§ 2　概率分布函数不等式

1.　**Chebyshev 不等式**:设 $t>0$,则

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\}\leqslant(\sigma/t)^2 \quad \text{或} \quad P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\cdot\sigma\}\leqslant 1/t^2. \tag{2.1}$$

注 1　对于 $E\xi^2<\infty$,(2.1) 式不能再改进. 但若高阶矩存在,则在某些情形下,(2.1) 式仍可改进. 例如,我们有:设 $E|\xi|^4<\infty, E\xi=0, \sigma=\sqrt{D\xi}$,则对于 $t>1$,有

$$P\{|\xi|\geqslant t\sigma\}\leqslant\frac{E\xi^4-\sigma^4}{E\xi^4+(t\sigma)^4-2t^2\sigma^4}, \tag{2.2}$$

若　$t^2\geqslant\frac{E(\xi^4)}{\sigma^4}$,则(2.2) 式比(2.1) 式好;但当　$1\leqslant t^2<\frac{E(\xi^4)}{\sigma^4}$ 时,则(2.2) 式比(2.1) 式差;若 $0<t\leqslant 1$,则 $P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\sigma\}\leqslant 1$.

注 2　(2.1) 式是由 Bienayme(1853) 与 Chebyshev(1866) 独立发现的,但在近代文献中,(2.1) 式及其各种变形和推广都称为 Chebyshev(型) 不等式,将其应用于随机变量之和,在各种形式的大数律及重对数律的证明中起着重要作用.

注 3　(2.1) 式可推广为

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant 2\sigma\}+P\{|\xi-E\xi|\geqslant 3\sigma\}\leqslant 1/4. \tag{2.3}$$

([305]2000,107(3):282.)

2.　**单边 Chebyshev 不等式(Cantelli 不等式)**:设 $D\xi=\sigma^2<\infty$,则当 $t<0$ 时,

$$P\{\xi-E\xi\leqslant t\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2};$$

当 $t\geqslant 0$ 时,

$$P\{\xi - E\xi \leqslant t\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2} = \frac{t^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

3.　**Cantelli 不等式**:记 $v_p = E(|\xi - E\xi|^p)$.

(1)　若 $t^p \leqslant v_{2p}/v_p, p \geqslant 1$,则 $P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\} \leqslant v_p/t^p$.

(2)　若 $t^p \geqslant \dfrac{v_{2p}}{v_p}, p \geqslant 1$,则 $P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\} \leqslant \dfrac{v_{2p} - v_p^2}{(t^p - v_p)^2 + v_{2p} - v_p^2}$.

4.　**Markov 不等式**:设 $E(|\xi|^p) < \infty, p > 0$, 则 $\forall t > 0$,成立

$$P\{|\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{E(|\xi|^p)}{t^p}. \tag{2.4}$$

特别地有 $P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\} \leqslant \dfrac{E(|\xi - E\xi|^p)}{t^p}$,

更一般地,设 g 是 R^1 上偶函数且在 $[0,\infty)$ 上递增,则 $\forall t \geqslant 0$,成立

$$\frac{Eg(\xi) - g(t)}{\text{a.e.}\sup g(\xi)} \leqslant P\{|\xi| \geqslant t\} \leqslant \frac{Eg(\xi)}{g(t)}, \tag{2.5}$$

式中 $\text{a.e.}\sup g(\xi) = \inf\{t : P\{g(\xi) \geqslant t\} = 0\}$,若 g 在 R^1 上递增,则(2.5)式中间一项 $P\{|\xi| \geqslant t\}$ 换成 $P\{\xi \geqslant t\}$,其中 t 为实数,见[78]P233.

若 g 是非负 Borel 可测函数,若 $Eg(\xi)$ 存在,则 $\forall t > 0$,成立

$$P\{g(\xi) \geqslant t\} \leqslant \frac{Eg(\xi)}{t}.$$

5.　**指数不等式**:设 $c > 0, t > 0$,则

$$P\{\xi \geqslant t\} \leqslant \frac{E(e^{c\xi})}{e^{ct}}.$$

6.　**Gauss 不等式**:设 ξ 具有单峰分布,其众数 m_0 与数学期望 $E(\xi)$ 相等,则当 $t \geqslant \dfrac{2}{3}\sigma$ 时,$P\{|\xi - m_0| \geqslant t\} \leqslant \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$;若 $t \geqslant \delta$,式中 $\delta = \dfrac{E(|\xi - E\xi|)}{\sigma}$,则

$$P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{4}{9}\,\frac{1 - \delta^2}{(t - \delta)^2}.$$

7.　**Camp-Meidell 不等式**:设 ξ 具有单峰分布.m_0 为其众数,令

$$\tau^2 = \sigma^2 + (E\xi - m_0)^2, s = \frac{|E\xi - m_0|}{\sigma}.$$

(1)　若 $t \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,则 $P\{|\xi - m_0| \geqslant t\tau\} \leqslant 1 - \dfrac{t}{\sqrt{3}}$.

若 $t \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,则 $P\{|\xi - m_0| \geqslant t\tau\} \leqslant \dfrac{4}{9t^2}$.

(2)　若 $t > s$,则 $P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\sigma\} \leqslant \dfrac{4}{9}\,\dfrac{(1 + s^2)}{(t - s)^2}$.

(见 Savage, I.R., J. Res. Nat. Bur. Stand. 1961, 65(B): 211 − 222.)

