§2 矩阵不等式

一、 矩阵特征值与奇异值不等式

设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶复方阵，$\lambda(A)$，$\sigma(A)$ 分别为 A 的任一特征值和奇异值. 当 A 为实对称或实正定方阵时，$\lambda(A)$ 为实数，我们总设 A 的 n 个特征值和奇异值从大到小排列：

$$|\lambda_1(A)|\geqslant|\lambda_2(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(A)|;\ |\sigma_1(A)|\geqslant|\sigma_2(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\sigma_n(A)|;$$

$\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k(A)|$ 为 A 的谱半径. 因为 $\det A=\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k(A)$，所以，$A$ 的行列式

$\det A$ 与 $\lambda_k(A)$ 有密切联系.

1. **Gersgorin 不等式**:设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶复方阵. $\forall\lambda_k(A)$,至少存在一个 m,使得

$$|\lambda_k(A)-a_{mm}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n}|a_{jj}|.$$

Fan Ky 证明:设 $B=(b_{kj})$ 是另一 n 阶复方阵.若 $b_{kj}>|a_{kj}|$, $\forall k,j=1,2,\cdots,n$,则

$$|\lambda_k(A)-a_{mm}|\leqslant\rho(B)-b_{mm};$$

Ostrowski 则进一步证明: $\forall p:0\leqslant p\leqslant 1$,成立

$$|\lambda_k(A)-a_{mm}|\leqslant\Big(\sum_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{n}|a_{kj}|\Big)^{p}\Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{n}|a_{ij}|\Big)^{1-p}.$$

2. 设 A,B 为 n 阶实对称方阵, $x\in R^n$, $x\neq 0$. $\dfrac{(x,Ax)}{(x,x)}$ 称为 **A 的 Rayleigh 商.**

(1) **CF 不等式(Courant - Fischer 不等式)**:

$$\lambda_n(A)\leqslant\frac{(x,Ax)}{(x,x)}\leqslant\lambda_1(A);$$

(2) $\lambda_n(B)\leqslant\lambda_k(A+B)-\lambda_k(A)\leqslant\lambda_1(B)$, $1\leqslant k\leqslant n$;

3. **Weyl 不等式**:设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵, $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$; $\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$,则

(1) $\lambda_k(A)+\lambda_n(B)\leqslant\lambda_k(A+B)\leqslant\lambda_k(A)+\lambda_1(B)$, $1\leqslant k\leqslant n$;

(2) $\lambda_m(A+B)\leqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$, $m\geqslant j+k-1$;

(3) $\lambda_j(A)+\lambda_k(B)\leqslant\lambda_{j+k-n}(A+B)$, $j+k\geqslant n$.

(证明见[30]P114 - 120)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k(A)|^p\leqslant\sum_{k=1}^{m}(\sigma_k(A))^p$, $p>0$, $1\leqslant m\leqslant n$.

证明见[12]P.153 - 154.

4. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵,则对于 $1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n$,成立

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_{n-m+j}(B)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A+B)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_k(B).$$

(证明见[30]P121 - 122).

5. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵, $r(B)\leqslant m$, $k\leqslant n-2m$,则

(1) $\lambda_{k+2m}(A+B)\leqslant\lambda_{k+m}(A)\leqslant\lambda_k(A+B)$;

(2) $\lambda_{k+2m}(A)\leqslant\lambda_{k+m}(A+B)\leqslant\lambda_k(A)$.

证明见[30]P123.

6. 设 A,B 为 n 阶实对称正定方阵,则

$$\Big(\prod_{k=1}^{m}\lambda_k(A)\Big)^{1/m}+\Big(\prod_{k=1}^{m}\lambda_k(B)\Big)^{1/m}\leqslant\Big(\prod_{k=1}^{m}\lambda_k(A+B)\Big)^{1/m}.$$

7. **Sturm 不等式**:设 A 是 n 阶实对称方阵, A_m 是 A 的任一 m 阶主子阵,这样的主子

阵共有$\binom{n}{m}$个,则　$\lambda_{n-m+k}(A)\leqslant\lambda_k(A_m)\leqslant\lambda_k(A),1\leqslant k\leqslant m$.

证明见[30]$P124-125$.

8. **Fan Ky 不等式**:设 A,B 为 n 阶实正定矩阵,$0\leqslant\alpha\leqslant 1$. 记 $P_m(A)=\prod_{k=1}^{m}\lambda_{n-k+1}(A)$ （即 A 的前 m 个最小特征值之积）;$\sigma_m(A)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n-k+1}(A)$ （即前 m 个最小特征值之和）,则

(1)　$[P_m(A)]^{\alpha}[P_m(B)]^{1-\alpha}\leqslant P_m(\alpha A+(1-\alpha)B)$;

(2)　$\alpha\sigma_m(A)+(1-\alpha)\sigma_m(B)\leqslant\sigma_m(\alpha A+(1-\alpha)B)$.

