《线性代数》章节热点

第一章　行列式

1.　什么是 n 阶行列式？

答：参见教材 P3，定义 1.1.

将 n^2 个数按(1.5)排列成 n 行 n 列，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

称（1.5）为 n 阶行列式.它表示取自不同行及不同列的元素的全部 n！个乘积的代数和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

行列式是一个数值.

2.　二阶、三阶行列式的计算公式是怎样的？

答：参见教材 P3，例 2.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

3.　三角形行列式如何求值？

答：参见教材 P10，例 1. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}$$

故三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

4.　已知 n 阶行列式 D $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$**，如何求行列式** $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$ **的值（其中 k 为常数）？**

答：参见教材 P9，行列式性质 3.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5.　什么是余子式和代数余子式？

答：参见教材 P16，定义 1.3.

行列式 D 中划去第 i 行、第 j 列后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素组成的行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；　$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}.

6.　什么是行列式按行（列）展开定理

答：参见教材 P17，定理 1.2.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

7.　行列式有哪些典型解法？

答: **(1) 定义法：**参见教材 P4，例 4；

（2）三角形法：参见教材 P11，例 3；

（3）降阶法：参见教材 P18，例 2、3；

（4）递推法：参见教材 P19，例 4.

《线性代数》章节热点

第二章　矩阵

1．什么叫矩阵？

答：参见教材 P37，定义 2.1.

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\right)$排列而成的 m 行、n 列的如下矩形数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵.记为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

2．矩阵与行列式有何区别？

答：（1）行列式是一个数值，而矩阵是一个数表；

（2）从外形上看,矩阵使用的是括号,而行列式用的是两条竖线；

（3）从结构上看,矩阵的行数和列数不一定相等,而行列式的行数和列数必须相等.

3．单位矩阵的特点和符号是什么？

答：主对角线上元素全部为 1，其他元素全部为 0 的 n 阶矩阵被称为单位矩阵，记作

E_n或 I_n，即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

4．零矩阵只有一个吗？

答：不是，行、列不同的零矩阵不相等.

5．两个矩阵能相加减的条件是什么？

答：参见教材 P40，定义 2.3.

相加减的两个矩阵行数和列数必须对应相等.

6．矩阵的数乘运算和行列式的数乘运算有何区别？

答：参见教材 P41，定义 2.5 与教材 P9，性质 3.

矩阵的数乘运算为:

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

而行列式的数乘运算为:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7．矩阵乘法如何定义的？两个矩阵相乘的条件是什么？矩阵乘法不满足哪些运算法则？

答：参见教材 P41 ，定义 2.6.

①

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij} = \sum_{l=1}^{s} a_{il}b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots\cdots + a_{is}b_{sj}$

②两个矩阵相乘的条件是：左矩阵 A 的列数与右矩阵 B 的行数相等.

③矩阵乘法一般不满足交换律和消去律.

8．在行列式中我们知道：行列式与其转置行列式的值相等，请问矩阵与其转置矩阵也一定相等吗？

答：不一定相等.参见教材 P47，定义 2.9.

例如： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$， $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

而 $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$，$B^T=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$E^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

9．$(AB)'=A'B'$，$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ 吗？

答：不对. $(AB)'\neq A'B'$，$(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$，而是 $(AB)'=B'A'$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

10．A，B 都是方阵，则 $|AB|=|A||B|$，对吗？

答：不对，必须 A,B 都是同阶方阵.

11．奇异阵、非奇异阵、可逆矩阵的关系是什么？

答：（1）对 n 阶方阵 A、B，若 $AB=BA=E_n$（n 阶单位阵），则 A、B 互为逆矩阵，A、B 皆为可逆矩阵；

(2) 若 $|A|=0$，则称 A 为奇异阵，奇异阵必不可逆；若 $|A|\neq 0$，则称 A 是非奇异阵，这是矩阵 A 可逆的充要条件.

12．若 A 非奇异，$AB=AC\Rightarrow B=C$，成立吗？

答：只要 A 非奇异，则成立.

13．什么是矩阵的伴随矩阵？

答：参见教材 P52，定义 2.13.

由 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 n 阶方阵，

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}，$$ 称为 A 的伴随矩阵.

14．初等变换与初等阵的关系是什么？

答：参见教材 P70.

（1）三种初等变换对应于三种初等矩阵；

（2）作初等行变换相当于左乘对应的初等阵；

（3）作初等列变换相当于右乘对应的初等阵.

15．什么是矩阵的秩?

答: 参见教材 P69，定义 2.19.

矩阵 A 中不等于 0 的子式的最高阶数是 r，则称 r 为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

16．怎么用初等变换求矩阵的秩

答: 参见教材 P69, 定理 2.7.

用初等变换，把矩阵化成阶梯形矩阵, 其非零行的行数就是矩阵的秩.

