第四章　　归纳与递归（Induction and recursion）

§4.1　数学归纳法

例如：有一个无穷级的梯子，我们想知到我们能否登上每一级梯子。我们知道两件事：

1.我们能登上第一级梯子。

2.如果我们能登上某一级梯子，我们就能登上上一级梯子。

由（1），我们能登上第一级梯子，再由（2），我们能登上第二级梯子，再由（2），我们能登上第3级梯子，继续这个论证,我们能登上第4级、第5级梯子。重复100次步骤(2)，我们可以登上第101级梯子。反复地应用步骤（2），我们可以登上第n级梯子，对任意正整数n成立。

这个证明技术称为数学归纳法(mathematical induction).

一．数学归纳法

1.数学归纳法的步骤：要证明P(n)对所有正整数n成立，其中P(n)是一个命题函数，我们需要两个步骤：

归纳基础：我们验证P(1)为真。

归纳步:我们证明蕴涵式P(k)→P(k+1)对所有正整数k成立。

*假设P(k)为真,称为归纳假设。

*用谓词公式表示数学归纳法:

$$[P(1) \wedge \forall k\big(P(k) \rightarrow P(k+1)\big)] \rightarrow \forall n P(n)$$

2.理解数学归纳法

(1)登无穷级的梯子

(2)n 个人传秘密

(3)多米诺骨牌

二．用数学归纳法证明的例子

1.证明和式

例 1：证明前 n 个正整数的和：$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

解：设 P(n)表示前 n 个正整数的和为$\frac{n(n+1)}{2}$。

归纳基础：验证 P(1)为真，$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$。

归纳步：作归纳假设，设 P(k)为真，即

$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$，在这个假设下证明 P(k+1)为真.

$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$，故 P(k+1)为真.

故 P(n)对任意正整数 n 成立。

例 2：给出前 n 个奇正整数的和的猜想，并用数学归纳法证明。

解：$1=1, 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16,$

$1+3+5+7+9=25,$ 因此我们猜想：

$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$，用归纳法证明：

归纳基础：验证 P(1)成立。$1=1^2$，结论成立。

归纳步：假设$1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$，即 P(k)为真，证明 P(k+1)为真。

$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$

故$P(k) \rightarrow P(k+1)$成立。所以 P(n)对任意正整数 n 成立。

例 4：（几何级数的和式）

$$\sum_{j=0}^{n} ar^{j} = a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{n} = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, (r \neq 1)$$

解：归纳基础：n=0 时，

$$a = \frac{ar^{0+1} - a}{r - 1} = \frac{a(r-1)}{r - 1}$$

归纳步：假设 n=k 时，公式成立，即

$$a + ar + \cdots + ar^{k} = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}$$

证明 n=k+1 时，公式仍成立。

$$a + ar + \cdots + ar^{k} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + ar^{k+1}$$
$$= \frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r-1}$$
$$= \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}$$

故公式对所有非负整数成立。

2. 证明不等式

例 5：证明：$n < 2^{n}$对所有正整数 n 成立。

解：归纳基础：当 n=1 时，$1 < 2^{1}$，结论成立。

归纳步：假设 n=k 时，有$k < 2^{k}$成立。

当 n=k+1 时,$k + 1 < 2^{k} + 1 < 2^{k} + 2^{k} = 2^{k+1}$,故结论成立。

例 6：用数学归纳法证明：$2^{n} < n!$对所有$n \geq 4$ 的正整数 n 成立。(注意：n=1,2,3 时，该不等式不成立)

解：设 P(n)表示$2^{n} < n!$。

归纳基础：n=4 时，$2^4=16<4!=24$，故 P(4)成立。

归纳步：假设 P(k)为真，即$2^{\mathrm{k}}<k!\quad(k\geq 4)$。

证 明 P(k+1) 也 为 真 。 $2^{\mathrm{k+1}}=2\cdot 2^{\mathrm{k}}<2\cdot k!<(\mathrm{k}+1)\mathrm{k}!=(\mathrm{k}+1)!$ 故 P(n)对所有$\mathrm{n}\geq 4$的正整数 n 成立。

例 7：调和数的不等式。

调和数$\mathrm{H_j}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{j}}$

证明：$\mathrm{H}_{2^\mathrm{n}}\geq 1+\frac{\mathrm{n}}{2}$

解：归纳基础：n=0 时，$\mathrm{H}_{2^0}=\mathrm{H}_1=1\geq 1+\frac{0}{2}=1.$

归纳步：假设 n=k 时，结论成立。即$\mathrm{H}_{2^\mathrm{k}}\geq 1+\frac{\mathrm{k}}{2}$.

