



普通物理学

山东大学
余丰人

第15章 真空中的恒定磁场

§ 1 概述

§ 2 磁感应强度

§ 3 毕-萨定律

§ 4 磁场的高斯定理和安培环路定理

§ 5 磁场对载流导线的作用力

§ 6 带电粒子在磁场中的运动

§ 1 概述

- 静止电荷之间存在相互作用，它是通过电场完成的。静止电荷在它周围将激发电场，该电场对另外的静止电荷产生作用力，叫电场力。
- 运动电荷之间存在运动产生的相互作用，它是通过磁场完成的。运动电荷在它周围将激发磁场，该磁场对另外的静止电荷不产生作用力，而对另外的运动电荷将产生作用力，叫磁场力。
- 磁场用磁感应强度和磁场强度描写，它们也都是空间位置的函数。
- 电荷在导体中作恒定流动(恒定电流)时在它周围所激发的磁场不随时间而变化，是一个恒定场，叫恒定磁场。

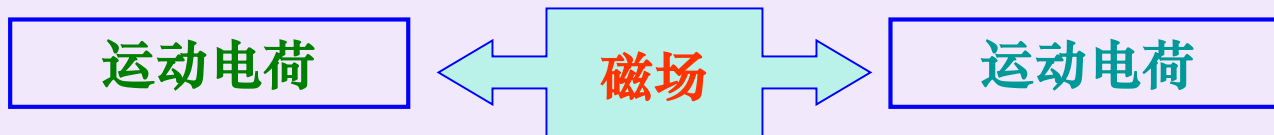
§ 2 磁感应强度

1. 基本磁现象

- 天然磁石和人造磁铁吸引铁、钴、镍等的现象，叫磁性。
- 条形磁铁的两端磁性最强，而中部几乎无磁性，两端磁性最强的区域称为磁极。若将一条形磁铁挂起来，磁铁会自动地转向南北方向，指北的一极称为北极(用N表示)，指南的一极称为南极(用S表示)。
- 两块磁铁的磁极之间存在着相互作用力，称为磁力。同号磁极之间相互排斥，异号磁极之间相互吸引。两磁极之间的相互作用力与两磁极间距离的平方成反比。
- 不存在独立的N极和S极，任一磁铁，不管把它分割得多小，每一小块磁铁仍然具有N和S两极。
- 某些本来不显磁性的物质，在接近或接触磁铁后就有了磁性，这种现象称为磁化
- 磁现象和电现象虽然早已被人们发现，但在很长时期内，磁学和静电学各自独立地发展着。

2. 磁现象的本质

- 奥斯特发现载流导线附近的小磁针会发生偏转；
- 安培发现磁铁对载流导线有磁力作用；
- 安培随后又发现两载流导线之间或两载流线圈之间也有力的作用，并且其作用非常类似两磁铁之间的作用。
- 安培认为一切磁现象的根源是电流。实验和近代理论都证实了一切磁现象起源于电荷的运动，
- 电力是通过电场起作用的，磁力也是通过场起作用的，该场称为磁场。

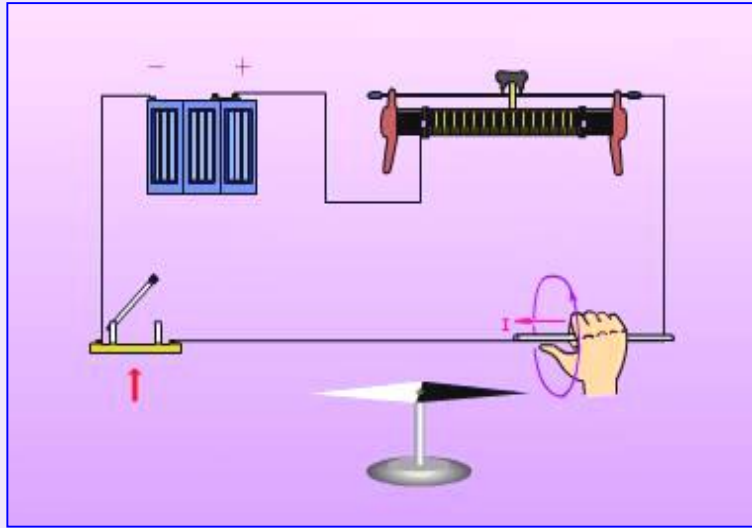


- 磁场对外的重要表现：
 - 磁场对引入磁场中的运动电荷或载流导体有磁力的作用。
 - 载流导体在磁场中移动时，磁场的作用力对载流导体做功。

3.物理史话-奥斯特(1820) 电流磁效应的发现



- 奥斯特早在读大学时就深受康德哲学思想（一元论）的影响，认为各种自然力都来自同一根源，可以相互转化。他认为电向磁的转化不是不可能的，关键是要找出转化的具体条件。寻找这两大自然力之间联系的思想，经常盘绕在他的头脑中。
- 1819年冬，奥斯特在哥本哈根开设了一个讲座，讲授电磁学方面的课题。在备课中，奥斯特分析了前人在电流方向上寻找磁效应都未成功的事实，想到磁效应可能像电流通过导线产生热和光那样是向四周散射的，即是一种横向力，而不是纵向的。



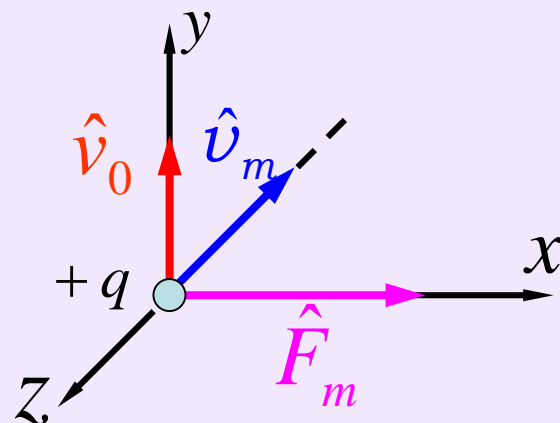
- 1820年4月的一天晚上，奥斯特在讲课快结束时，他说：让我把导线与磁针平行放置来试试看。当他接通电源时，他发现小磁针微微动了一下。

- 这一现象使奥斯特又惊又喜，他紧紧抓住这一现象，连续进行了3个月的实验研究，终于在1820年7月21日发表了题为《关于磁针上的电流碰撞的实验》的论文。这篇仅用了4页纸的论文，是一篇极其简洁的实验报告。

- 奥斯特在报告中讲述了他的实验装置和60多个实验的结果，从实验总结出：电流的作用仅存在于载流导线的周围；沿着螺旋方向垂直于导线；电流对磁针的作用可以穿过各种不同的介质；作用的强弱决定于介质，也决定于导线到磁针的距离和电流的强弱；铜和其他一些材料做的针不受电流作用；通电的环形导体相当于一个磁针，具有两个磁极，等等，
- 奥斯特发现的电流磁效应，是科学史上的重大发现。它立即引起了那些懂得它的重要性的价值的人们的注意。在这一重大发现之后，一系列的新发现接连出现。两个月后安培发现了电流间的相互作用，阿拉果制成了第一个电磁铁，施魏格发明电流计等。安培曾写道：“奥斯特先生.....已经永远把他的名字和一个新纪元联系在一起了。”奥斯的发现揭开了物理学史上的一个新纪元。

4. 磁力的特征

- 在磁场中任一点，运动试探电荷所受磁力的大小与试探电荷的速度大小和电荷量大小成正比，还与试探电荷的运动方向有关；
- 在磁场中任一点，存在一个特定的方向，当试探电荷沿这特定方向（或其反方向）运动时，磁力为零；
- 在磁场中任一点，当电荷沿着与磁力为零方向的垂直方向运动时，所受到的磁力最大；
- 在磁场中任一点，运动试探电荷所受磁力的方向总是与电荷运动方向垂直；



\hat{v}_0 磁力为零的运动方向

\hat{v}_m 磁力为最大的运动方向

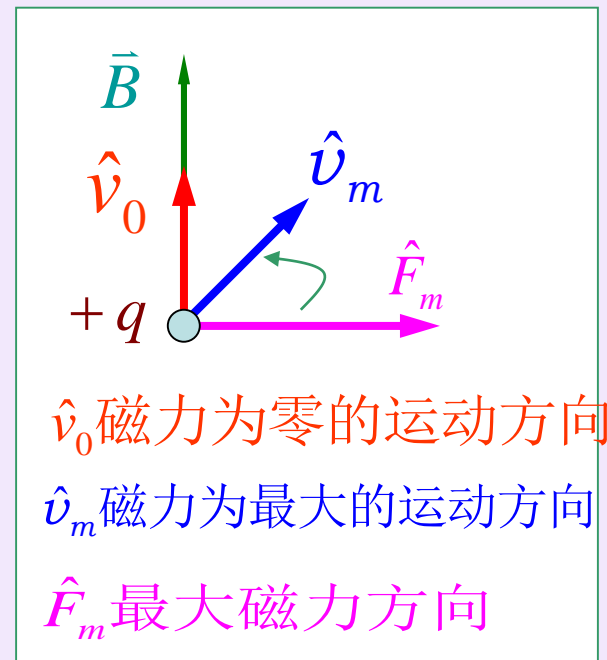
\hat{F}_m 最大磁力方向

5. 磁感应强度定义

- 描述电场的物理量是电场强度，它是由静止试探电荷在电场中所受电场力的大小和方向来定义，同样，磁感应强度是一个描述磁场的物理量，其定义也同样要由运动试探电荷在磁场中所受磁场力的大小和方向来定义；
- 根据磁力特征定义磁感应强度大小：它是当运动试探电荷沿磁力最大的方向运动时，试探电荷所受最大磁力与试探电荷的电荷量和速度大小的比

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_m|}{q v_m}$$

- 根据磁力特征定义磁感应强度方向：它是运动试探电荷所受磁力为零的运动方向，该方向有两个，再由运动试探电荷所受磁力最大的运动方向与最大磁力方向的右手螺旋方向确定。



- 在国际单位制中，磁感应强度B的单位：

$$\text{特斯拉T} = \text{N}/(\text{A} \cdot \text{m}) = 10^4 \text{ 高斯Gs}$$

- 地球磁场的数量级大约是 10^{-4}T ，严格讲地球表面的磁场在赤道处约为 $0.3 \times 10^{-4}\text{T}$ ，在两极处约为 $0.6 \times 10^{-4}\text{T}$ ；
- 大型的电磁能激发大于2T的恒定磁场；
- 超导磁体能激发高达25T的磁场；
- 人体心脏激发的磁场约为 $3 \times 10^{-10}\text{T}$ ；
- 而脉冲星表面的磁场约为 10^8T ；
- 某些原子核附近的磁场可达 10^4T 。

§ 3 毕-萨定律

1. 毕-萨定律

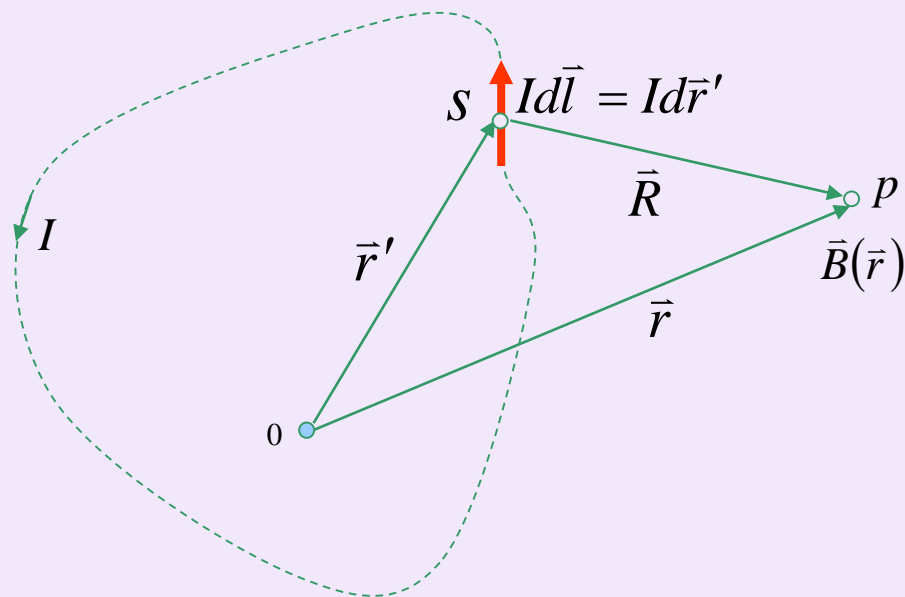
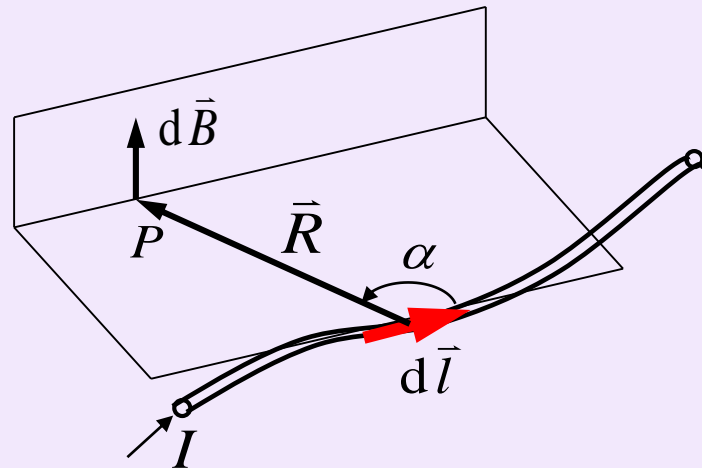
- 毕-萨定律:

$$\begin{aligned}d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \\&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \\&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\vec{r}'} \frac{Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

