



# 普通物理学

山东大学  
余丰人

# 第17章 电磁感应

## § 1 法拉第电磁感应定律

## § 2 动生电动势

## § 3 感生电动势

## § 4 自感和互感

## § 5 磁场的能量

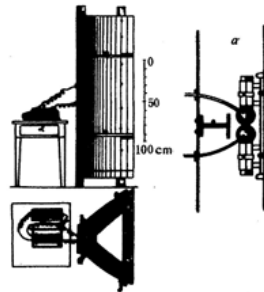
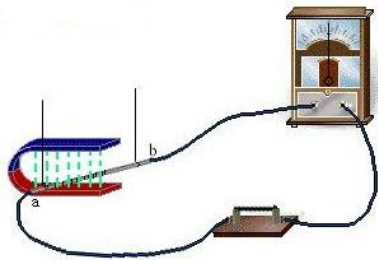
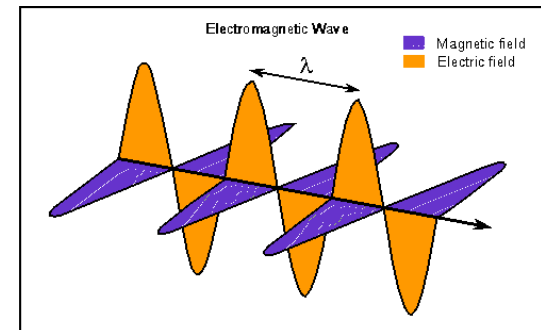


图 4 赫兹的电磁波实验



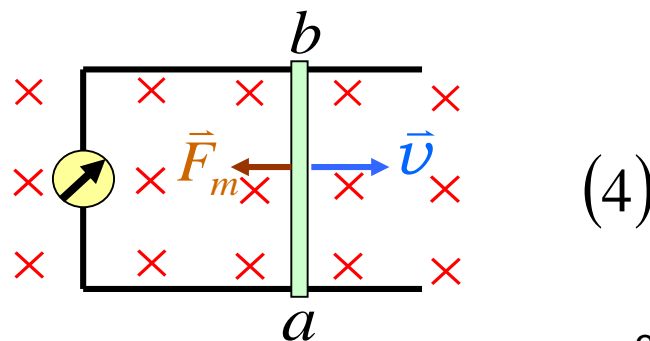
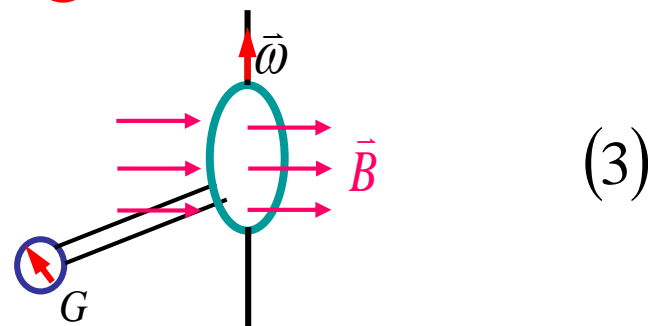
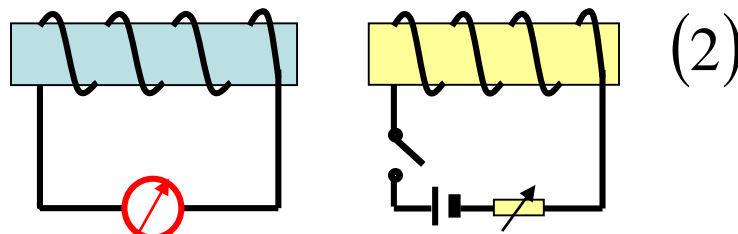
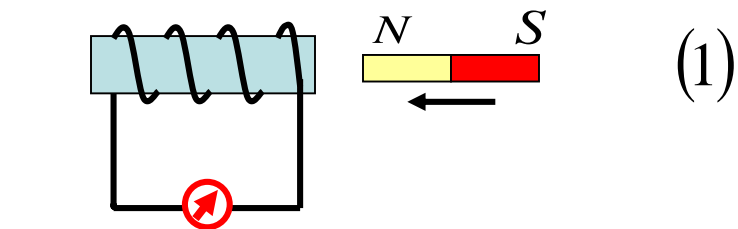
# § 1 法拉第电磁感应定律

## 1. 电磁感应现象

当穿过一个闭合导体回路所包围的面积内的磁通量发生变化时（不论这种变化是由什么原因引起的），在导体回路中就有电流产生。这种现象称为**电磁感应现象**。

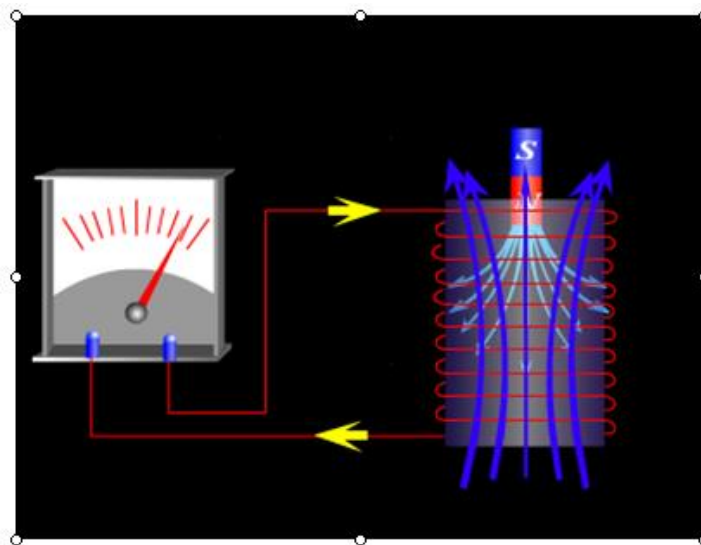
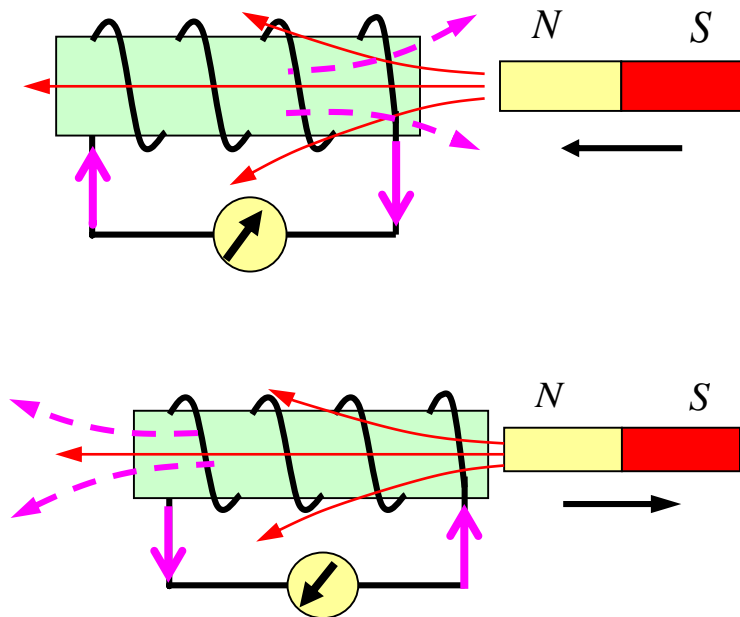
回路中所产生的电流称为**感应电流**。

相应的电动势则称为**感应电动势**。



## 2. 楞次定律

判断感应电流方向的**楞次定律**: 闭合回路中产生的感应电流具有确定的方向, 它总是使感应电流所产生的通过回路面积的磁通量, 去补偿或者反抗引起感应电流的磁通量的变化。





## 注意：

- (1) 感应电流所产生的磁通量要阻碍的是磁通量的变化，而不是磁通量本身。
- (2) 阻碍并不意味着抵消。如果磁通量的变化完全被抵消了，则感应电流也就不存在了。

楞次(1804~1865)俄国物理学家。1831年法拉第发现了电磁感应现象后，当时已有许多便于记忆的“左手定则”、“右手定则”、“右手螺旋法则”等经验性规则，但是并没有给出确定感生电流方向的一般法则。1833年楞次在总结了安培的电动力学与法拉第的电磁感应现象后，发现了确定感生电流方向的定律——楞次定律。楞次定律说明电磁现象也遵循能量守恒定律。



楞次

### 3. 法拉第电磁感应定律

叙述:导体回路中的感应电动势 $\varepsilon$ 的大小与穿过导体回路的磁通量的变化率成正比。

$$\varepsilon_i = -k \frac{d\Phi}{dt}$$

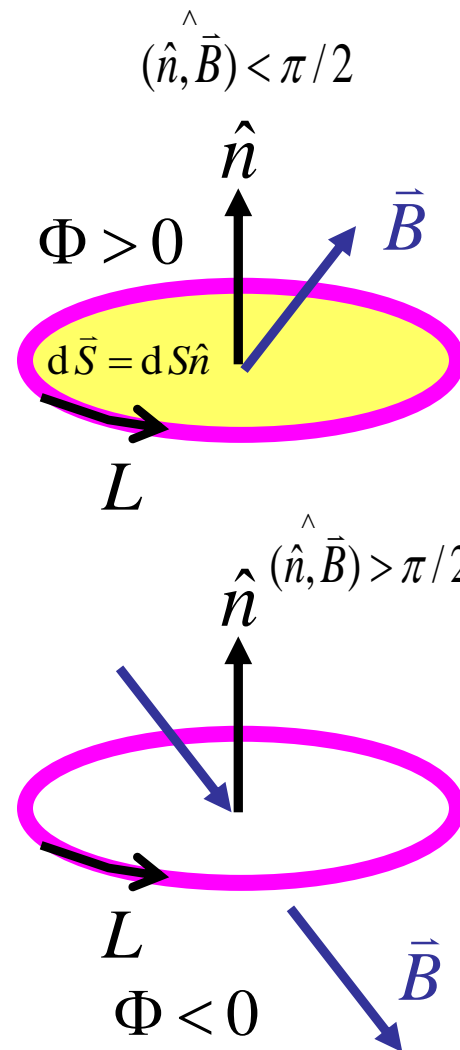
国际单位制中 $k=1$ ,  
负号是楞次定律的要求。

电动势方向:

先选定回路绕行方向,  
然后确定 $\Phi$ 的符号。  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

若 $d\Phi/dt > 0$ , 则 $\varepsilon < 0$   $\varepsilon_i$ 与 $L$ 反向。

若 $d\Phi/dt < 0$ , 则 $\varepsilon > 0$   $\varepsilon_i$ 与 $L$ 同向。



若有 $N$ 匝线圈，彼此串联，总电动势等于各匝线圈所产生的电动势之和。令每匝的磁通量为 $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$ 、 $\Phi_3 \dots$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} \dots$$

磁通链数（或全磁通）：

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots)}{dt}$$

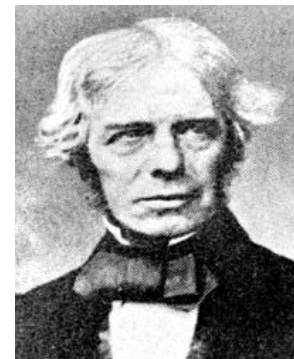
若每匝磁通量相同

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

设闭合导体回路中的总电阻为 $R$ ，由全电路欧姆定律得回路中的感应电流为：

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

法拉第于1791年出生在英国伦敦附近的一个小村里，父亲是铁匠，自幼家境贫寒，无钱上学读书。13岁时到一家书店里当报童，次年转为装订学徒工。



法拉第，M.