欲证：$\mathrm{H}_{2^{\mathrm{k+1}}}\geq 1+\frac{\mathrm{k+1}}{2}$ 。

$\mathrm{H}_{2^{\mathrm{k+1}}}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^\mathrm{k}}+\frac{1}{2^\mathrm{k}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{\mathrm{k+1}}}$

$=\mathrm{H}_{2^\mathrm{k}}+\frac{1}{2^\mathrm{k}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{\mathrm{k+1}}}$

$\geq\left(1+\frac{\mathrm{k}}{2}\right)+\frac{1}{2^\mathrm{k}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{\mathrm{k+1}}}$

$\geq\left(1+\frac{\mathrm{k}}{2}\right)+2^\mathrm{k}\cdot\frac{1}{2^{\mathrm{k+1}}}$

$\geq\left(1+\frac{\mathrm{k}}{2}\right)+\frac{1}{2}$

$=1+\frac{\mathrm{k+1}}{2}$ 。

故$\mathrm{H}_{2^\mathrm{n}}\geq 1+\frac{\mathrm{n}}{2}$对所有非负整数 n 成立. (注意$\mathrm{H_j}$是一个发散的级数)。

3. 证明可整除性

例 8：证明：$\mathrm{n}^3-\mathrm{n}$可被 3 整除，其中 n 为正整数。

证明：归纳基础：n=1 时，$1^3-1=0$可被 3 整除。

归纳步：假设 n=k 时，$\mathrm{k}^3-\mathrm{k}$可被 3 整除(k≥ 1)。

当 n=k+1 时，$(k+1)^3-(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)=(k^3-k)+3(k^2+k)$.已知k^3-k能被 3 整除，又因为 3(k^2+k)也能被 3 整除，故$(k+1)^3-(k+1)$能被 3 整除。

4. 证明集合的有关结果

例 9：（有穷集合的子集数）设集合 S 有 n 个元素（n 为非负整数），那么 S 有2^n个子集。

解：设 P(n): n 个元素的集合 S 有2^n个子集。

归纳基础：n=0 时，S 只有一个子集：空集，故 S 有$2^0=1$个子集。

归纳步：假设 n=k 时，P(k)为真，即有 k 个元素的集合 S 有2^k个子集。

当 n=k+1 时，设 T 有 k+1 个元素，a 是 T 中某一个元素，有 T=S $\cup\{a\}$或 S$=T-\{a\}$，那么 S 中有 k 个元素。由归纳假设，S 有2^k个子集，对于 S 中的每一个子集 X，T 中有两个不同的子集 X 和$X\cup\{a\}$。而 S 有2^k个子集，故 T 中有$2\cdot 2^k=2^{k+1}$个不同的子集。

5. 创造性地使用归纳法

例 12：奇数个人扔饼游戏。

有奇数个人站在院子里，任意两个人的距离互不相同。所有人同时朝距离他最近的人扔饼。证明：总有一个人不会被饼打到。

解：设：P(n):表示 2n+1 个人中总有一个人不会被饼打到。

归纳基础：当 n=1 时，共有 2n+1=3 个人。设有 A,B,C 三个人，假设 A 和 B 距离最近，那么 A 和 B 互相扔饼，C 朝 A 或 B 扔饼，因此，C 不会被饼打到。

归纳步：假设 n=k 时，P(k)成立。

现在设 n=k+1，共有 2(k+1)+1=2k+3 个人。设其中 A 和 B 两个人距离最近，故 A 和 B 两人互相扔饼，剩下的 2k+1 人中如果有一个人朝 A 或 B 扔饼，共有 2k+1 人，而扔向这 2k+1 人的饼至多有 2k 个，故有一人不会被饼打到。若这 2k+1 人中没有人向 A 和 B 扔饼，由归纳假设，2k+1 人中总有一人不会被饼打到。在任何情况下，这 2k+3 个人中总有一人不会被饼打到。故 P(k+1)成立。

例 13：设 n 是正整数。证明$2^n \times 2^n$棋盘删去其中一个方格后总能被直角三米诺填充。

*画图略讲（见书 P327, 图 6，图 7）。

三．为什么数学归纳法合理？

1. 良序性质：每一个元素是正整数的集合有一个最小元。

2. 数学归纳法的合理性证明：数学归纳法证明 P(1)成立，并对任意正整数 k，由 P(k)为真推出 P(k+1)为真。假若 P(n)不是对所有正整数 n 成立。令 S={m|m是正整数且 P(m)为假}。显然$1 \notin S$，因为已证 P(1)成立。由良序性质，S 中存在最小元 k+1，因而$k \notin S$且 P(k)成立。由归纳法知，P(k)为真蕴含 P(k+1)