9. 设 A 是 n 阶实对称方阵,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 R^n 中标准正交向量组,令 $b_{kj}=(x_k,Ax_j)$,$B=(b_{kj})$,则

(1)　**CP 不等式(Cauchy - Poincare 不等式)**:

$$\lambda_{n-m+k}(A)\leqslant\lambda_k(B)\leqslant\lambda_k(A).\ k=1,2,\cdots,m.$$

(2)　**Fan Ky 不等式**:

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(A)=\max\sum_{k=1}^{m}b_{kk};\ \sum_{k=1}^{m}\lambda_{n-k+1}(A)=\min\sum_{k=1}^{m}b_{kk},$$

特别:$\sum_{k=m}^{n}\lambda_k(A)\leqslant\sum_{k=m}^{n}a_{kk},1\leqslant m\leqslant n$.

(3)　若 A 为 n 阶实正定方阵,则

$$\prod_{k=m}^{n}\lambda_k(A)=\min\prod_{k=m}^{n}b_{kk}\qquad\text{(Fan Ky)}$$

10. **Poincare 不等式**:设 A 为 n 阶 Hermite 方阵,B 为 $n\times m$ 阶正交阵,即 $B^*B=I_m$,则

$$\lambda_{n-m+k}(A)\leqslant\lambda_k(B^*AB)\leqslant\lambda_k(A)\leqslant.1\leqslant k\leqslant m.$$

由此推出 **DW 不等式**:设 A 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,B 为正交投影阵,$r(B)=m$,则

$\lambda_{n-m+k}(A)\leqslant\lambda_k(BA)\leqslant\lambda_k(A),1\leqslant k\leqslant m$.(证明及其推广见[30]P.125 - 134)

11. 设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,$1\leqslant k\leqslant n$,则

(1)　$\lambda_n(A)\lambda_k(B)\leqslant\lambda_k(AB)\leqslant\lambda_1(A)\lambda_k(B)$;

(2)　$\lambda_k(A)\lambda_n(B)\leqslant\lambda_k(AB)\leqslant\lambda_k(A)\lambda_1(B)$.

证明及其推广见[30]128-129.

(3)　设 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A);\lambda_1(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(B),1\leqslant k\leqslant n$ 则

$$\frac{1}{n\lambda_n(A)\lambda_n(B)}\leqslant\lambda_k(AB)\leqslant n\lambda_1(A)\lambda_1(B).$$

(4)　$\left|\lambda_k(AB)-\frac{1}{n}(\operatorname{tr}(AB))\right|\leqslant\left\{[\operatorname{tr}(AB)]^2-\frac{n}{n-1}[\operatorname{tr}(AB)^2-\operatorname{tr}(A^2B^2)]\right\}^{1/2}$.

(冯慈璜[352]1987,14(1):121 - 122.)

12. 设 A,B 是 n 阶半正定 Hermite 方阵.$1\leqslant k_1<\cdots<k_m\leqslant n$.则

(1) $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(A)\lambda_{n-j+1}(B)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(AB)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(A)\lambda_j(B)\quad(1\leqslant m\leqslant n)$;

(2) $\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A)\lambda_{n-j+1}(B)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(AB)$;

(3) $\prod_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(AB)\leqslant\prod_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A)\lambda_j(B)$. 当 $m=n$ 时等号成立;

(4) $\prod_{j=1}^{m}\lambda_{k_j}(A)\lambda_{n-k_j+1}(B)\leqslant\prod_{j=1}^{m}\lambda_j(AB)$. 当 $m=n$ 时,等号成立.

证明见[30]P.132 – 134.

13. **Schur 不等式**:设 A 为 n 阶复方阵,令 $\|A\|=(\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2}$,则

(1) $\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k(A)|^2\right)^{1/2}\leqslant\|A\|$; (2.1)

(2) $\left(\sum_{k=1}^{n}|\mathrm{Re}(\lambda_k(A))|^2\right)^{1/2}\leqslant\left\|\frac{1}{2}(A+A^*)\right\|$;

(3) $\left(\sum_{k=1}^{n}|\mathrm{Im}(\lambda_k(A))|^2\right)^{1/2}\leqslant\left\|\frac{1}{2}(A-A^*)\right\|$.(证明见[30]P135 – 136)

推论 $\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k(A)|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^*A)$.