在学徒工期间，法拉第除工作外，利用书店的条件，在业余时间贪婪地阅读了许多科学著作，例如《化学对话》、《大英百科全书》的《电学》条目等，这些著作开拓了他的视野，激发了他对科学的浓厚兴趣。

1812年，学徒期满，法拉第打算专门从事科学研究。次年，经著名化学家戴维推荐，法拉第到皇家研究院实验室当助理研究员。在戴维的支持和指导下做了许多化学方面的研究工作。



1821年法拉第读到了**奥斯特**的描述他发现电流磁效应的论文《关于磁针上的电碰撞的实验》。该文给了他很大的**启发**，使他开始研究电磁现象。经过**十年**的实验研究，在1831年，他终于发现了电磁感应现象。

1833年，法拉第发现了电解定律，1837年发现了电解质对电容的影响，引入了**电容率**概念。1845年发现了磁光效应，后又发现物质可分为**顺磁质**和**抗磁质**等。

1851年，曾被一致推选为英国皇家学会会长，但被他坚决**推辞**掉了。1867年8月25日，他坐在书房的椅子上安祥地离开了人世。遵照他的遗言，在他的墓碑上只刻了名字和生死年月。

## 例：用感应电动势测铁磁质中的磁感应强度

冲击电流计的最大偏转  
与通过它的电量成正比

铁磁样品做的环

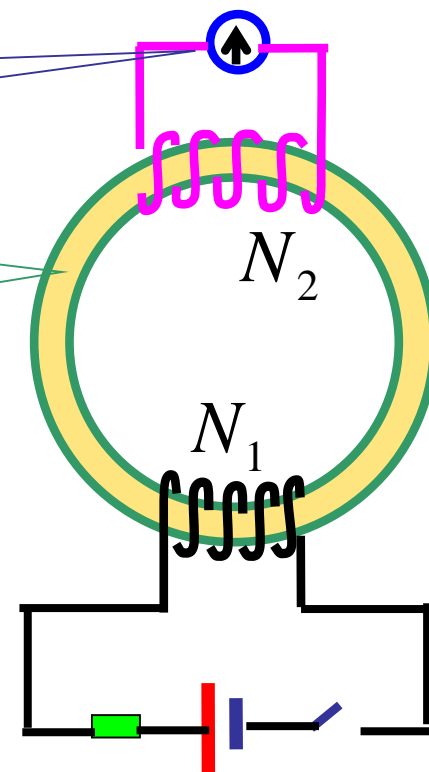
$S$ 表示环的截面积

当合上 $N_1$ 线圈的开关，电流增大，它在铁环中的磁场增强，在 $N_2$ 线圈中有感应电动势产生。

$$\therefore |\varepsilon_i| = \frac{d\Psi}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = N_2 S \frac{dB}{dt}$$

$N_2$ 线圈的总电阻是 $R$ ，产生的电流为：

$$\therefore i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{N_2 S}{R} \cdot \frac{dB}{dt}$$

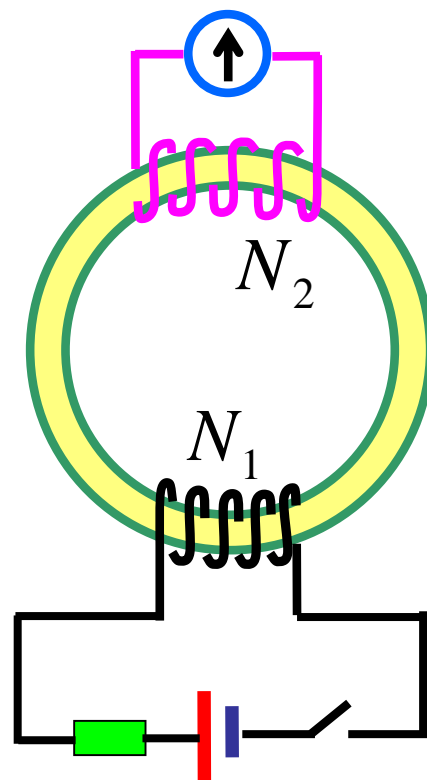


$N_1$ 线圈电流增大到  $I$  所需时间为  $\tau$ ，则在同一时间内通过  $N_2$  回路的电量为：

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad q = \int dq = \int i dt$$

$$q = \int_0^\tau i \cdot dt = \int_0^\tau \frac{N_2 S \cdot dB}{R \cdot dt} \cdot dt = \frac{N_2 S B}{R}$$

$$\therefore B = \frac{qR}{N_2 S} \quad \text{用冲击电流计测量 } q \text{ 就可算出磁感应强度。}$$



这是一种测量磁介质中磁感应强度的方法。

## 4.感应电动势的两种形式

磁通量与磁感应强度的关系为：

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

法拉第电磁感应定律可以改写为：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

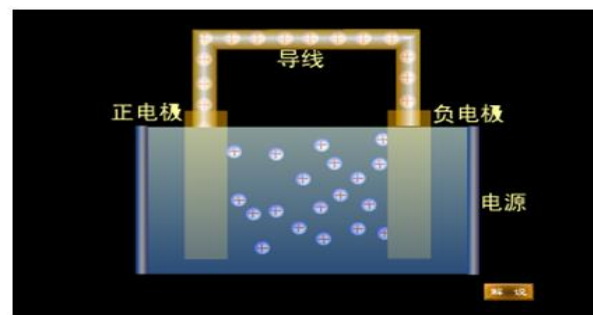
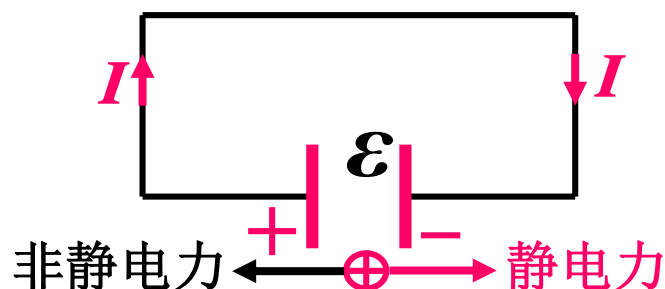
如果磁感应强度不随时间变化，导体线圈切割磁感应线运动，导体线圈中的磁通量将发生变化，这时产生的感应电动势叫**动生电动势**；

如果导体线圈不运动，磁感应强度随时间变化，导体线圈中的磁通量将发生变化，这时产生的感应电动势叫**感生电动势**。

## 5. 电动势与非静电场

电磁感应 在闭合电路中形成感应电流的原因是电磁感应在闭合电路中产生了感应电动势，从本质上讲，电动势是由非静电力产生的，也就是电磁感应产生了非静电力。

在闭合电路中要形成闭合电流，要靠电源提供某种非静电力。在化学电池中，非静电力就是化学力



内电路非静电力所作的功等于外电路静电力所作的功。电动势是非静电力对单位正电荷所作的功，即：

$$\varepsilon_k = A_k / q = \int_{-}^{+} \vec{F}_k \cdot d\vec{l} / q = \oint_l \vec{F}_k \cdot d\vec{l} / q$$



定义非静电场强 $\vec{E}_k$ ，为单位正电荷所受的非静电力：

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q} \quad \vec{F}_k = q\vec{E}_k$$

用非静电场强 $\vec{E}_k$ 表示的电动势为：

$$\varepsilon_k = \frac{A_k}{q} = \frac{\int_{-}^{+} \vec{F}_k \cdot d\vec{l}}{q} = \frac{\oint_l \vec{F}_k \cdot d\vec{l}}{q} = \frac{\oint_l q\vec{E}_k \cdot d\vec{l}}{q} = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

电磁感应产生的力为非静电力，场强为非静电场强，因此，电磁感应定律可以表示为：

$$\because \varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \quad \text{而} \quad \varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

## § 2 动生电动势

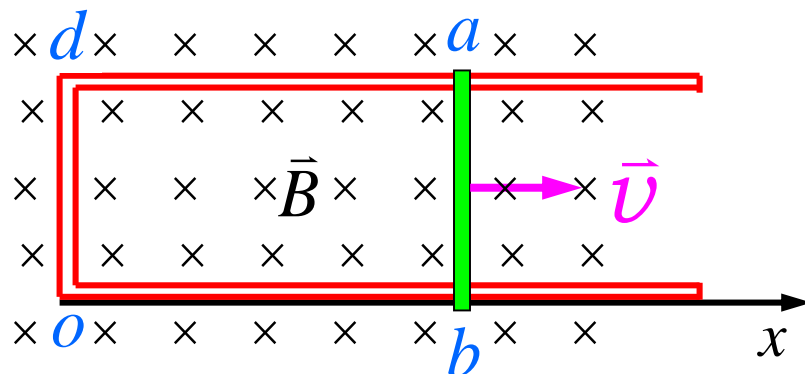
### 1. 磁场中运动导线内的动生电动势

例：矩形框导体的一边 $ab$ 可以平行滑动，长为 $l$ 。整个矩形回路放在磁感强度为 $B$ 、方向与其平面垂直的均匀磁场中，如图所示。若导线 $ab$ 以恒定的速率 $v$ 向右运动，求闭合回路的感应电动势。