17. 用初等变换求逆矩阵的方法是什么？

答：（1）构造分块矩阵 $(A\,|\,E_n)$，仅用初等行变换将左边的子块 A 化为单位矩阵的同时右边子块就化为 A 的逆矩阵 A^{-1}，即

$$(A\,|\,E_n)\to(E_n\,|\,A^{-1})$$

（2）构造分块矩阵 $\left(\dfrac{A}{E_n}\right)$，仅用初等列变换将上边的子块 A 化为单位矩阵的同时下边的子块就化为 A 的逆矩阵 A^{-1}，即

$$\left(\dfrac{A}{E_n}\right)\to\left(\dfrac{E_n}{A^{-1}}\right)$$

《线性代数》章节热点

第三章 线性方程组

1. 什么是向量组的线性相关和线性无关？

答：参见教材 P97，定义 3.9.

对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在不全为零的数$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_s$，使得

$$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{k}_s\alpha_s=0$$

则称向量组**线性相关**.

只有当数$\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_2=\cdots=\boldsymbol{k}_s=0$时，才有

$$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{k}_s\alpha_s=0$$

则称向量组α_1，α_2，…，α_s**线性无关**.

2. 在理解线性相关和线性无关定义时应该注意什么问题？

答：注意以下的结论是**错误**的：

①如果存在一组不全为零的数$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_s$，使得$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{k}_s\alpha_s\neq 0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

②如果存在数$\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_2=\cdots=\boldsymbol{k}_s=0$，有$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{k}_s\alpha_s=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

③如果向量组的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个线性组合的等于零向量，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

3. 判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的方法？

答：（1）根据定义 3.9， 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的充要条件是齐次线性方程组（未知量为$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_s$）$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{k}_s\alpha_s=0$有非零解.

（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中，如果至少有一个向量可以用其余向量线性表示，则这组

向量是线性相关的.

（3）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是一组线性相关的向量，则在这一组向量里再添加若干个向量 $\beta_1,\cdots,\beta_t$，得到的新的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 仍是线性相关的.

（4）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 s 个 k 维向量，$\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$，…，$\tilde{\alpha}_s$ 是其 $k+1$ 维接长向量，若 $\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$，…，$\tilde{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必线性相关.

4. 判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的方法？

答：（1）根据定义 3.9, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件是齐次线性方程组（未知量为 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_s$）$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{k}_s\alpha_s=0$ 仅有零解.

（2）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是一组线性无关的向量，则从中取出的任意若干个向量都是线性无关的.

（3）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 s 个线性无关的 k 维向量，又 $\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$，…，$\tilde{\alpha}_s$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的 $k+1$ 维接长向量，则 $\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$，…，$\tilde{\alpha}_s$ 必线性无关.

5. 什么是极大线性无关组？

答：参见教材 P104，定义 3.11.下面给出一个等价定义：

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$（$r\le s$）满足条件

① $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关

② $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量（当 $r<s$ 时）都线性相关.

则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称**极大无关组**.

6. 什么是向量组的秩？

答：参见教材 P106，定义 3.12.

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组中所含向量的个数 r，称为此向量组的**秩**.应该注意，一个向量组的极大无关组不一定是唯一的，但其秩是唯一确定的

7. 怎么求向量组的秩、 向量组的极大无关组？

答：参见教材 P108，定理 3.9.

矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量间的线性关系.

根据定理 3.9, 可以利用矩阵的初等行变换求向量组的秩、 向量组的极大无关组并将向量组中其余向量用所求出的极大无关组线性表示.

8. 非齐次线性方程组 $AX=B$ 有解的条件是什么？

答：参见教材 P88，定理 3.2.

在有 m 个方程式、n 个未知数的线性方程组 $AX=B$ 中，记 A 是这个线性方程组的系数矩阵，$(A|B)$ 是线性方程组的增广矩阵.则 A 有 m 行 n 列，$(A|B)$ 有 m 行 $n+1$ 列.关于 $AX=B$ 有如下结论：

(1) 若 A 与 $(A|B)$ 的秩相等且都等于 n，即 $R(A)=R(A|B)=n$，则该线性方程组有且只有唯一解.如果方程组是齐次线性方程组，则这个解就是零解.

(2) 若 A 与 $(A|B)$ 的秩相等但小于 n，即 $R(A)=R(A|B)<n$，则该方程组有无穷多组解.

(3) 若 A 与 $(A|B)$ 的秩不相等，即 $R(A)\neq R(A|B)$，则该线性方程组没有解.

9. 什么是齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系？

答：参见教材 P113，定义 3.13.

若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是齐次线性方程组 $AX=O$ 的一组线性无关的解，且 $AX=O$ 的任意一个解都可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性表出，则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 为齐次线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系.

10. 齐次线性方程组 $AX=O$ 解的结构是什么？

答：如果方程组 $AX=O$ 的系数矩阵的秩 R（A）$=r$，而 $0<r<n$，则此方程组有基础解系.它的任一基础解系都含有 $n-r$ 个线性无关的解向量.如果方程组 $AX=O$ 的一个基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，则其全部解为

$$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}\text{（}k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\text{ 为任意常数）}.$$

11. 非齐次线性方程组 $AX=O$ 解的结构是什么？

答：如果方程组 $AX=B$ 的一个特解为 u，其导出组 $AX=O$ 的一个基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$,则方程组 $AX=B$ 的全部解（通解）为

$$X=u+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}\text{（}k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\text{ 为任意常数）}.$$

《线性代数》章节热点

第四章　线性空间

1. 什么叫线性空间？

答：参见教材 P132，定义 4.2.