- 真空中的磁导率:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m / A$$



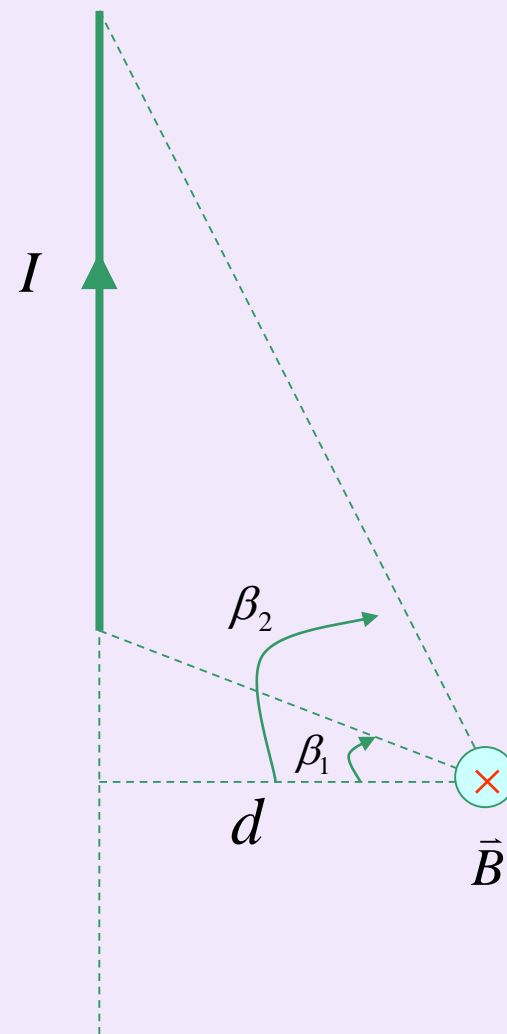
2. 载流长直导线的磁场

- 有限长:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

- 无限长:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



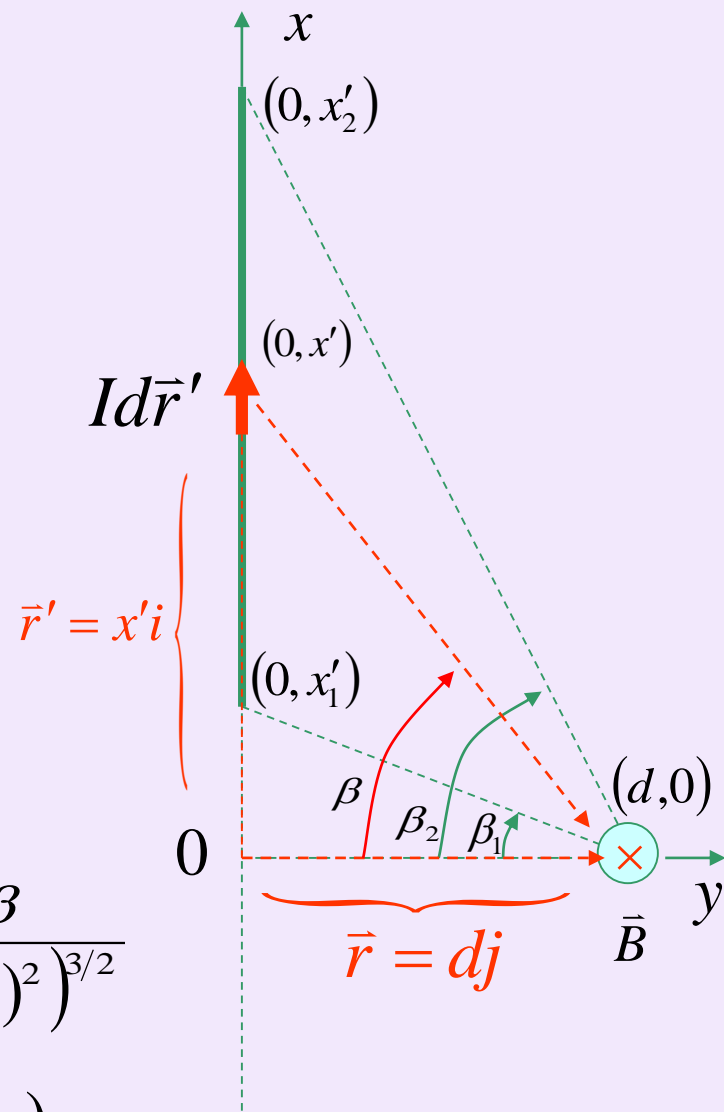
● 计算过程:

$$\vec{r}' = x'i \quad \vec{r} = dj \quad d\vec{r}' = dx'i$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = dj - x'i \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (d^2 + x'^2)^{3/2}$$

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx'i \times (dj - x'i)}{(d^2 + x'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(Id)dx'}{(d^2 + x'^2)^{3/2}} k = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \frac{d(x'/d)}{(1 + (x'/d)^2)^{3/2}} k \end{aligned}$$

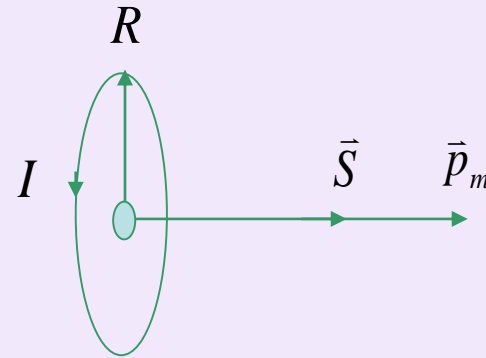
$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{x'_1}^{x'_2} \frac{d(x'/d)}{(1 + (x'/d)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{dtg\beta}{(1 + (tg\beta)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos\beta d\beta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin\beta_2 - \sin\beta_1) \end{aligned}$$



3. 载流圆线圈轴线上的磁场

- 单匝线圈的磁矩:

$$\vec{p}_m = I\vec{S} \quad S = \pi R^2$$



- N匝线圈的磁矩:

$$\vec{p}_m = NI\vec{S} \quad S = \pi R^2$$

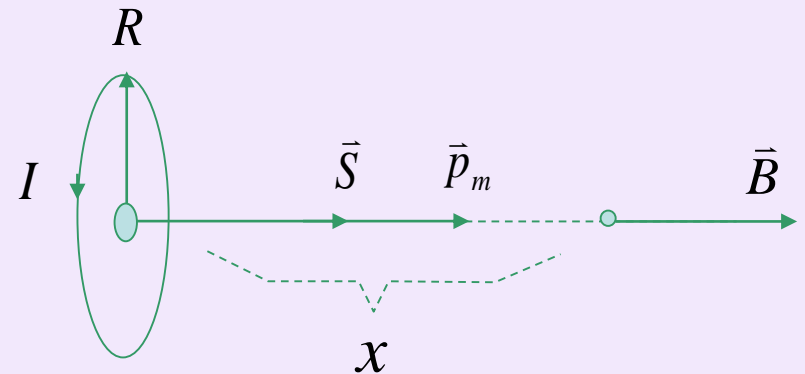
- 有限远的磁场:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

- 圆心上的磁场:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{R^3}$$

- 远处的磁场:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{x^3} \quad \text{磁偶极子的磁感应}$$

● 计算过程

$$\vec{r}' = R(\cos \varphi' \cdot j + \sin \varphi' \cdot k) \quad d\vec{r}' = R(-\sin \varphi' \cdot j + \cos \varphi' \cdot k)d\varphi'$$

$$\vec{r} = xi$$

$$\vec{r}' - \vec{r} = xi - R\cos \varphi' \cdot j - R\sin \varphi' \cdot k$$

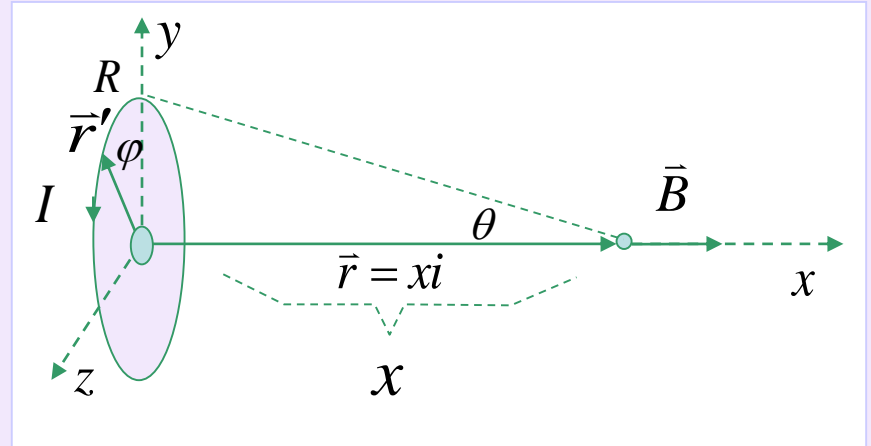
$$|\vec{r}' - \vec{r}|^3 = (R^2 + x^2)^{3/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\vec{r}'} \frac{Id\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{IR(-\sin \varphi' \cdot j + \cos \varphi' \cdot k)d\varphi' \times (xi - R\cos \varphi' \cdot j - R\sin \varphi' \cdot k)}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

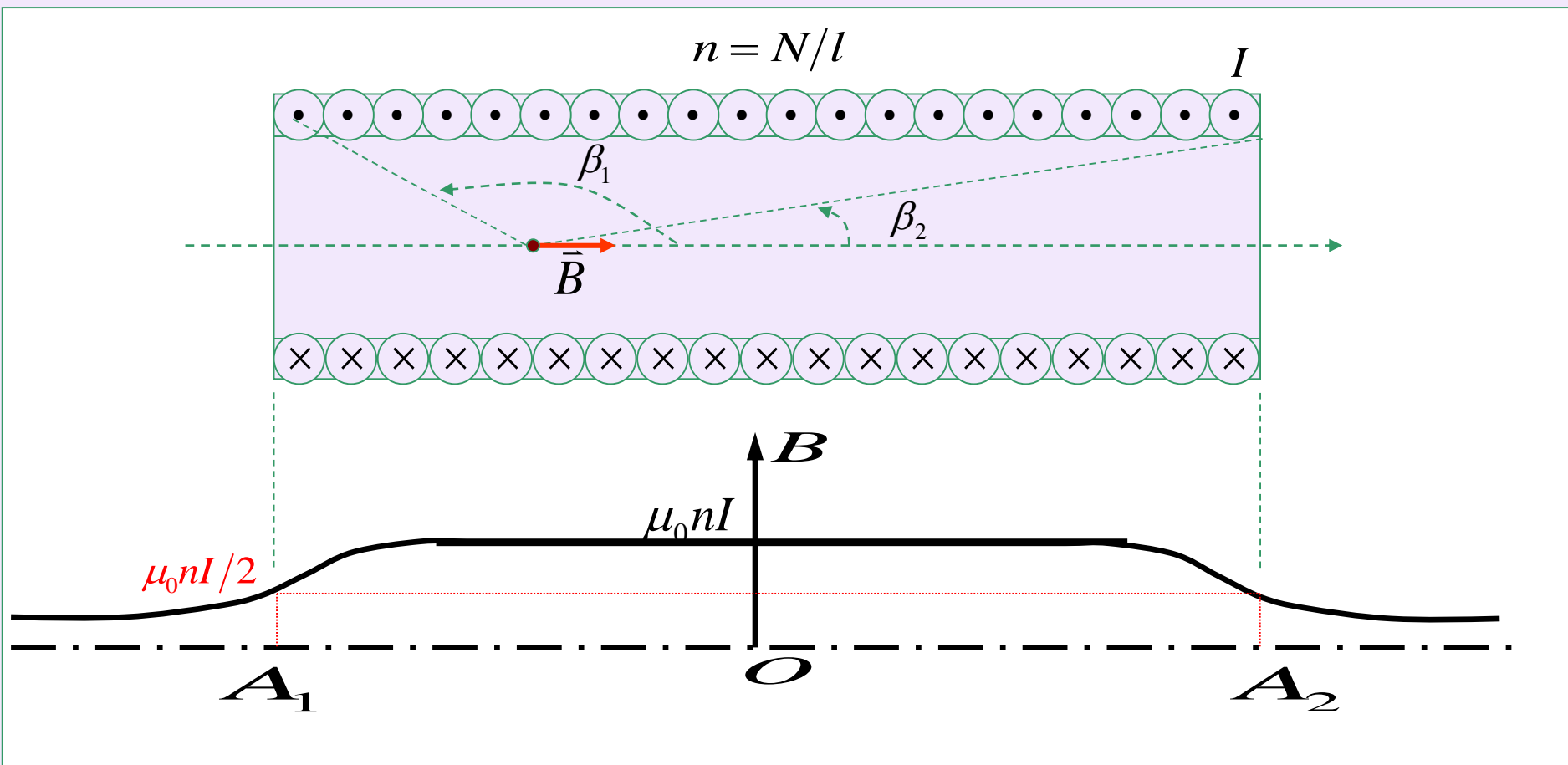
$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (R \cdot i + \cos \varphi' x \cdot j + \sin \varphi' x \cdot k) d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0 IR^2 i}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{\mu_0 (I\pi R^2 i)}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



4. 载流直螺线管内部的磁场

- 有限长: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$ (只限于轴线上的磁场)
- 无限长: $B = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos 0 - \cos \pi) = \mu_0 nI$ (适合整个内部的磁场)

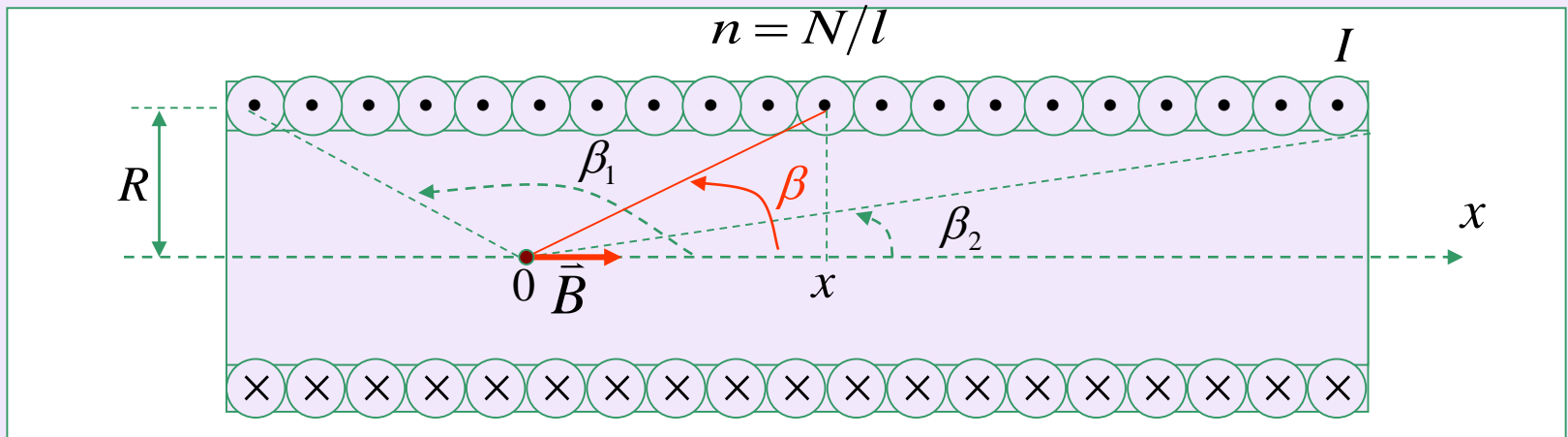


● 计算过程

利用单匝线圈的磁场 $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{(Indx)R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{d(x/R)}{[1 + (x/R)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{d \operatorname{ctg} \beta}{[1 + (\operatorname{ctg} \beta)^2]^{3/2}} = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \beta d\beta$$

$$B = -\frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$



也可以利用螺线方程计算

$$\vec{r}' = (\varphi'/2\pi n) \cdot \vec{i} + R \cos \varphi' \cdot \vec{j} + R \sin \varphi' \cdot \vec{k} \quad \vec{r} = 0$$

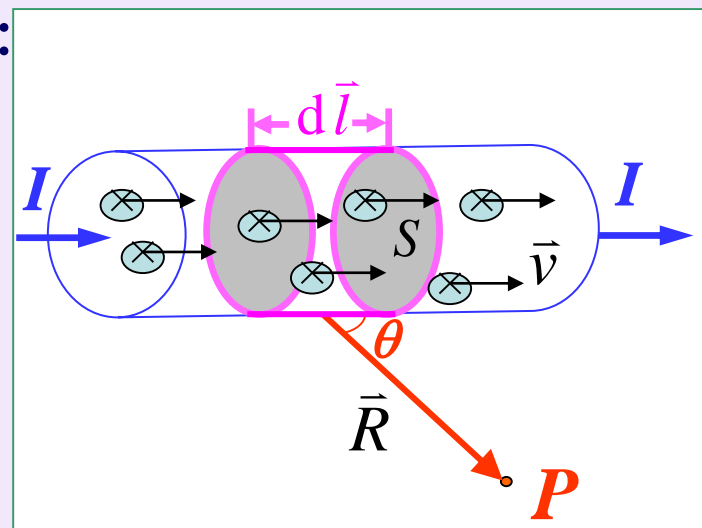
5. 低速运动电荷的磁场

- 设电流元 Idl ，横截面积 S ，单位体积内有 n 个定向运动的正电荷，每个电荷电量为 q ，定向速度为 v 。
- 流元 Idl 在 P 点产生的磁感应强度为：

$$d\vec{l} = \vec{v} dt \quad dN = n dV = n \vec{S} \cdot d\vec{l} \quad dq = q dN$$

$$Id\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = q(dN)\vec{v}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(dN)\vec{v} \times \vec{R}}{R^3}$$



