《离散数学》课程习题与解答(2013级使用)

周晓聪(isszxc@mail.sysu.edu.cn)
中山大学计算机科学系, 广州 510275

2014 年 6 月 17 日

目录

第一章 The Foundations: Logic and Proofs **2**

1.1 Propositional Logic . . . 2

1.3 Propositional Equivalence . . . 4

1.4 Predicates and Quantifiers . . . 6

1.5 Nested Quantifiers . . . 7

1.6 Rules of Inference . . . 9

1.7 Introduction to Proofs . . . 11

1.8 Proof Methods and Strategy . . . 12

第二章 Basic Structure: Sets, Functions, Sequences, Sums and Matrices **14**

2.1 Sets . . . 14

2.2 Set Operations . . . 15

2.3 Functions . . . 17

2.4 Sequences and Summation . . . 18

第三章 Algorithms **22**

3.1 Algorithms . . . 22

3.2 The Growth of Functions . . . 23

3.3 Complexity of Algorithms . . . 24

第四章 Number Theory and Cryptography **25**

4.1 Divisibility and Modular Arithmetic . . . 25

4.2 Integer Representation and Algorithms . . . 26

4.3 Primes and Greatest Common Divisors . . . 26

4.4 Solving Congruences . . . 27

第五章 Induction and Recursion **28**

5.1 Mathematical Induction . . . 28

5.2 Strong Induction and Well-Ordering . . . 28

5.3 Recursive Definitions and Structural Induction . . . 30

5.4 Recursive Algorithms . . . 32

第六章 Counting 34
6.1 The Basic of Counting . . . 34
6.2 The Pigeonhole Principle . . . 35
6.3 Permutations and Combinations . . . 36
6.4 Binomial Coefficients and Identities . . . 36
6.5 Generalized Permutations and Combinations . . . 37
6.6 Generating Permutations and Combinations . . . 38

第八章 Advanced Counting Techniques 39
8.1 Applications of Recurrence Relations . . . 39
8.2 Solving Linear Recurrence Relations . . . 40
8.3 Divide-and-Conquer Algorithms and Recurrence Relations . . . 41
8.5 Inclusion-Exclusion . . . 43
8.6 Applications of Inclusion-Exclusion . . . 43

第九章 Relations 45
9.1 Relations and Their Properties . . . 45
9.3 Representing Relations . . . 47
9.4 Closures of Relations . . . 47
9.5 Equivalence Relations . . . 50
9.6 Partial Orderings . . . 51

第十章 Graphs 52
10.1 Graphs and Graph Models . . . 52
10.2 Graph Terminology and Special Types of Graphs . . . 52
10.3 Representing Graphs and Graph Isomorphism . . . 53
10.4 Connectivity . . . 54
10.5 Euler and Hamilton Paths . . . 55
10.6 Shortest-Path Problems . . . 56
10.7 Planar Graphs . . . 56

第十一章 Trees 58
11.1 Introduction to Trees . . . 58
11.2 Application of Trees . . . 59
11.3 Tree Traversal . . . 61
11.5 Minimum Spanning Trees . . . 62

第一章　The Foundations: Logic and Proofs

1.1　Propositional Logic

作业 1.1 【习题1.1第12题】：设p是“你有流感”；q是“你错失期末考试”；r是“你通过课程”，翻译下列公式成自然语句：

a) $p \to q$	b) $\neg q \leftrightarrow r$	c) $q \to \neg r$
d) $p \vee q \vee r$	e) $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$	f) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

解答：

a) 若你有流感，则你会错失期末考试；
b) 你没错失期末考试，则你通过课程，反之亦然；
c) 若你错失期末考试，则你没通过课程；
d) 若你有流感，则你没通过课程；或者若你错失期末考试，则你没通过课程；
e) 或者你有流感，或者你错失期末考试，或者你通过课程；
f) 你有流感且错失期末考试，或者你没错失期末考试且通过课程。

作业 1.2 【习题1.1第14题】：设p是“你期末考试得A”；q是“你完成本书所有练习”；r是“你课程得A”。使用p, q, r及逻辑联结词符号化下面的自然语句：

a) 你课程得A，但你没完成本书所有练习；
b) 你期末考试得A，你完成本书所有练习，而且你课程得A；
c) 你期末考试得A是你课程得A的必要条件；
d) 你期末考试得A，但你没完成本书所有练习，然而你课程得A；
e) 你课程得A的充分条件是你期末考试得A且你完成本书所有练习；
f) 你课程得A当且仅当要么你完成本书所有练习要么你期末考试得A。

解答：

a) $r \wedge \neg q$	b) $p \wedge q \wedge r$	c) $r \to p$
d) $p \wedge \neg q \wedge r$	e) $(p \wedge q) \to r$	f) $r \leftrightarrow (p \vee q)$

点评 1.1 这一题出现错误最多的是(c)，不少同学将“期末考试得A”是“课程得A”的必要条件，理解成了“期末考试得A”蕴含“课程得A”，这是错误的。

作业 1.3 【习题1.1第33题】：为下列公式构造真值表：

a) $p \to \neg p$ b) $p \leftrightarrow \neg p$ c) $p \oplus (p \vee q)$

d) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ e) $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ f) $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$

解答：a) $p \to \neg p$的真值表如下：

p	$\neg p$	$p \to \neg p$
F	T	T
T	F	F

b) $p \leftrightarrow \neg p$的真值表如下：

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
F	T	F
T	F	F

c) $p \oplus (p \vee q)$的真值表如下：

p	q	$p \vee q$	$p \oplus (p \vee q)$
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	F
T	T	T	F

d) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$的真值表如下：

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p\wedge) \to (p \vee q)$
F	F	F	F	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

e) $A \overset{\text{def}}{=} (q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$的真值表如下：

p	q	$\neg p$	$q \to \neg p$	$p \leftrightarrow q$	A
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	F

f) $A \overset{\text{def}}{=} (p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$的真值表如下：

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	A
F	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T
T	T	T	F	F	T

点评 1.2 这一题的主要问题是有不少同学对于变量的真值赋值顺序不是按照“F, F; F, T; T, F; T, T”的顺序，而是随意的顺序。

1.3 Propositional Equivalence

作业 1.4 【习题1.3第12题】：说明下面的公式都是永真式(不使用真值表)：

a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$　　b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$　　d) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

证明 利用等值演算来判断一个公式是否是永真式只要看该公式经过若干步等价变换之后是否等价于T。

a)

$$
\begin{aligned}
[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q &\equiv \neg[\neg p \wedge (p \vee q)] \vee q && // \text{蕴含等值式} \\
&\equiv p \vee \neg(p \vee q) \vee q && // \text{德摩根定律} \\
&\equiv (p \vee q) \vee \neg(p \vee q) && // \text{交换律，结合律} \\
&\equiv T && // \text{否定律}
\end{aligned}
$$

因此公式$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$是永真式。

b)

$$
\begin{aligned}
&[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \\
\equiv\ &[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow (\neg p \vee r) && // \text{蕴含等值式} \\
\equiv\ &\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r) && // \text{蕴含等值式} \\
\equiv\ &\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee r) && // \text{德摩根定律} \\
\equiv\ &(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r) && // \text{德摩根定律} \\
\equiv\ &[(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee [(q \wedge \neg r) \vee r] && // \text{交换律，结合律} \\
\equiv\ &[(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee [(q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)] && // \text{分配律} \\
\equiv\ &(\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r) && // \text{否定律} \\
\equiv\ &\neg p \vee (\neg q \vee q) \vee r && // \text{交换律，结合律} \\
\equiv\ &T && // \text{否定律}
\end{aligned}
$$

因此公式$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$是永真式。

c)

$$
\begin{aligned}
[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q &\equiv [p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q && // \text{蕴含等值式} \\
&\equiv [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \rightarrow q && // \text{分配律} \\
&\equiv (p \wedge q) \rightarrow q && // \text{否定律} \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee q && // \text{蕴含等值式} \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee q && // \text{德摩根定律} \\
&\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q) && // \text{结合律} \\
&\equiv T && // \text{否定律}
\end{aligned}
$$

因此公式$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$是永真式。

d)

$$
\begin{aligned}
& [(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r \\
\equiv\ & [(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow r && // \text{ 蕴含等值式} \\
\equiv\ & \neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee r && // \text{ 蕴含等值式} \\
\equiv\ & \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee r && // \text{ 德摩根定律} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee r && // \text{ 德摩根定律} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee [(q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)] && // \text{ 结合律，分配律} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \vee r) && // \text{ 否定律} \\
\equiv\ & [(\neg p \wedge \neg q) \vee q] \vee [(p \wedge \neg r) \vee r] && // \text{ 交换律，结合律} \\
\equiv\ & [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)] \vee [(p \vee r) \wedge (\neg r \vee r)] && // \text{ 分配律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee q) \vee (p \vee r) && // \text{ 否定律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee p) \vee q \vee r && // \text{ 交换律，结合律} \\
\equiv\ & T && // \text{ 否定律}
\end{aligned}
$$

因此公式$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$是永真式。 □

作业 1.5 【习题1.3第26题】：证明$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$与$q \rightarrow (p \vee r)$逻辑等值。

证明 可使用等值演算证明这两个公式等值：

$$
\begin{aligned}
\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv p \vee (q \rightarrow r) && // \text{ 蕴含等值式} \\
&\equiv p \vee (\neg q \vee r) && // \text{ 蕴含等值式} \\
&\equiv \neg q \vee p \vee r && // \text{ 交换律} \\
&\equiv q \rightarrow (p \vee r) && // \text{ 蕴含等值式}
\end{aligned}
$$

□

作业 1.6 【习题1.3第33题】：证明$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$与$(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$不逻辑等值。

证明 若p的真值为假，q的真值为假，r的真值为真，而s的真值为假，则$(p \rightarrow q)$的真值为真，而$(r \rightarrow s)$的真值为假，所以$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$的真值为假，而$(p \rightarrow r)$的真值为真，$(q \rightarrow s)$的真值为真，所以$(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$的真值为真，两个公式不等值。 □

点评 1.3 这一题有学生列出两个公式的真值表来说明这两个公式不等值，实际上只要给出对变量的一种真值赋值说明这两个公式不等值即可。有同学使用等值演算来说明公式的不等值，通常来说这是错误的，等值演算只能证明两个公式等值，无法证明两个公式不等值。

作业 1.7 【习题1.3第50题】：这个练习证明逻辑联结词$\downarrow$是完备集：a) 证明$p \downarrow p$与$\neg p$逻辑等值；b) 证明$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$与$p \vee q$逻辑等值c) 证明逻辑联结词$\downarrow$是完备集。

证明 根据$\downarrow$的定义，即当p和q都为假时$p \downarrow q$为真，其他情况$p \downarrow q$为假。即$\downarrow$的真值表如下：

p	q	$p \downarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

这样我们可利用真值表证明(a)，

p	$p \downarrow p$	$\neg p$
F	T	T
T	F	F

上述真值表表明$p \downarrow p$与$\neg p$ 逻辑等值。类似地，也可使用真值表证明(b)，

p	q	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$	$p \vee q$
F	F	T	F	F
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	F	T	T

上述真值表表明$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$与$p \vee q$逻辑等值。由于$\{\neg, \vee\}$是完备集，而(a)与(b)表明任何使用$\neg$和$\vee$的逻辑公式都可使用$\downarrow$表达，因此$\{\downarrow\}$也是完备集。 □

点评 1.4 这一题有学生不太明白完备集(functionally complete of logical operators)的含义，因此不会做!

1.4 Predicates and Quantifiers

作业 1.8 【习题1.4第10题】：设$C(x)$表示“x有只猫”；$D(x)$表示“x有只狗”；$F(x)$表示“x有只白鼬”。使用这些谓词符号化下面的句子（设所有变量的论域都是你们班所有学生）：

a) 你们班有学生有只猫、狗和白鼬；

b) 你们班所有学生都有只猫、狗或白鼬；

c) 你们班有学生有只猫和白鼬，但没有狗

d) 你们班没有学生同时有猫、狗和白鼬；

e) 对于猫、狗和白鼬这三种动物，你们班都有人将它们之中的一种动物作为宠物。

解答：

a) $\exists x(C(x) \wedge D(x) \wedge F(x))$

b) $\forall x(C(x) \vee D(x) \vee F(x))$

c) $\exists x(C(x) \wedge F(x) \wedge \neg D(x))$

d) $\neg \exists x(C(x) \wedge D(x) \wedge F(x))$

e) $\exists x C(x) \wedge \exists x D(x) \wedge \exists x F(x)$

作业 1.9 【习题1.4第20题】：设谓词$P(x)$的论域是$\{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$，请展开下面的公式：

a) $\exists x P(x)$

b) $\forall x P(x)$

c) $\forall x((x \neq 1) \rightarrow P(x))$

d) $\exists x((x \geq 0) \wedge P(x))$

e) $\exists x(\neg P(x)) \wedge \forall x((x < 0) \rightarrow P(x))$

解答：

a) $P(-5) \vee P(-3) \vee P(-1) \vee P(1) \vee P(3) \vee P(5)$;

b) $P(-5) \wedge P(-3) \wedge P(-1) \wedge P(1) \wedge P(3) \wedge P(5)$;

c) $P(-5) \wedge P(-3) \wedge P(-1) \wedge P(3) \wedge P(5)$;

d) $P(1) \vee P(3) \vee P(5)$;

e)

$$
\begin{aligned}
& \exists x(\neg P(x)) \wedge \forall x((x<0) \rightarrow P(x)) \\
\equiv & (\neg P(-5) \vee \neg P(-3) \vee \neg P(-1) \vee \neg P(1) \vee \neg P(3) \vee \neg P(5)) \wedge (P(-5) \wedge P(-3) \wedge P(-1)) \\
\equiv & (\neg(P(-5) \wedge P(-3) \wedge P(-1)) \vee (\neg P(1) \vee \neg P(3) \vee \neg P(5))) \wedge (P(-5) \wedge P(-3) \wedge P(-1)) \\
\equiv & (\neg P(1) \vee \neg P(3) \vee \neg P(5)) \wedge P(-5) \wedge P(-3) \wedge P(-1)
\end{aligned}
$$

作业 1.10 【习题1.4第22题】：对下面每个句子找一个域使得该句子真值为真，再找一个域使得该句子真值为假。

a) 每人都说印地语；

b) 有人超过21岁；

c) 任意两人都有相同名字

d) 有人认识多于两个（其他的）人

解答：定义论域$D = \{\text{Michael Jordan}\}$，且Michael Jordan会说印地语，年龄超过21岁，则在该论域下(a), (b), (c)为真，若Michael Jordan不会说印地语，年龄小于21岁，则(a), (b) 为假。要使得(c)为假，则可另论域$D = \{\text{Michael Jordan}, \text{Kobe Jordan}\}$。要使得(d)为真，可令论域$D = \{\text{Jordan}, \text{Bryant}, \text{Jeremy}\}$，而要使得(d)为真，只要令论域$D = \{\text{Jordan}\}$即可。

作业 1.11 【习题1.4第44题】：判断$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$和$\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$是否逻辑等值，并说明理由。

解答：这两个公式不等值，设论域$D = \{1, 2\}$，且$P(1), Q(2)$为真，而$P(2), Q(1)$为假，则显然$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$为假，而$\forall xP(x)$和$\forall xQ(x)$都为假，因此$\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$的真值为真，从而$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$和$\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$不等值。

点评 1.5 *不少同学认为这两个公式逻辑等值，但其证明显然不会正确，实际上当$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$为真时，$\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$一定为真，但反之却不一定成立，即$\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$为真，而$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$却不一定为真。*

很多学生犯了以偏概全的错误，举部分特例从而推得两公式等价。而如果要通过举例进行论证的话，正确的做法应该是举一个反例。另外由于有些同学对$\forall xP(x)$的取值未理解，导致使用了错误的等价变换;

1.5 Nested Quantifiers

作业 1.12 【习题1.5第12题】：令语句$I(x)$为"x能上因特网"，$C(x, y)$为语句"x和y在因特网上交谈过"，其中x和y 的论域是你们班上的所有学生的集合。用量词表达一下语句。

a) Jerry没有上过因特网；

b) Rachel没有在因特网上和Chelsea交谈过；

c) Jan和Sharon从未在因特网上交谈过；

d) 班上没有人与Bob交谈过；

k) 班上有人上过因特网，但是从未与班上其他同学交谈过；

l) 班上有两个学生彼此没有做过网上交谈；

m) 班上有个学生与班上的每个人都在网上交谈过；

n) 班上至少有两个学生，他们没有与班上的同一个学生交谈过；

解答：

a) $\neg I(Jerry)$；

b) $\neg C(Rachel, Chelsea)$；

c) $\neg C(Jan, Sharon)$；

d) $\forall x \neg C(x, Bob)$；

k) $\exists x(I(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg C(x, y)))$；

l) $\exists x \exists y(x \neq y \wedge \neg C(x, y))$；

m) $\exists x \forall y C(x, y)$；

n) $\exists x \exists y(x \neq y \wedge \forall z(\neg C(x, z) \vee \neg C(y, z)))$；

点评 1.6 本题出错的地方主要集中在后面4 道小题。其中对于是否需要加上“$x \neq y$”、以及使用哪一种逻辑连结符(合取还是条件)，不少同学产生了困惑。关键是要理解语意，从中抽取出谓词、量词及论域等，并仔细比较和区分使用各连结符所产生的语意，选择最符合原语句所表达的意思的连结词。

作业 1.13 【习题1.5第18题】：使用谓词、量词、逻辑连接词（如果有必要）表达下列系统规范说明。

a) 在各种故障情形下，至少要有一个控制台可以访问；

b) 只要档案文件包含了每一个用户所发送的至少一条消息，就可以检索到每一个用户的e-mail地址；

c) 当有一个进程没有被损害时，对于每一个安全漏洞，至少有一个机制可以检测到这个漏洞，反之亦然。

d) 对于网络中的每两个终端，至少有两条路径连接它们；

e) 没有一个用户知道系统中的每一个用户的密码，除了管理员知道所有用户的密码之外。

解答：

a) $\forall f(F(f) \rightarrow \exists c A(c))$；其中，$F(f)$表示语句：系统处于故障$f$情形下；$A(c)$表示语句：控制台$c$可以访问；

b) $(\forall u \exists m(S(u, m) \wedge C(m))) \rightarrow \forall u R(u)$；其中，$C(m)$表示语句：档案文件包含消息$m$; $R(u)$表示语句：用户u可以被检索；$S(u, m)$表示语句：用户u发送了消息m；

c) $\forall b \exists m D(m, b) \leftrightarrow \exists p R(p)$；其中，$D(m, b)$表示语句：机制$m$可以检测漏洞$b$；$R(p)$表示语句：进程$p$正常运行；

d) $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow \exists p \exists q(p \neq q \wedge C(p, x, y) \wedge C(q, x, y)))$；其中，$C(p, x, y)$表示语句：路径$p$ 连接终端x和终端y；

e) $\forall x(x \neq administrator \leftrightarrow \neg \forall y K(x, y))$；其中，$K(x, y)$表示语句：用户$x$知道用户$y$的密码；