1982 年屠伯埙将(2.1)式作了改进.证明:设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶复方阵

$$A=\begin{pmatrix}A_k & B_k\\ C_k & D_k\end{pmatrix}$$

的特征值,其中 A_k 是 A 的 k 阶顺序主子阵,$1\leqslant k\leqslant n-1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\leqslant\|A\|^2-\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\|B_k\|-\|C_k\|^2).$$

证明及其进一步推广见复旦大学学报 1982,21:416;1985,24:321;1986,25:429 – 435.

14. **Hirsch 不等式**:设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶复方阵.

记 $M_1=\max_{k,j}\{|a_{kj}|\}$;$M_2=\max_{k,j}\{\frac{1}{2}|a_{kj}+\overline{a}_{jk}|\}$;$M_3=\max_{k,j}\{\frac{1}{2}|a_{kj}-\overline{a}_{jk}|\}$,则对 A 的任一特征值 $\lambda(A)$,成立

$|\lambda(A)|\leqslant nM_1$; $|\mathrm{Re}\lambda(A)|\leqslant nM_2$; $|\mathrm{Im}\lambda(A)|\leqslant nM_3$.

证明见[30]P136 – 137.

15. **Bendixson 不等式**:设 $A=(a_{kj})$ 为 n 阶实方阵,$\lambda(A)$ 为 A 的任一特征值,令 $d=\max\{(1/2)|a_{kj}-a_{jk}|\}$,则

$$|I_m(\lambda(A))|\leqslant\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}d.$$

这是本节 Schur 不等式(N.13)的推论.

16. **Cauchy 不等式**:设 A 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,则 $\forall x,y\in R^n$,成立

$$|(x,Ay)|^2\leqslant(x,Ax)(y,Ay).$$

若 x 与 y 正交,A 为 n 阶正定 Hermite 方阵. A 的特征值 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)>0$.

则成立 **Wieland 不等式**:

$$|(x,Ay)|^2\leqslant\left(\frac{\lambda_1(A)-\lambda_n(A)}{\lambda_1(A)+\lambda_n(A)}\right)^2(x,Ax)(y,Ay).$$

证明见[30]P. 142 - 144.

17.　**Kantorovich 不等式**:设 A 为 n 阶正定 Hermite 方阵. $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)>0$, $x\in R^n$,则

$$1\leqslant\frac{(x,Ax)(x,A^{-1}x)}{(x,x)^2}\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

证明及其各种推广,应用见[30]P144 - 153,P218 - 221,P288 - 292.

18.　**Weyl 不等式**:设 A 为 n 阶复方阵,f 在 $(0,\infty)$ 上递增,且 $f(e^t)$ 是 t 的凸函数(这时称 f 为 Weyl 函数),则

$$\sum_{k=1}^{m}f(|\lambda_k(A)|^2)\leqslant\sum_{k=1}^{m}f(\lambda_k(AA^*)),1\leqslant m\leqslant n.$$

1949 年 Fan Ky 和 1992 年陈灵分别作了推广,见[339]1992,1:80 - 82.

19.　设 A,B 为 n 阶复方阵,则当 $1\leqslant m<n$ 时,

(1)　$\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k(AB)\leqslant\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k(A)\sigma_k(B)$;

(2)　$\prod\limits_{k=1}^{m}|\lambda_k(A)|\leqslant\prod\limits_{k=1}^{n}\sigma_k(A)$,

当 $m=n$ 时,(1)(2) 中等号成立. 证明见[123]P171 - 172. Yang X. M. 等进一步证明:设 $A_1,\cdots,A_m$ 是 n 阶复方阵,$1\leqslant k\leqslant n$,则

(3)　$\prod\limits_{i=1}^{k}\sigma_i(\prod\limits_{j=1}^{m}A_j)\leqslant\prod\limits_{i=1}^{k}\prod\limits_{j=1}^{m}\sigma_i(A_j)$;

(4)　$\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_i(\prod\limits_{j=1}^{m}A_j)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}\prod\limits_{j=1}^{m}\sigma_i(A_j)$.

由(3) 推出:

(5)　设 $A_1,\cdots,A_m$ 是 n 阶半正定矩阵,则

$$\prod_{i=1}^{k}\left|\lambda_i(\prod_{j=1}^{m}A_j)\right|\leqslant\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m}\sigma_i(A_j),1\leqslant k\leqslant n.$$

证明见[301]2001,263(1):327 - 331.

20.　在本章开头时曾指出 $A=(a_{kj})\geqslant0$ 表示 $\forall a_{kj}\geqslant0$,但有的著作中,$A\geqslant0$ 则指 A 的所有特征值为非负,这是两个不同的概念. 在后一种意义下,从 $A\geqslant B\geqslant0$,不能推出 $A^2\geqslant B^2$, 例如取 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,从 $A\geqslant0,B\geqslant0$ 也不能推出 $AB+BA\geqslant0$,例如:取 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. 1985 年 Chan 等在后一种意义下证明了以下结果:

设 A,B,C,D 为 Hermite 矩阵,A 与 C 可交换,而 B 与 D 可交换,若 $A\geqslant B\geqslant0,C\geqslant D\geqslant0$,则 $\forall p,q>0,p+q\leqslant1$,成立 $A^pC^q\geqslant B^pD^q$. 对 $\forall p:0\leqslant p\leqslant1$,成立 $A^p\geqslant B^p$.

