中山大學 本科生考试草稿纸 2011 15/4—65.

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.153.18 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$.

证：令 $a+(b-a)x=t$，则 $dx=\frac{dt}{b-a}$，$x=0,t=a$；$x=1,t=b$.

$$\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx=\int_a^b f(t)\cdot\frac{dt}{b-a}\Longrightarrow (b-a)\cdot\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx=\int_a^b f(x)dx.$$

P.153.19. 证明：$\int_0^a x^3\cdot f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)dx$

证：令 $x^2=t$，则 $2xdx=dt$，$x=0,t=0$；$x=a,t=a^2$.

$$\int_0^a x^3\cdot f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^a x^2 f(x^2)dx^2=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} t f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)dx.$$

P.153.20. 证明：$\int_0^1 x^m\cdot(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n\cdot(1-x)^m dx$.

证：令 $1-x=t$，则 $dx=-dt$，$x=0,t=1$；$x=1,t=0$.

$$\int_0^1 x^m\cdot(1-x)^n dx=\int_1^0 (1-t)^m\cdot t^n\cdot(-dt)=\int_0^1 x^n\cdot(1-x)^m dx$$

P.153.21. 利用分部积分证明：若 $f(x)$ 连续，则 $\int_0^x[\int_0^t f(x)dx]dt=\int_0^x f(t)\cdot(x-t)dt$.

证：
$$\begin{aligned}\int_0^x[\int_0^t f(x)dx]dt&=[t\cdot\int_0^t f(x)dx]_0^x-\int_0^x t\,d(\int_0^t f(x)dx)\\&=x\cdot\int_0^x f(u)du-\int_0^x t f(t)dt\\&=x\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t f(t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt.\end{aligned}$$

P.153.22. 利用换元积分证明：$\int_0^\pi x f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

证：令 $x=\pi-t$，则 $dx=-dt$，$x=0,t=\pi$；$x=\pi,t=0$；$\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)dx&=\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)\cdot(-dt)=\int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt\\&=\pi\int_0^\pi f(\sin x)dx-\int_0^\pi x f(\sin x)dx\end{aligned}$$

从而 $\int_0^\pi x f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)dx]$

(由) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$