点评 1.7 本题容易出错的地方也是语意的理解及连结词的选定。很多同学从原语句中抽取的谓词及量词的数量不够，造成了较多信息的丢失，从而未能充分表达原语句所要表达的意思。

作业 1.14 【习题1.5第28题】：假定每个变量的论域都是实数集，确定下列语句的真值。

a) $\forall x \exists y(x^2 = y)$；

b) $\forall x \exists y(x = y^2)$；

c) $\exists x \forall y(xy = 0)$；

d) $\exists x \exists y(x + y \neq y + x)$；

e) $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(xy = 1))$；

f) $\exists x \forall y(y \neq 0 \to xy = 1)$；

g) $\forall x \exists y(x + y = 1)$；

h) $\exists x \exists y(x + 2y = 2 \land 2x + 4y = 5)$；

i) $\forall x \exists y(x + y = 2 \land 2x - y = 1)$；

j) $\forall x \forall y \exists z(z = (x + y)/2)$；

解答：a) T；b) F；c) T；d) F；e) T；f) F；g) T；h) F；i) F；j) T；

点评 1.8 第f)小题出错频率高，不少同学错将题意理解成了“对于任意一个不为0的实数，都存在一个实数，使得两者的乘积等于1”即$\forall y \exists x(y \neq 0 \to xy = 1)$。另外第h)和第i)小题的错误率也较高，第h) 小题主要是要理解方程组无解，即不存在满足条件的x和y，而题意是说存在这样的x和y，所以h) 的真值为假；第i) 小题主要是要理解方程组有唯一解，因此，不可能对任意的x 都会存在一个y，使得该x和y 是方程组的解，故i) 的真值也为假。

作业 1.15 【习题1.5第32题】：表达出下列语句的否定，并将所有的否定词紧跟在谓词前。

a) $\exists z \forall x \forall y T(x, y, z)$；

b) $\exists x \exists y P(x, y) \land \forall x \forall y Q(x, y)$；

c) $\exists x \exists y(Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$。

d) $\forall y \exists x \exists z(T(x, y, z) \lor Q(x, y))$；

解答：

a) $\forall z \exists x \exists y \neg T(x, y, z)$；

b) $\forall x \forall y \neg P(x, y) \lor \exists x \exists y \neg Q(x, y)$；

c) $\forall x \forall y(\neg Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$。

d) $\exists y \forall x \forall z(\neg T(x, y, z) \land \neg Q(x, y))$；

1.6 Rules of Inference

作业 1.16 【习题1.6第12题】：首先利用题11的结论，然后利用表1中的推理规则，证明由前提：$(p \land t) \to (r \lor s)$，$q \to (u \land t)$，$u \to p$，$\neg s$; 及结论：$q \to r$；形成的论证是有效的。

证明 利用题11的结论可知，此题只需证明由前提：$(p \land t) \to (r \lor s)$，$q \to (u \land t)$，$u \to p$，$\neg s$，$q$;

及结论：r；形成的论证是有效的。

(1) $q \to (u \wedge t)$	// 前提引入
(2) q	// 前提引入
(3) $u \wedge t$	// (1)(2)假言推理
(4) u	// (3)化简律
(5) t	// (3)化简律
(6) $u \to p$	// 前提引入
(7) p	// (4)(6)假言推理
(8) $p \wedge t$	// (5)(7)合取律
(9) $(p \wedge t) \to (r \vee s)$	// 前提引入
(10) $r \vee s$	// (8)(9)假言推理
(11) $\neg s$	// 前提引入
(12) r	// (10)(11)析取三段论

□

点评 1.9 不理解题意是导致该题出错的一个重要原因，较多同学未按题意利用11题的结论，以致证明的难度加大。另外，由于初次接触，对推理规则不熟，大部分同学未按规范书写证明过程，思路比较混乱。

作业 1.17 【习题1.5第16题】：判断下列语句的正误，并给出解释：

a) 每个被大学录取的人都住过宿舍，Mia从没住过宿舍，因此，Mia没有被大学录取；

b) 敞篷车开起来很有趣，Isaac的车不是敞篷车，因此，Isaac的车开起来不是很有趣；

c) Quincy喜欢所有的动作电影，Quincy喜欢电影八面威风，因此八面威风是动作电影；

d) 所有捕龙虾的渔夫都至少打了一个陷阱，Hamilton是一个捕龙虾的渔夫，因此Hamilton至少打了一个陷阱；

解答：

a) 正确。令$E(x)$表示x被大学录取了，令$L(x)$表x住过宿舍，则由前提$\forall x(E(x) \to L(x))$ 能推出结论$\neg L(Mia) \to \neg(E(Mia)$。

b) 错误。敞篷车开起来有趣不代表别的车开起来没有趣味。

c) 错误。Quincy喜欢所有的动作电影不代表Quincy喜欢的电影都是动作电影。

d) 正确。与a)类似，Hamilton是捕龙虾的渔夫的一个实例。

作业 1.18 【习题1.6第24题】：找出下面证明如果$\forall x(P(x) \vee Q(x))$是正确的，则$\forall x P(x) \vee$

$\forall xQ(x)$也是正确的过程中的错误。

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ \forall x(P(x) \vee Q(x)) & //\ 前提引入 \\
(2)\ P(c) \vee Q(c) & //\ (1)全称消除 \\
(3)\ P(c) & //\ (2)化简律 \\
(4)\ \forall xP(x) & //\ (3)全称引入 \\
(5)\ Q(c) & //\ (2)化简律 \\
(6)\ \forall xQ(x) & //\ (5)全称引入 \\
(7)\ \forall xP(x) \vee \forall xQ(x) & //\ (4)(6)合取律
\end{array}
$$

解答：第(3), (5), (7)句都是错的：其中(3),(5)中使用的化简律对析取使用而非合取（化简律应对合取使用）；(7)中的合取律是对析取使用而非合取。

点评 1.10 较多同学遗漏第(7)处的错误。

作业 1.19 【习题1.6第28题】：使用推理规则证明："若$\forall x(P(x) \vee Q(x))$与$\forall x((\neg P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$为真，则$\forall x(\neg R(x) \rightarrow P(x))$也为真。其中所有量词的论域相同。

证明

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ \forall x(P(x) \vee Q(x)) & //\ 前提引入 \\
(2)\ P(c) \vee Q(c) & //\ (1)全称消除 \\
(3)\ \forall x((\neg P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)) & //\ 前提引入 \\
(4)\ \forall x(P(x) \vee R(x) \vee \neg Q(x)) & //\ (3)等价变换 \\
(5)\ P(c) \vee R(c) \vee \neg Q(c) & //\ (4)全称消除 \\
(6)\ P(c) \vee P(c) \vee R(c) & //\ (2)(5)消解律 \\
(7)\ \neg R(c) \rightarrow P(c) & //\ (6)等价变换 \\
(8)\ \forall x(\neg R(x) \rightarrow P(x)) & //\ 全称引入
\end{array}
$$

□

点评 1.11 较多同学对全称消除及全称引入不熟。

1.7 Introduction to Proofs

作业 1.20 【习题1.7第16题】：证明若m和n是整数，且mn是偶数，则m或者n是偶数；

解答：利用反证法。若是m和n 都是奇数，设$m=2k+1$，$n=2q+1$，k,q为整数, 则mn=$(2k+1)(2q+1)$=$4kq+2k+2q+1$=$2(2kq+k+q)+1$，所以mn是奇数，这与mn是偶数矛盾！所以m,n中至少有一个是偶数。证毕。

作业 1.21【习题1.7第32题】：证明以下关于实数x的三个命题是等价的：(i) x是有理数；(ii) $x/2$是有理数；(iii) $3x-1$是有理数；

解答：通过证明语句$(i) \rightarrow (ii), (ii) \rightarrow (iii), (iii) \rightarrow (i)$均为真来证明三者等价。

(1) 若x是有理数，即存在整数$p, q(q \neq 0)$使得$x = p/q$,则$x/2 = p/(2q)$，其中$2q \neq 0$，这表明$x/2$也是有理数；

(2) 若$x/2$是有理数，即存在整数$p, q(q \neq 0)$使得$x/2 = p/q$,则$3x-1 = 6 \times x/2 - 1 = (6p-q)/q$，其中$q \neq 0$，这表明$3x-1$ 也是有理数；

(3) 若$3x-1$是有理数，即存在整数$p, q(q \neq 0)$使得$3x-1 = p/q$,则$x = (p/q+1)/3 = (p+q)/3q$，其中$3q \neq 0$，这表明x 也是有理数；

故三者是等价的。

点评 1.12 *不少同学采用的方法是证明语句$(i) \to (ii), (ii) \to (i), (i) \to (iii), (iii) \to (i)$均为真，这样也可以得出三者等价的结论，不过其过程稍微繁琐一些，其本质是一样的。*

作业 1.22 【习题1.7第34题】：下列求解方程$\sqrt{2x^2-1} = x$的推理过程是否正确？

(1) $\sqrt{2x^2-1} = x$，给定的；

(2) $2x^2 - 1 = x^2$，对(1)两边求平方；

(3) $x^2 - 1 = 0$，从(2)的两边都减去x^2；

(4) $(x+1)(x-1) = 0$，对x^2-1进行因式分解；

(5) $x = 1$或$x = -1$，因为$ab = 0$蕴含$a = 0$ 或$b = 0$；

解答：该推理过程不正确。由于该推理过程中存在的平方运算可能导致推理过程不可逆，因此得到的$x = 1$及$x = -1$ 只是原方程可能的解，还需要将其代入原方程进行验证。实际上，由于$\sqrt{2x^2-1} \geq 0$，即$x \geq 0$，故方程的每个解x 必须满足约束条件$x \geq \sqrt{2}/2$，因此解$x = -1$应舍去。

1.8 Proof Methods and Strategy

作业 1.23 【习题1.8第10题】：证明$2 \times 10^{500} + 15$ 或$2 \times 10^{500} + 16$ 不是完全平方数。你的证明是构造性的还是非构造性的？

解答：假设$2 \times 10^{500} + 15$ 和$2 \times 10^{500} + 16$都是完全平方数，则存在正整数$a, b(a \neq b)$，使得$2 \times 10^{500} + 15 = a^2$ ，以及$2 \times 10^{500} + 16 = b^2$。因此有$b^2 = a^2 + 1$，即$b - a = \frac{1}{b+a}$，这意味着$0 < b - a < 1$，即$b - a$是一个小数，这显然与$b - a$是整数矛盾，故假设不成立，原命题得证。由于我们并未证明究竟哪个数不是完全平方数，因此这是一个非构造性证明。

点评 1.13 *很多同学没有回答其证明过程是构造性的还是非构造性的。*

作业 1.24 【习题1.8第22题】：使用前推证明如果x是一个非零实数，那么$x^2 + 1/x^2 \geq 2$。

解答：若x是一个非零实数，则有$(x - 1/x)^2 \geq 0$，即$x^2 - 2 + 1/x^2 \geq 0$，因此有$x^2 + 1/x^2 \geq 2$，命题得证。

点评 1.14 *部分同学通过利用不等式$a^2 + b^2 \geq 2ab$来证明，这犯了循环论证的错误，因为其实该题就相当于要证明这个不等式。*

作业 1.25 【习题1.8第34题】：证明$\sqrt[3]{2}$是无理数。

解答：假设$\sqrt[3]{2}$是有理数p/q，其中p和q是正整数，且两者没有除了1以外的公因子，则$2 = p^3/q^3$，即$p^3 = 2q^3$，因此$\sqrt[3]{p}$是偶数，由于奇数的乘积仍然为奇数，所以p为偶数，不妨令$p = 2m$，m为整数，代入等式$p^3 = 2q^3$，得$q^3 = 4m^3$，因此q^3也是偶数。由于p和q都是偶数，因此2是它们的公因子，矛盾！故假设不成立，$\sqrt[3]{2}$ 是无理数。

点评 1.15 少数同学在得到$p^3 = 2q^3$之后，认为$p = \sqrt[3]{2}q$是无理数，从而推出$\sqrt[3]{2}$是无理数，这显然也是犯了循环论证的错误。

第二章 Basic Structure: Sets, Functions, Sequences, Sums and Matrices

2.1 Sets

作业 2.1 【习题2.1第10题】：判断下面语句是否正确：

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$；

b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$；

c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$；

d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$；

e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$；

f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$；

g) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$；

解答：

a) 对；

b) 对；

c) 错，实际上这两个集合相等。

d) 对；

e) 对；

f) 对；

g) 错，两个集合是相等的，因此不是真子集关系；

点评 2.1 第g)小题错误率较高，估计是将$\subset$看成了$\subseteq$。

作业 2.2 【习题2.1第24题】：判断下列每一个集合是否是某一个集合的幂集：

a) $\emptyset$；

b) $\{\emptyset, \{a\}\}$；

c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$；

d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$；

解答：

a) 不是；任意一个集合的幂集必然至少包含一个元素，即$\emptyset$。

b) 是集合$\{a\}$的幂集；

c) 不是；任意一个集合的幂集的基是2 的幂次方。

d) 是集合$\{a, b\}$的幂集；

点评 2.2 部分同学认为空集是空集的幂集。

2.2 Set Operations

作业 2.3 【习题2.2第18题】：A，B，C为集合，证明下列结论：

a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$；

b) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$；

c) $(A - B) - C \subseteq A - C$；

d) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$；

e) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$；

解答：可以考虑用文氏图来解答，或者参考下列文字证明。

a) 对每个$x \in (A \cup B)$，有$x \in A \vee x \in B$，一定有$x \in A \vee x \in B \vee x \in C$，即$x \in (A \cup B \cup C)$，所以$(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$；

b) 对每个$x \in (A \cap B \cap C)$，有$x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$，所以有$x \in A \wedge x \in B$，所以$(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$；

c) 集合$(A - B) - C$和集合$(A - C) - B$相等，这就意味着，对每个$(A - C) - B$ 中的x，有$x \in (A - C) \wedge x \notin B$，所以有$x \in (A - C)$，所以$(A - B) - C \subseteq A - C$；

d) 对$x \in (A - C)$意味着$x \in A \wedge x \notin C$，而$x \in (C - B)$ 意味着$x \in C \wedge x \notin B$，因此$(A - C) \cap (C - B)$ 意味着$x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in C \wedge x \notin B$，该式为永假式，所以$(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$；

e) $x \in (B - A) \cup (C - A)$ 意味着$(x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin A)$，$(B \cup C) - A$ 意味着$(x \in B \vee x \in C) \wedge x \notin A$，由于

$$
\begin{aligned}
& (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin A) \\
\equiv & [(x \in B \wedge x \notin A) \vee x \in C] \wedge [(x \in B \wedge x \notin A) \vee x \notin A) \\
\equiv & (x \in B \vee x \in C) \wedge (x \in C \vee x \notin A) \wedge (x \in B \vee x \notin A) \wedge x \notin A \\
\equiv & [(x \in B \vee x \in C) \wedge x \notin A] \wedge [(x \in B \vee x \notin A) \wedge (x \in C \vee x \notin A)] \\
\equiv & (x \in B \vee x \in C) \wedge x \notin A
\end{aligned}
$$

所以$(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$。

点评 2.3 较多同学采用了形式类似如下："$\because x \in A \cup B \quad \therefore x \in (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \quad \therefore A \cup B \subsetneqq A \cup B \cup C$"的证明方法，但此题的原意应该是要求读者利用集合操作的定义或集合恒等式来证明，因此最好写详细一些。

作业 2.4 【习题2.2第28题】：画出下面关于集合A，B，C，D联合的文氏图：

a) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$；

b) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$；

c) $A - (B \cap C \cap D)$；

解答：各集合的文氏图如下列各图所示，其中集合U表示全集，用一个长方形表示，四个椭圆分别表示集合A，B，C，D，阴影部分表示所求集合。

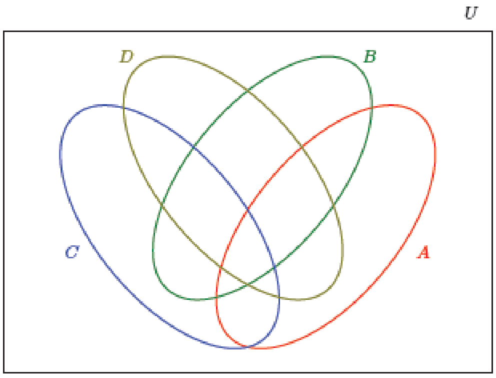


图2.1 总体文氏图

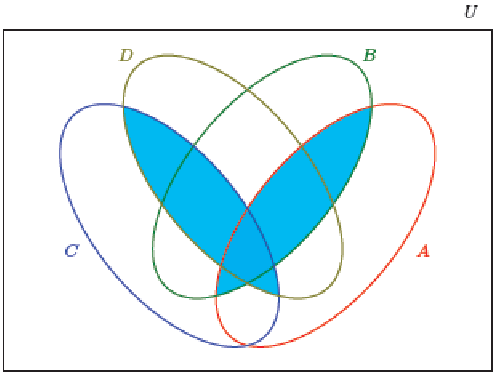


图2.2 集合$(A\cap B)\cup(C\cap D)$文氏图

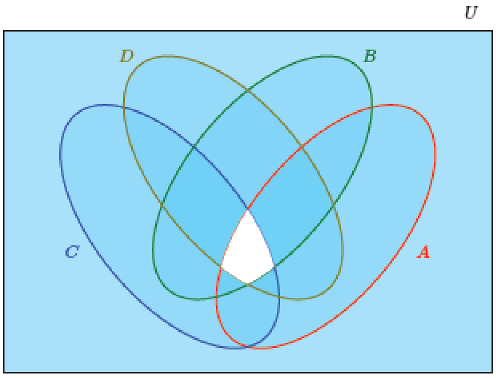


图2.3 集合$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\cup\overline{D}$文氏图

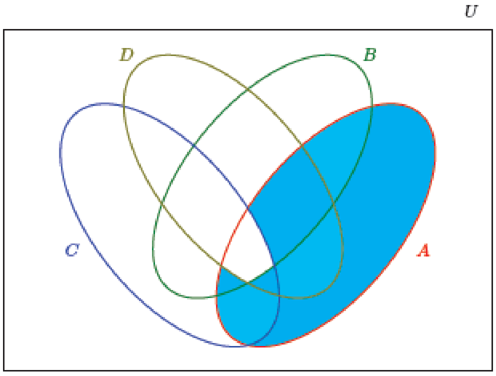


图2.4 集合$A-(B\cap C\cap D)$文氏图

点评 2.4 此题的主要问题是所有同学均是采用四个圆来表示四个集合，而且许多同学为了方便画图使得三张图不一致。这样做并不符合正规画法，因为用四个圆来表示四个集合不能将$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$、$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D$、$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D}$、$\cdots$ 、$A\cap B\cap C\cap D$这16种情况均在同一张图中用一块独立的区域表示。

作业 2.5 【习题2.2第30题】：有集合A，B，C，能否由下面的条件得出$A=B$：

a) $A\cup C=B\cup C$?

b) $A\cap C=B\cap C$?

c) $A\cup C=B\cup C$并且$A\cap C=B\cap C$?