作者们提出若干猜想．猜想 1 若 $A \geqslant B \geqslant 0$，则 $(BA^2B)^{1/2} \geqslant B^2$，且 $A^2 \geqslant (AB^2A)^{1/2}$；猜想 2 设 A,B,C 为非负 Hermite 矩阵，若 $A \leqslant C, B \leqslant C$，则

$$(A^2+B^2)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}C.$$

1987 年，Furuta，T.，举出反例，说明猜想 2 不成立．我们自然要问，$(A^2+B^2)^{1/2}$ 的最优上下界是什么，进一步当 $p>0$ 时，$(A^p+B^p)^{1/p}$ 的最佳上下界是什么？

二、 矩阵迹不等式

1. **Hölder 不等式**：设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，$A \neq 0, B \neq 0, 1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，则

$$\operatorname{tr}(A^{1/p}B^{1/q}) \leqslant (\operatorname{tr}A)^{1/p}(\operatorname{tr}B)^{1/q},$$

仅当存在正常数 c，使得 $B=cA$ 时等号成立．$p=q=2$ 时，称为 Cauchy 不等式．

2. **Minkowski 不等式**：设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，$A \neq 0, B \neq 0, 1<p<\infty$，则

$$(\operatorname{tr}(A+B)^p)^{1/p} \leqslant (\operatorname{tr}A^p)^{1/p}+(\operatorname{tr}B^p)^{1/p},$$

仅当 $\exists c>0, B=cA$ 时等号成立．

N1－2 的证明见 Magnus，J. R. [386]1987，95：127－134．或[30]P195－200．

3. 设 A,B 为 $m \times n$ 复矩阵，则

$$|\operatorname{tr}(A^*B)|^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^*A)\operatorname{tr}(B^*B).$$

特别当 A,B 为实对称或 Hermite 方阵时，

$$|\operatorname{tr}(AB)|^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

仅当存在常数 c，使得 $A=cB$ 时，等号成立．

提示：利用 Cauchy 不等式．

设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶复方阵，则

$$\operatorname{Retr}(A_1\cdots A_m) \leqslant |\operatorname{tr}(A_1\cdots A_m)| \leqslant \left[\prod_{k=1}^{m}\operatorname{tr}(A_k^*A_k)^{m/2}\right]^{1/m} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{tr}(A_k^*A_k)^{m/2};$$

推论 1 设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶实对称半正定矩阵，则

$$\operatorname{tr}(A_1\cdots A_m) \leqslant \prod_{k=1}^{m}[\operatorname{tr}(A_k^m)]^{1/m} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{tr}(A_k^m).$$（$m=2$ 时即为 **Bellman 不等式**）．

推论 2 （**Ault 不等式**）设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶复方阵，记 $B_m=\prod_{k=1}^{m}A_k$，，则

$$\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}(B_m+B_m^*)\right) \leqslant \operatorname{tr}(B_m^*B_m)^{1/2} \leqslant \frac{1}{m}\operatorname{tr}\left[\sum_{k=1}^{m}(A_k^*A_k)^{m/2}\right].$$

见[334]1992，35(5)：620－622．

4. 设 A,B 为 n 阶方阵，$A-B$ 为半正定 Hermite 方阵，则 $\operatorname{tr}A \geqslant \operatorname{tr}B$，仅当 $A=B$ 时等号成立．特别当 A 为半正定 Hermite 方阵时，$\operatorname{tr}A \geqslant 0$．

5. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵．

(1) 若 A,B 均为半正定方阵，则

$0\leqslant \mathrm{tr}(AB)\leqslant \lambda_1(B),\mathrm{tr}A\leqslant(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B);\mathrm{tr}(I_n+AB)A\leqslant[1+\lambda_1(AB)]\mathrm{tr}A;$

$$\mathrm{tr}(I_n+AB)A\leqslant[n+\mathrm{tr}(AB)]\lambda_1(A).$$

(2) 若 A 为正定方阵,B 为半正定方阵,则

$$\mathrm{tr}(B)\leqslant \lambda_1(A)\mathrm{tr}(A^{-1}B)\leqslant(\mathrm{tr}A)\mathrm{tr}(A^{-1}B);$$

$$\mathrm{tr}(I_n+AB)^{-1}A\geqslant\frac{\mathrm{tr}A}{1+\lambda_1(AB)}.$$

式中 $\lambda_1(A)$ 表示 A 的最大特征值.见[30]P170－171.

