习题4-2 **中山大學 本科生考试草稿纸** 2011 18/5 —85.

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.181.11. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，对任意一点 $x_0\in(a,b)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.

证：$$\lim_{x\to x_0} f'(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

P.189.1 $$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2^x\cdot\ln 2}{3^x\cdot\ln 3}=\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1-\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\frac{1}{(1+x)^2}}=-1.$$

P.189.3. $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]\overset{\infty-\infty}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{(1+x)\ln(1+x)+\sqrt{1+x^2}\,\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\ln(1+x)+1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=-\frac{1}{2}.$$

4. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x(-\sin x)}{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}(-1)$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-3\sin 3x}=\frac{1}{3}.$$

P.189.5 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-a\sin ax}{\cos ax}}{\frac{-b\sin bx}{\cos bx}}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a^2}{b^2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax}{\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}.$$

P.189.6 $$\lim_{x\to 0+0}x^\alpha\cdot\ln x\ \overset{0\cdot\infty}{\underset{\alpha>0}{=\!=}}\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\lim_{x\to 0+0}\frac{x^{\alpha+1}}{x}=0$$

P.189.7. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{-u}}{u^{-50}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{50}}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{50\cdot u^{49}}{e^u}=\cdots\cdots=\lim_{u\to\infty}\frac{50!}{e^u}=0$$

P.189.8. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{(2x-\pi)\cdot\ln\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-\left(\frac{2x-\pi}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\sin 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-4(2x-\pi)}{\cos 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-8(x-\frac{\pi}{2})}{\cos 2x}}=e^0=1.$$

P.189.9 $$\lim_{x\to+\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)\cdot x=\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{a^y\cdot\ln a}{1}=\ln a.$$