
普通物理学
中山大学
余丰人

电磁学绪论

1.电磁学的发展

- 公元前人类发现了摩擦起电的现象-电的发现。
- 公元前人类发现了磁石的磁特性现象-磁的发现。
- 1785年，库仑对电现象进行了深入探索，并通过定量研究，总结出了点电荷之间相互作用力所服从的基本定律，称为库仑定律，它是电相互作用的基本定律。
- 1819年，奥斯特发现了载流导线周围的磁针会受到磁力作用而偏转的现象。
- 1820年，安培发现了磁铁周围的载流导线也会受到磁力作用而发生运动的现象。
- 随后，安培还发现两载流导线之间也有相互作用力，并且发现其作用力与两磁铁之间的作用力遵从相类似的规律，并通过定量研究，总结出了电流元之间相互作用力所服从的基本定律，称为安培定律。

- 1822年，安培提出一切磁现象的根源都是电流的观点，因此安培定律就是磁相互作用的基本定律。
- 1831年，法拉第发现了电磁感应现象和规律，1834年，楞次给出了感应电流的方向判断方法，1845年诺埃曼给出了电磁感应定律的数学表达式。
- 随后，法拉第提出了电场和磁场的观点，认为电力和磁力两者都是通过场起作用的。
- 1865年，麦克斯韦提出了位移电流假设，在前人成就的基础上，系统地建立了电磁场理论，并指出光是一种电磁波-在空间传播的交变电磁场，使光学成为电磁场理论的组成部分。
- 1888年，赫兹用实验证实了电磁波的存在，支持了麦克斯韦的电磁场理论。

2.电磁学的研究

- 电磁学研究电荷和电流产生电场和磁场的规律。
- 电磁学研究电场和磁场的相互联系规律。
- 电磁学研究电磁场对电荷和电流的作用规律。
- 电磁学研究电磁场与物质（实物）的相互作用规律

3.电磁学的场与路

- 电磁学的场理论是电磁学的根本理论。
- 电磁学的路理论是电磁学特定条件下的近似理论。

第12章　真空中的静电场

§1　电荷与库仑定律
§2　电场与电场强度
§3　高斯定理
§4　环路定理与电势
§5　等势面与电势梯度

§1 电荷与库仑定律

一、电荷的基本性质

1. 两种电荷

存在两种不同性质的电荷，分别叫正电荷和负电荷。

2. 电荷守恒定律

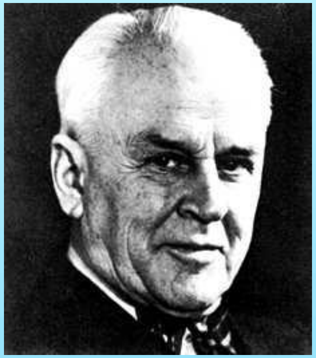
在一个与外界没有电荷交换的系统内，不管发生什么物理过程，正负电荷的代数和保持不变。

3. 电荷量子化

物体带电量的变化是不连续的，它只能是元电荷 e 的整数倍，即粒子的电荷是量子化的。

e = 1.602×10^{-19}C(库仑)，为电子电量。

$$q = ne \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$



密立根

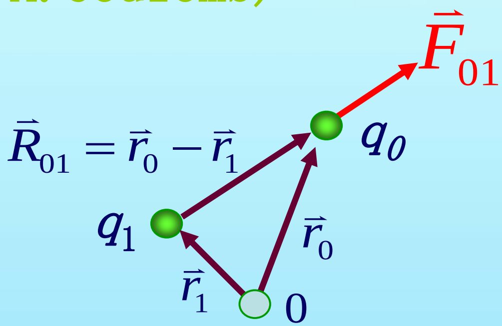
1923年诺贝尔物理学奖授予美国科学家密立根，表彰他对基本电荷和光电效应的工作。

二、库仑定律和静电力的叠加原理

1. 库仑定律

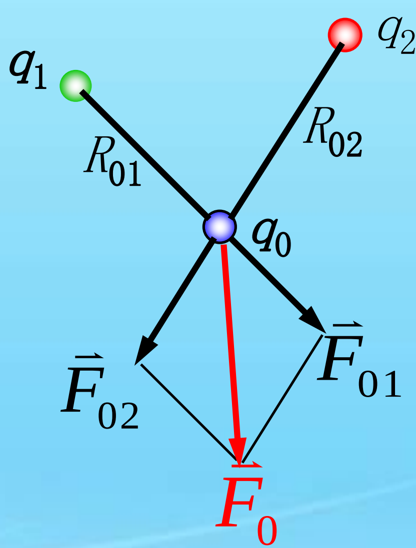
1785年，法国库仑（C.A.Coulomb）

$$\vec{F}_{01}=k\frac{q_0q_1}{R_{01}^3}\vec{R}_{01}=k\frac{q_0q_1}{R_{01}^2}\hat{R}_{01}$$



2. 静电力的叠加叠加性

$$\vec{F}_0=\sum_i \vec{F}_{0i}=\sum_i k\frac{q_0q_i}{R_{0i}^3}\vec{R}_{0i}=\sum_i k\frac{q_0q_i}{R_{0i}^2}\hat{R}_{0i}$$



3. 有理化单位制

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

真空的介电常数： $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$

三、历史上的库仑实验

扬振宁1978年7月6日在上海物理学会演讲中说道：

我曾经把库仑的文章拿来看了一看，发现他写出的那个公式同实验的误差达到30%以上，估计他写这个公式，一部分是“猜”出来的。猜测的道理是因为他已知道牛顿的公式。

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

所以要和大家讲这一点，是因为所有物理和数学最前沿的研究工作，很大一部分力量要花在猜想上；在别的方面可能也是这样，不过我不太熟悉罢了。当然这并不是说可以乱猜，猜必须建筑在过去的一些知识上面，你过去的知识愈正确、愈广泛，那么猜到正确答案的可能性就愈大。

§2 电场与电场强度

一、电场与电场强度

1.超距作用与近距作用

历史上认为：相互作用是不需时间、也不需媒介，这就是超距作用。

2. 电场概念的引入

电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

电磁相互作用是需要时间、也需要媒介，这媒介就是电场，这就是近距作用。事实上，变化的电磁场是以有限的速度（光速）传播的。

3.场的物质性

a. 力的作用,

b. 电场具有能量,

c. 电场具有动量。

场和实物是物质存在的不同形式，它们的异同为：

同：它们都具有能量、动量、质量。

异：实物有不可入性，场有可叠加性。

4. 电场性质

a. 力的性质： 对处于电场中的其他带电体有作用力；

b. 能量的性质：在电场中移动其他带电体时，电场力对它能作功。

5. 电场强度

a. 单位正电荷（检验电荷）在电场中某点所受到的力是该点电场的电场强度。这就是从力的角度研究电场。

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

b. 电场的电场强度与检验电荷无关，反映电场本身的性质。

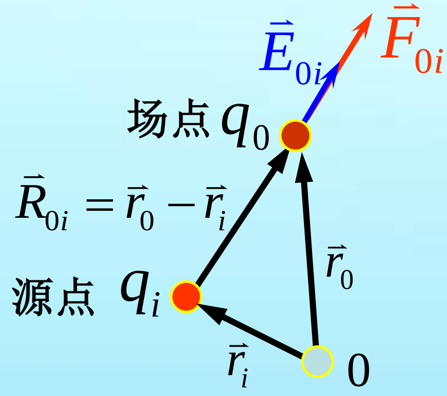
c. 电荷在电场中将受到电场力的作用。

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

二、电场强度的叠加原理

1. 点电荷的电场强度 点电荷的电场具有球对称性

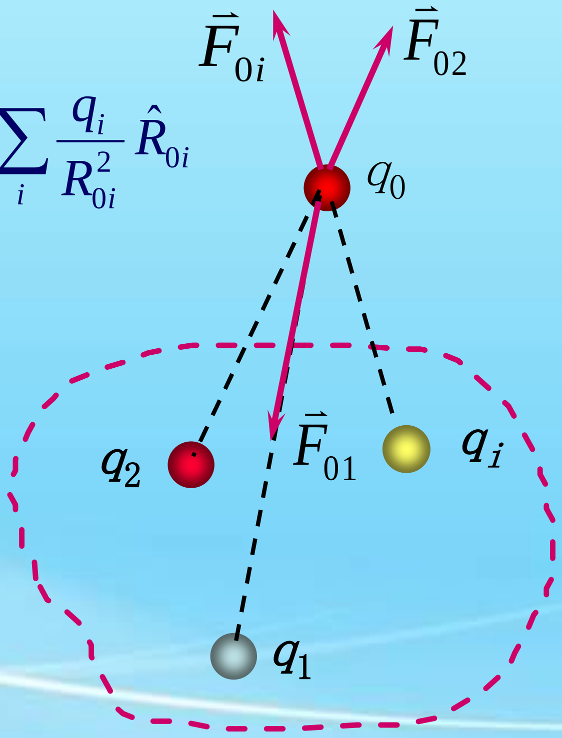
$$\vec{F}_{oi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_i}{R_{oi}^{\ 2}}\hat{R}_{oi} \qquad \vec{E}_{0i}=\frac{\vec{F}_{0i}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{R_{0i}^{\ 2}}\hat{R}_{0i}$$



2. 点电荷系的电场强度

$$\vec{F}_0=\sum_i \vec{F}_{0i}$$

$$\vec{E}_0=\frac{\vec{F}_0}{q_0}=\frac{1}{q_0}\sum_i \vec{F}_{0i}=\sum_i \frac{\vec{F}_{0i}}{q_0}=\sum_i \vec{E}_{0i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{R_{0i}^2}\hat{R}_{0i}$$



3. 电场强度的叠加原理

$$\boxed{\vec{E}=\sum \vec{E}_i}$$

电场中任何一点的总场强等于各个点电荷在该点各自产生的场强的矢量和。这就是场强叠加原理。

三、连续带电体的电场强度

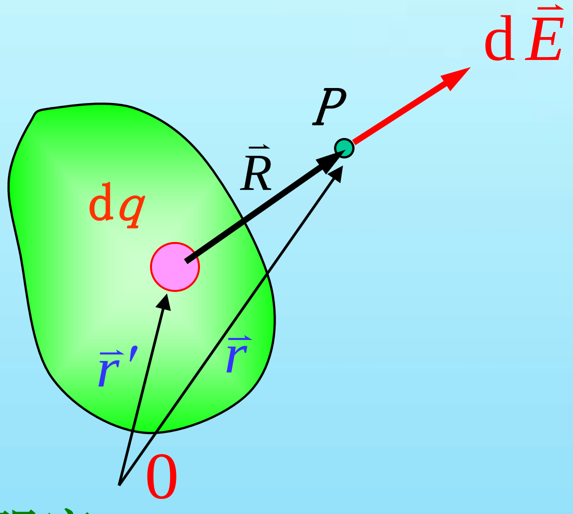
1. 电荷元dq

将带电体分成很多个电荷元dq, 每个电荷元就是一个点电荷。

$$\mathrm{d}q=\rho\,\mathrm{d}V \qquad \rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$ 体密度

$$\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}S \qquad \sigma=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$ 面密度

$$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l \qquad \lambda=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$ 线密度



2. 电荷元dq的电场强度dE

电荷元dq产生的电场强度就是点电荷的电场强度。

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^3}\vec{R} \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$$

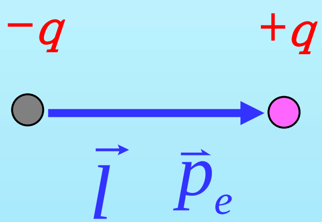
3. 由叠加原理积分得总电场强度E

$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{R^3}\vec{R}$$

四、电偶极子(Electric dipole)

1. 电偶极子

a. 电偶极子是一对靠得很近的等量异号的点电荷系统。电偶极子是在理论上处理电介质分子的模型

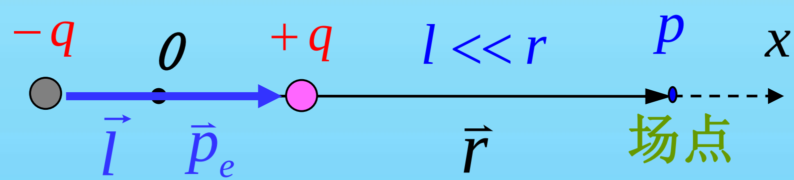


b. 电偶极矩(Electric dipole moment)

$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$

2. 电偶极子延长线上的场强

1). 建立参照系和坐标系



2). 写出场和源的绝对位矢

$$\vec{r} = r\vec{i} \qquad \vec{r}_- = -\frac{l}{2}\vec{i} \qquad \vec{r}_+ = \frac{l}{2}\vec{i}$$

3). 写出场对源的相对位矢

$$\vec{R}_- = \vec{r} - \vec{r}_- = (ri) - \left(-\frac{l}{2}i\right) = \left(r + \frac{l}{2}\right)i \qquad R_- = \left(r + \frac{l}{2}\right)$$

$$\vec{R}_+ = \vec{r} - \vec{r}_+ = (ri) - \left(\frac{l}{2}i\right) = \left(r - \frac{l}{2}\right)i \qquad R_+ = \left(r - \frac{l}{2}\right)$$