8.　**Pearson 不等式**:设 $p > 0, v_p = E(|\xi - E\xi|^p)$,则

$$P\{|\xi - E\xi| \geqslant tv_p^{1/p}\} \leqslant \frac{1}{t^p};\quad P\{|\xi - E\xi| \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{v_p}{(t\sigma)^p}.$$

(Savage, 同 N.7)

9. **Peek 不等式**:设 $\delta=\dfrac{v_1}{\sigma}, v_1=E(|\xi-E\xi|)$.则当 $t\geqslant\delta$ 时,

$P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\sigma^2\}\leqslant\dfrac{1-\delta^2}{t^2-2t\delta+1}$.([30].P316 − 317.)

10. 设 $f(x)\geqslant m>0$,则 $P\{\xi\geqslant t\}\leqslant Ef(\xi)/m$.([30]P.318)

11. 设 f 为非负偶函数,且在 $x>0$ 上递增,$g(x)\leqslant M$,则

$P\{|\xi|\geqslant M\}\leqslant\dfrac{Ef(\xi)-f(M)}{M}$.

12. 设 f 为正值偶函数,在 $x>0$ 时递增,且 $P\{|\xi|\leqslant M\}=1$,则 $\forall t>0$,成立

$$P\{|\xi|\geqslant t\}\leqslant\frac{Ef(\xi)-f(t)}{f(M)}.$$

13. 设 f 为正的递增函数,则 $\forall t>0$,成立

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\}\leqslant\frac{E[f(|\xi-E\xi|)]}{f(t)}.$$

14. **Glasser 不等式**:令 $c=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}\right)$,若 $c\leqslant 1$,则

$$P\{-c_1v_1<\xi-E\xi<c_2v_1\}\geqslant 1-c,$$

式中 $v_1=E(|\xi-E\xi|)$.

15. **Selberg 不等式**:设 $-\alpha<0<\beta,\ m=\min\{\alpha,\beta\}$,则

$$P\{-\alpha<\xi-E\xi<\beta\}\geqslant\begin{cases}\dfrac{4(\alpha\beta-\sigma^2)}{(\alpha+\beta)^2}, & \text{若 } \alpha\beta-m^2\leqslant 2\sigma^2\leqslant 2\alpha\beta,\\[2ex] \dfrac{m^2}{\sigma^2+m^2}, & \text{若 } 2\sigma^2\leqslant\alpha\beta-m^2,\\[2ex] 0, & \text{若 } \alpha\beta\leqslant m^2.\end{cases}$$

(以上 N10 − 15 见[30]P.317 − 319)

注 4 上述不等式均可看成 Chebyshev 型不等式.对于独立随机变量之和,Chebyshev 不等式已在两个不同方向上得到推广和改进,即下述 N16 − 18.

16. **Kolmogorov 不等式**:设 $\xi_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为独立随机变量,$E\xi_k<\infty,\sigma_k^2=D\xi_k<\infty$,则 $\forall t>0$,成立

$$P\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m-E(S_m)|\geqslant t\}\leqslant(\sigma/t)^2. \tag{2.6}$$

若 $|\xi_k|\leqslant c$,($|\xi_k|\leqslant c$ 的概率为 1),则

$$P\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m-E(S_m)|\geqslant t\}\geqslant 1-\left(\frac{2c+t}{\sigma}\right)^2.$$

(见[321]1928,99:309 − 319.).

(2.6) 式显然是 Chevyshev 不等式:

$$P\{|S_n-E(S_n)|\geqslant t\}\leqslant(\sigma/t)^2 \tag{2.7}$$

的改进,因而成为证明强大数律和随机变量级数的收敛性的基本工具.(2.6) 式的证明采用了概率论中全新的论证方法,即当 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 固定时,和函数 S_{k+m} 条件数学期望的一些性质,这些性质是由 ξ_k 的独立性所衍生的.

Kolmogorov 不等式已有许多推广,例如:

(1)　$\{\xi_k\}$ 的独立性用 $\{\xi_k\}$ 为绝对无偏序列代替,即若由 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ 产生的序列形成一个鞅,则(2.6)式仍成立(见本节 N49).

(2)　若 g 是非负凸单调函数,$Eg(|S_n|) < \infty$,则

$$P\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n} |S_m| \geqslant t\} \leqslant \frac{Eg(|S_n|)}{g(t)}.$$

(3)　**Levy 不等式**:设 $\xi_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 是独立随机变量,$m(\xi)$ 是 ξ 的中位数(统计学中的),则 $\forall t$,成立

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} [S_k - m(S_k - S_n)] \geqslant t\} \leqslant 2P\{S_n \geqslant t\},$$

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - m(S_k - S_n)| \geqslant t\} \leqslant 2P\{|S_n| \geqslant t\},$$

特别,当 $\xi_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 关于原点对称分布时,成立

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant t\} \leqslant 2P\{S_n \geqslant t\}, P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant t\} \leqslant 2P\{|S_n| \geqslant t\}.$$

注　同时满足 $P\{\xi \leqslant x\} \geqslant \frac{1}{2}$ 和 $P\{\xi \geqslant x\} \geqslant \frac{1}{2}$ 的实数 x 称为 ξ 的中位数,记为 $m(\xi)$.