6. **Neumann 不等式**:设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵.

$\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A);\lambda_1(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(B)$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\lambda_{n-k+1}(B)\leqslant\mathrm{tr}(AB)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\lambda_k(B).$$

证明及其推广见[30]P178－186.其中一个重要的推广的形式就是下述 **BT 不等式**:

$$\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A)]^m[\lambda_{n-k+1}(B)]^m\leqslant\mathrm{tr}(AB)^m\leqslant\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A)\lambda_k(B)]^m.$$

式中 m 为任意正整数.见[386]1990,132:173－178.

7. 设 A,B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵.$p,q>0,1/p+1/q=1$,则

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\lambda_{n+1-k}(B)\leqslant\mathrm{tr}(AB)\leqslant\mathrm{tr}\left(\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}\right).$$

(黄礼平,[345]1994,1:33－35).

8. 设 A,B,C 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,则

$$\mathrm{Retr}(ABC)\leqslant\mathrm{tr}(\frac{1}{3}(A+B+C))^3\leqslant\mathrm{tr}(\frac{1}{3}(A^3+B^3+C^3)).$$

仅当 $A=B=C$ 时等号成立.(证明及推广见黄礼平[345]1994,1:33－35)

设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶半正定矩阵或半正定实对称矩阵,则

$$|\mathrm{tr}(\prod_{k=1}^{m}A_k)|^m\leqslant\prod_{k=1}^{m}\mathrm{tr}(A_k^m),$$

从而利用 A-G 不等式,有

$$|\mathrm{tr}(\prod_{k=1}^{m}A_k)|\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{tr}(A_k^m).$$

(陈道琦,[334]1988,31(4):565－569)

9. 设 A 是 n 阶方阵,所有特征值 $\lambda_k(A)$ 都是实数,且 $\mathrm{tr}(A^2)>0$,若 A 恰有 k_1 个正特征值,k_2 个负特征值,则当 $\mathrm{tr}A\geqslant0$ 时,$(\mathrm{tr}A)^2\leqslant k_1\mathrm{tr}(A^2)$;当 $\mathrm{tr}A\leqslant0$ 时,$(\mathrm{tr}A)^2\leqslant k_2\mathrm{tr}(A^2)$.从而当 $\mathrm{tr}(A^2)>0$ 时,$\dfrac{(\mathrm{tr}A)^2}{\mathrm{tr}(A)^2}\leqslant\max\{k_1,k_2\}\leqslant r(A)$.

证明见[30]P173－175.

10. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵.$\mathrm{tr}(A)>0,\mathrm{tr}(B)>0$,则

$$\frac{\mathrm{tr}(A+B)^2}{\mathrm{tr}(A+B)}\leqslant\frac{\mathrm{tr}(A^2)}{\mathrm{tr}A}+\frac{\mathrm{tr}(B^2)}{\mathrm{tr}B}.$$

证明见[30]P.175－176.

11. 设 A 是 n 阶半正定 Hermite 方阵，它分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

式中 A_{11} 为 k 阶方阵，$1\leqslant k\leqslant n$. 则

$$\operatorname{tr}(A_{21}A_{12})\leqslant(\operatorname{tr}A_{11})(\operatorname{tr}A_{22}).$$

证明见[30]P171－172.

12. 设 A 为 n 阶 Hermite 方阵，$\lambda_1(A)\cdots\geqslant\lambda_n(A)$. B 为 $n\times m$ 阶矩阵且 $B^*B=I_m$. 则

(1) $\displaystyle\sum_{k=n-m+1}^{n}\lambda_k(A)\leqslant\operatorname{tr}(B^*AB)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(A)$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^{-1}(A)\leqslant\operatorname{tr}(B^*AB)^{-1}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n-m+k}^{-1}(A)$.

证明见[30]P.189－191.

13. 设 A 为 n 阶实对称正定方阵，特征值 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$. $n>2m$，B 为 $n\times m$ 阶矩阵且 $B^*B=I_m$. 则

(1) $\displaystyle 0\leqslant\operatorname{tr}[(B'AB)-(B'A^{-1}B)^{-1}]\leqslant\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k^{1/2}-\lambda_{n-k+1}^{1/2})^2$;

(2) $\displaystyle\frac{\operatorname{tr}(B'AB)}{\operatorname{tr}(B'AB)^{-1}}\leqslant\left(\frac{\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k+\lambda_{n-k+1})}{2\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k\lambda_{n-k+1})^{1/2}}\right)^2$;

(3) $\displaystyle\operatorname{tr}(B'ABB'A^{-1}B)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{(\lambda_k+\lambda_{n-k+1})^2}{4\lambda_k\lambda_{n-k+1}}$.

