第七章　凸函数与变分不等式

§1　凸函数不等式

一、　基本概念

凸函数分为实变量的凸函数与复变量的凸函数.

(一)　实变量凸函数及其推广

下面设 D 是实线性空间中的凸集.

定义 1　设 $f(x)$ 是定义在实线性空间 X 中的凸集 D 上的实值函数,若 $\forall x,y\in D$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \tag{1.1}$$

则称 f 为 D 上的**凸函数**.若对于 $x\neq y$, $0<\lambda<1$,(1.1)式中只成立不等号,则称 f 为 D 上**严格凸函数**,当 $-f$ 为凸函数时,称 f 为**凹函数**.

若(1.1)式只当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时成立,即

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(y)], \tag{1.2}$$

这时称 f 为 D 上**中点凸函数**,又称 Jensen 意义下的凸函数,简称 J **凸函数**.一般地,凸必为中点凸,反之不一定成立.但当 D 为拓扑线性空间,且 f 在 D 上连续时,从中点凸也可推出凸.在开区间上可测的凸函数都是连续的,所以,不连续的凸函数在任意的内部区间上都无界而且是不可测的.

当 $D\subset R^n$ 或 D 为实轴上的区间时,定义 1 就是通常数学分析教材中凸函数的定义.但我国现行分析教材中,凹凸性的含义比较混乱.本书采用目前国际上通用的定义,即凸是指向下凸,凹实际上是向上凸,当 D 为实线性空间中的凸子集时,上述 f 实际上是凸泛函.

注　Fan Ky 在任意集合 X, Y(不一定有拓扑结构)上定义函数的凸性:设 f 是定义在直积 $X\times Y$ 上的实值函数,若 $\forall x_1,x_2\in X$, $\forall\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\exists x_0\in X$,使得 $f(x_0,y)\leqslant\lambda_1 f(x_1,y)+\lambda_2 f(x_2,y)$, $\forall y\in Y$,则称 f 是 X 上的凸函数.f 是 Y 上的凸函数可类似定义.见 Proc. Nat. Acad. Sci. 1953. 39(1):42 - 47.

函数的凸性是证明不等式的重要工具.例如,在定义 1 中,适当地选取 x,y,λ 三个量中的几个或全部,就可以构造或证明一系列重要不等式,这在本书中有关部分已作了适当说明.不仅如此,由凸函数理论发展起来的凸分析,还是逼近论、控制论、系统理论、运筹学的重要基础之一.现在已发展成为一门独立的数学分支.[113] 就是这方面的第一本经典

著作.

例:(1) 当 $p\geqslant 1$ 时,$f(x)=x^p$ 是 $(0,\infty)$ 上的凸函数. 当 $0<p<1$ 时为凹函数.

(2) $x\ln x, x^x, \dfrac{1}{x}, \operatorname{tg}x, \csc x$ 都是 $(0,\infty)$ 上的凸函数,而 $\ln x$ 是 $(0,\infty)$ 上的凹函数.

(3) $\sin x$ 是 $(0,\pi)$ 上的凹函数和 $(\pi,2\pi)$ 上的凸函数.

(4) 赋范线性空间 X 上有界线性泛函 f 的范数 $\|f\|$ 是 f 的凸函数.

(5) 设 $f\in L^p[0,1], f\geqslant 0, p>0$,则 $\ln\left(\int_0^1 f^p\right)$ 是 p 的凸函数.(Lyapunov)

(6) 设 f 连续且下 Schwarz 导数非负,即

$$\liminf_{h\to+0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\geqslant 0,$$

则 f 为凸函数.(见[308]1995,123(8):2473 - 2477)

(7) 设 X 为赋范线性空间. A 为 X 的 n 维子空间. $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 A 的基, $\forall\,\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), x\in X$,令 $f(\alpha)=\left\|x-\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k\right\|$. 则 f 是凸函数.

证 令 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), \beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n), 0\leqslant\lambda\leqslant 1$,则

$f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)=\left\|x-\sum_{k=1}^n(\lambda\alpha_k+(1-\lambda)\beta_k)e_k\right\|\leqslant\lambda\left\|x-\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k\right\|+(1-\lambda)\left\|x-\sum_{k=1}^n\beta_k e_k\right\|=\lambda f(\alpha)+(1-\lambda)f(\beta)$.

凸函数概念已有许多推广. 例如:

定义 2 若 f 在 D 上是正的,且 $\ln f(x)$ 在 D 上是凸函数,则称 f 是 D 上**对数凸函数**. 这时 $\ln f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\lambda\ln f(x)+(1-\lambda)\ln f(y)=\ln[f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}]$.

即 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$.

定义 3 设 f 在区间 D 上是正的并对 D 上任意两点 x_1,x_2,有

$$\left\{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right\}^2\leqslant f(x_1)f(x_2), \tag{1.3}$$

则称 f 是区间 D 上**弱对数凸函数**.

若 f,g 都是区间 D 上的弱对数凸函数,则

$$\left\{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right\}^2\leqslant\{f(x_1)+g(x_1)\}\{f(x_2)+g(x_2)\}.$$

注 当 x_1,x_2 为正数时,利用 x_1,x_2 的算术平均 $A(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$ 和几何平均 $G(x_1,x_2)=\sqrt{x_1x_2}$,(3) 式可写成

$$f(A(x_1,x_2))\leqslant G(f(x_1),f(x_2)).$$

由此启发我们可以利用正数 x,y 的其他平均来定义正函数 f 的不同凸性. 例如 x,y 的幂平均

$$M_p(x,y)=\left[\frac{1}{2}(x^p+y^p)\right]^{1/p}, p\neq 0;\ M_0(x,y)=\lim_{p\to 0}M_p(x,y)=\sqrt{xy}.$$

若 $$f(M_p(x,y))\leqslant M_p(f(x),f(y)). \tag{1.4}$$
则称 f 是 D 上是 p **幂凸函数**.特别,$p=-1$ 时,$M_{-1}(x,y)=H(x,y)$ 为 x,y 的调和平均,相应的 f 称为调和凸函数. $p=0$ 时,f 称为几何凸函数.

又如,在第一章 § 3,我们定义了 x,y 的广义对数平均 $S_p(x,y)$,若 $f(S_p(x,y))\leqslant S_p(f(x),f(y))$,则称 f 是 D 上广义对数凸函数.

几何凸函数 f 又可推广为:设 $c>0,D=(0,c]$ 或 $D=[c,\infty]$,$f:D\to(0,\infty)$ 满足:
$$f(x^\lambda y^{1-\lambda})\leqslant[f(x)]^\lambda[f(y)]^{1-\lambda},x,y\in D,0\leqslant\lambda\leqslant1. \tag{1.5}$$
见[367]2000,59(1 - 2):134 - 149.

我们还可以考虑第一章 § 3 定义的两个正数 x,y 的 r 阶加数幂平均,即
$$M_r(x,y,\lambda)=\begin{cases}(\lambda x^r+(1-\lambda)y^r)^{1/r}, & r\neq0\\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r=0,\end{cases}$$ 式中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,若
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant M_r(f(x),f(y),\lambda),x,y\in[a,b], \tag{1.6}$$
则称正函数 f 为 $[a,b]$ 上的 r **凸函数**(见[301]1997,215(2):461 - 470).在第 1 章 § 3.二.中,我们还定义了更一般的 M 凸函数.

注　1984 年,Toader,G. H. 定义了 t 凸的概念,即设 f 定义在 $[0,b]$ 上,若 $\forall x,y\in[0,b],\lambda,t\in[0,1]$.使得
$$f(\lambda x+t(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+t(1-\lambda)f(y).$$
则称 f 是 t 凸函数.它的等价条件见[330]2002,33(1):55 - 65.

注　1986 年,Mititelu-Sâmboan 引入了 q **凸函数**的概念,这就是将定义 1 中(1.1)式改为
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant[\lambda f^q(x)+(1-\lambda)f^q(y)]^{1/q},$$
式中 q 为实数.见 An Univ. Bucur. Mat. 1986,35:44 - 51.

若将定义 1 中(1.1)式改为
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y),\lambda,t\in(0,1),$$
则称 f 为 (λ,t) **凸函数**.见[54]5:161 - 174.

若将定义 1 中(1.1)式改为
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda^s f(x)+(1-\lambda)^s f(y),0<s\leqslant1,$$
则称 f 为 S - Breckner 凸函数,简称为 *SB* 凸函数.见[103]*P*.212 和 Demonstratio Math. 2000. 33(1):43 - 49.

若将上式改为 $\forall\alpha,\beta\geqslant0,\alpha^s+\beta^s=1,x,y\in D,s>0$
$$f(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha^s f(x)+\beta^s f(y).$$
则称 f 是 D 上 **s-Orlicz 凸函数**,其中 D 称为 s-Orlicz 凸集,它定义为实线性空间 X 中的一个非空子集并满足:$\forall x,y\in D,\alpha,\beta\geqslant0,s>0,\alpha^s+\beta^s=1$ 可推出 $\alpha x+\beta y\in D$.

见[301]1997,210(2):419 - 439.

从数学分析熟知,若 f 定义在区间 D 上,则

(1)　f 在 D 上是凸的充要条件是 $A=\{(x,y):f(x)\leqslant y,x\in D\}$ 是凸集,

(2)　f 在 D 上是凸的充要条件是对于 D 中所有 $x_0,\varphi(x)=[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ 是 D 上的递增函数.

(3)　可微函数 f 在 D 上是凸的充要条件是存在可数集 $A\subset D$,使得导函数 f' 在 D - A 上递增.

(4)　二阶可微函数 f 在 D 上是凸的充要条件是二阶导数 $f''(x)\geqslant 0(x\in D)$. 注意:$f''(x)>0\Rightarrow f$ 严格凸,反之不成立.

(5)　正函数 f 是对数性凸的充要条件是对于所有实数 a,$f(x)e^{ax}$ 是凸函数.

(6)　f 在区间 $[a,b]$ 上为凸函数的充分必要条件是:对于 $[a,b]$ 中任意 $x_1<x_2<x_3$,有

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix}\geqslant 0.$$

上式可改写为

$$[x_1,x_2,x_3;f]=\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\geqslant 0,$$

一般地,由下面的递归关系来定义 $[x_1,\cdots,x_n;f]$:

$$[x_1,\cdots,x_n;f]=\frac{[x_2,\cdots,x_n;f]-[x_1,\cdots,x_{n-1};f]}{x_n-x_1},[x;f]=f(x).$$ 于是有

定义 4　若对于区间 $[a,b]$ 中所有不同的 $x_1,\cdots,x_{n+2}(n\geqslant 2)$,都有

$$[x_1,\cdots,x_{n+2};f]\geqslant 0,$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上 n **阶凸函数**.

定义 5　设 f 是定义在凸集 $D\subset R^n$ 上的实值函数,若 $\forall x,y\in D,0\leqslant\lambda\leqslant 1$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\},$$

则称 f 是 D 上的**拟(Quasi)凸函数**.

f 在 D 上为拟凸的充要条件是,$\forall x,y\in D,0\leqslant\lambda\leqslant 1,z=\lambda x+(1-\lambda)y$,若 $f(x)\leqslant f(y)$,则 $f(z)\leqslant f(y)$.

特别,若对于 $x,y\in D,0<\lambda<1,z=\lambda x+(1-\lambda)y,f(x)<f(y)$,则 $f(z)<f(y)$,就称 f 是 D 上的**伪(Pseudo)凸函数**.

注　Fan Ky 利用集合的凸性来定义函数的凸性,即:设 f 定义在凸集 D 上,若 $\forall t\in R^1$,$\{x\in D:f(x)>t\}$ 为凸集,则称 f 是拟凹函数,见[5]3:103 - 113.

定义 6　实值函数 f 在集 $A\subset R^n$ 上称为 **Schur 凸函数**(简称 **S 凸函数**),若在 A 上,$x\prec y$,有 $f(x)\leqslant f(y)$. 特别,$f(x)<f(y)$ 时,称 f 是严格 S 凸函数.

其中,$x\prec y$ 表示 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 被 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 所优超,即设 $\overline{x}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)$ 是 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 重新排序,使得 $\overline{x}_1\geqslant\overline{x}_2\geqslant\cdots\geqslant\overline{x}_n$. 而当 $k=1,\cdots,n-1$ 时,$\sum_{j=1}^{k}\overline{x}_j\leqslant\sum_{j=1}^{k}\overline{y}_j$,且 $\sum_{j=1}^{n}x_j=\sum_{j=1}^{n}y_j$.(函数的优超见本节 N.7)

若 f 为对称的拟凸函数,则 f 必为 S 凸函数,反之不一定成立;f 为伪凸时,也不一定是 S 凸函数. 例如,若 $a>0$,则 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x_k+x_k^{-1})^{a}$ 在 $D=\{x=(x_1,\cdots,x_n):0<x_k\leqslant 1,k=1,\cdots,n\}$ 上是严格 S 凸的,可由此证明第 3 章中许多代数不等式. 见[6]P.68－69. 设 f 在凸区域 D 上连续,则 f 是凸的充要条件是 $\forall x\in D$,存在线性函数 $g(y)=\sum_{k=1}^{n}a_k y_k+b$,使得 $f(x)=g(x)$,而且 $\forall y\in D,f(y)\geqslant g(y)$. (1.7)

由方程 $g(y)=0$ 定义的超平面称为**支撑超平面**;

若 f 在凸区域上连续可微,(1.7) 式等价于

$$f(y)-f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}(y_k-x_k)\geqslant 0.$$

若 f 二次可微,则(1.7) 式又等价于

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k\partial x_j}y_k y_j\geqslant 0.$$

上述 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in D\subset R^n$.

