习题2-6 **中山大學 本科生考试草稿纸** 2011.5.5-37

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.110.1 根据定积分定义，直接求下列定积分。

(1) $\int_a^b k\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} k\cdot\Delta x_i$

$= k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\Delta x_i$

$= k\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{(b-a)}{n} = k\cdot(b-a)$

取 $f(\xi_i)=k$，$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$

$\Delta x_1=\Delta x_2=\cdots=\Delta x_n=\frac{b-a}{n}$.

$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = n\cdot\frac{b-a}{n}=b-a$.

(2) $\int_a^b x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a+\frac{(b-a)}{n}i\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$ (Δx_i)

$= \lim\limits_{n\to\infty} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i + \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot i$

$= a\cdot(b-a) + \lim\limits_{n\to\infty}(b-a)^2\cdot\frac{(1+2+\cdots+n)}{n^2}$

$= a(b-a) + \lim\limits_{n\to\infty}(b-a)^2\cdot\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2} = (b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\right]$

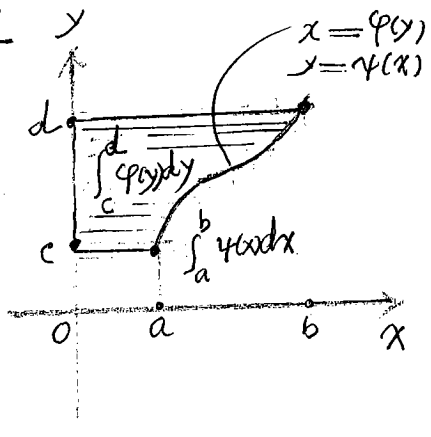
$= \frac{b^2-a^2}{2}$.

取 $f(\xi_i)=\xi_i = a+\frac{b-a}{n}i$

$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = \Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n = n\cdot\frac{b-a}{n}=b-a$.

P.110.2



$A = \int_c^d \varphi(y)\,dy$

$B = \int_a^b \psi(x)\,dx$

$\int_c^d \varphi(y)\,dy + \int_a^b \psi(x)\,dx = A+B = bd-ac$.