4). 点电荷系的场强

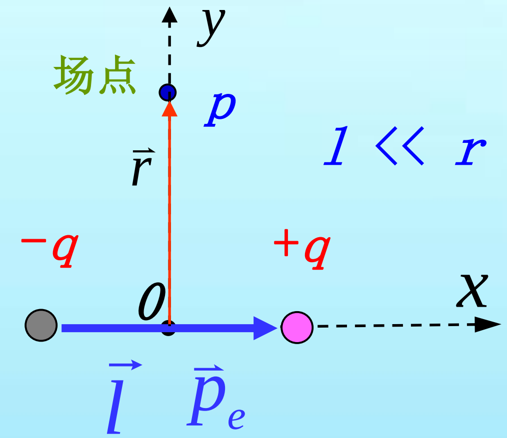
$$\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{R_-^3}\vec{R}_- + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{R_+^3}\vec{R}_+$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{R}_-}{R_-^3} + \frac{\vec{R}_+}{R_+^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2}\right]i$$

$$\approx \frac{2qli}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E = \frac{2p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \propto \frac{p_e}{r^3}$$

3. 电偶极子中垂线上的场强

1). 建立参照系和坐标系



2). 写出场和源的绝对位矢

$$\vec{r} = rj \qquad \vec{r}_- = -\frac{l}{2}i \qquad \vec{r}_+ = \frac{l}{2}i$$

3). 写出场对源的相对位矢

$$\vec{R}_- = \vec{r} - \vec{r}_- = (rj) - \left(-\frac{l}{2}i\right) = \frac{l}{2}i + rj$$

$$\vec{R}_+ = \vec{r} - \vec{r}_+ = (rj) - \left(\frac{l}{2}i\right) = -\frac{l}{2}i + rj$$

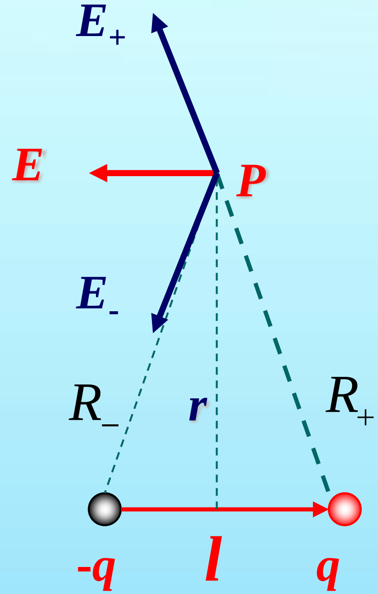
$$R_- = R_+ = \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2} \approx r$$

4). 点电荷系的场强

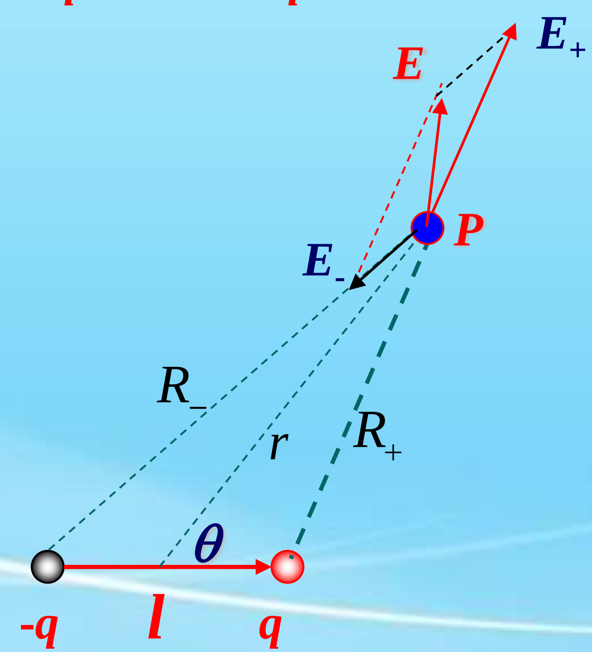
$$\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{R_-^3}\vec{R}_- + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{R_+^3}\vec{R}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_\pm^3}\left[-\vec{R}_- + \vec{R}_+\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_\pm^3}\left[-\left(\frac{l}{2}i + rj\right) + \left(-\frac{l}{2}i + rj\right)\right] = -\frac{qli}{4\pi\varepsilon_0 R_\pm^3} \approx -\frac{\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_e}{r^3}\right) \propto \frac{p_e}{r^3}$$



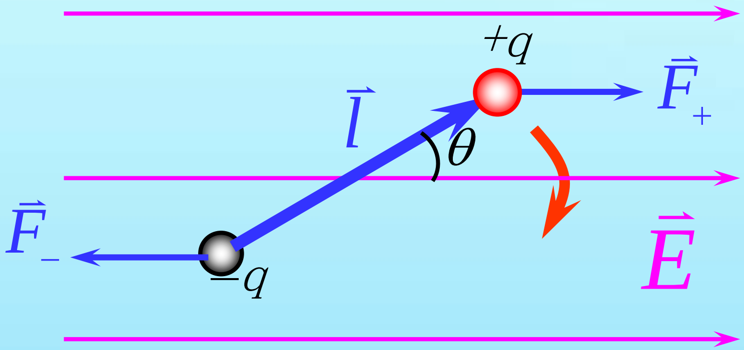
4. 电偶极子的一般场强



$$E = \frac{(1\sim 2)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_e}{r^3}\right) \propto \frac{p_e}{r^3}$$

5. 电偶极子在均匀电场中所受的作用力

1）设在均匀外电场中，电偶极子电矩的方向与场强方向间的夹角为θ，作用在电偶极子正负电荷上的力的大小分别为F+ 、F-。



$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_- = q\vec{E}$$

2）电偶极子在均匀外电场中所受的合外力为零

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$$

3）由于F+ F- 不在同一直线上，故有力矩的作用

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}_+ = \vec{l} \times q\vec{E} = q\vec{l} \times \vec{E}$$

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}$$

$\theta = 0,\ \pi$ 时， $\vec{M} = 0$

四、 均匀带电荷直线(棒) 的场强（已知L, λ > 0, a）

1). 建立参照系和坐标系

2). 取电荷元 $dq = \lambda dl = \lambda dy$

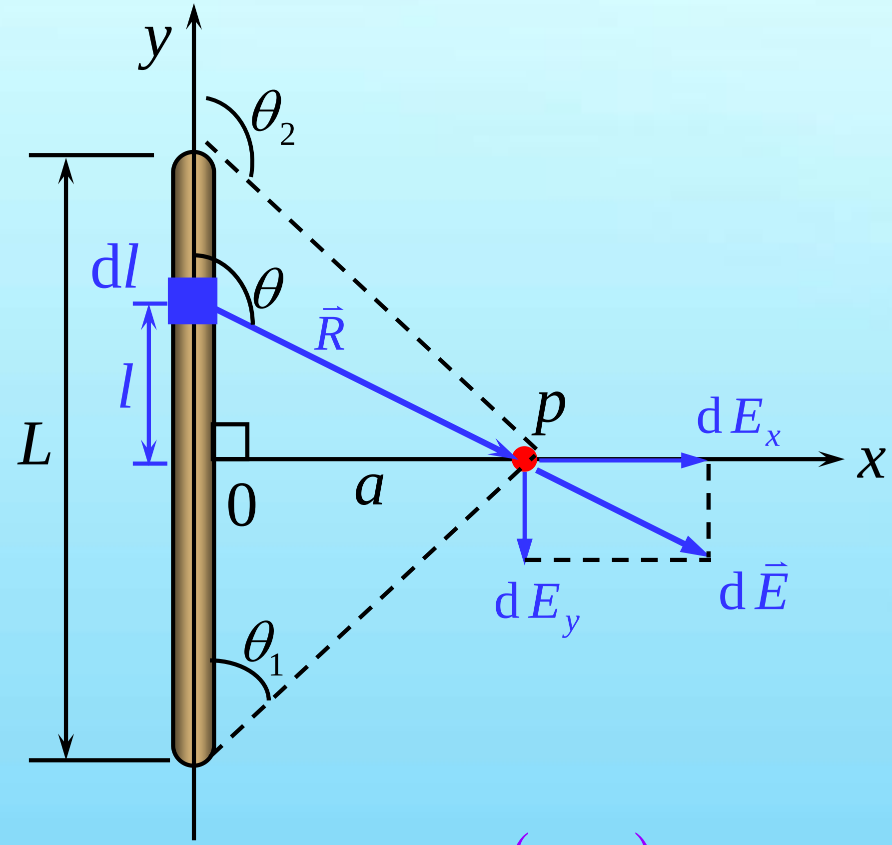
3). 写出场和源的绝对位矢

$\vec{r} = ai \qquad \vec{r}' = lj = yj$

4). 写出场对源的相对位矢

$\vec{R} = \vec{r} - r' = ai - yj$

$R = \sqrt{a^2 + y^2}$



5). 写出场强微分

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^3}\vec{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dy}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}\left(ai - yj\right)$$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot \frac{d\left(y/a\right)}{\left[1+\left(y/a\right)^2\right]^{3/2}}$$

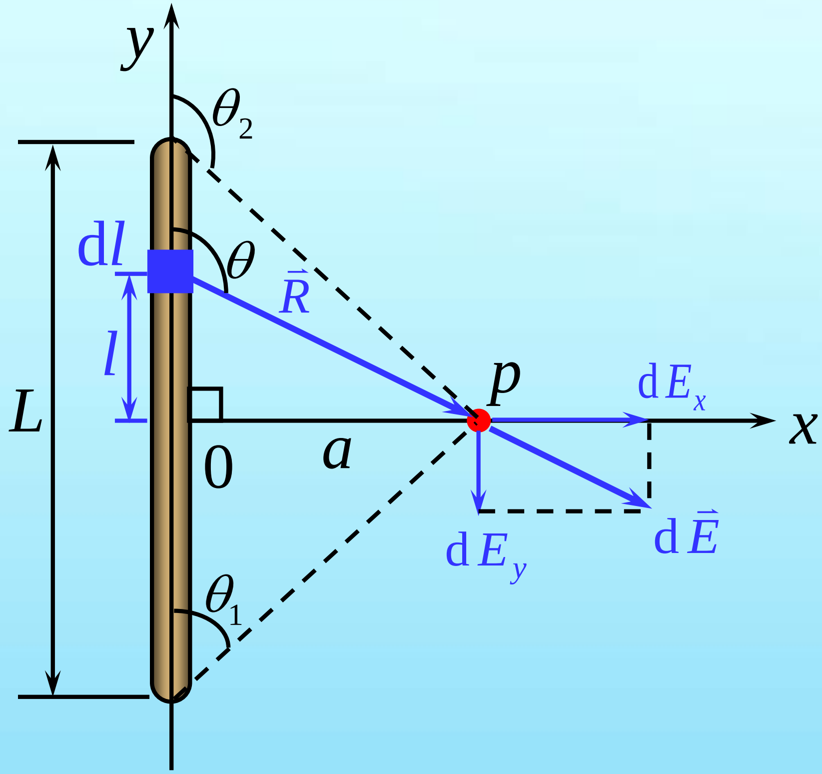
$$\mathrm{d}E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot \frac{\left(y/a\right)d\left(y/a\right)}{\left[1+\left(y/a\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\because ctg\theta = -\frac{y}{a}$$

$$\therefore \mathrm{d}E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{d(ctg\theta)}{\left[1+(ctg\theta)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{\left(1/\sin^2\theta\right)d(\theta)}{\left(1/\sin^3\theta\right)}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\sin\theta d\theta$$



$$\mathrm{d}E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{(ctg\theta)d(ctg\theta)}{\left[1+(ctg\theta)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{(ctg\theta)\left(1/\sin^2\theta\right)d(\theta)}{\left(1/\sin^3\theta\right)}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\cos\theta d\theta$$

$$\boxed{dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\sin\theta d\theta}$$

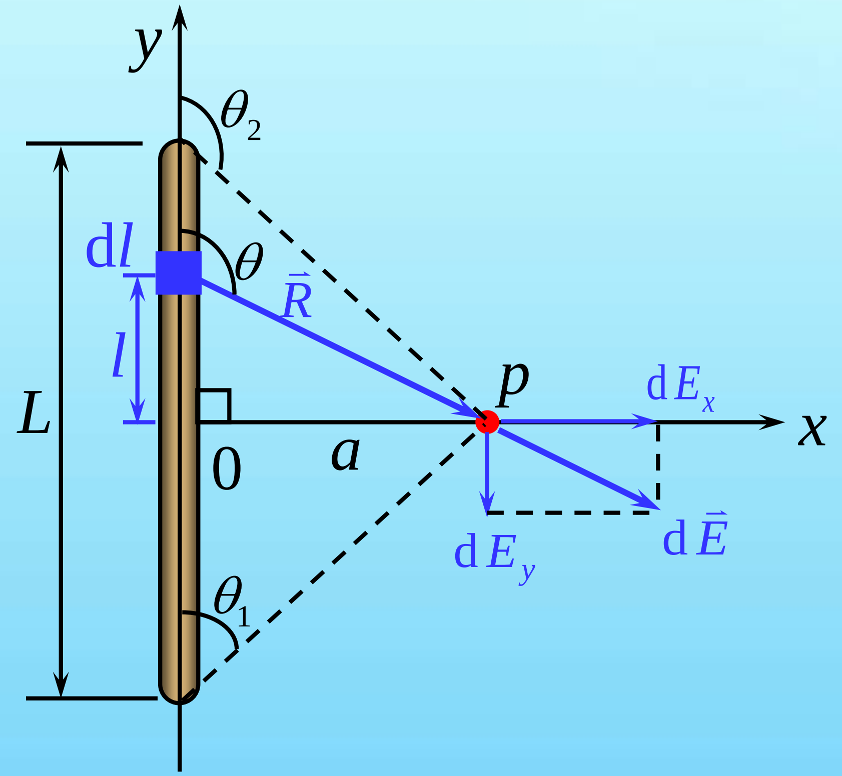
$$\boxed{dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\cos\theta d\theta}$$

$$E_x = \int_L \mathrm{d}E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_y = \int_L \mathrm{d}E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



$\vec{E}$的大小和方向可由E_x, E_y确定.

