与质心

设一平面薄片占有xOy面上的闭区域D，其面密度μ(x，y)是闭区域D上的连续函数，则该平面薄片的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma}.$$

类似地，设一物体占有空间闭区域Ω，其密度ρ(x，y，z)是闭区域Ω上的连续函数，则该物体的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)dv},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)dv},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)dv}.$$

(3) 物体的转动惯量

设一平面薄片占有xOy面上的闭区域D，其面密度μ(x，y)是D上的连续函数，则该平面薄片对x、y轴的转动惯量为

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)d\sigma\,,\quad I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)d\sigma\,.$$

类似地，设一物体占有空间闭区域Ω，其密度ρ(x, y, z)是Ω上的连续函数，则该物体对于x、y、z轴的转动惯量为

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv\,,$$

$$I_y=\iiint_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)dv\,,$$

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv\,.$$

多重积分的物理应用（微元法）：转动惯量

一个质点关于一个平面的转动惯量是其质量乘以质点到该平面的最短距离的平方.类似地,可推出物体到三个坐标平面的转动惯量得公式如下：

$$J_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2 \rho(x,y,z)\,dV,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2 \rho(x,y,z)\,dV,$$

$$J_{zx} = \iiint\limits_{\Omega} y^2 \rho(x,y,z)\,dV.$$