§2.4　序列与和式(Sequences and summations)

一．序列

1. 定义：一个序列是从整数集合的子集（通常是{0,1,2,⋯}或{1,2,3,⋯}）到一个集合 S 的函数。我们用记号a_n表示整数 n 的像。我们称a_n是序列的一项。

   用$\{a_n\}$表示一个序列，其中a_n是该序列中单独的一项。

例 1：考虑序列$\{a_n\}$，其中：$a_n = \frac{1}{n}$ 。

列出该序列: $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$

表示为：　　1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ⋯

2. 几何级数(geometric progression)

   一个几何级数是一个具有以下形式的序列：

   a, ar, $ar^2, ar^3, \cdots, ar^n, \cdots$

其中：a 称为初始项，r 称为公比，a, r∈ R.

几何级数也称为等比级数，它是指数函数$f(x) = ar^x$的离散形式。

例 2：序列：$\{b_n\}$满足$b_n = (-1)^n$, $\{c_n\}$满足c_n=2 · 5^n和$\{d_n\}$满足$d_n = 6 \cdot (\frac{1}{3})^n$, 分别是初始项和公比为：1 和−1，2 和 5；6 和$\frac{1}{3}$的几何级数。

列出序列：$b_0, b_1, b_2, \cdots$ 为 $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$

序列：$c_0, c_1, c_2, \cdots$　为 2, 10, 50, 250, 1250, ⋯

序列：$d_0, d_1, d_2, \cdots$　为 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, ⋯

3. 算术级数(arithmetic progression)

一个算术级数是一个具有以下形式的序列：

a, a+d, a+2d, $\cdots, a+nd, \cdots$

其中：a 称为初始项，d 称为公差，a, d∈ R.

算术级数也称为等差级数，它是线性函数 f(x)=dx+a 的离散形式。

例 3：序列$\{s_n\}$满足$s_n = -1 + 4n$和$\{t_n\}$满足$t_n = 7 - 3n$,

分别是初始项和公差为：-1和 4，7 和-3的算术级数。

列出序列：$s_0, s_1, s_2, \cdots$ 为 $-1, 3, 7, 11, \cdots$

序列：$t_0, t_1, t_2, \cdots$ 为 $7, 4, 1, -2, \cdots$

*在计算机科学中，有穷序列：$a_1, a_2, \cdots, a_n$称为串，一个串可以表示为$a_1 a_2 \cdots a_n$。串 S 中项的个数称为串长。例如：S=$a_1 a_2 \cdots a_n$，则串长|S|=n. 长度为 0 的串称为空串，记为λ。

例 4：字母串 abcd 长度为 4.

二． 特殊的整数序列

离散数学中的一个常见的问题是，找一个序列的所有项的公式或通用的规则。有时只知道一个序列中的几项，我们的目标是确定这个序列。我们可以根据已知的几项，得到每一项的公式的一个猜想，然后去验证这个公式是否正确。

在找项的模式时，我们常考虑以下问题：

(1) 在序列中是否同一个值出现多次？

(2) 每一项是否由前面的项加上一个固定的常数，或加上一个依赖项的位置的量？

(3) 每一项是否由前面的项乘上一个常量？

(4) 每一项是否由前面的项以某种方式组合而成？

(5) 各项是否出现循环？

例 5：给出以下序列的前 5 项，找出其中项的公式：

(a) 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ;

(b) 1, 3, 5, 7, 9 ;

(c) $1, -1, 1, -1, 1$;

解：(a) 每一项是 1 除以 2 的幂，即由前一项除以 2. 因此 $a_n = 1/2^n$, n=0,1,2,⋯, 它是一个几何级数，满足 a=1, r=1/2.

(b) 每一项由前一项加上 2. 因此 $a_n = 2n + 1, n = 0,1,2,\cdots$ 它是一个算术级数，满足 a=1, d=2 .

(c)每一项由前一项乘以(-1)，故$a_n = (-1)^n, n = 0,1,2,\cdots$ 它是一个几何级数，满足 a=1, r=−1.