五、 均匀带电荷直线(棒)的场强讨论(已知L，λ > 0，a)

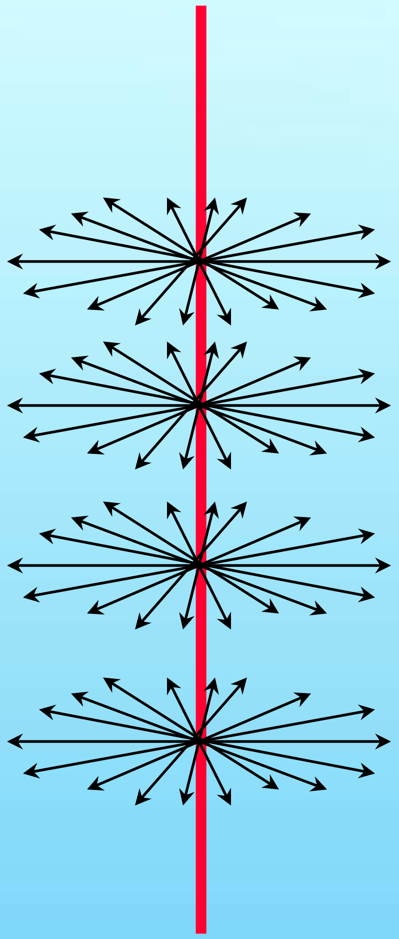
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

若 $L \to \infty,\ \theta_1 \to 0,\ \theta_2 \to \pi$,

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_y = 0$$

$L \to \infty,$ $$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

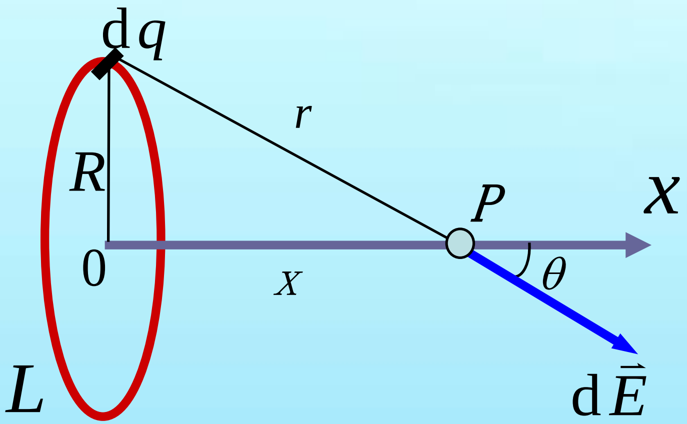


无限长均匀带电直线的场强

轴对称性

六、均匀带电圆环轴线上的场强（设圆环带电量为 q ，半径为R。）

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\qquad \mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta$$



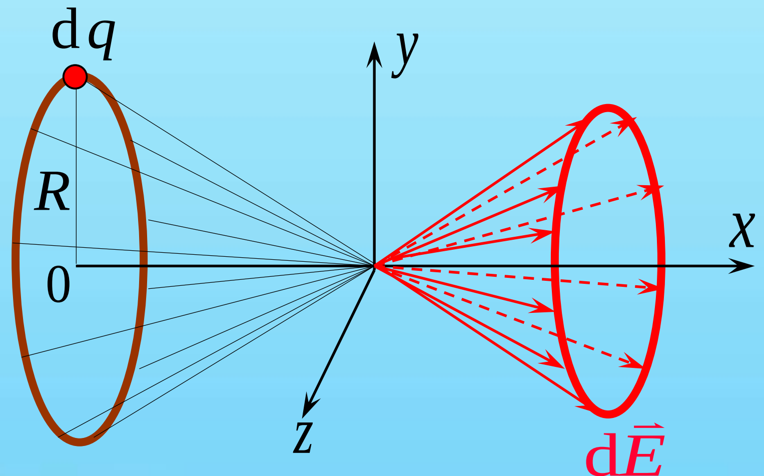
由对称性

$$E_y=E_z=0$$

$$E=\int_L \mathrm{d}E_x=\int_L \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_L \mathrm{d}q$$

$$E=\frac{\cos\theta\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$



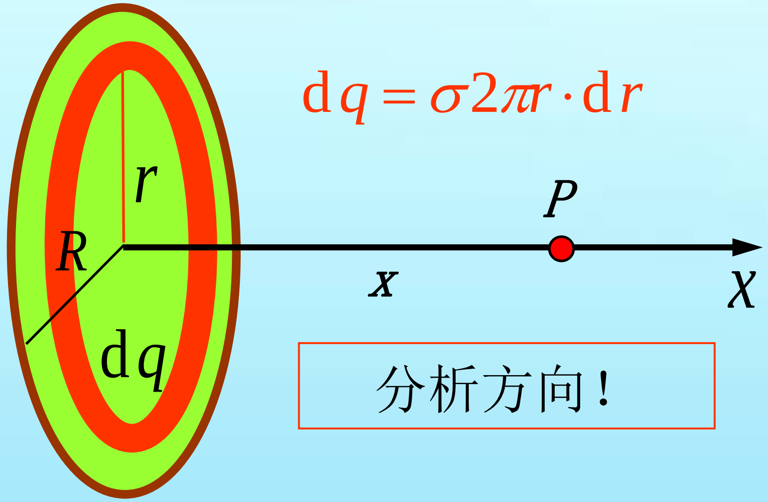
当$\mathrm{d}q$ 位置发生变化时，它所激发的电场矢量构成了一个圆锥面。

讨论：$x>>R$

$$E\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

七、均匀带电圆盘轴线上的场强（设圆盘带电量为 q ，半径为R）

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q\,x}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}\qquad dq=\sigma(2\pi r dr)$$



$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\cdot\mathrm{d}r$

分析方向！

$$E_x(p)=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

[附录]泰勒展开：

$$\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}=(1+R^2/x^2)^{-1/2}\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2$$

讨论：当 $x \gg R$

$$E\approx\frac{\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

在远离带电圆面处，相当于点电荷的场强。

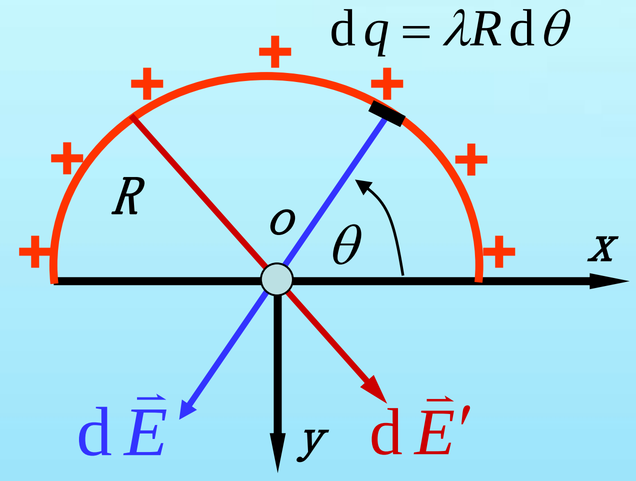
讨论：当 $x \ll R$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

相当于无限大带电平面附近的电场，可看成是均匀场，场强垂直于板面，正负由电荷的符号决定。

八、均匀带电半圆环中心点的场强（半径为R，带电量为q）

$$\mathrm{d}q = \lambda R\,\mathrm{d}\theta = \frac{q}{\pi R} R\,\mathrm{d}\theta = \frac{q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{R^2} = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cdot\mathrm{d}\theta$$

$E_x = 0$ 对称性！

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta$$

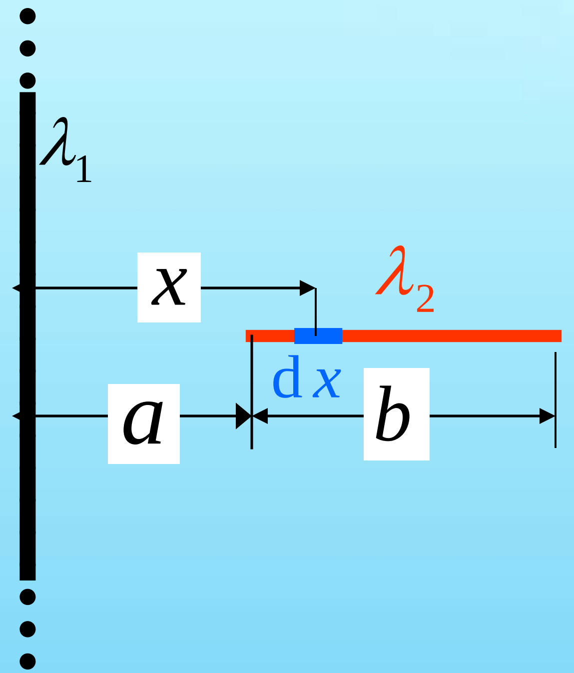
$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_0^{\pi}\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

九、均匀带电直线段所受的电场力（电场为均匀带电无穷长直线的电场）

均匀带电无穷长直线的电场强度

$$E=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x}$$



均匀带电直线段的电荷元

$$\mathrm{d}q=\lambda_2\,\mathrm{d}x$$

均匀带电直线段的电荷元所受的电场力

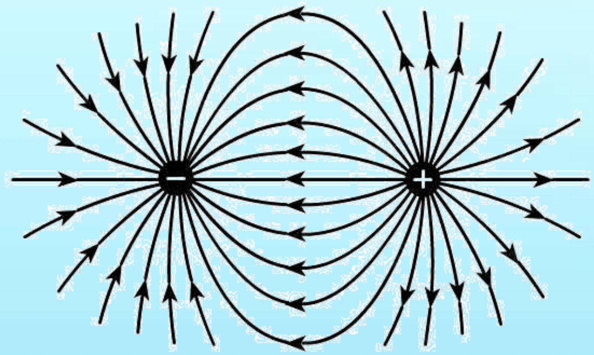
$$\mathrm{d}F=E\,\mathrm{d}q=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x}\lambda_2 dx=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dx}{x}$$

均匀带电直线段所受的电场力

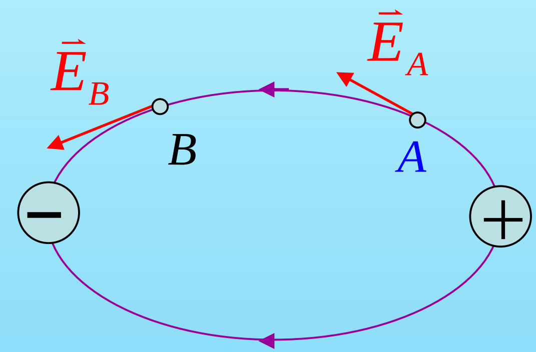
$$F=\int_a^{a+b}\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+b}{a}$$

十、电场线

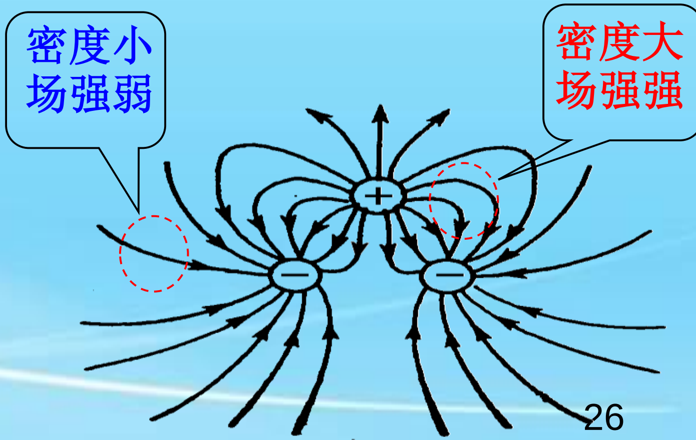
1. 电场线(electric field line)或电力线是一族空间有向曲线，它用来形象描述电场强度在空间分布的情况。



2. 电场线的切线方向，表示电场强度的方向。

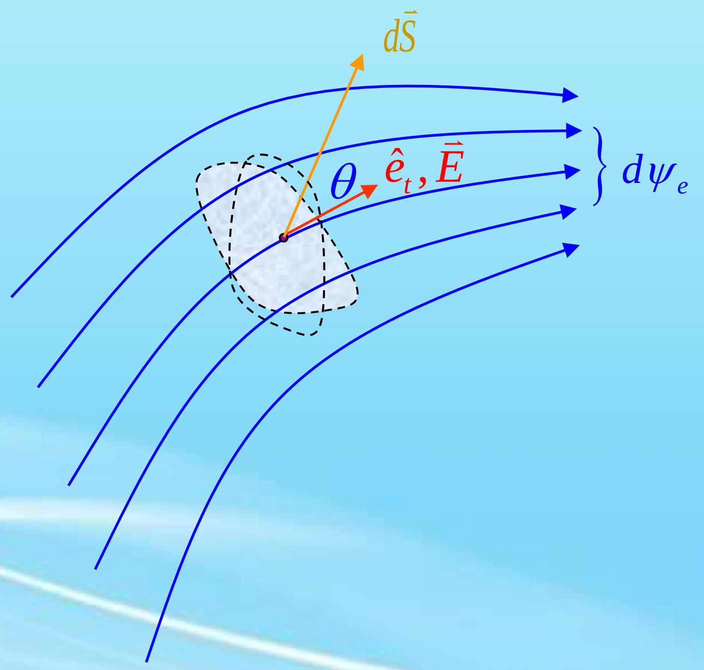


3. 电场线的密度，表示电场强度的大小。



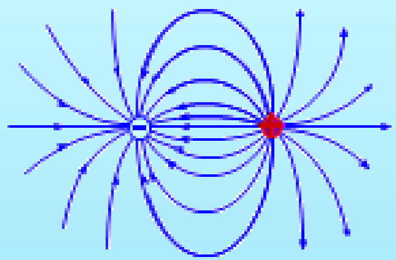
4. 电场线的密度，是通过垂直于电场线的单位面积的电场线条数，电场线的密度等于电场强度的大小。

$$(\text{电场线密度})=\frac{(\text{电场线条数}d\psi_e)}{(\text{电场线切线方向}\hat{e}_t)\cdot(\text{面积元}d\vec{S})}=(\text{电场强度大小}E)$$

