1．（1）$-3h \neq k$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$；(4) 3

2．（判断正确 2 分，理由正确 3 分）

(1)错误，例如令 $\vec{u}$ 为零向量，$\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 线性无关时，同样满足前提条件但是结论不成立。

(2)正确，注意题目要求的是满射，而矩阵 A 最多只能有 5 个主元，从而不能满射到 $\mathbb{R}^6$。

(3)错误，矩阵 A 必须可逆才存在上述矩阵。

3．

(1) （两小问各 5 分）

a 组由于向量个数大于向量的维数，所以必定线性相关。由于 b 组中的向量所组成的矩阵每一列都有主元，所以其对应的齐次线性方程只有零解，从而该组向量线性无关。

(2) （各个矩阵 4 分，其中算法 2 分，计算准确 2 分）

根据课本算法，由于

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 10 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -0.5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以有

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -0.5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)根据题意可知，根据题意可知，点 $(x, y, z, 1)$ 在该变换下被平移到点 $(x-6, y+4, z+5, 1)$。

所以在齐次坐标下，其对应的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)（算法正确 4 分，计算准确 4 分）

根据分块矩阵理论可知，等价于求两个二阶矩阵 $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ 的逆。由定理 4 的公式

可知，前一个矩阵的逆为$\begin{pmatrix} 2.5 & -3.5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，后一个矩阵的逆为$\begin{pmatrix} 1.6 & -0.6 \\ -1.8 & 0.8 \end{pmatrix}$。所以有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2.5 & -3.5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 & -0.6 \\ 0 & 0 & -1.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$。

4.

(1)证：假设$\vec{u}$和$\vec{v}$是 R^n 上的线性无关的两个向量。因为向量$T(\vec{u})$和$T(\vec{v})$线性相关，这意味着存在不全为 0 的两个常数 a 和 b，使得$aT(\vec{u})+bT(\vec{v})=0$。$\vec{u}$和$\vec{v}$是 R^n 上线性无关的且常数 a 和 b 不全为 0，所以向量$a\vec{u}+b\vec{v}$肯定不为 0。根据线性函数的定义可知，向量$a\vec{u}+b\vec{v}$即为方程$T(\vec{x})=0$的非平凡解。

(2)证：根据题设可知，因为矩阵 A 可逆，从而有关系式 $A^{-1}=\dfrac{\mathrm{adj}A}{\det A}$；所以对于矩阵$\mathrm{adj}A$来说，有$\mathrm{adj}A(\dfrac{1}{\det A}A)=I$。此时根据定理 8 可知，矩阵$\mathrm{adj}A$可逆。

5.证：

根据题设可知（4 分）

$$(A+\vec{a}\vec{b}^T)(A^{-1}-\frac{A^{-1}\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}})=I-\frac{\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}+\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}-\frac{\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}$$

由于（2 分）

$$\frac{\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}=\frac{\vec{a}(\vec{b}^TA^{-1}\vec{a})\vec{b}^TA^{-1}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}=\frac{\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}$$

从而有（2 分）

$$(A+\vec{a}\vec{b}^T)(A^{-1}-\frac{A^{-1}\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}})=I-\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}(\frac{1}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}-1+\frac{\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}})=I$$

所以根据定理 8 可知矩阵$A+\vec{a}\vec{b}^T$可逆，且其逆为$A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\vec{a}\vec{b}^TA^{-1}}{1+\vec{b}^TA^{-1}\vec{a}}$。