A-3

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n+o(x^n)$$

$$y=-1+\frac{2}{1+x}=-1+2(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n))$$

$$=1-2x+2x^2+\cdots+(-1)^n 2x^n+o(x^n)$$

2. 求函数$u=xyz$在点$A(5,1,2)$沿到点$B(9,4,14)$的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数.

$\overrightarrow{AB}=(4,3,12)$,其方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{4}{13},\cos\beta=\frac{3}{13},\cos\gamma=\frac{12}{13}$$

方向导数为：$u_x|_A\cos\alpha+u_y|_A\cos\beta+u_z|_A\cos\gamma$

$$=yz|_A\cos\alpha+xz|_A\cos\beta+xy|_A\cos\gamma=\frac{98}{13}$$

3. 求过直线$L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\2x-3y+z=0\end{cases}$和点$P_0(1,2,3)$的平面方程.

过 L 的平面束方程为：$x+2y-z+1+\lambda(2x-3y+z)=0$

平面过（1，2，3），代入解得：$\lambda=3$

$\therefore$平面方程为:$7x-7y+2z+1=0$

三. 完成下列各题（每小题 4 分，共 12 分）

1.设$u=f(x,xy,xyz)$,其中f有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$

$$u_x=f_1(x,xy,xyz)+f_2(x,xy,xyz)y+f_3(x,xy,xyz)yz$$

$$u_{xz}=f_{13}xy+f_{23}xy^2+f_{33}xy^2z+yf_3$$

2. 证明$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$连续且偏导数存在，但在此点不可微

$|xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\because 0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|}{2}$ $\therefore$由夹逼定理得$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$ $0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)|x|=\frac{|x|}{2}$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）连续。

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0;\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

$=: f_y(0,0)$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）可导。

偏导存在.

$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|\le|y|$