P.26.13 证明函数 $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是有界函数。 2011 $^{29}/_{6}$ —10.

证：$|y|=|\sqrt{1+x}-\sqrt{x}|=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{1+1}+\sqrt{1}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=M$ ，$x\in(1,+\infty)$

所以，函数在 $(1,+\infty)$ 上有界。

P.26.14 研究函数 $y=\dfrac{x^6+x^4+x^2}{1+x^6}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界。

解：当 $x^2\le 1$ 时，$|y|=\dfrac{x^6+x^4+x^2}{1+x^6}\le\dfrac{x^6+x^4+x^2}{1+0^2}\le\dfrac{1+1+1}{1}=3$

当 $x^2>1$ 时，$0<\dfrac{1}{x^2}<1$，$0<\dfrac{1}{x^4}<1$，$0<\dfrac{1}{x^6}<1$，此时 $|y|=\dfrac{x^6+x^4+x^2}{1+x^6}=\dfrac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^6}+1}<\dfrac{1+1+1}{0+1}=3$

所以，在 $(-\infty,+\infty)$，$|y|\le 3$，故有界。

P.26.15 证明：$f: X\to Y$ 是有界函数的充要条件是：存在一常数 C，使 $|f(x)|\le C$，$\forall x\in X$。

证明：充分性：设有常数 C，使得对 $\forall x\in X$，使 $|f(x)|\le C$

取 $M=C$，$N=-C$，则 $\forall x\in X$，则有 $N\le f(x)\le M$

即 $f: X\to Y$ 即有上界也有下界，也就是 $f: X\to Y$ 有界。

必要性：设 $f: X\to Y$ 有界，即存在实数 M 与 N，使得：

$\forall x\in X$，$N\le f(x)\le M$

取 $C=\max\{|M|,|N|\}$，则 $-C\le N\le f(x)\le M\le C$

则有，对 $\forall x\in X$，$|f(x)|\le C$.

P.27.16 设 $f: X\to Y$；$g: X\to Y$；是两个有界函数

证明：$f(x)\cdot g(x)$ 也是有界函数。

证：由15题结果，由条件 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都有界，

所以，对 $\forall x\in X$，存在常数 M_1 与 M_2，使得 $|f(x)|\le M_1$，$|g(x)|\le M_2$

则 $|f(x)\cdot g(x)|\le|f(x)|\cdot|g(x)|\le M_1\cdot M_2$

所以 $f(x)\cdot g(x)$ 也有界。