(4)　设 ξ_k 是独立随机变量,$\delta > 0, 0 < p < 1, P\{|S_m| > \delta\} \leqslant p, 1 \leqslant m \leqslant n$,则

$$P\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n} |S_m| \geqslant \delta + t\} \leqslant \frac{1}{1-p} P\{|S_n| > t\}.$$

(5)　设 $\{\xi_k\}$ 是独立随机变量列,$E(\xi_k) = 0$,令 $A = \{\max |S_k| \geqslant c\}, \alpha \geqslant 1$,则

$$c^{\alpha} P\{\textstyle\sum\} \leqslant E(|S_n|^{\alpha}) \varphi_A \leqslant E(|S_n|^{\alpha}),$$

式中 $\sum$ 为 $\{\xi_k\}$ 的尾 σ 代数,φ_A 为 A 的特征函数.(有关定义及细节见[78]P. 450)

(6)　**Hajek-Renyi 不等式**:设 $\xi_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为独立随机变量,$E(\xi_k) = 0, \sigma_k^2 = D\xi_k < \infty$,$\{c_k\}$ 是正数递减序列,则 $\forall m, n \in N, \forall t > 0$,成立:

$$P\{\max_{m \leqslant k \leqslant n} (c_k |S_k|) \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t^2}\left[c_m^2 \sum_{k=1}^{m} \sigma_k^2 + \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2 \sigma_k^2\right].$$

(7)　**KW(Kounias-Weng)不等式**:设 $\{\xi_k\}$ 为随机变量. $E(|\xi_k|^p) < \infty$,$\{c_k\}$ 是正数递减序列,$\forall m, n \in N, t > 0$,若 $0 < p \leqslant 1$,则

$$P\{\max_{m \leqslant k \leqslant n} (c_k |S_k|) \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t^p}\left[c_p^m \sum_{k=1}^{m} E(|\xi_k|^p) + \sum_{k=m+1}^{n} c_k^p E(|\xi_k|^p)\right];$$

若 $p \geqslant 1$,则

$$P\{\max_{m \leqslant k \leqslant n} (c_k |S_k|) \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t^p}\left[c_m \sum_{k=1}^{m} E(|\xi_k|^p)^{1/p} + \sum_{k=m+1}^{n} c_k (E(|\xi_k|^p))^{1/p}\right]^p.$$

(8)　**Heyde 不等式**:设 $\{\xi_k\}$ 为随机变量,$\{\eta_k\}$ 为独立随机变量,$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

$E(\eta_k) = 0, D(\eta_k) < \infty, \alpha_k = \xi_k - \eta_k$,$\{c_k\}$ 为递减的正数列,则 $\forall m, n \in N, \forall t > 0, 0 < p < 1$,成立

$$P\{\max_{m \leqslant k \leqslant n} (c_k |S_k|) \geqslant t\} \leqslant \frac{c_m^2 \sum_{k=1}^{m} E(\eta_k^2) + \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2 E(\eta_k^2)}{(1-p)^2 t^2}$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n}P\{\alpha_k\neq 0\}+P\{c_n\mid\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mid\geqslant nt\}.$$

17. Chebyshev 不等式第二个方向的推广是将 Chebyshev 不等式的幂界换成带某种指数衰减的界，从而导出 **Bernstein-Kolmogorov 不等式**：

设独立随机变量 $\xi_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 满足 $E(\xi_k)=0.E(|\xi_j|^k)\leqslant(1/2)(k!)c^{k-2}E(\xi_j^2)$, $k>2, S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k, B_n=\sum_{j=1}^{n}E(\xi_j^2), t>0$, 则

$$P\{|S_n|>t\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2(B_n+ct)}\right\}. \tag{2.8}$$

特别，若 $\{\xi_k\}$ 是同分布有界随机变量，即 $E(\xi_k)=0, |\xi_k|\leqslant M, \sigma^2=D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k), a=\frac{Mt^2}{\sigma^2}$, 则

$$P\{|S_n|>t\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2(1+(a/3))}\right\}. \tag{2.9}$$

Chebyshev 不等式的这种改进，是在对被加项 ξ_k 添加某些限制之下得到的.

Kolmogorov 对(2.8) 式中的概率给出一个下界估计，而(2.9) 式用于重对数律的证明中.

关于(2.9) 式的准确度，可以通过与由中心极限定理给出的(2.9) 式的左端的近似值

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\exp(1-\frac{u^2}{2})\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\left(1-\frac{\theta}{t^2}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

进行比较而得到，其中，$0<\theta<1$.

1967 年以后，Bernstein 不等式推广到多维和无穷维情形.

18. **Bernstein 不等式**：(1) 设 $\varepsilon>0$，参数 $\lambda>0$，则

$P(|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\exp(-\varepsilon\lambda)\{E(\exp\lambda(\xi-E\xi))+E(\exp\lambda(E\xi-\xi))\}$. 见 [327]1990.60(1):101－102.

(2) 设 $\{\xi_k\}$ 是 n 个独立的随机变量. 若 $P\{|\xi_k-E\xi_k|>\alpha\}=0$，式中 $\alpha<\infty$，则 $\forall t>0$，成立

$$P\{|S_n-E(S_n)|\geqslant nt\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{n^2t^2}{2\sigma^2+(2/3)\alpha nt}\right\}.\ ([30]\mathrm{P}.322)$$

19. **Markov 不等式**：设 ξ_k 是非负随机变量. 则 $\forall t>0$，成立

$$P\{S_n\geqslant tE(S_n)\}\leqslant 1/t.$$

20. **Berge 不等式**：设 ξ_1,ξ_2 是两个随机变量. $\sigma_k^2=D(\xi_k), \mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=r\sigma_1\sigma_2$，则

$$P\left\{\max\left\{\frac{|\xi_1-E(\xi_1)|}{\sigma_1},\frac{|\xi_2-E(\xi_2)|}{\sigma_2}\right\}\geqslant t\right\}\leqslant\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{t^2}.$$

21. **BRZ 不等式**(Birnbaum-Raymond-Zuckerman 不等式)：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量，令 $\alpha_n=(n/4)\sigma^2(3+\sqrt{5}), \beta_n=3n+1+(5n^2+6n+5)^{1/2}, \forall t>0$，则当 n 为偶数时，成立