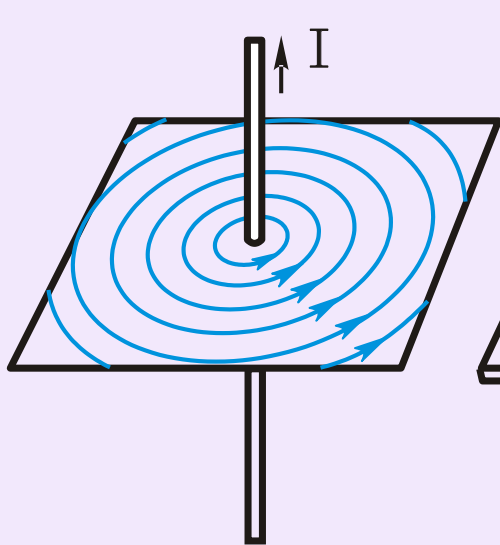
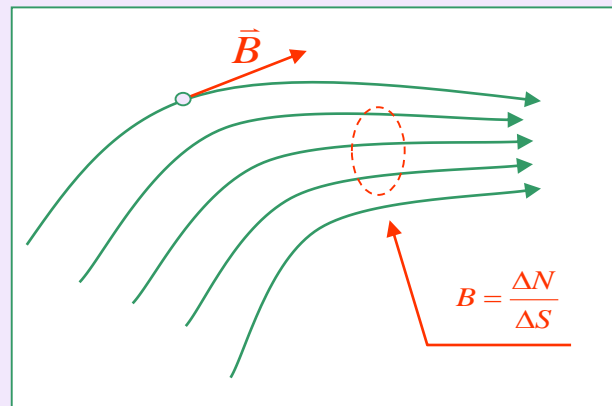
- 每个带电量为 q 的粒子以速度 v 通过电流元所在位置时，在 P 点产生的磁感应强度大小为：

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{R}}{R^3}$$

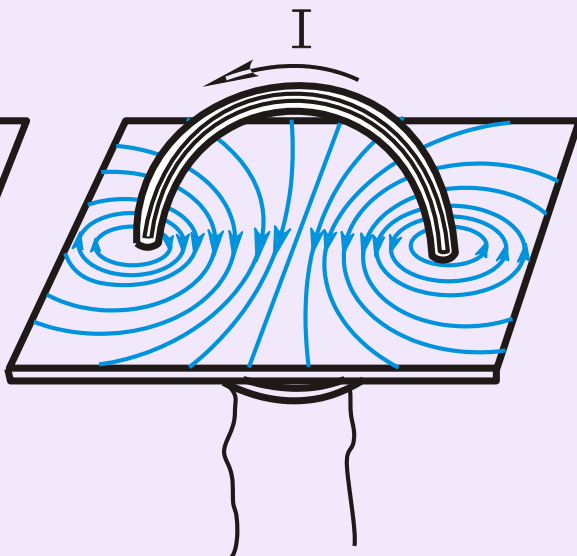
§ 4 磁场的高斯定理和安培环路定理

1. 磁感应线

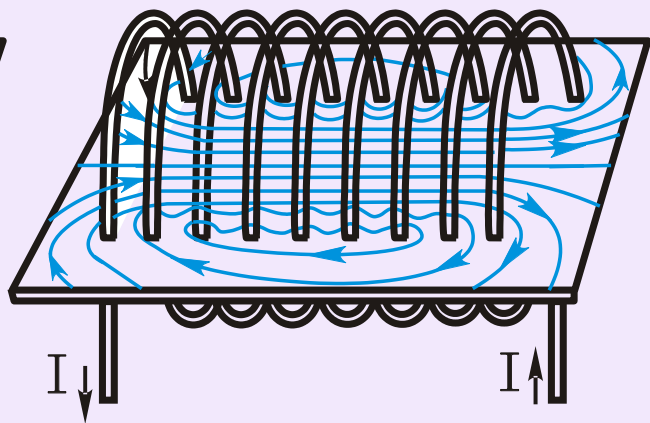
- 磁感应线与电场线定义类似。
- 磁感应线一定是闭合的，不存在磁感应线起点和终点的磁荷。



直电流



圆电流



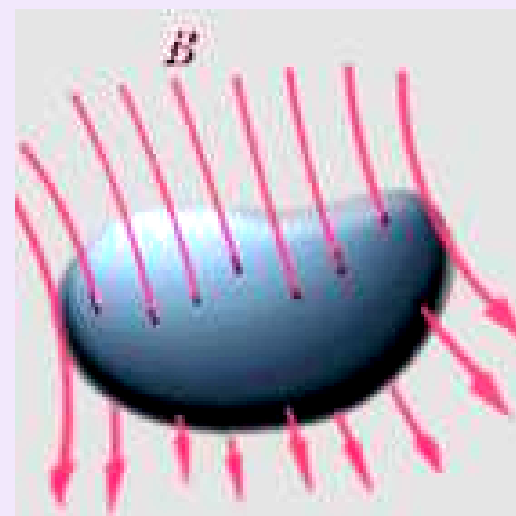
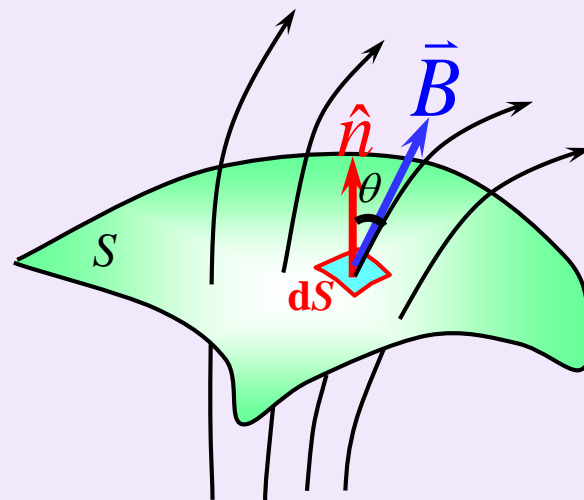
螺线管电流

2. 磁通量与磁场高斯定理

- 磁通量: $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- 磁通量单位: 韦伯 $Wb = T \cdot m^2$
- 磁场的高斯定理: 磁感应线一定是不相交的闭合曲线, 不存在磁荷, 所以磁场的高斯定理为:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 磁场的高斯定理说明: 对任意闭合曲面, 穿入的磁感应线条数与穿出的磁感应线条数相同。磁场的高斯定理可由毕萨定律严格证明。



3. 安培环路定理

- **安培环路定理**：在稳恒电流的磁场中，磁感应强度 B 沿任何闭合回路 L 的线积分，等于穿过这回路的所有电流强度代数总和的 μ_0 倍。

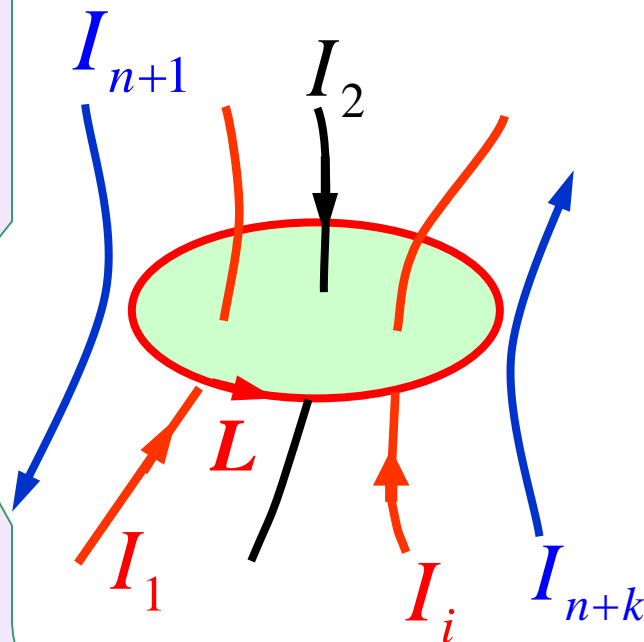
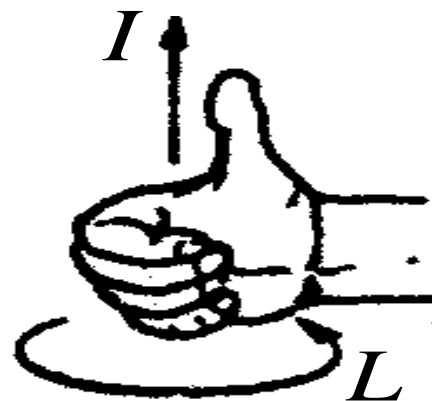
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

- **电流符号规定**：穿过回路 L 的电流方向与 L 的环绕方向服从右手关系的 电流 I 为正，否则为负。

正电流： $I_1 \cdots I_i$ ，负电流： I_2 ，

- **不计算的电流**：不计穿过回路边界的电流；不计不穿过回路的电流。

不计算的电流： I_{n+1} 、 I_{n+k}



4. 安培环路定理几点注意

- 任意形状稳恒电流，安培环路定理都成立；
- 安培环路定理虽然仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加；
- 安培环路定理仅仅适用于恒定电流产生的恒定磁场，恒定电流本身总是闭合的，因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线；
- 连续分布电流的安培环路定理为：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- 静电场的高斯定理说明静电场为有源场，环路定理又说明静电场无旋(即保守场)；稳恒磁场的高斯定理反映稳恒磁场无源；环路定理又反映稳恒磁场有旋(即非保守场)

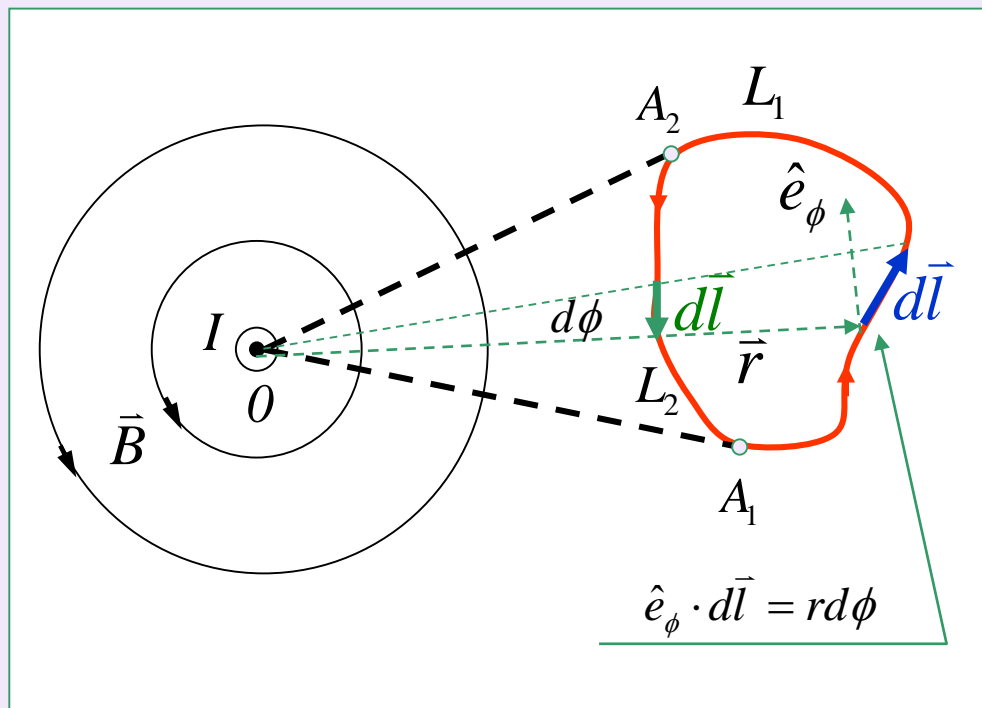
5. 安培环路定理的例证

- 无穷长直载流导线的磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

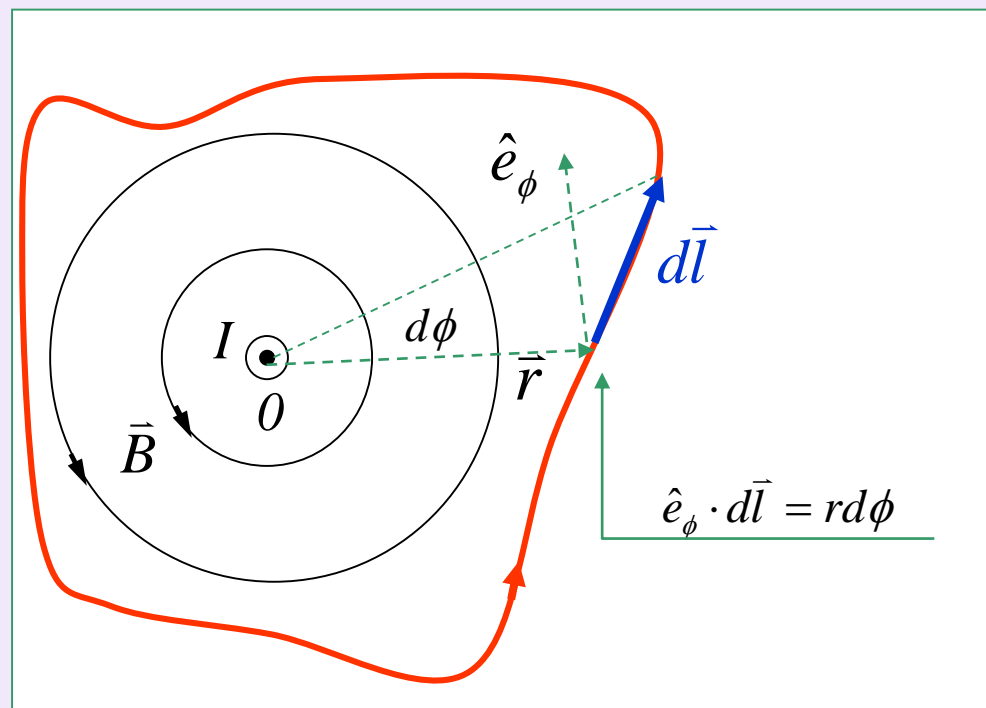
- 不含流环路积分

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \hat{e}_\phi \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l \frac{rd\phi}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



- 含流环路积分

$$\begin{aligned}\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} \\&= \oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \hat{e}_\phi \cdot d\vec{l} \\&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l \frac{rd\phi}{r} \\&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\phi \\&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi \\&= \mu_0 I\end{aligned}$$



- 安培环路定理可由毕萨定律严格证明

6. 安培环路定理的应用方法

- 具有对称性的磁场可以应用安培环路定理计算其磁感应强度。
- 应用安培环路定理计算磁感应强度的步骤为：

- 分析磁场的对称性；
- 选择适当的安培环路，使得B沿此环路的积分易于计算，一般可将环路分几段，在环路的各段上，B的量值和B与dl的夹角分别恒定；
- 写出安培环路方程：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

- 应用安培环路定理，求出安培环路定理中左边的环路积分；
- 用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负，求出安培环路定理中右边的电流代数和；
- 从安培环路方程中解出B。

