16.

习题10-3 **中山大學 本科生考试草稿纸** 2012 16/4

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.234.1. 判断下列级数是否收敛？是条件收敛还是绝对收敛？

(1) $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\cdots$ ；

解：$\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n)^2}\right|=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n)^2}\right|$ 收敛，即给定的级数绝对收敛

(2) $1-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)^p}+\cdots\cdots$ ；

解：$0<p\leq 1$ 时，① $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)^p}\right|=1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}+\cdots\cdots$ 发散；

而此时有② $u_n=\frac{1}{(2n-1)^p}>\frac{1}{(2n+1)^p}=u_{n+1}$，又 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}=0$

由交错级数的莱布尼兹判别法，此时级数收敛。

综合①、② $0<p\leq 1$ 时，级数条件收敛。

当 $p>1$ 时，$1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}+\cdots\cdots$ 收敛，

此时，级数绝对收敛。