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E(\xi_k))^2 \geqslant t^2\right\} \leqslant \begin{cases} 1, & \text{若 } t^2 \leqslant n\sigma^2, \\ \dfrac{n\sigma^2}{2t^2 - n\sigma^2}, & \text{若 } n\sigma^2 \leqslant t^2 \leqslant \alpha_n \\ \dfrac{n\sigma^2}{t^2}\left(1 - \dfrac{n}{4}\left(\dfrac{\sigma}{t}\right)^2\right), & \text{若 } t^2 \geqslant \alpha_n. \end{cases}$$

当 n 为奇数时,成立

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E(\xi_k))^2 \geqslant t^2\right\} \leqslant \begin{cases} 1, & \text{若 } t^2 \leqslant n\sigma^2, \\ \dfrac{(n+1)\sigma^2}{2t^2 - (n-1)\sigma^2}, & \text{若 } n\sigma^2 \leqslant t^2 \leqslant \left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2\beta_n \\ \dfrac{n\sigma^2}{t^2} - \dfrac{n^2-1}{4}\left(\dfrac{\sigma}{t}\right)^4, & \text{若 } t^2 \geqslant \left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2\beta_n. \end{cases}$$

22. **Guttman 不等式**:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是 n 个独立同分布随机变量,记 $\xi = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \xi)^2$, $\mu = E(\xi_k)$, $\sigma^2 = D(\xi_k)$,则当 $t \geqslant 1$ 时,成立

$$P\left\{(\xi - \mu)^2 \geqslant \frac{S^2}{n-1} + \sigma^2\left(\frac{2(t^2-1)}{n(n-1)}\right)^{1/2}\right\} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

23. **Hoeffding 不等式**:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量.

$$\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k, E(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k).$$

(1) 若 $0 \leqslant \xi_k \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$,则 $\forall t > 0$,成立

$$\begin{aligned} P\{(\xi - E(\xi) \geqslant t\} &\leqslant \left[\left(\frac{E(\xi)}{E(\xi)+t}\right)^{E(\xi)+t}\left(\frac{1-E(\xi)}{1-E(\xi)-t}\right)^{1-E(\xi)-t}\right]^n \\ &\leqslant \exp\{-nt^2 g(E(\xi))\} \leqslant \exp\{-2nt^2\}, \end{aligned}$$

式中

$$g(E(\xi)) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2E(\xi)}\ln\left(\dfrac{1-E(\xi)}{E(\xi)}\right), & 0 < E(\xi) < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2E(\xi)(1-E(\xi))}, & \dfrac{1}{2} \leqslant E(\xi) < 1. \end{cases}$$

(2) 若 $a_k \leqslant \xi_k \leqslant b_k, 1 \leqslant k \leqslant n$,则 $\forall t > 0$,成立

$$P\{\xi - E(\xi) \geqslant t\} \leqslant \exp\left\{-\frac{2n^2t^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}\right\},$$

(3) 若 $E(\xi_k) = 0, \xi_k \leqslant b, 1 \leqslant k \leqslant n, 0 < t < b$,则

$$P\{\xi \geqslant t\} \leqslant \exp\left\{-\frac{nt}{b}\left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{bt}\right)\ln\left(1 + \frac{bt}{\sigma^2}\right) - 1\right]\right\}.$$

24. **Bennett 不等式**:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量, $E(\xi_k) = 0, \sigma_k^2 = D(\xi_k)$, $E(|\xi_k|^2) \leqslant c^{m-2}\sigma_k^2, m \geqslant 2$,记 $\overline{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2, \xi = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,则

$$P\{\xi \geqslant t\} \leqslant \exp\left\{-\frac{nt}{c}\left[\left(1 + \frac{\overline{\sigma}^2}{ct}\right)\ln\left(1 + \frac{ct}{(\overline{\sigma})^2}\right) - 1\right]\right\}.$$

（以上 N19 - 24 见[30]321 - 324）

25. **中心极限定理的上、下限估计：**

(1) **Berry-Esseen 不等式**：设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立同分布随机变量，令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，定义正则化和 S_n^* 为

$$S_n^*=\frac{S_n-E(S_n)}{[D(S_n)]^{1/2}}.$$

S_n^* 的分布函数为 $G_n(t)=P(S_n^*\leqslant t)$，$\varphi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数，即 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{t^2}{2})\mathrm{d}t$，则

$$\sup_t|G_n(t)-\varphi(t)|\leqslant\frac{33}{4}\cdot\frac{E|\xi_1-E\xi_1|^3}{n^{1/2}\cdot[D(\xi_1)]^{3/2}},\tag{2.10}$$

Zolotarev 将 33/4 改进为 0.91，而 Beeck 进一步改进为 0.7975，若将 33/4 改记为最佳值 C. 我们问 $C=$?

若 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 不同分布，则 Serfling 将(2.10)式右边改为

$$C\frac{\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k-E(\xi_k)|^3}{[D(S_n)]^{3/2}}.$$

我们问：上述 C 的最佳值是多少？见[30]P.324 - 325.

(2) 1983 年 Мацкявичюс 证明了中心极限定理收敛速度的下限：对于任何数列 $a_n\geqslant 0$ 且当 $n\to\infty$ 时 $a_n\to 0$，都存在一列独立同分布的随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots$，有 $E\xi_1=a$，$0<\sigma^2=E(\xi_1-a)^2<\infty$，使得

$$\sup_x\left|P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-a)<x\right\}-\varphi(x)\right|\geqslant a_n,$$

$n=1,2,\cdots$，式中 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$.

注 上述结果表明，在仅有二阶矩存在的情形下，中心极限定理收敛的速度可能任意地慢，1985 年，苏谆证明，强大数律的收敛速度也可能任意地慢. 见[333]1985，21：1611 - 1613.