解：以固定边的位置为坐标原点，向右为 $x$ 轴正方向。设 $t$ 时刻 $ab$ 边的坐标为 $x$ ，取顺时针方向为 $bodab$ 回路的绕行正方向，则该时刻穿过回路的磁通量为：

$$\Phi = BS = Blx$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$



负号表示感应电动势的方向与回路的正方向相反，即沿回路的逆时针方向。

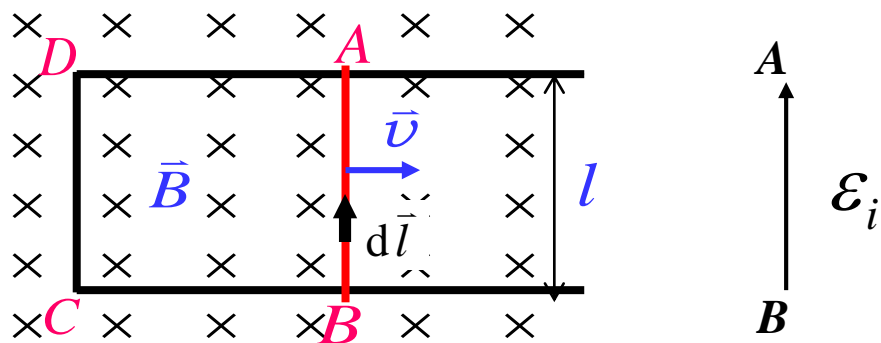
## 2. 动生电动势的本质

动生电动势的本质是洛伦兹力，洛伦兹力是非静电力，它形成了非静电场，非静电场产生了动生电动势。

$$\text{洛伦兹力: } \vec{f}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\text{非静电场强: } \vec{E}_k = \frac{\vec{f}_L}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{动生电动势: } \varepsilon = \int_B^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBl$$



## 注意

1). 运用公式  $d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$      $\varepsilon_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

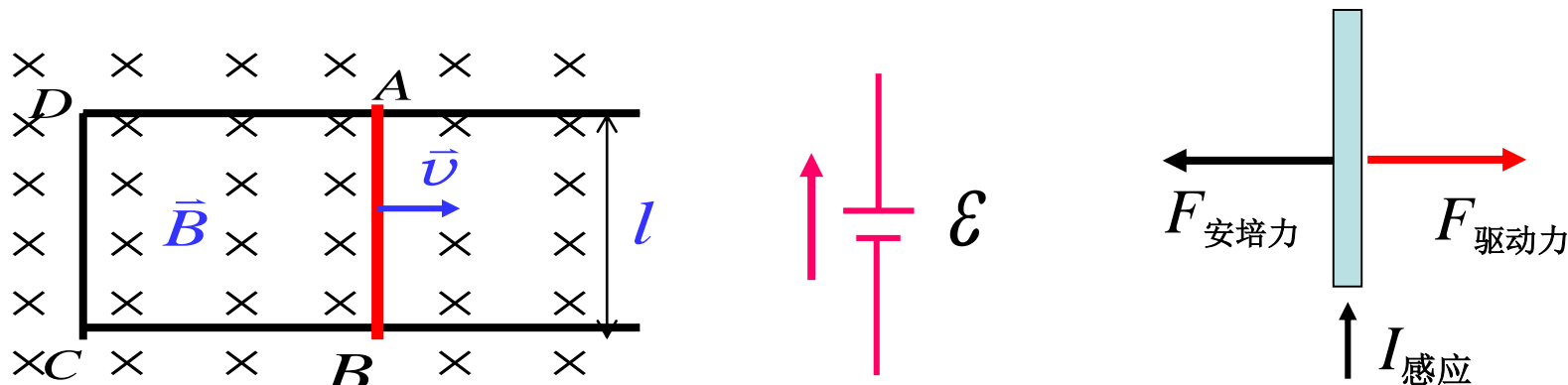
在一般情况下，磁场可以不均匀，导线在磁场中运动时各部分的速度也可以不同， $\vec{v}$ 、 $\vec{B}$  和  $\vec{l}$  也可以不相互垂直，这时运动导线内总的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

由上式可以看出，矢积  $\vec{v} \times \vec{B}$  与  $d\vec{l}$  成锐角时， $\varepsilon_i$  为正；成钝角时， $\varepsilon_i$  为负。因此，由上式算出的电动势有正负之分， $\varepsilon_i$  为正时，表示电动势方向顺着  $\vec{l}$  的方向； $\varepsilon_i$  为负时，则表示电动势的方向逆着  $\vec{l}$  的方向。

对于闭合回路：  $\varepsilon_i = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

## 2). 感应电流在磁场中受安培力的作用: $I_{\text{感应}} d\vec{l} \times \vec{B}$



### 功能转换关系的分析

导体棒AB运动 $\rightarrow$ 动生电动势 $\mathcal{E} \rightarrow$ 回路中产生感应电流 $I \rightarrow$   
感应电动势 $\mathcal{E}$  做功 $\rightarrow$ 功率 $P$ :  $P = I\mathcal{E} = BIlv$

$AB$  段受安培力 $F=IlB$ , 方向向左。如要保持匀速向右运动, 必须施加与之大小相等方向相反的外力, 此外力的功率为:

$$P' = Fv = BIlv$$

电路中感应电动势的电能是由外力所做机械功转换而来——发电机内能量转换关系。



例:长为 $L$ 的铜棒在磁感强度为 $B$ 的均匀磁场中, 以角速度 $\omega$ 在与磁场方向垂直的平面内绕棒的一端 $O$ 匀速转动, 如图所示, 求棒中的动生电动势。

解: 取 $dl$   $v = \omega l$

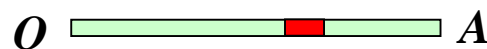
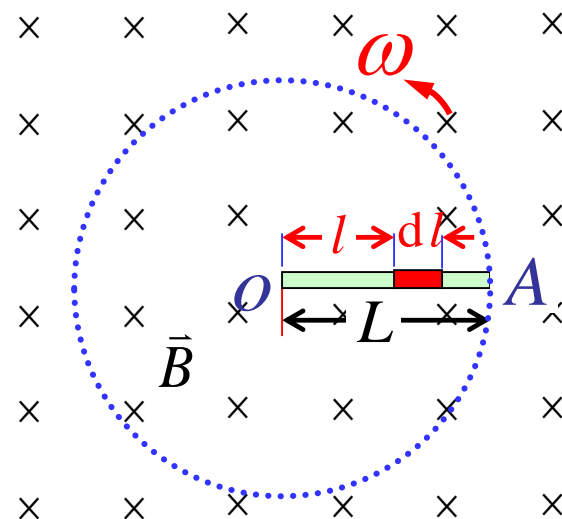
$\vec{v}$ 、 $\vec{B}$ 、 $d\vec{l}$  相互垂直,

$dl$  上的电动势

$$|d\varepsilon_i| = |(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}| = vB dl$$

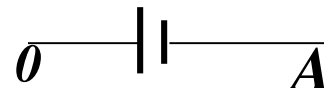
由于所有小段上产生的动生电动势的方向都相同, 所以, 金属棒中总电动势为

$$|\varepsilon_i| = \int_0^L Bv dl = \int_0^L B\omega l dl = \frac{1}{2} B\omega L^2$$



$$d\varepsilon_i \longleftarrow \vec{v} \times \vec{B}$$

$\varepsilon$ 的指向是从A到O



$$U_O > U_A$$

例：直导线 $ab$ 以速率 $\boldsymbol{v}$ 沿平行于长直载流导线的方向运动， $ab$ 与直导线共面，且与它垂直，如图所示。设直导线中的电流强度为 $I$ ，导线 $ab$ 长为 $L$ ， $a$ 端到直导线的距离为 $d$ ，求导线 $ab$ 中的动生电动势，并判断哪端电势较高。

解：应用  $\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$  求解

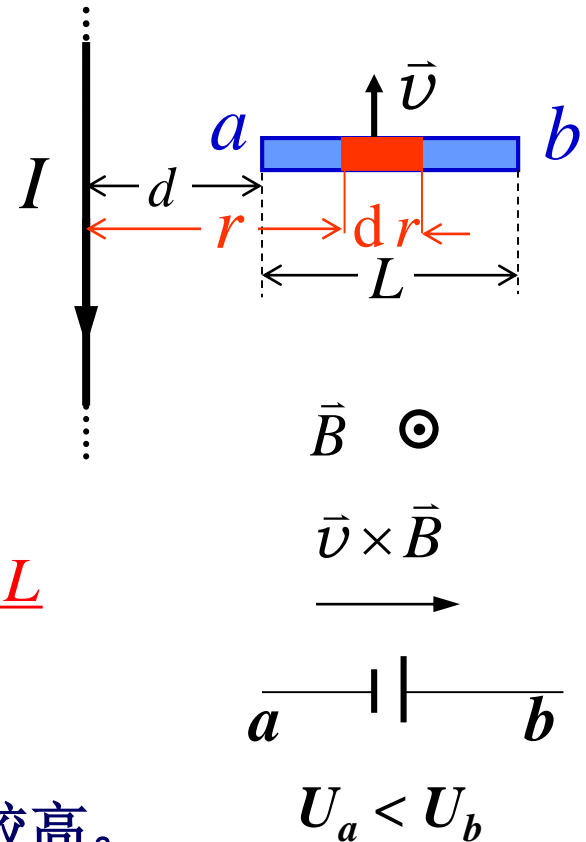
在导线 $ab$ 所在的区域，长直载流导线在距其 $r$ 处取一线元 $dr$ ，方向向右。

$$d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = vB dr = \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr$$