为真，因而$k+1 \notin S$，这与 k+1 是 S 中的最小元矛盾。

四．归纳法证明中常见的错误

例 14：证明：n 条两两不平行的直线交于一个公共点。

“证明：”设 P(n)表示 n 条两两不平行的直线交于一个公共点(n≥ 2)。

归纳基础：当 n=2 时，由平行线的定义，2 条不平行的直线交于一点。故 P(2)得证。

归纳步：假设 P(k)为真，现在设 n=k+1。设$p_1, p_2, \cdots, p_{k+1}$是两两不平行的 k+1 条直线。考虑$p_1, p_2, \cdots, p_k$，由归纳假设，它们交于一个公共点 M，再考虑$p_2, p_3, \cdots, p_{k+1}$，由归纳假设，它们交于一个公共点 N。若 M 和 N 不同，则经过 M 和 N 的直线只能有一条，但$p_2, p_3, \cdots, p_k$都经过 M 和 N，故 M 和 N 是同一点。证毕。

解：这个证明不适用于 k=2 的情形。当 k=2，$p_2, p_3, \cdots, p_k$只有一条直线p_2，上述证明 M 等于 N 不成立。

§4.2 强归纳和良序

一．强归纳法 (strong induction)

强归纳法：要证明 P(n)对所有正整数 n 成立，其中 P(n)是一个命题函数，我们需要以下两步：

归纳基础：我们验证 P(1)为真。

归纳步:我们证明蕴涵式$[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$

对所有正整数 k 成立。

*强归纳法与数学归纳法是等价的。

*任何用数学归纳法能证明的定理，用强归纳法都能证，因为数学归纳法的假设 P(k)是强归纳法的假设$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$中的一部分，如果$P(k) \rightarrow P(k+1)$，则必有$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$。

*强归纳法有时称为第二归纳原理(second principle of mathematical induction)或完全归纳法(complete induction)。

*强归纳法和无穷梯子

强归纳法告诉我们，如果我们做到以下两步，我们可以登上无穷梯子的每一级。

1. 我们能登上第一级梯子；
2. 对每一个正整数 k，如果我们能登上梯子的前 k 级，那么我们能登上梯子的第 k+1 级。

例 1：如果我们能登上无穷梯子的第一、第二级，并且我们知道，如果我们能登上梯子的第 k 级，那么我们能登上梯子的第 k+2 级。用强归纳法证明，我们能登上梯子的每一级。

解：*用数学归纳法没办法证明。

用强归纳法证明：

归纳基础：首先我们验证我们能登上梯子的第一、第二级。

归纳步：假设我们可以登上梯子的第 1 级，第 2 级，…，第 k 级（$k \geq 2$)，现在考虑第 k+1 级。因为我们可以登

上第$\mathrm{k}-1$级（由归纳假设），由我们题目的条件知，我们可以登上第$(\mathrm{k}-1)+2=\mathrm{k}+1$级。故结论得证。

二．用强归纳法证明的例子

例 2：证明：如果 n 是一个大于 1 的整数，那么 n 可以写成素数的乘积.

解：设 P(n)表示 n 可以写成素数的乘积。

归纳基础：P(2)成立，因为 2 可以写成一个素数，即它自己。

归纳步：假设对所有$1<j\leq k$的正整数 j 有 P(j)成立。当 n=k+1 时，如果 k+1 是一个素数，那么 k+1 可以写成它自己。若 k+1 是一个合数，那么 k+1=a · b，其中$1<a\leq k$且$1<b\leq k$，由归纳假设，知 a 可以写成素数的乘积, b 也可以写成素数的乘积，故 k+1=a · b也可以写成 a 中的那些素数和 b 中的那些素数的乘积。