定义 7 设 $D=(a,b),-\infty<a<b<\infty$. $C(D)$ 为 D 上连续函数空间,若对 D 的任一分划 $T:a=x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$,和实数 $y_k(1\leqslant k\leqslant n)$,存在惟一的函数 $g\in C(D)$,使得 $g(x_k)=y_k,1\leqslant k\leqslant n$. 满足上述条件的 g 的集合记为 G,称为 n 参数族($n\geqslant 2$). 若定义在 D 上的函数 f,和 D 的任一分划 T,存在 $g\in G$,使得 $g(x_k)=f(x_k),1\leqslant k\leqslant n$,而且

$$(-1)^{n+k-1}[f(x)-g(x)]\geqslant 0,x\in(x_{k-1},x_k),\ 2\leqslant k\leqslant n.$$

则称 f 是 D 上的 **G 凸函数**.

注意 G 凸不一定是凸函数,但若 g 为凸函数,则 G 凸也是凸函数,见[308]1992,114(3):733－740.

定义 8 设 X 为 Banach 空间,若存在正常数 M,使得 $\forall x,y\in X,0\leqslant\lambda\leqslant 1$,成立

$$0\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant M\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,$$

则称 f 是**有界凸函数**.

定义 9 设 D 为 R^n 中的凸集,f 定义在 D 上,$g(f,\cdot,\cdot,\cdot):D\times D\times(0,1)\to R^1$. 若 $\forall x,y\in D,0\leqslant\lambda\leqslant 1$,成立

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)+f(\lambda y+(1-\lambda)x)\leqslant g(f,x,y,\lambda)+g(f,x,y,1-\lambda),$$

则称 f 是 **Wright g 凸函数**,简称 ***Wg* 凸函数**. 当 $\lambda=1/2$ 时相应的 f 称为 Jensen g 凸函数. 简称为 Jg 凸函数. 当 $g(f,x,y,\lambda)=f(x)+f(y)$ 或 $g(f,x,y,\lambda)=\frac{1}{\lambda}f(x)+\frac{1}{1-\lambda}f(y)$ 时,Wg 凸与 Jg 凸不等价,有的作者也将 Wg 凸称为 λ－Wright 凸. 若 $g(f,x,y,\lambda)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 或 $\max\{f(x),f(y)\}$. 且

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y\leqslant g(f,x,y,\lambda),$$

则称 f 为 **g 凸函数**.

应注意的是,此处的 g 凸应与下面定义 10 和 11 的 g 凸加以区别.

定义 10 设 $f:[a,b]\to R^1, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$, g 是包含 f 的值域的区间上的满单射的连续函数,若

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant g^{-1}[\lambda(g\circ f)(x)+(1-\lambda)(g\circ f)(y)].$$

则称 f 是 **g 凸函数(本书称为 $1-g$ 凸函数)**.

定义 11 设 $x,y\in D$(D 为 R^1 中的区间), $y>x$,若存在 $g(x,y)>0, g(y,x)=-g(x,y)$. 且 $\forall x_1,x_2,x_3\in D, x_1<x_2<x_3$,成立

$$g(x_2,x_3)f(x_1)+g(x_3,x_1)f(x_2)+g(x_1,x_2)f(x_3)\geqslant 0.$$

则称 $f:D\to R^1$ 为 **g 凸函数**.(本书称为 **$2-g$ 凸函数**).

定义 12 设 f 在区域 $D\subset R^n$ 上连续,若球 $B(x_0,r)=\{x\in R^n:|x-x_0|\leqslant r\}\subset D$ 时,有

$$f(x_0)\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\sum_{n-1}}(x_0+rt')\mathrm{d}t', \tag{1.8}$$

则称 f 是 D 上的**次调和函数**,其中 ω_{n-1} 是 R^n 中单位球 $\sum_{n-1}=\{x\in R^n:|x|=1\}$ 的表面积.

次调和性的一个充分条件是:若 f 在 D 内有连续的二阶偏导数,且对所有 $x\in D$,有

$$(\Delta f)(x)=\sum_{k=1}^{n}\partial^2 f(x)/\partial x_k^2\geqslant 0,$$

则 f 在 D 内满足(1.8)式.

上述结果的证明及次调和函数的性质见[65]P.76-77,[114]P.246-248.

定义 13 若 f 定义在区域 D 上,对于 D 中任意 α,β,引入广义插值:

$$u(x)=\frac{u_1(x)-u_1(\alpha)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\beta)+\frac{u_1(\beta)-u_1(x)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\alpha),$$

式中 $u_1(x)=\int_\alpha^x\omega(t)\mathrm{d}t$, ω 是 D 上正值可微函数. 若 $f(x)\leqslant u(x)$,则称 f 为广义凸函数. 广义凸函数的性质及其应用可见[81]P350-351.

定义 14 设 D 是实线性空间 X 的凸子集. 对于 $0\leqslant\lambda\leqslant 1, \delta>0, x,y\in D$,若

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\delta,$$

则称 f 是 D 上的 **δ 凸函数**;若

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)+f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant f(x)+f(y)+2\delta;$$

则称 f 是 D 上 δ-Wright 凸函数;

若 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\delta$

在 D 上几乎处处成立,则称 f 是 D 上几乎 δ 凸函数,若 $\delta=0$,则称为几乎凸函数.

见[308]1986,97(1):67.

定义 15 设 f 定义在实赋范空间的凸子集 D 上,若对所有 $x,y\in D$,所有 $\lambda\in[0,1]$, $\alpha>0$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\max\{f(x),f(y)\}-\lambda(1-\lambda)\alpha\|x-y\|^2,$$

则称 f 是 D 上**强拟凸函数**.

见 Optimization 1989.20(2):163 - 165.

定义 16 设 f 定义在实赋范空间的凸子集 D 上,若对所有 $x,y\in D$,所有 $\lambda\in[0,1]$ 及正数 α,有

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\alpha\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,\tag{1.9}$$

则称 f 是 D 上的**强凸函数**.

若(1.9)式改为

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\alpha\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,\tag{1.10}$$

则称 f 是 D 上**强凹函数**.

若将(1.9)、(1.10)两式右边的 $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 都改为

$(1/\omega)\log\{\lambda\exp[\omega f(x)]+(1-\lambda)\exp[\omega f(y)]\}$(式中 $\omega>0$),则分别称 f 是 D 上强 ω **凸函数和强** ω **凹函数**.特别,当 $X=R^n$ 时,就是李玉泉引入的强 ω 凸(凹)的概念,他还定义了一致 ω 凸(凹)的概念并讨论了它们的性质,见[356]1985,5(1):94 - 105.

定义 17 设 X,Y 是两个 Hausdorff 拓扑线性空间,$D\subset X,E\subset Y$ 为两个非空凸集. $\overline{R}=R\cup\{\pm\infty\}$ 为广义实数集,$\varphi:D\times E\to\overline{R}$,若 $T:E\to D$,且对 E 的任何有限子集 $A=\{y_1,\cdots,y_n\}$ 及任何 $x_0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kTy_k,y_0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_ky_k,\lambda_k\geqslant0,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$,都有

$$\varphi(x_0,y_0)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi(x_0,y_k).\tag{1.11}$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为关于 $y\in E$ 是 T- 对角凸的,若(1.11)式换成

$$\varphi(x_0,y_0)\leqslant\max\{\varphi(x_0,y_k):1\leqslant k\leqslant n\},\tag{1.12}$$

则称 φ 关于 y 是 T- 对角拟凸的.

若 $\gamma\in\overline{R}$ 满足 $\gamma\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi(x_0,y_k)$, (1.13)

则称 φ 关于 $y\in E$ 是 T-γ- 对角凸的.若(1.13)式换成

$$\gamma\leqslant\max\{\varphi(x_0,y_k):1\leqslant k\leqslant n\},\tag{1.14}$$

则称 φ 关于 y 是 T-γ- 对角拟凸的,若(1.13)、(1.14)式中不等号反向,则分别称 φ 关于 $y\in E$ 是 T-γ- 对角凹和 T-γ- 对角拟凹的.(张石生等,[340]1991,11(3):346 - 352)

利用这些概念可以证明:

(1) 变分不等式(见本章 §2); (2) 极小极大不等式(见第 14 章 §2N.54 和"应用数学与力学"1991,12(5):465 - 472 等).

定义 18 设 X 为实赋范线性空间. D 为 X 的紧凸子集,X^* 为 X 的共轭空间. $h:D\times D\to R^1$ 为连续函数并 $h(x,x)=0$,若存在 $g:D\to X^*$ 和实数 α 使得

$$g(y)(x-y)+\alpha h(x,y)\leqslant f(x)-f(y),x,y\in D.$$

则称 $f:D\to R^1$ 是 h **强凸函数**,若不等号反向,则称 f 为 h **强凹函数**.(见 Dorin,A., Approximation and optimization Vol Ⅱ. 1996,9 - 12)

定义 19 设 $E\subset R^n$,若存在映射 $T:R^n\to R^n$,使得 $(1-\lambda)T(x)+\lambda T(y)\in E$,

$\forall x, y \in E, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,则称 E 为 T 凸集.

设 $f: R^n \to R$.若存在映射 $T: R^n \to R^n$,使得 E 为 R^n 中 T 凸集,且

$f[\lambda T(x)+(1-\lambda)T(y)] \leqslant \lambda f(Tx)+(1-\lambda)f(Ty), \forall x, y \in E, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

则称 f 是 T 凸函数.(Xiusu Chen,[301]2002,275(1):251 - 262)

定义 20 设 $\omega:(0,\infty) \to (0,\infty), \omega(0)=0.(X,d)$ 为距离空间,$x_0 \in X$,在 x_0 的次梯度记为 g_0,(定义见[107]5:58).若 $\forall x \in X$,成立

$$f(x)-f(x_0) \geqslant g_0(x)-g_0(x_0)+\omega(d(x,x_0)),$$

则称 f 是 X 上关于模 ω 的一致 g 凸函数.

见 Rolewicz, Stefan, Funct. Approx. Comnent. Math. 1998, 26:239 - 245.

(二) 复变量凸函数及其推广

定义 1 设函数 $w=f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 在单位圆盘 $D=\{z: |z|<1\}$ 内正则单叶且把单位圆盘映射成某个凸域,则称 $w=f(z)$ 为凸函数.在几何上,它将 $|z|=r$,$(0<r<1)$ 的像曲线在点 $f(z)$ 的切线随着 z 在该圆周上穿行而作同方向旋转(正则单叶的定义见本书第九章 §2).

$f(z)$ 是凸函数的充要条件:

(1) $\operatorname{Re}\left\{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0, z \in D$;

或

(2) $f(z)$ 可表示成参数形式:

$$f(z)=c_0+c_1\int_0^z \exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-te^{-i\theta})\mathrm{d}\mu(\theta)\right]\mathrm{d}t, \tag{39}$$

式中 $\mu(\theta)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的递增实值函数并满足 $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\mu(\theta)=1$. c_0, c_1 为复常数,$c_1 \neq 0$.

若 $f(z)=z+\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ 在 D 内正则,且存在 D 上的凸函数 φ,满足 $\varphi(0)=0$ 和 $\operatorname{Re}\left(\dfrac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right)>0, z \in D$,则称 f 是 D 上近于凸的,记为 $f \in K$.

定义 2 设 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 是单位圆盘 $D=\{z: |z|<1\}$ 内的解析函数,且 $f(z)f'(z)/z \neq 0, \alpha>0$.若在 D 上成立

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right]>0, \tag{1.15}$$

则称 $f(z)$ 是 D 上的 α 凸函数.

若(1.15)式改为

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\alpha\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}f(z)}\right]>\frac{1}{2},$$

则称 $f(x)$ 是 n 阶 α 凸函数. 见[323]1987,39(4):769 - 783;[326]1989,12(1):107 - 112.

定义 3　对于以复数为分量的 n 维向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $p\geqslant 0$,令

$$N_p(x)=\begin{cases}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^{1/p}\right)^p, & p>0,\\ \sup|x_j|, & p=0.\end{cases}$$

设 (a_{jk}) 为 m 行 n 列的复数分量矩阵,$x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_m)$,$p,q\geqslant 0$. 定义

$$M(p,q)=\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}y_jx_k\right|:N_p(x)\leqslant 1,N_q(y)\leqslant 1\right\},$$

则 $\ln M(p,q)$ 在下述意义下成为 (p,q) 凸函数:若 $0\leqslant\alpha_i\leqslant 1$,$0\leqslant\beta_i\leqslant 1$ 且 $\alpha_i+\beta_i\geqslant 1$,$i=1,2$,则 $\ln M((1-t)\alpha_1+t\alpha_2,(1-t)\beta_1+t\beta_2)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上成为 t 的凸函数,这称为 **Riesz 凸性定理**. 由这条定理也能导出 Hölder 不等式,Minkowski 不等式以及其他许多重要不等式.

此外,还有向量值凸函数、集合值凸函数、半局部对数凸性,$\lambda(n)$ 凸性、矩阵函数的半凸性、调和拟凸性、调和伪凸性等等,这说明,凸函数概念的各种推广是与它在各方面的广泛应用相联系的,Toader 还研究了凸函数的各种推广之间的关系,见 Anal. Numér, Théor. Approx. 1989, 18(2):183－189.