证明见[30]P.189－194.

14. 设 A 为 n 阶正定 Hermite 方阵，B 为正定 Hermite 方阵且 $\det B=1$，则

$$\operatorname{tr}(AB)\geqslant n(\det A)^{1/n}.$$

15. 设 A 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，$1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，B 为满足条件 $\operatorname{tr}(B^p)=1$ 的半正定 Hermite 方阵，则

$$\operatorname{tr}(AB)\leqslant[\operatorname{tr}(A^p]^{1/p}.$$

仅当 $B^q=\dfrac{A^p}{\operatorname{tr}A^p}$ 时等号成立.

16. 设 A 为 n 阶正定 Hermite 方阵，B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵，$A—B$ 为半正定阵，则

$$\frac{\operatorname{tr}B}{\operatorname{tr}A}\geqslant\frac{\det B}{\det A}.$$

17. 设 A,B,C 为 n 阶 Hermite 方阵，A 为正定，B,C 为半正定，且 B-C 为半正定，则 $\operatorname{tr}[(A+B)^{-1}B]\geqslant\operatorname{tr}[(A+C)^{-1}C]$.

18. 设 A 为半正定 Hermite 方阵，且分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \cdots & & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}.$$

式中 A_{kj} 为 n 阶方阵,则 m 阶方阵 $(\mathrm{tr}(A_{kj})) \geqslant 0$.

上述 N14 - 18 的证明见[30]P195 - 202.

19. 设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶正定 Hermite 方阵. I_n 为 n 阶单位方阵, A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I_n - A) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j \lambda^{n-j},$$

式中 σ_j 是 A 的所有可能的 j 阶主子式之和,即

$$\sigma_j = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leqslant n} \det(A_j),$$

$$\det(A_j) = \begin{vmatrix} a_{k_1k_1} & a_{k_1k_2} & \cdots & a_{k_1k_j} \\ a_{k_2k_1} & a_{k_2k_2} & \cdots & a_{k_2k_j} \\ \cdots & & & \\ a_{k_jk_1} & a_{k_jk_2} & \cdots & a_{k_jk_j} \end{vmatrix},$$

$\sigma_0 = 1, \sigma_1 = \mathrm{tr}(A), \sigma_n = \det(A)$,则

(1) $$\frac{\mathrm{tr}(A)}{n} \geqslant \left[\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n} \det(A_2) \right]^{1/2} \geqslant \cdots \geqslant \left[\frac{1}{\binom{n}{j}} \sum_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_j \leqslant n} \det(A_j) \right]^{1/j} \geqslant \cdots$$

$\geqslant (\det(A))^{1/n}$. 仅当 A 的全部特征值 $\lambda_k(A)$ 相等时等号成立.

(2) $$(\det(A))^{1/n} \leqslant \left[p \int_0^{\infty} \frac{dx}{\det(xI_n + A)^{\frac{p+1}{n}}} \right]^{-1/p} \leqslant \frac{\mathrm{tr}(A)}{n},$$

式中常数 $p > 0$,仅当所有 $\lambda_k(A)$ 相等时等号成立.

(方献亚,[345]1985,6:44;1985,11:35 - 37)

三、 矩阵秩不等式

1. 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵,则 $r(A) - r(B) \leqslant r(A - B)$; $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$, $r(A + B) \leqslant r(A \vdots B) \leqslant r(A) + r(B)$.

(证明及其推广见[30]P.56 - 57 和 P63 - 66).

2. 设 A, B 为 n 阶半正定 Hermite 方阵,则

(1) $r(A \circ B) \leqslant r(A) r(B)$.

(2) 若 $r(A) r(B) < n$,则 $A \circ B$ 为奇异阵.

(见[30]P.46)

3. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times k$ 矩阵,则

$$r(A) + r(B) - n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}.$$

(Sylvester 定律,见[30]P.58 - 61)

4. **Frobenius 不等式:**

$$r(A_1A_2A_3) \geqslant r(A_1A_2) + r(A_2A_3) - r(A_2).$$

等号成立条件及其证明见[30]P.62 - 63.

5. 设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶方阵,令 $S_k = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$,则 $r(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{kk}|}{S_k}$.