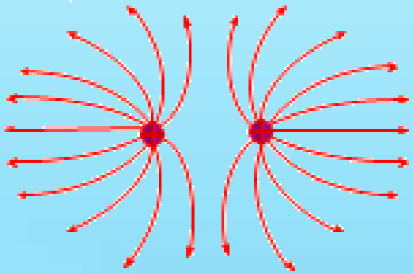


5. 常见电场线

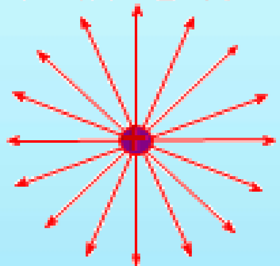
等量异号点电荷的电场线



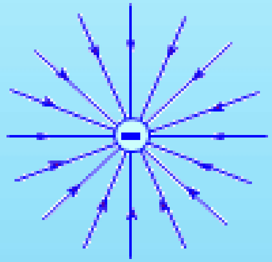
等量正点电荷的电场线

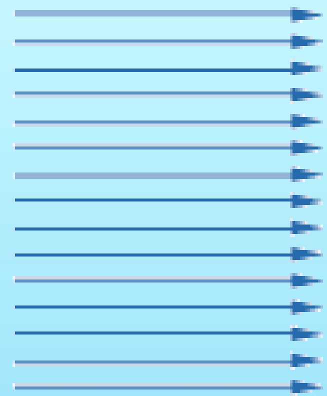


正 点 电 荷



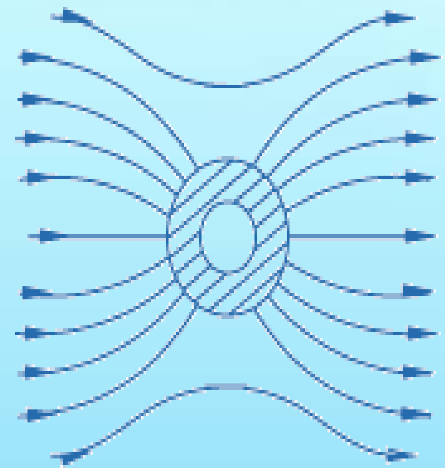
负 点 电 荷





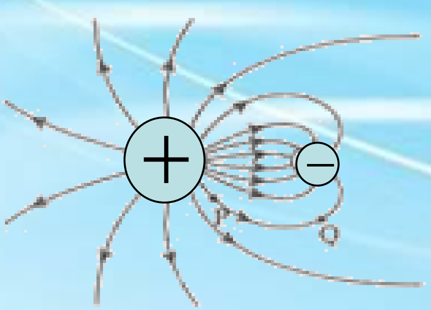
均匀电场的电场线分布

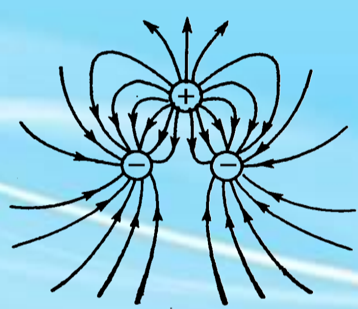
(a)

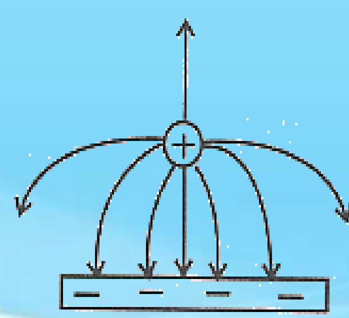


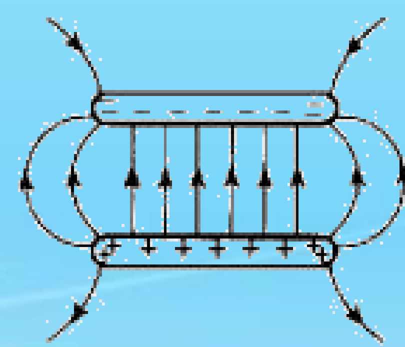
空心导体引入到均匀电场中以后的分布

(b)









§3 高斯定理

一、电场强度通量

1. 电场强度的大小等于电场线的密度。电场线的密度是通过垂直于电场线的单位面积的电场线条数。

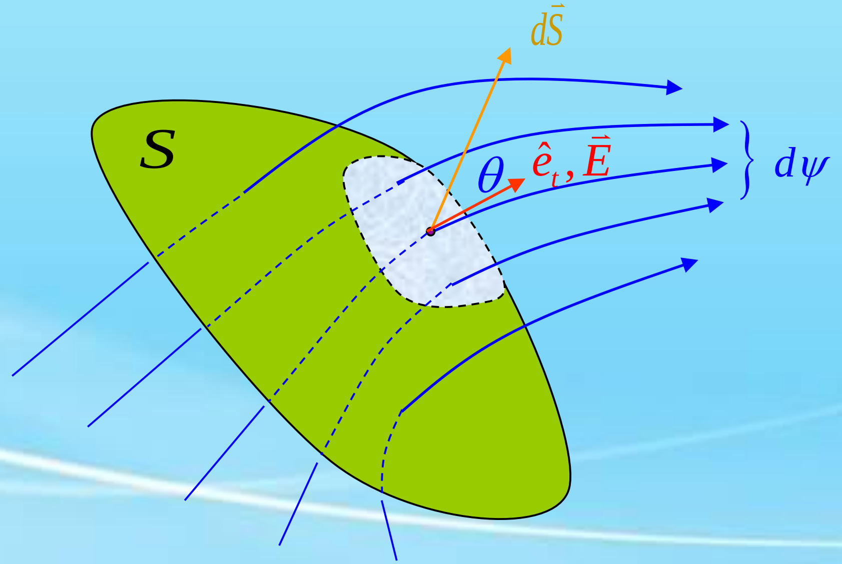
$$\left(\text{电场线密度}\right)=\frac{\left(\text{电场线条数}\,d\psi_e\right)}{\left(\text{电场线切线方向}\,\hat{e}_t\right)\cdot\left(\text{面积元}\,d\vec{S}\right)}=\left(\text{电场强度大小}\,E\right)$$

2. 面积S的电场强度通量，是通过面积S的电场线总数。

$$E=\frac{d\psi_e}{\hat{e}_t\cdot d\vec{S}}$$

$$d\psi_e=E\hat{e}_t\cdot d\vec{S}=\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\psi_e=\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

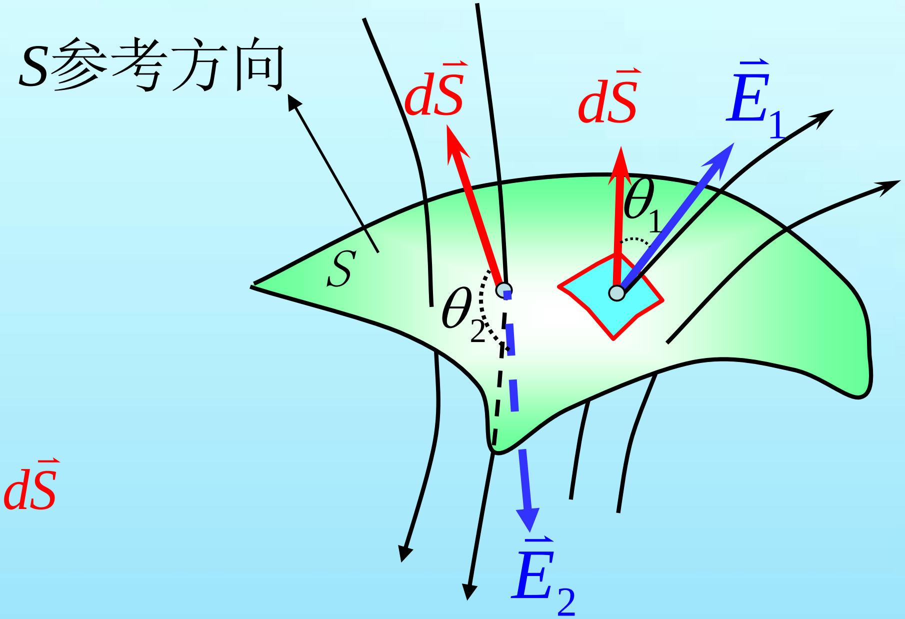


3. 要确定一个曲面的电场强度通量，首先要确定曲面的参考方向，与曲面的参考方向一致的通量为正， 与曲面的参考方向相反的通量为负，曲面的电场强度总通量是正负通量的代数和。

$$d\psi_{e1} = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} > 0$$

$$d\psi_{e2} = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} < 0$$

$$\psi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

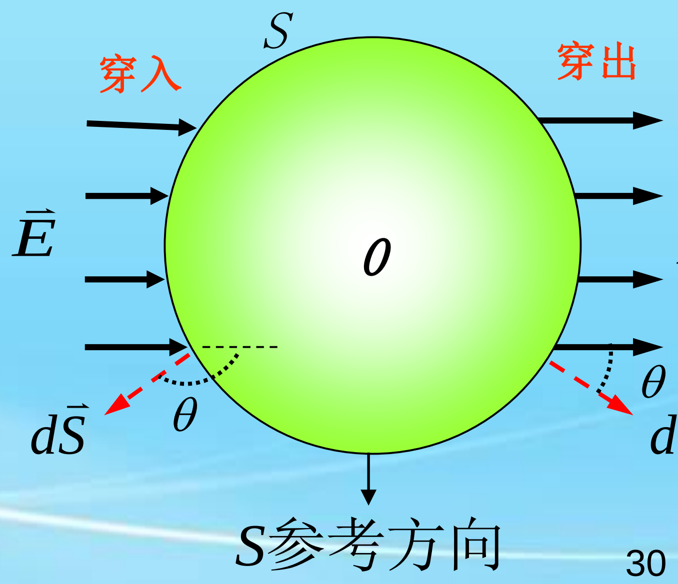


4. 不闭合曲面的参考方向可以有两种取法，闭合曲面的参考方向规定为外法线方向。所以流出闭合曲面的通量为正，流进闭合曲面的通量为负，闭合曲面的总通量是流出和流进闭合曲面正负通量的代数和。

$$d\psi_{e出} = \vec{E}_{出} \cdot d\vec{S}_{出} > 0$$

$$d\psi_{e进} = \vec{E}_{进} \cdot d\vec{S}_{出} < 0$$

$$\psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



二、 点电荷电场关于闭合曲面的电场强度通量

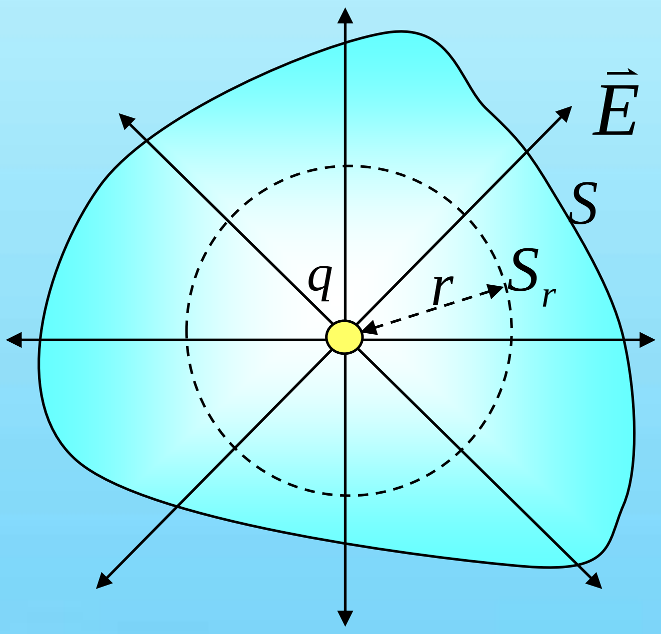
1. 当一个点电荷在曲面内时

$$\Psi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\oint_{S_r} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint\!\!\oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,\mathrm{d}S$$

