组合数学
第四章 生成排列和组合

主要内容

- 1. 生成排列的邻位互换法
- 2. 生成排列的逆序数法
- 3. 生成组合的字典序法
- 4. n阶Gray码
- 要点: 生成算法和序号

邻位互换法

与字典序法比较(例: **123456, 245136**)

要点: 每次只交换两个相邻数

遍历所有排列 且 不重复

步骤: 先找到合适的次序, 再实现它

方案: 假设**k=n-1**阶的次序已经设计好

n在**n-1**阶排列上穿插可得**n**阶的次序

分析: 相邻两排列只有邻位互换

无重复 无遗漏

能否先给出一个递归算法?

递归算法

初始: 排列为12…n, 每个数的方向都向左.

{1,2,…,k}的邻位互换程序LH(k):

若　　k的方向侧邻居a<k,

则　　a k 互换,

　　　返回;

否则　执行LH(k-1),

　　　k的方向反向,

　　　返回.

定义: 若数k方向侧邻居a<k, 则称k为活动数.

去掉递归的邻位互换算法

1. 初始排列为12…n, 每个数的方向都向左.

2. 对于最大的活动数k,

   交换k与其方向的邻居,

   改变所有>k的数的方向.

   若还有活动数, 转2.

注: (1) 编程时可进一步改进.

(2) 可以直接计算每个排列的序号.

例: 计算25143的序号.

排列与逆序列

设$i_1 \ldots i_n$是$\{1,\ldots,n\}$的一个全排列

令a_j是j的左边大于j的数的个数,

则称$a_1 \ldots a_n$是$i_1 \ldots i_n$的逆序列.

注:$a_n=0$.

例: 31524的逆序列是12010

还原逆序列:

 1. 从大到小还原, 2. 从小到大还原

逆序列的生成, 计算逆序数的算法

生成全体组合

$S=\{x_{n-1},\ldots,x_1,x_0\}$, $A\subseteq S$,

$A \leftrightarrow a_{n-1}\ldots a_1a_0$,

若 $x_i \in A$, 则 $a_i = 1$,

否则 $a_i = 0$.

称为n元组的字典序.

缺点:每次变多个元素

	a_2	a_1	a_0
$\varnothing$	0	0	0
$\{x_0\}$	0	0	1
$\{x_1\}$	0	1	0
$\{x_1,x_0\}$	0	1	1
$\{x_2\}$	1	0	0
$\{x_2,x_0\}$	1	0	1
$\{x_2,x_1\}$	1	1	0
$\{x_2,x_1,x_0\}$	1	1	1

n阶Gray码

定义: n阶Gray码是n元组的一个列表,
相邻两组合只相差一个元素.

n阶反射Gray码的归纳定义:

(1) 1阶Gray码是 0, 1;

(2) 设n>1, 且n-1阶Gray码已定义好,
将n-1阶Gray码顺序列一遍, 接下来
将n-1阶Gray码反序列一遍,
顺序列的码每个前面添0,
反序列的码每个前面添1.

生成n阶反射Gray码的算法

(1) 从$a_{n-1}\ldots a_1a_0=0\ldots00$开始

(2) 当$a_{n-1}\ldots a_1a_0\neq10\ldots0$时,

i) 计算$\sigma = a_{n-1}+\ldots+a_0$ (1的个数),

ii) 若σ偶, 则 $a_0 \to \neg a_0$,

iii) 若σ奇, 则找 $j \geq 0$ 使得$a_ja_{j-1}\ldots a_0=10\ldots0$,

执行 $a_{j+1} \to \neg a_{j+1}$.

例:10111100, 0001111 的后继, 前驱.

定理: 上述算法产生n阶Gray码.

证明: 数学归纳法.

生成S={1,2,…,n}的r组合

$\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq S$表示为$i_1\ldots i_r$ $(i_1<\ldots<i_r)$

字典序: 将组合作为r位数来看得到的顺序

问题: 生成, 序号, 例: n=9, 13589

特点: $k \le i_k \le n-r+k$

(1) 从$i_1\ldots i_r=12\ldots r$

(2) 找最大的使得 $i_k < n-r+k$ 的数k

(3) 用$i_1\ldots i_{k-1}(i_k+1)\ldots(i_k+r-k+1)$替换$i_1\ldots i_r$.

定理: 在S的所有r组合中, $i_1\ldots i_r$的序号是

$$\binom{n}{r}-\binom{n-i_1}{r}-\binom{n-i_2}{r-1}-\cdots-\binom{n-i_r}{1}$$

本章小结

排列的邻位互换生成法

排列的逆序列

排列和组合的字典序法

组合的**Gray**反射码

r组合的字典序法