二、　凸函数不等式

1.　Jensen 不等式:

(1)　**Jensen 不等式**(离散形式):设 φ 是 $[a,b]$ 上的凸函数,则对于任意 $x_k\in[a,b]$,$p_k\geqslant 0$,$k=1,\cdots,n$,且 $\sum_k p_k>0$,有

$$\varphi\left(\frac{\sum_k p_kx_k}{\sum_k p_k}\right)\leqslant\frac{\sum_k p_k\varphi(x_k)}{\sum_k p_k}. \tag{1.16}$$

令　$q_k=\dfrac{p_k}{\sum_k p_k}$,则　$\sum_k q_k=1$,这时(1.16)式化为标准形式:

$$\varphi\left(\sum_k q_kx_k\right)\leqslant\sum_k q_k\varphi(x_k). \tag{1.17}$$

提示:根据定义 1,用数学归纳法.

注　若 x_k 为 k 的递减函数,而 p_k 满足　$0\leqslant\sum_{k=j}^{n}p_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_k$,$j=1,\cdots,n$,

且　$\sum_{k=1}^{n}p_k>0$,这时(1.16)仍成立. 注意 p_k 不一定都非负.

(2)　**Jensen 不等式**(积分形式):设 φ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的凸函数,f,p 在 $[a,b]$ 上可积,$\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$,$p(x)\geqslant 0$,$x\in[a,b]$,且 $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$,则

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)\varphi[f(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.18}$$

证　取 $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$，从(1.1)得

$$\varphi\left(\frac{\sum f(x_k)p(x_k)\Delta x_k}{\sum p(x_k)\Delta x_k}\right) \leqslant \frac{\sum \varphi(f(x_k))p(x_k)\Delta x_k}{\sum p(x_k)\Delta x_k},$$

令 $n \to \infty$，得(1.18)式.

推论　若 $f(x) > 0, x \in [a,b]$，则

$$\exp\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln\int_a^b \exp f(x)\mathrm{d}x.$$

注　若 f 在$[a,b]$上递减，$p(x)$ 满足 $0 \leqslant \int_t^b p(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}x, a \leqslant t \leqslant b$. 而且 $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$，则(1.18)式仍成立，注意这时 $p(x)$ 不一定非负.

注　(1.18)式可推广到 n 维欧氏空间 R^n 或抽象测度空间的子集 A 上. 设 μ 是 A 上的有限测度，f 在 A 上有界可测，φ 在包含 f 值域的区间上是凸的，则成立关于测度的 Jensen 不等式：

$$\varphi\left(\frac{\int_A f\mathrm{d}\mu}{\int_A \mathrm{d}\mu}\right) \leqslant \frac{\int_A \varphi(f)\mathrm{d}\mu}{\int_A \mathrm{d}\mu}. \tag{1.19}$$

它还可作加权推广：设 $p(x)$ 非负且 $\int_A p(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0$，则

$$\varphi\left(\frac{\int_A f(x)p(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_A p(x)\mathrm{d}\mu(x)}\right) \leqslant \frac{\int_A \varphi(f(x))p(x)d\mu(x)}{\int_A p(x)d\mu(x)}, \tag{1.20}$$

和指数推广：

$$\varphi\left(\frac{\int_A f\mathrm{d}\mu}{\int_A \mathrm{d}\mu}\right) \leqslant \frac{\int_A \varphi(f)\mathrm{d}\mu}{(\int_A \mathrm{d}\mu)^p} \cdot \frac{(\int_A f\mathrm{d}\mu)^p}{\int_A f^p\mathrm{d}\mu}, \tag{1.21}$$

式中 $p \geqslant 1$. 见[367]1990,40(1):26－43.

(3)　**Jensen 不等式的加细**：设 $f: D \to R^1$ 为凸函数，$x_k \in D, 1 \leqslant k \leqslant n$. 记

$$f_{k,n} = \frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} f\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_{i_j}\right), g_{k,n} = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k}}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} f\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_{i_j}\right),$$

则

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) = f_{n,n} \leqslant \cdots \leqslant f_{(k+1),n} \leqslant f_{k,n} \leqslant \cdots \leqslant f_{1,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k);$$

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \cdots \leqslant g_{(k+1),n} \leqslant g_{k,n} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k), k = 1,2,\cdots,n.$$

(见 Pecaric 等，[301]1998,222:365－373). 1999 年，王挽澜给出了一个新的简洁证明，见[301]1999,238:567－579.

设 X 为线性空间，A 为 X 的凸子集，$f: A \to R^1$ 为凸函数，$x_k \in A, \omega_k \geqslant 0, q_k \geqslant 0$，$G_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k > 0, Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k > 0$，Dragomir, S. S. 证明了以下几个结果：

① $$f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leqslant \frac{1}{Q_n^k}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} q_{i_1}\cdots q_{i_k} f\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{i_j}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_n^k}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} q_{i_1}\cdots q_{i_k} f\left(\frac{1}{G_k}\sum_{j=1}^{k} \omega_j x_{i_j}\right) \leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k);$$

（见[330]1994,25(1):29 - 36；[301]1992,168(2):518 - 522）．进一步的结果见 Mat. Bilten, 1996, 20:51 - 60.

② $$\frac{1}{Q_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_k q_j \quad f\left(\frac{x_k + x_j}{2}\right) \leqslant \frac{1}{Q_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_k q_j \int_0^1 f(tx_k + (1-t)x_j)\,\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k);（见[307]758 - 26013）$$

③ $$f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(tx_k + (1-t)\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k x_k)$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_k q_j f(tx_k + (1-t)x_j) \leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k), t \in [0,1].$$

（见 Mat. Bilten 1991, 41(15):35 - 37）

1980 年，Vasic 等证明：设 $m \leqslant x_k \leqslant M$，令 $\bar{x} = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k x_k$，则

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k) \leqslant \frac{1}{M-m}\{(M-\bar{x})f(m) + (\bar{x}-m)f(M)\};$$

若 $\frac{f(x)}{x-m}$ 在 $(m, M]$ 上递增，则

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k) \leqslant \frac{1}{M-m}(\bar{x}-m)f(M);$$

若 $\frac{f(x)}{x-x}$ 在 $[m, M)$ 上递增，则

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k) \leqslant \frac{1}{M-m}(M-\bar{x})f(m).$$

见 An. Univ. Timisoara Ser. Stiint. Mat. 1980, 18(1):95 - 104.

L-R 不等式（Lah-Ribaric 不等式）：设 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数，$q_k \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$，$x_k \in [a,b]$，则

$$\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k) \leqslant \frac{b - \sum q_k x_k}{b-a} f(a) + \frac{\sum q_k x_k - a}{b-a} f(b).（见[51]P140）$$

D-I（Dragomir-Ionescu）不等式：设 f 是 (a,b) 上可微的凸函数，$p_k \geqslant 0$，$x_k \in (a,b)$，则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) - f(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k x_k f'(x_k) - (\sum_{k=1}^{n} p_k x_k)(\sum_{k=1}^{n} p_k f'(x_k)).$$

见 Anal. Numer. Theor. Approx, 1994, 23:71 - 78.

1985 年王炳安给出了(1.16)式的一种加细：

设 φ 是区间 D 上的凸函数，则 $\forall x_k \in D, p_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$，成立

$$\varphi\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right) \leqslant \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} p_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j}\right) \varphi\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{k} p_j}\right) + \left(\frac{\sum_{j=k+1}^{n} p_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j}\right) \varphi\left(\frac{\sum_{j=k+1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=k+1}^{n} p_j}\right) \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} p_j}.$$

仅当所有 x_k 全相等时等号成立，见[347]1985, 4.

2000 年，Brnetic, I. 等给出了 Jensen 不等式的另一种加细：设 $f:[0,1] \to R^1$ 为凸函数，令 $h(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f[(1-t)x_k + t x_{k+1}]$，则 h 是$[0,1]$上凸函数，且

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

（见[330]2000, 31(1):63 - 69, 另见[301]1997, 214(2):721 - 728; [330]2003, 34(2):175 - 187, 等）

(4) **反向 Jensen 不等式**：设 φ 是开区间(a,b)上的凸函数而且递增，则 $\forall x_k \in (a,b), p_k \geqslant 0\ (1 \leqslant k \leqslant n), \sum_k p_k > 0, \sum_k p_k \varphi'_+(x_k) > 0$，恒有

$$\frac{\sum p_k \varphi(x_k)}{\sum p_k} \leqslant \varphi\left(\frac{\sum p_k \varphi'_+(x_k) x_k}{\sum p_k \varphi'_+(x_k)}\right),$$

式中 $\varphi'_+(x_k)$ 是 φ 在 x_k 的右导数.（Slater, M. L. 1980）

若 g 是$[a,b]$上有界变差函数，$\int_a^b \mathrm{d}g(t) = 1, g(a) < g(b)$，$f$ 在$[a,b]$上递增连续，则对于$[a,b]$上的凸函数 φ，$\varphi(\int_a^b f(t)dg(t)) \geqslant \int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}g(t)$ 成立的充要条件是：若 $f(x) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}g(t)$，则 $\int_a^x (f(x) - f(t))\mathrm{d}g(t) \leqslant 0$，和从 $f(x) \geqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}g(t)$ 可推出 $\int_x^b [f(x) - f(t)]\mathrm{d}g(t) \geqslant 0$.（Pečaric, J. E, 1983）

(5) **保序线性泛函的 Jensen 不等式**：设 L 是非空集 E 上的线性类，φ 是区间 $D \subset R$ 上的凸函数，A 为保序线性泛函，使 $A(1) = 1$. 或对所有 $g \in L$，使得 $\varphi(g) \in L$，则 $A(g) \in D$ 且

$$\varphi(A(g)) \leqslant A(\varphi(g)). \tag{1.22}$$

这个不等式的证明用到下述引理：

设 φ 是区间$[m,M]$上的凸函数$(-\infty < m < M < \infty)$，$L$ 是非空集 E 上满足第 1 章 §3 中(3.176)的线性类，A 是保序线性泛函且 $A(1) = 1$. 或对所有 $g \in L$，使得 $\varphi(g) \in L$（从而对所有 $t \in E, m \leqslant g(t) \leqslant M$），则

$$A(\varphi(g)) \leqslant \{[M - A(g)]\varphi(m) + [A(g) - m]\varphi(M)\}/(M - m). \tag{1.23}$$

上式右边是 M 的递增函数和 m 的递减函数.

Jensen不等式(1.22)式中的 φ 是凸函数的条件还可放宽.例如:设 L 是非空集 E 上的线性类,函数 $\varphi: D \to R$ 满足

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) \geqslant c(y - y_0), y \in D, \tag{1.24}$$

式中 y_0 是区间 D 中一固定点,c 为常数.若 $A: L \to R$ 是保序线性泛函,使 $A(1) = 1$.则对所有 $g \in L$ 使得 $\varphi(g) \in L$,和 $A(g) = y_0$,不等式(1.22)成立.

有关(1.22)式的证明及其推广见专题论文[301]1986,118(1):125 - 144 及 1985,110:536 - 552;1991,156(1):231 - 239.

从(1.22)与(1.23)式容易得出:设 φ 是区间 $D \supset [m, M]$ 上的凸函数,$-\infty < m < M < \infty$,$g: E \to R$ 满足 $m \leqslant g(t) \leqslant M \quad (t \in E)$ 且 $g \in L$,$\varphi(g) \in L$.$A: L \to R$ 是保序线性泛函,$A(1) = 1$,非负数 p, q 之和 $p + q > 0$ 且 $A(g) = (pm + qM)/(p + q)$,则

$$\varphi\left(\frac{pm + qM}{p + q}\right) \leqslant A(\varphi(g)) \leqslant \frac{p\varphi(m) + q\varphi(M)}{p + q}.$$

(6) 设 g 是$[0,1]$是正的递增函数,$\varphi \in BV[0,1]$,$\varphi > 0$,F 是$(0,\infty)$上递增可微的凸函数,且满足

$$F'(\lambda)\frac{\varphi(1) - \varphi(x)}{1 - x} \leqslant [\varphi(1) - \varphi(0)]F'[\lambda(1 - x)],$$

$0 < x < 1, 0 < \lambda < \infty, \varphi(1) - \varphi(0) > 0, \omega$ 为非负权函数,则

$$\frac{\int_0^1 F(g)\omega d\varphi}{\int_0^1 \omega d\varphi} \leqslant F\left(\frac{\int_0^1 g\omega}{\int_0^1 \omega}\right). \qquad (\text{Malamud, S. M. [308]2001, 129(9):2671 - 2678})$$

2. [MCU]. **Hadamard 不等式(1893)**:设 φ 是区间$[a,b]$上的凸函数,则对于 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$,有

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2)], \tag{1.25}$$

仅当 φ 为线性函数时等号成立.它说明在 Jensen 不等式的两端之间可用积分的平均值插入.

证 由 φ 的凸性,对于 $x_1 < x < x_2$,有

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\varphi(x_1)(x_2 - x) + \varphi(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

两边积分即得右边不等式.为证左边不等式,令 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + t$,则

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}^{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}\left[\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + t\right) + \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)} 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\mathrm{d}t = (x_2 - x_1)\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

注 Hermite, C. 于 1883 年就发现了(1.25)式.见[367]1985,28:225 - 232 和

[301]1992,167(1):48 - 56.