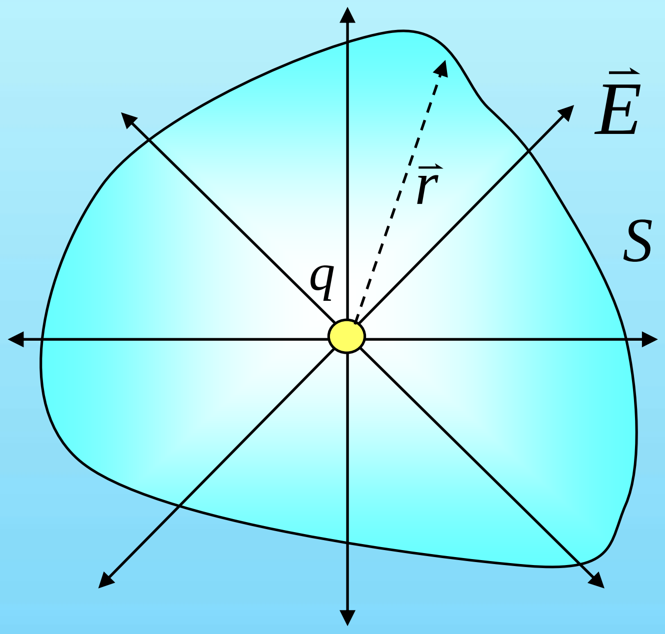
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint\!\!\oint_{\mathrm{S_r}} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} S_r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



数学证明

$$
\begin{aligned}
\Psi_e &= \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \oiint_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_{S_r}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_S}\left(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dV \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_S}\delta(r)dV \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$



2. 当一个点电荷在曲面外时

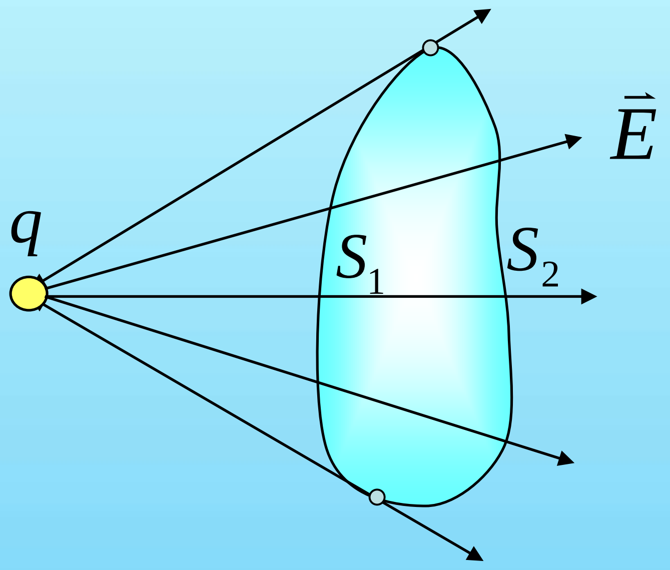
$$\psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\psi_{e1} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} < 0$$

$$\psi_{e2} = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$$

$$|\psi_{e1}| = |\psi_{e2}|$$

$$\psi_e = \psi_{e1} + \psi_{e2} = 0$$



数学证明

$$\Psi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

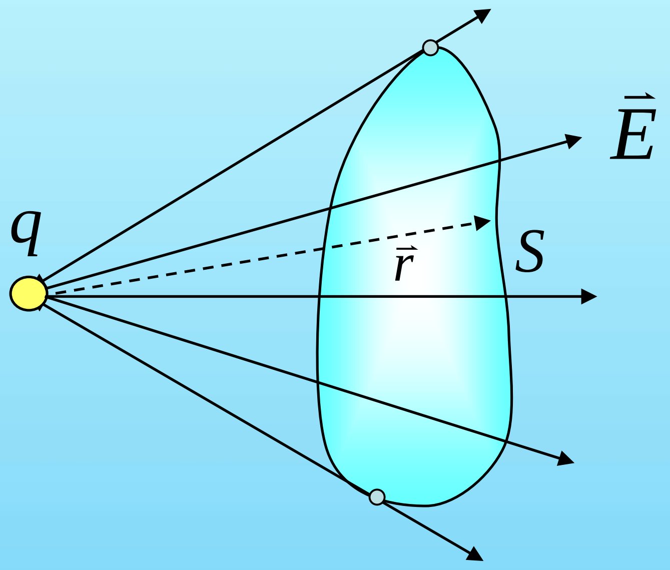
$$= \oint\!\!\!\oint_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_{\mathrm{S_r}} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_S} \left(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dV$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_S} \delta(r)\, dV$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times 0 = 0$$



3. 当曲面内外都有多个点电荷时

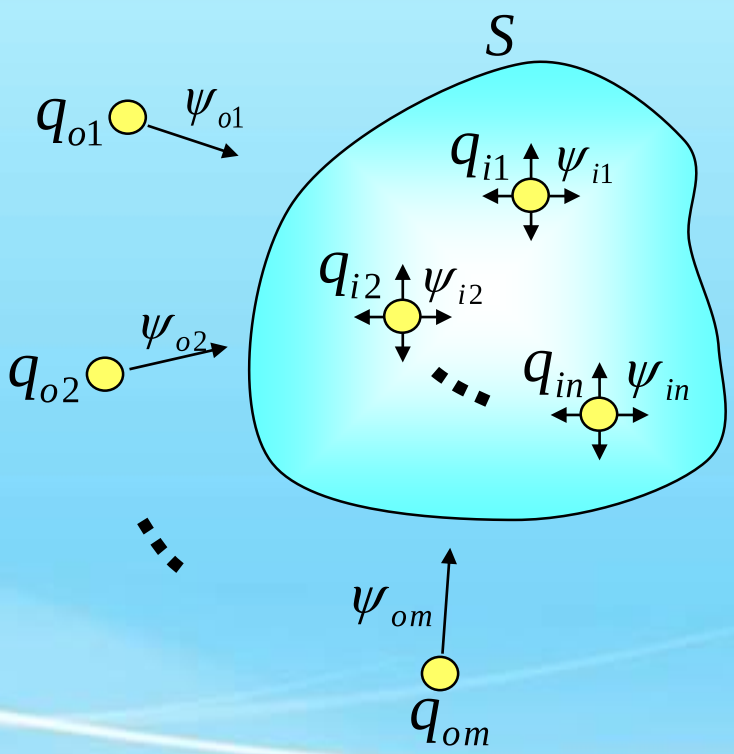
$$\psi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_S \left(\sum_{j=1}^{m} \vec{E}_{oj}\right)\cdot d\vec{S} + \oint\!\!\!\oint_S \left(\sum_{j=1}^{n} \vec{E}_{ij}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}_{oj}\cdot dS + \sum_{j=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}_{ij}\cdot dS$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \psi_{oj} + \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} 0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{\varepsilon_0}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{\varepsilon_0}$$



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{\varepsilon_0}$$

4. 总　结

（1） 当点电荷在球心时

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

（2） 任一闭合曲面S包围该点电荷

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

（3）闭合曲面S不包围该点电荷

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

（4）闭合曲面S内包围多个电荷q1，q2，… qk ，
同时面外也有多个电荷qk+1，qk+2，… qn .

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum\limits_{S内} q_i}{\varepsilon_0}$$

三、高斯定理

1. 高斯定理：在真空中，静电场通过任意闭合曲面的电通量，等于面内所包围的自由电荷代数和除以真空介电常数。

$$\Psi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$ 点电荷系

$$\Psi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V_S} \rho dV$$ 连续分布带电体

表明静电场是有源场，电荷就是静电场的源，即电荷是电场线的起点和终点。

注意：虽然电通量只与闭合曲面内电荷有关，但是曲面上的电场却与曲面内、外电荷都有关。

2. 高斯

高斯（Carl Friedrich Gauss,1777～1855）德国数学家、天文学家、物理学家。童年时就聪颖非凡，10岁发现等差数列公式而令教师惊叹。因家境贫寒，父亲靠短工为生，靠一位贵族资助入格丁根大学学习。一年级（19岁）时就解决了几何难题：用直尺与圆规作正十七边形图。1799年以论文《所有单变数的有理函数都可以解成一次或二次的因式这一定理的新证明》获得博士学位。1807年起任格丁根大学数学教授和天文台台长，一直到逝世。

在物理学的研究工作，他涉及诸多方面。1832年提出利用三个力学量：长度、质量、时间（长度用毫米，质量用毫克，时间用秒）量度非力学量，建立了绝对单位制，1835年在《量纲原理》中给出磁场强度的量纲。1839年在《距离平方反比的作用引力与斥力的一般理论》中阐述势理论的原则，证明了一系列定理，如高斯定理，并研究了将其用于电磁现象的可能性。

为纪念他在电磁学领域的卓越贡献，在电磁学量的CGS单位制中，磁感应强度单位命名为高斯。

古希腊的阿基米德，英国的牛顿，和德国的高斯.他们三个对数学的发展做出了不可估量的贡献,是其他人无法相比的.有一个共同点---都是通才,也都在物理上有很大的贡献.可见,物理和数学是分不开的。

3. 高斯定理和库仑定律的关系

① 高斯定理和库仑定律二者并不独立。高斯定理可以由库仑定律和场强叠加原理导出。反过来，把高斯定理作为基本定律也可以导出库仑定律。

② 两者在物理涵义上并不相同。库仑定律把场强和电荷直接联系起来, 在电荷分布已知的情况下由库仑定律可以求出场强的分布。而高斯定理将场强的通量和某一区域内的电荷联系在一起，在电场分布已知的情况下，由高斯定理能够求出任意区域内的电荷。

③ 库仑定律只适用于静电场, 而高斯定理不但适用于静电场和静止电荷, 也适用于运动电荷和变化的电磁场。

4. 高斯定理的应用

条件：只有当电荷和电场分布具有某种对称性时，才可用高斯(Gauss)定理求场强.

步骤：（1）由电荷分布对称性分析电场的对称性

（2）据电场分布的对称性选择合适的闭合曲面

（3）应用高斯(Gauss)定理计算场强

关键：选取合适的闭合曲面（Gauss 面）

四、均匀带电球面的电场（球半径为R，电荷为q）

1. 电荷分布具有球对称性 $\Rightarrow$ 电场分布具有球对称性。
2. 电场强度方向沿径向。
3. 以球面为高斯面，高斯面上电场强度大小处处相等。

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\hat{r}\cdot\hat{r}dS$$

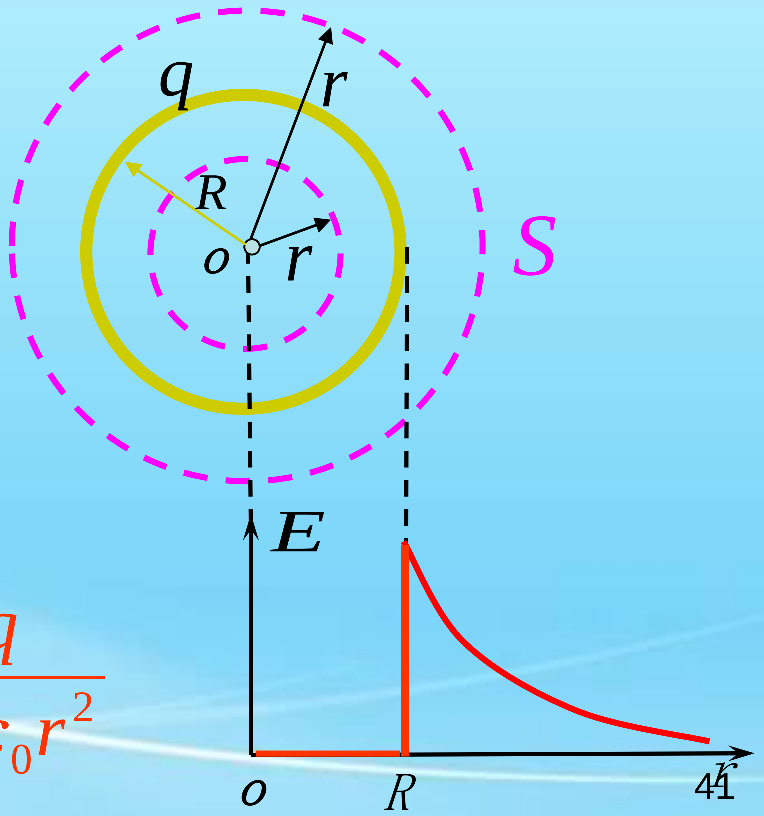
$$= E\oiint_S dS = 4\pi r^2 E$$

4. $0 \le r < R$时

$$\Psi_e = 4\pi r^2 E = 0 \qquad E = 0$$

5. $R \le r$时

$$\Psi_e = 4\pi r^2 E = q/\varepsilon_0 \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