1975 年 Butzer，P. L，等还给出了中心极限定理的逼近速度估计，见[327]1975，13(3 - 4)：327 - 340.

26. 设$\{\xi_k\}$为相互独立的随机变量，$E\xi_k=0$，$D\xi_k=\sigma_k^2$，$1\leqslant k\leqslant n$，则对正数 a_k，有

$$P[\bigcap_{k=1}^{n}\{S_k\leqslant a_k\}]\geqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{a_k^2+\sum_{j=1}^{k}a_j^2}\right).$$

见[52]P.162.

27. 设 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 是 n 维随机向量，$g_1(\xi)$，$g_2(\xi)$ 关于每个变量都递增使得数学期望存在. 若协方差 $\mathrm{cov}(g_1(\xi),g_2(\xi))\geqslant 0$，则称 $|\xi_1|,\cdots,|\xi_n|$ 是**相伴的**. 若 $E\xi_k=$

$0, D\xi_k = \sigma_k^2, 1 \leqslant k \leqslant n$，则对于正数 a_k，有

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{|\xi_k| \leqslant a_k\}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n}[1-(\sigma_k/a_k)^2].$$

见[52]P161.

28. 设 $\xi_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 是独立的随机变量，$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k, \sigma_k^2 = D\xi_k, \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2, t > 0$，则

$$P\left\{\bigcap_{k=1}^{n}(|S_k - E(S_k)| \leqslant t\sigma)\right\} \geqslant 1-(1/t^2).$$

1960 年，Marshall 将右边改进为 $t^2/(1+t^2)$. 见[52]P. 158.

29. 若 ξ_j 与 ξ_k 的方差 $\mathrm{cov}(\xi_j, \xi_k) = 0\ (j \neq k)$，则 $\forall t > 0$，成立

$$P\{|\xi - E(\xi)| \geqslant t\bar{\sigma}\} \leqslant 1/(nt^2).$$

见[101]P931.

30. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是任意的随机变量序列，将每个 ξ_k 在 $c > 0$ 上截尾，即令

$$\xi_k^c = \begin{cases} \xi_k, 若\ |\xi_k| \leqslant c, \\ 0, 若\ |\xi_k| > c, \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k, S_n^c = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^c, E(S_n^c) = \sum_{k=1}^{n}E(\xi_k^c), n = 1,2,\cdots,$

则对于任意正数 t，有

$$P\{|S_n - E(S_n^c)| > t\} \leqslant P\{S_n^c - E(S_n^c)| > t\} + \sum_{k=1}^{n}P\{|\xi_k| > t\}.$$

推论 若 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是同分布的，则

$$P\{|S_n - E(S_n^c)| > t\} \leqslant P\{|S_n^c - E(S_n^c)| > t\} + nP\{|\xi_1| > t\}.$$

若 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是独立同分布的，则

$$P\{|S_n - E(S_n^c)| > t\} \leqslant (n/2)[E(\xi_1^c)]^2 + nP\{|\xi_1| > t\}.$$

见[143]P.315.

31. **Wilks 不等式**：设 n 维随机向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的联合分布函数为 $F(\xi) = F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$F_k(\xi_k)$ 为边缘分布函数，则

$$F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}F_k(\xi_k)\right)^{1/n}.$$

见[52]P. 160.

32. 设 F_k, F 为分布函数，则 $\forall$ 实数 x_k，成立

$$1 - \sum_{k=1}^{n}\{1 - F_k(x_k)\} \leqslant F(x_1, \cdots, x_n) \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n}\{F_k(x_k)\}$$

的充要条件是 $\forall F_k$ 是 F 的边缘分布. 见[143]P. 140.

33. $0 \leqslant E(|\xi|) - \sum_{n=1}^{\infty}P\{|\xi| \geqslant n\} \leqslant 1$. [143]$P$.332 – 333.

34. **Riesz 不等式**：设随机变量 ξ 的分布函数为 F，g 是 F 的值域上严格凸函数，φ 为

Borel 可测函数,设 $E(\xi),E\varphi(\xi),Eg(\xi)$ 全都存在,且 $t(x)=g(E\xi)+K(x-E\xi)$ 是 g 在 $x=E\xi$ 上的一条支柱线,$h(x)=g(x)-t(x)$,则 $\forall\varepsilon>0$,成立

$$E|\varphi(\xi)|\leqslant\sup\{|\varphi(x)|:|x-E\xi|<\varepsilon\}+Eh(\xi)\sup\left\{\frac{|\varphi(x)|}{h(x)}:|x-E\xi|\geqslant\varepsilon\right\}. \tag{2.11}$$

注 利用 Riesz 不等式(2.11)式可以证明前面 Markov 不等式(2.4)式和下述不等式:

设 $a>0,\varepsilon>0,M=(e^{-a\varepsilon}-1+a\varepsilon)^{-1}$,则

$P\{|\xi-E\xi|>\varepsilon\}\leqslant Me^{-aE(\xi)}[E(e^{a\xi})-e^{aE(\xi)}]$. (见[143]P.124)

35. **Kadiyala 不等式**:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为正的随机变量,$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n,a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0.\dfrac{b_k}{a_k}$ 递减,$1\leqslant k\leqslant n$.令 $q_j(a)=(a_j\xi_j)/\sum\limits_{k=1}^n a_k\xi_k$,则 $\forall t\in R^1$.成立

$$P\left\{\sum_{j=1}^n\lambda_jq_j(a)\leqslant t\right\}\geqslant P\left\{\sum\lambda_jq_j(b)\leqslant t\right\}.$$