例 3：（取火柴游戏）假设有两堆一样多的火柴，由两个人轮流取火柴，每人每次从一堆中取任意正整数根火柴，最后取火柴的那个人赢。证明：第二个取的人总能够赢。

解：设一开始两堆火柴中各有 n 根火柴。设 P(n)表示在这种情况下，第二个人一定能赢。

归纳基础：当 n=1 时，第一个人在一堆中取一根火柴，第二个人只需在另一堆中取一根火柴，就赢了。故 P(1)成立。

归纳步：假设两堆火柴各有 j 根(1≤ j ≤ k)时，P(j)成立。

现在设两堆火柴各有 k+1 根。若第一个人在一堆中取 k+1

根火柴，则第二个人在剩下的另一堆中也取 k+1 根，则第二个人就赢了。如果第一个人在一堆中取 r$(1 \le \mathrm{r} < k+1)$根火柴，那么第二个人也在另一堆火柴中取 r 根，这时，两堆火柴各剩$\mathrm{k}+1-\mathrm{r} < k+1$根，由归纳假设，$\mathrm{P}(\mathrm{k}+1-\mathrm{r})$成立，故第二个人总能赢。

例 4：证明总数大于或等于 12 分的邮费可仅用 4 分和 5 分的邮票表示。

解：设 P(n)表示 n 分钱的邮费可用 4 分和 5 分的邮票表示。

用数学归纳法证明：

归纳基础：12 分的邮费可用 3 张 4 分的邮票表示。

归纳步：假设 P(k)为真。现在证 n=k+1 时，P(n)为真。因为 k 分钱的邮票可用 4 分和 5 分的邮票表示，若其中至少有一个 4 分的邮票，那么将它换成 5 分的邮票就证明了 P(k+1)。若 k 分钱邮费全部是 5 分钱的邮票，因为$\mathrm{k} \ge 12$，全部是 5 分的邮票则$\mathrm{k} \ge 15$，其中至少有 3 张 5 分的邮票，将其中 3 张 5 分的邮票换成 4 张 4 分的邮票，就可以表示 k+1 分钱。故 P(k+1)成立。

用强归纳法证明：

归纳基础：可以验证 12，13，14 和 15 分钱可用 3 张 4 分，2 张 4 分 1 张 5 分，1 张 4 分 2 张 5 分和 3 张 5 分邮票表示。故 P(12), P(13), P(14)和 P(15)成立。

归纳步：由归纳假设知 P(j)对 12$\le$ j $\le \mathrm{k}$成立且$\mathrm{k} \ge 15$。要证

P(k+1)成立。因为$P(k-3)$成立且$k-3\geq 12$，因此，在$k-3$分钱的邮票中加一张 4 分的邮票，就能表示 k+1 分钱的邮费了，故 P(k+1)成立。

三．使用良序性质证明

1. 良序性质(Well-ordering property)：每个非空的非负整数的集合都一定有一个最小元。

*良序性质和数学归纳法、强归纳法都是等价的，其中任意一个的正确性都可以用另外两个之一来证明。

2.例子：

例 5：用良序性质证明除算法。即：如果 a 是一个整数且 d 是一个正整数，那么存在唯一的整数 q 和 r，使得 a=dq+r 且 $0\leq \mathrm{r}<d$。

解：设 S 是具有形式$a-dq$的所有非负整数的集合，其中 q 是一个整数。这个集合 S 是非空集，因为我们可以取 q 为负整数，因而使$-dq$尽可能大。由良序性质，S 有一个最小元 $r=a-dq_0$.

由集合 S 的要求，r 为非负数，同时有$r<d$。假若不然，有 $r\geq d$。由于$a=dq_0+r$，因而有$a-d(q_0+1)=(a-dq_0)$ $-d=r-d\geq 0$，$r-d$是 S 中比 r 更小的元素，这与 r 是 S 中的最小元的结论矛盾。故存在$q=q_0$和 r($0\leq r<d$)使得 $a=dq+r$。

再证 r 和 q 是唯一的。由于 r 是满足$a-dq$的最小非负整

数，假若还有一个r_1也满足$a-dq_1$是非负整数且$0 \le r_1 < d$，若

$r_1 < r$，这与 r 是最小元的假设矛盾；若$r_1 > r$，由于$r_1 = a - dq_1 > r = a - dq$，从而有$q > q_1$，即$q \ge q_1 + 1$，从而$r_1 \ge r + d$，这与$0 \le r_1 < d$矛盾。故$r_1 = r$。由$r_1 = a - dq_1 = r = a - dq$知，$q_1 = q$。从而 r 和 q 是唯一的。

作业：

1. 用数学归纳法证明和式: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$.
2. 用数学归纳法证明: 2 整除$n^2 + n$, 其中 n 是一个正整数。
3. 设 P(n)表示 n 分钱的邮费可以只用 4 分和 7 分的邮票表示。用强归纳法证明 P(n)对$n \ge 18$的所有整数成立。
4. 用强归纳法证明每一个正整数 n 可以写成 2 的不同的幂的和。