注 Hadamard 不等式已有许多推广.例如:

(1) 设 φ 是$[a,b]$上连续的凸函数,则对于所有 $p_k>0, x_k\in[a,b], k=1,\cdots,n$ 以及 $1\geqslant\beta_1>\alpha_1\geqslant\cdots\geqslant\beta_{n-1}\geqslant\alpha_{n-1}\geqslant 0, \frac{1}{2}(\alpha_j+\beta_j)=1-\frac{p_1+\cdots+p_j}{p_1+\cdots+p_n}, j=1,\cdots,n-1$,有

$$\varphi\left(\frac{\sum p_k x_k}{\sum p_k}\right)\leqslant\Big(\prod_{j=1}^{n-1}(\beta_j-\alpha_j)\Big)^{-1}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}}\varphi\Big(x_1+\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)t_j\Big)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}$$

$$\leqslant\frac{\sum p_k\varphi(x_k)}{\sum p_k}.$$

证明见[8]P151 - 152.

(2) (Dragoslav,M.1979) 设 φ 是$[a,b]$上的凸函数,$p_1,p_2>0, A=\frac{p_1a+p_2b}{p_1+p_2}$,则对于 $y\neq 0$,有

$$\varphi\left(\frac{p_1a+p_2b}{p_1+p_2}\right)\leqslant\frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y}\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{p_1\varphi(a)+p_2\varphi(b)}{p_1+p_2},$$

仅当 $0<|y|\leqslant\frac{b-a}{p_1+p_2}\min\{p_1,p_2\}$ 时等号成立.见[331]1979,634 - 677:126 - 128.

1986 年 Pecaric,J.E. 和 Beesack,P.R. 将上述不等式改进为

$$\varphi\left(\frac{p_1a+p_2b}{p_1+p_2}\right)\leqslant\frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y}\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[\varphi(A-y)+\varphi(A+y)]\leqslant\frac{p_1\varphi(a)+p_2\varphi(b)}{p_1+p_2}.$$

见[301]1986,118(1):125 - 144.

(3) 1981 年王中烈、王兴华证明:设 φ 是区间$[a,b]$上连续的凸函数,则对于任何 $p_k>0, x_k\in[a,b], k=0,1,\cdots,n$,以及 α_k,β_k 满足 $0\leqslant\alpha_k<\beta_k\leqslant 1, \frac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k)=\Big(\sum_{j=k}^{n}p_j\Big)\Big(\sum_{j=k-1}^{n}p_j\Big)^{-1}, j=1,\cdots,n$,有

$$\varphi\Big(\frac{\sum p_k x_k}{\sum p_k}\Big)\leqslant\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\varphi(x(t))\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sum p_k\varphi(x_k)}{\sum p_k},$$

其中 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n), x(t)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k(1-t_{k+1})\prod_{j=1}^{k}t_j+x_n\prod_{j=1}^{n}t_j$;

$$\Omega=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times\cdots\times[\alpha_n,\beta_n],\ |\Omega|=\prod_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k).$$

上述不等式中积分号右边的等号,仅当所有 x_k 皆相等,或 $\varphi(x)$ 在包含所有 x_k 的区间上为线性时出现;积分号左边的等号,仅当所有 x_k 皆相等或 $\varphi(x)$ 在区间$[\min_{t\in\Omega}x(t),\max_{t\in\Omega}x(t)]$上为线性时出现.证明见[333]1981,126(4):254.

王中烈、王兴华的结果另见[352]1988,15(1):120－121. 1985年冯慈璜在 Pecaric,J. E. 证明的 Jensen-Steffensen 不等式两端之间插入重积分的平均值. 见[336]1985,6A(4):443－446.

(4) 1986年胡克证明:设 φ 是$[a,b]$上连续的凸函数,且对于 $p_i>0, x_i\in[a,b]$, $[u_i,v_i]\subset[a,b], Q_k=\sum_{i=0}^{k}p_i,\quad \frac{1}{2}(u_k+v_k)=Q_k^{-1}\sum_{i=0}^{k}p_ix_i, k=0,1,2,\cdots$,

令 $F(x)=\int_a^x\varphi(t)\mathrm{d}t-(x-a)\varphi(\frac{x+a}{2}), x\in[a,b]$,

$G(k)=\sum_{i=0}^{k}p_i\varphi(x_i)-\frac{Q_k}{v_k-u_k}\int_{u_k}^{v_k}\varphi(t)\mathrm{d}t, G(0)=0$,则 F 在$[a,b]$上严格递增,$G(k)$ 为 k 的递增函数. 证明见江西师大学报(自)1986. 1:1－3.

(5) 设 f 是 n 维单形 $\sum(A)$ 上的凸函数,则

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)\leqslant\frac{1}{V(A)}\int_{\sum(A)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}f(a_k).$$

式中 $V(A)$ 为 $\sum(A)$ 的体积. $\sum(A)=\operatorname{cov}(a_1\cdots,a_{n+1})$ 见[340]1987,7(4):385－386. $\sum(A)$ 的定义见第4章§2.七.

(6) 1989年 Alzer. 证明:设 f 为 $2n$ 阶可微函数($n\geqslant1$), $f^{(2n)}(x)\geqslant0, x\in(a,b)$,则

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2k}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{(b-a)^k}{(k+1)!}[f^{(k)}(a)+(-1)^kf^{(k)}(b)].$$

见 C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 1989, 11(6):255－258;

Pecaric, J. E. 则进一步证明.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2n}\left(f(x)+\sum_{k=1}^{2n-1}F_k\right).$$

当 $f^{(2n)}(x)>0$ 时,上述不等号是严格的,即"<".式中

$F_k=\left(\frac{2n-k}{k!}\right)\frac{f^{(k-1)}(a)(x-a)^k-f^{(k-1)}(b)(x-b)^k}{b-a}$.(见[306]MR93h:26026)

(7) **Seiffert 不等式**:设 f 是$[a,b]$上严格递增且有对数凸性的反函数. $S_1(a,b)$ 是 a,b 的指数平均(定义见第一章§3), $a>0$,则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\leqslant f(S_1(a,b)).$$

当 f 严格递减时,不等号反向,见 Elem. Math. 1989, 44(1):16－18.

(8) 设 f 是$[a,b]$上 $1-g$ 凸函数(见本节定义10), g 是包含 f 的值域的区间上满单射的连续函数, x,y 的广义对数平均定义为:

$$L_g(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{g(y)-g(x)}\int_{g(x)}^{g(y)}g^{-1}(t)\mathrm{d}t, & x\neq y,\\ x, & x=y,\end{cases}$$

则 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant L_g[f(x),f(y)]$;

若令 $M_g(x,y,\lambda)=g^{-1}(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))^{1/\lambda}$, $\omega:[a,b]\to R^1$ 为正的可积函数,使得 $\omega(a+t)=\omega(b-t)$, $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}(b-a)$,设 g^{-1} 为凸函数,则

$$M_g[f(a),f(b),\frac{1}{2}]\leqslant\frac{1}{\int_a^b\omega(x)\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

见[360]2000,71(1):30 - 39.

(9) 设 $f:[a,b]\to R^1$ 为凸函数,令

$$H(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f[tx+(1-t)(\frac{a+b}{2})]\mathrm{d}x;$$

$$F(t)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f[tx+(1-t)y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

则 H 是$[0,1]$上严格递增的凸函数,而且

$$\inf\{H(t):t\in[0,1]\}=H(0)=f(\frac{a+b}{2});$$

$$\sup\{H(t):t\in[0,1]\}=H(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

$F(t)$是$[0,1]$上凸函数,且在$[0,1/2]$上严格递减,在$[1/2,1]$上严格递增 $H(t)\leqslant F(t)$,而且

$$\inf\{F(t):t\in[0,1]\}=F(\frac{1}{2})=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(\frac{x+y}{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\sup\{F(t):t\in[0,1]\}=F(0)=F(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

利用 $H(t)$, $F(t)$,可对 Hadamard 不等式(1.25) 加细,例如:

$$0\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{2x+a+b}{4}\right)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-$$
$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{2x+a+b}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

由此还可推出两个正数的算术平均与幂平均不等式的加细(Dragomir,S.S.,[301]1992,167(1):49 - 56).若令

$$G(t)=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left\{f[(\frac{1+t}{2})a+(\frac{1-t}{2})x]+f[(\frac{1+t}{2})b+(\frac{1-t}{2})x]\right\}\mathrm{d}x.$$

杨国胜等证明 G 是$[0,1]$上严格递增的凸函数,而且

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant G(t)\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

见[330]1997,28(1):33 - 37.

(10) 设 f 是$[a,b]$上的凸函数,实数 p,q 满足 $pq\geqslant0$, $p+q>0$,则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 g 是 $[a,b]$ 上非负连续函数,则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left[f\left(\frac{xg(x)+yg(y)}{g(x)+g(y)}\right)+f\left(\frac{xg(y)+yg(x)}{g(x)+g(y)}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

(见 Dragomir, S. S., Zb. Rad. Prir, -Mat. Fak., Univ. Kragujevcu 1996, 18:21 - 25)

1999 年, Adedayo, O. J. 进一步推广为:

$$f\left(\frac{n(a+b)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\sum_{k=1}^n\frac{p_kx_k+q_ky_k}{p_k+q_k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{n}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

式中 $\prod_{k=1}^n(p_kq_k)\geqslant 0$, $\sum_{k=1}^n(p_k+q_k)>0$. (见 Zb. Rad. (Kragujevac) 1999, 21:49 - 53)

(11) 设 f 是区间 D 上 s-Brecker 凸函数, $D\subset[0,\infty)$, $0<s\leqslant 1$, 则

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

见(Dragomir, S. S., Demonstratio Math. 1999, 32(4):687 - 696)

(12) 设 f 是区间 D 上非负对数凸函数(见定义 2), $a,b\in D$, $a<b$, 则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)f(a+b-x)]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{f(a)f(b)}.$$

(Drogomir, S. S., Demonstratio Math. 1998, 31(2):355 - 364)

(13) 设 $B=B(x_0,r)$ 是平面上以 x_0 为中心, r 为半径的圆, L 是 B 的边界,其长度为 $2\pi r$, f 是 B 上的凸函数,则

$$f(x_0)\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\iint_B f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\leqslant\frac{1}{2\pi r}\int_L f(t)\mathrm{d}l(t).$$

(Dragomir, S. S., [304] 2000, 1, 1. 和 [303] 2000, 3(2):177 - 187)

(14) **保序线性泛函的 Hadamard 不等式**:设 X 为实线性空间, D 为 X 的凸子集, f 为 D 上凸函数, E 为非空集, L 为实值函数的线性类, $A:L\to R^1$ 为保序线性泛函,使得 $A(1)=1$. (定义见第一章 §3), $h:E\to R^1$, $0\leqslant h(t)\leqslant 1$, $t\in E$, $h\in L$ 使得 $f(hx+(1-h)y)$, $f((1-h)x+hy)\in L$, $(x,y\in D)$. 1991 年, Pecaric, J. E. 证明

$$f[A(h)x+(1-A(h))y]\leqslant A[f(hx+(1-h)y)]\leqslant A(h)f(x)+[1-A(h)]f(y).$$

(见 Rad. Mat. 1991, 7(1):103 - 107)

1993 年, Dragomir, S. S. 进一步给出了 Hadamard 不等式的加细:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\{f[A(h)x+(1-A(h))y]+f[(1-A(h))x+A(h)y]\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\{A[f(hx+(1-h)y)]+A[f((1-h)x+hy)]\}\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(y)].$$

(见 [330] 1993, 24(1):101 - 106)

(15) 对于 t 凸函数 f, 有一系列 Hermite-Hadamard 型不等式:

设 f 是 $[0,\infty)$ 上 t 凸函数, $0<t\leqslant 1$, $0\leqslant a<b<\infty$, 若 $f\in L^1[a,b]$, 则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\min\left\{\frac{1}{2}[f(a)+tf(\frac{b}{t})],\frac{1}{2}[f(b)+tf(\frac{a}{t})]\right\};$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{1}{2}\left[f(x)+tf\left(\frac{x}{t}\right)\right]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\leqslant\frac{t+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+t\frac{f(a/t)+f(b/t)}{2}\right];$$

若 $f\in L^1[ta,b]$,则

$$\frac{1}{t+1}\left[\int_a^{tb}f(x)\mathrm{d}x+\frac{tb-a}{b-ta}\int_{ta}^bf(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant(tb-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

若 f 在 $(0,\infty)$ 上可微,则

$$\frac{f(tb)}{t}-\frac{b-a}{2}f'(tb)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-ta)f(b)-(a-tb)f(a)}{2(b-a)}.$$

(见 Dragomir, S. S. [330]2002, 33(1):55 - 65. 在该文后面还列出 74 篇有关文献)

(16) 设 f 是 $[a,b]$ 上非负拟凸函数,(见本节定义 5),则 $\forall x\in(a,b)$,成立

$$f(x)\leqslant\frac{1}{\min\{x-a,b-x\}}\int_a^bf(y)dy,\quad \text{特别地,}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x.$$

(Rubinov, A. M. 等, [301]2002, 270:80 - 91)