例 6：给出以下序列的前 10 项，这个序列是什么？

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

解：这个序列的模式是正整数 n 出现 n 次，下面 5 项是 5，再后面 6 项为 6，等等。

例 7:给出以下序列的前 10 项:5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 该序列是什么？

解：我们看出，每一项由前一项加上 6，故该序列是算术级数，满足 a=5, d=6. 第 n 项的公式为: 5+6$(n-1), n = 1,2,\cdots$.

例 8：给出以下序列的前 10 项：1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185,

6559, 19681, 59047，求该序列a_n的公式。

解：求解这个问题，我们比较每一项和它的前一项，发现它大约是前一项的 3 倍，因此我们猜想每一项中有一个因子3^n. 每一项和3^n比较，发现它比3^n少 2，因此，a_n的公式为：

$a_n = 3^n - 2$, n=1, 2, ⋯. 经验证，该公式匹配所有的已知项。

三. 求和

1. 和式记号

求序列：$a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$的和，用记号：

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

或 $\sum_{j=m}^{n} a_j$ 或 $\sum_{m\le j\le n} a_j$

表示：$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ 。

假设$a, b, x_j, y_j \in R$，有

$$\sum_{j=1}^{n}(ax_j + by_j) = a\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} y_j$$

2. 例子：

例 9：表示以下序列$\{a_n\}$的前 100 项之和，其中:$a_n = \frac{1}{n}$.

解：和式为$\sum_{j=1}^{100}\frac{1}{j}$.

例 10：求以下和式的值：$\sum_{j=1}^{5} j^2$.

解 $\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

*修改求和下标

例 12：假设有和式：$\sum_{j=1}^{5} j^2$ ．要把和式下标改为从 0 到 4，如何修改才能保证和式的值不变？

解：令 k=j−1，则 j 从 1 到 5，变成 k 从 0 到 4，j^2改为$(k+1)^2$，则

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$$

定理 1：设 a 和 r 是实数且 r≠ 0，那么有

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1}-a}{r-1} & \text{if } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{if } r = 1 \end{cases}$$

证明：设 S=$\sum_{j=0}^{n} ar^j$，两边同时乘以 r，有

$$\begin{aligned} rS &= r\sum_{j=0}^{n} ar^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} ar^k + (ar^{n+1}-a) \\ &= S + (ar^{n+1}-a) \end{aligned}$$

于是 $rS - S = ar^{n+1} - a$

从而有$S = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$ ， 如果$r \neq 1.$

如果 r = 1, $S = \sum_{j=0}^{n} a = (n+1)a$ 。

例 13：求和式$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$ 的值。

解 ： $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(1i+2i+3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i = 6+12+18+24 = 60$

*和式记号：

$$\sum\nolimits_{s \in S} f(s)$$

的含义。

例 14：求和式$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$ 的值。

解：$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$ = 0+2+4 = 6 。

3. 常用的和式公式

(1) $\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$ $(r \neq 1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(4) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(5) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$

(6) $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(|x| < 1)$

例 15：求$\sum_{k=50}^{100} k^2$.

解：$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2$

$= \frac{100\cdot101\cdot201}{6} - \frac{49\cdot50\cdot99}{6}$

= 338,350−40,425

= 297,925 .

例 16：设 x 是实数且$|x| < 1$。求：$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

解：由定理 1，现在 a=1, r=x, 有

$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$, 因为$|x| < 1, \lim_{k\to\infty} x^{k+1}$ = 0

因此，$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$

例 17：由例 16，

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad (|x| < 1)$$

两边求导数，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

四． 基数 (Cardinality)

在 2.1 节，我们定义了有穷集的基数是该集合的元素个数。根据基数，我们知道什么时候两个有穷集的大小一样，什么时候一个有穷集比另一个有穷集大。在无穷集中，我们也可以定义基数来比较两个集合的大小。

1. 两个集合的基数相同

集合 A 与集合 B 基数相同，当且仅当存在一个从 A 到 B 的双射。

注意：这个定义不仅适用于无穷集，也适用于有穷集。

2. 可数集与不可数集

一个集合如果有有穷基数或者与正整数集基数相同，那么这个集合称为可数集(countable set)，一个集合如果不是可数的，那么该集合称为不可数集(uncountable set). 一个无穷集如果是可数的，那么它的基数为“阿列夫零”。

3. 例子

例 18：证明所有奇正数的集合是可数的。

解：设 S 是所有奇正数的集合，我们构造Z^+到S 的双射。

f: $Z^+ \rightarrow S$ ，有$f(n) = 2n - 1$.