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b d\varepsilon = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

$$\varepsilon_{ab} > 0$$

表明电动势的方向由 $a$ 指向 $b$ ， $b$ 端电势较高。



### 3. 在磁场中转动的线圈内的感应电动势

设矩形线圈 $ABCD$ 的面积为 $S$ , 总匝数为 $N$ , 使这线圈在匀强磁场中绕固定的轴线 $OO'$ 转动。

当 $t=0$ 时, 线圈与 $B$ 平行, 经过时间 $t$ , 如图所示。

$$\Phi = BS \cos \theta$$

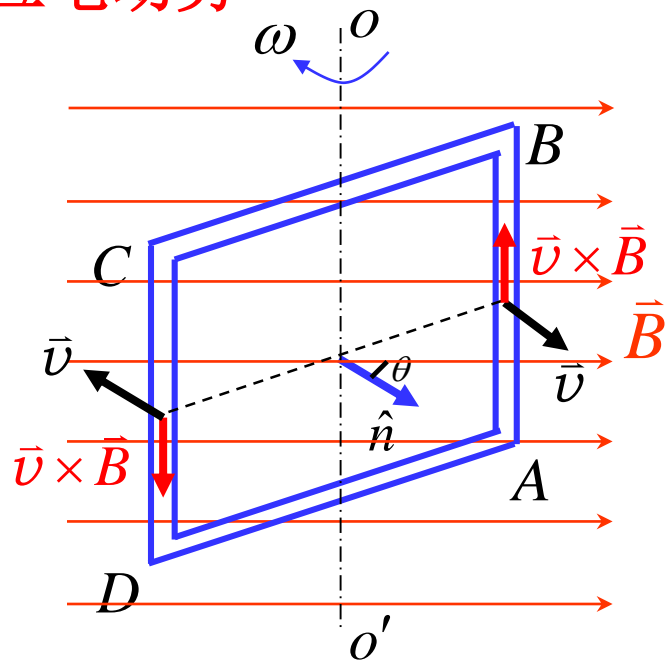
$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\because \theta = \omega t$$

$$\therefore \varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t \quad \text{令 } NBS\omega = \varepsilon_0$$

$$\text{则 } \varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$



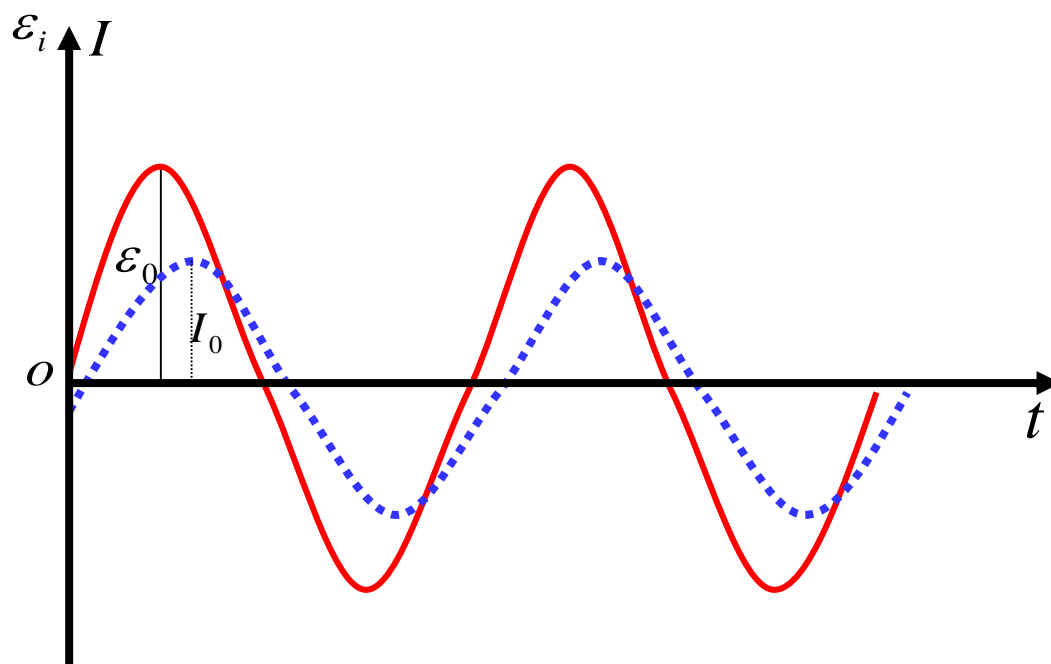
$$\text{按动生电动势 } \varepsilon_i = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_{\text{动生}} = 2Nv\overline{AB} \sin \theta$$

$$v = \frac{\overline{DA}}{2} \omega \quad \overline{AB} \cdot \overline{DA} = S$$

$$\varepsilon_{\text{动生}} = NBS\omega \sin \omega t$$

在匀强磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的，这种电动势称为**交变电动势**。在交变电动势的作用下，线圈中的电流也是交变的，称为**交变电流或交流**。



$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

## § 3 感生电动势

穿过导体回路的磁通量发生变化时，在回路中产生的感应电动势称为感生电动势。

实验发现这个感生电动势的大小、方向与导体的种类和性质无关，仅由变化的磁场本身引起。

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

产生感生电动势的非静电力不可能是洛仑兹力，只能是变化的磁场本身。

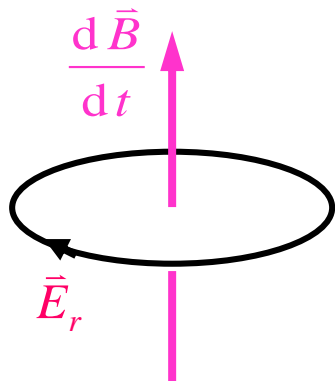
**Maxwell 感生电场（涡旋电场）假设**

**Maxwell** 1861年首先从理论上预言**涡旋**电场的存在，后被**Hertz**的电磁波实验所证实。



## Maxwell假设:

变化的磁场要在其周围空间激发一种电场——**涡旋**电场



左手螺旋关系

**涡旋**电场  $E_r$  的电力线象涡旋一样是无头无尾的闭合线→涡旋电场。其对电荷的作用力是产生感生电动势的非静电力。

**感生电动势定义为涡旋电场的环流，即**

$$\varepsilon_{\text{感生}} = \oint_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l}$$

由电磁感应定律，回路中的感生电动势也可表示为：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

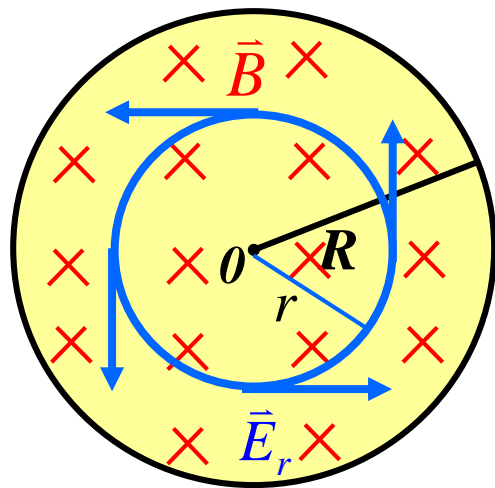
利用涡旋电场加速电子的加速器已在核物理和医学上得到广泛的应用。

$$\oint_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

金属导体中涡旋电场的存在将以涡电流的形式表现出来。

例：半径为 $R$ 的圆柱形空间内存在垂直于纸面向里的均匀磁场，当磁感应强度 $B$ 以 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 的变化率均匀增加时，求圆柱形空间内各点处感生电场的场强 $E_r$ 。

解：作一半径为 $r$ 的假想回路，  
通过回路所包围面积的磁通量 $\Phi_m = B\pi r^2$ ，  
回路上各点感生电场 $E_r$ 的方向（如图）。  
又由对称性，各点感生电场的大小相等。



$$\oint_L \vec{E}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L E_r \cdot \mathrm{d}l = E_r \oint_L \mathrm{d}l = E_r 2\pi r$$

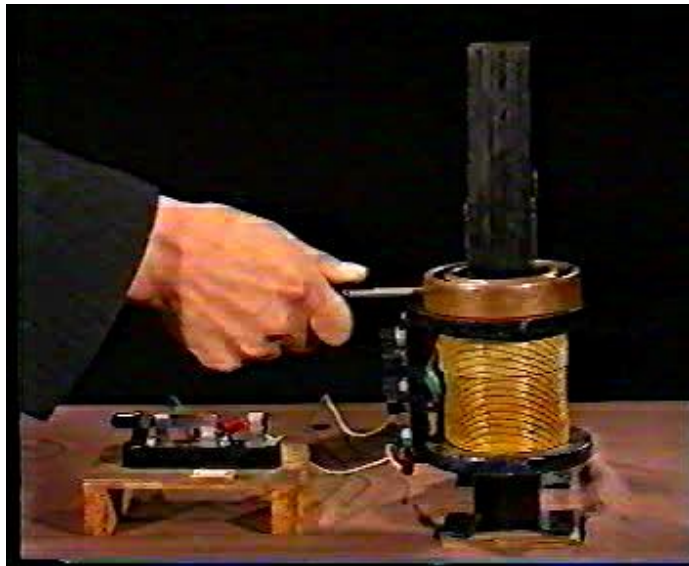
$$\therefore \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2 \quad \text{由} \quad \oint_L \vec{E}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{可求出 } E_r \text{ 的大小为: } E_r 2\pi r = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2$$

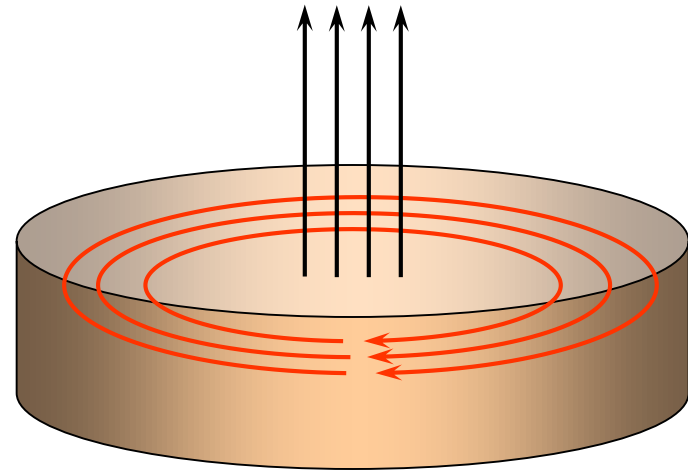
$$\therefore E_r = \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \quad (r < R) \quad \text{方向如图所示。}$$