3. **Popoviciu 不等式**:设 φ 是 $[a,b]$ 上连续的凸函数,则对于任意 $x_k\in[a,b]$, $k=1,\cdots,n$,有

$$\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_m\leqslant n}\varphi\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^mx_{k_j}\right)\leqslant\frac{1}{m}\binom{n-2}{m-2}\left\{\frac{n-m}{m-1}\sum_{k=1}^n\varphi(x_k)+n\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nx_k\right)\right\},$$

其中 $n\geqslant3, 2\leqslant m\leqslant n-1$. (转引[4]P232 - 233)

4. **三角凸函数不等式**:设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,且对某个 $p>0$ 及任意 $x_1<x_2<x_3, x_3-x_1<\pi/p$,成立

$$f(x_1)\sin p(x_2-x_3)+f(x_2)\sin p(x_3-x_1)+f(x_3)\sin p(x_1-x_2)\leqslant0,$$

则称 $f(x)$ 是(关于 p 的)三角凸函数. 它有类似于凸函数的一些性质,例如

(1) 设 $x_3-x_1<\pi/p, x_1<x<x_3$,或 $x<x_1<x_3$,则

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{\sin p(x-x_1)}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{\sin p(x_3-x_1)}+f(x_1)\sin p\left(\frac{x_3-x}{2}\right)\times$$

$$\times\sec p\left(\frac{x_3-x_1}{2}\right)\sec p\left(\frac{x-x_1}{2}\right),$$

当 $x_3<x_1<x$ 或 $x_3<x<x_1$ 时,不等号反向;

(2) 设三角凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 达到极大(或极小)值,则当 $|x-x_0|\leqslant\pi/p$ 时,有

$$f(x)\geqslant f(x_0)\cos p(x-x_0);$$

(3) 三角凸函数 $f(x)$ 在每点上都存在左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$ 且 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$;

(4) 设 $f(x)$ 为三角凸函数,则对 $\alpha<\beta$,有 $f'_-(\beta)-f'_+(\alpha)+p^2\int_\alpha^\beta(x)\mathrm{d}x\geqslant0$,仅当 $f(x)=c_1\cos px+c_2\sin px(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$ 时等号成立. 以上证明见沈燮昌等《数学分析纵横谈》,北京大学出版社(1991)$P255-262$.

5. 设 $p_k>0, a_k>0, k=1,\cdots,n$,且至少有一对 $i\neq j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,使得

$a_i \neq a_j$,则

$$\exp\left(\frac{\sum \frac{p_k}{a_k}\ln a_k}{\sum p_k/a_k}\right) < \frac{\sum p_k}{\sum p_k/a_k} < \exp\left(\frac{\sum p_k \ln a_k}{\sum p_k}\right) < \frac{\sum p_k a_k}{\sum p_k} < \exp\left(\frac{\sum p_k a_k \ln a_k}{\sum p_k a_k}\right),$$

相应的积分形式为:设 f,p 是$[a,b]$上正的连续函数,f 为非常值函数,则

$$\exp\left(\frac{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\mathrm{d}x}\right) < \frac{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\mathrm{d}x} <$$

$$< \exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) < \frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x} < \exp\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}\right).$$

提示:考虑 e^{-x} 的凸性.

6.　设 f,g,p 是$[a,b]$上正的连续函数,则

(1)　$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x\right) + \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln g(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x\right);$$

(2)　$$\exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) + \exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right).$$

与此有关的不等式见[56]P.68 − 75.

7.　**优化(或控制)不等式**:(1)　离散形式:设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 被 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 所优超,即 $x \prec y$(见本节定义 6),则对于任意凸函数 φ,成立

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\varphi(y_j). \tag{1.26}$$

(2)　积分形式之一:设 f,g 是$[a,b]$上正的递增函数,φ 为连续的凸函数,设 g 被 f 所优超,记为 $g \prec f$,是指对 $a \leqslant x < b$,有

$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,则

$$\int_a^b \varphi(g(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}x. \tag{1.27}$$

证　取 $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}, k=1,\cdots,n, \xi_k = a + k\Delta x_k$,由条件,有

$$g(\xi_1) \leqslant g(\xi_2) \leqslant \cdots \leqslant g(\xi_n); f(\xi_1) \leqslant f(\xi_2) \leqslant \cdots \leqslant f(\xi_n);$$

$$\sum_{j=1}^{k} g(\xi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j);1 \leqslant k < n, \sum_{j=1}^{n} g(\xi_k) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_k),$$

由(1.26),有 $\sum_{k=1}^{n} \varphi(g(\xi_k))\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(f(\xi_k))\Delta x_k$. 令 $n \to \infty$,即得(1.27).

(3) 积分形式之二:设 f_k, g_k 在区间[0,1]上有界递减,且 $f_k \prec g_k$,即

$$\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x g_k(t)\mathrm{d}t, 0 \leqslant x \leqslant 1, k = 1,\cdots,n,$$

$$\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g_k(t)\mathrm{d}t,$$

则对于任意凸函数 φ,有

$$\int_0^1 \varphi(t, f_1,\cdots,f_n)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \varphi(t, g_1,\cdots,g_n)\mathrm{d}t.$$

证明见[2]P30 - 33 及[305]1954,61:626 - 631,[345]1985,9:35 - 37.

1982 年 Nicolai, H. 将 φ 为凸函数的条件减弱为:对任意正数 δ, $\varphi(x+\delta) - \varphi(x)$ 在区间 D 上递增,见 God. Sofij. Univ. Fak. Mat. Mekh. 1982,76 和 1987,109 - 114.

8.(1) **Szegö 不等式**:设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$,且 f 是区间$[0,a_1]$上的凸函数,则

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} f(a_k) \geqslant f\left(\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} a_k\right). \tag{1.28}$$

证明见[2]P.47.

(2) 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$, φ 是$[a_n, a_1]$上的凸函数,则

$\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_{k+1})a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(a_k)a_{k+1}$,式中 $a_{n+1} = a_1$,见[305]1994,101(6):574 - 575.

9. **Bellman 不等式**:设 $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$,且 f 是区间$[0,a_1]$上的凸函数,$f(0) \leqslant 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f(a_k) \geqslant f\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k\right). \tag{1.29}$$

注 当 n 为偶数时,条件 $f(0) \leqslant 0$ 不能去掉,但当 n 为奇数时,该条件可省略.

1956,Brunk, H. D. 进一步推广为:设 f 是区间$[a,b]$上的凸函数,$f(0) \leqslant 0$,若 $a \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant a_2 < a_1 \leqslant b, 0 \leqslant p_n \leqslant \cdots \leqslant p_2 < p_1 \leqslant 1$,则

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k f(a_k). \tag{1.30}$$

特别当 $p_1 = \cdots = p_n = 1$ 时,又得(1.29)式.

Bellman 积分不等式:设 f, φ 是$[0,1]$上非负的凹函数,$p, q > 0$, $\int_0^1 f^{2p} = \int_0^1 \varphi^{2q} = 1$,则

$$\int_0^1 f^p \varphi^q \geqslant \frac{2\sqrt{(2p+1)(2q+1)}}{(p+1)(q+1)} - 1. \quad (\text{见}[330]1991,22(2))$$

10. 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, 0 \leqslant p_n \leqslant \cdots \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant 1$,则

(1)　**Olkin 不等式**:若 f 是区间 $[0,a_1]$ 上的凸函数,则

$$f\Big[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_ka_k\Big]\leqslant\Big[1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k\Big]\cdot f(0)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_kf(a_k);\tag{1.31}$$

(2)　若 f 的导数 f' 递增,则

$$f(c)-f(0)\leqslant\sum_{k=1}^{n}[f(a_{k+1})-f(a_k)]\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}p_j\Big),\tag{1.32}$$

式中 $c=\int_0^{a_1}g(x)\mathrm{d}x$, g 在区间 $[0,a_1]$ 上可积, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$, $x\in[0,a_1]$. 见[4]P.150 − 152.

11.　设 f 是区间 $[0,a]$ 上的凸函数, x_k 和 $\sum x_k$ 都在区间 $[0,a]$ 内, $k=1,\cdots,n$,则

$$\sum f(x_k)\leqslant f\big(\sum x_k\big)+(n-1)f(0).$$

提示:利用凸函数的定义 1 及数学归纳法.

1983 年,Pecaric,J.E. 将这个不等式推广到加权 p_k 的情形,这时还要求 $\sum p_kx_k\in[0,a]$,则

$$\sum p_kf(x_k)\leqslant Af\big(\sum p_kx_k\big)+B\big(\sum p_k-1\big)f(x_0),$$

式中 A,B 由 $\{p_k\},\{x_k\}$ 确定, x_0 位于 $[0,a]$ 内.

12.　设 φ 是区间 $[0,\infty)$ 上递增的凸函数, f 是区间 $[0,a]$ 上非负的有界变差函数,而且 $\varphi(0)=f(0)=0$, $V_0^a(f)$ 是 f 在区间 $[0,a]$ 上的全变差,则

$$V_0^a\{\varphi(f)\}\leqslant\varphi\{V_0^a(f)\}.\tag{1.33}$$

证明见[333]1982,27(2):1266 − 1270.

13.　g 是区间 D 上连续的凸函数的充要条件是对于 D 中所有 x_0,存在 $\lambda(x_0)$,使得当 $x\in D$,恒有

$$\lambda(x_0)(x-x_0)\leqslant g(x)-g(x_0).\tag{1.34}$$

见[78]P.234 或[1]P.102.

上式称为 **Hardy 不等式**. 我们熟知(见本节 N.46.),若 g 是 (a,b) 内的凸函数时, g 在 (a,b) 上几乎处处可微,单侧导数 $g'_-(x)$, $g'_+(x)$ 在 (a,b) 上递增且对 (a,b) 中任一点 x_0, $g'_-(x_0)\leqslant g'_+(x_0)$. 所以,Hardy 不等式中的 $\lambda(x_0)$ 实际上满足

$$g'_-(x_0)\leqslant\lambda(x_0)\leqslant g'_+(x_0).\tag{1.35}$$

有时就取 $\lambda(x_0)=[g'_-(x_0)+g'_+(x_0)]/2$. 若 g 在 x_0 可导,则

$$\lambda(x_0)=g'(x_0).$$

Hardy 不等式还可推广到高维空间:设 f 是凸域 $G\subset R^n$ 上的可微函数. 则 f 是 G 内的凸函数的充要条件是对 G 中任意 x, x_0,都有

$$f(x)-f(x_0)\geqslant Df(x_0)(x-x_0).\tag{1.36}$$

此外,若 f 在开凸域 $G\subset R^n$ 上有二阶连续偏导数,海色矩阵 $H_f(x)$ 对于任意 $x\in G$ 是半正定的,则 f 是 G 内的凸函数.(见[113]P.27)

注　海色矩阵(Hessian matrix) 定义为

$$H_f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

14.　设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数的充要条件是对于任意 $[x-h,x+h]\subset[a,b]$，成立

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)\mathrm{d}t. \tag{1.37}$$

提示：利用定积分的性质.

15.　(1) 设 f 是 $(0,\infty)$ 上的凸函数，则 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $(0,\infty)$ 上的凸函数.

(2)　设 $f:R^n\times R^1\to R^1$ 为连续函数. $\forall y\in[a,b]$，$f(x,y)$ 关于 x 是凸的，则 $g(x)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y$ 也是凸函数.

16.　设 f 是 $[a,b)$ 上的递增函数，则 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b)$ 上的凸函数.

17.　设 f,g 是可积函数，g 是正的，f 是凸函数，则卷积 $(f*g)(x)=\int_E f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$ 也是凸函数.

18.　设 f 是 $[a,b]$ 上正的连续函数，则

$F(x)=\int_a^b|x-t|f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上严格凸函数.

提示：将 $F(x)$ 写成 $F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b(x-t)f(t)\mathrm{d}t$.
于是 $F''(x)=2f(x)>0$.

19.　设 f 是 $[a,b]$ 上负的凸函数，则

$$[f(x)]^2<f(x-c)f(x+c),\quad x\pm c\in[a,b],c\neq 0;$$

若 f 是 $[a,b]$ 上正的凹函数，则不等号反向.

20.　设 f 是凸函数且有二阶导数，则 $e^{f(x)}$ 也是凸函数.

21.　设 f 在区是 $[a,b]$ 上为正且存在二阶导数，则 $\ln f(x)$ 是 $[a,b]$ 上凸函数的充要条件是对于 $[a,b]$ 中的所有 x，有

$$f(x)f''(x)-[f'(x)^2]\geqslant 0.$$

22.　设 φ 为凸函数，则对于 $x_1\leqslant x_2<y_1\leqslant y_2$，有

$$\frac{\varphi(y_1)-\varphi(x_1)}{y_1-x_1}\leqslant\frac{\varphi(y_2)-\varphi(x_2)}{y_2-x_2}. \tag{1.38}$$

证　设 $a<c<b$，$p=\frac{b-c}{b-a}$，$q=\frac{c-a}{b-a}$，则 $p,q>0$，$p+q=1$，$c=pq+pb$，

则$\dfrac{\varphi(b)-\varphi(c)}{c-a}\geqslant\dfrac{\varphi(b)-p\varphi(a)-q\varphi(b)}{b-pa-qb}=\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$,类似可证$\dfrac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a}\leqslant\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$,依次取 $x_1=a,x_2=c,y_1=b$ 和$x_2=a,y_1=c,y_2=b$,即可推得要证的不等式.反之,若 $x_1<y_1=x_2<y_2$ 和 $y_1-x_1=y_2-x_2$ 时,(1.38)式成立,则 φ 是凸函数.见[6]P.447.

