组合数学

卢伟

教材与参考书

- 教材:
- R. A. Brualdi, 《组合数学》, 机械工业出版社(中译第4版)
- 参考:
- 卢开澄, 《组合数学》(第4版),清华大学出版社

课程特点

- 研究内容：
  离散结构的存在、计数、分析和优化。

- 技巧的应用来自于经验的积累，所以解决的组合数学问题越多，那么能够解决下一个组合数学问题的可能性就越大。
- 结合数论思考问题

课程内容简介

- 鸽巢原理 (例 Ramsey定理)
- 排列组合
- 容斥原理 (例 Euler函数)
- 递推关系与生成函数
- 二分图匹配
- 组合设计
- Polya计数定理 (例: 圆排列)

例:棋盘的完美覆盖

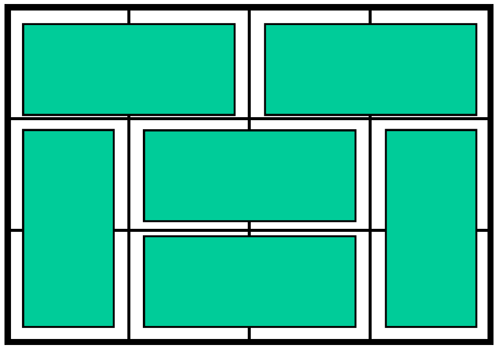
m×n棋盘: m行n列方格, b-牌:1行b个的方格条

m×n棋盘被b-牌的一个完美覆盖是

b-牌在棋盘上的一个排列, 满足:

(1) 每个格子恰好只被一张牌覆盖;

(2) 每条b-牌覆盖b个方格.



3×4棋盘有2-牌的完美覆盖.

6×6棋盘有4-牌的完美覆盖吗?

定理: m×n棋盘有b-牌的完美覆盖⇔b|m或b|n.

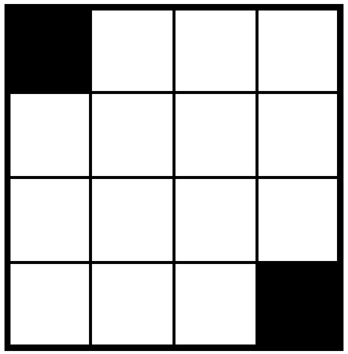
棋盘覆盖及其变化

1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1

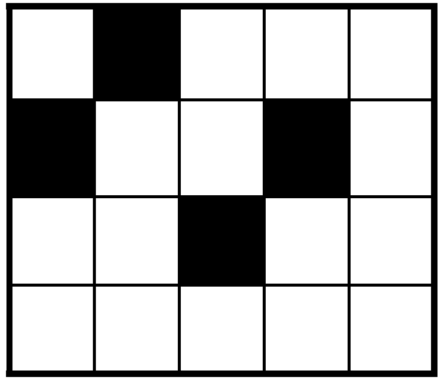
6×6棋盘用1,2,3,4如图填数，4牌在任何位置都覆盖1,2,3,4，去掉成组的1234, 多余1124。所以6×6棋盘不能用4牌完美覆盖。

完美覆盖

变化: 带禁止方格, 用多米诺牌(2-牌)覆盖



4×4棋盘去掉2格
用多米诺牌(2-牌)覆盖



4×5棋盘去掉4格
用多米诺牌覆盖

- 转化为二分图, 应用二分图匹配算法.
- $2\times n$棋盘用2-牌覆盖有多少种方案?
- $3\times 2n$棋盘用2-牌覆盖有多少种方案?

例:Nim取子游戏

设有$k \geq 1$堆硬币,各堆分别含有$n_1, n_2, \ldots, n_k$枚硬币.

游戏规则:

(1)两游戏人交替取子;

(2)每人在一次取子时只能取一堆中的硬币,
　取至少一枚,至多全堆硬币;

(3)所有堆都变成空堆时, 游戏结束,
　最后取子的人获胜.

例1. (100, 389) 游戏人I有必胜策略

例2. (7, 8, 15) 游戏人II有必胜策略

ZJ1

平衡态

设有游戏$(n_1,n_2,\ldots,n_k)$, 且各数的二进制展开是

$$n_i=a_{is}a_{i(s-1)}\ldots a_{i1},\ i=1,2,\ldots,k$$

若 $a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{k1}$ (各数第1位之和),

$$\ldots$$

$a_{1s}+a_{2s}+\ldots+a_{ks}$ (各数第s位之和)

都是偶数, 则称游戏处于平衡态.