# 涡电流

将导体放入变化的磁场中时，由于在变化的磁场周围存在着涡旋的感生电场，感生电场作用在导体内的自由电荷上，使电荷运动，形成涡电流。



$$\frac{d\vec{B}}{dt} > 0$$

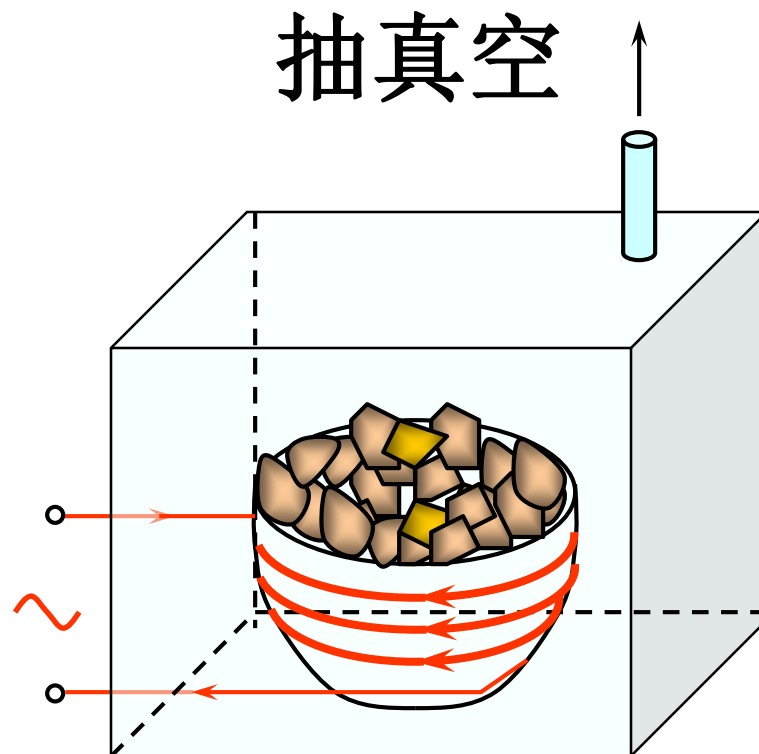


$I_{\text{涡}}$

## 涡电流的应用

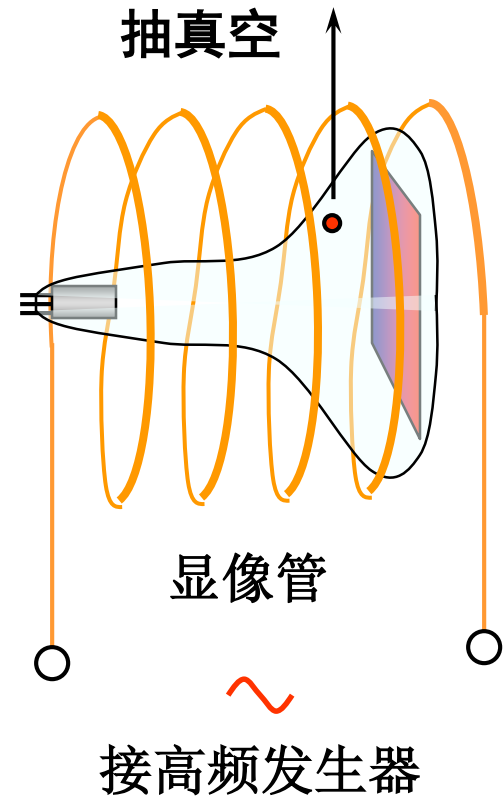
### 1) 工频感应炉的应用

在冶金工业中，某些熔化的活泼稀有金属在高温下容易氧化，将其放在真空环境中的坩埚中，坩埚外绕着通有交流电的线圈，对金属加热，防止氧化。



## 2) 用涡电流加热金属电极

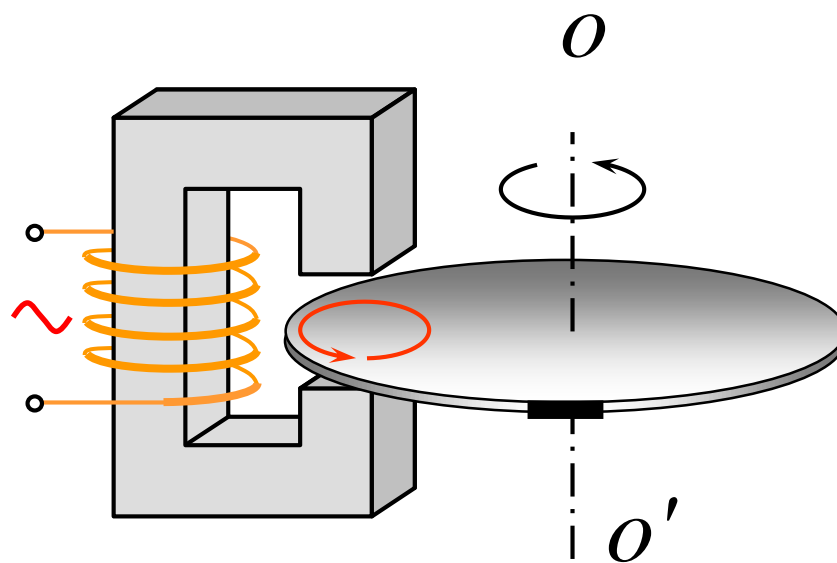
在制造电子管、显像管或激光管时，在做好后要抽气封口，但管子里金属电极上吸附的气体不易很快放出，必须加热到高温才能放出而被抽走，利用涡电流加热的方法，一边加热，一边抽气，然后封口。





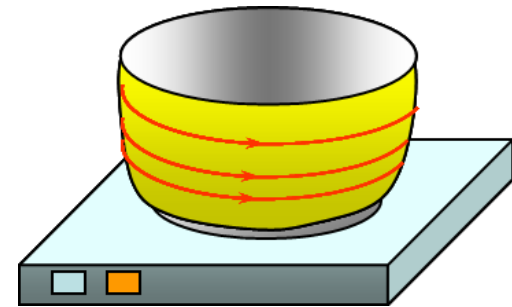
### 3) 电度表记录电量

电度表记录用电量，就是利用通有交流电的铁心产生交变的磁场，在缝隙处铝盘上产生涡电流，涡电流的磁场与电磁铁的磁场作用，表盘受到一转动力矩，使表盘转动。



#### 4) 电磁炉

在市面上出售的一种加热炊具——电磁炉。这种电磁炉加热时炉体本身并不发热，在炉内有一线圈，当接通交流电时，在炉体周围产生交变的磁场，当金属容器放在炉上时，在**容器**上产生涡电流，使容器发热，达到加热食物的目的。



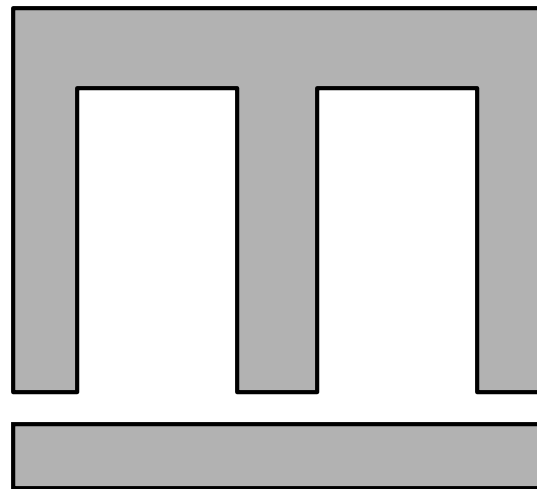
电磁炉不能使用诸如玻璃、铝、铜的容器加热食品，应使用导磁性能较好的材料制成的容器，如铁皮锅、铸铁锅、含铁不锈钢锅，以及底部是含铁材料的锅具等。原因是铁是导磁体，磁场可在整个锅底部分（而非只是锅底表面）产生涡流，而铝、铜等金属不导磁，磁场只能在这些金属的表面产生感应电流。

## 涡电流的危害

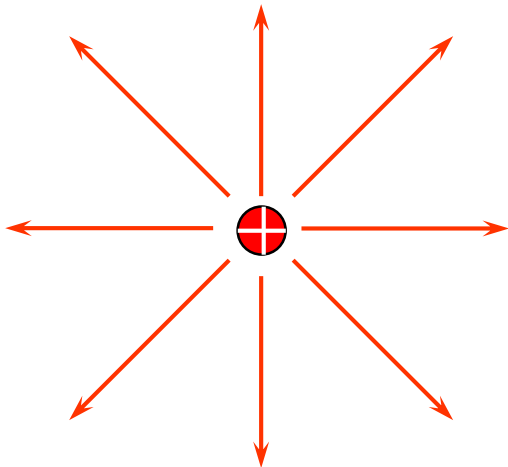
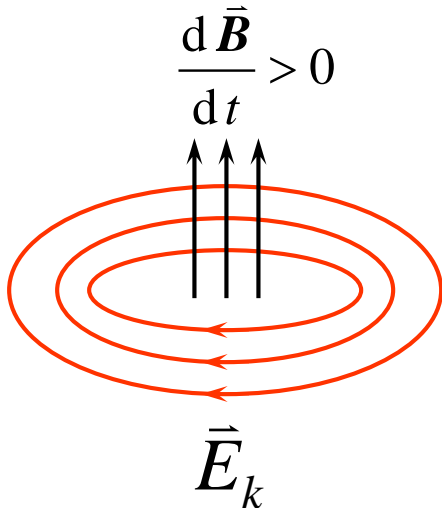
由于涡电流在导体中产生热效应，在制造变压器时，就不能把铁心制成实心的，这样在变压器工作时在铁心中产生较大的涡电流，使铁心发热，造成漆包线绝缘性能下降，引发事故。

因此在制作变压器铁心时，用多片硅钢片叠合而成，使导体横截面减小，涡电流也较小。

对于电动机的转子和定子也都是用片状的软磁性材料叠合制成的。



## 感生电场与静电场的区别

|       | 静电场 $E_0$  | 感生电场 $E_k$   |
|-------|--|--|
| 起源    | 由静止电荷激发  | 由变化的磁场激发   |
| 电力线形状 | <p>电力线为非闭合曲线</p>  <p>静电场为有源场</p> | <p>电力线为闭合曲线</p>  <p>感生电场为无源场</p> |

|       | 静电场 $E_0$  | 感生电场 $E_k$  |
|-------|--|---|
| 电场的性质 | 保守场, 可引入势(能)<br>$\oint_L \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$                                     | 非保守场, 不可引入势(能)<br>$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ |
|       | 静电场为有源场<br>$\oiint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\text{内}} q$ | 感生电场为无源场<br>$\oiint_S \vec{E}_k \cdot d\vec{S} = 0$   |

他们间也有共性：具有场物质形式的所有共性；均对电荷有力的作用，且场强定义相同；在导体中，感生电场可引起电荷的积累从而建立静电场。

## 闭合路径同时出现动生和感生电动势的情况

### 通常用法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

来计算闭合路径中的感应电动势。此方法对动生、感生电动势皆适用。注意此方法直接计算得出的是整个回路的感应电动势，它可能是动生与感生电动势的总和。

例：如图所示，有一弯成 $\theta$ 角的金属架 $COD$ 放在磁场中，磁感应强度 $B$ 的方向垂直于金属架 $COD$ 所在平面，一导体杆 $MN$ 垂直于 $OD$ 边，并在金属架上以恒定的速度 $v$ 向右滑动， $v$ 与 $MN$ 垂直，设 $t=0$ 时， $x=0$ ，求下列两种情况时框架内的感应电动势。

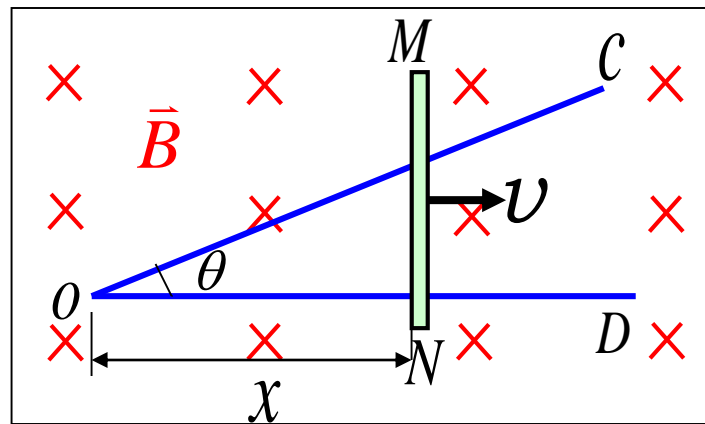
(1) 磁场分布均匀，且 $B$ 不随时间改变

(2) 非均匀的时变磁场  $B=kx\cos(\omega t)$ .

