§1.6 证明简介

一．引言

一个证明是一个合法的论证，它建立了数学语句的真实性。证明中可以使用定理的假设，预先假设为真的公理和前面已经证明了的定理，使用这些成分和推理规则，最后一步建立要证明的定理的真实性。

*因为形式化证明太繁冗，我们讨论非形式化的证明，其中使用多于一种推理规则，有些步骤被跳过，有些公理被自动地假设为真，所使用的推理规则不明显地说明。

二．一些术语

1. 定理(Theorem)：形式化地说，一个定理就是已经证明是正确的语句。但在数学上，定理是已经证明是正确的并且是比较重要的语句。

2. 命题(Proposition)： 一些不太重要的定理称为命题（定理有时也被称为事实或结果（论））(fact or result)。

*我们用一个证明来说明定理的正确性。

3. 公理(Axiom)：是人们认为为真且不需要证明的句子。公理中的术语是基本的，无需定义的。

4. 引理(Lemma)：不太重要的定理但是在证明中有用的事实，有时称为引理。

5. 推论(Corollary)：是可以从一个定理直接推导出来的结论（定理）。

6. 猜想(Conjecture)：是已经被提出来假设为真的，但是尚未被证明的句子。它的提出通常依赖于一些部分的事实、启发式的论证或专家的直觉。当猜想的证明被找到，它就变成了定理。

三．理解如何证明定理

*许多定理断言某些性质对某个论域中所有元素成立。

例如：如果 x > y, 其中 x 和 y 是正实数，那么 $x^2 > y^2$。

它表示：对于任意正实数 x 和 y，如果 x > y，那么 $x^2 > y^2$。

在证明过程中，全称量词消去规则往往被不明显说明地使用。在证明的第一步，选一个该论域中的一般元素，后续步骤中证明这个元素具有所讨论的性质。最后，全称量词引入规则说明该定理对论域中所有元素成立。

四．证明定理的方法

一个定理一般是这样的形式：$\forall$x(P(x)→Q(x)), 我们要证 P(c)→Q(c), 其中，c 是该论域中任意的元素，然后利用全称量词引入规则。我们要证的就是 p→q. 注意 p→q 为真，除非 p 为真但 q 为假。

1. 直接证明 (Direct proof)

要证明 p→q，最直接的方法是假设 p 为真，后续的步骤根据推导规则，最后一步证明 q 也一定为真。在直接证明中，我们假设 p 为真，然后使用公理、定义和前面已证明的定理，运用推理规则，最后证明 q 也一定为真。

定义 1：一个整数 n 是偶数，是说：存在整数 k，使得 n=2k; n 是奇数，是说：存在整数 k，使得 n=2k+1.

例 1：给出以下定理的直接证明：如果 n 是奇数，那么n^2也是奇数。

解：要证∀n(P(n)→Q(n)), 其中 P(n): n 是奇数；Q(n): n^2是奇数。任取一个整数 n, 证明 P(n)→Q(n)。任取一个整数 n，因为 n 是奇数，故存在整数 k，使得 n=2k+1, 我们要证n^2也是奇数。因为$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$，故$n^2$也是奇数。从而证明了结论。

2. 用逆否命题证明(Proof by contraposition)

直接证明要证 p→q, 假设 p 成立，证明 q 也成立。但有时这种方法得不到有效的证明，我们因此尝试间接证明方法。其中一种是利用逆否命题证明。因为我们要证 p→q，我们知道┓q→┓p 与之等值。因此，我们假设┓q 成立，证明┓p 也成立。

例 3：证明：如果 n 是整数且 3n+2 是奇数，那么 n 是奇数。

解：由 3n+2 是奇数，得 3n+2=2k+1, 无法推出 n 是奇数。用逆否命题。假设 n 是偶数，n=2k, k 是某个整数。那么 3n+2=3×(2k)+2=6k+2=2(3k+1), 故 3n+2 也是偶数。故逆否命题成立，得证。

例 4：证明：如果 n=ab, 其中 a 和 b 是正整数，那么 a≤$\sqrt{n}$或 b≤$\sqrt{n}$。

解：直接证明：由 n=ab，很难推出 a≤$\sqrt{n}$或 b≤$\sqrt{n}$。我们证逆否命题。(a≤$\sqrt{n}$)∨(b≤$\sqrt{n}$)的否定是：a>$\sqrt{n}$且 b>$\sqrt{n}$。我们假设 a>$\sqrt{n}$且 b>$\sqrt{n}$。故 ab >$\sqrt{n}\sqrt{n}$= n，故 n ≠ ab，从而逆否命题成立。

3. 空和平凡情形的证明（Vacuous and trivial proof）

我们要证明 p→q，有些情形 p 为假，p→q 自然成立。这种证明称为空情形的证明(vacuous proof).