(证明见[30]P.67 - 68)

四、 矩阵范数不等式

设 $A = (a_{kj})$ 为 $m \times n$ 阶复矩阵.若存在映射 $T: A \to \|A\|$,使得

(1) $\|A\| \geqslant 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \alpha \in C^1$;

(3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

则 $\|A\|$ 称为 A 的范数,若 A 为 $m \times n$ 阶,B 为 $n \times k$ 阶.满足 $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.则称该范数是相容的.满足上述条件的范数有:

例 1 欧氏范数(或 Frobenius 范数):

$$\|A\|_F = (\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2\right)^{1/2}.$$

例 2 谱范数 $\|A\|_2 = [\lambda_1(A^*A)]^{1/2} = (\rho(A^*A))^{1/2}$(即 A^*A 的最大特征值 $\lambda_1(A^*A)$ 的平方根).

例 3 列和范数 $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}|$;行和范数 $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$.

例 4 设 $A = (a_{kj})$ 为 n 阶方阵,通过 R^n 中 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的范数

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|, & p = \infty \end{cases},$$

定义矩阵的算子范数,记为

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

上述例 2,3 都是例 4 的特殊情形.

若 A 为 n 阶可逆方阵,$\|A\|$ 为 A 的任一范数,则 $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ 称为 A 的**条件数**.

若 n 阶方阵 A 的特征值,奇异值分别为 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A), \sigma_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n(A)$,则

$K(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$;当 A 为 Hermite 方阵时,$K(A) = \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)}$;若 A 为 $m \times n$ 阶矩阵,$r(A) = k \leqslant n$,则 $K(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_k(A)}$.

1. (1) 设 A 为 n 阶方阵,B 为 Hermite 半正定矩阵.U_1, U_2 为酉矩阵,$A = U_1B$,则

$$\|A - U_1\| \leqslant \|A - U_2\| \leqslant \|A + U_1\| \text{(Fan Ky)}.$$

(2) $|\|A\|-\|B\||\leqslant\|A-B\|$.

(3) 设 A 为 n 阶方阵，B 为 n 阶 Hermite 方阵，则

$$\|A-\frac{1}{2}(A+A^*)\|\leqslant\|A-B\| \text{ (Fan Ky)}$$

2. 设 $\|A\|_p<1,1\leqslant p\leqslant\infty$，则 $I-A$ 和 $I+A$ 可逆，且

$$\frac{1}{1+\|A\|_p}\leqslant\|(I\pm A)^{-1}\|_p\leqslant\frac{1}{1-\|A\|_p};\ \|I-(I-A)^{-1}\|_p\leqslant\frac{\|A\|_p}{1-\|A\|_p}.$$

证明见[30]P.25－26.由此推出：设 A^{-1} 存在，$\|A^{-1}\|\leqslant p$，$\|A-B\|\leqslant q$，$pq<1$，(A，B 为 n 阶方阵)，则 B 可逆，且

$$\|B^{-1}\|\leqslant\frac{p}{1-pq}.$$

3. $\|A\|_2\leqslant\|A\|_F$.特别当 A 为对称矩阵且迹 $\operatorname{tr}(A)=0$ 时，成立

$$\|A\|_2\leqslant(1-\frac{1}{n})^{1/2}\|A\|_F.$$

证 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

则 $\|A\|_2^2=\max\{\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2\}$，$\|A\|_F^2=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2$.由假设 $\operatorname{tr}(A)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=0$，所以，只要证

$$\lambda_k^2\leqslant(1-\frac{1}{n})(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2). \tag{2.2}$$

由 Cauchy 不等式，有

$$|\sum_{j\neq k}\lambda_j|\leqslant(n-1)^{1/2}(\sum_{j\neq k}\lambda_j^2)^{1/2}.$$

从而 $\lambda_k^2=(\sum_{j\neq k}\lambda_j)^2\leqslant(n-1)(\sum_{j\neq k}\lambda_j^2)=(n-1)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2-(n-1)\lambda_k^2$，由此即得(2.2)式.

4. 设 A 为 n 阶 Hermite 方阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值(按其重数重复计算个数)，

$$\|A\|_F=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\right)^{1/2},\text{则}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F\leqslant\|A\|_2\leqslant\|A\|_F.$$

5. 设 A 为 n 阶方阵，则对任意算子范数 $\|A\|$，$\rho(A)\leqslant\|A\|$.

若 $\forall\varepsilon>0$，则存在算子范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$，成立 $\|A\|_\varepsilon\leqslant\rho(A)+\varepsilon$.

证明见[124]P.23－25.

由此推出，$\rho(A)<1$ 的充要条件是对 A 的某个算子范数 $\|A\|<1$.这些结果用于估计解线性方程组的一些迭代法的收敛速度.