五、均匀带电球体的电场（球半径为R，体电荷密度为ρ）

1. 电荷分布具有球对称性 $\Rightarrow$ 电场分布具有球对称性。
2. 电场强度方向沿径向。
3. 以球面为高斯面，高斯面上电场强度大小处处相等。

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\hat{r}\cdot\hat{r}dS$$

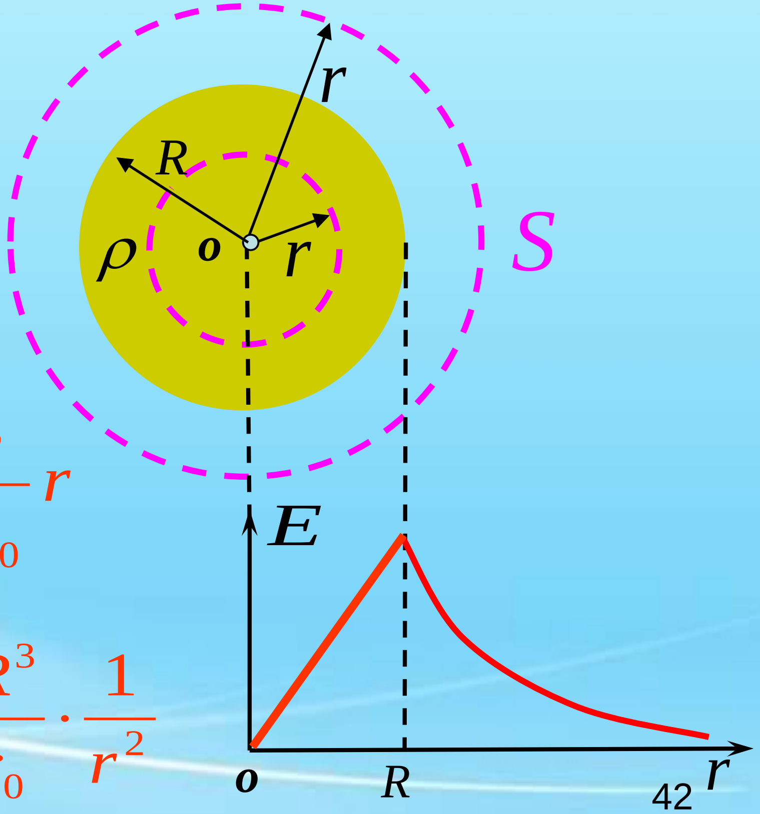
$$= E\oiint_S dS = 4\pi r^2 E$$

4. $0 \le r < R$时

$$\Psi_e = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3\rho \qquad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$

5. $R \le r$时

$$\Psi_e = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3\rho \qquad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}$$



六、均匀带电球体的电场（球半径为R，体电荷密度为$\rho=kr$）

1. 电荷分布具有球对称性 ⇒ 电场分布具有球对称性。
2. 电场强度方向沿径向。
3. 以球面为高斯面，高斯面上电场强度大小处处相等。

$$\Psi_e=\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint\!\!\!\oint_S E\hat{r}\cdot\hat{r}dS=E\oint\!\!\!\oint_S dS=4\pi r^2E$$

4. $0\le r<R$时

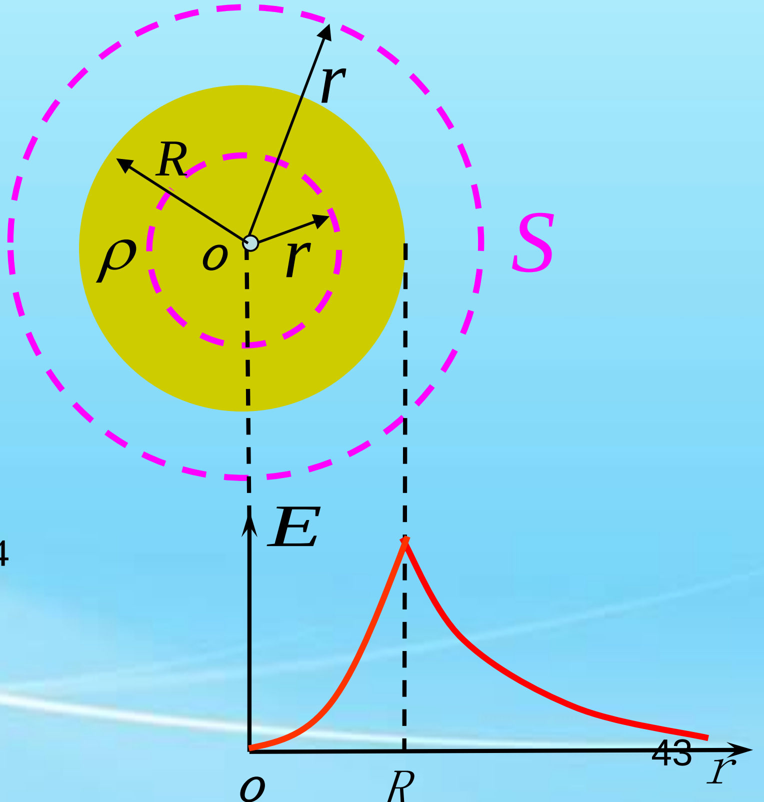
$$\Psi_e=4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V_r}\rho dV=\frac{\pi k}{\varepsilon_0}r^4$$

$$E=\frac{k}{4\varepsilon_0}r^2$$

5. $R\le r$时

$$\Psi_e=4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V_R}\rho dV=\frac{\pi k}{\varepsilon_0}R^4$$

$$E=\frac{kR^4}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}$$



七、无限长均匀带电圆柱面的电场(圆柱面半径R，电荷线密度λ)

1. 电场分布具有圆柱对称性，电场方向沿圆柱径向。

2. 取圆柱面为高斯面。高斯面的柱面上电场大小处处相等。

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_{上}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{下}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{柱}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{S_{上}} E_{上}\hat{r}\cdot\hat{z}dS + \iint_{S_{下}} E_{下}\hat{r}\cdot(-\hat{z})dS + \iint_{S_{柱}} E_{柱}\hat{r}\cdot\hat{r}dS$$

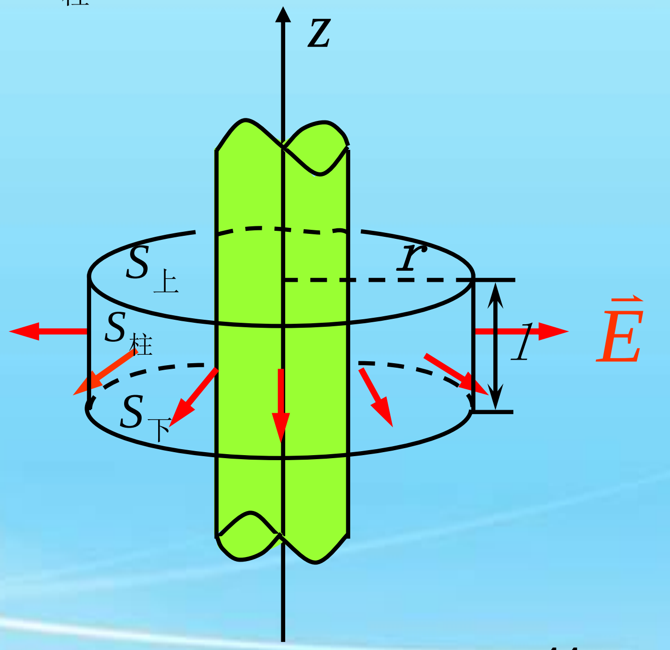
$$= \iint_{S_{柱}} E_{柱}dS = E_{柱}\iint_{S_{柱}} dS = E2\pi rl$$

3. $0 \le r < R$时

$$\Psi_e = E2\pi rl = 0 \qquad E = 0$$

4. $R \le r$时

$$\Psi_e = E2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l \qquad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



八、无限大均匀带电平面的电场(电荷面密度σ)

1. 电场分布具有左右对称性，电场方向沿平面法向。

2. 取圆柱面为高斯面。高斯面的上下底面电场大小处处相等。

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_{左}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{右}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{柱}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

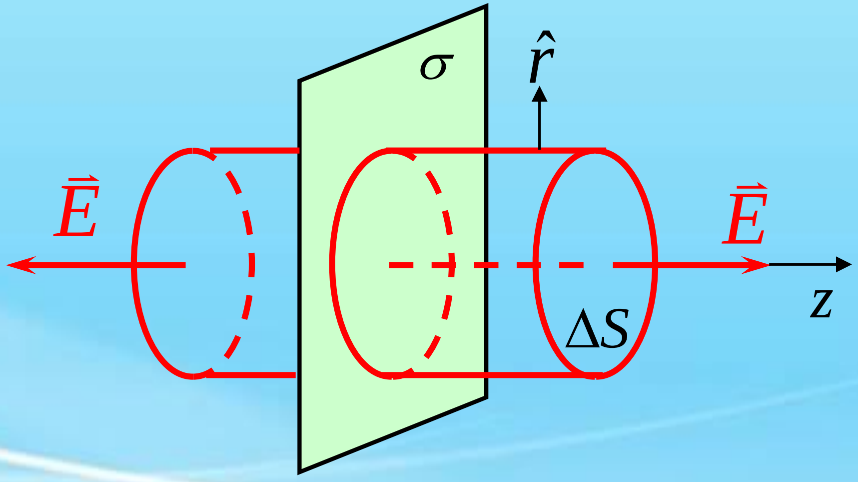
$$= \iint_{S_{左}} E(-\hat{z})\cdot(-\hat{z})dS + \iint_{S_{右}} E\hat{z}\cdot\hat{z}dS + \iint_{S_{柱}} E(\pm\hat{z})\cdot\hat{r}dS$$

$$= E\iint_{S_{左}} dS + E\iint_{S_{右}} dS = 2E\Delta S$$

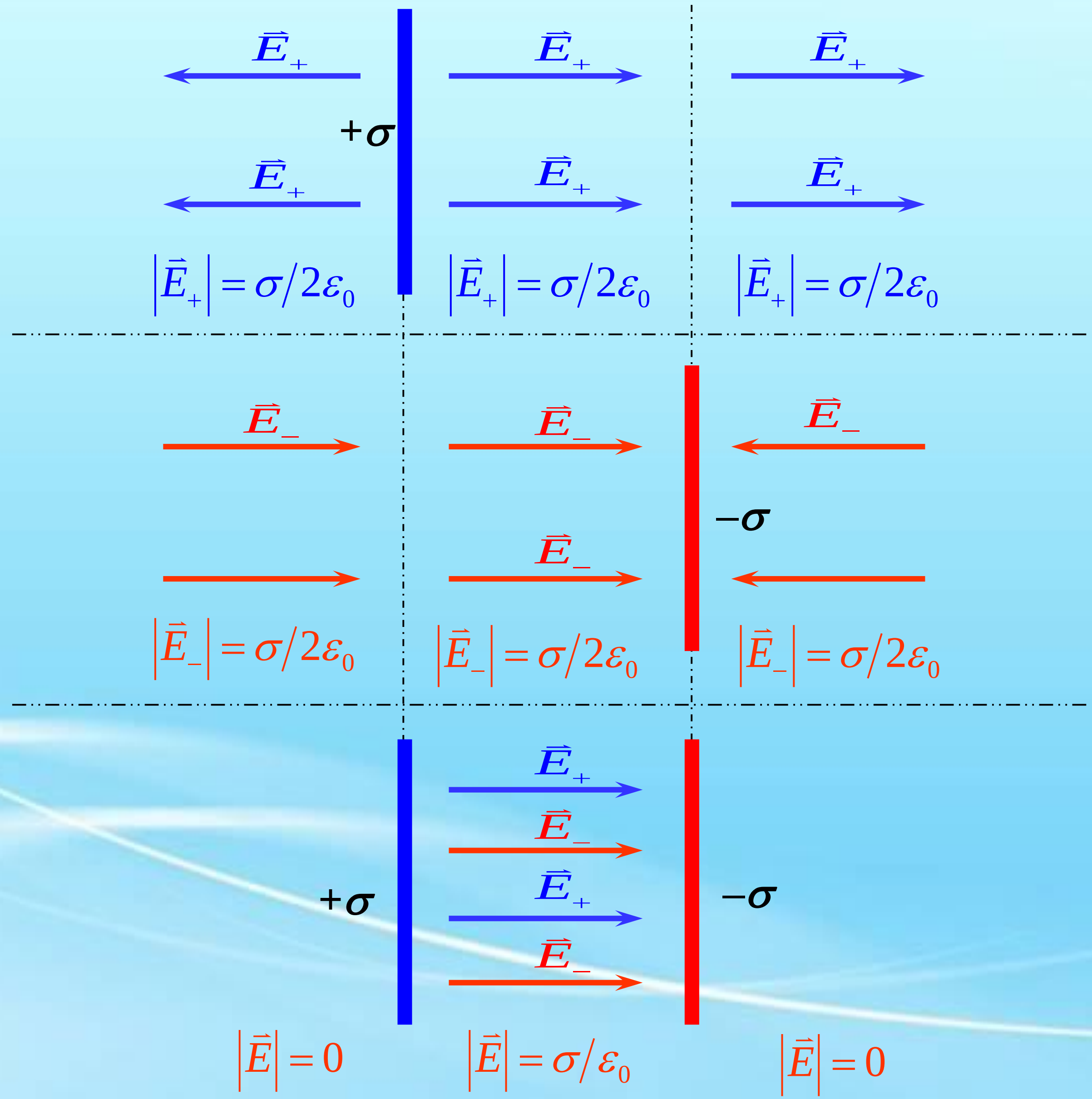
3. 高斯定理

$$\Psi_e = 2E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$



九、两无限大带电平面的电场



§4　环路定理与电势

一、引言

前面，我们从电荷在电场中受到电场力这一事实出发，研究了静电场的性质，并引入电场强度作为描述电场这一特性的物理量。而高斯定理是从E 通量的角度反映了通过闭合面的E 通量与该面内电荷量的关系，揭示了静电场是一个有源场这一基本特性。

下面我们从电荷在电场中移动，电场力对电荷作功这一事实出发，引入描述电场性质的另一物理量——电势，导出反映静电场另一特性的环路定理，从而揭示静电场是一个保守力场——从功能的角度来研究静电场的性质。