特别,取 $x_1=x_2$,则从 φ 为凸函数,可推出 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}$ 递增.

设区间 $D\subset(0,\infty)$,φ 是D 上连续的凸函数,则 $f(x)=\varphi(x)/x$ 或者在D 上单调,或者对某个 $c\in D$,f 在集$A=\{x\in D:x\leqslant c\}$ 上递减,在 $B=\{x\in D:x\geqslant c\}$ 上递增.见[54]6.

23. 设 φ 是区间D 上的凸函数,则对于 D 中任意三点:$x_1<x_2<x_3$,有

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{1.39}$$

而对于 D 中任意四点:$x_1<x_2<x_3<x_4$,有

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{\varphi(x_4)-\varphi(x_3)}{x_4-x_3}. \tag{1.40}$$

由此可以推出,若 φ 在$(-\infty,\infty)$上有二阶连续导数,$\varphi(0)=0$,令

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x)/x, & x\neq 0\\ \varphi'(0), & x=0,\end{cases}$$

则 φ 在$(-\infty,\infty)$上为凸函数的充要条件是 f 在$(-\infty,\infty)$上递增.

24. 设 g 是$(0,\infty)$上严格递增的连续函数,$g(0)=0,g(\infty)=\infty$,从而 $y=g(x)$ 存在反函数 $x=g^{-1}(y)$,且 $g^{-1}(0)=0,g^{-1}(\infty)=\infty$.令 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.$G^{-1}(x)=\int_0^x g^{-1}(u)\mathrm{d}u$.则 G,G^{-1} 均为递增的凸函数,且成立 **Young 不等式**:$\forall a,b\geqslant 0$.

$$ab\leqslant G(a)+G^{-1}(b). \tag{1.41}$$

证明见[115]下册 P.574.

25. $f:R^1\to R^1$ 为凸函数的充要条件是存在 $g:R^1\to R^1\cup\{\infty\}$,使得

$$f(x)=\sup\{xy-g(y):y\in R^1\},\ \forall x\in R^1. \tag{1.42}$$

式中 g 称为f 的**共轭函数**,从(1.42)可推出

$$xy\leqslant f(x)+g(y),\ \forall x,y\in R^1.$$

由此可推出第13章关于积分的 Young 不等式.证明见[115]P14-16.

26. 设 φ 为区间$[a,b]$上连续的凸函数,则对于 $x_1,x_2\in[a,b]$,$|x_1|\leqslant|x_2|$ 及 $x\in[a,b]$,有

$$\varphi(x-x_1)+\varphi(x+x_1)\leqslant\varphi(x-x_2)+\varphi(x+x_2).$$

27. 设 g,φ 是区间$[a,b]$上绝对连续函数,而且 φ 是$[a,b]$上严格递增的凹函数,若 $\varphi(a)=g(a)$,$\varphi(b)<g(b)$ 或 $\varphi(a)>g(a)$,$\varphi(b)=g(b)$,则在区间(a,b)内存在 x_1,x_2,使得 $\varphi(x_2)=g(x_1)$ 且 $\varphi'_-(x_2)<g'(x_1)$.式中 $\varphi'_-(x_2)$ 是 φ 在x_2点的左

导数. 证明见[67]P.98－99.

28. 设 D 为 R^1 中任一区间, $f: D \to R^1$, 则 f 是 D 上的凸函数的充要条件是 f 可表示为积分形式:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\mathrm{d}t.\ c, x \in D. \tag{1.43}$$

式中 g 是 D 上递增右连续函数. 由此推出: 若 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数, 则 f 在 (a,b) 内 $a.e.$ 存在有限二阶导数 $f''(x) > 0$.

证 "$\Rightarrow$" 设 f 凸, 则 f'_+ 存在且为递增的右连续函数, 令

$\varphi(h) = \int_c^x \frac{f(t+h) - f(t)}{h}\mathrm{d}t, x, c \in D$. 因为 $\lim\limits_{h\to+0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'_+(t)$, 从而 $\exists M > 0$, 使 $\forall t \in (c, x)$, 及充分小的 h, 有

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \leqslant M.$$

由(L)控制收敛定理, 得到

$\lim\limits_{h\to+0}\varphi(h) = \int_0^x f'_+(t)\mathrm{d}t$. 另一方面, $\lim\limits_{h\to+0}\varphi(h) = \lim\limits_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_c^x [f(t+h) - f(t)]\mathrm{d}t$

$$= \lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left[\int_{c+h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^x f(t)\mathrm{d}t\right] = \lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^{c+h} f(t)\mathrm{d}t\right] = f(x) - f(c).$$

所以 $f(x) = f(c) + \int_c^x f'_+(t)\mathrm{d}t$.

"$\Leftarrow$" 设(1.43)成立, $\forall x, y \in D$, 不妨设 $x < y, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 令 $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. 则 $f(z) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) = \lambda[f(z) - f(x)] - (1-\lambda)[f(y) - f(z)] = \lambda\int_x^z g(t)\mathrm{d}t - (1-\lambda)\int_z^y g(t)\mathrm{d}t \leqslant \lambda(z-x)g(z) - (1-\lambda)(y-z)g(z) = 0$. 证毕.

29. φ 在凸集 D 上为凸函数当且仅当对于每个 $x, y \in D$ 和 $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$, 有

$$\frac{\varphi((1-\alpha)x + \alpha y) - \varphi(x)}{\alpha} \leqslant \frac{\varphi(y) - \varphi(\beta x + (1-\beta)y)}{\beta}. \tag{1.44}$$

若除去 $x = y$ 或 $\alpha = \beta = 1$, 则 φ 在 D 上严格凸当且仅当(1.44)式中严格不等号成立.

证明见[6]P.447.

30. 设 $x \geqslant 0$ 时 $\varphi(x)$ 为连续的凸函数, 数列 $\{a_k\}$ 非负递减, 则

$$\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\{\varphi(ka_k) - \varphi((k-1)a_k)\} \leqslant \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right).$$

若 φ' 严格递增, 则仅当 a_k 从某个 k_0 起皆为 0, 且 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k_0-1}$ 时等号成立.

31. **组合凸性不等式**: 设 $0 < a \leqslant b \leqslant c$, 函数 f 满足条件:

(1) f 是区间 $[0,a]$ 上的凸函数; (2) f 是区间 $[0,b]$ 上的星形函数, 即对于区间 $[0,b]$ 中所有 x 和 β: $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. 有 $f(\beta x) \leqslant \beta f(x)$; (3) f 是区间 $[0,c]$ 上非负的连续函数, 而且具有超加性, 即对于区间 $[0,c]$ 中任意 x 和 y, 有 $f(x) + f(y) \leqslant f(x+y)$, 则对于区间 $[0,b]$ 中任意 $x_k, k = 1, \cdots, n$, 只要满足 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = c_0 \leqslant c$, 就成立

$$f\left(\left(\frac{\beta}{n}\right)c_0\right) \leqslant \left(\frac{\beta}{n}\right)f(c_0), \quad 式中\ 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{a}{b}. \tag{1.46}$$

32. **Newmen 不等式**:设 f 是$(0,\infty)$上非负的凸函数,记 $\|f\|_c = \max\{f(x):0\leqslant x<\infty\}$,则 $\|f\|_2^2\leqslant \frac{2}{3}\|f\|_c\cdot\|f\|_1$.即

$$\int_0^\infty [f(x)]^2 dx \leqslant \frac{2}{3}\|f\|_c\int_0^\infty f(x)dx, \tag{1.47}$$

式中系数 2/3 是最佳的.证明见[305]1962,69:321 − 322.

Shepp,L.推广了上述不等式:设 f 是非负凸函数,g,h 是$[0,\infty)$上递增的绝对连续函数.若 $g(0)=0$,并令 $G=g\cdot h$,则

$$\int_0^\infty G'(f(x))dx \leqslant h(\max f)\int_0^\infty g'(f(x))dx. \tag{1.48}$$

若 $g'(0)=0$,且 $x>0$ 时 $g'(x)>0$,则仅当存在 $a,b>0$,使得

$$f(x)=\begin{cases} b(1-\frac{x}{a}), & 0\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$$

时(1.48)式中积分为有限且等号成立.见[4]P.419.

33. **Andersson 不等式**:设 f_k 是区间$[0,1]$上的凸函数,且 $f_k(x)\geqslant 0, f_k(0)=0, k=1,\cdots,n$,则

$$\int_0^1\left(\prod_{k=1}^n f_k(x)\right)dx \geqslant \frac{2^n}{n+1}\prod_{k=1}^n\int_0^1 f_k(x)dx. \tag{1.49}$$

见 Nord. Mat. Tidskr. 1958,6:25 − 26.

1984 年,Gavrea,I.将这个不等式推广到正线性泛函 $A:[0,1]\to R$ 上,其中 $A(1)=1$,,见[306]MR86f:26018.

34. 设 f 是区间$[0,1]$上的凸函数,$f(0)=0$,令 $F_a(x)=\left\{(\alpha+1)\int_0^1[f(x)^\alpha dx]\right\}^{1/\alpha}$,$\alpha>0$,则 F_α 关于 α 递增,即 $0<\alpha<\beta$ 时,有 $F_\alpha(x)\leqslant F_\beta(x)$.

35. (1) 设 f 在区间 $D=[0,1)$ 上连续递增,且 $f(x)\geqslant 0$,则存在 D 上两个凸函数 g_1,g_2,使得 $0\leqslant g_1(x)\leqslant f(x)\leqslant g_2(x)$,并且

$$(1/2)\int_0^1 g_2(x)dx \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant 2\int_0^1 g_1(x)dx. \tag{1.50}$$

其中系数 1/2 与 2 为最佳.见[325]1965,49:66 − 69.

这个不等式可推广到高维情形.为简便起见,将 $D^n=D\times D\times\cdots\times D$ 记为 A.

若函数 $f:A\to R^1, x, x+h\in A$,其中 $x=(x_1,\cdots,x_n), h=(h_1,\cdots,h_n), h_j\geqslant 0, j=1,\cdots,n, f(x)\geqslant 0, f(x+h)-f(x)\geqslant 0$,则存在 A 上两个凸函数 g_1,g_2,使得 $0\leqslant g_1(x)\leqslant f(x)\leqslant g_2(x)$,并且成立

$$\frac{n!}{(n+1)^n}\int_A g_2(x)dx \leqslant \int_A f(x)dx \leqslant (n+1)!\int_A g_1(x)dx, \tag{1.51}$$

式中 $\frac{n!}{(n+1)^n}$ 和 $(n+1)!$ 为最佳系数.(见 Michigan Math. J. 1965,12:481 − 485)

(2) 设 f 是$[0,1]$上非负凹函数,则

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 f(t)dt \leqslant \int_0^1 t^n f(t)dt \leqslant \frac{2}{n+2}\int_0^1 f(t)dt, n=0,1,2,\cdots,$$

(Mitrinovic, D. S. 等, Mach. Balkanica. (N. S.)1991, 5(3): 258 - 260).

36. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上递减的凹函数, 且 $f(a)=A, f(b)=B, 0<B<A$, 令 $C=(A-B)^{-1}A\ln(A/B)$, 则

$$1\leqslant\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{\left(C-\frac{A+B}{2A}\right)^2}{2(A-B)(C-1)}. \tag{1.52}$$

证明见[308]1955, 6: 806 - 815. 一般情形见第 13 章 N.51.

37. **Alzer 不等式:**

(1) 设 f 是 $[0,x]$ 上非负连续的凹函数, $a>1$, 则

$$\frac{(a-1)x}{a+1}\left[1+\frac{x^{a-1}f(x)}{a(a-1)\int_0^x t^{a-2}f(t)\mathrm{d}t}\right]\leqslant\frac{\int_0^x t^{a-1}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x t^{a-2}f(t)\mathrm{d}t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{ax}{a+1}\left\{1-\frac{x^{a-1}f(0)}{a^2(a-1)\int_0^x t^{a-2}f(t)\mathrm{d}t}\right].$$

(见 Rad. Mat. 1991, 7(2): 341 - 344).

(2) 设 f 是 $[a,b]$ 上非负连续的凹函数, g 在 $[a,b]$ 上非负, 且其导数 g' 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$(p+q)f^q(x)\int_a^b(gf^p)+q\int_a^b(x-t)g'(t)[f(t)]^{p+q}\mathrm{d}t\leqslant(p+2q)\int_a^b g(t)[f(t)]^{p+q}\mathrm{d}t.$$

式中 $x\in[a,b], p\geqslant 0, 0<q\leqslant 1$. (见[369]1992, 56(1 - 2): 79 - 82)

38. **支撑不等式:** 设集合 $D\subset R^n$ 是一个锥, 即对于所有 $x\in D, \lambda>0$, 都有 $\lambda x\in D$; 若 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$, 则称 f 是正齐次函数. 从[113]知, 正齐次函数 f 是凸的, 当且仅当对于凸锥 D 中所有的点 x, y, 成立

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

一个函数 f 在点 x 关于 y 方向的单侧导数 $f'(x;y)$ 定义为

$$f'(x;y)=\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}.$$

$f(x)$ 在点 y 的梯度记为 $\partial f(y)/\partial x$.