解答：

a) 不能，当A和B均为C的子集时，A不一定等于B；

b) 不能，当C同时为A和B的子集时，A不一定等于B；

c) 能，i. 对任意的$x\in A$，必满足$x\in A\cup C$，此时，若$x\notin C$，由于$A\cup C=B\cup C$，所以$x\in B$，若$x\in C$，则$x\in A\cap C$，由于$A\cap C=B\cap C$，所以$x\in B$，故$A\subseteq B$；ii. 对任意的$x\notin A$，必满足$x\notin A\cap C$，此时，若$x\in C$，由于$A\cap C=B\cap C$，所以$x\notin B$，若$x\notin C$，则$x\notin A\cup C$，由于$A\cup C=B\cup C$，所以$x\notin B$，故$x\notin A\rightarrow x\notin B$为真，其逆否形式$x\in B\rightarrow x\in A$也为真，即$B\subseteq A$；综上，$A=B$。

点评 2.5 此题需要注意如果利用包含关系进行证明$A=B$的话，必须证明$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。

2.3 Functions

作业 2.6 【习题2.3第12题】：判断下列每个函数是否是从整数到整数的单函数。

a) $f(n) = n - 1$；

b) $f(n) = n^2 + 1$；

c) $f(n) = n^3$；

d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$；

解答：

a) 是，若是$n_1 - 1 = n_2 - 1$，则$n_1 = n_2$；

b) 不是，例如$f(2) = f(-2) = 5$；

c) 是，若是$n_1^3 = n_2^3$，则$n_1 = n_2$；

d) 不是，例如$f(3) = f(4) = 2$；

作业 2.7 【习题2.3第14题】：判断下列$f : Z \times Z \to Z$是否是满函数。

a) $f(m, n) = 2m - n$；

b) $f(m, n) = m^2 - n^2$；

c) $f(m, n) = m + n + 1$；

d) $f(m, n) = |m| - |n|$；

e) $f(m, n) = m^2 - 4$；

解答：

a) 是，$f(0, n) = 0 - n = -n$，显然值域可以取到每个整数；

b) 不是，$f(m, n) = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$，若是$f(m, n) = 2$,由于$(m + n), (m - n)$奇偶性相同，则必然有他们同为偶数，那么$f(m, n) = 2$可以被4整除，但是根据常识我们知道2不能被4整除，矛盾！所以，2不在函数值域中，不是满射；

c) 是，$f(-1, n) = n$，显然值域可以取到每个整数；

d) 是，令$m = 0$，则值域覆盖所有的负整数，令$n = 0$，则值域覆盖所有非负数；

e) 不是，显然-5不在值域中，故不是满射。

点评 2.6 此题主要出错在第b)小题。

作业 2.8 【习题2.3第20题】：给出一个从自然数到自然数的函数的例子。

a) 单射但不是满射；

b) 满射但不是单射；

c) 既是单射又是满射，但是不是恒等函数；

d) 既不是单射也不是满射；

解答：

a) $f(n) = n + 17$；

b) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$；

c)

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & if\ n\ is\ even \\ n+1 & if\ n\ is\ odd \end{cases} \tag{2.1}$$

d) $f(n)=17$；

点评 2.7 此题错误率较高，主要表现在两个方面：i.未考虑周全函数是从自然数到自然数的，因而使得函数值超出自然数范围，如取$f(x)=e^x$、$f(x)=x^2-7x+6$等；ii.第c)小题中取$f(x)=|x|$，其实这就相当取恒同函数，因为在自然数范围内$|x|=x$，而题中要求不能取恒同函数。

作业 2.9 【习题2.3第38题】：令$f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$，其中a，b，c，d是常数，确定使得$f\circ g=g\circ f$成立的充要条件，用常数a，b，c，d表示。

解答：$f\circ g(x)=f(g(x))=a(cx+d)+b=acx+b+ad$，$g\circ f(x)=g(f(x))=c(ax+b)+d=acx+d+bc$，$f\circ g=g\circ f$，即$acx+b+ad=acx+d+bc$，故$ad+b=bc+d$

点评 2.8 此题有少数同学将最终的结果化成了分数形式，这使得四个参数的取值受到了不该有的约束，即确保分母不为零，从而减少了一些本来满足条件的取值。

2.4 Sequences and Summation

作业 2.10 【习题2.4第12题】：说明以下序列$\{a_n\}$ 是递归关系$a_n=-3a_{n-1}+4a_{n-2}$ 的解：

a) $a_n=0$；

b) $a_n=1$；

c) $a_n=(-4)^n$；

d) $a_n=2(-4)^n+3$；

解答：

a) 若$a_n=0$，则$-3a_{n-1}+4a_{n-2}=-3\times 0+4\times 0=0=a_n$，故$a_n=0$是递归关系的解；

b) 若$a_n=1$，则$-3a_{n-1}+4a_{n-2}=-3\times 1+4\times 1=1=a_n$，故$a_n=1$是递归关系的解；

c) 若$a_n=(-4)^n$，则$-3a_{n-1}+4a_{n-2}=-3\times(-4)^{n-1}+4\times(-4)^{n-2}=12\times(-4)^{n-2}+4\times(-4)^{n-2}=16\times(-4)^{n-2}=(-4)^n=a_n$，故$a_n=(-4)^n$是递归关系的解；

d) 若$a_n=2(-4)^n+3$，则$-3a_{n-1}+4a_{n-2}=-3\times[2(-4)^{n-1}+3]+4\times[2(-4)^{n-2}+3]=[-6\times(-4)^{n-1}-9]+[8\times(-4)^{n-2}+12]=32\times(-4)^{n-2}+3=2(-4)^n+3=a_n$，故$a_n=2(-4)^n+3$是递归关系的解；

作业 2.11 【习题2.4第16题】：使用例10中的迭代方法，求以下给定初始条件的递归关系的解。

a) $a_n=-a_{n-1}$，$a_0=5$；

b) $a_n=a_{n-1}+3$，$a_0=1$；

c) $a_n=a_{n-1}-n$，$a_0=4$；

d) $a_n=2a_{n-1}-3$，$a_0=-1$；

e) $a_n=(n+1)a_{n-1}$，$a_0=2$；

f) $a_n=2na_{n-1}$，$a_0=3$；

g) $a_n=-a_{n-1}+n-1$，$a_0=7$；

解答：

a)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (-1)\cdot 5 = (-1)^1 \cdot 5 \\
a_2 &= (-1)\cdot(-1)^1 \cdot 5 = (-1)^2 \cdot 5 \\
a_3 &= (-1)\cdot(-1)^2 \cdot 5 = (-1)^3 \cdot 5 \\
&\vdots \\
a_n &= (-1)\cdot(-1)^{n-1} \cdot 5 = (-1)^n \cdot 5
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1+3 \\
a_2 &= (1+3)+3 = 1+3\cdot 2 \\
a_3 &= (1+2\cdot 3)+3 = 1+3\cdot 3 \\
&\vdots \\
a_n &= (1+(n-1)\cdot 3)+3 = 1+3\cdot n
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 4-1 \\
a_2 &= 4-1-2 \\
a_3 &= 4-1-2-3 \\
&\vdots \\
a_n &= 4-1-2-3-\cdots-n = 4-\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1}-3 \\
&= 2(2a_{n-2}-3)-3 = 2^2 a_{n-2} - 2\cdot 3 - 3 \\
&= 2^2(2a_{n-3}-3)-3 = 2^3 a_{n-3} - 2^2\cdot 3 - 2\cdot 3 - 3 \\
&\vdots \\
&= 2^n a_0 - 2^{n-1}\cdot 3 - 2^{n-2}\cdot 3 - \cdots - 2\cdot 3 - 3 = -2^n - 3\cdot\frac{1-2^n}{1-2} = 3-2^{n+2}
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
a_n &= (n+1)a_{n-1} \\
&= (n+1)n a_{n-2} \\
&= (n+1)n(n-1)a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= (n+1)n(n-1)(n-2)\cdots 2a_0 = 2\cdot(n+1)!
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2na_{n-1} \\
&= 2n \cdot 2(n-1)a_{n-2} = 2^2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot a_{n-2} \\
&= 2^2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot 2(n-2) \cdot a_{n-3} = 2^3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2[n-(n-1)] \cdot a_0 = 3 \cdot 2^n \cdot n!
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
a_n &= -a_{n-1} + n - 1 = (-1) \cdot a_{n-1} + (n-1) \\
&= (-1) \cdot (-a_{n-2} + n - 2) + (n-1) = (-1)^2 \cdot a_{n-2} + (-1) \cdot (n-2) + (n-1) \\
&= (-1)^2 \cdot (-a_{n-3} + n - 3) + (-1) \cdot (n-2) + (n-1) = \\
&\quad (-1)^3 \cdot a_{n-3} + (-1)^2 \cdot (n-3) + (-1) \cdot (n-2) + (n-1) \\
&\vdots \\
&= (-1)^n \cdot a_0 + (-1)^{n-1} \cdot 0 + (-1)^{n-2} \cdot 1 + \cdots + (-1)^2 \cdot (n-3) + (-1) \cdot (n-2) + (n-1) = \\
&\quad (-1)^n \cdot 7 + (-1)^{n-2} \cdot 1 + \cdots + (-1)^2 \cdot (n-3) + (-1) \cdot (n-2) + (n-1) = \\
&\quad (-1)^n \cdot 7 + \frac{n - \frac{1-(-1)^n}{2}}{2}
\end{aligned}
$$

即：

$$
a_n = \begin{cases} 7 + k & if\ n = 2k \\ -7 + k & if\ n = 2k+1 \end{cases} \tag{2.2}
$$

点评 2.9 大部分同学未使用例10中的迭代方法，而是用高中求数列通项公式的方法；使用迭代方法的同学中大多数也没能使每一次迭代过程中的规律体现出来。2013级同学第(g)小题错得相对多一些，推导不正确，或者归纳不正确。

作业 2.12 【习题2.4第26题】：对下列的每个整数列表，提供简单的公式或者规则可以产生其整数序列中的每一项。若你给出的规则或者公式是正确的，给出此序列的下面的三项。

a) $3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102...$；

b) $7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43...$；

c) $1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011...$；

d) $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5...$；

e) $0, 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, 19682...$；

f) $1, 3, 15, 105, 945, 10395, 135135, 2027025, 34459425...$；

g) $1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1....$；

h) $2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296...$

解答：

a) 这里我们给出该序列的递归定义：$a_{n+1} - a_n = 2n + 1$，由这个定义知，后面的三项分别是$123, 146, 171$。

b) 容易发现，可以用下列的通式来表示：$a_n = 4n + 3$，所以后面的三项分别是$47, 51, 55$；

c) 容易发现，这是用二进制来表示$1, 2, 3 ...$,其对应法则就是整数与二进制的转换法则，可以用2辗转相除直到结果为1，所得到的余数和最后的1 倒序输出即可。所以后面的三项分别是$1100, 1101, 1110$；

d) 容易发现，令序列$\{b_n\}$的递归关系为：$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$，初始条件为：$b_1 = 1$，$b_2 = 2$。则题中序列从第$(n-1)^2 + 1$项到第n^2 项均为序列$\{b_n\}$中的第n项，所以后面的三项分别是$8, 8, 8$；

e) 容易发现，该序列的通式为：$a_n = 3^n - 1$，所以后面的三项分别是$59048, 177146, 531440$；

f) 这里我们给出该序列的递归定义：$a_{n+1} = (2n + 1)a_n$,所以后面的三项分别是654729075, 13749310575, 316234143225；

g) 容易发现，对于该序列中序号从第$\frac{i(i-1)}{2} + 1$到$\frac{i(i+1)}{2}$的每个项a_n，若i为奇数，则$a_n = 1$，否则$a_n = 0$, 所以后面的三项分别是$0, 0, 0$；

h) 这里我们给出该序列的递归定义：$a_{n+1} = a_n^2$，所以后面的三项分别是4294967296^2, 4294967296^4, 4294967296^8；

点评 2.10 很多同学要么没有给出规则，要么没有写出后三项。根据同学们的情况，需要注意的两点有：1)下表变量的起始位置；2) 此题中描述规则不一定要使用通项公式或递归关系式，用语言描述也可以。

作业 2.13 【习题2.4第30题】：$S = \{1, 3, 5, 7\}$，下列各式的和是多少？

a) $\sum_{j \in S} j$ ；

b) $\sum_{j \in S} j^2$；

c) $\sum_{j \in S} (1/j)$ ；

d) $\sum_{j \in S} 1$ ；

解答:

a) $\sum_{j \in S} j = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$；

b) $\sum_{j \in S} j^2 = 1 + 9 + 25 + 49 = 84$；

c) $\sum_{j \in S} (1/j) = 1/1 + 1/3 + 1/5 + 1/7) = (105 + 35 + 21 + 15)/105 = 176/105$ ；

d) $\sum_{j \in S} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ ；

点评 2.11 2013级有一个同学(d)小题理解错误，以为和为1。

第三章 Algorithms

3.1 Algorithms

作业 3.1 【习题3.1第2题】：判断下列的程序中缺少了哪些算法的特征。

a) **procedure** $double(n$: positive integer)

while $n > 0$ **do**
  $n := 2n$
end while

b) **procedure** $divide(n$: positive integer)

while $n \geq 0$ **do**
  $m := 1/n$
  $n := n - 1$
end while

c) **procedure** $sum(n$: positive integer)

$sum := 0$
while $i < 10$ **do**
  $sum := sum + i$
end while

d) **procedure** $choose(a, b$: positive integer)

$x :=$ either a or b

解答：

a) 缺少有限性(finiteness)，循环没有终止条件。

b) 缺少正确性(correctness)，因为存在$n = 0$的情况，而n作为分母是不能为零的。

c) 缺少明确性(definiteness)，i的值从未给出。

d) 缺少明确性(definiteness)，程序无法判定x究竟选择a还是b的值。

点评 3.1 2013级好些同学不是能够准确地找出缺少的算法特征，尤其b) c)小题错误较多。

作业 3.2 【习题3.1第6题】：描述一个算法，以n个整数中的表作为输入，求表中负数的个数。

解答：如算法1 所示：

Algorithm 1 Count The Number of Negative Integers

procedure *negatives*($a_1, a_2, \ldots, a_n$: integers)

$k = 0$;
for $i = 1$ to n **do**
  if $a_i < 0$ **then**
    $k = k + 1$;
  end if
end for
return k {k is number of negative integers}

点评 3.2 很多同学返回的是所有负数的集合，而不是题中要求的负数的个数，另外需要注意的是所写的算法应该满足算法的性质。

3.2 The Growth of Functions

作业 3.3 【习题3.2第8题】：对下列每个函数求最小的整数n，使得$f(x)$是$O(x^n)$。

a) $f(x) = 2x^2 + x^3 \log x$;

b) $f(x) = 3x^5 + (\log x)^4$;

c) $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)/(x^4 + 1)$;

d) $f(x) = (x^3 + 5\log x)/(x^4 + 1)$;

解答:

a) 由于随着x的增大，$\log x$无限增大，所以不会存在常数k和C，使得当$x > k$时，$|x^3 \log x| \le C|x^3|$ 恒成立，即$x^3 \log x$不是$O(x^3)$；又由于当$x > 0$，$C = 3$ 时，$f(x) = 2x^2 + x^3 \log x \le 2x^4 + x^4 = 3x^4$，故所求最小整数为$n = 4$；

b) 当$x > 1$时，$f(x) = 3x^5 + (\log x)^4 \ge 3x^5$，且$f(x) \le 3x^5 + x^4 \le 3x^5 + x^5 = 4x^5$，即$f(x)$为$\Theta(x^5)$，故所求最小整数为$n = 5$；

c) 当$x > 1$时，$f(x) = (x^4 + x^2 + 1)/(x^4 + 1) < 3x^4/x^4 = 3$，所以$f(x)$为$O(1)$即$O(x^0)$；又因为此时$f(x) > (x^4+1)/(x^4+1) = 1 > 1/x = x^{-1}$，所以对于任意一个正常数$C$，都存在常数$k = C+1$，使得当$x > k$，时$|f(x)| > C|x^{-1}|$，所以$f(x)$ 不可能是$O(x^{-1})$；故所求最小整数为$n = 0$；

d) 当$x > 1$时，$f(x) = (x^3 + 5\log x)/(x^4 + 1) \le 6x^3/x^4 = 6x^{-1}$，所以$f(x)$为$O(x^{-1})$；又因为当$x > 2$时，$f(x) > x^3/(2x^4) = 2x^{-1} > x^{-2}$，因此与c)类似，$f(x)$ 不可能是$O(x^{-2})$；故所求最小整数为$n = -1$；

点评 3.3 很多同学没有求解过程，也没有分析为什么求得的整数是最小的。2013级学生(a), (c)小题错误比较多!

作业 3.4 【习题3.2第18题】：令k为正整数，证明$1^k + 2^k + \cdots + n^k$是$O(n^{k+1})$。 证明：当$n > 1$时，$1^k + 2^k + \cdots + n^k < \underbrace{n^k + n^k + \cdots + n^k}_{n个} = n^{k+1}$ 恒成立，所以$1^k + 2^k + \cdots + n^k$是$O(n^{k+1})$ □

3.3 Complexity of Algorithms

作业 3.5 【习题3.3第4题】：为下列算法片段给出一个关于运算量的大O估计，其中一次运算是指进行一次加法或一次乘法（忽略while 循环中用来进行循环条件测试的比较运算）。

```
i := 1
t := 0
while i ≤ n do
    t := t + i
    i := 2i
end while
```

解答：为了简化描述，假定$n = 2^k$，则整个循环共执行了$k+1$次，即当$i = 1, 2, 4, \ldots, 2^k$时执行循环，每次循环均执行两次运算（一次加法和一次乘法），所以这个算法片段总共执行了$2(k+1) = 2\log n + 2$次运算，其复杂度为$O(\log n)$。（如果n不是2的幂，循环共执行$\lfloor \log n \rfloor + 1$ 次，算法复杂度不变）

点评 3.4 绝大多数同学的结果正确，但是分析过程不充分，没能比较准确的分析出执行的过程究竟是怎样的。2013级也有很多同学错误分析为$O(n^2), O(n)$等!