提示令 $r_k=\dfrac{b_k}{a_k},q_k=(a_kx_k)/\sum\limits_{j=1}^n a_jx_j,x_k>0$.证明 $\left(\sum\limits_{k=1}^n r_kq_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^n\lambda_kq_k\right)\leqslant\sum\limits_{k=1}^n\lambda_kr_kq_k$.(见[50]P.371-372)

36. [MCU].设 ξ 为离散型随机变量,其可能取值为 $1,2,\cdots$,若 $P\{\xi=k\}$ 关于 k 递减,则

$$P\{\xi=k\}\leqslant(2/k^2)E(\xi).$$

提示:$2E(\xi)=2\sum\limits_{k=1}^{\infty}kP\{\xi=k\}\geqslant2\sum\limits_{k=1}^{m}kP\{\xi=m\}=P\{\xi=m\}\cdot2\sum\limits_{k=1}^{m}k\geqslant m^2P\{\xi=m\}$.

37. [MCU].设随机变量 ξ,η 的相关系数为 $\rho,E(\xi)=E(\eta)=0,D\xi=D\eta=1$,则

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant\lambda\sqrt{D\xi},|\eta-E\eta|\geqslant\lambda\sqrt{D\eta}\}\leqslant\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\lambda^2}.$$

38. [MCU].设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立的随机变量,则 $\forall t>0$,成立

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>2t\right\}\leqslant\frac{P\{|S_n|>t\}}{1-\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1}P\{|S_n-S_k|>t\}}.$$

(当上式分母为零时,右边理解为 ∞).

39. [MCU].设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立的随机变量,若 ξ_k 是对称的,即 ξ_k 与 $(-\xi_k)$ 有相同的分布,则 $\forall\alpha\in R^1$.成立

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k>\alpha\right\}\leqslant2P\{S_n>\alpha\}.$$

40. [MCU].设 F 和 f 分别是标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数和分布密度,则 $\forall x>0$,成立

$$f(x)(1/x-1/x^3)<1-F(x)<(1/x)f(x).$$

41. 设 ξ 服从参数为 $(0,\sigma^2)$ 的正态分布,则 $\forall t>0$,成立

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}\right)\left[\frac{\sigma}{t}-\left(\frac{\sigma}{t}\right)^3\right]< P\{\xi\geqslant t\}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma}{t}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

(见[80]P.163)

42.　设 $\varphi(t)$ 是随机变量的特征函数,$\mathrm{Re}\varphi(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的实部,则

(1)　$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\sqrt{2\mathrm{Re}[1-\varphi(h)]}$;

(2)　$1-\mathrm{Re}\varphi(2t)\leqslant 4[1-\mathrm{Re}\varphi(t)]$;

(3)　当 $\varphi(t)$ 为实函数时,成立

$1-\varphi(2t)\leqslant 4[1-\varphi(t)]$;$2[\varphi(t)]^2\leqslant 1+\varphi(2t)$.([80]P.362.)

(4)　$1-|\varphi(2t)|^2\leqslant 4(1-|\varphi(t)|^2)$.　[78]P.387.

43.　**Kingman 不等式**:设 $p(t)\in(0,\infty)$ 是再生现象的标准 p 函数.$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,$1\leqslant k\leqslant n$,令

$$f(t_k)=p(t_k)-\sum_{1\leqslant i<k}p(t_i)p(t_k-t_i)+\sum_{1<i<j<k}p(t_i)p(t_j-t_i)p(t_k-t_j)-\cdots+$$

$$(-1)^k p(t_1)p(t_2-t_1)\cdots p(t_k-t_{k-1});\quad p(t_k)=1-\sum_{j=1}^{k}f(t_j).$$

则 $p(t)$ 满足 n 阶 Kingman 不等式:

$$f(t_n)=p(t_n)-\sum_{k=1}^{n-1}f(t_k)p(t_n-t_k)\geqslant 0.\quad g(t_n)=1-\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\geqslant 0.$$

1987 年,戴永隆进一步证明

$$g(t_{n+1})\geqslant\frac{1}{2}\left[1+\left(\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\right)^2\right]-\sum_{k=1}^{n}f(t_k).$$

式中 $0=t_0<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_{n+1}$,$n\geqslant 1$,

设 $M=p(1)>\frac{1}{2}$,$m(M,p)=\inf\{p(t):0\leqslant t\leqslant 1\}$.则

$I(M)=\inf\limits_{p}\{m(M,p)\}\geqslant\sqrt{2M-1}$.(见中山大学学报,1987,4:1－4.)

44.　**截尾不等式**:设 F 是 R^1 上有界的分布函数,并具有特征函数 h:$h(u)=\int_{R^1}e^{iux}\mathrm{d}F(x)$.若 $u>0$,则对于某个常数 $c>0$,成立

$$\int_{|x|\geqslant\frac{1}{u}}\mathrm{d}F(x)\leqslant\frac{c}{u}\int_0^u[h(0)-\mathrm{Re}h(t)]\mathrm{d}t.$$

45.　设 ξ_k 是独立不同分布的 Bernoulli 随机变量,$P\{\xi_k=1\}=p_k$,令 $\lambda=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$,则

$$\sum_{k=0}^{n}\left|P\{S_n=k\}-\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right|<2\sum_{k=1}^{n}p_k^2.$$

见[313]1960,10:1181－1197.[305]1994,10(1):48.

