

中山大学 本科生考试草稿纸 ¹⁵/₄

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第七条：“考试作弊者不授予学士学位。”

P.223.2.(10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}; (p>0)$

$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = f(n) = \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$

由积分判别法: $p=1$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

$$\int_3^{+\infty} f(x) dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_3^{+\infty} = +\infty$$

从而 $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$ 发散, $\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$ 也发散.

$p \neq 1$, $u_n = f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$

$$\int_3^{+\infty} f(x) dx = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_3^{+\infty} (\ln x)^{-p} d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{-p+1} (\ln x)^{-p+1} \Big|_3^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{p-1}} \Big|_3^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ 0 - \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(\ln 3)^{p-1}}, & p > 1 \end{cases}$$

从而, $p > 1$ 时, 级数收敛;

$0 < p \leq 1$ 时, 级数发散.