设 f 是凸锥 D 上的凸正齐次函数, 则对于 D 中所有 x, y, 有

$$f(x)\geqslant f'(y;x). \tag{1.53}$$

若 f 在点 y 可微, 则

$$f(x)\geqslant\left(\frac{\partial f(y)}{\partial x}, x\right). \tag{1.54}$$

若 f 是 D 上严格凸的正齐次函数, 则当且仅当向量 x, y 成比例时, (1.53) 中等号成立. 证明见[301]1986, 117: 23 - 41.

注 (1.54) 中 $\left(\frac{\partial f(y)}{\partial x}, x\right)$ 表示梯度 $\partial f(y)/\partial x$ 在点 x 的值.

下面将 f 是 D 上的凸函数简称为 f 凸.

39. **凸函数的初等运算性质:** (1) 设 f 凸, 则当 $c>0$ 时, cf 凸, $c<0$ 时 cf 凹.

(2) f_k 凸 $\Rightarrow \max\limits_k\{f_k\}$ 凸；$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f_k$ 凸$(p_k > 0)$；而且只要$\{f_k\}$中有一个严格凸，$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f_k$ 就严格凸.

(3) f, g 凸 $\not\Rightarrow fg$ 凸. 例如 $f(x) = 1/x, g(x) = x^{3/2}$ 在 $E = (0,\infty)$ 上为凸函数，但 $(fg)(x) = \sqrt{x}$ 却在 $(0,\infty)$ 上为凹函数.

① 设 f, g 在 D 上同时为非负递增(或非负递减)的凸函数，则 fg 也凸.

② 设 f 在 D 内凹，$f(x) > 0, x \in D$，则 $1/f$ 凸，由此推出：设 f 在 D 内凹递减，$f(x) > 0, x \in D$，而 g 在 D 内非负递增凸，则 g/f 凸.

40. **凸函数的复合运算**：设 $g(y)$ 的定义域为 D，$f(x)$ 的值域 $Y \subset D$，定义域为 E.

	$g(y)$ 在 D 内	$y = f(x)$ 在 E 内	$g \circ f$ 在 E 内
(1)	↗凸	凸	凸
(2)	↗凹	凹	凹
(3)	↘凸	凹	凸
(4)	↘凹	凸	凹

41. **凸函数的逆运算**：设 $y = f(x)$ 的定义域为 E，值域为 D，f 存在反函数 $f^{-1}: x = f^{-1}(y)$. 则当 f 严格递增时，f^{-1} 的凸性与 f 相反；f 严格递减时，f^{-1} 的凸性与 f 相同，列表如下：

$y = f(x)$ 在 E 内	$x = f^{-1}(y)$ 在 D 内
严格↗，严格凸	严格凹
严格↗，严格凹	严格凸
严格↘，严格凸	严格凸
严格↘，严格凹	严格凹

42. 设 $y = f(x)$ 是 $E = (a,b)$ 内严格递增的连续函数，$y = g(x)$ 在 E 内连续且严格单调，其值域为 D，则 $\forall x_k \in E, \forall t_k: 0 \leqslant t_k \leqslant 1, \sum\limits_{k=1}^{n} t_k = 1$，成立

$$g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k g(x_k)\right) \leqslant f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)\right) \tag{1.55}$$

$\Leftrightarrow F(y) = f(g^{-1}(y))$ 在 D 内为凸函数.

证 令 $y_k = g(x_k)$，则 $(1.55) \Leftrightarrow g^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k y_k\right) \leqslant f^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k f(g^{-1}(y_k))\right)$

$\Leftrightarrow f\left[g^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k y_k\right)\right] \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} t_k f(g^{-1}(y_k)) \Leftrightarrow f \circ g^{-1}$ 凸. 证毕.

43. **Mulholland 不等式**：设 $\varphi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ 为递增函数，而且是凸的双射，使得 $\varphi(t) = \ln\varphi(e^t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是凸的，则对所有非负数 $x_k, y_k, 1 \leqslant k \leqslant n$，成立

$$\varphi^{-1}\Big(\sum_k\varphi(x_k+y_k)\Big)\leqslant\varphi^{-1}\Big(\sum_k\varphi(x_k)\Big)+\varphi^{-1}\Big(\sum_k\varphi(y_k)\Big).$$

证明见[318]1950,51:294 – 307;[308]1990,109(3):663 – 675.

44. **凸函数列的极限运算**:(1) 设 f_n 凸,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)<\infty,x\in E$,则 f 凸.

(2) 设 f_n 凸,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x)<\infty,x\in E$,则 f 凸.

(3) 设 f_n 凸,且 $f(x)=\sup\limits_n\{f_n(x)\}<\infty$,则 f 凸.

45. **f 凸与 f 连续的关系**:在一般情形下,f 凸 $\not\Rightarrow f$ 连续.反之,f 连续 $\not\Rightarrow f$ 凸,但在 $E=(a,b)$ 为开区间情形,有以下基本结果:

(1) 1906 年 Jensen 证明:设 f 是 E 上可测的凸(或凹)函数,则 f 在 E 上连续.

由此可推出,设 f 是 R^n 中凸集 D 上可测的凸函数,则 f 在 $\overset{0}{D}$(D 的开核)上连续.

注 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可测且凸时,仍不能保证 f 在 $[a,b]$ 上连续.例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 2, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

在 $[-1,1]$ 上为凸函数且可测,但在端点间断.

(2) 1929 年 Qstrowski.A 证明:设 f 是测度为正的集合 D 上有上界的凸函数,则 f 在 D 的内点(即 $\overset{0}{D}$)处连续.

(3) 1954 年 Hukuhara.M 证明:设 f 是区间 D 上有下界的凸函数,则 f 在 D 上连续或者 f 的图像在集 $A=\{(x,y):x\in D,y\geqslant g(x)\}$ 内稠密,其中 g 为 D 上连续的凸函数.

(4) 设 f 在 $E=(a,b)$ 上为凸函数,则 f 在 E 的任一闭子区间 A 上满足 Lipschitz 条件,从而绝对连续.(证明见[118]P.316 – 317.)

(5) 设 f 在 $E=(a,b)$ 上为中点凸(即 J 凸),且 f 在 $x_0\in E$ 处间断,则 f 在 E 的每个子区间上都无界,从而 f 在 E 上处处间断.(证明见[118]P317.)

46. **凸函数的可微性**:(1) 设 f 在 $E=(a,b)$ 上为凸函数,则对于 $h>0$,差商 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 关于 h 和 x 都递增.(证明见[118]P.317)

(2) 设 f 在 (a,b) 上为凸函数,则 $\forall x_0\in(a,b)$,$f'_+(x_0)$,$f'_-(x_0)$ 均存在,且

$$f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0). \tag{1.56}$$

证 对于 $a<x<x_0<t<b$,由(1)有

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\leqslant\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}.$$

上式左边令 $x\to x_0-0$,右边令 $t\to x_0+0$,即得(1.56).证毕.

(3) 设 f 在 (a,b) 上为凸函数,则

① 令 $c=\lambda a+(1-\lambda)b$.则

$$\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leqslant f(c)+\lambda\int_a^c(x-a)df'_+(x)+(1-\lambda)\int_c^b(b-x)df'_-(x).$$

当 f 可微时，成立等号，由此推出：

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\|f''\|_c \qquad (\text{Andi, K.})$$

② $\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$，有

$$f'_+(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'_-(x_2). \tag{1.57}$$

③ $f'_-(x),f'_+(x)$ 都在 (a,b) 上递增，从而 f 在 (a,b) 上除至多可数集外可微.（证明见[118]P.318）

注　从(3)知，f 凸 $\Rightarrow f$ 在 E 上 a.e. 可微，于是用凸性条件代替经典分析中可微性的条件，可以得到比经典分析更深刻的一系列结果. 可参看[113].

47. **凸函数的极小性质：**(1)　设 f 在 (a,b) 上为凸函数，且 f 在 (a,b) 内有局部极小值 m，则 m 必为 f 在整个区间 (a,b) 内的最小值.

证　设 $f(x_0)=m,x_0\in(a,b)$，要证

$$f(x_0)=\min\{f(x):a<x<b\}. \tag{1.58}$$

用反证法. 设(1.58)不成立，则存在 $x_1\in(a,b),x_1\neq x_0$，使得 $f(x_1)<f(x_0)$. 由 f 凸 $\Rightarrow\exists\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$，使得 $f(\alpha x_1+\beta x_0)\leqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_0)<(\alpha+\beta)f(x_0)=f(x_0)$，因为 $|x_0-(\alpha x_1+\beta x_0)|=|(\alpha+\beta)x_0-\alpha x_1-\beta x_0|=\alpha|x_0-x_1|,\forall\varepsilon>0$，限制 $0<\varepsilon<|x_0-x_1|$，取 $\lambda=\dfrac{\varepsilon}{2|x_0-x_1|}$，使得 $y=\lambda x_1+(1-\lambda)x_0\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$，从而 $f(y)<f(x_0)$，与 $f(x_0)$ 为局部极小值相矛盾. 证毕.

(2)　设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的凸函数，则

$$\max\{f(x):a\leqslant x\leqslant b\}=\max\{f(a),f(b)\}. \tag{1.59}$$

（即 f 在 $[a,b]$ 上的最大值为 $f(a)$ 或 $f(b)$）.

证　$\forall x_0\in(a,b)$，令 $\alpha=\dfrac{b-x_0}{b-a},\beta=\dfrac{x_0-a}{b-a}$，则 $\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1,x_0=\alpha a+\beta b$，由 f 凸 $\Rightarrow f(x_0)=f(\alpha a+\beta b)\leqslant\alpha f(a)+\beta f(b)\leqslant(\alpha+\beta)\max\{f(a),f(b)\}=\max\{f(a),f(b)\}$，由 x_0 的任意性知(1.59)成立. 证毕.

(3)　设 f 在 (a,b) 上为凸函数，且 f 在 (a,b) 上不为常值函数，则 f 不可能在 (a,b) 的内点取得最大值.

证　用反证法，设 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\max\{f(x):a<x<b\}$. 又 $f\not\equiv c$（常数），所以 $\exists x_1\in(a,b),x_1\neq x_0$，使得 $f(x_1)<f(x_0)$，不妨设 $a<x_1<x_0$，再取定 $x_2:x_0<x_2<b$，则 $f(x_2)\leqslant f(x_0)$.

令 $\alpha=\dfrac{x_2-x_0}{x_2-x_1},\beta=\dfrac{x_0-x_1}{x_2-x_1}$，则 $x_0=\alpha x_1+\beta x_2$，由 f 凸 $\Rightarrow f(x_0)\leqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)<\alpha f(x_0)+\beta f(x_0)=f(x_0)$，得到矛盾. 证毕.

(4)　f 在 (a,b) 上既凸又凹 $\Leftrightarrow f$ 在 (a,b) 内为线性函数.

证　“$\Leftarrow$”显然成立，下面证“$\Rightarrow$”，$\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2,\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$，$x=\alpha x_1+\beta x_2$，从 f 凸 $\Rightarrow f(x)\leqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$，从 f 凹 $\Rightarrow f(x)\geqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$，

从而 $f(x)=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x+\dfrac{x_2 f(x_1)-x_1 f(x_2)}{x_2-x_1}$. 证毕.

48. (1) 设 f 是$[a,b]$上的凸函数,且 f 在区间端点的单侧导数$f'_+(a)$,$f'_-(b)$存在(有限数),则 $f\in$ Lipl,即存在常数 $M>0$,使得

$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|, x,y\in[a,b]$.

(2) 设 f 是$[0,1]$上的凸函数,则 $\forall x\in(0,1), y\in[0,1]$,成立

$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$,式中 $M=\max\left\{\dfrac{|f(x)-f(0)|}{x},\dfrac{|f(1)-f(x)|}{1-x}\right\}$.

49. 设 f 是R^1上的凸函数,则对于 $x\geqslant 0, 0<a\leqslant b$,成立

$$b\left[f\left(\frac{x}{b}\right)-f(0)\right]\leqslant a\left[f\left(\frac{x}{a}\right)-f(0)\right].$$ (见[359]1989,39(3):461-468)

50. 设正数 a_k, x_k, y_k 满足:

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n x_k=1. \frac{x_j}{y_j}\leqslant\frac{a_j}{y_j}\leqslant\frac{a_k}{y_k}\leqslant\frac{x_k}{y_k}, k=1,\cdots,m, j=m+1,\cdots,n.$$

$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 是$(x_1,\cdots,x_n)$的递增重排. 若 f 为凹函数,则

$$\sum_{k=1}^n y_k f\left(\frac{x_k}{y_k}\right)\leqslant\sum_{k=1}^n y_k f\left(\frac{a_k}{y_k}\right)\leqslant\sum_{k=1}^n y_k^* f\left(\frac{a_k^*}{y_k^*}\right).$$

若 f 为凸函数,则上述不等号全部反向.(见[301]1990,152:296-303)

51. 设 $a\leqslant x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b$, f 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 阶均差记为 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)=[x_0,x_1,\cdots,x_n;f]$.(见本节定义 4)

1984 年,Zwick 证明:设 f 是(a,b)上 $n+2$ 阶凸函数. 则 $g(x)=[x+h_0,\cdots,x+h_n;f]$ 是 x 的凸函数,其中 $x+h_k\in(a,b), 0\leqslant k\leqslant n$.

