习题4-5 中山大學 本科生考试草稿纸 2011 $\frac{20}{5}$—101.

P.215.1. 求 $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ 的凸凹性区间及拐点：

解：$f'(x)=e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$

$f''(x)=-4xe^{-x^2}+(1-2x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=e^{-x^2}(-6x+4x^3)=e^{-x^2}\cdot 2x\cdot(2x^2-3)$

令 $f''(x)=0$，则 $x\cdot(2x^2-3)=0$，$x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$，$x=0$，$x=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

x	$(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}})$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{3}{2}},0)$	0	$(0,\sqrt{\frac{3}{2}})$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	拐点	$\cup$	拐点	$\cap$	拐点	$\cup$

凸区间 $(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}})\cup(0,\sqrt{\frac{3}{2}})$

凹区间 $(-\sqrt{\frac{3}{2}},0)\cup(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty)$

拐点：$x=0$，$x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

P.215.2 作图：$y=x^2-\frac{x^3}{3}$，$(-\infty,+\infty)$

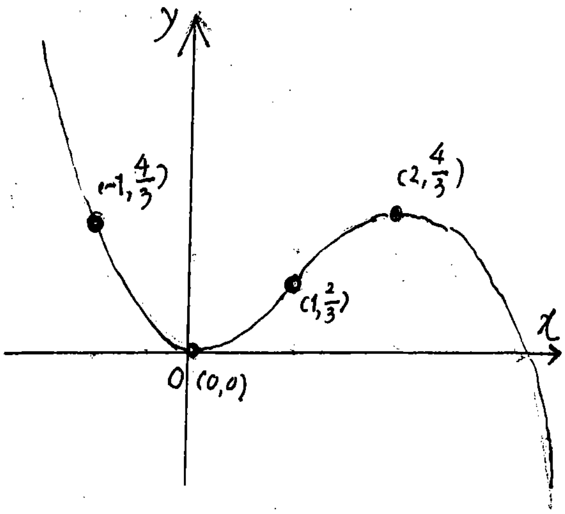
$y'=2x-x^2=x(2-x)$，令 $y'=0$，驻点 $x=0$，$x=2$.

$y''=2-2x=2(1-x)$，令 $y''=0$，得 $x=1$.

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\frac{x^3}{3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\frac{x^2}{3})=-\infty$，无渐近线。

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\frac{x^3}{3})=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-\frac{x^3}{3})=+\infty$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$\cancel{-}$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	极小 $(0,0)$	$\nearrow$	拐点 $(1,\frac{2}{3})$	$\nearrow$	极点 $(2,\frac{4}{3})$	$\searrow$



选点：$(0,0)$、$(1,\frac{2}{3})$，$(2,\frac{4}{3})$，$(-1,\frac{4}{3})$