第四章　Number Theory and Cryptography

4.1　Divisibility and Modular Arithmetic

作业 4.1 【习题4.1第14题】：假设a和b是整数，并且$a \equiv 11 (\mod 19)$，$b \equiv 3 (\mod 19)$。找出满足下列条件的整数$c (0 \le c \le 18)$。

a) $c \equiv 13a (\mod 19)$;

b) $c \equiv 8b (\mod 19)$;

c) $c \equiv a - b (\mod 19)$;

d) $c \equiv 7a + 3b (\mod 19)$;

e) $c \equiv 2a^2 + 3b^2 (\mod 19)$;

f) $c \equiv a^3 + 4b^3 (\mod 19)$;

解答：

a) 因为$c \equiv 13a (\mod 19)$，$a \equiv 11 (\mod 19)$，所以$c \equiv 13 \times 11 (\mod 19)$，即$c \equiv 143 (\mod 19)$，所以$c = 143 + 19k_1$，$k_1$ 为整数，又因为$0 \le c \le 18$，所以$k_1 = -7$，即$c = 143 + 19 \times (-7) = 10$;

b) 因为$c \equiv 8b (\mod 19)$，$b \equiv 3 (\mod 19)$，所以$c \equiv 8 \times 3 (\mod 19)$，即$c \equiv 24 \times 3 (\mod 19)$，所以$c = 24 + 19k_2$，$k_2$ 为整数，又因为$0 \le c \le 18$，所以$k_2 = -1$，即$c = 24 + 19 \times (-1) = 5$;

c) 因为$c \equiv a-b (\mod 19)$，$a-b \equiv 11-3 (\mod 19)$，所以$c \equiv 8 (\mod 19)$，所以$c = 8+19k_3$，$k_3$为整数，又因为$0 \le c \le 18$，所以$k_3 = 0$，即$c = 8$;

d) 因为$c \equiv 7a + 3b (\mod 19)$，$7a + 3b \equiv 7 \times 11 + 3 \times 3 (\mod 19)$，所以$c \equiv 7 \times 11 + 3 \times 3 (\mod 19)$，即$c \equiv 86 (\mod 19)$，所以$c = 86 + 19k_4$，$k_4$为整数，又因为$0 \le c \le 18$，所以$k_4 = -4$，即$c = 86 + 19 \times (-4) = 10$;

e) 因为$c \equiv 2a^2 + 3b^2 (\mod 19)$，$2a^2 + 3b^2 \equiv 2 \times 11^2 + 3 \times 3^2 (\mod 19)$，所以$c \equiv 2 \times 11^2 + 3 \times 3^2 (\mod 19)$，即$c \equiv 269 (\mod 19)$，所以$c = 269 + 19k_5$，$k_5$为整数，又因为$0 \le c \le 18$，所以$k_5 = -14$，即$c = 269 + 19 \times (-14) = 3$;

f) 因为$c \equiv a^3 + 4b^3 (\mod 19)$，$a^3 + 4b^3 \equiv 11^3 + 4 \times 3^3 (\mod 19)$，所以$c \equiv 11^3 + 4 \times 3^3 (\mod 19)$，即$c \equiv 1439 (\mod 19)$，所以$c = 1439 + 19k_6$，$k_6$为整数，又因为$0 \le c \le 18$，所以$k_6 = -75$，即$c = 1439 + 19 \times (-75) = 14$;

点评 4.1 本题主要利用$a \equiv b (\mod m)$，$c \equiv d (\mod m)$，则$a + c \equiv b + d (\mod m)$，$ac \equiv bd (\mod m)$。

作业 4.2 【习题4.1第36题】：求证：若a，b，c和m 是整数，$m \geq 2$，$c > 0$且$a \equiv b \pmod m$，则$ac \equiv bc \pmod{mc}$。

证明：因为$a \equiv b \pmod m$，所以$a = b + km$，其中k为整数，所以$ac = bc + k \cdot mc$，所以$ac \equiv bc \pmod{mc}$。

□

4.2 Integer Representation and Algorithms

作业 4.3 【习题4.2第6题】：将下列整数的二进制展开式转换为八进制展开式。

a) $(1111\ 0111)_2$;

b) $(1010\ 1010\ 1010)_2$;

c) $(111\ 0111\ 0111\ 0111)_2$;

d) $(101\ 0101\ 0101\ 0101)_2$;

解答：将二进制从低位到高位每3 位一组，高位不足时补零，然后将每一组分别转换为一位八进制数。

a) $(1111\ 0111)_2 = (011\ 110\ 111)_2 = (367)_8$;

b) $(1010\ 1010\ 1010)_2 = (101\ 010\ 101\ 010)_2 = (5252)_8$;

c) $(111\ 0111\ 0111\ 0111)_2 = (111\ 011\ 101\ 110\ 111)_2 = (73567)_8$;

d) $(101\ 0101\ 0101\ 0101)_2 = (101\ 010\ 101\ 010\ 101)_2 = (52525)_8$;

作业 4.4 【习题4.2第26题】：使用算法5计算$11^{644} \mod 645$。

解答：首先有$644 = (10\,1000\,0100)_2$，令x表示$\left(b^{a_i \cdot 2^i} \cdot b^{a_{i-1} \cdot 2^{i-1}} \cdot \ldots \cdot b^{a_1 \cdot 2^1} \cdot b^{a_0 \cdot 2^0}\right) \mod m$，$power$表示$b^{a_{i+1} \cdot 2^{i+1}} \mod m$，按下列步骤进行计算：

初始化：$x = 1$，$power = 11 \mod 645 = 11$。

$i = 0$，$a_0 = 0$，$x = 1$，$power = 11^2 \mod 645 = 121$;

$i = 1$，$a_1 = 0$，$x = 1$，$power = 121^2 \mod 645 = 451$;

$i = 2$，$a_2 = 1$，$x = (1 \cdot 451) \mod 645 = 451$，$power = 451^2 \mod 645 = 226$;

$i = 3$，$a_3 = 0$，$x = 451$，$power = 226^2 \mod 645 = 121$;

$i = 4$，$a_4 = 0$，$x = 451$，$power = 121^2 \mod 645 = 451$;

$i = 5$，$a_5 = 0$，$x = 226$，$power = 451^2 \mod 645 = 226$;

$i = 6$，$a_6 = 0$，$x = 451$，$power = 226^2 \mod 645 = 121$;

$i = 7$，$a_7 = 1$，$x = (451 \cdot 121) \mod 645 = 391$，$power = 121^2 \mod 645 = 451$;

$i = 8$，$a_8 = 0$，$x = 316$，$power = 451^2 \mod 645 = 226$;

$i = 9$，$a_9 = 1$，$x = (391 \cdot 226) \mod 645 = 1$;

即$11^{644} \mod 645 = 1$。

4.3 Primes and Greatest Common Divisors

作业 4.5 【习题4.3第12题】：证明：对每一个整数n，都存在n个连续的合数。【提示：考虑这n个连续的合数中第一个为$(n+1)!+2$】

证明：任取一个正整数n，令d为正整数，则显然$(n+1)!+d$也是正整数，因为$(n+1)! = (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$，所以对任意$2\le d\le n+1$，$d$ 必为$(n+1)!$ 的一个因子，即$d\mid(n+1)!$，从而$d\mid[(n+1)!+d]$，这说明$(n+1)!+d$ 是一个合数，故存在整数$(n+1)!+2$，$(n+1)!+3$，$\cdots$，$(n+1)!+(n+1)$ 是n 个连续的合数。证毕！ □

点评 4.2 该题的主要问题是少数同学仅给出了$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \cdots, (n+1)!+(n+1)$这$n$个数，但是未给出任何说明。

作业 4.6 【习题4.3第50题】：证明：若a，b，m是整数，且$m\ge 2$，$a\equiv b(\mod m)$，则$gcd(a,m) = gcd(b,m)$。

证明：由于$a\equiv b(\mod m)$，因此$a=b+km$，其中k为整数，从该式子中可以看出所有b和m的共因子必然是a 和m的因子，同理由$b=a-km$知任意a和m的公因子也必然是b和m的共因子，故$gcd(a,m)=gcd(b,m)$。证毕！

□

4.4 Solving Congruences

作业 4.7 【习题4.4第10题】：求解同余方程：$2x\equiv 7(\mod 17)$。

解答：通过观察可以看出$2\times 9 \mod 17 = 1$，所以9是2模17的逆数，显然$9\cdot 2x\equiv 9\cdot 7(\mod 17)$，即$18x\equiv 63(\mod 17)$，由于$18\equiv 1(\mod 17)$，$63\equiv 12(\mod 17)$，所以$x\equiv 12(\mod 17)$，故方程的解是所有与12模17同余的整数，如：12，29，-5等。

点评 4.3 注意该题题目可能存在印刷错误，正确的题目应该是：Solve the congruence 2x≡7(mod 17)using the inverse of 2 modulo **17** found in part (a) of Exercise 6.

作业 4.8 【习题4.4第20题】：使用证明中国剩余定理中的构造方法求解以下同余系统的所有解：$x\equiv 2(\mod 3)$，$x\equiv 1(\mod 4)$，$x\equiv 3(\mod 5)$。

解答：由中国剩余定理知，答案一定是以$3\cdot 4\cdot 5 = 60$为模；我们有$a_1 = 2, m_1 = 3, a_2 = 1, m_2 = 4, a_3 = 3, m_3 = 5, M_1 = 60/3 = 20, M_2 = 60/4 = 15, M_3 = 60/5 = 12$, 而$M_1, M_2, M_3$ 的逆为$y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 3$，所以$x = 80+45+108 = 233\equiv 53(\mod 60)$，所以，解为所有的形如$53+60k$ 的整数。

点评 4.4 部分同学未理解逆数的概念，将$a\equiv i(\mod m)$中的i看作了a模m的逆数。

第五章 Induction and Recursion

5.1 Mathematical Induction

作业 5.1 【习题5.1第14题】：证明对于所有的正整数n而言，都有$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$。

证明 令$P(n)$表示命题$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$。我们要证明对于任意的正整数$n$，$P(n)$成立。

归纳基：因为$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 1 \cdot 2^1 = (1-1)2^{n+1} + 2$，因此$P(1)$都成立!

归纳步：设对任意的$j \geq 1$，$P(j)$成立，即$\sum_{k=1}^{j} k2^k = (j-1)2^{j+1} + 2$，根据归纳假设，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{j+1} k2^k &= \left(\sum_{k=1}^{j} k2^k\right) + (j+1)2^{j+1} \\
&= (j-1)2^{j+1} + 2 + (j+1)2^{j+1} \\
&= 2j \cdot 2^{j+1} + 2 \\
&= (j+1-1)2^{j+1+1} + 2
\end{aligned}
$$

所以$P(j+1)$成立。

综上，根据数学归纳法，$P(n)$对于任意$n \geq 1$都成立。 □

作业 5.2 【习题5.1第50题】：下面的证明哪里错了呢?

证明：对每个正整数n, $\sum_{i=1}^{n} i = (n+1/2)^2/2$.

归纳基：公式对$n = 1$成立;

归纳步：假设对于n, $\sum_{i=1}^{n} i = (n+1/2)^2/2$，则$n+1$时，$\sum_{i=1}^{n+1} i = (\sum_{i=1}^{n} i) + n + 1$，由归纳假设，$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1/2)^2/2 + n + 1 = (n^2 + n + 1/4)/2 + n + 1 = (n^2 + 3n + 9/4)/2 = [(n+1) + 1/2]^2/2$

证毕!

解答：归纳基错误，因为没有验证$P(1)$是否成立，实际上，当$n = 1$时$(1+1/2)^2/2 = 9/8 \neq 1$，即$P(1)$不成立。

5.2 Strong Induction and Well-Ordering

作业 5.3 【习题5.2第4题】：语句$P(n)$表示邮费n可以由四分和七分的邮戳构成，这次练习罗列了一个强归纳证明，当$n \geq 18$时，$P(n)$为真.

a) 证明$P(18), P(19), P(20), P(21)$是正确的，作为证明的归纳基;

b) 归纳假设是什么;

c) 在归纳步你需要证明什么;

d) 当$k \geq 21$时完善归纳步;

e) 解释这些为什么能说明当$n \geq 18$ 时，语句恒成立;

解答:

a) 实际上，$P(n)$表示：对任意的正整数n，存在非负整数a, b使得$n = a \cdot 4 + b \cdot 7$。我们要证明$P(n)$对于任意的$n \geq 18$ 成立。由于

$$18 = 4 + 2 \cdot 7 \qquad 19 = 3 \cdot 4 + 7 \qquad 20 = 5 \cdot 4 + 0 \cdot 7 \qquad 21 = 0 \cdot 4 + 3 \cdot 7$$

所以$P(18), P(19), P(20), P(21)$成立。

b) 归纳假设是对任意的$k \geq 21$，当$18 \leq n \leq k$时$P(n)$成立。

c) 归纳步是要证明，对任意的$k \geq 21$，若对任意的$18 \leq n \leq k$时$P(n)$成立，则$P(k+1)$也成立。

d) 对任意的$k \geq 21$，由于$k+1 = k-3+4$，且$k \geq 21$时，$18 \leq k-3 \leq k$，根据归纳假设$P(k-3)$成立，即存在非负整数a, b使得$k-3 = a \cdot 4 + b \cdot 7$，从而$k+1 = (a+1) \cdot 4 + b \cdot 7$，即$P(k+1)$也成立。

e) 根据归纳基$P(18), P(19), P(20), P(21)$成立，而根据归纳步，对任意的$k$，当$18 \leq n \leq k$时$P(n)$成立可推出$P(k+1)$成立，从而由当$18 \leq n \leq 21$时$P(n)$成立可得到$P(22)$成立，这时又有$18 \leq n \leq 22$时$P(n)$成立，这根据归纳步的证明又有$P(23)$成立，以此类推，可得到对所有的$n \geq 18$时都有$P(n)$成立。

点评 5.1 (1) *归纳基与归纳步是证明的步骤，而不是要证明的东西本身，所以不要说证明归纳基，证明归纳步!* (2) $P(n)$*是一个命题函数(谓词)，它的值为真或假，所以写*$P(k+1) = P(k-3)+4$*是错误的!* (3) *有人说归纳步是证明当*$P(k)$*成立时也有*$P(k+1), P(k+2), P(k+3)$*成立，这是错误的!*

作业 5.4 【习题5.2第26题】：设$P(n)$是命题函数。确定对哪些非负整数n，命题$P(n)$必为真，如果：

a) $P(0)$为真，对于所有的非负整数n，如果$P(n)$为真，那么$P(n+2)$为真;

b) $P(0)$为真，对于所有的非负整数n，如果$P(n)$为真，那么$P(n+3)$为真;

c) $P(0)$和$P(1)$为真，对于所有的非负整数n，如果$P(n)$和$P(n+1)$为真，那么$P(n+2)$为真;

d) $P(0)$为真，对于所有的非负整数n，如果$P(n)$为真，那么$P(n+2)$和$P(n+3)$为真;

解答:

a) 显然，给出的条件仅能使n为偶数时$P(n)$为真;

b) 显然，给出的条件仅能使n为3的倍数时$P(n)$为真;

c) 由给定的条件能确保对所有的非负整数n，命题$P(n)$必为真。证明如下：

归纳基：$P(0)$和$P(1)$为真;

归纳步：设对任意的整数$k \geq 1$，当$0 \leq n \leq k$时，$P(n)$ 为真。根据归纳假设，此时必有$P(k)$ 为真，且$0 \leq k-1 \leq k$，即$P(k-1)$为真，所以$P(k+1)$ 为真；命题得证!

d) 显然，给出的条件仅能使对于所有的整数$n \geq 2$时，$P(n)$为真，而$P(1)$ 的真值不确定;

作业 5.5 【习题5.2第40题】：用well-ordering原则证明在实数$x, y, x < y$之间存在一个有理数$r, x < r < y$;

证明 因为$x<y$,则$y-x$是一个正实数，并且它的倒数$1/(y-x)$是一个正实数，根据阿基米德性质，存在正整数A使得$A>1/(y-x)$。定义集合

$$S=\{j\in Z^+ \mid x<\lfloor x\rfloor+j/A\}$$

显然S是非空集（例如当$j=A\in S$），根据良序(well-ordering)原则，S存在最小元素，设为j_0，即$x<\lfloor x\rfloor+j_0/A$，由于$x\ge\lfloor x\rfloor$，所以$j_0>1$。记$r=\lfloor x\rfloor+j_0/A$。由于j_0是S的最小元素，所以$x\ge\lfloor x\rfloor+(j_0-1)/A$，即$x\ge r-1/A$，即$1/A\ge r-x$，而$A>1/(y-x)$，即$y-x>1/A$，从而$y-x>r-x$，即$y>r$。从而$x<r<y$，显然$r$ 是有理数，所以待证命题成立。 □

点评 5.2 从这一题的作业可以看出，不少同学没有理解well-ordering原则，很多同学都没有清楚写出这个原则所应用的非空正整数集合到底是什么！

5.3 Recursive Definitions and Structural Induction

作业 5.6 【习题5.3第6题】：确定下列这些所谓的定义是否是从非负整数集合到整数集合的函数f的有效递归定义，如果f是良好定义的，则求出当n是非负整数时$f(n)$的一个公式并且证明这个公式是有效的。

a) $f(0)=1$，对$n\ge 1$来说，$f(n)=-f(n-1)$;

b) $f(0)=1$，$f(1)=0$，$f(2)=2$，对$n\ge 3$来说，$f(n)=2f(n-3)$;

c) $f(0)=0$，$f(1)=1$，对$n\ge 2$来说，$f(n)=2f(n+1)$;

d) $f(0)=0$，$f(1)=1$，对$n\ge 1$来说，$f(n)=2f(n-1)$;

e) $f(0)=2$，如果n是奇数且$n\ge 1$，则$f(n)=f(n-1)$，如果$n\ge 2$，则$f(n)=2f(n-2)$;

解答:

a) 有效的。公式为：$f(n)=(-1)^n$。当$n=0$时，$f(0)=1=(-1)^0$成立；若$n=k$，$k\ge 0$时，$f(k)=(-1)^k$成立，则$f(k+1)=-f(k)=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$也成立；故有效。

b) 有效的。公式为：

$$f(n)=\begin{cases}2^{n/3} & if\ n\equiv 0(\mod 3)\\ 0 & if\ n\equiv 1(\mod 3)\\ 2^{(n+1)/3} & if\ n\equiv 2(\mod 3)\end{cases} \tag{5.1}$$