7. 安培环路定理的应用举例

① 求无限长圆柱面电流的磁场分布(半径为 R)

- 场结构具有轴对称性。
- 以轴上一点为圆心, 取垂直于轴的平面内半径为 r 的圆为安培环路。

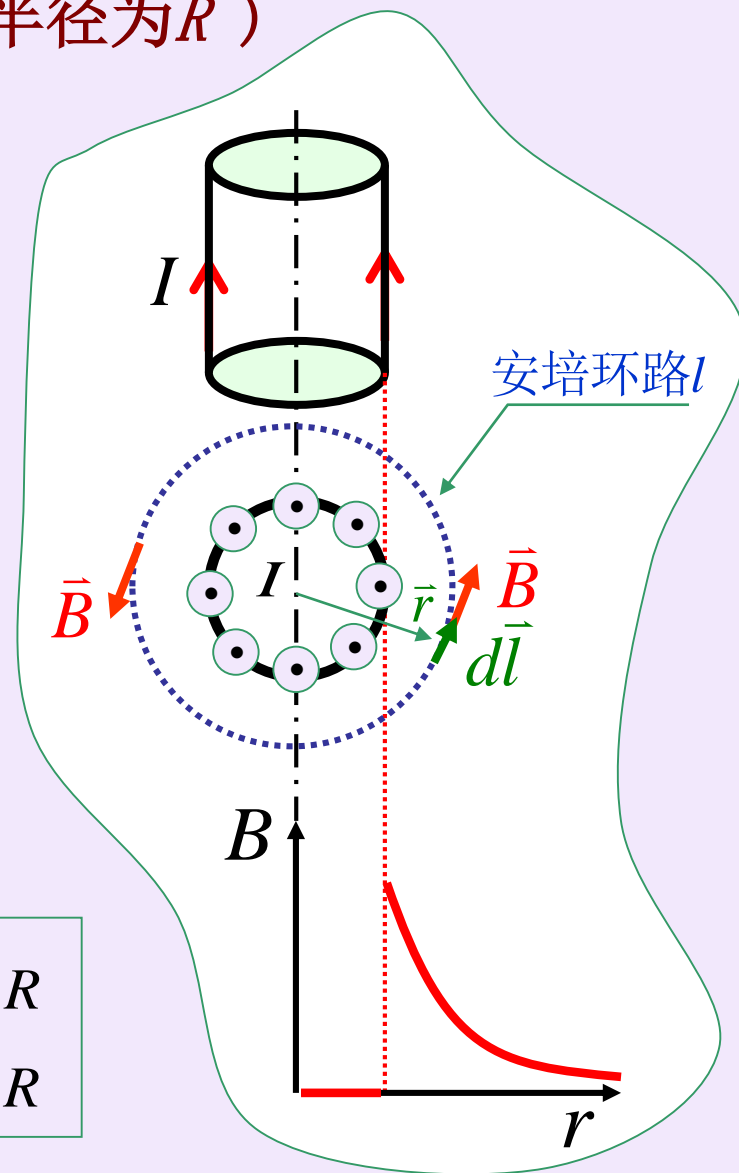
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B dl = 2\pi r B$$

$$\mu_0 \sum I = \begin{cases} \mu_0 I & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

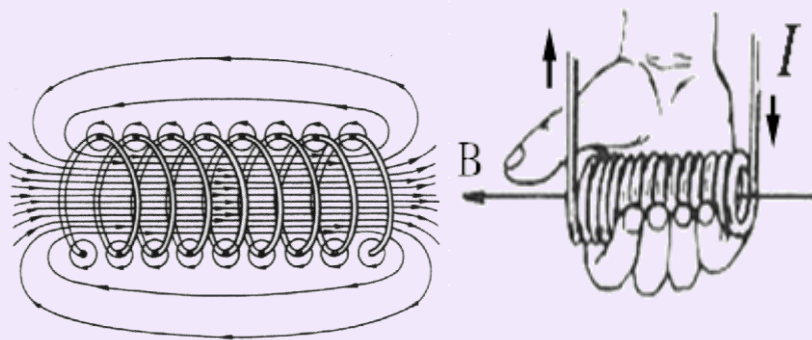
$$2\pi r B = \begin{cases} \mu_0 I & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \\ B &= 0 & r < R \end{aligned}$$



② 求载流无限长直螺线管内任一点的磁场 通常 ($L > 20R$)

- 一个单位长度上有 n 匝的无限长直螺线管，由于密，每匝视为圆线圈。
- 磁场结构具有对称性。
- 取任意长方形为安培环路。



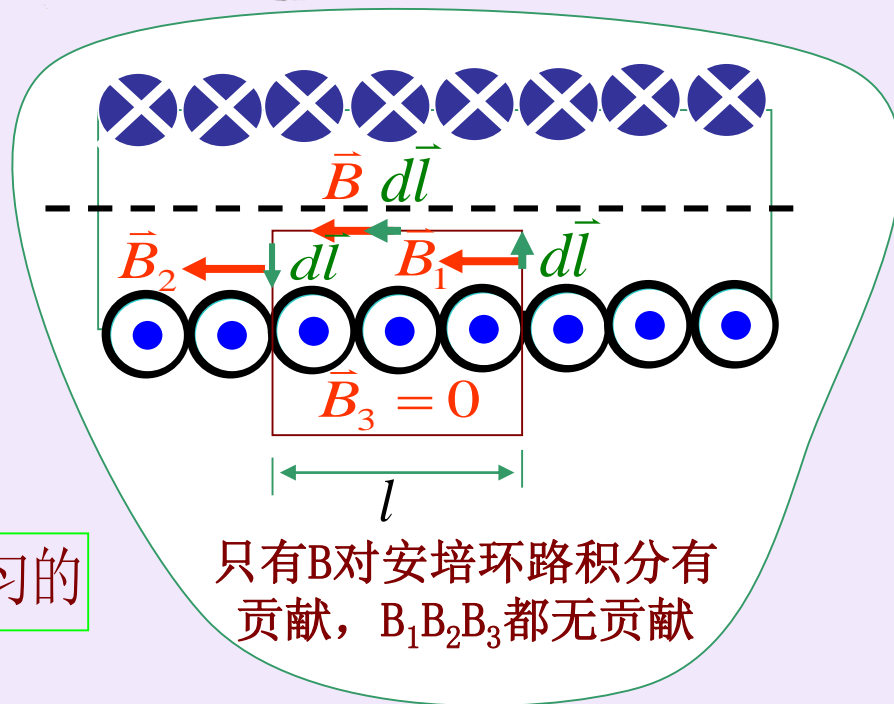
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_l B dl = lB$$

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 n l I$$

$$lB = \mu_0 n l I$$

$$B = \mu_0 n I \quad \text{内部场是均匀的}$$



只有 B 对安培环路积分有贡献， $B_1 B_2 B_3$ 都无贡献

③ 求载流螺绕环内的磁场

- 设环很细，总匝数为 N ，通有电流强度为 I 。
- 分析磁场结构，与长直螺旋管类似，环内磁场只能平行与线圈的轴线（即每一个圆线圈过圆心的垂线）。
- 取闭合回路 L 为安培环路，如图所示。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\because \vec{B} // d\vec{l}$$

$$\therefore \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_L dl = 2\pi r B$$

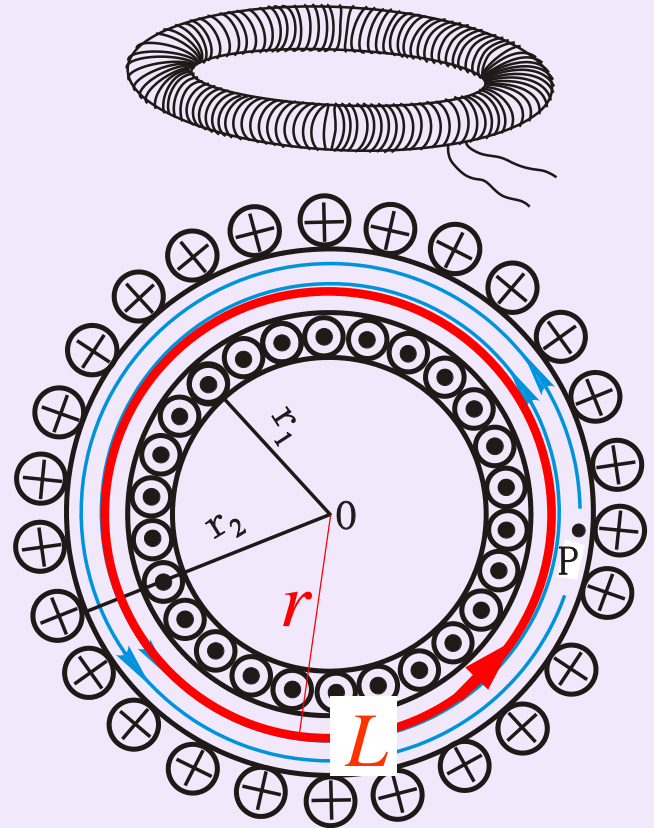
$$\mu_0 \sum I = \mu_0 NI$$

$$2\pi r B = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当 $r_2 - r_1 \ll r$ 时

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi r} \right) I = \mu_0 n I$$



④ 无限大平板电流的磁场分布

- 设一无限大导体薄平板垂直于纸面放置，其上有方向垂直于纸面朝外的电流通过，面电流密度（即指通过与电流方向垂直的单位长度的电流）到处均匀，大小为 j 。
- 它可视为无限多平行长直电流的磁场，无数对称电流元在 P 点的总磁场方向平行于电流平面。因为电流平面是无限大，故与电流平面等距离的各点 B 的大小相等。在该平面两侧的磁场方向相反。

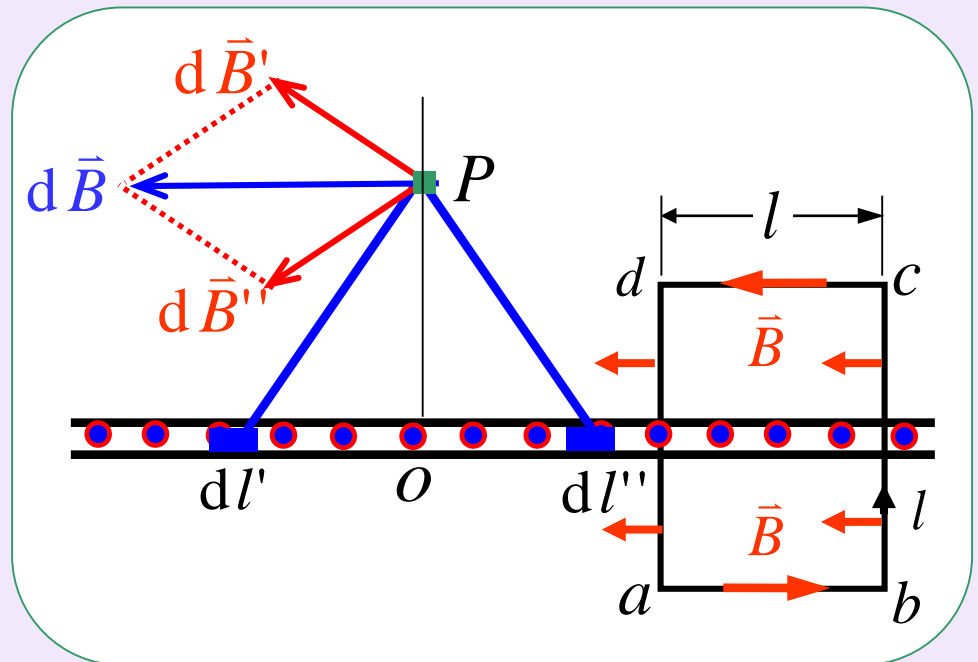
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2 \int_l B dl = 2lB$$

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 j l$$

$$2lB = \mu_0 j l$$

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$



§ 5 磁场对载流导线的作用力

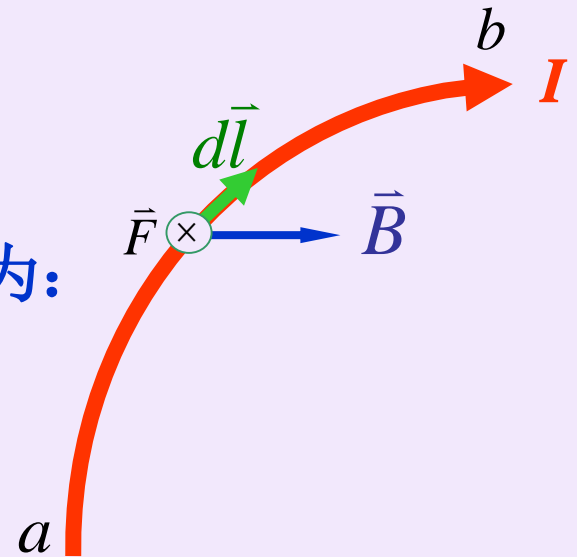
1. 安培定律

- 1820年，法国物理学家安培在实验的基础上得出稳恒电流回路中电流元受磁场作用力（安培力）的基本定律——安培定律，即在磁场中磁感应强度为 \vec{B} 处的电流元 $I d\vec{l}$ 所受的磁力为：

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

- 一段载流导线在磁场中所受的磁力为：

$$\vec{F} = \int_{l_{ab}} I d\vec{l} \times \vec{B}$$



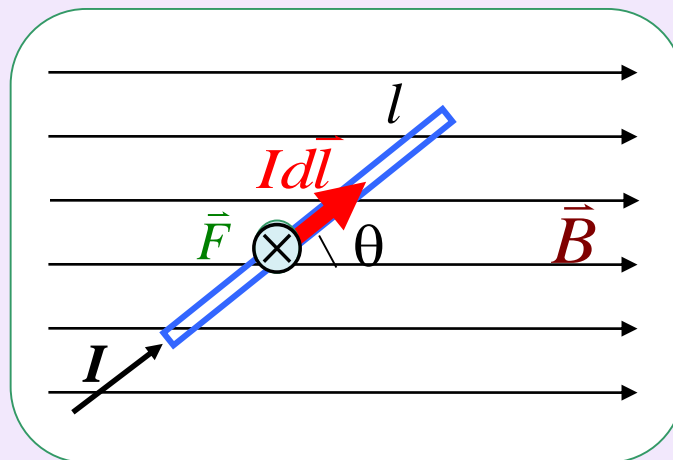
2. 安培力及力矩

① 均匀磁场对载流直导线的磁力

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$d\vec{F}$ 的方向: \otimes

$d\vec{F}$ 的大小: $dF = IdlB \sin \theta$



导线上各电流元所受力的方向一致，所以可以由积分直接计算力大小。

\vec{F} 的方向: \otimes

$$\begin{aligned} \vec{F} \text{ 的大小: } F &= \int_l IB \sin \theta dl \\ &= IB \sin \theta \int_l dl = IB l \sin \theta \end{aligned}$$