6. 设 $|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|, 1 \leqslant k \leqslant n$,则 A 为非奇异阵且

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{|a_{kk}| - \sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|\}}.$$

7. **Bauer-Fike 不等式**:设矩阵 A 的 Jordan 标准形是对角阵:$D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$,其中 P 为某个非奇异矩阵,矩阵范数满足

$$\|D\| = \max\{|\lambda_k| : 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

δA 是 A 的扰动,λ 是 $A + \delta A$ 的一个特征值,则

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda - \lambda_k| \leqslant \|P\| \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|\delta A\|.$$

若 A 是 Hermite 矩阵,可取 P 为酉阵,即 $\|P\| = \|P^{-1}\| = 1$,于是

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda - \lambda_k| \leqslant \|\delta A\|.$$

当 A 为对称矩阵时,上述结果还可改进.例如下述:

WH 不等式(Wielandt - Hoffman 不等式):设 A 和 B 为 n 阶实对称方阵,定义 $E = A + B$,A,E 的按递减次序排列的特征值分别为 $\lambda_k(A),\lambda_k(E)$,则 $\left\{\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A) - \lambda_k(E)]^2\right\}^{1/2} \leqslant \|B\|_F$.1990 年,冷岗松进一步改进为:设 A,B 为 n 阶实矩阵,则

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k^2(E) - 2\sigma_k(E)\sigma_k(A) + \lambda_k^2(A)]\right\}^{1/2} \leqslant \|B\|_F,$$

当 A,B 为 n 阶实对称矩阵时,成立

$$\sum_{k=1}^{n}[\lambda_k(A) - \lambda_k(E)]^2 \leqslant \|B\|_F^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}[\lambda_k^2(E) - 2\lambda_k(E)\lambda_{n-k+1}(A) + \lambda_k^2(A)].$$

见[350]1990,6:39.

8. 设 A,B 为同阶方阵,A 为非奇异且 $\|A - B\| \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}$,则 B 也是非奇异的,且

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|A - B\|}.\quad \|A^{-1} - B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \cdot \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}.$$

这些不等式表明,对非奇异矩阵作充分接近的扰动后的矩阵仍是非奇异的.

9. **双随机矩阵不等式**:设 $A = (a_{jk})$ 为 n 阶双随机矩阵,则 A 的积和式 $\mathrm{per}(A) \geqslant n!/n^n$,仅当 $\forall\, a_{kj} = 1/n$ 时等号成立.见[99]3:13.

10. **矩阵 Young 不等式**:设 A,B,C 为 n 阶复方阵,A,B 为半正定,$1 < p < \infty$,$1/p + 1/q = 1$,则

$$\left\|\frac{1}{p}A^pC + \frac{1}{q}CB^q\right\|_F^2 \geqslant \frac{1}{r^2}\|A^pC - CB^q\|_F^2 + \|ACB\|_F^2,$$

式中 $r = \max\{p,q\}$.见[386]2000,308,(1 - 3):77 - 84.

11. 设 $K(A)$ 为 n 阶可逆方阵的条件数,则

$$1 \leqslant K(A) \leqslant K(AA^*).$$

12. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 方阵,则

(1) $K(A+B)\leqslant\max\{K(A),K(B)\}$,特别地,$K(A+I_n)\leqslant K(A)$;

(2) $\max\left\{\dfrac{K(A)}{K(B)},\dfrac{K(B)}{K(A)}\right\}\leqslant K(AB)\leqslant K(A)K(B)$.

证明见[30]P.159 - 161.

13. 设 A 为 n 阶 Hermite 正定方阵,且分块为

$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$,其中 A_{11} 为 m 阶方阵,$1\leqslant m\leqslant n$.则

(1) $K(A_{11})\leqslant K(A)$; (2) $K(A)\geqslant K(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$.

证明见[30]P.160 - 161.

14. 设 A 为 n 阶可逆方阵,则对任意 n 阶奇异方阵 B,成立

$$K(A)\geqslant\frac{\sigma_1(A)}{\sigma_1(A-B)}.$$

式中 $\sigma_1(\cdot)$ 为最大奇异值.证明见[30]P162 - 163.

15. 设 A 为 n 阶复方阵,它的特征值都是实数,按递减次序排列为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$,令

$$M=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A),S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-M)^2=\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2-\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\Big)^2\Big].$$

记 $p=\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$.

(1) 若 A 为 n 阶 Hermite 正定方阵,则

$$K(A)\geqslant 1+\frac{2p}{M-p},$$

当 $n>2$ 时,仅当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$ 时等号成立.

(2) 若 A 为 n 阶 Hermite 方阵,$\mathrm{tr}(A)>0.(\mathrm{tr}A)^2>(n-1)\mathrm{tr}(A^2)$,则 A 为正定阵且

$$1+\frac{2p}{M-p}\leqslant K(A)\leqslant 1+\frac{2}{q-1},\text{式中 } q=\frac{M}{S(n-1)^{1/2}},$$

当 $n>2$ 时,仅当 $A=cI_n(c>0)$ 时等号成立.证明见[30]P163 - 167.