首先有$f(0)=1=2^{0/3}$，$f(1)=0$，$f(2)=2=2^{(2+1)/3}$满足公式。
然后对任意$n\ge 3$，由于$n\equiv(n-3)(\mod 3)$，所以：

$$f(n)=2f(n-3)=\begin{cases}2\cdot 2^{(n-3)/3}=2^{n/3} & if\ n\equiv 0(\mod 3)\\ 2\cdot 0=0 & if\ n\equiv 1(\mod 3)\\ 2\cdot 2^{(n-3+1)/3}=2^{(n+1)/3} & if\ n\equiv 2(\mod 3)\end{cases} \tag{5.2}$$

故有效。

c) 无效的。$f(2)$由$f(3)$的定义得到，但是$f(3)$没有被定义。

d) 无效的。$f(1)$的值不一致。

e) 在语法构成上无效，因为当n为奇数且$n \geq 3$时发生指令冲突，比如，根据定义一方面有$f(3)=f(2)$，另一方面又有$f(3)=2f(1)$；但是由于$f(1)=f(0)=2$，$f(2)=2f(0)=4$，因此$f(3)=2f(1)=f(2)=4$，即$f(3)$的取值是确定的。实际上f 的定义是有效的，因为两条规则产生的函数值一致。f的公式是：

$$f(n)=2^{\lceil (n+1)/2 \rceil}$$

首先$f(0)=2=2^{\lceil (0+1)/2 \rceil}$ 成立；
然后设对任意的$k \geq 0$，当$0 \leq n \leq k$时，$f(n)=2^{\lceil (n+1)/2 \rceil}$ 成立，此时若n为奇数，则$0 \leq n-1 \leq k$，$n+1$ 为偶数且$n+1 \geq 2$，所以根据递归定义及归纳假设

$$f(n+1)=2f(n+1-2)=2f(n-1)=2 \cdot 2^{\lceil (n-1+1)/2 \rceil}=2^{\lceil (n+1+1)/2 \rceil}$$

满足公式，若n为偶数，则$n+1$ 为奇数，所以根据递归定义及归纳假设

$$f(n+1)=f(n-1)=2^{\lceil (n+1)/2 \rceil}=2^{\lceil (n+1+1)/2 \rceil}$$

也满足公式。
综上，定义有效。

作业 5.7 【习题5.3第24题】：给出下述集合的递归定义：
a) 正奇数集合;
b) 3的正整数次幂的集合;
c) 整系数多项式的集合;
解答：
a) $1 \in S$，如果$n \in S$，那么$n+2 \in S$;
b) $3 \in S$，如果$n \in S$，那么$3n \in S$;
c) $0 \in S$，如果$p(x) \in S$，那么$p(x)+cx^n \in S$，其中x是多项式中的变量，c为整数，n是非负整数;

作业 5.8 【习题5.3第32题】：
a) 给出计算位串s中1的个数的函数$ones(s)$的递归定义;
b) 用结构归纳法证明$ones(st)=ones(s)+ones(t)$;
解答：
a) $ones(\lambda)=0$，$ones(wx)=x+ones(w)$，其中w是一个位串，x是一个比特(0 或1);
b) 归纳基：当$t=\lambda$时，$ones(s\lambda)=ones(s)=ones(s)+0=ones(s)+ones(\lambda)$；
归纳步：设当$t=w$时，$ones(sw)=ones(s)+ones(w)$，则当$t=wx$ 时，其中w是一个位串，x是一个比特(0 或1)，根据递归定义及归纳假设$ones(s(wx))=ones((sw)x)=ones(sw)+x=ones(s)+ones(w)+x=ones(s)+ones(wx)$。所以待证命题得证。

作业 5.9 【习题5.3第44题】：用结构归纳法证明，$l(T)=1+i(T)$，$l(T)$是满二叉树的叶子数目，$i(T)$是满二叉树的内节点数。
证明 对满二叉树T进行结构归纳法。
归纳基：若T是由一个顶点构成满二叉树，则$l(T)=1, i(T)=0$，从而有$l(T)=1+i(T)$；

归纳步：若T是$T_1 \cdot T_2$，根据$l(T), i(T)$的归纳定义，$l(T) = l(T_1) + l(T_2)$，而$i(T) = i(T_1) + i(T_2) + 1$，根据归纳假设$l(T_1) = i(T_1) + 1$且$l(T_2) = i(T_2) + 1$，从而

$$l(T) = l(T_1) + l(T_2) = i(T_1) + 1 + i(T_2) + 1 = i(T) + 1$$

□

5.4 Recursive Algorithms

作业 5.10 【习题5.4第10题】：给出一个求有限整数集合中的最大值的递归算法，利用事实：n个整数中的最大值是列表中最后一个整数与前$n-1$个整数列表中最大值之间的较大者。

解答：如算法2所示：

Algorithm 2 Find the Largest Number of n Integers

---

procedure $findLargest(a_1, a_2, \cdots, a_n$: integers)

if $n = 1$ **then**
    return a_1
end if
$temp := findLargest(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$
if $a_n > temp$ **then**
    return a_n
else
    return $temp$
end if

{output is the largest number of the n integers}

作业 5.11 【习题5.4第14题】：用递归算法找到一个整数序列的众数。（众数是序列中出现的频繁程度至少与其它每个元素一样的元素）

解答：这个题目不单要计算这个序列的众数，还应该计算众数的出现次数，才能作为比较的依据，进而确定哪个数字才是众数，我们使用自然语言描述来描述该算法：

对于给定的输入整数序列L：$a_1, a_2 \ldots . a_n$；

1：　如果$n = 1$，则L的众数为a_1，返回a_1 及其出现的次数1；

2：　否则（即$n > 1$的情况），删除L中所有与a_n相同的项（包括a_n），建立一个新的序列l，令k为被删除的项的个数；

3：　若$k = n$，即l是空序列，则L的众数为a_n，返回a_n 及其出现的次数k；

4：　否则，递归应用该算法求l的众数，得到l 的众数m及其出现次数t；

5：　比较k与t 大小；

6：　若$t \geq k$，则L的众数为m，返回m及其出现次数t；

7：　否则L的众数为a_n，返回a_n 及其出现的次数k；

点评 5.3 此题出现问题较多。主要是未想明白算法可以将众数及其出现的次数作为一个整体进行输出（返回），实际上各种高级程序设计语言中均有相关的数据结构支持该特性，如C语言中的结构体，Java语言中的类等。

作业 5.12 【习题5.4第24题】：设计求a^{2^n}的递归算法，其中a是实数，n是正整数。【提示：利用等式$a^{2^{n+1}} = (a^{2^n})^2$】

解答：如算法3所示：

Algorithm 3 Calculate a^{2^n}

```
procedure twopower(a: real number, n: positive integer)
  if n = 1 then
    return a^2
  else
    return (twopower(a, n − 1))^2
  end if
{output is a^(2^n)}
```

点评 5.4 少数同学因为粗心将输入参数n的最小值设为了0，而题中已经规定n是一个正整数，因此n的最小值应该是1。

作业 5.13 【习题5.4第38题】：当w是位串时，给出一个求w^i（即w的i个复制品的连接）的递归算法。

解答：如算法4所示：

Algorithm 4 Copy w for i Times

```
procedure power(w: bit string, i: nonnegative integer)
  if i = 0 then
    return λ
  else
    return power(w, i − 1) · w
  end if
{output is w^i}
```

点评 5.5 此题中不少同学将i的最小值设为1，由于空串是一个特殊的字符串，所以最好将i的最小值设为0，即令i属于非负数。

点评 5.6 在本节作业中，少数同学未按题意给出递归算法，也有不少同学虽然给出了递归算法，但是没有利用到递归的好处，结果使得设计出的递归算法比较难让人理解、同时容易产生错误，一个比较普遍的现象是为了达到递归的目的，增加了额外的输入参数，结果产生了严重的副作用——对算法使用者的行为作了不合理的约束，规定使用者必须按某种特定的方式调用算法，否则将不可避免地得到错误的结果。比如：输入参数的类型是整型，却强制使用者只能给算法传递某个特定的整数（无法改变这个现实，因为在算法内部调用自身时给定的参数可能不是这个特定的整数）。这些缺陷在今后还有待改善。

第六章　Counting

6.1　The Basic of Counting

作业 6.1 【习题6.1第12题】：位数不超过6的二进制串有多少个（不包括空串）？

解答 令x_i表示位数为i的二进制串的个数（$i = 1, 2, \cdots, 6$），则$x_i = 2^i$，根据加法法则，位数不超过6的二进制串（不包括空串）共有：

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} 2^i = \frac{2(1-2^6)}{1-2} = 126$$

个。

点评 6.1 少数同学理解错题意了，导致结果不对，例如将本题中的二进制串理解成了二进制数。

作业 6.2 【习题6.1第22题】：有多少个小于1000的正整数

a) 可以被7整除;

b) 能被7整除而不能被11整除;

c) 能同时被7和11整除;

d) 能被7或者11整除;

e) 只能被7或者11中的一个整除;

f) 既不能被7又不能被11整除;

g) 有不同的数字;

h) 有不同的数字并且是偶数;

解答：令A表示所有小于1000且能够被7整除的正整数的集合，令B表示所有小于1000且能够被11整除的正整数的集合，则易知：

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x \le \lfloor 999/7 \rfloor\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x \le \lfloor 999/11 \rfloor\}$$

a) 所求即为：$|A| = \lfloor 999/7 \rfloor = 142$个；

b) 所求即为：$|A| - |A \cap B| = 142 - \left\lfloor \dfrac{999}{lcm(7,11)} \right\rfloor = 142 - \lfloor 999/77 \rfloor = 142 - 12 = 130$个；

c) 由上面b计算知，所求即为：$|A \cap B| = 12$ 个；

d) 由上面b计算和容斥原理知，所求即为：$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 130 + \lfloor 999/11 \rfloor = 130 + 90 = 220$ 个；

e) 在计算这一部分时，应该由能被7或者11整除的数字中再减去能同时被7和11整除的数字，由上面计算知，本题答案为$220-12=208$个；

f) 只需要用总数减去能被7或者11 整除的数字即可，由上面d计算知，本题答案为$999-220=779$个；

g) 我们把数字分成三种：一位数，两位数和三位数。对于一位数而言，它们本身就是独特的数字，共有9个，两位数中十位有9中选择；当选定十位后，对应每种选择，个位也有9中选择（因为十位数是不能选0而个位数却可以）所以共有81种；三位数的话按照上面的选择方式共有$9\cdot 9\cdot 8=648$种，所以共有$9+81+648=738$个。

h) 令x_1、x_2、x_3分别表示满足条件的一位数、两位数、三位数的个数。则：

$$
\begin{aligned}
&x_1=4\\
&x_2=\underbrace{9\times 1}_{\text{个位为0}}+\underbrace{8\times 4}_{\text{个位不为0}}=41\\
&x_3=\underbrace{8\times 9\times 1}_{\text{个位为0}}+\underbrace{8\times 8\times 4}_{\text{个位不为0}}=328
\end{aligned}
$$

所以共有：$x_1+x_2+x_3=4+41+328=373$个；

点评 6.2 第f)、g)、h)三小题错误率较高。f)小题主要是由于算错了小于1000的正整数的个数（应该为999个，而不是1000个）；g)、h)小题主要是由于将数字分为三类（一位数、两位数、三位数）之后各类的计算有误。

作业 6.3 【习题6.1第56题】：在C程序设计语言中的变量名是一个字符串，可以包含大写字母、小写字母、数字和下划线。此外，字符串的第一个字符必须是字母（大写或小写）或下划线。如果一个变量名由它的前8个字符确定，那么在C语言中可以命名多少个不同的变量？（注：变量名包含的字符数可以少于8个）

解答 令x_i表示字符数为i的变量的个数（$i=1,2,\cdots,8$），依题意知变量名的第一个字符有53种选择（$2\cdot 26$ 个字母加上1 一个下划线），剩余的$i-1$个字符每个都有$2\cdot 26+1+10=63$种选择，所以根据加法法则，不同的变量共有：

$$\sum_{i=1}^{8}x_i=\sum_{i=1}^{8}53\cdot 63^{i-1}=53\cdot\frac{1-63^8}{1-63}=212,133,167,002,880\approx 2.1\times 10^{14}$$

个。

6.2 The Pigeonhole Principle

作业 6.4 【习题6.2第18题】：假设一个小学院的离散数学班上有9个学生

a) 证明：这个班上一定至少有5个男生，或者至少有5个女生。

b) 证明：这个班上一定至少有3个男生，或者至少有7个女生。

证明

a) 假设这个班上最多只有4个男生，并且最多只有4个女生，则班上的总人数最多有4+4=8个，这与班里实际上有9个学生矛盾！故假设不成立，原命题得证。

b) 假设这个班上最多只有2个男生，并且最多只有6个女生，则班上的总人数最多有2+6=8个，这与班里实际上有9个学生矛盾！故假设不成立，原命题得证。

$\square$

6.3 Permutations and Combinations

作业 6.5 【习题6.4第20题】：多少个10位二进制串

a) 恰好有3个0?

b) 0比1多?

c) 至少有7个1?

d) 至少有3个1?

解答：

a) 在10个位置中选3个为0，其余为均为1，共有$C(10,3)=120$个；

b) 在一个二进制串中有三种情况：1) 0比1多；2) 0与1一样多；3) 1比0多。由对称性易知第一种情况与第三种的二进制串数目是一样的，因此0比1多的二进制串有：$(2^{10}-C(10,5))/2=(1024-252)/2=386$个；

c) 至少有7个1意味着有7，8，9或10个1，因此这样的二进制串共有：$C(10,7)+C(10,8)+C(10,9)+C(10,10)=120+45+10+1=176$ 个；

d) 至少有三个1可以理解成用所有的情况减去字符串中只有$0,1,2$个1的这些情况，所有的情况可能为$2^{10}=1024$，所以答案为$1024-C(10,0)-C(10,1)-C(10,2)=1024-1-10-45=968$；

作业 6.6 【习题6.4第30题】：一所学校的数学系有7名女教师和9名男教师。

a) 有多少种方式从中选出5人组成的委员会，其中包含至少一名女教师?

b) 有多少种方式从中选出5人组成的委员会，其中包含至少一名女教师和至少一名男教师?

解答：

a) 所有的选择方式有$C(16,5)=4368$种，不包含女教师的选择方式有$C(9,5)=126$种，易知包含至少一名女教师的选择方式有$C(16,5)-C(9,5)=4242$种；

b) 不包含男教师的选择方式有$C(7,5)=21$种，由a)易知包含至少一名女教师和至少一名男教师的选择方式有$C(16,5)-C(9,5)-C(7,5)=4221$种；

6.4 Binomial Coefficients and Identities

作业 6.7 【习题6.4第16题】：

a) 用练习14和推论1证明如果n是大于1的整数，那么$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\geq 2^n/n$。

b) 从a)确定如果n是正整数，那么$\binom{2n}{n}\geq 4^n/2n$。

证明

a) 由练习14知$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$是$\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n-1}$中的最大者，因此它大于等于这$n-1$ 个二项式系数的平均数，即

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\geq\frac{2^n-2}{n-1}$$

又由于当$n \geq 2$时，$2^n \geq 2n$，因此

$$\frac{2^n-2}{n-1}-\frac{2^n}{n}=\frac{n2^n-2n-(n2^n-2^n)}{n(n-1)}=\frac{2^n-2n}{n(n-1)}\geq 0\text{，即 }\frac{2^n-2}{n-1}\geq 2^n/n$$

所以

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\geq 2^n/n$$

b) 当n是正整数时，$2n$是大于1的整数，所以由a)可得$\binom{2n}{n}\geq 2^{2n}/2n=4^n/2n$，命题得证。

□

点评 6.3 此题需要注意$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n}$共有$n+1$项，大多数同学将其视为了$n$项。

作业 6.8 【习题6.4第22题】：证明当k，n，r为非负整数，并且$r\leq n$，$k\leq r$时，下面的等式成立：

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

a) 用组合的观点论证；

b) 从公式的角度进行证明；

证明

a) 我们假设一个集合中有n个元素，我们想要选出它的一个子集A，里面有k个元素，并选出另一个与A不相交的子集B，里面有$r-k$个元素。(i) 等式左边的选择方法是，先从n个元素中选择r个，再从这r个里面选择k个构成子集A，剩下的$r-k$个构成子集B，容易发现A，B是不相交的，所以这种选择方式可以构成我们想要的选择结果；(ii) 等式右边的选择策略是先从n个元素中选出k个元素构成子集A，再从剩下的$n-k$个元素中选出$r-k$个构成子集B，容易发现A和B是不相交的，并且满足了我们要的选择结果所以这个策略也是正确的，所以左边等于右边，证毕；

b) 等式两边展开：

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{r!}{k!(r-k)!}=\frac{n!}{k!(n-r)!(r-k)!}$$
$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-r)!(r-k)!}=\frac{n!}{k!(n-r)!(r-k)!}$$

容易看到左边等于右边，故命题得证！

□

点评 6.4 此题大多数同学给出的组合证明是：左边是先从n个元素中选择r个，再从这r个元素中选择k个，右边是先从n个元素中选择k个，再从这$n-k$个元素中选择$r-k$个，左边与右边逻辑等价。这没有说明这两种不同的方法同时对什么对象（Objects）进行了计数，因而缺乏说服力。

6.5 Generalized Permutations and Combinations

作业 6.9 【习题6.5第6题】：从三个元素的集合中允许重复地无序选择5个元素有多少种不同的方式？

解答：根据定理2可知共有$C(3+5-1,5)=C(7,5)=21$种方式。

点评 6.5 少数同学错将该题看成了有重复的排列问题，得到答案为3^5。

作业 6.10【习题6.5第16题】：方程$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=29$有多少个解？其中$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$是非负整数，并且使得

a) $x_i > 1$，$i = 1,2,3,4,5,6$；

b) $x_1 \geq 1$，$x_2 \geq 2$，$x_3 \geq 3$，$x_4 \geq 4$，$x_5 > 5$，$x_6 \geq 6$；

c) $x_1 \leq 5$；

d) $x_1 < 8$，$x_2 > 8$；

解答：将每个x_i看作是某个集合的一个元素，求方程的解的个数就等价于计算有多少种不同的方式从这个集合中选取29个元素，其中集合中的每一个元素都可以被重复选择多次。

a) $x_i > 1$，即$x_i \geq 2$，这意味着29个元素中已经可以确定$6 \cdot 2 = 12$个，因而问题等价于有多少种不同的方式从该集合中允许有重复地选择$29 - 12 = 17$个元素，由定理2易知这共有$C(6+17-1,17) = C(22,17) = 26334$种不同的方式，故方程的解的个数也为26334；

b) 与a)类似，易知29个元素中已经可以确定$1+2+3+4+6+6 = 22$个，故方程解的个数为$C(6+7-1,7) = C(12,7) = 792$；

c) 易知满足条件$x_1 \leq 5$时解的个数就等于无约束条件时解的个数减去满足条件$x_1 > 5$（即$x_1 \geq 6$）时解的个数，由a)易知该题答案为：$C(6+29-1,29) - C(6+23-1,23) = 278256 - 98280 = 179976$；

d) 与c)类似，本题答案等于仅满足条件$x_2 > 8$时解的个数减去同时满足条件$x_2 > 8$、$x_1 \geq 8$时解的个数，即为：$C(6+20-1,20) - C(6+12-1,12) = 53130 - 6188 = 46942$；