② 均匀磁场对载流半圆导线的磁力

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

导线上各电流元所受力的方向不一致，所以要进行分量积分计算力。

$$\vec{B} = B\vec{k}$$

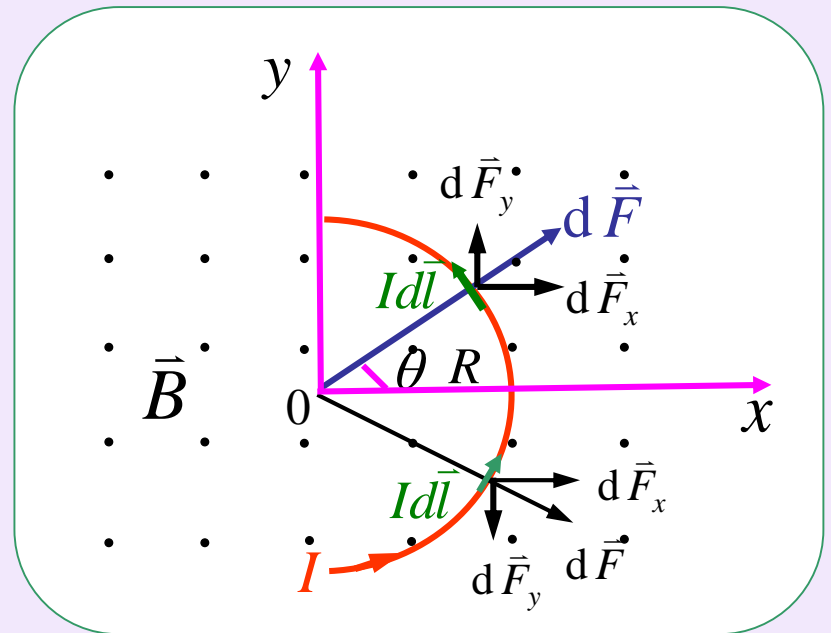
$$d\vec{l} = R d\theta (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = IRB d\theta (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \times \vec{k} = IRB d\theta (\sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{i})$$

$$F_x = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dF_x = BIR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = 2BIR$$

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dF_y = BIR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin \theta d\theta = 0$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} = 2BIR \vec{i}$$



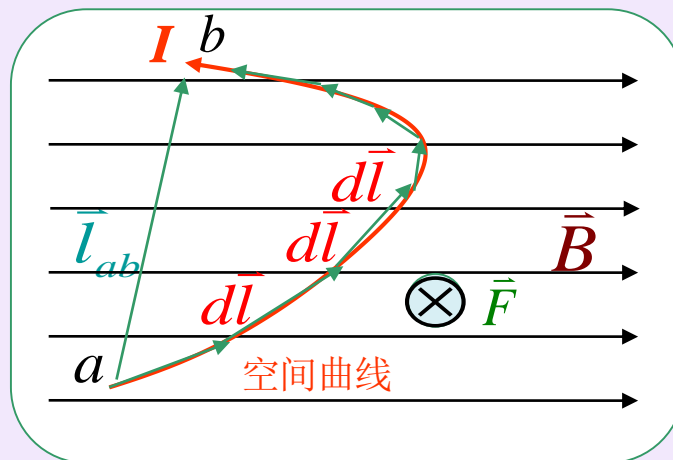
该半圆形载流导线上所受的磁力与其两个端点相连的直导线所受到的力相等。

③ 均匀磁场对载流任意曲导线的磁力

➤ 不闭合曲导线的磁力

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

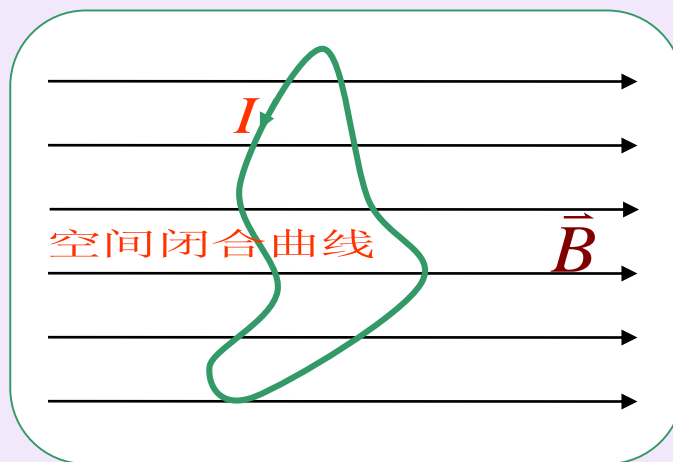
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_a^b (I d\vec{l} \times \vec{B}) \\ &= I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I \vec{l}_{ab} \times \vec{B}\end{aligned}$$



➤ 闭合曲导线的磁力

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \oint (I d\vec{l} \times \vec{B}) \\ &= I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} \\ &= I \cdot 0 \times \vec{B} = 0\end{aligned}$$



④ 无限长直载流导线的磁场对半圆载流导线导线的磁力

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{k} \quad (r = x)$$

$$d\vec{l} = R d\theta (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

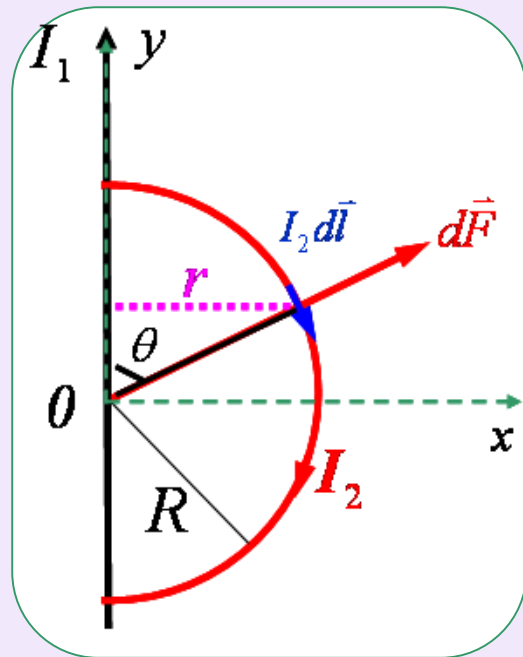
$$d\vec{F} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 R d\theta (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \times \vec{k}$$

$$= \frac{\mu_0 R I_1 I_2}{2\pi} \frac{d\theta}{x} (\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i})$$

$$F_x = \frac{\mu_0 R I_1 I_2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{x} = \frac{\mu_0 R I_1 I_2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{R} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2}$$

$$\text{由对称性: } F_y = 0 \quad \vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \vec{i}$$



⑤ 均匀磁场对载流矩形线圈的磁力矩

⊗ \vec{F}_1 与 \vec{F}_1' 大小相等，方向相反，作用在同一直线上，不产生力矩作用

$$\vec{F}_1 = I \vec{l}_{AB} \times \vec{B}$$

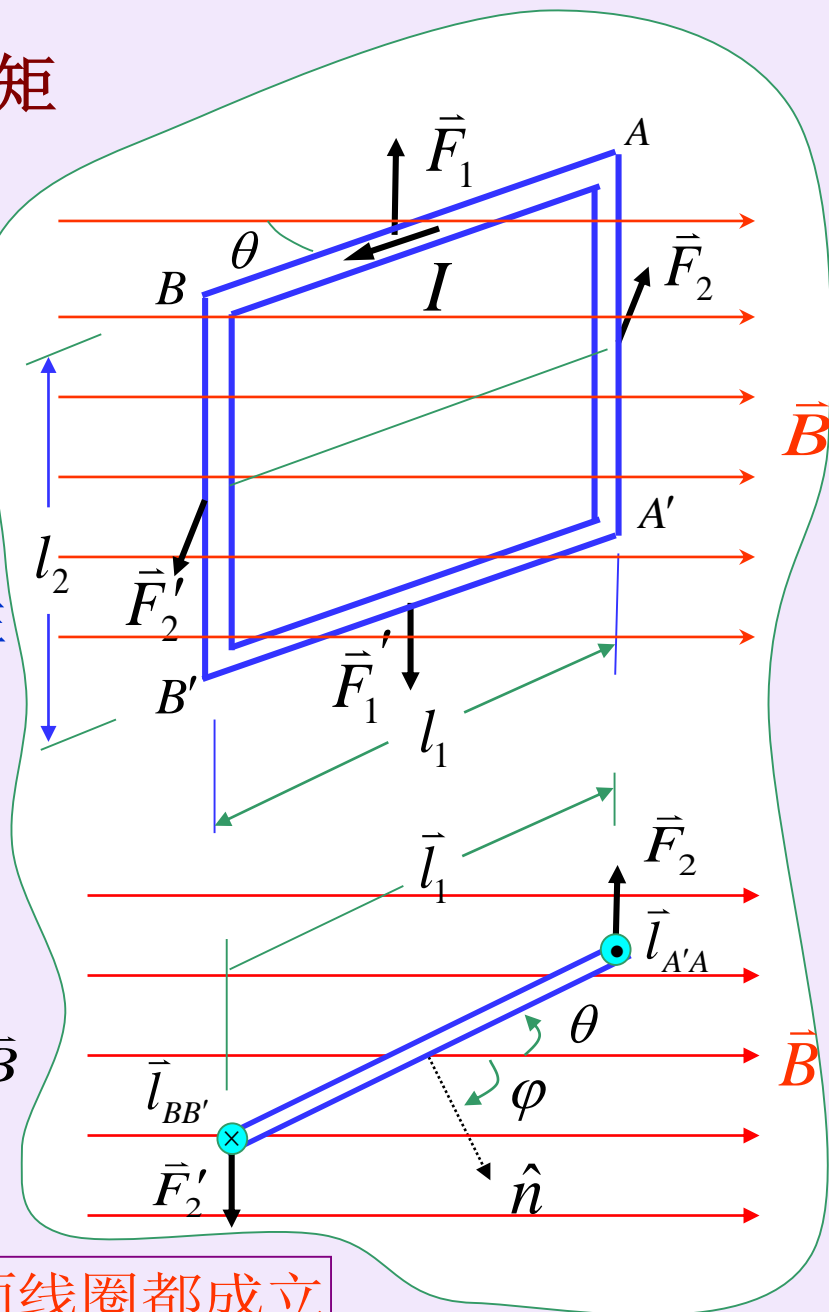
$$\vec{F}_1' = I \vec{l}_{B'A'} \times \vec{B} = -I \vec{l}_{AB} \times \vec{B} = -\vec{F}_1$$

⊗ \vec{F}_2 与 \vec{F}_2' 大小相等，方向相反，不作用在同一直线上，将产生力矩作用

$$\vec{F}_2 = I \vec{l}_{A'A} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_2' = I \vec{l}_{BB'} \times \vec{B} = -I \vec{l}_{A'A} \times \vec{B} = -\vec{F}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{l}_1 \times \vec{F}_2 = I \vec{l}_1 \times (\vec{l}_{A'A} \times \vec{B}) \\ &= I (\vec{l}_1 \times \vec{l}_{A'A}) \times \vec{B} + (\vec{l}_{A'A} \cdot \vec{B}) \vec{l}_1 - (\vec{l}_{A'A} \cdot \vec{l}_1) \vec{B} \\ &= I (\vec{l}_1 \times \vec{l}_{A'A}) \times \vec{B} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B} \end{aligned}$$



⊗ $\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ 对任何平面线圈都成立

⑥ 非均匀磁场对磁偶极子的磁力和力矩

➤ 磁偶极子

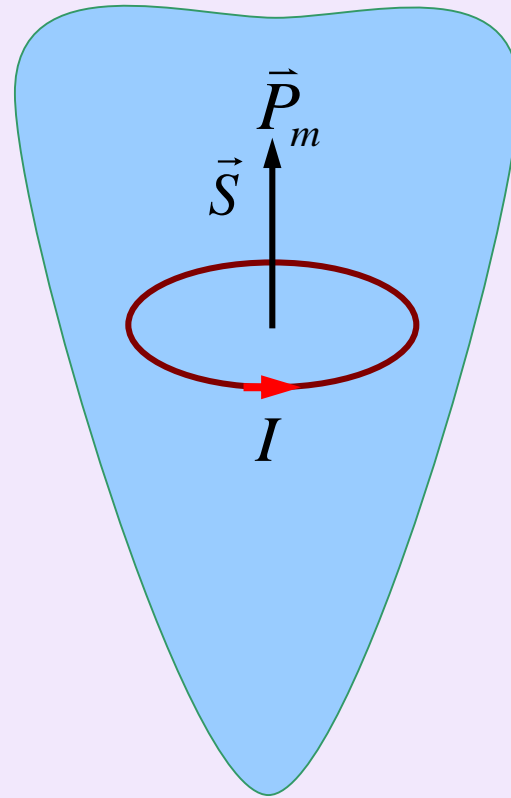
$$\vec{p}_m = I\vec{S}$$

➤ 磁偶极子所受磁力

$$\vec{F} = \vec{p}_m \cdot \nabla \vec{B}$$

➤ 磁偶极子所受磁力矩

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$



⑦ 非均匀磁场对任意线圈的磁力和力矩

- 任意线圈可以看成是无数磁偶极子的集体效应

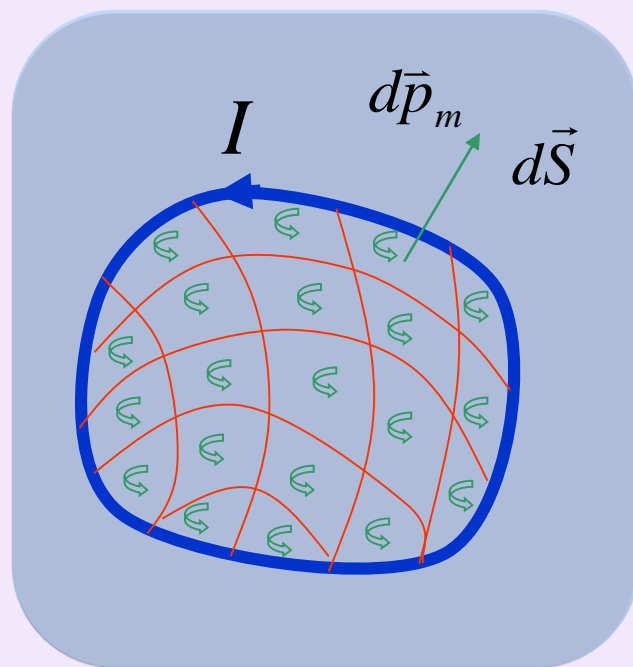
$$d\vec{p}_m = I d\vec{S}$$

- 任意线圈所受磁力

$$\vec{F} = \int_S (I \nabla \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