1985 年 Farwig,R. 和 Zwick,D. 证明:若 $f^{(n)}$ 是(a,b)上的凸函数,则

$$f^{(n)}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n x_k\right)\leqslant n!\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n f^{(n)}(x_k).$$

若 $x_0\neq x_n$,则仅当 f 为 $n+1$ 阶多项式时等号成立(见[301]1985,108(2):430-437). 1989 年 Edward 等将上述结果推广到多元凸函数,见[301]1989,137(2):541-549. 同一年,Pecaric 等还证明:$(n+2)$阶凸函数 f 的 n 阶均差 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 满足 Schur 条件:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x_k-x_j)\geqslant 0,$$

从而进一步推广了上述结果,见[401]1989,19(1):303-311.

52. **凸性基本不等式**:设 A 为R^n中凸集,t 为实数,$tA=\{ty: y\in A\}$,若 A 是一个包含 0 的凸集. 定义 A 关于 0 的度量:

$$h(x)=\begin{cases}\inf\{t>0: x\in tA\}, & \text{若至少存在 } t>0, \text{使 } x\in tA,\\ \infty & \text{,否则},\end{cases}$$

于是,若 $x\in A$,则 $h(x)\leqslant 1$,若 $x\notin A$,则 $h(x)\geqslant 1$. 设 $A=\{x=(x_1,\cdots,x_n): x_k\geqslant 0, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 为凸锥. $A_+=\{x=(x_1,\cdots,x_n): x_k>0, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 为无顶点凸锥.

定义在任意集 E 上的(数值)函数构成的向量空间 X 和 X 内非负函数的锥 A^*，若 $\forall\,\varphi_1,\varphi_2\in A^*.\ \varphi_2(t)\leqslant\varphi_1(t)$. 有 $h(\varphi_2)\leqslant h(\varphi_1)$，则称度量 h 在 A^* 上是递增的.

设 f 是 A_+ 内连续的凹函数，使得 $\forall\,x\in A,\lambda\geqslant 0$，有 $f(x)>0, f(\lambda x)=\lambda f(x),\varphi_k\in A^*$，$h$ 是 A^* 内递增的度量，使得 $h(\varphi_k)<\infty$，则

$$h[f(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)]\leqslant f[h(\varphi_1),\cdots,h(\varphi_n)].$$

由此推出：设 $g_1,g_2\in A^*$，h 是 A^* 内递增的度量，使得

$h(g_1^p)<\infty, h(g_2^q)<\infty, 1/p+1/q=1/r.\ p>0,q>0$，则成立 **Hölder 不等式**：

$$[h(g_1^rg_2^r)]^{1/r}\leqslant[h(g_1^p)]^{1/p}[h(g_2^q)]^{1/q},$$

而当 $p=q\geqslant 1$ 时，成立 **Minkowski 不等式**：

$$\{h[(g_1+g_2)^p]\}^{1/p}\leqslant[h(g_1^p)]^{1/p}+[h(g_2^p)]^{1/p}.$$

通过对集 E 和 g_1,g_2 的不同选取，可以得到许多有用的不等式. 见[356]1989,9(1－2):35－43.

53.　**凸函数的幂平均不等式**：设 f 在 $[a,b]$ 上可积且下界为正，则 f 在 $[a,b]$ 上的 p 次幂平均定义为：

$$M_p(f)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{b-1}\displaystyle\int_a^b[f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & p\neq 0\\ \exp\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x\right), & p=0.\end{cases}$$

我们在第一章 § 3 还定义了两个正数 x,y 的幂平均 $M_p(x,y)$ 和广义对数平均 $J_p(x,y)$，即

$$M_p(x,y)=\begin{cases}[\frac{1}{2}(x^p+y^p)]^{1/p}, & p\neq 0\\ \sqrt{xy}, & p=0.\end{cases}\qquad J_p(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^p-y^p}{p(x-y)}\right)^{\frac{1}{p-1}}, & x\neq y,\\ x, & x=y,\end{cases}$$

若 f 是 $[a,b]$ 上正的连续函数，且在 (a,b) 内二次可微.

(1)　若 f 是凸函数，则对任意实数 p，成立

$$M_p(f)<J_p(f(a),f(b)).$$

当 f 为凹函数时，则不等号反向；

(2)　若 f 是凸函数且 $p\geqslant 1$，则　$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<M_p(f)<M_p(f(a),f(b))$；

当 f 为凹函数且 $p\leqslant 1, p\neq 0$，则不等号反向.

$p=0$ 时，　$\sqrt{f(a)f(b)}\leqslant M_0(f)\leqslant f(\frac{a+b}{2})$.

对于其他 p 值，相应的不等式不一定成立.(曹小琴,[344]2000,30(3):363－366)

54.　**凸函数的单调平均不等式**：

(1)　令 $A_n(f)=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})$.　$B_n(f)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n}), n\geqslant 2$.

则当 f 是 $(0,1)$ 上的凸函数时，$A_n(f)$ 是 n 的递增序列；当 f 为凹函数时，$A_n(f)$ 递减；

若 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数时，$B_n(f)$ 关于 n 递减；当 f 为凹函数时，$B_n(f)$ 递增.

特别,当 $f(x)=x^p$ 时, $A_{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)^p}\sum_{k=1}^{n}k^p$,这时,若 $p\geqslant 1$ 或 $p\leqslant 0$, $A_{n+1}(f)$ 关于 n 递增;当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时 $A_{n+1}(f)$ 递减;而当 $p\geqslant 1$ 时, $B_n(f)=\dfrac{1}{n^p(n+1)}\sum_{k=1}^{N}k^p$ 关于 n 递减,当 $p\leqslant 1$ 时, $B_n(f)$ 递增;若 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数,则

$$A_n(f)\leqslant\int_0^1 f\leqslant B_n(f).$$

当 f 为凹函数时,不等号全都反向.

(2) 令 $S_n(f)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, $\sigma_n(f)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$,

若 f 在 $[0,1]$ 上是凸或凹函数,是 $S_n(t)$ 关于 n 递增, $\sigma_n(f)$ 关于 n 递减.

(3) 令 $M_n(f)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)$, $T_n(f)=\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{2}f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)+\dfrac{1}{2}f(1)\right]$;

设 f' 是 $[0,1]$ 上的凸或凹函数,若 f 是凸函数,则 $M_n(f)$ 关于 n 递增而 $T_n(f)$ 递减,若 f 是凹函数,则 $M_n(f)$ 递减而 $T_n(f)$ 递增.(见 Bennett-Jameson,[301]2000,252:410 – 430)

55. **Berwald 不等式**:设 f 是 $[a,b]$ 上非负连续的凹函数,不恒等于零. φ 在 $[0,y_0]$ 上严格单调且连续, y_0 是充分大的数,这时方程

$$\frac{1}{z}\int_0^z\varphi(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\mathrm{d}x$$

有惟一的正根 z_0. 又设 g 是 $[0,z_0]$ 上单调有界函数且令

$$G(y)=\int_0^y g(t)\mathrm{d}\varphi(t),\ y\in[0,z_0].$$

则当 φ 与 f 有相同的单调性(同为递增或同为递减)时成立

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x))\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{z_0}\int_0^{z_0}G(y)\mathrm{d}y;$$

而当 φ 与 f 有相反的单调性时,不等号反向,特别:

(1) 令 $\varphi(y)=y$, $\quad M(f)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

则 $z_0=2M(f)$,从而得到 **Favard 不等式**(1993):

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x))\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2M(f)}\int_0^{2M(f)}G(y)\mathrm{d}y.$$

见[301]1995,190(1):248 – 262.

(2) 令 $\varphi(y)=y^p$, $g(y)=\dfrac{q}{p}y^{q-p}$,于是 $G(y)=y^q$, $0<p<q$,从而

$$\left(\frac{q+1}{b-a}\right)^{1/q}\|f\|_q\leqslant\left(\frac{p+1}{b-a}\right)^{1/p}\|f\|_p.$$

特别取 $p=1$, $q>1$,得到

$$M_q(f)\leqslant\frac{2}{(q+1)^{1/q}}M_1(f).$$

(当 $q = 2$ 时,称为 **Frank-Pick 不等式**).

$$\frac{\|f\|_c}{2} \leqslant M_1(f) \leqslant \frac{e}{2} M_0(f),$$

式中 $M_q(f)$ 由 N.53.定义.

56. **Klamkin 不等式**:设 $a_k > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$,$f$ 为 $D = (0,\infty)$ 上的凸函数,则

$$\sum_{k=1}^n f(a_k) \leqslant \sum_{k=1}^n f[S_n - (n-1)a_k].$$

特别,$f(x) = -\ln x$ 时就得 Mitrinovic 等的结果. 见[331]1996,7:72 - 73.

57. 设 f 在$[a,b]$上有直到 $n-1$ 阶连续导数,$f^{(n)}$ 是(a,b)上的凸函数,令 $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$,若 $n > 1$ 时,$f^{(n)}(x) \geqslant f^{(n)}(x_0), x \in (a, x_0)$,则

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \geqslant \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(b-a)^n.$$

58. **Godunova 不等式**:设 φ 是$[0,\infty)$上连续递增的凹函数,且 $\varphi(0) = 0$, $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_0^\infty \frac{1}{x}\varphi^{-1}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \varphi(f(t)\mathrm{d}t)\right]\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

特别,若 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1}\varphi^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi(a_k)\right] < \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$.

59. 设 X 为实线性空间,D 为 X 的凸子集. f 为 D 上凸函数,$q_k \geqslant 0$, $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k > 0$, $\alpha > 0$,选取 $x_1, \cdots, x_n, x \in X$,使得 $x - \sum_{k=1}^n q_k x_k$, αx_k, $\frac{\alpha}{\alpha + Q_n} \in D$,则

$$\frac{\alpha + Q_n}{\alpha} f\left(\frac{\alpha}{\alpha + Q_n}\right) \leqslant f\left(x - \sum_{k=1}^n q_k x_k\right) + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n q_k f(\alpha x_k).$$

特别,当 $f(t) = t^2$ 时,得到**华罗庚不等式**. 当 $f(t) = t^p (p > 1)$ 时,得到**王忠烈 - 华罗庚不等式**. 见[368]1996,38(2):101 - 109.

60. 设 f 是$[-a,a]$上的凸函数,g 是$[-a,a]$上的偶函数且在$[0,a]$上递增,则

$$\left(\int_{-a}^a g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant 2a\int_{-a}^a g(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

提示:令 $\varphi(x) = f(x) + f(-x), 0 \leqslant x \leqslant a$,因为 g 为偶函数,所以

$$\int_{-a}^a g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

又 f 为凸函数,于是从 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant a$,得到

$$\frac{f(-x_1) - f(x_2)}{(-x_1) - (-x_2)} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

从而 φ, g 都在$[0,a]$上递增,由 Chebyshev 不等式,(见第一章 §3(3.131) 式) 得到

$$\int_0^a g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^a g(x)\mathrm{d}x \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x. \text{(见[305]1990,97(7):621)}$$

61. 设 φ 是 $(-\infty,\infty)$ 上递增的凸函数. 复函数 $f(z)=z+\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ 在圆盘 $|z|<1$ 上单叶解析, $0<r<1$. $K(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\ln|f(re^{it})|)\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\ln|K(re^{it})|)\mathrm{d}t.$$

(Baernstein, A., [322]1974, 133:139 - 169)

62. 设 $B=\{x\in R^n:|x|\leqslant 1\}$ 为 R^n 中单位闭球. $\varphi\in C^2(B)$. $\varphi>0$, $\ln\varphi$ 为凹函数. 令 $f(x)=(1-|x|^2)\varphi(x)$, $\|f\|_c=\sup\{f(x):x\in B\}$. $v(B)$ 为 B 的体积, 则

$$\int_B f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{n+2}v(B)\|f\|_c.$$

仅当 φ 为常值函数时等号成立. (MR91c:26026)

63. 设 f 是 $(-1,1)$ 上的 n 阶凸(或凹)函数, 则当 $n=1$ 时,

$$\limsup_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant\frac{c}{(1-x^2)}+\omega(f,1-x^2),$$

而当 $n\geqslant 2$ 时, $|f'(x)|\leqslant C\left[\dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}\omega\left(f,\dfrac{\ln n}{n}\sqrt{1-x^2}\right)+\dfrac{\omega(f,1-x^2)}{1-x^2}\right]$.

式中 $\omega(f,\cdot)$ 为 f 的连续模. 见第 12 章 §1. (Mathematica, 1996, 38(61)(1 - 2):141 - 148)

64. 设 f 是 $[0,a]$ 上 n 阶凸函数, $g\in L[0,a]$ 且满足:

$$\int_0^a x^kg(x)\mathrm{d}x=0, 0\leqslant k\leqslant n, (-1)^{n+1}\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}g(t)\mathrm{d}t\geqslant 0. x\in[0,a], \text{则}$$

$$\int_0^a fg\geqslant 0.$$

特别地, f 是 $[0,2\pi]$ 上的凸函数时, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\geqslant 0$. 见 Hasson, Maurice, [404](4). 1998, 16(1 - 2):15 - 21.

65. 设 f 是 $(0,b)$ 上非负凸函数, $f(0)=0$, $0\leqslant a_k<b$, $0\leqslant k\leqslant n$, $a_0=0$, 若 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-a_{k-1}|<b$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}|f(a_k)-f(a_{k-1})|\leqslant f\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k-a_{k-1}|\right).$$

(Pecaric, J. 等. Comment. Math. Prace Mat, 1996, 36:169 - 178. 另见第 8 章 §1N. 17)