点评 6.6 少数同学在求解c)、d)两个小题时采用了直接计算的方法（分情况累加），计算过程较复杂一些。

6.6 Generating Permutations and Combinations

作业 6.11 【习题6.6第6题】：写出按照字典顺序跟在下列每一个排列后面的下一个最大的排列。

a) 1342	b) 45321	c) 13245
d) 612345	e) 1623547	f) 23587416

解答：按课本中给定的算法，容易求得：

a) 1423	b) 51234	c) 13254
d) 612354	e) 1623574	f) 23587461

作业 6.12 【习题6.6第9题】：用算法三罗列出集合$\{1,2,3,4,5\}$的所有的$3-combinations$；

解答：$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\}, \{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}$

点评 6.7 少数同学错将该题看成了排列问题！

第八章　Advanced Counting Techniques

8.1　Applications of Recurrence Relations

作业 8.1 【习题8.1第8题】：

a) 给出长度为n且包含三个连续的0的二进制字符串的递归关系；

b) 初始条件是什么；

c) 长度为7的包含连续三个0的二进制字符串有多少个；

解答：

a) 为了满足包含连续三个0,考虑下面的情况：若是a_n以1开头，则此时剩下的$n-1$位中需包含连续三个零，此时有a_{n-1}种情况，若是a_n以01开头，则此时剩下的$n-2$位中需包含连续三个零，此时有a_{n-2}种情况，若是a_n以001开头，则此时剩下的$n-3$位中需包含连续三个零，此时有a_{n-3}种情况，若是a_n以000开头，则此时剩下的$n-3$位中的每一位都可以任意选择，共有2^{n-3}种情况，所以$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$;

b) $n = 0, 1, 2$时，都不可能存在连续的三个零，所以$a_0 = a_1 = a_2 = 0$；

c) 由递归式进行计算：

$$
\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 + a_0 + 2^0 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \\
a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 + 2^1 = 1 + 0 + 0 + 2 = 3 \\
a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 + 2^2 = 3 + 1 + 0 + 4 = 8 \\
a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 + 2^3 = 8 + 3 + 1 + 8 = 20 \\
a_7 &= a_6 + a_5 + a_4 + 2^4 = 20 + 8 + 3 + 16 = 47
\end{aligned}
$$

所以有47个长度为7的包含连续三个零的二进制字符串。

点评 8.1 本题需要注意初始条件是第一个能使用递推关系得到的项之前的那些项。

作业 8.2 【习题8.1第28题】：证明斐波那契数满足递推关系$f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$，$n = 5, 6, 7, \cdots$，其中递推关系具有初始条件$f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3$。利用这个递推关系证明$f_{5n}$可以被5整除，$n = 1, 2, 3, \cdots$。

证明

a) 首先利用强归纳法证明$f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$：归纳基：当$n = 5, 6$时，$f_5 = f_4 + f_3 = 5 = 5f_1 + 3f_0$，$f_6 = f_5 + f_4 = 8 = 5f_2 + 3f_1$，因此命题成立；归纳步：假设当$n \leq k (k \geq 6)$时命题成立，则当$n = k + 1$时，根据斐波那契数列的递归定义及归纳假设，$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = (5f_{k-4} + 3f_{k-5}) + (5f_{k-5} + 3f_{k-6}) = 5(f_{k-4} + f_{k-5}) + 3(f_{k-5} + f_{k-6}) = 5f_{k+1-4} + 3f_{k+1-5}$，这表明此时命题也成立；综上，根据数学归纳法，对任意$n = 5, 6, 7, \cdots$，$f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$。

b) 然后利用数学归纳法证明f_{5n}可以被5整除：**归纳基**：当$n=1$时，$f_5=5f_1+3f_0=5$，显然f_5能被5整除；**归纳步**：假设当$n=k(k\geq 1)$时，f_{5k}能被5整除，则当$n=k+1$时，根据递推关系，$f_{5(k+1)}=5f_{5(k+1)-4}+3f_{5(k+1)-5}=5f_{5k+1}+3f_{5k}$，由于$5f_{5k+1}$能被5整除，且根据归纳假设$f_{5k}$能被5整除，因此$f_{5(k+1)}$也能被5整除；综上，根据数学归纳法，对任意$n=1,2,3,\cdots$，$f_{5n}$可以被5整除。

□

点评 8.2 证明形如$\forall n\in\mathbb{N}P(x)$的命题时最好采用数学归纳法。另外，这一题需要在证明第一小问的基础上证明第二小问，2013级有些同学忘记证明第一小问。

8.2 Solving Linear Recurrence Relations

作业 8.3 【习题8.2第14题】求解：$a_n=5a_{n-2}-4a_{n-4}$，$a_0=3$，$a_1=2$，$a_2=6$，$a_3=8$。

解答：容易发现特征方程为：$r^4-5r^2-4=0$，即$(r-1)(r+1)(r-2)(r+2)=0$，所以可以得到四个特征根为$1,-1,2,-2$，根据定理3，通解的形式为

$$a_n=\alpha_1+\alpha_2(-1)^n+\alpha_3 2^n+\alpha_4(-2)^n$$

把初始条件代入通解得

$$\begin{cases}3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\2=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4\\6=\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3+4\alpha_4\\8=\alpha_1-\alpha_2+8\alpha_3-8\alpha_4\end{cases}\qquad\text{解得}\begin{cases}\alpha_1=1\\\alpha_2=1\\\alpha_3=1\\\alpha_4=0\end{cases}$$

所以通解为 $a_n=1+(-1)^n+2^n$

点评 8.3 2013级有少数同学没有按照教材中给出的求通解公式进行求解，而是按照自己的方法进行求解，但求解过程不清楚，求解结果不正确！

作业 8.4 【习题8.2第18题】求解递推关系：$a_n=6a_{n-1}-12a_{n-2}+8a_{n-3}$，$a_0=5$，$a_1=4$，$a_2=88$。

解答：容易发现特征方程为：$r^3-6r^2+12r-8=0$，即$(r-2)^3=0$，所以可以得到特征根为2，其重数为3，根据定理4，通解的形式为

$$a_n=(\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n+\alpha_{1,2}n^2)2^n$$

把初始条件代入通解得

$$\begin{cases}-5=\alpha_{1,0}\\4=(\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{1,2})2\\88=(\alpha_{1,0}+2\alpha_{1,1}+4\alpha_{1,2})4\end{cases}\qquad\text{解得}\begin{cases}\alpha_{1,0}=-5\\\alpha_{1,1}=1/2\\\alpha_{1,2}=13/2\end{cases}$$

所以通解为 $a_n=-5\cdot 2^n+n\cdot 2^{n-1}+13n^2\cdot 2^{n-1}$

作业 8.5 【习题8.2第30题】

a) 找出递推关系$a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$的所有的解；

b) 找出这个递推关系具有初始条件$a_1 = 56$和$a_2 = 278$的解；

解答：

a) 它伴随的齐次递推关系为$a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2}$，其特征方程为：$r^2 + 5r + 6 = 0$，即$(r+2)(r+3) = 0$，所以可以得到其特征根为$-2, -3$，因此

$$a_n^{(h)} = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2(-3)^n$$

根据定理6，由于$F(n) = 42 \cdot 4^n$（这里$s = 4$并且4不是特征方程的根），所以$a_n^{(p)} = C \cdot 4^n$，代入递推关系得

$$C \cdot 4^n = -5 \cdot C \cdot 4^{n-1} - 6 \cdot C \cdot 4^{n-2} + 42 \cdot 4^n$$

解得$C = 16$，因此

$$a_n^{(p)} = 4^{n+2}$$

根据定理5，易知通解是$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2(-3)^n + 4^{n+2}$。

b) 把初始条件代入通解得

$$\begin{cases} 56 = -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 64 \\ 278 = 4\alpha_1 + 9\alpha_2 + 256 \end{cases} \qquad \text{解得} \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

所以$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2(-3)^n + 4^{n+2} = (-2)^n + 2 \cdot (-3)^n + 4^{n+2}$。

8.3 Divide-and-Conquer Algorithms and Recurrence Relations

作业 8.6 【习题8.3第4题】：用伪代码描述快速相乘算法；

解答：在这个算法中，我们假设$a = (a_{2n-1}a_{2n-2}...a_1a_0)_2, b = (b_{2n-1}b_{2n-2}...b_1b_0)_2$，则算法5即为所求算法。

点评 8.4 此题错误率较高，主要体现在：1、忽略了初始条件或初始条件是错误的，例如利用n是否等于1来确定初始条件，实际上在递归的每一步n的值只能确定将一个长串划分成两个短串时短串的长度分别是多少；2、未使用分治递归，而是直接 *return* $(2^{2n} + 2^n)A_1B_1 + 2^n(A_1 - A_0)(B_0 - B_1) + (2^n + 1)A_0B_0$，这是偷懒直接抄书，没有将书中给出的算法思想明确地表达出来!另外由于算法利用了位移运算，因此需要注意传递给算法的输入数据的类型，将一个负数拆分成两段可能导致运算结果出错。

作业 8.7 【习题8.3第12题】：当$n = 3^k$时求$f(n)$，其中满足递归关系$f(n) = 2f(n/3) + 4$，$f(1) = 1$。

解答：在该题中$a = 2, b = 3, c = 4$，根据定理1，当$n = 3^k$时，$f(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$，其中$C_1 = f(1) + c/(a-1) = 5$，$C_2 = -c(a-1) = -4$，将$a, b, C_1, C_2$代入上式得$f(n) = 5n^{\log_3 2} - 4$

作业 8.8 点评 8.5 最后$f(n)$的结果应该使用n来表达，而不应该使用k来表达!

【习题8.3第20题】：

Algorithm 5 fast multiply(a,b:nonnegative integers)

if $a \leq 1$ and $b \leq 1$ **then**
  fast multiply$(a, b) := ab$;
else
  $A_1 := \lfloor a/2^n \rfloor$
  $A_0 := a - 2^n A_1$
  $B_1 := \lfloor b/2^n \rfloor$
  $B_0 := b - 2^n B_1$
  $x :=$fast multiply(A_1, B_1)
  $answer :=$ (x shifted left 2n places)+(x shifted left n places)
  $x :=$fast multiply(A_0, B_0)
  $answer := answer + x +$ (x shifted left n places)
  if $A_1 \geq A_0$ **then**
    $A_2 := A_1 - A_0$
  else
    $A_2 := A_0 - A_1$
  end if
  if $B_1 \geq B_0$ **then**
    $B_2 := B_1 - B_0$
  else
    $B_2 := B_0 - B_1$
  end if
  $x :=$fast multiply$(A_2.B_2)$ shifted left n places
  if $(A_1 \geq A_0 \wedge B_0 \geq B_1) \vee (A_1 < A_0 \wedge B_0 < B_1)$ **then**
    $answer := answer + x$
  else
    $answer := answer - x$
  end if
  fast multiply$(a, b) := answer$;
end if

a) 使用5.4节中例4的递归算法，为计算$a^n \mod m$所需要的模乘法次数建立一个分治递推关系，其中a, m, n为正整数；

b) 使用你在a)中找到的递推关系构造使用递归算法计算$a^n \mod m$所用模乘法次数的大O估计；

解答:

a) 当n是偶数时，首先递归计算$y := a^{n/2} \mod m$，然后做一次模乘法，即$y \cdot y \mod m$；当n是奇数，首先递归计算$y := a^{(n-1)/2} \mod m$，然后做两次模乘法，即$((y \cdot y \mod m) \cdot (a \mod m)) \mod m$；所以令$f(n)$为所需要的乘法次数，则在最坏情况下，$f(n)$满足递归关系$f(n) = f(n/2) + 2$。

b) 根据定理1，此时$a = 1, b = 2, c = 2$，所以$f(n)$是$O(\log n)$。

8.5 Inclusion-Exclusion

作业 8.9【习题8.5第6题】：若是有100个元素在A_1中，1000个元素在A_2中，10000个元素在A_3中，求分别满足下列条件时集合$A_1 \cup A_2 \cup A_3$中的元素个数。

a) $A_1 \subseteq A_2$且$A_2 \subseteq A_3$;

b) 集合两两不相交；

c) 每一对集合中有两个相同的元素，有一个元素在三个集合中。

解答:

a) 此时三个集合的并集为A_3，所以元素个数共有10000个；

b) 三个集合两两不相交，故并集的元素总数为$100 + 1000 + 10000 = 11100$;

c) $| A_1 \cup A_2 \cup A_3 |=| A_1 | + | A_2 | + | A_1 | - | A_1 \cap A_2 | - | A_3 \cap A_2 | - | A_1 \cap A_3 | + | A_1 \cap A_2 \cap A_3 |$=100+1000+10000-2-2-2+1=11095.

作业 8.10 【习题8.5第12题】：求不超过1000且是平方数或立方数的正整数的个数。

解答：易知不超过1000是平方数的正整数有$\lfloor \sqrt{1000} \rfloor = 31$个，是立方数的正整数有$\lfloor \sqrt[3]{1000} \rfloor = 10$个，既是平方数又是立方数的正整数有$\lfloor \sqrt[6]{1000} \rfloor = 3$个（提示：假设$a = x^2 = y^3 (a \leq 1000)$，则$a = (\frac{x}{y})^6$，由于$(\frac{x}{y})^2 = y$，且$x, y$均为整数，所以$\frac{x}{y} = \sqrt[6]{a}$必为整数），因此由容斥原理知是平方数或立方数的正整数有$31 + 10 - 3 = 38$ 个。

点评 8.6 部分同学利用教材8.6节中的方法来求解，得到的结果是不超过1000且既不是平方数又不立方数的正整数的个数。

8.6 Applications of Inclusion-Exclusion

作业 8.11 【习题8.6第4题】：求以下不定方程解的个数，其中$x_i (i = 1, 2, 3, 4)$是非负整数，且$x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 5, x_4 \leq 8$。

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

解答: (可参考$example1$) 由容斥原理知答案可以表示为：$C(4+17-1, 17) - C(4+13-1, 13) - C(4+12-1, 12) - C(4+11-1, 11) - C(4+8-1, 8) + C(4+8-1, 8) + C(4+7-1, 7) + C(4+4-1, 4) + C(4+6-1, 6) + C(4+3-1, 3) + C(4+2-1, 2) - C(4+2-1, 2) = 20$

作业 8.12 【习题8.6第8题】：从7元素集合到5元素集合有多少个映上函数？

解答: (可参考$example2$) 由容斥原理知答案可以表示为：$5^7 - C(5,1)4^7 + C(5,2)3^7 - C(5,3)2^7 + C(5,4)1^7 = 16800$

第九章 Relations

9.1 Relations and Their Properties

作业 9.1 【习题9.1第6题】：讨论下面的关系在实数上是否是自反的，对称的，反对称的，传递的，其中$(x,y)\in R$当且仅当：

a) $x+y=0$	a) $x=\pm y$	c) $x-y$有理数
d) $x=2y$	e) $xy\geq 0$	f) $xy=0$
g) $x=1$	a) $x=1$或者$y=1$	

解答：a) 对于$R=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，

(1) 因为$1+1\neq 0$，所以R不是自反的。

(2) 因为$x+y=y+x$遵循$x+y=0$当且仅当$y+x=0$，所以R是对称的。

(3) 因为$(1,-1)$和$(-1,1)$都在关系R中，所以R不是反对称的。

(4) 因为$(1,-1)$和$(-1,1)$都在关系R中,但是$(1,1)$不在R中，所以R不是传递的。

b) 对于$R=\{(x,y)\mid x=\pm y\}$，

(1) 因为$x=\pm x$,所以R是自反的.

(2) 因为$x=\pm y$当且仅当$y=\pm x$,所以R是对称的.

(3) 因为$(1,-1)$和$(-1,1)$都在关系R中，所以R不是反对称的.

(4) 因为对于任意的的实数x，满足关系的y要么是x本身要么是x相反数，对于y，满足关系的z要么是y，要么是y相反数,所以z要么是x，要么是x相反数，即$(x,z)\in R$;

c) 对于$R=\{(x,y)\mid x-y$是有理数$\}$，

(1) R是自反的，原因是$x-x=0$是有理数.

(2) R是对称的，因为$y-x$是有理数，并且$y-x=-(x-y)$.

(3) 因为$(1,-1)$和$(-1,1)$都在关系R中，所以R不是反对称的.

(4) R是可传递的，因为若是$x-y$是有理数，$y-z$是有理数，则$x-z$也是有理数。

d) 对于$R=\{(x,y)\mid x=2y\}$，

(1) 因为$1\neq 2\cdot 1$，所以R不是自反的.

(2) R不是对称的，因为$(2,1)\in R$但是$(1,2)\notin R$.

(3) R是反对称的，不然假设$x=2y$且$y=2x$,则$y=4y$，当且仅当$x=y=0$时成立。

(4) R不是传递的，因为$(4,2)\in R,(2,1)\in R$,但是$(4,1)\notin R$;

e) 对于$R=\{(x,y)\mid xy\geq 0\}$，

(1) 因为$x^2 \geq 0$,所以R是自反的.

(2) R是对称的，因为$xy = yx$.

(3) R不是反对称的，因为$(1,2),(2,3)$都在关系中.

(4) R不是传递的，因为$(1,0) \in R, (0,-1) \in R$，但是$(1,-1) \notin R$;

f) 对于$R = \{(x,y) \mid xy = 0\}$，

(1) 对于$xy = 0$,因为$(1,1) \notin R$，所以R不是自反的.

(2) 因为$xy = yx$，所以R是对称的.

(3) 因为$(0,1),(1,0)$都满足关系，所以R不是反对称的.

(4) 因为$(1,0) \in R, (0,-1) \in R$，但是$(1,-1) \notin R$,所以$R$不是传递的;

g) 对于$R = \{(x,y) \mid x = 1\}$，

(1) 对于$x = 1$，因为$(2,2) \notin R$，所以R不是自反的.

(2) 因为$(1,2) \in R$,但是$(2,1) \notin R$,所以R不是对称的.

(3) R是反对称的，$(x,y) \in R$且$(y,x) \in R$,当且仅当$x = y = 1$.

(4) R是传递的，若是$(x,y) \in R, (y,z) \in R$,则一定有$x = y = 1$，则$(x,z) \in R$;

h) 对于$R = \{(x,y) \mid x = 1 \vee y = 1\}$，

(1) 对于$x = 1$或者$y = 1$,R不是自反的因为$(2,2) \notin R$.

