P.200.2 求下列函数在 $x=0$ 点的局部泰勒公式至所指定的阶数。 2011/4/19 —88.

(1) $e^x \cdot \sin x$, (x^4);

解: $f(x)=e^x \sin x$, $f(0)=0$

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $f'(0)=1$

$f''(x)=2e^x\cos x$, $f''(0)=2$

$f^{(3)}(x)=2e^x(\cos x-\sin x)$, $f^{(3)}(0)=2$, $f^{(4)}(x)=-4e^x\sin x$, $f^{(4)}(0)=0$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+o(x^4)$$

$$e^x\cdot\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

方法二. $e^x\cdot\sin x=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]\cdot\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]$

$$=x+x^2+\left(\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)+o(x^4)$$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

(2) $f(x)=\sqrt{1+x}\cdot\cos x$, (x^4)

解: 由 P.195. 公式(4):

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}\cdot x^4+o(x^4)$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{15}{384}x^4+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x}\cdot\cos x=\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{15}{384}x^4+o(x^4)\right]\cdot\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{15}{384}x^4+o(x^4)$$

$$-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{2\times 2!}+\frac{x^4}{8\times 2!}+o(x^4)$$

$$+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+\frac{25}{384}x^4+o(x^4)$$

注: $-\frac{15}{384}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4\times3\times2}$

$$=-\frac{15}{8\times48}+\frac{24}{8\times2\times24}+\frac{16}{8\times3\times16}$$

$$=\frac{25}{384}$$