§1.3　　谓词与量词

一．引言

命题逻辑有局限性，有些推理描述不了。例如：

“凡是人都会死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底会死。”用命题逻辑描述：p: 凡是人都会死的; q: 苏格拉底是人; r: 苏格拉底会死. 即：$p\wedge q\rightarrow r$. 这不是一个正确的推理过程。

再如：“每一个连接在校园网上的电脑都功能正常，数学 3 是连接在校园网上的电脑，所以数学 3 功能正常。”

再如：由“计科 2 正被入侵者攻击”推出“存在校园网上的一台电脑，它正被入侵者攻击。”

为此，我们在本节引入更加强有力的谓词逻辑（predicate logic）来描述这些推理。

二．谓词（predicates）

包含变元的陈述句如下：

例如：“$x > 3$”，“$x = y+3$”，“计算机 x 正被入侵者攻击”，“计算机 x 功能正常”。

x 大于 3，其中，x 是主语，而“大于 3”是用来描述主语的性质或主语之间的关系的谓语，称为谓词。

例如：x 大于 3，表示为 P(x), P 表示“大于 3”这个谓词。

P(x)有时也称为 x 的命题函数 P 的值。

例 1：设 P(x)表示 $x > 3$。P(4)和 P(2)的真值是什么？

解：P(4)表示 $4 > 3$，真值为 T, P(2)表示 $2 > 3$，真值为 F.

例 2：设 A(x)：计算机 x 正被入侵者攻击。假设当前只有计科 2 和数学 1 正被入侵者攻击。问：A(计科 1), A(计科 2)和 A(数学 3)的真值？

解：A(计科 1)真值为 F, A(计科 2)真值为 T, A(数学 3)的真值为 F.

*谓词还可以有多于一个变量。

例 3：设 Q(x,y)表示: x = y+3．问：Q(1,2), Q(3,0)的真值？

解：Q(1,2)表示: 1=2+3，真值为 F. Q(3,0)表示: 3=0+3，真值为 T.

*一般地，一个谓词可以包含 n 个变量：$x_1,x_2,\ldots,x_n$。

谓词 $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$称为 n 目谓词(n-place predicate)或 n 元谓词(n-ary predicate).

三．量词（quantifiers）

当命题函数的变量被赋予某个值，结果该语句变成一个命题，并且有一个真值。

有时，我们会考虑在变量值域的某个范围内，该命题函数都为真或都为假。例如：在自然语言中，“所有的”,“某些”,“许多”,“不存在”,“很少”等。

我们用全称量词表示谓词对我们考虑的所有元素都为真，用存在量词表示谓词对我们考虑范围内的某一个或某一些元素为真。

具有谓词和量词的逻辑领域称为谓词演算（predicate

calculus）.

1. 全称量词（The universal quantifier）:

(1) 论域：我们考虑的变量的取值范围（domain of discourse）.

(2) 全称量词：谓词的全称量词约束（universal quantification）表示语句："对论域中 x 的所有值有 P(x)成立。"用记号表示为：$\forall xP(x)$. 其中：$\forall$称为全称量词。

如果 x 论域中有某个值使得 P(x)为假，则该 x 的值称为$\forall xP(x)$的反例。

*注：在用到全称量词时，必须先指定论域，否则该量词无意义。不严格地，如果没有指明具体论域，那么我们假定论域是包含一切事物的全总论域。（全总论域可能导致悖论）。

(3) 例子

例 8：设 P(x): $x+1 > x$. 论域是实数集合，问：$\forall xP(x)$的真值？

解：因为对任意实数 x, $x+1 > x$, 故$\forall xP(x)$真值为 T.

例 10：设 P(x): $x^2 > 0$, 论域是实数的集合，问：$\forall xP(x)$的真值？

解：因为当 $x = 0$ 时，x^2 不大于 0，故$\forall xP(x)$真值为 F, 其中 $x = 0$ 是一个反例。

(4) 有限论域上的全称量词：

若论域为有限集，变量 x 的值可以枚举出来：$x_1,x_2,\ldots,x_n$，那么$\forall xP(x)$等同于 $P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge\cdots\wedge P(x_n)$.

例 11：设 P(x): $x^2 < 10$, 论域：不大于 4 的正整数的集合。

问：$\forall xP(x)$的真值？

解：$\forall xP(x)=P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge P(4)$

因为 $P(4)= 4^2 < 10$ 不为真，故$\forall xP(x)=F$.