例 5：证明命题 P(0)为真，其中 P(n)：如果 n > 1，那么n^2> n. 论域是所有整数的集合。

解：因为 n = 0 时， n > 1 不成立，故(n > 1)→(n^2> n)自然成立，从而 P(0)为真。

注意：0^2 > 0 虽然不成立，但蕴涵式 P(0)仍成立。

我们要证 p→q，有时，我们可以直接证明 q 为真，因此 p→q 自然为真，这种证明称为平凡证明(trivial proof).

例 6：设 P(n)：如果 a 和 b 都是正整数且 a⩾b，那么$a^n \geq b^n$，其中 n 的论域是所有整数的集合。证明 P(0)为真。

证明：P(0)表示：如果 a 和 b 都是正整数且 a⩾b，那么$a^0 \geq b^0$。由于$a^0=1 \geq b^0=1$，结论成立，故 P(0)为真。

4. 一个小的证明策略

当我们要证明一个形如∀x(P(x)→Q(x))的定理，我们应该用什么证明方法呢？首先看一看直接证明法是否有希望。扩展定理前提中的定义，从这些前提、公理和已有的定理出发

进行推理，如果直接证明法似乎推不出结论，则用逆否命题证明。假设结论为假，然后用直接证明法看看能否推出前提为假。

定义 2：一个实数 r 是有理数，是说：存在整数 p 和 q 且 q≠0，使得 r = p/q. 任一不是有理数的实数被称为无理数。

例 7：证明：两个有理数的和仍为有理数。这个命题相当于，对任一实数 r 和对任一实数 s，如果 r 和 s 都是有理数，那么 r+s 也是有理数。

证明：我们先试直接证明法。对任意实数 r 和 s，如果 r 和 s 都是有理数，那么存在整数 p 和 q 且 q≠0，和存在整数 t 和 u 且 u≠0, 使得 r = p/q 且 s = t/u, 那么 $r+s=\frac{p}{q}+\frac{t}{u}=\frac{pu+tq}{qu}$，其中 qu≠0, pu+tq 和 qu 都是整数，故 r+s 也是有理数，直接证明法成功。

例 8：证明：如果 n 是整数且 n^2 是奇数，那么 n 也是奇数。

证明：用直接证明法。设 n^2 是奇数，则存在整数 k，有 n^2=2k+1，这无法推出 n 是奇数。故我们试逆否命题。设 n 是偶数，故存在整数 k，有 n=2k, 那么 $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$，故 n^2 也是偶数，逆否命题得证。

5. 反证法(Proof by contradiction)

假如我们要证明一个语句 p 为真，如果我们能找到一个矛盾式 q，并且能证明┐p→q 为真，由于 q 为假且┐p→q 为真，故┐p 为假，亦即 p 为真。这种证明方法称为反证法(proofs by contradiction). 其中 q 的形式通常为 r∧┐r,r 是某一个命题。

例 9:证明任意 22 天中至少有 4 天落在一个星期的同一天中。

解：设 p: 给定的 22 天中至少有 4 天落在一个星期的同一天中。假设┐p 为真。即落在一个星期的同一天中至多有 3 天。因为一个星期一共由 7 天，落在每一天中至多有 3 天，故总共至多有 3×7=21 天。设 r 为：一共选了 22 天。故┐p→r∧┐r, 矛盾。故原来的命题 p 成立。

例 10：用反证法证明$\sqrt{2}$是无理数。

证：设 p:$\sqrt{2}$是无理数。假设┐p 成立，即$\sqrt{2}$是有理数，故存在整数 a 和 b 且 b≠0 使得$\sqrt{2}$=a/b。假设分数 a/b 是最小项（即 a 和 b 中没有公因子可以约分）。由于$\sqrt{2}$=a/b，故 2=a^2/b^2，即$2b^2=a^2$,因此，a^2是偶数，故 a 是偶数。令 a=2c，故有$2b^2=4c^2$，$b^2=2c^2$，从而也有b^2也是偶数，故 b 也是偶数。这样，a 和 b 均为偶数，它们有公因子 2，这与 a/b 是最小项的假设矛盾。故┐p 为假，即命题 p 成立。

在证明条件式 p→q 时，反证法先假设结论 q 为假，即┐q 为真。再假设 p 为真，然后证明 p∧┐q→F.

证明逆否命题时，欲证 p→q.假设 p 为真，┐q 为真，然后证明┐p 为真，从而有矛盾 p∧┐p.