设 V 是一个非空集合，P 是一个数域.在 V 中定义了两种代数运算：加法和数乘.且加法与数乘运算满足八条线性运算规则，则称集合 V 为数域 P 上的线性空间.

2. 求向量在一组基下的坐标有哪些方法？

答：参见教材 P135，定义 4.5 及教材 P136，定理 4.1

（1）根据定义, 方程组 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ 的解就是向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标;

（2）利用坐标变换公式.由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 C，若量 α 在这两组基下的坐标分别为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

3．什么叫做两个向量正交及正交向量组？

答：参见教材 P141，定义 4.11 及 P142，定义 4.12.

两个向量 $\alpha = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \beta = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，则称这两个向量 α, β 正交.

若非零向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 中的向量两两相互正交，即 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, (i, j = 1, 2, \cdots,$ $m; i \neq j)$，则称此向量组为正交向量组.

4．正交的向量组是否一定线性无关？

答：是.参见教材 P143，定理 4.3.但线性无关的向量组不一定正交.

5．如何将一组线性无关的向量化为标准正交向量组？

答：参见教材 P144，定理 4.4.

任何一组线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$都可用 Schmidt(施密特)正交化方法化为正交向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，且$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价

取 $\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1\text{，}\alpha_2)}{(\beta_1\text{，}\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_i=\alpha_i-\frac{(\beta_1,\alpha_i)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_i)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{i-1},\alpha_i)}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}\qquad (i=3\text{，}\cdots\text{，}m)$$

将向量组β_1，β_2，…，β_m中的每个向量单位化，即令

$$\eta_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}\qquad (i=1\text{，}2\text{，}\cdots\text{，}m)$$

则得到一个与原向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价的标准正交向量组$\eta_1$，$\eta_2$，…，$\eta_m$.

《线性代数》章节热点

第五章　矩阵的特征值和特征向量

1．如何求一个矩阵的特征值和特征向量？

答：(1) 求出矩阵 A 的特征多项式，即计算行列式 $|\lambda E - A|$.

(2) 求解特征方程 $|\lambda E - A| = 0$，得到特征值.

(3) 将各个特征值依次带入齐次线性方程（$\lambda E - A$）$X = O$, 解得方程组的全体非零解就是矩阵 A 的特征向量.

2．若 λ 是 A 的一个特征值，那么 kA（k 为常数）、Ak（k 为正整数）和可逆矩阵 A^{-1} 有一个特征值分别是多少？

答：kA 的一个特征值为 $k\lambda$， A^k 的一个特征值为 λ^k，A^{-1} 的一个特征值为 λ^{-1}.

3．齐次线性方程组$(\lambda E - A)X = O$ 的解向量一定就是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量吗？

答：不对，只有非零解向量才是特征向量.

4．相似矩阵有哪些性质？

答：参见教材 P162.

相似矩阵有相同的行例式、相同的秩、相同的特征多项式. 相似矩阵的幂矩阵也相似，可逆矩阵相似，其逆矩阵也相似.

5．矩阵 A 与对角矩阵相似的条件是什么？

答：参见教材 P163，定理 5.5 及 P164 推论.

（1）n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

（2）n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的的特征值，则矩阵 A 与对角矩阵相似.

6．实对称矩阵一定可以与对角矩阵相似吗？

答：可以.参见教材 P171，定理 5.9.

7. 求变换矩阵使实对称矩阵正交相似于对角阵的步骤是什么？

答：参见教材 P172.

《线性代数》章节热点

第六章　二次型

1.　什么是二次型？

答：参见教材 P183，定义 6.1.

系数在数域 F 中的含有 n 个变量的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型.

2.　什么是二次型的矩阵形式？

答：参见教材 P184.

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则二次型的矩阵形式为 $f=X^TAX$，其中系数矩阵 A 为实对称矩阵.

3. 什么是二次型的标准形？

答：所谓二次型的标准形，就是二次型中只含平方项的形式，即

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_sx_s^2 \qquad 1\le s\le n$$

4．用配方法化二次型为标准形的步骤是什么？

答：（1）若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

（2）若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$ ，则先作可逆线性变换，化二次型为含有平方项的二次型，然后再按（1）中方法配方.

5．用正交变换化二次型为标准形的步骤是什么？

答：参见教材 P190.

（1）求出二次型的矩阵 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ；

（2）求出矩阵 A 对角化的正交矩阵 Q ，得正交变换 $X = QY$;

(3) 写出 f 的标准形 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 或 $f = Y^T \Lambda Y$,其中

$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

6．二次型正定的定义是什么？

答：参见教材 P198，定义 6.7.

设有实二次型 $f = X^T AX$，如果对任何 $X \neq 0$，都有 $f > 0$（显然 $f(0) = 0$），则称 f 为正定二次型，并称对称矩阵 A 是正定的.

7．对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是什么？

答：参见教材 P201，定理 6.7.

对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式为正，即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$