46.　**累积分布函数的 Ostrowski 型不等式**:设 ξ 是在有限区间 $[a,b]$ 上取值的随机变量,则

$$\left|P\{\xi\leqslant x\}-\frac{b-E(\xi)}{b-a}\right|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{b-a}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|,x\in[a,b].$$

(Barnett, N. S. 等, [395] 1999, 39(2): 303 − 311)

47. 设 ξ 是标准化随机变量, $a, t > 0$, 则

$$e^{-at} < \frac{P\{a \leqslant \xi \leqslant a + t\}}{P\{a - t \leqslant \xi \leqslant a\}} < e^{-at + \frac{1}{2}at^3}.$$

[305] 2000, 107(4): Pro. 10709.

48. 设 f 是 R^1 上充分光滑的概率密度函数. $q > p > 1$, $1/(q+1) \leqslant r \leqslant 1$, 则 $\int_{R^1} \frac{|f'|^{2pr}}{f^\alpha} \leqslant \left(\frac{2p-1}{q-1}\right)^{rp} \left(\int_{R^1} \frac{|f''|^{p-1}}{f^{(q-p)}}\right)^r$, 式中 $\alpha = r(q+1) - 1$.

(见 [373] 1998, 39(3): 350 − 354.)

49. **鞅不等式**: 定义在一个具有递增 σ 代数族 $\{\sum_t\}_{t \in T}$(即 $s \leqslant t$ 时 $\sum_s \subset \sum_t \subset \sum$) 的概率空间 $(\Omega, \sum, P)$ 上, 使得 $E|X_t| < \infty$, X_t 为 $\sum_t$ 可测且 $E(X_t \mid \sum_s) = X_s$ 以概率 1 成立的随机过程 $X = (X_t, \sum_t)$ $(t \in TC[0, \infty))$ 称为鞅, 若 $E(X_t \mid \sum_s) \geqslant X_s$, 称 X 为下鞅; 若 $E(X_t \mid \sum_s) \leqslant X_s$, 称 X 为上鞅.

在离散情形下, $T = N$(自然数集), 在连续时间情形下, $T = [0, \infty)$, 鞅是 Markov 过程论和随机积分论的基础, 而且在分析数学的许多部分, 如遍历理论的收敛定理, 测度论中的导数和提升, 奇异积分理论中的不等式等等, 都有广泛的应用, 鞅还可在复数域 C, R^n, Hilbert 空间或 Banach 空间中取值, 鞅论的基本结果之一就是下述几个不等式.

(1) **Doob 不等式**: 若 $X = (X_n, \sum_n)$ 是非负下鞅. 令
$X_n^* = \max\{X_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. $\|X_n\|_p = (E|X_n|^p)^{1/p}$, $p \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, 则

$$P\{X_n^* \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E(X_n)}{\varepsilon};$$

$$\|X_n\|_p \leqslant \|X_n^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|X_n\|_p, \quad p > 1;$$

$$\|X_n^*\|_1 \leqslant \frac{e}{e-1}[1 + \|X_n \ln^+(X_n)\|_1].$$

(2) **Burkholder 不等式**: 设 $X = (X_n, \sum_n)$ 是鞅, $p > 1$, $A_p = \left(\frac{18p^{3/2}}{p-1}\right)^{-1}$, $B_p = \frac{18p^{3/2}}{(p-1)^{1/2}}$, $[X]_n = \sum_{k=1}^n (\Delta X_k)^2$, $X_0 = 1$. 则

$$A_p \|\sqrt{[X]_n}\|_p \leqslant \|X_n\|_p \leqslant B_n \|\sqrt{[X]_n}\|_p;$$

$$A_p \|\sqrt{[X]_n}\|_p \leqslant \|X_n^*\|_p \leqslant \widetilde{B_p} \|\sqrt{[X]_n}\|_p;$$

$\widetilde{B_p} = \frac{18p^{5/2}}{(p-1)^{3/2}}$. 这是关于独立随机变量和的 Khinchin 不等式和 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的推广.

(3) **Davis 不等式**: 存在常数 c_1, c_2, 使得

$$c_1 \|\sqrt{[X]_n}\|_1 \leqslant \|X_n^*\|_1 \leqslant c_2 \|\sqrt{[X]_n}\|_1.$$

问题: c_1, c_2 的确切数值是多少?

(4) 关于下鞅以概率 1 收敛的各种定理证明中,起关键作用的是下鞅 $X=(X_n,\sum_n)$ 在 n 步中上穿区间 $[a,b]$ 次数 β_n 的数学期望 $E(\beta_n)$ 的 Doob **不等式**:

$$E(\beta_n)\leqslant\frac{E|X_n|+|a|}{b-a}.$$

见 Doob,J. L.,Stochastic processes,Chapman and Hall,1953.

(5) **下鞅极值不等式**:设 $\{y_n\}$ 是一离散时间下鞅,$a>0$,则成立

$P(E)\leqslant\frac{1}{a}\int_E y_n\mathrm{d}P$,式中 $E=\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}y_k\geqslant a\}$.(见[154]P100)

50. **Levy 距离不等式**:设 F,G 为一维随机变量的分布函数,则 F,G 之间的 Levy 距离定义为 $L(F,G)=\inf\{\varepsilon:F(x-\varepsilon)-\varepsilon\leqslant G(x)\leqslant F(x+\varepsilon)+\varepsilon,\forall x\}$.

若 f,g 分别是与分布函数 F,G 相应的特征函数.则 $\forall x>e$,成立

$$L(F,G)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^x|f(t)-g(t)|\frac{\mathrm{d}t}{t}+2e\frac{\ln x}{x}.$$

Levy 距离可推广到 R^n 上分布函数的情形,另一种推广是 Levy-Prokhorov 距离,见[107]3:397 – 399.