然后证明它是双射函数。

首先证明它是单射。$\forall m, n \in Z^{+}$, $f(m) = f(n) \Rightarrow 2m - 1 = 2n - 1 \Rightarrow m = n$。故 f 是单射.

再证 f 是满射。对任意奇正整数 t，t 是某个偶数 2k 减 1，其中 k 是一个正整数，故 $t = 2k - 1 = f(k)$.

*这个双射的图示见书 P171,图 1.

*一个集合是可数的当且仅当该集合中的元素可以用正整数作下标用一个序列列出来。

例 19：证明所有整数的集合是可数的。

证：我们可以用一个序列把所有整数列出来：$0, 1, -1, 2, -2, \cdots$

更严格地，我们可以构造双射 f: $Z^{+} \rightarrow Z$.

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{如果 } n \text{ 是偶数} \\ -(n-1)/2 & \text{如果 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

可以证明，该函数是Z^{+}到 Z 的双射，因此所有整数的集合是可数集。

例 20：证明所有正有理数的集合是可数的。

解：我们将证明我们可以列出所有正有理数$r_1, r_2, r_3, \cdots$. 首先注意到所有正有理数可以写成除式 p/q ($q \neq 0$).我们可以这样列出所有有理数，第 1 行，q=1, p=1, 2, 3, …; 第 2 行，q=2, p=1, 2, 3, …；第 3 行，q=3, p=1, 2, 3, …，如此进行下去。然后这样列出有理数：首先列出所有有理数 p/q，满足：p+q=2; 然后列出所有有理数 p/q，满足：p+q=3; 再列出所有有理数 p/q，满足：p+q=4; 如此进行下去。

图示见书 P173，图 3.

注意在列出有理数时，可能有重复的项，例如：1/1=2/2=3/3 等等。重复出现的项则不列在其中。最后得到所有正有理数的一个序列。故正有理数的集合是可数的。

例 21：证明实数的集合是不可数的。

证：我们用康托对角线证明法来证明。用反证法。假设实数集 R 是可数的。因为可数集的任意子集也可数（见练习 16），故(0, 1)区间的实数也可数。我们假设(0,1)区间的实数可以列出来：$r_1, r_2, r_3, \cdots$，如下：

$$r_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13}\cdots$$

$$r_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23}\cdots$$

$$r_3 = 0.d_{31}d_{32}d_{33}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_n = 0.d_{n1}d_{n2}d_{n3}\cdots d_{nn}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

其中：$d_{ij} \in \{0,1,2,\cdots,9\}$, i, j =1, 2, 3, ⋯.

构造一个新的(0, 1)区间的实数 x=0.$d_1d_2d_3\cdots$，其中d_i定义如下：

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{如果 } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{如果 } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

i=1, 2, 3, ⋯

那么 x≠ r_i, i=1, 2, 3, ⋯, 因为 x 的第 i 位小数$d_i \neq r_i$的第 i 位小

数d_{ii}。所以$r_1, r_2, r_3, \cdots$没有列出所有(0, 1)区间的实数，这与前面假设(0, 1)区间的实数集是可数集矛盾。因而与实数集 R 可数的假设矛盾。故实数集 R 是不可数的。

作业：

1. 对以下整数序列，给出每个项的简单公式或生成每个项的规则。假设你的公式或规则正确，给出该序列下面 3 项的值。

(a) 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0,⋯

(b) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, ⋯

(c) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, ⋯

2. 求以下和式的值：

(1) $\sum_{j=0}^{6} 2 \cdot (-3)^j$

(2) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (i + j)$

3. 对以下集合 A 和 B，构造从 A 到 B 的双射函数 f: $A \rightarrow B$。

(1) A=(0,1), B=(0, 2);

(2) A={x|$x \in \mathbb{Z} \land x < 0$}, B=N.

4. 判定以下集合是可数的还是不可数的，如果是可数的，构造自然数集到该集合的双射：

(1) 大于 10 的整数的集合；

(2) 负的奇数的集合；

(3) (0, 2)区间的实数的集合；

(4) 所有 7 的倍数的整数的集合。