(7,8,15): 平衡态

(100,389): 非平衡态

(7,12,13): 非平衡态

7： 0111

8： 1000 平衡态

15： 1111

幻灯片 9

ZJ1 Zhu Jair, 2018/11/27

平衡态与非平衡态的转化

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|}
n_1 = & a_{1s} & a_{1(s-1)} & \cdots & a_{11} \\
n_2 = & a_{2s} & a_{2(s-1)} & \cdots & a_{21} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n_k = & a_{ks} & a_{k(s-1)} & \cdots & a_{k1} \\
\hline
\text{Label} = & c_s & c_{(s-1)} & \cdots & c_1
\end{array}
$$

(7,8,15):平衡态

(100,389):非平衡态

(7,8,13):非平衡态

- 游戏终止时是平衡态
- 平衡态不能经一次取子达到平衡态
- 非平衡态可经一次取子达到平衡态

取子目标分析

非平衡位

		1	0	0
		1	0	1
	1	0	0	0
	1	1	1	1
Label =	0	1	1	0

最大非平衡位

从大数变成小数

堆1: 1 0 0
目标: 0 1 0

堆2: 1 0 1
目标: 0 1 1

堆3: 1 0 0 0
目标: 1 1 1 0

堆4: 1 1 1 1
目标: 1 0 0 1

命题: 可从某堆取币到平衡态 当且仅当

其最大非平衡位是1. (比较习题1.33)

结论

- 游戏终止时是平衡态
- 平衡态不能经一次取子达到平衡态
- 非平衡态可经一次取子达到平衡态

定理: 若游戏非平衡, 则游戏人I有必胜策略;

若游戏平衡, 则游戏人II有必胜策略.

拉丁方

定义: 若A是由n个元素构成的n阶方阵,

其中每个元素在每行每列各出现一次,

则称A是拉丁方.

设$A=(a_{ij})$, 每个元素每行(列)只出现一次:

$a_{ij}=a_{ik} \Rightarrow j=k$ ($a_{ji}=a_{ki} \Rightarrow j=k$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

36名军官问题

(18世纪)36军官问题: 6个地区, 6种军衔各一名.

将这36名军官排成6×6方阵, 使得

1)每行每列都有任一地区的军官;

2)每行每列都有任一军衔的军官.

i :军衔, j :地区, 军官对应数偶(i, j), $i, j \in [0,5]$

问题等价于构造数偶(i,j)排成的6阶方阵, 使得

1) 数偶第一个数字构成拉丁方;

2) 数偶第二个数字构成拉丁方;

3) 每个数偶只出现一次.

正交拉丁方

定义:设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个$n\times n$拉丁方.

令$C=((a_{ij}, b_{ij}))_{n\times n}$,若C的$n^2$对数偶互不相同,

则称A与B正交.

36军官问题等价于构造两个正交的6阶拉丁方.

例: 3阶正交拉丁方

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&1&2\\2&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}(0,0)&(1,1)&(2,2)\\(1,2)&(2,0)&(0,1)\\(2,1)&(0,2)&(1,0)\end{bmatrix}$$

正交拉丁方的实际意义

正交的拉丁方的一个应用: 药物配合试验

三种治发烧药和三种治感冒药, 对三位病人试验, 要求三天内每人都服这几种药, 比较配合疗效.

这时就可用上面讨论过的3阶正交拉丁方.

$$C = \begin{bmatrix} (1,1) & (2,3) & (3,2) \\ (2,2) & (3,1) & (1,3) \\ (3,3) & (1,2) & (2,1) \end{bmatrix}$$

行:人, 列:天

(i,j): i,发烧药

j, 感冒药

Euler的猜测

令N(n)为两两正交的n阶拉丁方的最大个数.

N(1)=1, N(2)=1, N(3)=2

定理1: 若$n>1$,则$N(n) \le n-1$.

定理2: 若$n=p^a$, p是素数,$a>0$, 则N(n)=n-1.

定理3: 若n是奇数, 则N(n)≥2.

定理4: 若N(m)≥2,N(n)≥2, 则N(mn)≥2.(自学)

推论: 若n≥2且n≠4k+2, k≥0, 则N(n)≥2.(?)

Euler(1707~1783)猜测:

对任意n=4k+2, k≥0, N(n)=1.

Euler猜测的解决

1900年 Tarry(法) 验证了N(6)=1.

1959年 Parker(美) 证明 N(10)≥2.

1959年 Bose(印), Parker, Shrikhande(印)

证明 对任意k>1, N(4k+2)≥2.