二、 静电场力的功

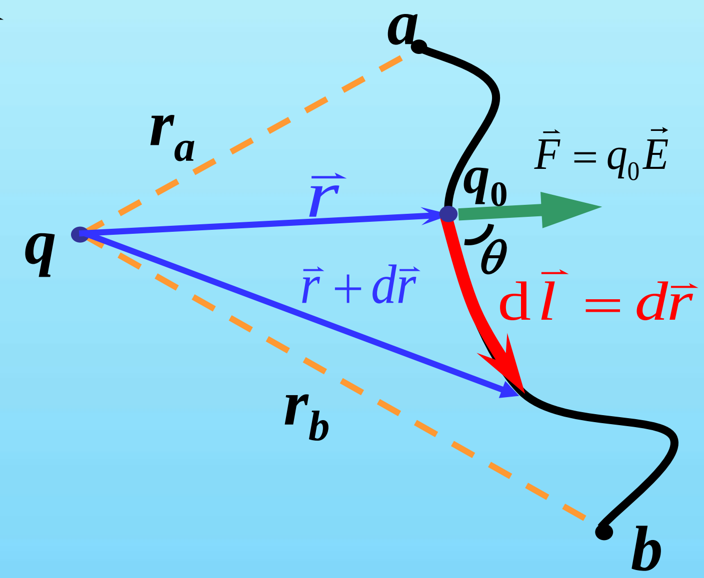
1. 点电荷电场力的功：把q_0从a点移到b点电荷电场力所作的功

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_a^b$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$



$$\boxed{q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)}$$

显然，在点电荷形成的电场中，电场力作功与路径无关，只与路径的起点终点位置有关。

2. 任意带电体系电场的功

a. 将带电体系分割为许多电荷元，根据电场的叠加性

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

b. 电场力对试验电荷q_0做功为

$$\begin{aligned}A&=q_0\int_a^b\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\&=q_0\int_a^b\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_a^b\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\cdots+q_0\int_a^b\vec{E}_n\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\&=A_1+A_2+\cdots+A_n\end{aligned}$$

总功也与路径无关。

c. 结论：试验电荷在任意给定的静电场中移动时，电场力对q_0做的功仅与试验电荷的电量及路径的起点和终点位置有关，而与具体路径无关。

d. 静电场是保守场，静电场力是保守力。

三、静电场的环路定理

- 电场力做功与路径无关，故

$$A = q_0 \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

即 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

- 静电场的环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

- 在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分（称为场强的环流）恒为零。
- 静电场的环路定理反映了静电场的另一基本特性——保守性。
- 静电场的环路定理反映了静电场的电场线不会闭合。

四、电势

1. 电势能

- 由环路定理知，静电场是保守场。
- 保守场必有相应的势能，对静电场对应的则为电势能。
- 静电力的功，等于静电势能的减少。

$$A_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\Delta E = W_A - W_B$$

- 选B为静电势能的零点，用“0”表示，则A点电势能WA

$$W_A = q_0 \int_A^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

2. 电势

- 某点电势能Wp与q0之比只取决于电场，定义为该点的电势

$$U_p = \frac{W_p}{q_0} = \int_p^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 电势零点的选取是任意的。

五、电势讨论

$$\boxed{U_p = \int_p^{(参考点)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

1. 电场中某点的电势，等于单位正电荷从该点经过任意路径到达零电势点处电场力所作的功。
2. 电势是标量， 可正可负；取决于电荷电性和零势点的规定。
3. 电势是描述静电场性质的物理量，它是空间坐标函数。
4. 电势的量值是相对的，取决于电势零点的选取。
5. 电势零点规定的一般原则 ：
   - 当电荷分布在有限区域内时，规定无限远处电势为零；

     $$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

   - 当电荷分在无限远区域时，可令电场中任一点P0 为电势的零点，实际中常取接地点为零势能点。

     $$U_P = \int_P^{0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

六、电势差

- 电场中两点电势之差

$$U_{AB}=U_A-U_B=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}-\int_B^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_A^{B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

- 电场中 A、B 两点的电势差，等于单位正电荷从 A点运动到 B点电场力所作的功。

- 电势差与零电势的参考点选择无关。

- 静电场力的功与电势差的关系

$$A_{AB}=\int_A^B q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-q_0(U_B-U_A)$$

七、电势叠加原理

- 电场叠加原理：

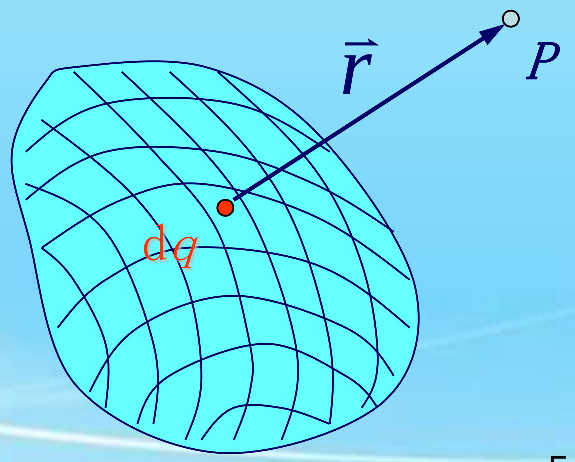
$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

- 电势叠加原理：

$$U_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_P^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}\int_P^{\infty}\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}U_{iP}$$

- 如果电荷是连续分布在有限空间，则电场中某点的电势

$$U=\int_{\Omega}dU=\int_{\Omega}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{r}$$



$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$、$\sigma\mathrm{d}S$、$\rho\mathrm{d}V$

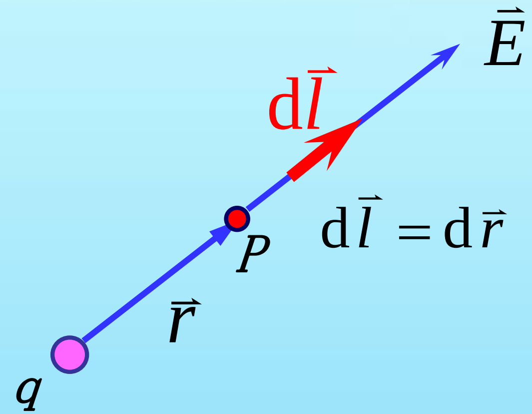
八、点电荷的电势

- 取无限远作为电势零点。

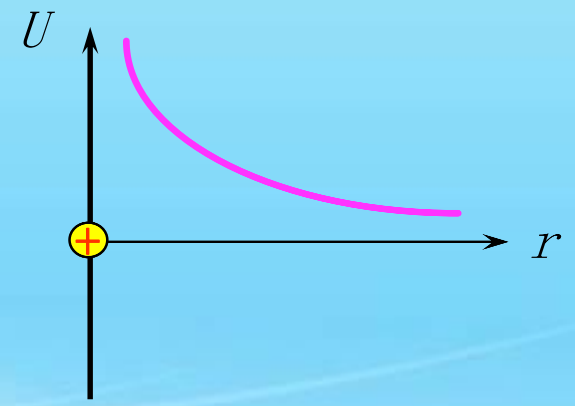
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},$$

$$U_p = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\boxed{U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



- 若 q > 0，Up > 0，离电荷越远，电势越低；
- 若 q < 0，Up < 0，离电荷越远，电势越高。

九、均匀带电直线段的电势(直线段长2L，电荷q)

- 利用点电荷电势公式及电势叠加原理求电势。

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \qquad \lambda = q/2L$$

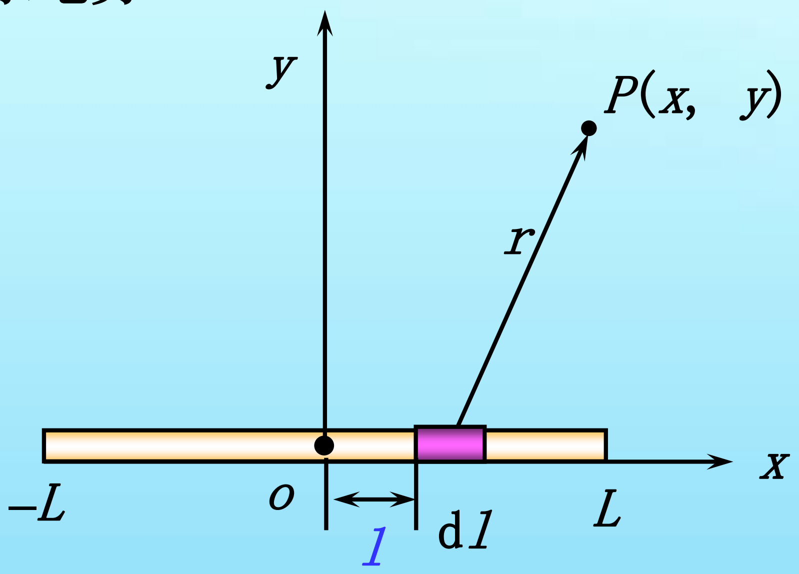
$$\mathrm{d}U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

$$U = \int_L \mathrm{d}U = \int_L \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{d}l}{r}$$

$$= \int_{-L}^{+L} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}$$

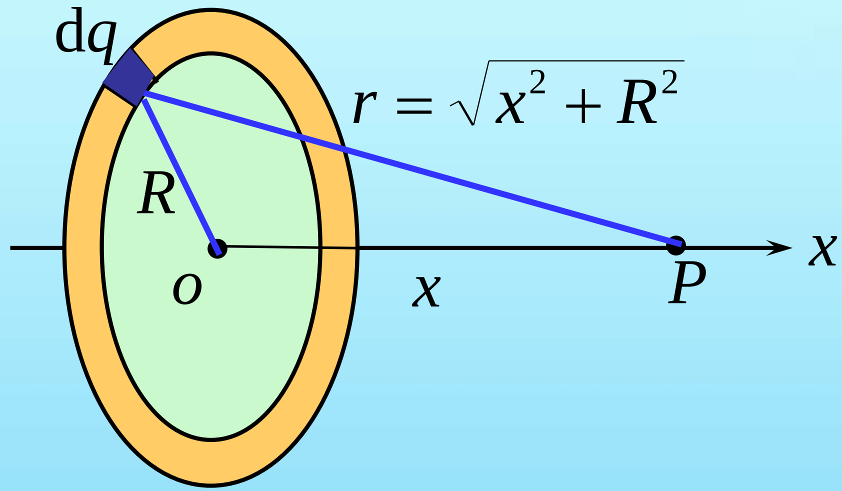
$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{\mathrm{d}(x-l)}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{x + L + \sqrt{(x+L)^2 + y^2}}{x - L + \sqrt{(x-L)^2 + y^2}}$$



十、均匀带电细圆环轴线上的电势(已知 R, q)

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$U=\oint_L\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

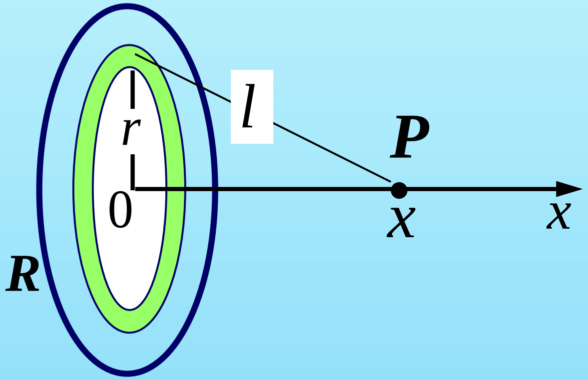
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\oint_L \mathrm{d}q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

若$x=0$，则$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

十一、均匀带电薄圆盘轴线上的电势（已知R，σ）

$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr = 2\pi\sigma r dr$$

$$l = \sqrt{x^2 + r^2}$$



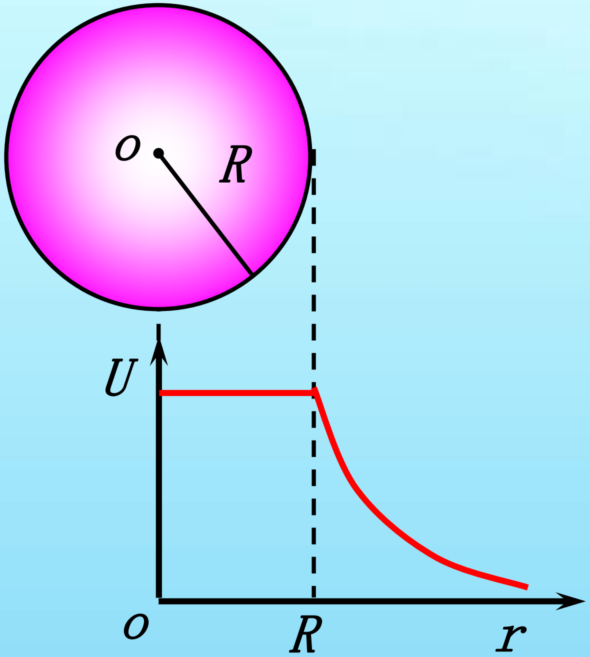
$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

$$U = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 l} = \int \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

十二、均匀带电球面电场中的电势(已知R, q)

已知场强分布 ,由 $U_P = \int_P^{参考点} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 求电势



已知

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

E 沿径向，选取沿半径方向的直线为积分路径

$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_p^{\infty} E \cdot \mathrm{d}r$$

当 $r > R$ 时，

$$U_p = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

当 $r < R$ 时，

$$U_p = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^{R} 0 \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$$