51. **集中函数不等式**:设 t 为非负实数,ξ 为随机变量,ξ 的集中函数定义为:$Q(t,\xi)=\sup\{P\{x\leqslant\xi\leqslant x+t\}:x\in R^1\}$,$Q(t,\xi)$ 是非负,次可加,且对 $t\geqslant 0$ 递增的右连续函数,且 $\lim\limits_{t\to\infty}Q(t,\xi)=1$.反之,任一具备这些性质的函数都可作为某个随机变量 ξ 的集中函数.

(1) **Kolmogorov 不等式**:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立随机变量,$t\geqslant t_k$,$1\leqslant k\leqslant n$,则

$Q(t,s_n)\leqslant ct\left\{\sum\limits_{k=1}^n t_k^2[1-Q(t_k,\xi_k)]\right\}^{-\frac{1}{2}}$.式中 c 为一绝对常数.

(2) 设 ξ_1,ξ_2 为独立随机变量,则 $Q(t,\xi_1+\xi_2)\leqslant Q(t,\xi_k)$,$k=1,2$.

(3) 设 $Q(t,\xi)$ 与 $f(x)$ 分别是 ξ 的集中函数与特征函数,则

$$Q(t,\xi)\leqslant\left(\frac{96}{95}\right)^2\max\left\{t,\frac{1}{a}\right\}\int_{|x|<a}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

(见 Petrov,V. V.,Sums of independent random variables,Springer,1975.)

52. 设随机变量 ξ 的概率密度函数为 $f(x,\lambda)=\frac{e^{-x}x^{\lambda}}{\lambda!}$,$x>0$,$\lambda$ 为非负整数,则

$$P\{0<\xi<2(\lambda+1)\}>\lambda/(\lambda+1).$$

[143]P.123.

53. 设 ξ 为随机变量,$\varphi(t)=E(e^{t\xi})$,$0<\varphi(t)\leqslant\infty$,则

$$P\{\xi\geqslant 0\}\leqslant\inf\{\varphi(t):t\geqslant 0\}\leqslant 1.\quad([143]P124.)$$

54. 设 ξ,η 是独立同分布随机变量,则

(1) $P\{|\xi-\eta|>t\}\leqslant 2P\{|\xi|>(t/2)\}$;

(2) 若 $t>0$,使得 $P\{\xi\geqslant t\}\leqslant 1-q$,$P\{\xi\leqslant -t\}\leqslant 1-q$,则

$$P\{|\xi-\eta|\geqslant\varepsilon\}\geqslant qP\{|\xi|>t+\varepsilon\}.$$

[143]P.175.

55. 设 $b(k,n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，若 $k\geqslant np$，则

$$P\{\xi\geqslant k\}\leqslant b(k,n,p)\frac{(n+1)(1-p)}{k+1-(n+1)p};$$

当 $k\leqslant np$ 时，$P\{\xi\leqslant k\}\leqslant b(k,n,p)\dfrac{(n-k+1)p}{(n+1)p-k}$.　([143]P.241)

56. 令 $\rho(\xi)=E\left(\dfrac{|\xi|}{1+|\xi|}\right)$，则 $d(\xi,\eta)=\rho(\xi-\eta)$ 是概率空间上的距离函数，且 (1) $\rho(\xi+\eta)\leqslant\rho(\xi)+\rho(\eta)$.　(2) $\rho(\sigma\xi)\leqslant\max\{|\sigma|,1\}\rho(\xi)$.

见[143]P.310.

57. **概率算子不等式**：设 F 是随机变量 ξ 的分布函数，f 及其三阶导数 $f^{(3)}$ 在 R^1 上一致有界且一致连续.记为 $f\in C^3(R^1)$.令

$$T_F(f)=\int_{R^1}f(x+t)F'(t)\mathrm{d}t.$$

若 F 是一个具有跳跃点 x_j 与跃度 p_j 的分布函数，则令

$$T_F(f)=\sum_{j=1}^{\infty}p_jf(x+x_j),$$

并称 T_F 是与 F 相联系的概率算子.

(1) 设 F,G 为分布函数，则

$$\|T_FT_G(f)\|\leqslant\|T_G(f)\|.$$

(提示：注意 T_F 是线性压缩算子).

(2) 设 T_{F_k} 和 T_{G_k} 为概率算子，则

$$\|T_{F_1}T_{F_2}\cdots T_{F_n}(f)-T_{G_1}T_{G_2}\cdots T_{G_n}(f)\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|T_{F_k}(f)-T_{G_k}(f)\|,$$

特别地，$\|T_F^n(f)-T_G^n(f)\|\leqslant n\|T_F(f)-T_G(f)\|$.

§3　统计与信息不等式

1. **信息不等式(Rao-Cramer 不等式，或 Frechet 不等式)**：设随机向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 取值于 R^n，其概率分布由密度 $p(x\mid\theta)$ 决定，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\theta\in\Omega\subset R^1$，设统计量 $T=T(\xi)$ 满足条件 $E_\theta T=\theta+h(\theta)$.其中 $h(\theta)$ 为可微函数，称为 T 的偏倚，θ 为未知数值参数.Fisher 信息量定义为

$$I(\theta)=E\left[\frac{\partial\ln P(\xi\mid\theta)}{\partial\theta}\right]^2.$$

若 $I(\theta)\neq0$，则 $E_\theta|T-\theta|^2\geqslant\dfrac{[1+h'(\theta)]^2}{I(\theta)}+[h(\theta)]^2$.　(3.1)

特别地，若 T 是 θ 的无偏估计量(即 $E_\theta T=\theta$)，则

$$DT=E_\theta|T-\theta|^2\geqslant\frac{1}{I(\theta)}.\tag{3.2}$$

若(3.2)式关于某个无偏估计量，T 变为等式，则在所有无偏估计类中在最小平方风