6. 证明等值式（充要条件）

要证明 p↔q, 根据重言式(p↔q)↔(p→q)∧(q→p),只要证 p→q 且 q→p 即可。

例 12：证明定理：如果 n 是正整数，那么 n 是奇数当且仅当 n^2 是奇数。

证明：设 n 是任意正整数。令 p: n 是奇数；q: n^2 是奇数。现在要证 p↔q. 即要证 p→q 且 q→p 都为真。在例 1 中已证 p→q 在例 8 中已证 q→p。故 p↔q 成立。

有时我们要证：$p_1, p_2, ..., p_n$ 都等值，我们写成 $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow p_n$ 由重言式: $[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge ... \wedge (p_n \to p_1)]$ 只要证：$p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, ..., p_n \to p_1$ 即可，而不需证明：$p_i \to p_j$，对任意 i,j, (1≤i，j≤n).

例 13：证明：对于整数 n，以下句子等价：

p_1: n 是偶数；

p_2: n－1 是奇数；

p_3: n^2 是偶数。

解：我们证明：$p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to p_1$ 为真即可。

(1) $p_1 \to p_2$：设 n 是偶数，故存在整数 k，使得 n=2k, 那么 n－1=2k－1=2(k－1)+1, 其中 k－1 是一个整数，故 n－1 是奇数。

(2) $p_2 \to p_3$：假设 n－1 是奇数，即存在整数 k, 使得 n－1=2k+1，即 n=2k+2，故 $n^2 = (2k+2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$，而 $2k^2 + 4k + 2$ 是一个整数，故 n^2 是偶数。

(3) $p_3 \to p_1$：我们证明逆否命题。假设 n 不是偶数，那么 n^2 也不是偶数。也就是证明：如果 n 是奇数，那么 n^2 也是奇数。

在例 1 中已经给出了证明。因此，证明完成。

7. 反例(Counterexamples)

对于证明具有形式$\forall x P(x)$的定理为假，我们只需要找反例，即在论域中找到一个 x 使得 P(x)为假。

例 14：证明以下语句为假：每一个正整数是两个整数的平方之和。

解：要证明这个语句为假，只要找到一个正整数，它不是两个整数的平方之和即可。例如：3 不能表示成两个整数的平方之和。

五．证明中的错误

在数学证明中有许多常见的错误，在这里我们作简单的描述。

第一种是算术和基本代数的错误。

例 15：以下证明：1=2 中哪里有错？

证明：设 a 和 b 是两个相等的正整数。

(1) a=b　　条件

(2) $a^2 = ab$　　（1）式两边同时乘 a

(3) $a^2 - b^2 = ab - b^2$　　(2)式两边同时减b^2

(4) (a－b)(a+b)=b(a－b)　（3）式两边因式分解

(5) a+b=b　　（4）式两边同时除以 a－b

(6) 2b = b　　(5)式左边用 b 代替 a，因为 a=b

(7) 2 = 1　　(6)式两边除以 b

还有一些是逻辑错误，其中的推论不能从前面的假设得到。

例 16：以下证明中哪里有错？

定理：如果n^2是正数，那么 n 是正数。

证明：已知n^2是正数。由定理：如果 n 是正数，那么n^2是正数。又因为n^2是正数，故 n 是正数。

解：设 P(n): n 是正数; Q(n): n^2是正数. 已知：∀n(P(n)→Q(n)). 由假设 Q(n)为真，不能推出 P(n)为真。

上述“定理”为∀n(Q(n)→P(n)). 可以找到反例：令 n = －1, n^2正数，不能推出 n 为正数。

例 17：以下证明中哪里有错？

定理：如果 n 不是正数，那么n^2也不是正数。（这是例 16 的逆否命题）

证明：假设 n 不是正数，由定理：如果 n 是正数，那么n^2也是正数。我们得到结论，n^2也不是正数。

解：设 P(n)和 Q(n)与例 16 中一样。由语句∀n(P(n)→Q(n))和┐P(n)不能推得┐Q(n)。故上述“定理”∀n(┐P(n)→┐Q(n))不成立。

令 n =－1, 可得到反例。

最后，我们讨论一种很难发现的错误。很多不正确的推理起源于一种称为祈求问题的谬误。这种错误出现在证明中，用要证的语句作为证明的根据，因此称为循环论证。

例 18：以下证明是否正确？

定理：如果n^2是偶数，那么 n 也是偶数。

证明：假设n^2是偶数。那么n^2=2k 对某个整数 k 成立。设 n = 2m, 对某个整数 m 成立。因此，n 是偶数.

解：虽然本定理是对的，但证明有错。假设 n=2m, 再证 n 是偶数，是循环论证，有错。

作业：

1. 用直接证明法证明：如果 m+n 和 n+p 都是偶数，其中 m,n,p 都是整数，那么 m+p 也是偶数。

2. 证明：如果 n 是整数且n^3+5是奇数，那么 n 是偶数。用以下方法：(a)用逆否命题证明；(b)用反证法证明。

3. 证明或否证：两个无理数的乘积仍是无理数。

4. 证明以下关于实数 x 的三个语句等价：(i)x 是无理数；(ii)3x+2 是无理数；(iii)x/2 是无理数。