(2) R是对称的，因为x和y地位相等，可以互换.

(3) 因为$(0,1),(1,0)$都满足关系，所以R不是反对称的.

(4) R不是传递的，因为$(0,1),(1,0)$都满足关系，但是$(0,0) \notin R$;

点评 9.1 2013级少部分同学认为e)是传递的。

作业 9.2 【习题9.1第36题】：$R_1, \cdots, R_6$是实数集上的关系，求下列复合关系。

$R_1 = \{(a,b) \in R^2 | a > b\}$,“大于”关系

$R_2 = \{(a,b) \in R^2 | a \geq b\}$,“大于或等于”关系

$R_3 = \{(a,b) \in R^2 | a < b\}$,“小于”关系

$R_4 = \{(a,b) \in R^2 | a \leq b\}$,“小于或等于”关系

$R_5 = \{(a,b) \in R^2 | a = b\}$,“等于”关系

$R_6 = \{(a,b) \in R^2 | a \neq b\}$,“不等”关系

a) $R_1 \circ R_1$ b) $R_1 \circ R_2$ c) $R_1 \circ R_3$ d) $R_1 \circ R_4$

e) $R_1 \circ R_5$ f) $R_1 \circ R_6$ g) $R_2 \circ R_3$ h) $R_3 \circ R_3$

解答:

a) $(a,c) \in R_1 \circ R_1$当且仅当存在某个b使得$(a,b) \in R_1$且$(b,c) \in R_1$，跟据R_1的定义，可知这意味着$a > b$ 且$b > c$，由此可得$a > c$，这表明当且仅当$a > c$时$(a,c) \in R_1 \circ R_1$，因此$R_1 \circ R_1 = R_1$。

b) $(a,c) \in R_1 \circ R_2$当且仅当存在某个b使得$(a,b) \in R_2$且$(b,c) \in R_1$，跟据R_1, R_2的定义，可知这意味着$a \geq b$ 且$b > c$，由此可得$a > c$，这表明当且仅当$a > c$时$(a,c) \in R_1 \circ R_2$，因此$R_1 \circ R_2 = R_1$。

c) $(a,c) \in R_1 \circ R_3$当且仅当存在某个b使得$(a,b) \in R_3$且$(b,c) \in R_1$，跟据R_1, R_3的定义，可知这意味着$a < b$ 且$b > c$，这表明只要b足够大则$(a,c) \in R_1 \circ R_3$，由于b可以在实数范围内任意选取，因此$R_1 \circ R_3 = R^2$。

d) $(a,c)\in R_1\circ R_4$当且仅当存在某个b使得$(a,b)\in R_4$且$(b,c)\in R_1$，跟据R_1,R_4的定义，可知这意味着$a\le b$ 且$b>c$，这表明只要b足够大则$(a,c)\in R_1\circ R_4$，由于b可以在实数范围内任意选取，因此$R_1\circ R_4=R^2$。

e) $(a,c)\in R_1\circ R_5$当且仅当存在某个b使得$(a,b)\in R_5$且$(b,c)\in R_1$，跟据R_1,R_5的定义，可知这意味着$a=b$ 且$b>c$，由此可得$a>c$，这表明当且仅当$a>c$时$(a,c)\in R_1\circ R_5$，因此$R_1\circ R_5=R_1$。

f) $(a,c)\in R_1\circ R_6$当且仅当存在某个b使得$(a,b)\in R_6$且$(b,c)\in R_1$，跟据R_1,R_6的定义，可知这意味着$a\neq b$ 且$b>c$，这表明只要b足够大则$(a,c)\in R_1\circ R_6$，由于b可以在实数范围内任意选取，因此$R_1\circ R_6=R^2$。

g) $(a,c)\in R_2\circ R_3$当且仅当存在某个b使得$(a,b)\in R_3$且$(b,c)\in R_2$，跟据R_2,R_3的定义，可知这意味着$a<b$ 且$b\ge c$，这表明只要b足够大则$(a,c)\in R_2\circ R_3$，由于b可以在实数范围内任意选取，因此$R_2\circ R_3=R^2$。

h) $(a,c)\in R_3\circ R_3$当且仅当存在某个b使得$(a,b)\in R_3$且$(b,c)\in R_3$，跟据R_3的定义，可知这意味着$a<b$ 且$b<c$，由此可得$a<c$，这表明当且仅当$a<c$时$(a,c)\in R_3\circ R_3$，因此$R_3\circ R_3=R_3$。

9.3 Representing Relations

作业 9.3 【习题9.3第4题】：列出与下列矩阵对应的1, 2, 3, 4上的关系中的有序对。（其中行和列对应于按升序列出的整数）

$$\text{a)}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\qquad \text{b)}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\qquad \text{c)}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

解答：

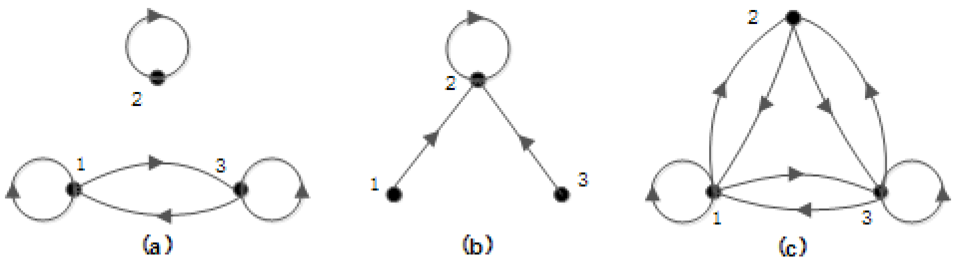
a) $(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)$

b) $(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)$

c) $(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)$

作业 9.4 【习题9.3第20题】：画出表示练习3中每个关系的有向图。

解答：在练习3的几种情况中，每个有向图均含有3个顶点。对于关系中的每个有序对(a,b)，添加一条从顶点a 指向顶点b的有向边，若是(a,a) 在关系中，则添加一个从顶点a指向自己的环。



9.4 Closures of Relations

作业 9.5 【习题9.4第22题】：若关系R是自反的，证明R^*是自反的。

解答：因为$R \subseteq R^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$，所以若$\Delta \subseteq R$，则$\Delta \subseteq R^*$，即若关系$R$是自反的，则$R^*$是自反的。（$\Delta$ 是对角关系）

作业 9.6 【习题9.4第26题】：用算法1找出a, b, c, d, e上的这些关系的传递闭包。

a) $\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$;

b) $\{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$;

c) $\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$;

d) $\{(a,e),(b,a),(b,d),(c,d),(d,a),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$;

解答：

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{[3]} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

紧接着$A^{[4]} = A^{[2]}, A^{[5]} = A^{[3]}$,所以答案$B = A \vee A^{[2]}$，即

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) 余下的题目我们将直接展示闭包的变化情况。

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,$A^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$A^{[4]} = A^{[5]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A^{[4]}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix},\ A^{[5]}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

d) $$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},\ A^{[2]}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},\ A^{[3]}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$A^{[4]}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},\ A^{[5]}=B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

作业 9.7 【习题9.4第28题】：用Warshall算法找出26题的传递闭包。

解答：W_5是答案。

a) $$W_0=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\ W_1=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\ W_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\ W_4=W_5=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

b) $$W_0=W_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix},\ W_2=W_3=W_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$W_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&1&1&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

c) $W_0=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}, W_1=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}, W_2=W_3=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$

$W_4=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}, W_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$

d) $W_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}, W_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}, W_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},$

$W_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}, W_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}, W_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$

9.5 Equivalence Relations

作业 9.8 【习题9.5第10题】：假设A是一个非空的集合，R是A上的等价关系，说明有一个函数f，其定义域是A且满足$(x,y)\in R$当且仅当$f(x)=f(y)$;

解答：设$B=\{[a]_R\mid a\in A\}$，即B是R的所有等价类构成的集合。定义函数$f:A\to B$为：对任意$a\in A$，$f(a)=[a]_R$。对任意的$(x,y)\in R$，显然$[x]_R=[y]_R$，即$f(x)=f(y)$，反之，若$f(x)=f(y)$，即$[x]_R=[y]_R$，而$y\in[y]_R$，从而$y\in[x]_R$，即$(x,y)\in R$。

作业 9.9 【习题9.5第16题】：R是正整数有序对上的关系，$((a,b),(c,d))\in R$当且仅当$ad=bc$，证明R是等价关系。

解答：自反性：$ab=ba$,所以$(a,b),(a,b)\in R$；对称性：$ad=bc$所以$((a,b),(c,d))\in R$，$cb=da$，所以$(c,d),(a,b)\in R$，所以他们同时属于R；传递性：若有$ad=bc,cf=de$，则$((a,b),(c,d))\in R,((c,d),(e,f))\in R$, 又由假设可得$adcf=bcde$，即$af=be$,所以$((a,b),(e,f))\in R$，所以满足传递性，所以$R$是等价关系。

作业 9.10 【习题9.5第40题】：

a) 练习16中的等价关系中，$(1,2)$的等价类是什么？

b) 对练习16中等价关系R的等价类给出一种解释。

解答：

a) $[(1,2)]=(a,b)\mid a/b=1/2=(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)...$

b) 每一个等价类可以被解释成一个正有理数，等价类$[(a,b)]$可以被解释成正有理数b/a。

9.6 Partial Orderings

作业 9.11 【习题9.6第16题】：基于在通常意义下的“小于”关系的字典序，用有序图表示表示$S=\{1,2,3,4\}$上的下列关系。

a) 找到所有$S\times S$中小于$(2,3)$的有序对。

b) 找到所有$S\times S$中大于$(3,1)$的有序对。

c) 画出偏序集$(S\times S,\preccurlyeq)$的哈斯图。

解答：

a) 需要找的是有序对中第一个数字小于2或者第一个数字为2但是第二个数字小于3的有序对，所以有$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2)$

b) 需要找的有序对是第一个数字大于3或者第一个数字为3但是第二个数字大于1的有序对，所以有$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(3,3),(3,2)$

c) 它的哈斯图是一条有16个点的长直线，最顶端的是$(4,4)$,$(4,4)$下面是$(4,3)$,再下面是$(4,2)$,依次下去，最底层的点是$(1,1)$

作业 9.12 【习题9.6第34题】：在偏序关系$(\{2,4,6,9,12,18,27,36,48,60,72\},|)$

a) 找出极大元。

b) 找出极小元。

c) 有最大元吗？

d) 有最小元吗？

e) 找出所有$2,9$的上界。

f) 若存在，找出$2,9$的最小上界。

g) 找出所有$60,72$的下界。

h) 若存在，找出$60,72$的最大下界。

解答：

a) $27,48,60,72$，是极大元，他们不可以再整除别的偏序集中的元素。

b) $2,9$是极小元。

c) 没有。没有一个元素可以被偏序集中所有元素整除。

d) 没有。没有一个元素可以整除偏序集中的所有元素。

e) $18,36,72$。

f) 18。

g) $2,4,6,12$。

h) 12。

第十章　Graphs

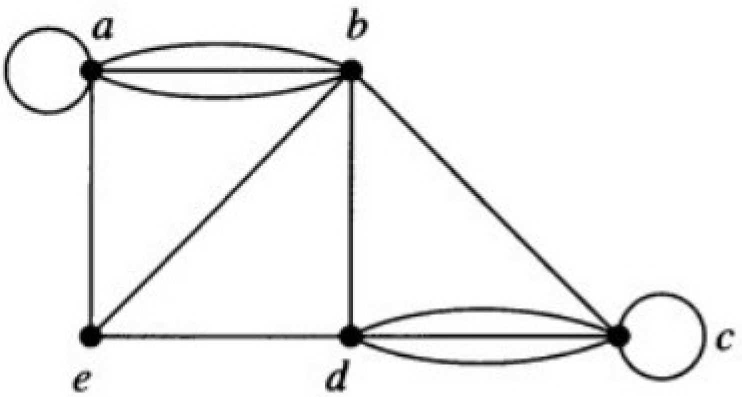
10.1　Graphs and Graph Models

作业 10.1 【习题10.1第28题】：描述一个图模型，它表示一个大城市的地铁系统。图中边应该是有向的还是无向的？是否允许重边？是否允许有循环？

解答：在这样的图模型中，顶点表示地铁站，如果地铁站u与地铁站v之间有铁路且在该段铁路线上这两个站之间没有其它地铁站，则用一条关联u和v的边表示这段铁路。如果存在某两个站之间只有单向行驶的铁路，则使用一条从出发地指向目的地的有向边连接这两个站点，否则使用无向边。一般来说不允许重边和循环。

10.2　Graph Terminology and Special Types of Graphs

作业 10.2 【习题10.2第2题】：找出下图中的顶点的个数，边的条数，每个顶点的度数，确定所有的孤立点和悬挂点。



解答：有五个顶点十三条边，$deg(a) = 6, deg(b) = 6, deg(c) = 6, deg(d) = 5, deg(e) = 3$，没有孤立点和悬挂点。

作业 10.3 【习题10.2第18题】：证明在至少包含两个顶点的简单图中，一定有两个顶点的度数相同。

证明 考虑图中是否有孤立点的情况。

1)若图中有孤立的点，则不可能有一个点与其余所有的点相连，即不存在度数为n-1的点，则n个点的度数分布情况应在0至n-2之间，根据抽屉原理，一定有两个点的度数相同。

2)若图中没有孤立点，则没有度数为0的点，则n个点的度数分布在1至n-1之间，根据抽屉原理，一定有两个点度数相同。得证！ □

作业 10.4 【习题10.2第26题】：当n为何值时，下面的图是可二分的？

a) K_n。

b) C_n。

c) W_n。

d) Q_n.

解答：

a) n=1时，点不足以被分割，n=2时可以被二分，当$n>2$时，K_n中包含一个三角形（此时三角形的三个顶点既无法被分配到同一组，也无法被分配到两个组），故无法被二分。

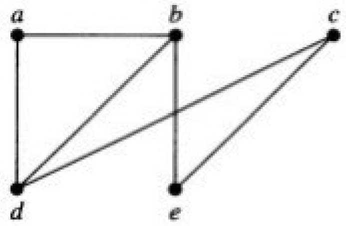
b) 首先$n\geq 3$时，C_n才有定义，当n是奇数时，它不是可二分的；当n是偶数时，它可以被二分（此时$V_1=\{v_1,v_3,v_5,\cdots,v_{n-1}\},V_2=\{v_2,v_4,v_6,\cdots,v_n\}$）。

c) 每个轮都含有三角形，所以没有一个W_n是可二分的。

d) 对所有的$n\geq 1$，Q_n都是可二分的。我们总可以把点分成两类，一类有奇数个1，另一类有偶数个1。

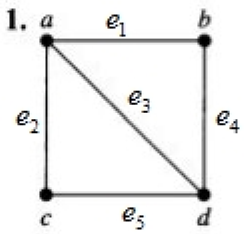
10.3 Representing Graphs and Graph Isomorphism

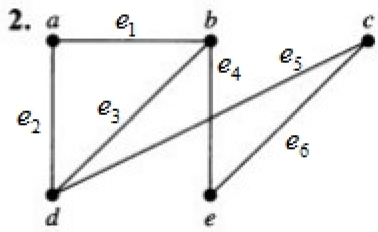
作业 10.5 【习题10.3第6题】：用邻接矩阵表示练习2中的图。



解答：
$$\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

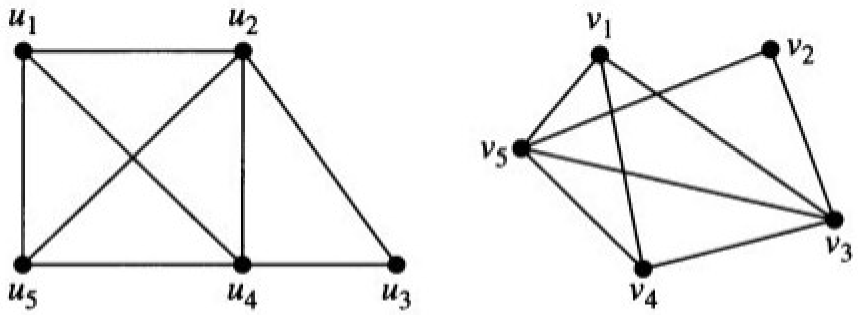
作业 10.6 【习题10.3第26题】：用关联矩阵表示练习1，2中的图。





解答：练习1：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，练习2：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

作业 10.7 【习题10.3第38题】：判断下列的一对图是否是同构的。

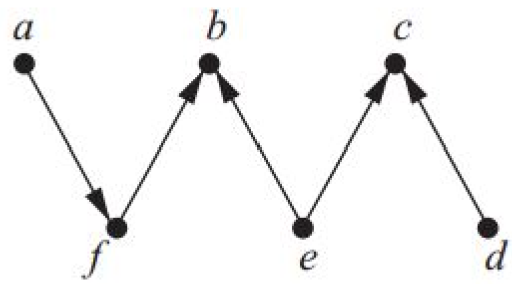


解答：他们是同构的，两个图形都包含K_4,并且第五个点都和K_4中的两个点相连。许多同构都是可以的，这里列举一个可行的：$f(v_1)=v_1$，$f(v_2)=v_3$，$f(v_3)=v_2$，$f(v_4)=v_5$，$f(v_5)=v_4$.

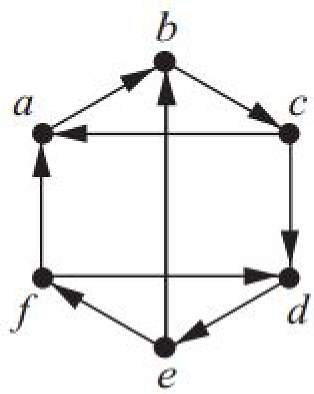
10.4 Connectivity

作业 10.8 【习题10.4第12题】：判断下列的图是否是强连通的，如果不是，在判断是否是弱连通的。

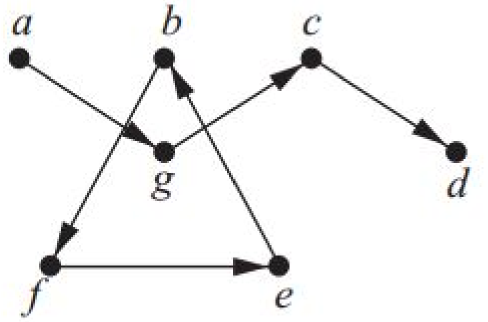
a)



b)



c)



解答:

a) 它不是强连通的，因为a到c没有可达的有向路径，但它是弱连通的。

b) 它是强连通的，因为任意两个点之间都有到达彼此的路径。显然，它一定是弱连通的。

c) 既不是强连通的，也不是弱连通的。因为没有a到b的可达路径。

作业 10.9 【习题10.4第58题】：用定理2求出练习2中的有向图从a到c的最短路径的长度。

解答：首先我们可以写出练习2的邻接矩阵如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

关注矩阵中的$(1,3)$（第一行第三列），它为0，代表不存在a到c的长度为1可达路径，紧接着计算A_2，

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

关注矩阵中的$(1,3)$（第一行第三列），它为0，代表不存在a到c的长度为2可达路径，紧接着计算A_3，A_3的第一行第三列为1，故存在1条a到c的距离为3的可达路径。所以最短距离为3.