解： (1)  $\Phi_m = BS = B \frac{1}{2} x^2 \tan \theta$

$$= B \cdot \frac{1}{2} v^2 t^2 \tan \theta \quad (x = vt)$$

$$\varepsilon = \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = B v^2 t \cdot \tan \theta$$

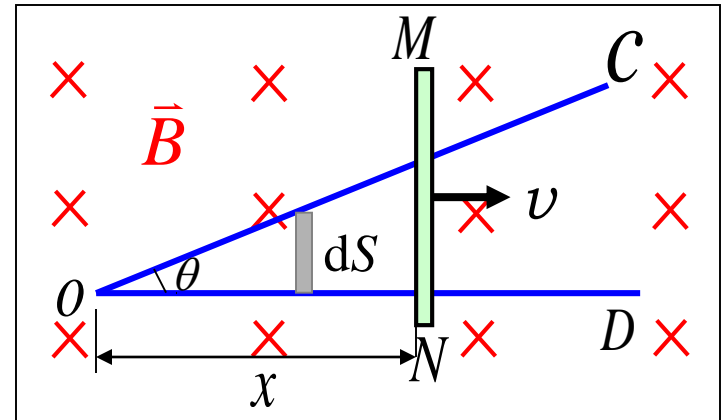


$$\varepsilon_{\text{动生}} = vBl = vBx \tan \theta = Bv^2 t \cdot \tan \theta$$

方向：  $N \rightarrow M$

(2) 非均匀的时变磁场  $B = kx \cos(\omega t)$ .

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_0^x kx \cos(\omega t) \cdot x \tan \theta dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 k \cos(\omega t) \tan \theta\end{aligned}$$



$$(dS = x \tan \theta dx)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \text{因为 } x = vt, \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \text{所以}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} x^3 k \omega \sin(\omega t) \tan \theta - k \cos(\omega t) \tan \theta \cdot x^2 \frac{dx}{dt}$$

感生电动势

动生电动势



$$\varepsilon = \frac{1}{3} v^3 t^3 k \omega \tan \theta \sin(\omega t) - k v^3 t^2 \tan \theta \cos(\omega t)$$

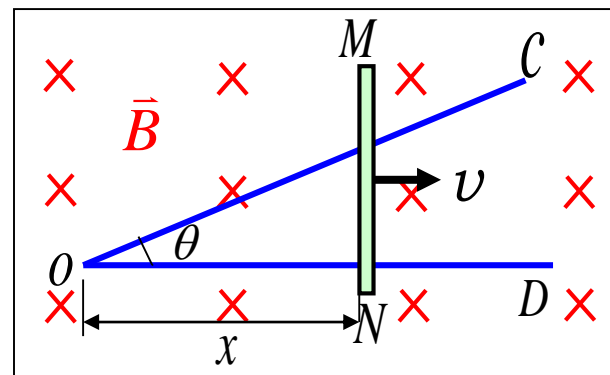
思考：如何求感生电动势？

$$\Phi_m = \frac{1}{3} x^3 k \cos(\omega t) \tan \theta$$

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad \textcolor{red}{x \text{ 不变，只对 } t \text{ 求导数。}}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 k \omega \sin(\omega t) \tan \theta$$

$$= \frac{1}{3} v^3 t^3 k \omega \tan \theta \sin(\omega t)$$

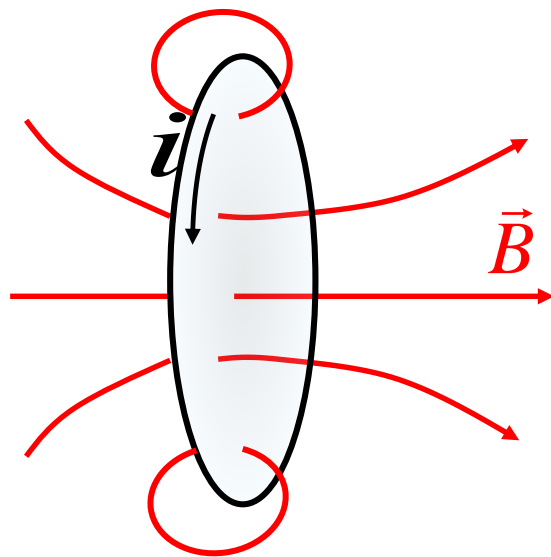


## § 4 自感和互感

在实际的**电路**中，磁场的变化常常是由于电流的变化引起的，因此，把感应电动势直接和电流的变化联系起来是有重要实际意义的。互感和自感现象的研究就是要找出这方面的规律。

### 1. 自感应

**自感现象** 由于回路中电流产生的磁通量发生变化，而在自己回路中激发感应电动势的现象叫做**自感现象**，这种感应电动势叫做**自感电动势**。



全磁通与回路的电流成正比： $\Psi = Li$

称  $L$  为自感系数，简称自感或电感。

单位：亨利  $H$

物理意义：一个线圈中通有单位电流时，通过线圈自身的磁通链数，等于该线圈的自感系数。

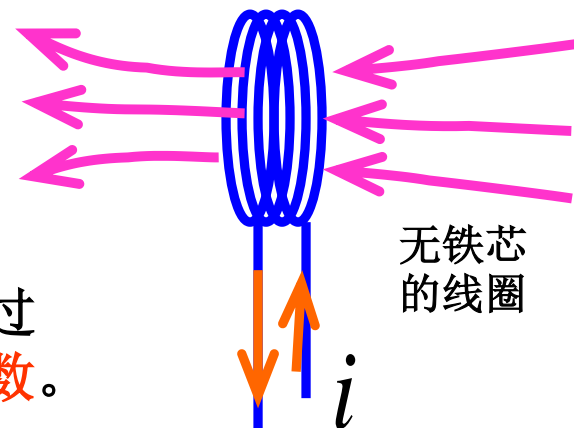
它取决于回路的大小、形状，线圈的匝数以及它周围的磁介质的分布。

由电磁感应定律，自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

自感电动势的方向总是要使它阻碍回路本身电流的变化。

自感  $L$  有维持原电路状态的能力， $L$  就是这种能力大小的量度，它表征回路电磁惯性的大小。



$$\Psi = N\Phi$$

磁(通)链数或全磁通

根据毕奥—萨伐尔定律

$$B \propto I \Rightarrow \Psi \propto I$$

$$\Psi = Li$$

电流强度变化率为一个单位时，在这个线圈中产生的感应电动势等于该线圈的自感系数。

实验上，常用测电流强度*i*和磁通链数 $\Psi$ 来计算自感系数*L*。

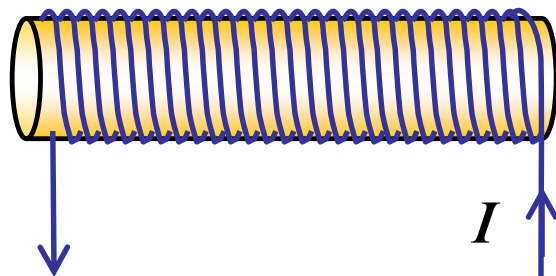
例：计算一长直螺线管的自感系数，设螺线管长为*l*，截面积为*S*，总匝数为*N*，充满磁导率为 $\mu$ 的磁介质，且 $\mu$ 为常数。

解：设螺线管通有电流*I*时，管内的磁感应强度：

$$B = \mu n I = \mu \frac{N}{l} I$$

$$\Psi = N\Phi = NBS = \mu \frac{N^2 S}{l} I$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu \frac{N^2 S}{l} \quad V_{\text{体积}} = lS, \quad n = \frac{N}{l}; \quad L = \mu n^2 V$$



**例：**由两个“无限长”的同轴圆筒状导体所组成的电缆，其间充满磁导率

为 $\mu$ 的磁介质，电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流 $I$ 大小相等而方向相反。设内外圆筒的半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，求电缆单位长度的自感。

**解：**应用安培环路定理，可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间中磁感应强度都为零。在内外两圆筒之间，离开轴线距离为 $r$ 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

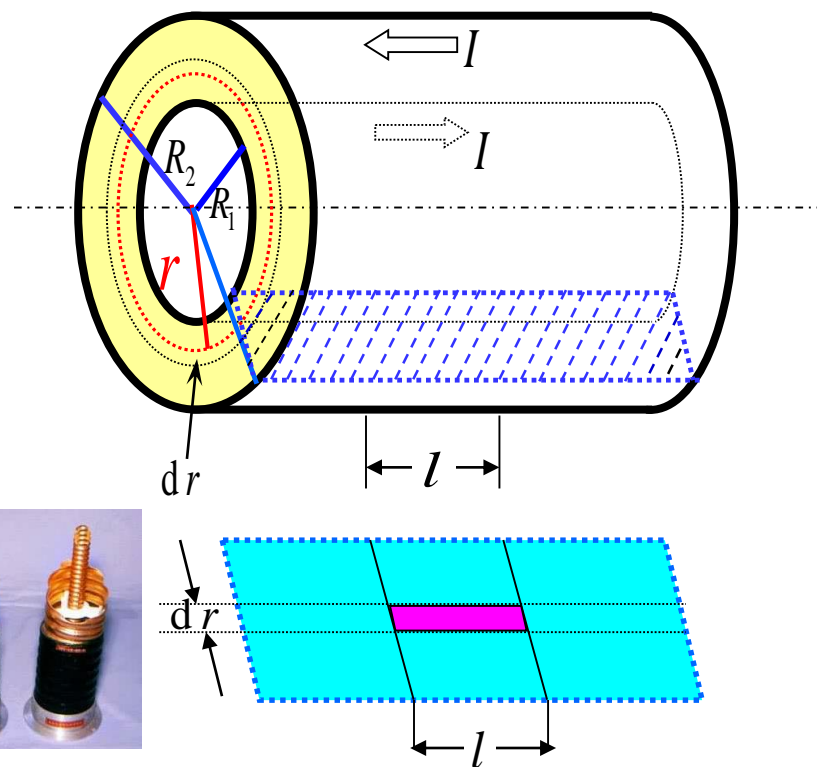
在内外圆筒之间，取如图所示的截面。

然后，在截面上取面元  $dS = l dr$

$$d\Phi = B dS = B l dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

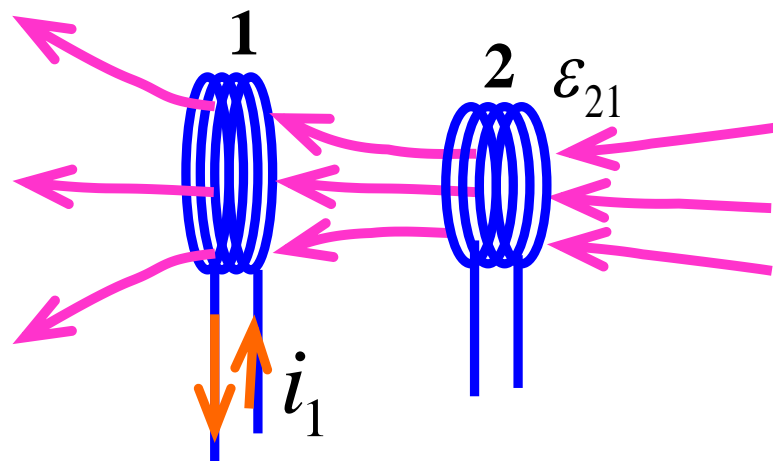
$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\because \Phi = LI \quad \therefore L = \frac{\Phi}{I l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



