1.（1）10；　（2）$\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$；　（3）$-\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda-6$；　(4) $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

2.（判断正确 2 分，理由正确 2 分）
(1)错误，因为映射后的向量是 n 维的，所以只有当矩阵的秩是 n 时才是一对一的映射。
(2)错误，因为矩阵的行阶梯形式并不唯一。
(3)错误，因为例如令 A 和 B 为两个不同的 2 阶置换矩阵，则（A+B）不可逆。
(4)正确，因为两者有相同的特征多项式。
(5)错误，例如单位矩阵是对称的，但是没有不同的特征值。

3.
(1)（过程正确 5 分，计算正确 2 分）
S 的面积是$\left|\det\begin{pmatrix}1 & 5\\3 & 1\end{pmatrix}\right|=14$，又因为$\det A=2$，所以根据第 3 章定理 10 可知，线性变换后 S 的面积是 2×14=28。.

(2)（各个基 3 分，其中过程正确 2 分，结果正确 1 分）
根据题意可知，有$T(1)=3+5t$，$T(t)=-2t+4t^2$ 和$T(t^2)=t^2$，所以它对应以 B 为底的变换矩阵为

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\5 & -2 & 0\\0 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

(3)（特征值求解 6 分，其中每个特征值 1 分，对应特征向量 2 分；矩阵对角化分解 2 分；最后计算结果 2 分，没有化简则只给 1 分）
根据题意可知， 由于原矩阵是下三角阵，所以其特征值为主对角线上的元素，即 a 和 b。
代入后分别计算得其对应特征向量为$\vec{v}_a=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$和$\vec{v}_b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，所以原矩阵可以对角化为

$$\begin{pmatrix}a & 0\\3(a-b) & b\end{pmatrix}=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}$$

所以有

$$\begin{pmatrix}a & 0\\3(a-b) & b\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^k & 0\\0 & b^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^k & 0\\3(a^k-b^k) & b^k\end{pmatrix}$$

(4)（列向量 Gram-Schmidt 正交化正确 6 分，其中每个正交基过程正确 1 分，计算正确 1 分；R 矩阵计算准确 2 分，过程正确 3 分）

根据题目可知，原始矩阵各列由 Gram-Schmidt 正交化得

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}\qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1/2\\ 0\\ 1/2\\ -1/2\\ 1/2\end{pmatrix}\qquad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}1/2\\ 0\\ 1/2\\ 1/2\\ -1/2\end{pmatrix}$$

所以上三角阵 R 为

$$R=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 1 & -4\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -4 & 7\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5}\\ 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

4.

(1)（充分性与必要性证明各占 5 分）

证：记线性变换 T 的标准矩阵为 A，则由于 T 是 R^n 到 R^n 的满射，所以 A 可逆是其充分必要条件。根据第二章定理 9 可知，线性变换 T 可逆也是 A 可逆充分必要条件。

(2)（判断 3 分，理由说明 6 分）

解：一定有解。因为记原线性方程组的系数矩阵为 A，则由题意可知 A 是一个 5×6 的矩阵且原线性方程组的非平凡解中只有一个变量非零；所以 dim Nul A = 1。因此根据秩定理可知 dim Col A = rank A = 6 – 1 = 5，而 R^5 中只有它本身作为子集时维数才是 5。这表示 Col A 就是 R^5，即 A 为系数矩阵的任意一个线性方程组都是相容的。

5.证：

记矩阵 A 的特征值 λ 对应的特征向量是 $\vec{v}$，则根据定义可知 $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$，所以有

$$p(A)\vec{v}=(c_0+c_1A+\cdots+c_nA^n)\vec{v}=(c_0+c_1\lambda+\cdots+c_n\lambda^n)\vec{v}=p(\lambda)\vec{v}$$

这表示 $p(\lambda)$ 就是 $p(A)$ 的一个特征值。