10.5 Euler and Hamilton Paths

作业 10.10 【习题10.5第28题】：当m, n为何值时，全二分图$K_{m,n}$包含

a) 欧拉回路？

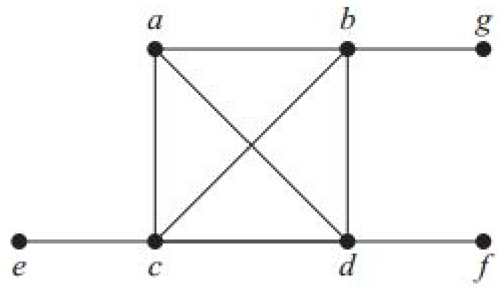
b) 欧拉道路？

解答:

a) 考虑到二分图两边的点的度数分别为m和n，当且仅当m, n同时为偶数的时候才能包含欧拉回路。

b) 所有包含欧拉回路的情况，一定都包含欧拉道路，所以m,n同时为偶数时，包含欧拉道路。另外，$K_{1,1}$明显包含欧拉道路。还有一种情况为$K_{n,2}$,其中n为奇数，则图中仅有两个点的度数为奇数，其余的都为偶数，满足欧拉道路的判别条件，此时包含欧拉道路，其余的情况都不满足条件。

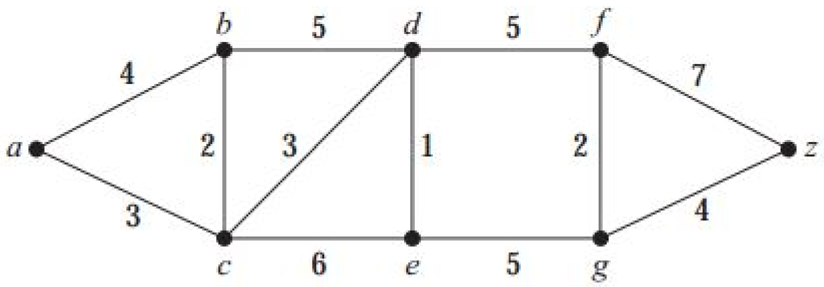
作业 10.11 【习题10.5第40题】：判断练习33中的图是否包含哈密顿道路，若有，则找到他，若没有，指明原因。



解答：图中有三个结点的度数为1，都可以作为哈密顿的终点，但是一条路径最多两个终点，所以不存在哈密顿道路。

10.6 Shortest-Path Problems

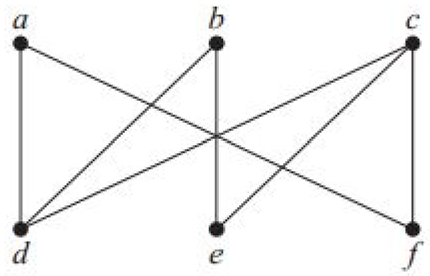
作业 10.12 【习题10.6第5题】：找出练习3的带权图中从a到z的最短路径。



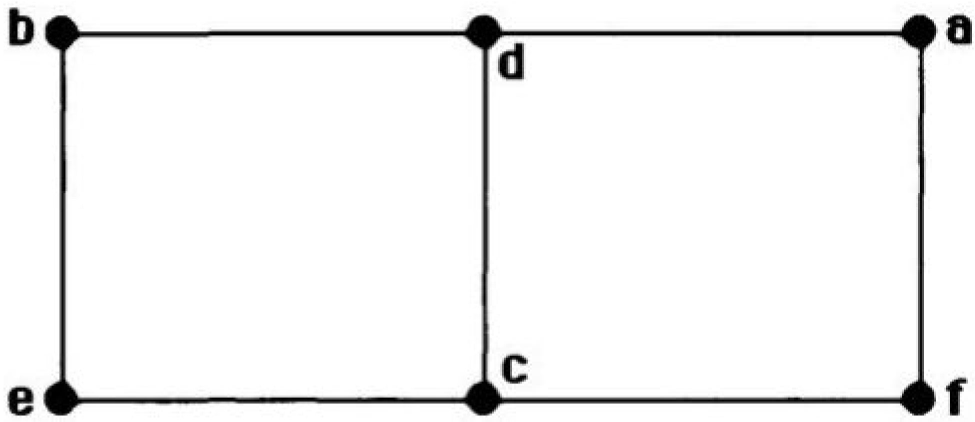
解答：a, c, d, e, g, z.

10.7 Planar Graphs

作业 10.13 【习题10.7第6题】：判断下图是否为平面图，若是，以边不相交的形式画出该平面图。



解答：它是平面图.图如下：



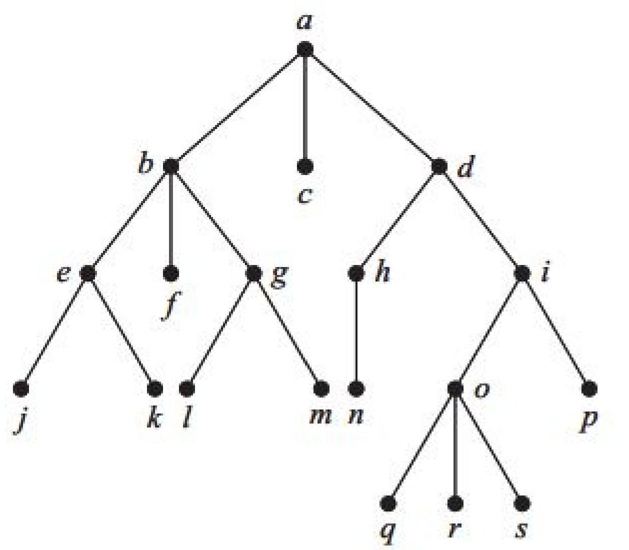
作业 10.14 【习题9.7第12题】：假设一个平面的连通平面图有八个顶点，每个顶点的度数为3，则该图将平面分成多少个区域？

解答：由欧拉公式知：$v - e + r = 2$,其中$v = 8$，由常识知，度数的和应为边的两倍，所以$e = (3 \cdot 8/2) = 12$，代入公式，所以$r = 6$。

第十一章　Trees

11.1　Introduction to Trees

作业 11.1 【习题11.1第4题】：回答下列关于树的问题。



a) 哪个结点是根节点。
b) 哪些结点是内部结点。
c) 哪些结点是叶子结点。
d) 哪些结点是j的孩子结点。
e) 哪个结点是h的父结点。
f) o的兄弟结点有哪些。
g) m的祖先有哪些。
h) b的后代有哪些。

解答：

a) a是根节点，因为在树的顶端。
b) $a, b, c, d, e, g, h, i, o$是内部结点。
c) $c, f, j, k, l, m, n, p, q, r, s$是叶子结点。
d) 没有结点是j的孩子结点。
e) d是h的父结点。

f) o的兄弟结点有i。

g) m的祖先有g, b, a。

h) b的后代有e, f, g, j, k, l, m。

作业 11.2 【习题11.1第6题】：练习4中的结点是否满足某个m的满m叉树？

解答：不是，因为有的结点有3个孩子，所以m最小为3，但是有的结点有一个或者两个孩子，故不是满3叉树，所以他不是满m叉树。

作业 11.3 【习题11.1第16题】：m, n为何值时，完全可二分的$K_{m,n}$是树。

解答：若m, n，都至少为2，那么显然存在一个长度为4的环路，所以他们至多有一个大于等于2，另一方面若$m = 1$,则对于任意的n,$K_{m,n}$都是树。所以$K_{m,n}$是树当且仅当$m = 1$或者$n = 1$。

作业 11.4 【习题11.1第22题】：这是一个寄信链。它开始于一个人发送出去五封信件（每封信件对应一个接受者，下同），收到的人每人再给没有发送过信件或者没有收到过信件的人发送五封信件，假设有10000个人在链结束前发送出去了信件，并且每个人至多只收到了一封信件，请问：有多少人收到了信件？有多少人没法送信件？

解答：这是一棵满五叉树。发送者个数为10000个，对应于10000个有分叉的内结点，由理论4可知，共有$n = mi + 1 = 10000 * 5 + 1 = 50001$个结点，共有$l = (m - 1)i + 1 = 40001$叶子结点，对应了只接受到了信件，而未发送信件的人。除了最先发送信件的人，所有人都收到了信件，所以共有50000人收到了信件。

11.2 Application of Trees

作业 11.5 【习题11.2第20题】：构建表示下面编码方案的前缀码的二叉树。

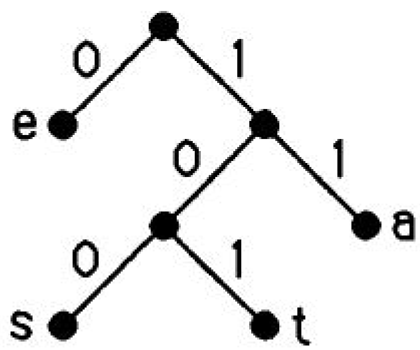
a) $a : 11, e : 0, t : 101, s : 100$

b) $a : 1, e : 01, t : 001, s : 0001, n : 00001$

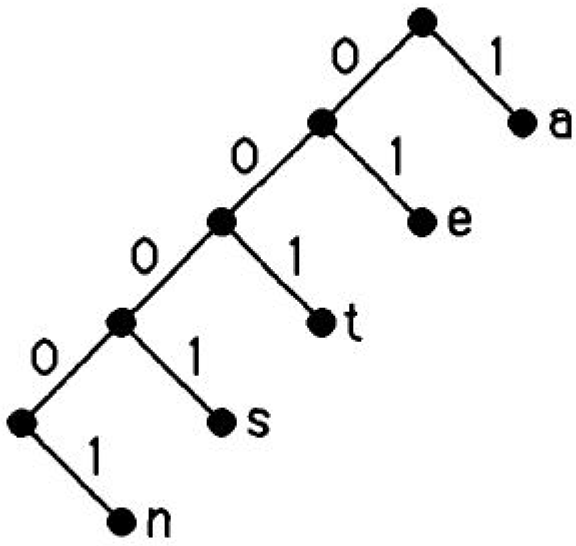
c) $a : 1010, e : 0, t : 11, s : 1011, n : 1001, i : 10001$

解答：

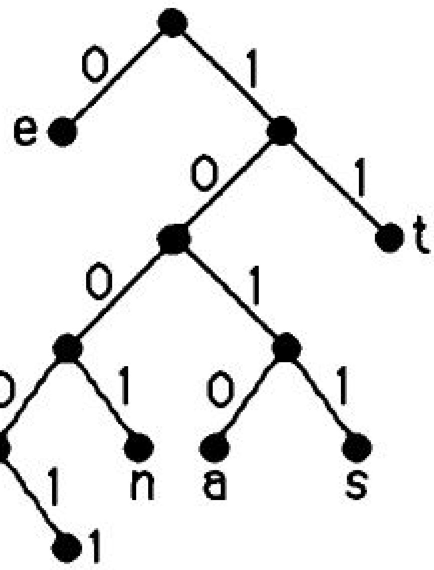
a)



b)

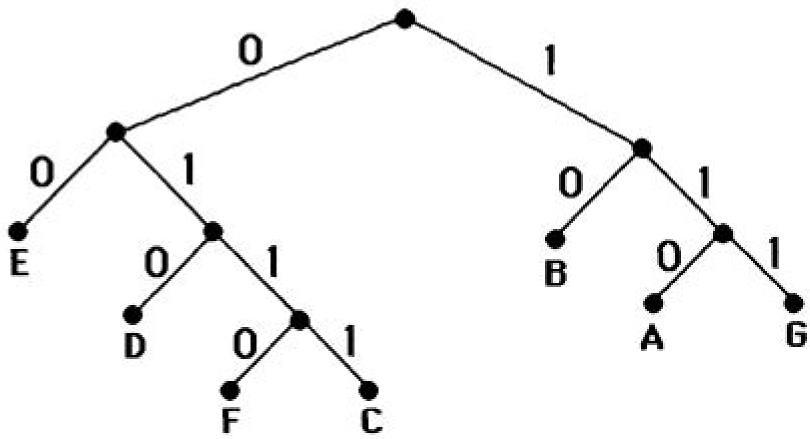


c)



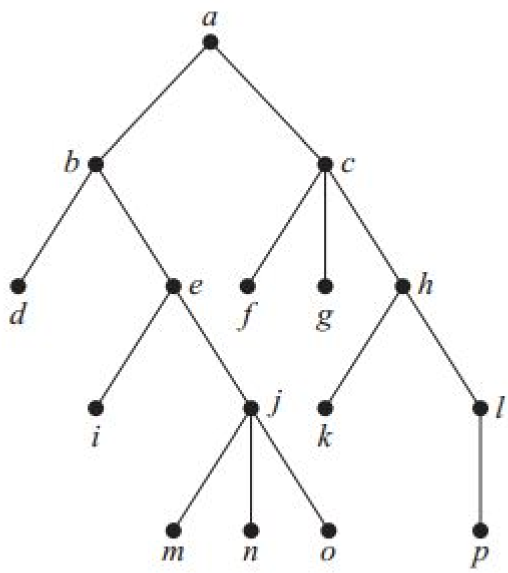
作业 11.6 【习题11.2第24题】：对下面的的特征序列构建哈夫曼编码。$A : 0.10, B : 0.25, C : 0.05, D : 0.15, E : 0.30, F : 0.07, G : 0.08$。

解答：先将最小权重的C，F结合，我们称之为T_1,求和得到$0.05 + 0.07 = 0.12$，比G,A的权重要大，紧接着将G和A结合，得到$0.1 + 0.08 = 0.18$,比D以及T_1权重要大，我们称之为T_2，按照将最小两个权重相加的原则，依次类推，将D与T_1结合，得到和为0.27的T_3,讲B与T_2结合，得到和为0.43的T_4,E和T_3结合得到T_5,T_4, T_5的结合就是最后的哈夫曼树,用$0-1$将分叉结点编码即可。(具体编码可参考下图)，加权求和知$3\cdot0.10+2\cdot0.25+4\cdot0.05+3\cdot0.15+2\cdot0.30+4\cdot0.07+3\cdot0.08 = 2.57$，所以平均需要$2.57bit$ 来表示每个字母。



11.3 Tree Traversal

作业 11.7 【习题11.3第8题】：给出以下根树的前序遍历结果。



解答：前序遍历结果如下：$a, b, d, e, i, j, m, n, o, c, f, g, h, k, l, p$.

作业 11.8 【习题11.3第11题】：给出练习8的中序遍历结果。

解答：中序遍历结果如下：$d, b, i, e, m, j, n, o, a, f, c, g, k, h, p, l$

作业 11.9 【习题11.3第14题】：给出练习8的后序遍历结果。

解答：后序遍历结果如下：$d, i, m, n, o, j, e, b, f, g, k, p, l, h, c, a$

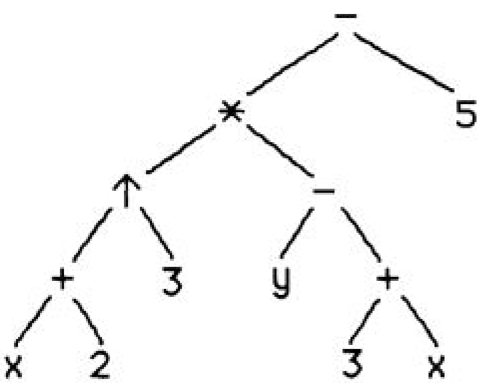
作业 11.10 【习题11.2第16题】：用二叉树表示表达式$((x+2)\uparrow 3)*(y-(x+3))-5$
a) 求它的前缀表示

b) 求它的后缀表示

c) 求它的中缀表示

解答:

a) 结果图如下



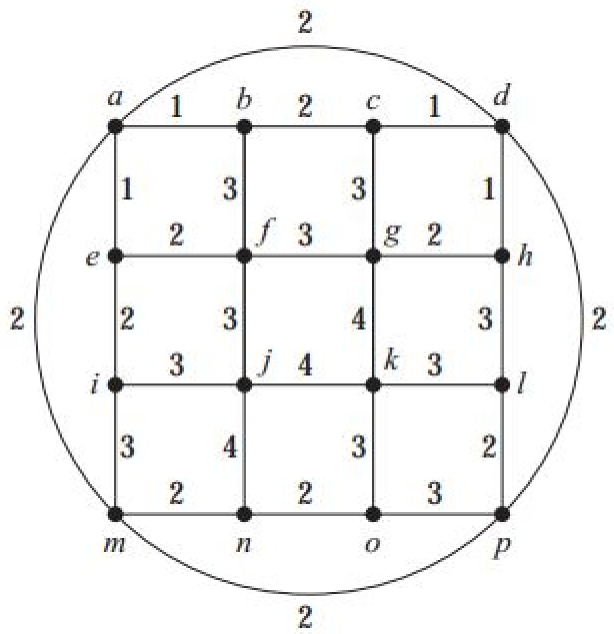
b) $- * \uparrow + x 2 3 - y + 3 x 5$.

c) $x 2 + 3 \uparrow y 3 x + - * 5 -$.

d) 中序表达式即为题目表述的本身：$(((x+2) \uparrow 3) * (y - (x+3)) - 5)$

11.5 Minimum Spanning Trees

作业 11.11 【习题11.5第4题】：用Prim算法找出下图中的最小生成树。



解答：边按照下列的顺寻添加到最少生成树中：$\{a,b\}$，$\{a,e\}$，$\{a,d\}$，$\{c,d\}$，$\{d,h\}$，$\{a,m\}$，$\{d,p\}$，$\{e,f\}$，$\{e,i\}$，$\{g,h\}$，$\{l,p\}$，$\{m,n\}$，$\{n,o\}$，$\{f,j\}$，$\{k,l\}$.最小生成树长度为28.

作业 11.12 【习题11.5第8题】：用Kruskal算法找出练习4中的最小生成树。

解答：边按照下列的顺寻添加到最少生成树中：$\{a, b\}$, $\{a, e\}$, $\{c, d\}$, $\{d, h\}$, $\{a, d\}$, $\{a, m\}$, $\{d, p\}$, $\{e, f\}$, $\{e, i\}$, $\{g, h\}$, $\{l, p\}$, $\{m, n\}$, $\{n, o\}$, $\{f, j\}$, $\{k, l\}$.最小生成树长度为28.