## 2.互感应

由一个回路中电流变化而在另一个回路中产生感应电动势的现象，叫做互感现象，这种感应电动势叫做互感电动势。



互感电动势与线圈电流变化快慢有关；与两个线圈结构以及它们之间的相对位置和磁介质的分布有关。

线圈1所激发的磁场通过线圈2的磁通链数： $\Psi_{21} = M_{21}i_1$

互感电动势： $\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$

线圈2所激发的磁场通过线圈1的磁通链数和互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

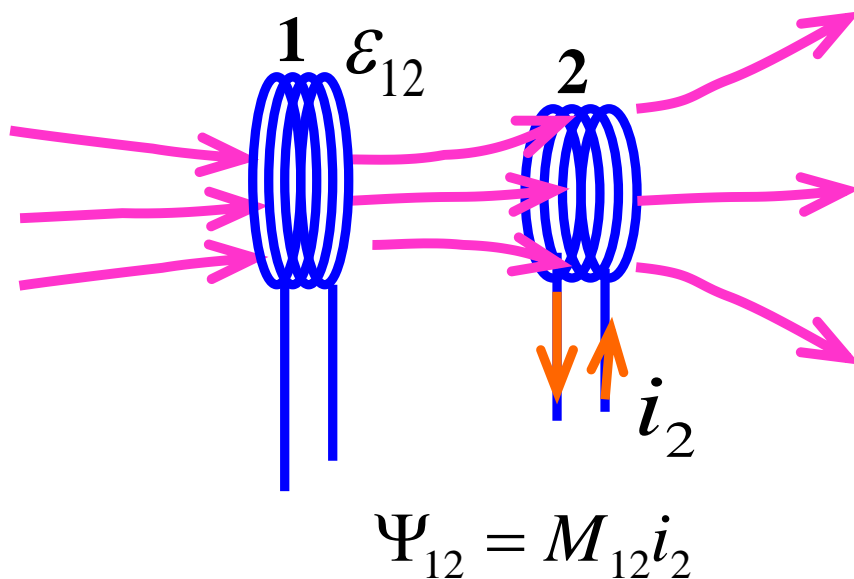
后面将从能量观点证明两个给定的线圈有：

$$M_{21} = M_{12} = M$$

$M$  就叫做这两个线圈的互感系数，简称为互感。

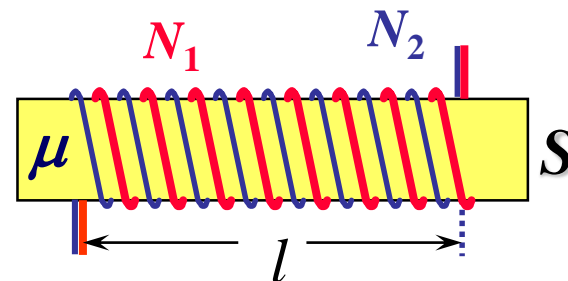
$$\varepsilon = -M \frac{di}{dt}$$

互感取决于两个回路的几何形状，相对位置、两线圈的匝数以及它们周围的磁介质的分布。



例：计算共轴螺线管的互感

两个共轴螺线管长为  $l$ ，匝数分别为  $N_1$ 、 $N_2$ ，管内充满磁导率为  $\mu$  的磁介质



$$\therefore B_1 = n_1 \mu I_1 = \mu \frac{N_1}{l} I_1$$

线圈1产生的磁场通过线圈2的磁通链数

$$\Psi_{21} = N_2 B_1 S = \mu \frac{N_1}{l} I_1 S N_2$$

由互感定义  $\therefore M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \mu n_1 n_2 V \quad (V_{\text{体积}} = lS)$

同理可求出：  $\therefore M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu N_2 N_1 S}{l} = \mu n_2 n_1 V$

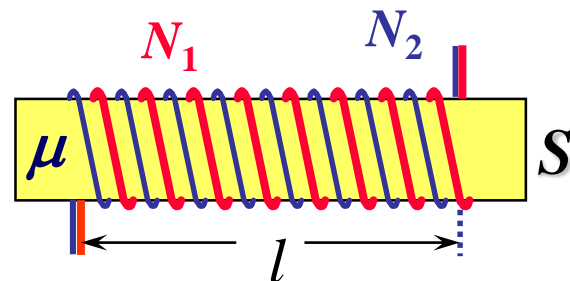
$$\therefore M = M_{21} = M_{12}$$



因为每个线圈的自感：

$$\therefore L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_1 S}{l} = \mu n_1^2 V$$

$$\therefore L_2 = \frac{\Psi_2}{I_2} = \frac{\mu N_2 N_2 S}{l} = \mu n_2^2 V \quad \therefore M = \sqrt{L_1 L_2}$$



以上是无漏磁情况下推导的，即彼此磁场完全穿过。当有漏磁时：

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

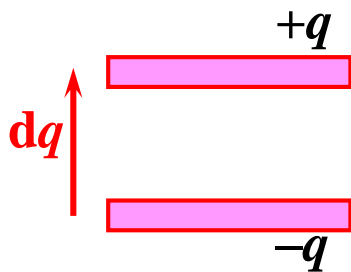
耦合系数  $0 \leq k \leq 1$  与线圈的相对位置有关。

## § 5 磁场的能量

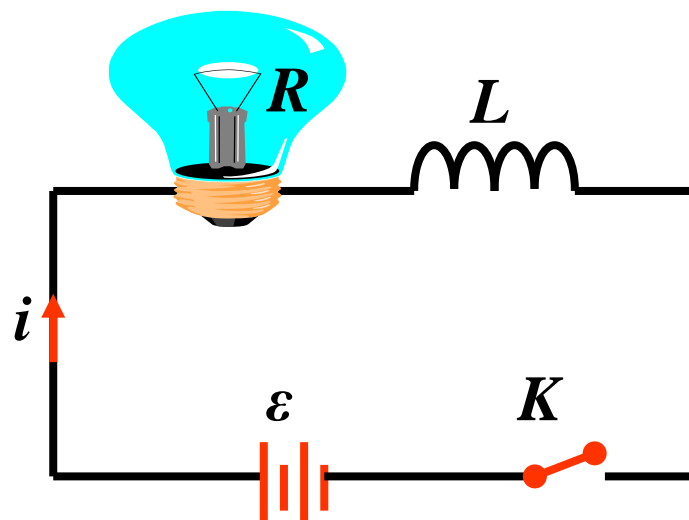
### 1. 自感磁能:

类比：电容器充电以后储存了能量，当极板电压为 $U$ 时储能为：

$$W_C = \frac{1}{2} CU^2$$



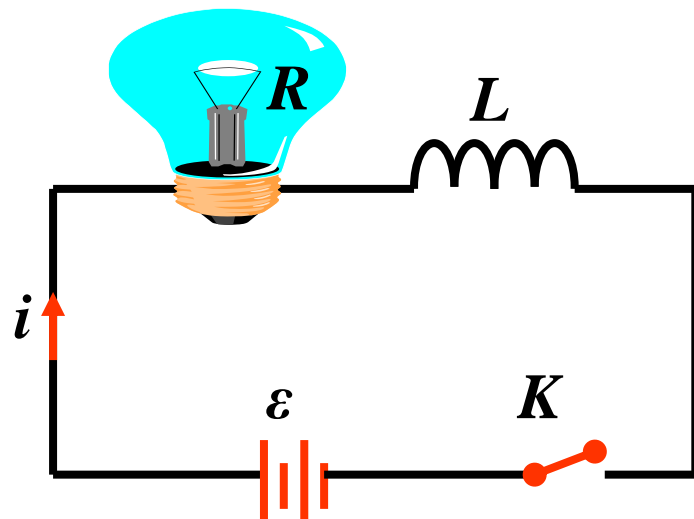
将正电荷由负极迁移到正极过程中电源反抗电场力作功转化为电场的能量。



考虑线圈，当它通有电流时，在其周围建立了磁场，所储存的磁能等于建立磁场过程中，电源反抗自感电动势所做的功。

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

如图已知回路电阻为 $R$ , 自感系数为 $L$ , 当合上开关后电流达到稳定态过程中



$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR$$

$$\int_0^t \varepsilon i dt - \int_0^t Li \frac{di}{dt} dt = \int_0^t i^2 R dt$$

$$\int_0^t \varepsilon i dt = \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t i^2 R dt$$

$0 \sim t$  时间内电源所作的功

$0 \sim t$  时间内回路电阻所释放的焦耳热

$\frac{1}{2} LI^2$   $0 \sim t$  时间内电源反抗自感电动势所作的功

自感磁能:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

## 2. 互感磁能

先使线圈1电流从0到 $I_1$ ，电源 $\varepsilon_1$ 做功，储存为线圈1的自感磁能

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

合上开关 $k_2$ 电流 $i_2$ 增大时，  
在回路1中的互感电动势： $\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$