- 任意线圈所受磁力矩

$$\vec{M} = - \int_S I \vec{B} \times d\vec{S}$$



3. 安培力的应用

① 电动机（略）

② 灵敏电流计

➤ 磁场力矩：

$$M = NBIS$$

➤ 悬丝力矩：

$$M' = k\theta$$

➤ 力矩平衡：

$$M = M'$$

$$NBIS = k\theta$$

$$I = \frac{k}{NBS} \theta = K\theta$$



③ 冲击电流计

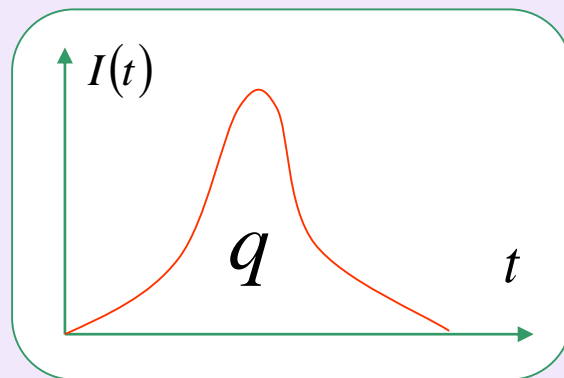
- 电流计在一个冲击电流作用时，由于作用时间短，所以线圈在冲击时间内没有转动，但获得了冲量，即线圈获得了初始角速度，也就是线圈获得了初始动能。
- 线圈转动将动能转化为游丝（悬丝）的势能，使指针有最大偏转，由此可测得冲击电流的总电荷量。

$$G = \int_0^{t_0} M dt = \int_0^{t_0} NBIS dt = NBS \int_0^{t_0} I dt = NBSq = J\omega_0 \quad \omega_0 = \frac{NBS}{J} q$$

$$E_k = \frac{1}{2} J\omega_0^2 = \frac{1}{2} J \left(\frac{NBS}{J} q \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(NBS)^2}{J} q^2 \quad E_p = \frac{1}{2} k\theta^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{(NBS)^2}{J} q^2 = \frac{1}{2} k\theta^2 = E_p$$

$$q = \frac{\sqrt{kJ}}{NBS} \theta = K' \theta$$



④ 电流单位“安培”的定义

➤ I_1 在 I_2 CD 处产生的磁场为:

$$B_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d}$$

➤ I_2 CD 电流元受到的力为:

$$dF_{21} = B_{21} I_2 dl_2 \sin \theta$$

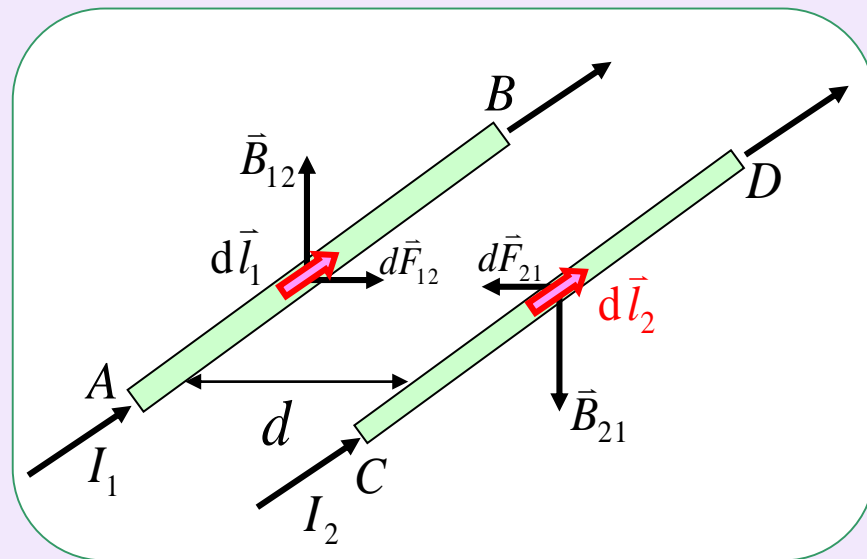
$$\begin{aligned} \sin \theta = 1 \\ = B_{21} I_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl_2 \end{aligned}$$

➤ 同理 I_1 AB 电流元受到的力为:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl_1$$

➤ 单位长度所受的力的都为:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$$



➤ “安培”的定义：真空中相距1m的二无限长而圆截面极小的平行直导线中载有相等的电流时，若在每米长度导线上的相互作用力正好等于 $2 \times 10^{-7} \text{N}$ ，则导线中的电流定义为1A。

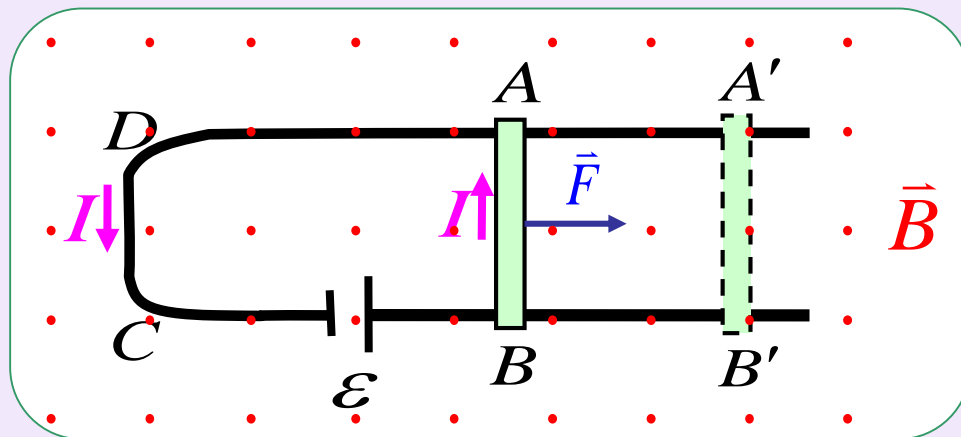
$$I = \sqrt{\frac{2\pi d}{\mu_0} \left(\frac{dF}{dl} \right)}$$

4. 安培力和力矩所作的功

① 载流导线在磁场中运动时磁力所作的功

- 设磁场为均匀磁场，当AB滑动时，电路中电流 I 保持不变，按安培定律，载流导线 AB 所受的磁力为：

$$F = BIl$$



- 载流导线 AB从AB移动到A'B'时磁力所作的功为：

$$A = FAA' = BIl(AA')$$

- 载流导线 AB从AB移动到A'B'时，通过回路的磁通量变化为：

$$\Delta\Phi = \Phi_{A'B'} - \Phi_{AB} = Bl(DA') - Bl(DA) = Bl(AA')$$

- 磁力所作的功可表示为：

$$A = I\Delta\Phi$$

- 当载流导线在磁场中运动时，如果电流保持不变，磁力所作的功等于电流乘以通过回路所环绕的面积内磁通量的增量，也即磁力所作的功等于电流乘以载流导线在移动中所切割的磁感应线数。

② 载流线圈在磁场内转动时磁力矩所作的功

➤ 线圈所受磁力矩

$$M = BIS \sin \varphi$$

➤ 磁力矩作的功为（负号“-”表示磁力矩作正功时将使 φ 减小）：

$$dA = -Md\varphi$$

$$= -BIS \sin \varphi d\varphi$$

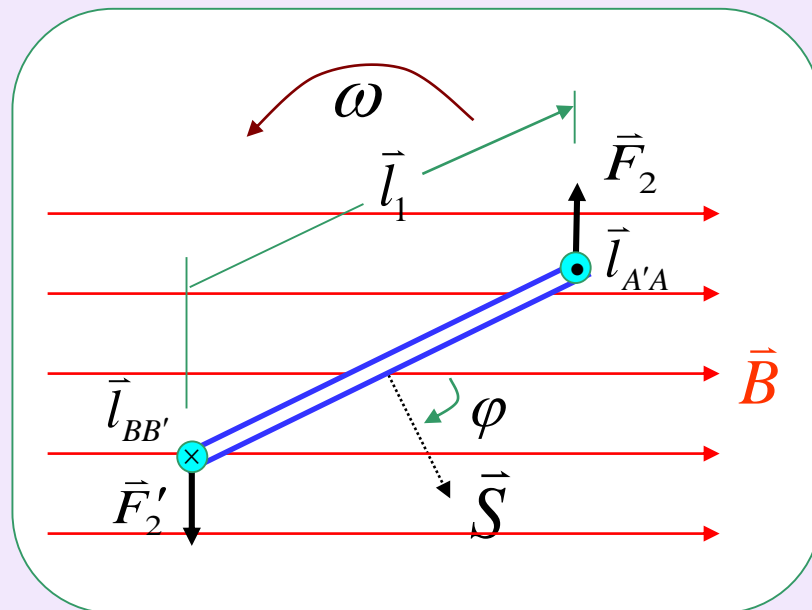
$$= Id(BS \cos \varphi)$$

$$= Id\Phi$$

$$A = \int dA = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$$

➤ 磁力矩作的功也为：

$$A = I\Delta\Phi$$



③ 磁力和磁力矩所作的功

- 任意一个闭合电流回路在磁场中改变位置或形状时，如果保持电流不变，则磁力所做的功与过程无关，只与始末状态有关：

$$A = I\Delta\Phi$$

- 恒定磁场不是保守力场，磁力的功不等于磁场能的减少，磁力所作的功是消耗电源的能量来完成的，要保持电流不变，就必须有电能的输入，磁力只是起了电能到机械能的转化作用，就象滑轮的功能一样。
- $\Delta\Phi > 0$ 时 $A > 0$ 所以磁力作用总是迫使线圈能够通过更多的磁感应线。线圈有平动也有转动，磁矩与磁场方向大致一致时平动使线圈向磁感应线密的方向移动，磁矩与磁场方向大致相反时平动使线圈向磁感应线疏的方向移动。转动使线圈平面的法线向磁感应线的方向转动。

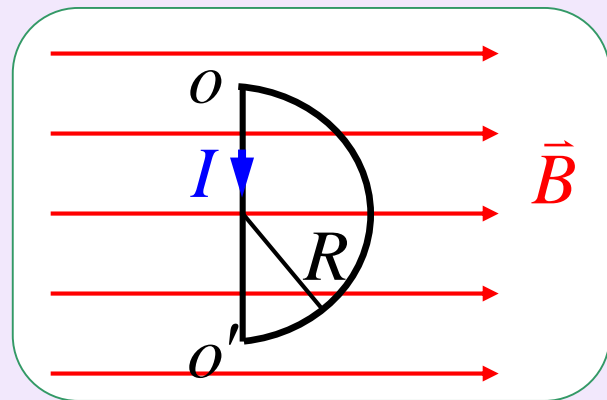
④ 例：半径为R的半圆形载流线圈，电流强度为I，可绕直径OO'转动，放置于均匀磁场中，求：(1)线圈所受的最大磁力矩；(2)线圈从图中所示位置转到Pm与B的夹角为45°时，磁力矩做功为多少？

解(1)

$$M = ISB = I \left(\frac{1}{2} \pi R^2 \right) B \sin \varphi = \frac{1}{2} \pi R^2 IB \sin \varphi$$

$$dA = -M d\varphi = -\frac{1}{2} \pi R^2 IB \sin \varphi d\varphi$$

$$A = - \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{1}{2} \pi R^2 IB \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \pi R^2 IB \cos \varphi \Big|_{\pi/2}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi R^2 IB$$



解(2)

$$\Phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = 0$$

$$\Phi_2 = \vec{B} \cdot \vec{S}_2 = B \cdot S \cos \varphi = B \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi R^2 B$$

$$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi R^2 B \quad A = I \Delta \Phi = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi R^2 IB$$

§ 6 带电粒子在磁场中的运动

1. 从安培力到洛伦兹力

⊗ dN 个电荷 q 全部通过 S 面的时间

$$dt = dl/v$$

⊗ 电流强度

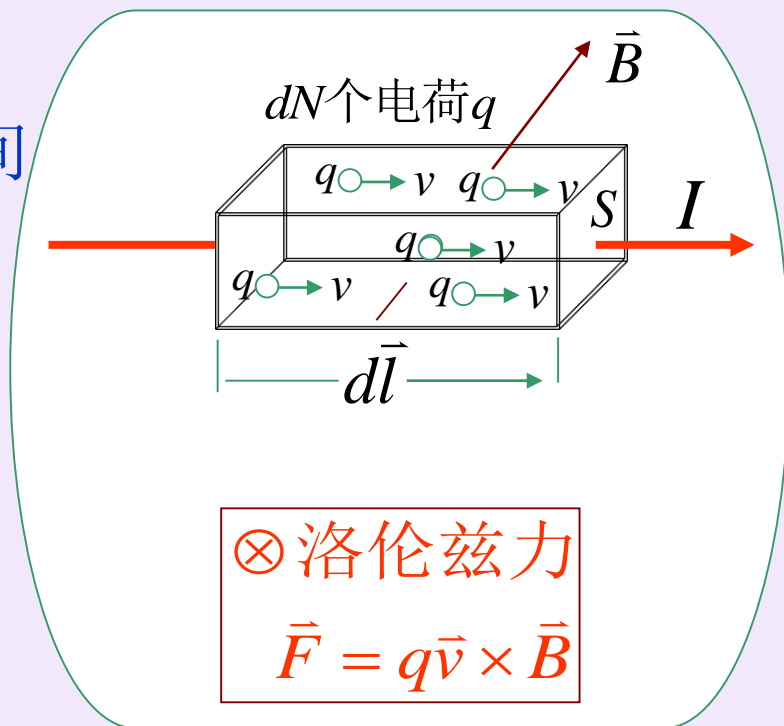
$$I = \frac{qdN}{dt} = \frac{qdN}{dl/v} = \frac{qv dN}{dl}$$

⊗ dN 个电荷 q 受到的总安培力

$$d\vec{F}_{dN} = I d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{qv dN}{dl} d\vec{l} \times \vec{B}$$

⊗ 每个电荷 q 受到的安培力

$$\vec{F} = \frac{dF_{dN}}{dN} = qv\hat{l} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



⊗ 功率: $p = \vec{F} \cdot \vec{v} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$

⊗ 洛伦兹力不做功。

⊗ 洛伦兹力不改变速度的大小，
只改变速度的方向。

2. 带电粒子在均匀磁场中的运动

① 如果 \vec{v} 与 \vec{B} 垂直. 则带电粒子在磁场中作匀速圆周运动

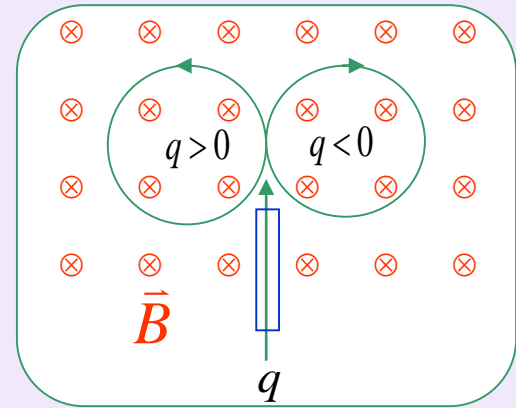
$$\because \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = \begin{cases} F = qvB \text{ 不变} \\ \text{方向与} \vec{v} \text{ 垂直} \end{cases}$$

\therefore 粒子作匀速圆周运动

$$\because F = qvB = m \frac{v^2}{R}$$

\therefore 回旋半径: $R = \frac{mv}{qB}$ 与磁感应成反比

\therefore 回旋周期: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$ 与速度无关



② 如果 \vec{v} 与 \vec{B} 斜交成 θ 角，则带电粒子在磁场中作螺旋线运动

$\therefore \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} = q\vec{v}_\perp \times \vec{B}$ 无纵向分量

\therefore 粒子在纵向为匀速运动： v_\parallel 不变

\therefore 洛伦兹力不改变速度的大小： v 不变

\therefore 粒子的横向速度： v_\perp 不变，粒子在横向为匀速圆周运动

\therefore 粒子为匀速螺旋线运动

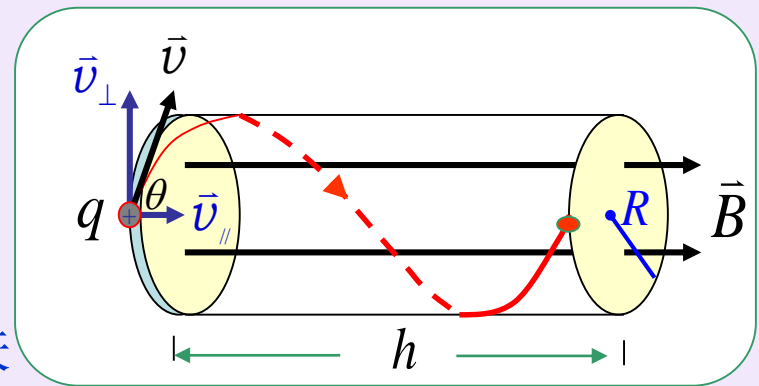
* 横向匀速圆周运动速度： $v_\perp = v_0 \sin \theta$

