中山大學 本科生考试草稿纸 2011/9/5—89.

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.200. 2. (3) $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}$, (x^3)

解：由 $\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{16}+o(t^2)$ 可得：

$$\sqrt{1-2x+x^3}=\sqrt{1-(2x-x^3)}=1-\frac{1}{2}(2x-x^3)-\frac{1}{8}(2x-x^3)^2-\frac{1}{16}(2x-x^3)^3+o(x^9)$$

$$\sqrt{1-3x+x^2}=\sqrt{1-(3x-x^2)}=1-\frac{1}{2}(3x-x^2)-\frac{1}{8}(3x-x^2)^2-\frac{1}{16}(3x-x^2)^3+o(x^6)$$

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt{1-3x+x^2}=1-x+\frac{x^3}{2}-\frac{1}{8}(4x^2)-\frac{1}{16}(8x^3)+o(x^3)$$

$$-\left[1-\frac{3}{2}x+\frac{x^2}{2}-\frac{9}{8}x^2+\frac{2}{8}\cdot 3x^3-\frac{27}{16}x^3+o(x^3)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+o(x^3).$$

P.200. 3. 求下列函数在点 $x=0$ 的局部泰勒公式：

(1) $\arctan x$;

解：由于 $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}+o(x^{2n})$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x[1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot t^{2n}+o(t^{2n})]dt$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

(2) $f(x)=\arcsin x$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

解：$(1+t)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{t}{2}+\frac{3}{8}t^2-\frac{5}{8}t^3+\frac{35}{128}t^4+o(t^4)$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{8}x^6+\frac{35}{128}x^8+o(x^8)$$

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{56}x^7+\cdots\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$