一、完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}}$.　　其中：$0<a<b$.

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin 3xy}$,

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 确定，求 y'。

4. 设三个正数的和为 12，求 xy^2z^3 的最大值。

5. 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分。

6. 求 $\int\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$　。

7. 求 $I=\int_0^2 xe^x dx$　。

8. 求曲线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围成的图形的面积 。

9. 求 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ 的极值。

10．求曲线 $L:\begin{cases}x=t,\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$ 在 $P_0(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程。

二. 计算题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 求函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在点 $x_0=0$ 处的 n 阶泰勒公式。

2. 求函数 $u=xyz$ 在点 $A(5,1,2)$ 沿到点 $B(9,4,14)$ 的方向 $\overline{AB}$ 上的方向导数.。

3. 求过直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$ 和点 $P_0(1,2,3)$ 的平面方程。

三. 完成下列各题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设 $u=f(x,xy,xyz)$,其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$。

2. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但在此点不可微。

3. 设 $f(x)$ 为非负函数，它在 $[a,b]$ 的任一子区间内不恒等于 0，在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f''(x)\geq 0$，证明方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内若有实根，则只能有一个。