* 纵向匀速直线运动速度： $v_\parallel = v_0 \cos \theta$

* 横向回旋半径： $R = \frac{mv_\perp}{qB}$ 与纵向速度无关

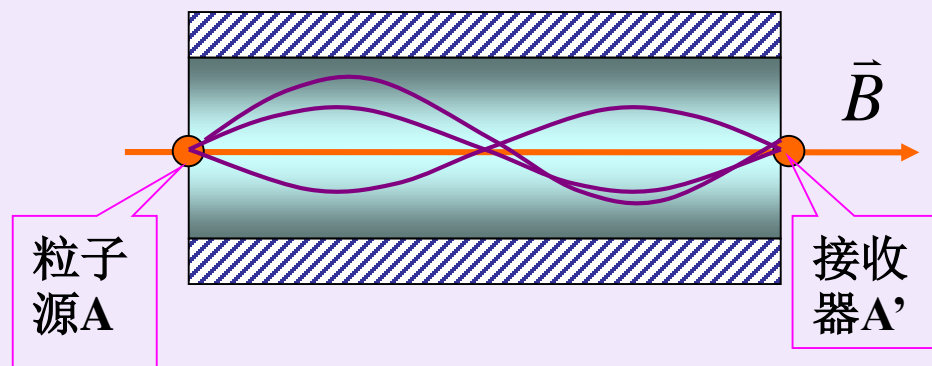
* 横向回旋周期： $T = \frac{2\pi m}{qB}$ 与速度无关

* 螺距： $h = v_\parallel T = v_\parallel \frac{2\pi m}{qB}$



③ 磁聚焦 magnetic focusing

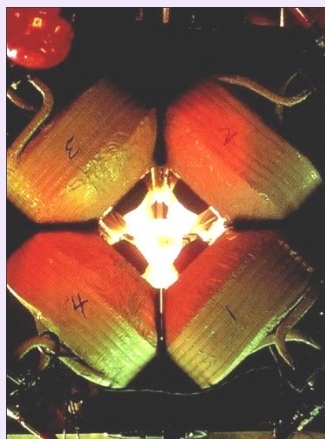
$$h = v_{\parallel} T = v \sin \theta \cdot \frac{2\pi m}{qB}$$



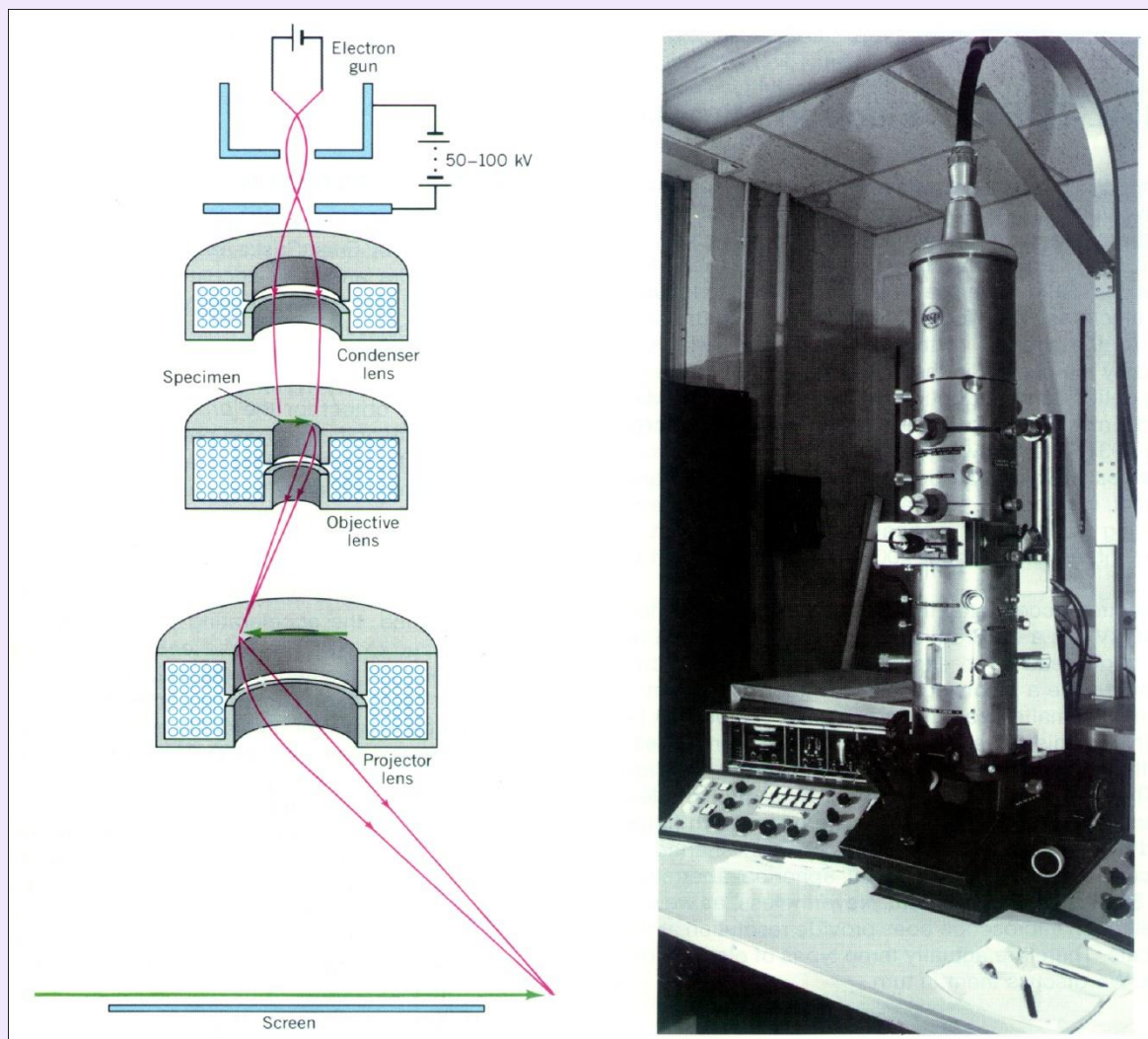
一束发散角不大的带电粒子束，若这些粒子沿磁场方向的分速度大小又一样，它们有相同的螺距，经过一个周期它们将重新会聚在另一点这种现象叫**磁聚焦**。

④ 电子显微镜中的磁聚焦

它广泛应用与电真空器件中如电子显微镜中。它起了光学仪器中的透镜类似的作用。



聚焦磁极



3. 带电粒子在非均匀磁场中的运动

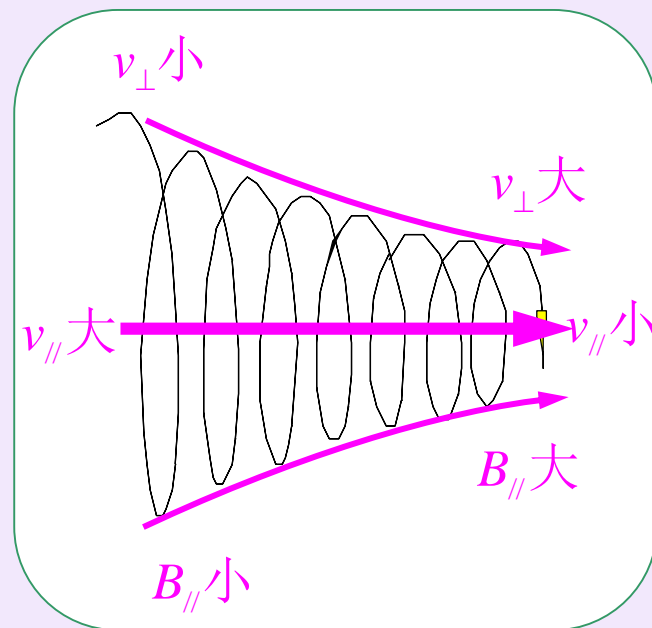
① 带电粒子在非均匀磁场中的变速螺旋线运动

$$\begin{aligned} * \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}) \times (\vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\parallel}) \\ &= (q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_{\parallel}) + (q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp}) + (q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_{\perp}) \end{aligned}$$

* $(q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_{\parallel})$ 方向为横向，产生横向回旋运动

* $(q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp})$ 方向为横向，加减速回旋运动

* $(q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_{\perp})$ 方向为纵向，加减速纵向运动



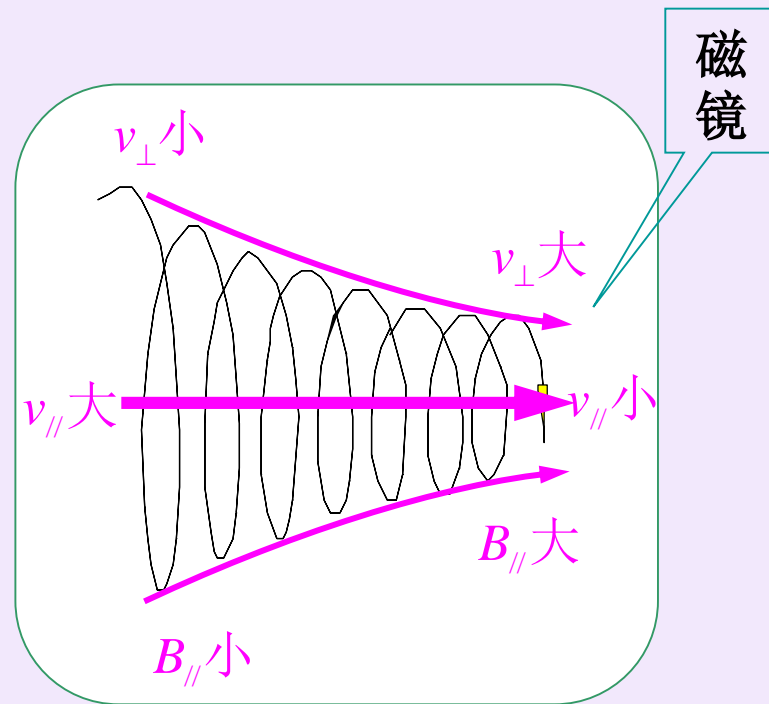
带电粒子在非均匀磁场中沿磁感应线作变速螺旋线运动

$$B_{\parallel} \uparrow \Rightarrow R = \frac{mv_{\perp}}{qB_{\parallel}} \downarrow \Rightarrow v_{\perp} \uparrow \Rightarrow v_{\parallel} = \sqrt{v_0^2 - v_{\perp}^2} \downarrow$$

$$B_{\parallel} \text{大} \rightarrow \begin{cases} v_{\perp} \text{大} \\ v_{\parallel} \text{小} \end{cases} \quad B_{\parallel} \text{小} \rightarrow \begin{cases} v_{\perp} \text{小} \\ v_{\parallel} \text{大} \end{cases}$$

② 横向磁约束

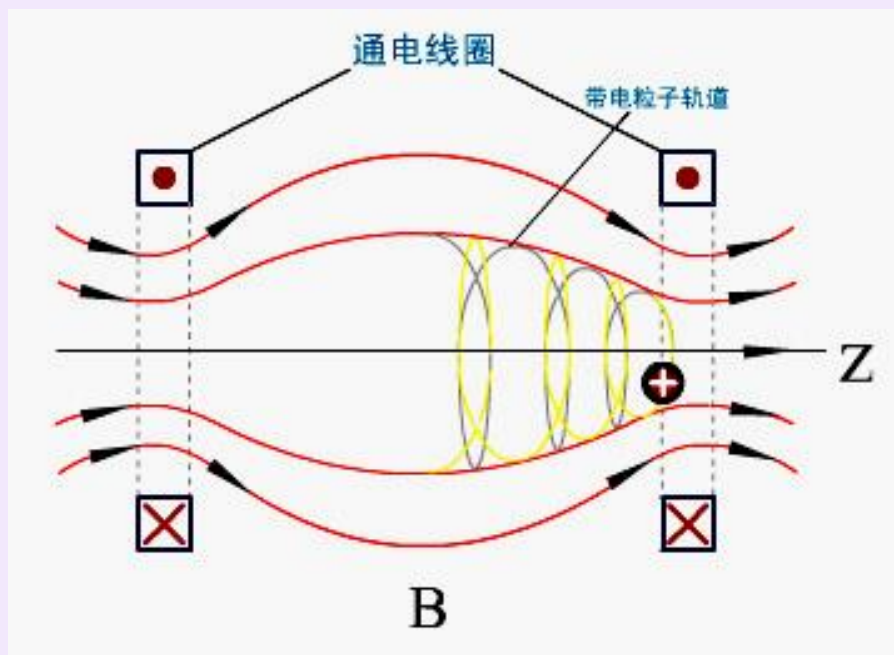
- 带电粒子在非均匀磁场中作变速螺旋线运动；
- 磁场增强，运动半径减少，强磁场可约束带电粒子在一根磁场线附近作螺旋线运动——横向磁约束



③ 纵向磁约束

- 磁场增强，粒子纵向速度减小；
- 强磁场可以减少粒子的纵向速度，使粒子运动发生“反射”——磁镜效应；
- 在非均匀磁场中，粒子纵向运动受到抑制——(纵向磁约束)

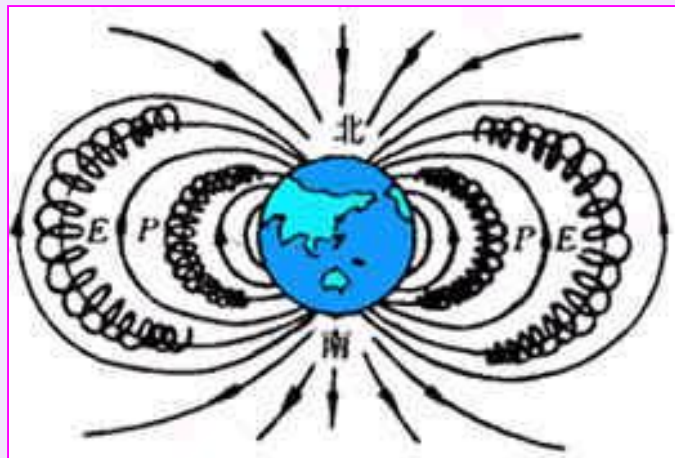
④ 磁瓶



➤ 粒子运动到右端线圈附近时，由于该处 B 很大，如果 v 初始速度较小，则 v 有可能减至为零，然后就反向运动，犹如光线射到镜面上反射回来一样。

➤ 带电粒子运动到左端线圈附近时，带电粒子轴向速度也有可能减至为零，然后带电粒子反向运动，我们通常把这种能约束运动带电粒子的磁场分布叫做磁镜，又形象地称为磁瓶。

⑤ 范·艾伦 (Van Allen) 辐射带

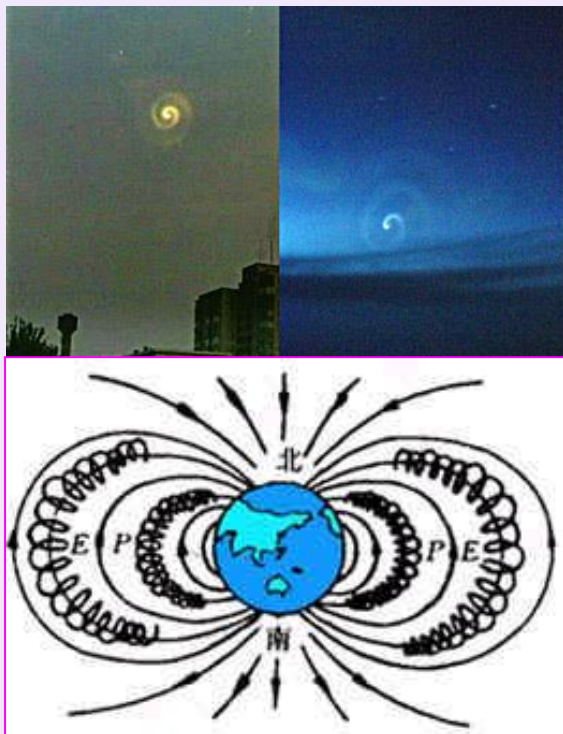


地磁场，两极强，中间弱，能够捕获来自宇宙射线的带电粒子，在两极之间来回振荡。

1958年，探索者一号卫星在外层空间发现被磁场俘获的来自宇宙射线和太阳风的质子层和电子层——（**Van Allen**）辐射带。

⑥类彗流星等离子体在地球磁场中的螺旋线运动

《走近科学》中国UFO悬案调查续集 ——《深空魅影》第一集2006年8月1日播出



2005年9月25日傍晚，中国南方航空公司一架航班在飞往青岛途中，飞行员猛然发现飞机正前方的夜空中，出现了一个蚊香状的奇异的发光体，正以一种内螺旋轨迹飞行！奇怪的是，在空管部门的雷达上这个物体没有丝毫显示！