线圈1的电源维持 $I_1$

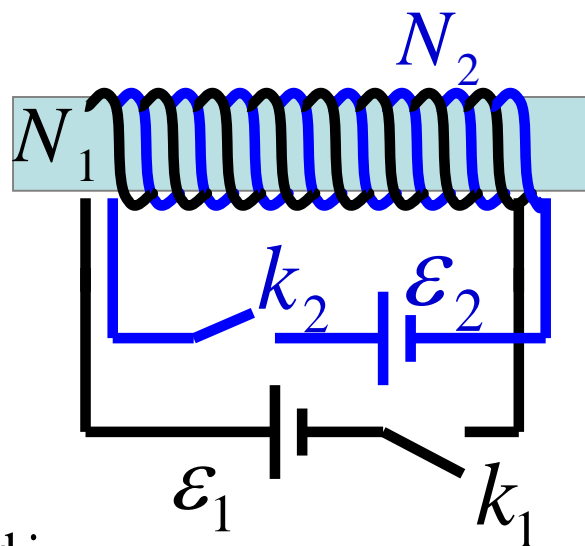
反抗互感电动势的功，  
转化为磁场的能量

$$W_{12} = \int \varepsilon_{12} I_1 \cdot dt = \int_0^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

互感磁能

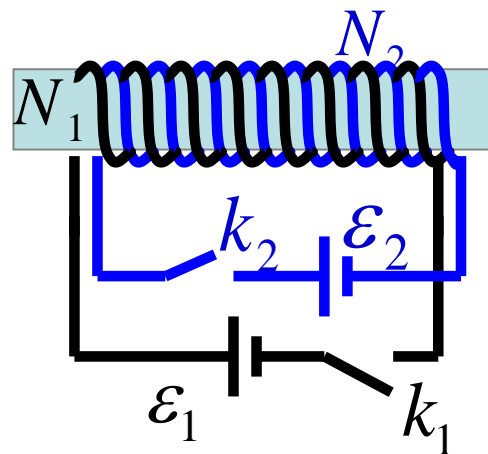
线圈2的电流从0到 $I_2$ ，电源 $\varepsilon_2$ 做功，储存为线圈2的自感磁能

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$



经过上述步骤电流分别为 $I_1$ 和 $I_2$ 的状态，储存在磁场中的**总磁能**：

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$



同理，先合开关 $k_2$ 使线圈2通电至 $I_2$ ，然后再合开关 $k_1$ 保持 $I_2$ 不变，使线圈1通电至 $I_1$ ，得到储存在磁场中的总能量为：

$$W_m' = W_2 + W_1 + W_{21} = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_2 I_1$$

这两种通电方式的最后状态相同，所以

$$W_m = W_m'$$

$$\therefore M_{12} = M_{21} = M$$

### 3. 磁场能量的一般公式

以无限长直螺线管为例推导磁场能量的一般公式。

对于无限长直螺线管，其自感系数  $L = \mu n^2 V$ ,

磁场能量

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V I^2 = \frac{1}{2} \mu n I \cdot n I \cdot V = \frac{1}{2} BHV$$

得单位体积内得磁能即磁场能量密度：

$$\omega = \frac{1}{2} BH$$

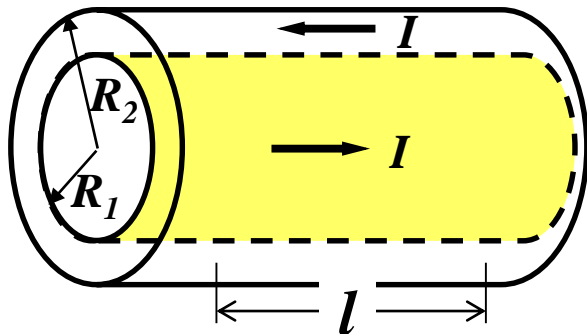
$$W = \iiint \omega dV = \iiint_V \frac{1}{2} BH dV \quad \text{具有普遍性}$$

积分应遍及磁场存在的全空间。

$$\text{电磁场的能量密度: } \omega = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

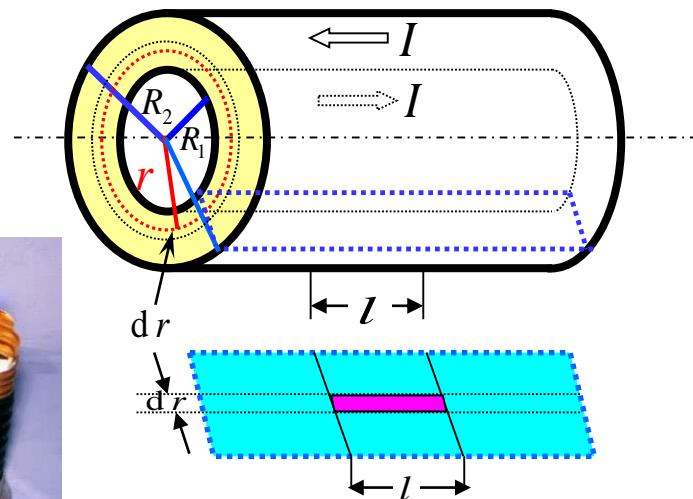
$$\text{电磁场的总能量: } W = \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \cdot dV$$

例：如图，求同轴电缆长为 $l$ 的自感系数 $L$ 。同轴电缆是由两个同轴圆柱面组成，圆柱面半径分别为 $R_1$ 、 $R_2$ 。柱面内介质的磁导率为 $\mu$ 。



**方法1 解：**应用安培环路定理，可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间中磁感应强度都为零。在内外两圆筒之间，离开轴线距离为 $r$ 处的磁感应强度为

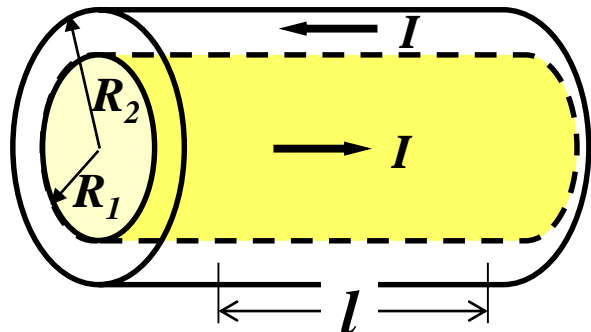
$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$



$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \phi / I = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

例：如图，求同轴电缆长为 $l$ 的自感系数 $L$ 。同轴电缆是由两个同轴圆柱面组成，圆柱面半径分别为 $R_1$ 、 $R_2$ 。柱面内介质的磁导率为 $\mu$ 。



方法2

$$W_m = \iiint_V \frac{1}{2} BH \, dV$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \left( \frac{\mu I}{2\pi r} \right)^2 \frac{1}{\mu} 2\pi r l \, dr$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} I^2$$

而  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

则：  $L = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

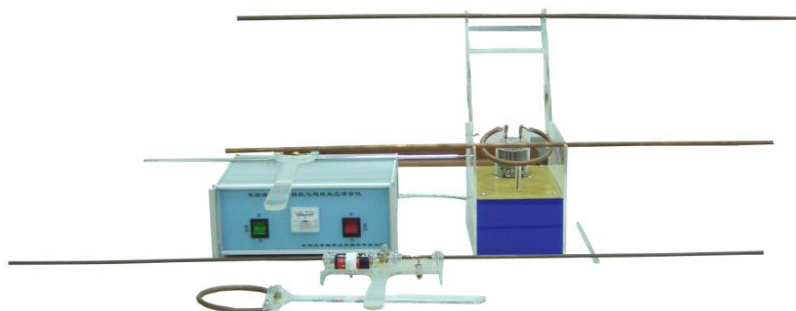
**解：** 应用安培环路定理，可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间中磁感应强度都为零。在内外两圆筒之间，离开轴线距离为 $r$ 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (H = B/\mu)$$



# 讨论题

## 趋肤效应以及应用



趋肤效应演示仪

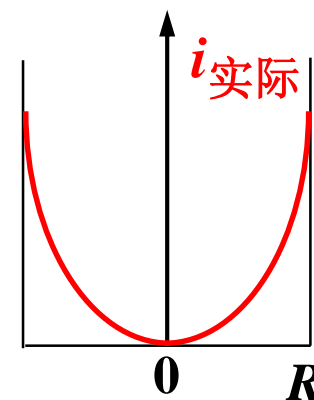
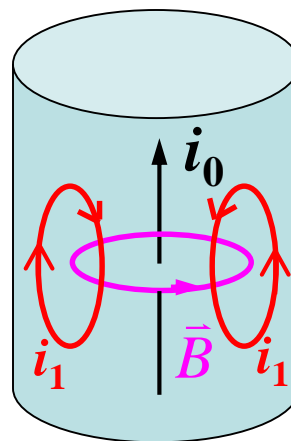
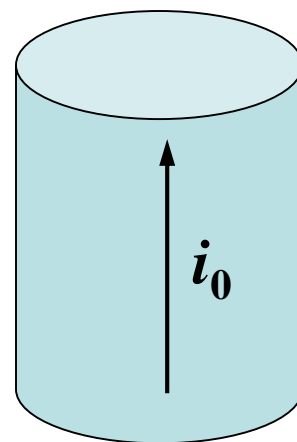


## 趋肤效应

1. 趋肤效应：高频电路中，传导电流集中到导线表面的现象。
2. 原因：高频电流  $i_0$  产生变化磁场，变化磁场产生涡流  $i_1$ ；

可以证明，  
在导线轴线附近， $i_1$ 与 $i_0$ 几乎总是反向，  
在导线表面处几乎总是同向。

减小了导线的有效截面，使其等效电阻增加。为避免趋肤效应的影响，常采用空心圆形导体截面和“辫线”，高频线圈导线表面还要镀银。



音响爱好者都知道，一套完美的Hi-Fi器材，  
区区一条喇叭线，可以让你的Hi-Fi“上天”亦可  
使它“入地”。

由于“趋肤效应”，在交变电磁场中，导体  
边缘的电流密度会比导体中心的电流密度高，随  
着交变电磁频率的增加，这种趋势越来越大。换  
句话说，这样一来，导体的有效截面积变得越来  
越小，导线的电阻也越来越大，造成高频失真。

在大量的计算分析和实际测试下得出了一个  
结论：空心圆形导体截面构成较理想的喇叭线截  
面。原因是，空心设计不但使“趋肤效应”的影  
响大大减小，还使材料的利用率提高，也保证了  
喇叭线的频率均匀。和空心圆导体相比，实心导  
体的利用率还不到材料的75%。

除了空心圆形导体截面设计之外，还采用了  
编制的导线作导体。同采用单一固体导体来比较，  
编制导体的优点是：用多股导线编织的导体做成  
的喇叭线较柔软，有弹性，不易折损。从而使稳  
定性大大提高，有利于低失真、高效率信号传输。

