东校区 2009 学年度第一学期 09 级《高等数学一》期中考试题

专业 软件工程（通信软件） 学号 09388365 姓名 王萌 评分 96

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一， 求下列极限（每小题 7 分，共 28 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$

解：∵ $\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{n}{n+\sqrt{1}}$

$\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{n+\sqrt{n}}$

又：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

3, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x+2}$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2}$

$=\frac{1}{e^2}$

4， $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{\sqrt{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{2}\dfrac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=\sqrt{2}$

二， 完成下列各题（每小题7分，共28分）

1， 设 $y=x\sqrt{x^2-a^2}$ ，求 y'。

解: $y'=\sqrt{x^2-a^2}+x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}$

$=\sqrt{x^2-a^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

2， 设 $y=\dfrac{\sin e^x}{1+x^2}$ ，求 dy。

解: $dy=d\dfrac{\sin e^x}{1+x^2}=\dfrac{e^x\cos e^x(1+x^2)-2x\sin e^x}{(1+x^2)^2}dx=\dfrac{(1+x^2)e^x\cos e^x-2x\cdot\sin e^x}{(1+x^2)^2}dx$

3， 已知 $ye^x+\ln y=1$ ，求 $y'(0)$.

解: 对等式两侧分别微分得: $e^x dy+e^x y\cdot dx+\frac{1}{y}dy=0$

则 $\dfrac{dy}{dx}=y'=-\dfrac{e^x y}{e^x+\frac{1}{y}}$ 由 $ye^x+\ln y=1$ 得 $x=0$ 时, $y=1$

代入 y' 得: $y'(0)=-\frac{1}{2}$

4， 设 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ ，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{da(1-\cos t)}{da(t-\sin t)}=\dfrac{a\sin t\,dt}{a(1-\cos t)dt}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\dfrac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\dfrac{1}{a(1-\cos t)^2}$

三，　求下列积分（每小题 7 分，共 28 分）：

1，$\int\frac{1}{x^2+2x-3}dx$

解：$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1)(x+3)}$

$\therefore\begin{cases}A+B=0\\3A-B=1\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\B=-\frac{1}{4}\end{cases}$ $\therefore\int\frac{1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}$

$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C$

2，$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$，$(a>0)$

解：令 $x=a\sin t$ $(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2})$ 则 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2t\,dt$ $\cancel{=a^2(\cos t\cdot\sin t+\int\sin^2t\,dt)}$

$\cancel{=a^2[\cos t\cdot\sin t-(\sin t\cos t-\int\cos^2t\,dt)]}$

~~移项得~~：$\cancel{a^2\int\cos^2t\,dt=a^2\cos t\cdot\sin t+C=}$

$a^2\int\cos^2t\,dt=\frac{a^2}{4}\int(\cos2t+1)\,d2t=\frac{a^2}{4}\sin2t+\frac{a^2}{2}t+C$

$=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

3，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{1+\sin^2x}dx$，

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{1+\frac{1-\cos2x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{3-\cos2x}d2x=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{3-\cos t}dt$

$=\int_1^{-1}\frac{dy}{y-3}=\ln|y-3|\Big|_1^{-1}=\ln2$

4，$\int_0^1\arctan x\,dx$

解：令 $x=\tan t$ $(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$

则 $\int_0^1\arctan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\,d\tan t=t\cdot\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt$

$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos t}{\cos t}=\frac{\pi}{4}+\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{u}$

$=\frac{\pi}{4}+\ln|u|\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

四、(6分) 证明：$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)}dx \le \frac{\pi}{12e}$

证明：$\because$ ~~当~~ $x\in[1,\sqrt{3}]$ 时，$\sin x \le 1$，$e^x \ge e$

$\therefore \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} \le \frac{1}{e(1+x^2)}$

由定积分性质得：$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)}dx \le \frac{1}{e}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{e}\arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12e}$

$\therefore$ 原不等式成立

-3

五、(5分) 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 绕 x 轴旋转构成的旋转体的体积.

解：令 $x=a\sin^3 t$，$y=a\cos^3 t$ $\because$ 星形线中心原点对称，

则绕 x 轴旋转的旋转体体积：

$V=2\int_0^a \pi y^2 dx = 6\pi a^2\int_0^a \cos^4 t \sin^2 t\, dt$

-1

六、(5分) 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=k$，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=k$.

证明：$\because f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$ $\therefore$ 不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$

则 $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-k}{x-a}>0$ $\because x>a$

$\therefore f(x)\ge k$

同理 $f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-k}{x-b}>0$ $\because x<b$

$\therefore f(x)\le k$

$\therefore$ $k\le f(x)\le k$ 令 $x=\xi$ 得：

$\therefore$ 一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=k$