就在这个夜晚，我国的辽宁、吉林、黑龙江、内蒙等多个地区，都有人目击了同一不明飞行物。

1981年，我国西南竟然发生过一次与“9.25”几乎完全相同的UFO目击事件。一种螺旋状的UFO，在我国反复出现一种UFO。

成因假设之一：该现象是类彗流星体在穿越地球磁场时，由其上的等离子体（电浆）和地球磁场相互作用而形成的一种特殊天文现象。

4. 霍耳 (E. C. Hall) 效应

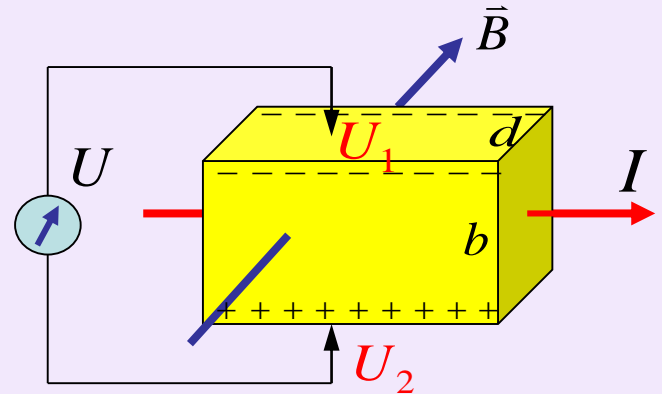
① 霍耳现象 (霍耳效应)

- 1879年霍耳发现把一载流导体放在磁场中，如果磁场方向与电流方向垂直，则在与磁场和电流二者垂直的方向上出现横向电势差，这一现象称之为霍耳现象。

- 实验结果：

$$U_H = U_1 - U_2 \propto \frac{IB}{d}$$

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \begin{cases} U_H > 0, & (q > 0) \\ U_H < 0, & (q < 0) \end{cases}$$



- 载流子的正负决定 U_H 的正负；
- 实验上称 R_H 为霍耳系数，与导体材料有关。

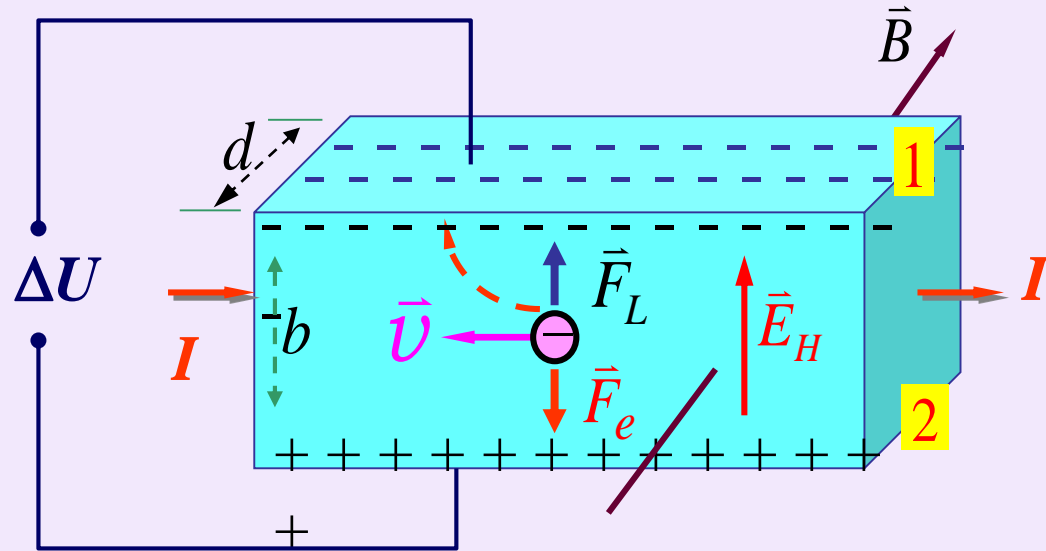
② 霍耳效应的理论解释

- 导体中的载流子是负电荷电子，导体中有电流，表示电子在纵向沿着电流的反方向运动，由于磁场的洛伦兹力作用，电子不但有纵向运动，还会有横向偏转运动。
- 横向偏转运动在导体上下面上将分别积累正负电荷，上下面上积累的正负电荷将形成霍耳电场，霍耳电场的电场力将阻止电子的横向偏转运动。
- 霍耳电场力与洛伦兹力平衡时，电子只有纵向运动，没有有横向偏转运动，这时霍耳电场不变，它在上下面之间形成稳定的横向电势差-霍耳电压

$$F = evB - eE \uparrow \rightarrow 0$$

$$E = vB = \frac{(env)SB}{enS} = \frac{IB}{enS}$$

$$\begin{aligned} U_H &= bE = b \frac{IB}{enS} \\ &= b \frac{IB}{en(bd)} = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} \end{aligned}$$



③ 霍耳系数

➤ 霍耳系数 R_H

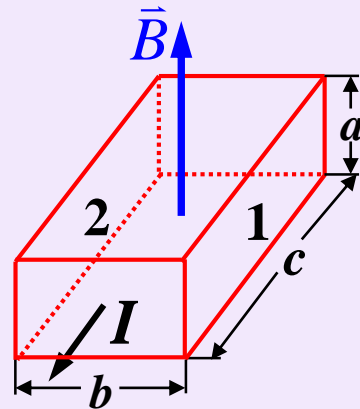
$$U_H = \frac{1}{ne} \frac{IB}{d} = R_H \frac{IB}{d} \quad \Rightarrow \quad R_H = \frac{1}{ne}$$

- 在金属导体中，自由电子的浓度大，故金属导体的霍耳系数很小，相应的霍耳电势差也就很弱，即霍耳效应不明显。
- 在半导体中，载流子浓度很低，故半导体的霍耳系数比金属导体大得多，即半导体能产生很强的霍耳效应。
- 在电流、磁场均相同的前提下，应特别注意：p型半导体（载流子：正电荷的空穴）和n型半导体（载流子：负电荷的电子）的霍耳电势差正负不同。
- 载流子浓度越低，霍耳系数越大，霍耳效应越强，但载流子浓度越低导体或半导体电阻越大，要保证一定的电流，就要高的驱动电压，所以载流子浓度越不能太低。

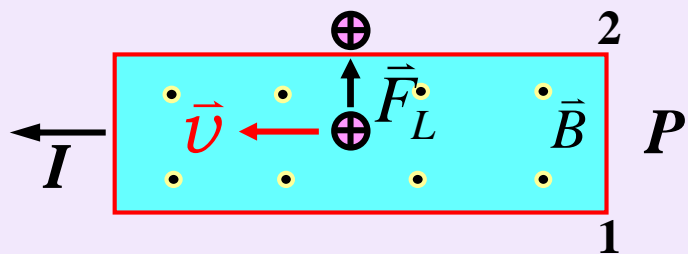
④例：如图所示，一块半导体样品沿 x 轴方向有电流 I 流动，在 z 轴方向有均匀磁场 B 。实验数据如下： $a=0.10\text{cm}$ ， $c=1.0\text{cm}$ ， $I=1.0\text{mA}$ ， $B=0.3\text{T}$ ，半导体片两侧的电势差 $U_{12}=6.55\text{ mV}$ 。

(1) 试问此半导体是P 型还是n 型？

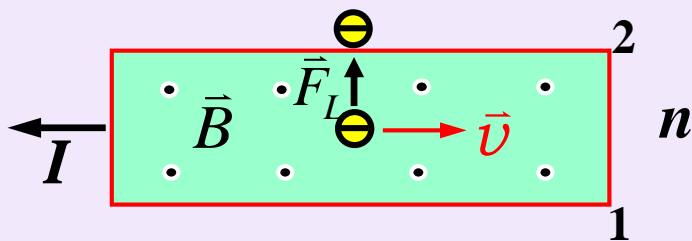
(2) 求载流子浓度 n 为多少？



解：(1) $U_{12} = U_1 - U_2 > 0$



$U_2 - U_1 > 0$ 不可能是P 型半导体



$U_1 - U_2 > 0$ 此半导体为 n 型半导体

$$(2) \quad U_{12} = \frac{1}{nq} \frac{IB}{a} = R_H \frac{IB}{a}$$

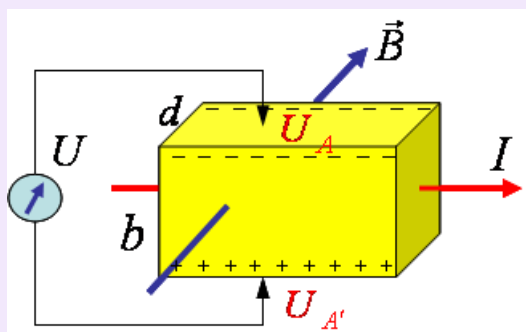
a 为沿 B 方向半导体的厚度.

$$\begin{aligned} n &= \frac{IB}{U_{12}qa} \\ &= \frac{10^{-3} \times 0.3}{6.55 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.1 \times 10^{-2}} \\ &= 2.9 \times 10^{20} (\text{个}/\text{m}^3) \end{aligned}$$

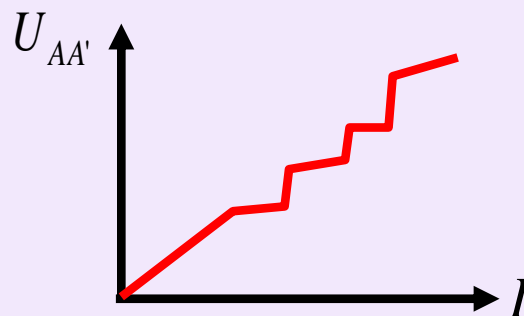
⑤ 霍耳效应的应用

测量载流子类型
测量载流子浓度
测量磁感应强度

因为半导体的载流子浓度小于金属电子的浓度且容易受温度、杂质的影响，所以霍耳系数是研究半导体的重要方法之一。



$$U_{AA'} = R_H \frac{IB}{d}$$



九十年代，发现量子霍耳效应，即曲线 $U_{AA'} \sim I$ 当 B, d, R_H 为常数时，出现台阶，而不为线性关系。理论上用量子力学解释尚不够。分数量子霍耳效应与分数电荷的存在与否有关。86年获诺贝尔奖金。

讨论题

电磁流量计（简称EMF）是一种场效应型传感器，已有50多年的应用历史，在全球范围内得到广泛应用，领域涉及水/污水、化工、医药、造纸、食品等各个行业。大口径仪表较多应用于给排水工程。中小口径常用于固液双相等难测流体或高要求场所。小口径、微小口径常用于医药工业、食品工业、生物工程等有卫生要求的场所。

使用电磁流量计的前提是被测液体必须是导电的，试分析工作原理。



电磁流量计工作原理分析:

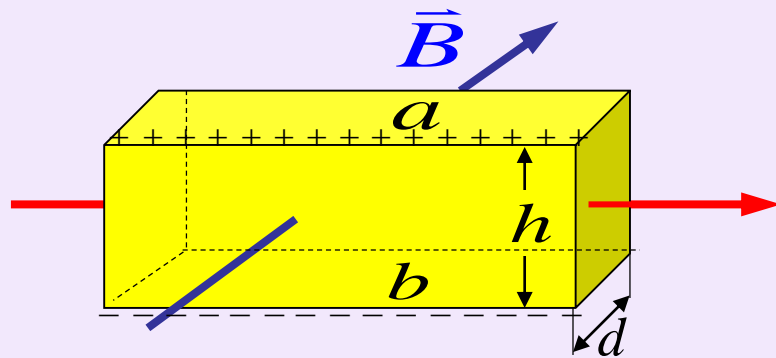
(1) **截面矩形**的非磁性管,其宽度为 d 、高度为 h , 管内有导电液体自左向右流动, 在垂直液面流动的方向加一指向纸面内的匀强磁场,当磁感应强度为 B 时,可通过测量液体上表面的 a 与下表面的 b 两点间的霍尔电势差 U_H , 确定液体流量。

导电液体自左向右在非磁性管道内流动时, 在洛伦兹力作用下, 其中的正离子积累于上表面, 负离子积累于下表面, 于是在管道中又形成了从上到下方向的匀强霍尔电场 E_H 它同匀强磁场 B 一起构成了速度选择器。因此在稳定平衡的条件下, 对于以速度 v 匀速流动的导电液体, 无论是对其中的正离子还是负离子, 都有

$$qE_H = q \frac{U_H}{h} = qvB \quad U_H = vBh$$

$$\therefore \text{流速} \quad v = \frac{U_H}{Bh},$$

$$\text{液体流量} \quad Q = vhd = \frac{U_H d}{B}.$$



(2) 截面圆形的非磁性管, B —磁感应强度; D —测量管内径; U —流量信号(电动势); v —液体平均轴向流速, L 测量电极之间距离.

霍尔电势 U

$$U = kBLv \quad (1)$$

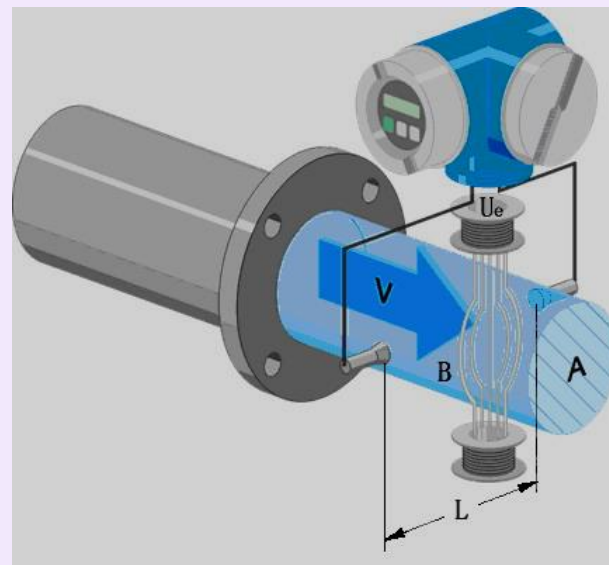
k (无量纲) 的常数

在圆形管道中, 体积流量是:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v \quad (2)$$

把方程(1)、(2) 合并得: 液体流量 $Q = \frac{\pi D^2}{4kL} \cdot \frac{U}{B}$

或者 $Q = K \frac{U}{B}$ K 校准系数, 通常是靠湿式校准来得到。



截面矩形

$$U_H = vBh$$