- 均匀带电球面，球内的电势等于球表面的电势。
- 球外的电势等效于将电荷集中于球心的点电荷的电势。

十三、两个同心的均匀带电球面的电势（已知R_A，R_B，q_A，q_B）

由已知的均匀带电球面电势分布和电势叠加原理可得

(1)　当$r \leqslant R_A$时

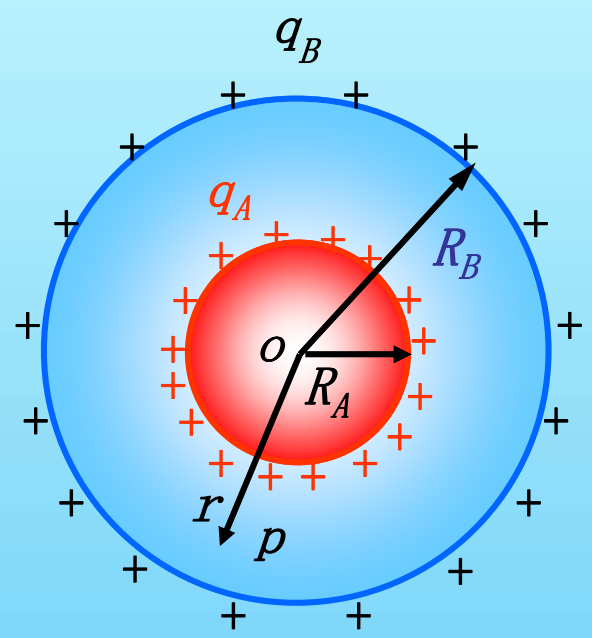
$$U = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_o R_A} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_o R_B}$$

(2)　当R_A（$R_A \leqslant r \leqslant R_B$）时

$$U = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_o r} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_o R_B}$$

(3) 当$r > R_B$时

$$U = \frac{q_A + q_B}{4\pi\varepsilon_o r}$$



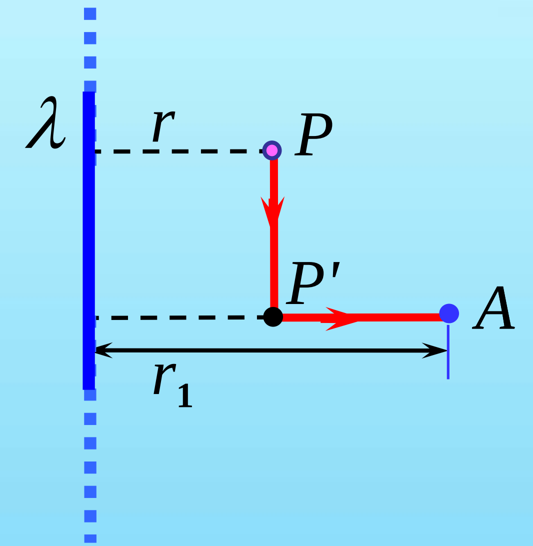
十四、无限长均匀带电直线的电势(已知电荷线密度为λ)

- 当电荷分在无限远区域时,可令电场中任一点P0为电势的零点
- 取无限远处电势为零用场强的线积分来计算电势，将得出电场任一点的电势值为无限大的结果，显然是没有意义的。

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_p=\int_p^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_p^\infty E\cdot \mathrm{d}r$$

$$=\int_p^\infty \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot \mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_r^\infty \Rightarrow \infty$$



- 由于ln1=0，所以若选离直线为r1=1m处作为电势零点，则很方便地表示P点的电势。

$$U_P=\int_{(P)}^{(A)}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{(P)}^{(P')}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{(P')}^{(A)}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=0+\int_r^{r_1}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r}$$

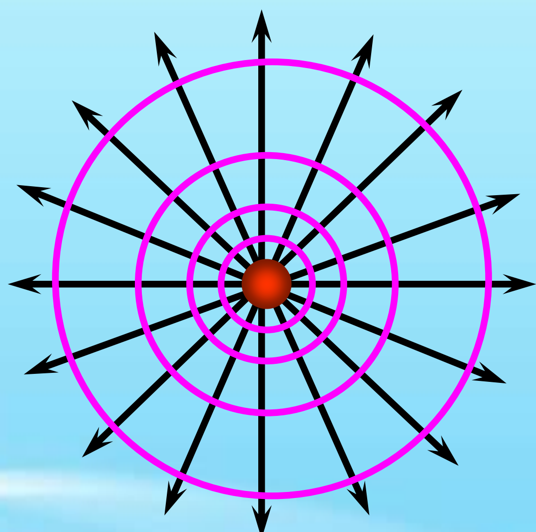
$$U_P=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\{r\}$$

§5 等势面与电势梯度

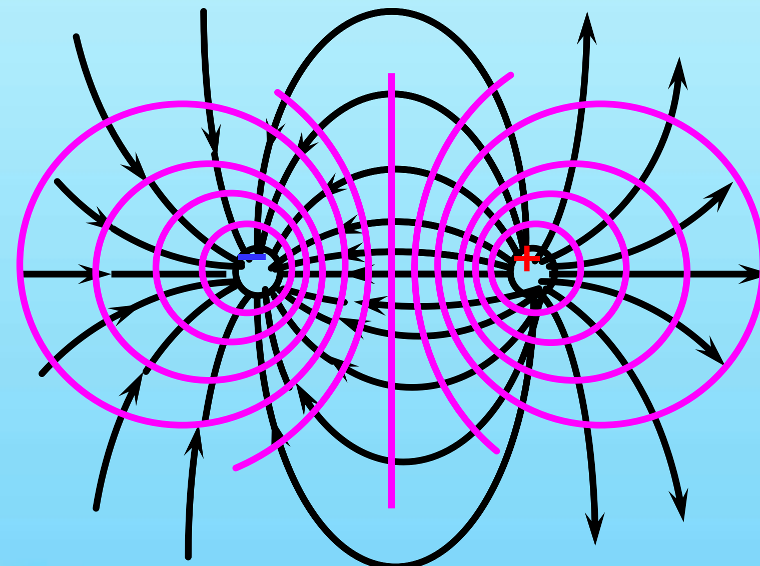
一、等势面

- 在静电场中，电势相等的点所组成的面称为等势面。

点电荷的等势面



电偶极子的等势面



- 电场线与等势面垂直（不垂直等势面就不等势）。
- 等势面画法规定：相邻两等势面之间的电势间隔相等。

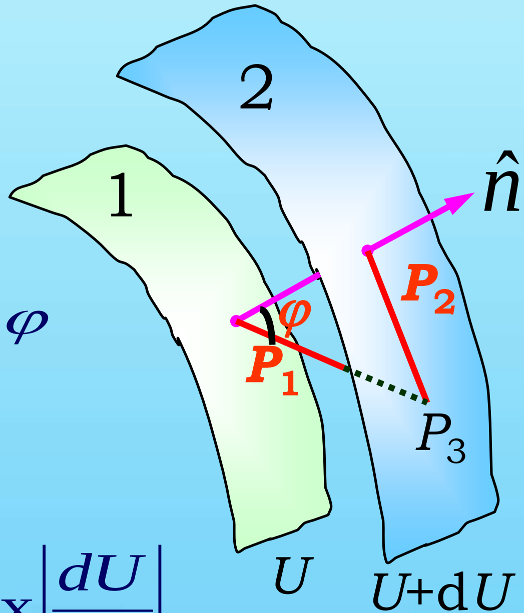
二、场强与电势的关系-电势梯度

1. 电势梯度

- 在电场中任取两相距很近的等势面1和2，电势分别为U和$U+dU$，且$dU>0$ 。
- 等势面1上P1点的单位法向矢量与等势面2正交于P2 点。
- 在等势面2任取一点P3 ，设

$$\overline{P_1P_2}=\mathrm{d}n \qquad \overline{P_1P_3}=\mathrm{d}l$$

则 $\mathrm{d}n=\mathrm{d}l\cdot\cos\varphi \qquad \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}=\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\cos\varphi$



- 定义电势梯度

$$\mathrm{grad}\,U=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\hat{n} \qquad \left|gradU\right|=\max\left|\frac{dU}{dl}\right|$$

- 电势梯度是个矢量，其大小是该点电势增加率的最大值，方向与等势面垂直，并指向电势升高的方向。

2. 电势梯度与电场强度的关系

- 电荷q从等势面1移动到等势面2，电场力做功

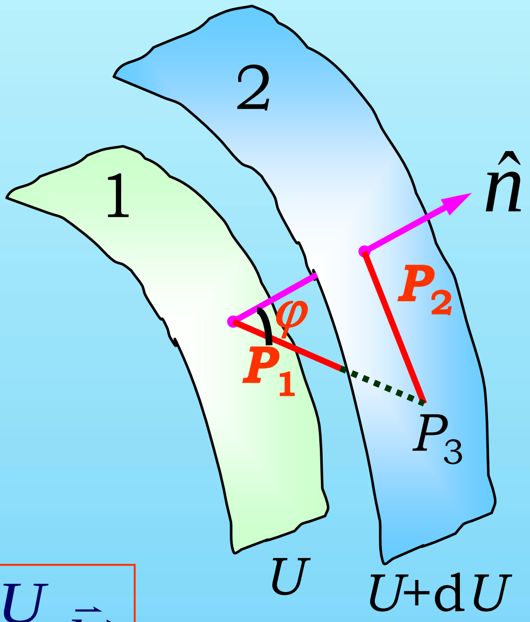
$$dA = q\vec{E}\cdot d\vec{l} = qEdl\cos\varphi = qEdn$$

- 电场力做功等于电势能的减少量

$$\mathrm{d}A = -q\mathrm{d}U = qE\mathrm{d}n$$

$$\therefore E = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\hat{n} = -\mathrm{grad}U}$$



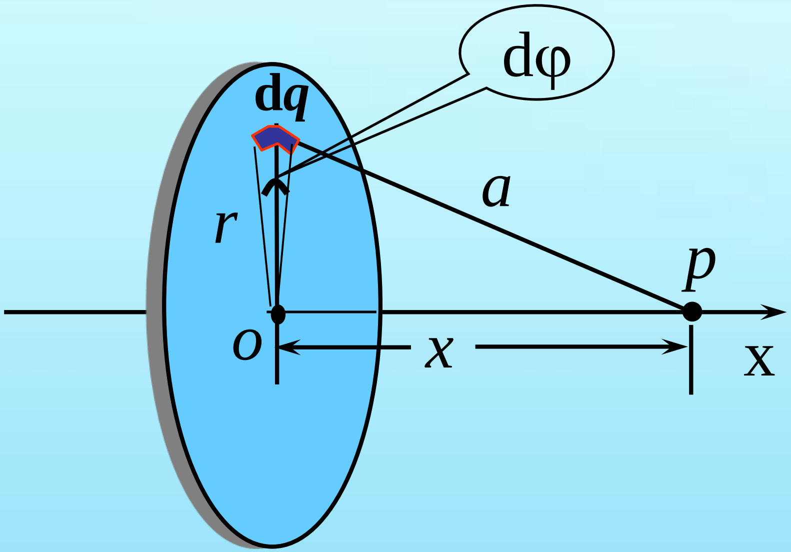
- 在直角坐标系中

$$\boxed{\vec{E} = -gradU = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})}$$

- 场强也与等势面垂直，但指向电势降低的方向，即电场线与等势面垂直，并指向电势降低的方向

三、利用场强与电势的微分关系求场强（均匀带电圆盘轴线上的场强）

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S = \sigma r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$



$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\sigma r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}}$$

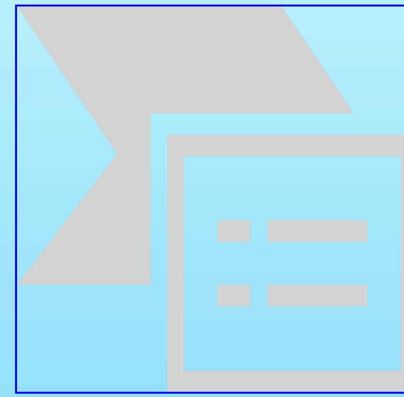
$$U = \int \mathrm{d}U = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^R \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)$$

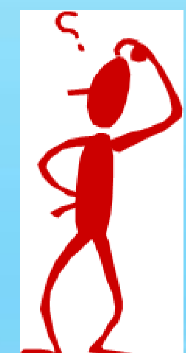
$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) \qquad \vec{E} = E_x \vec{i}$$

讨论题

先在实验室内模拟一下管式静电除尘器除尘的全过程，在模拟烟囱内，可以看到，有烟尘从“烟囱”上飘出。加上电源，烟囱上面的烟尘不见了。如果撤去电源，烟尘又出现在我们眼前。

请考虑如何计算出实验室管式静电除尘器的工作电压，即当工作电压达到什么数量级时，可以实现良好的静电除尘效果。





设r_a与r_b分别表示电晕极与集电极的半径，L及D分别表示圆筒高度及直径。一般$L>>D$，此时电晕线外的电场可以认为是无限长带电圆柱面的电场。设单位长度的圆柱面带电荷为λ。用静电场高斯定理求出距轴线任意距离r处点P的场强为：

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

工作电压为：

$$\Delta U = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

积分后可得：

$$\lambda = -\frac{2\pi\varepsilon_0 \Delta U}{\ln\frac{r_b}{r_a}}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\Delta U}{r\ln\frac{r_b}{r_a}}$$

由于电晕线附近的电场强度最大，使它达到空气电离的最大电场强度时，就可获得高压电源必须具备的工作电压。

$$\Delta U = E_m \cdot r_a \ln\frac{r_b}{r_a}$$

代入空气的击穿电场，并取一组实测参数如下：

$$E_m = 3\times10^6\ \mathrm{V\cdot m^{-1}},$$

$$r_a = 0.5\times10^{-2}\ \mathrm{m}, r_b = 0.15\mathrm{m}$$

计算结果

$$\Delta U = 5.1\times10^4\ \mathrm{V}$$