例 13：如果论域是实数的集合,$\forall x$（$x^2 \geq x$）的真值是什么？如果论域是整数的集合，该语句的真值又怎样？

解：设 $P(x)$: $x^2 \geq x$. 当论域为实数的集合，$\forall xP(x)$为假，因为$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$不为真。$x^2 \geq x$ 当且仅当 $x^2-x\geqslant 0$，即 $x(x-1)\geqslant 0$. 故 $x^2 \geq x$ 当且仅当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$。故当论域为所有整数的集合时，$\forall xP(x)$为真。

2. 存在量词(The existential quantifier)

(1) 存在量词：谓词 $P(x)$ 的存在量词约束(existential quantification)表示语句："在论域中存在元素 x 使得 $P(x)$成立。"用记号表示为$\exists xP(x)$. 其中$\exists$称为存在量词。

*注：与全称量词相同，用存在量词时，必须先指定论域。

(2)例子

例 14：设 $P(x)$: $x > 3$, 论域为实数的集合，问：$\exists xP(x)$的真值？

解：因为存在实数 4，使得 $4 > 3$, 故$\exists xP(x)$为真。

例 15：设 $Q(x)$: $x = x+1$, 论域为实数的集合，问：$\exists xQ(x)$的真值？

解：因为对任何实数 x, $x = x+1$ 都不为真，故$\exists xQ(x)$为假。

(3)有限论域上的存在量词

若论域为有限集合，变量 x 的值可以枚举出来：$x_1,x_2,\ldots,x_n$，

那么$\exists xP(x)$等同于 $P(x_1)\vee P(x_2)\vee\cdots\vee P(x_n)$。

例 16：设 $P(x)$: $x^2 > 10$，论域：不大于 4 的正整数的集合，问：$\exists xP(x)$的真值？

解：$\exists xP(x)=P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee P(4)$，因为 $P(4)$表示 $4^2 >10$ 为真，故$\exists xP(x)$为真。

*在有限论域上讨论量词的时候，要判定$\forall xP(x)$是否为真，可考查 x 的每一个值，看看是否都有 $P(x)$为真，若是，则$\forall xP(x)$为真，若不是，则可以找到一个反例 x，使 $P(x)$为假，因而$\forall xP(x)$为假。要判定$\exists xP(x)$是否为真，可考查 x 的每一个值，看看是否存在 x 的某一个值使 $P(x)$为真，若是，则$\exists xP(x)$为真，若不是，则对所有 x 的值有 $P(x)$为假，因而$\exists xP(x)$为假。

3. 其它量词：

(1) 唯一存在量词(uniqueness quantifier):

$\exists!$或$\exists_1$：$\exists!\ xP(x)$ (或$\exists_1 xP(x)$)表示存在唯一的 x 使得 $P(x)$成立。例如：$P(x)$: $x+1=0$，论域：实数集合，$\exists!\ xP(x)$为真。

(2) 限制论域的量词

例 17：设论域为实数集合。$\forall x<0(x^2 > 0)$，$\forall y\neq0(y^3 \neq 0)$，$\exists z>0(z^2 = 2)$的含义？

解：$\forall x<0(x^2 > 0)$表示$\forall x$（$x<0\rightarrow x^2>0$)

$\forall y\neq0(y^3 \neq 0)$,表示$\forall y$（$y\neq0\rightarrow y^3\neq0$),

$\exists z>0(z^2 = 2)$表示$\exists z(z>0\wedge z^2=2)$

*唯一存在量词和限制论域的量词都可用全称量词和存在量

词的公式表示。

4. 量词的优先级(precedence of quantifiers)

在具有量词的逻辑公式中，量词的优先级高于所有其它逻辑联结词（算符）。

例如:

$\forall xP(x)\vee Q(x)$表示$(\forall xP(x))\vee Q(x)$ 而不是$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，

$\forall xP(x)\rightarrow Q(x)$表示$(\forall xP(x))\rightarrow Q(x)$而不是$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$。

5. 约束变量(binding variables)

在逻辑公式中，一个量词的作用范围称为这个量词的辖域(scope). 当一个变量 x 出现在关于 x 的量词的辖域中，则 x 称为约束出现(bound occurrence)，否则 x 称为自由出现(free occurrence). 每个紧跟在量词后面的变量称为指导变量。

例如：$\exists x(x+y=1)$中 x 是约束出现，y 是自由出现。$\exists x$ 的辖域是$(x+y=1)$，量词$\exists$后面的 x 称为指导变量。

再例如:$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\vee\forall xR(x)$中,$\exists x$ 的辖域是$(P(x)\wedge Q(x))$，而$\forall x$ 的辖域是 $R(x)$, 在两个子公式中，x 都是约束出现，但$(P(x)\wedge Q(x))$和 $R(x)$中的 x 是不同的，可以改写为：

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\vee\forall yR(y)$$

这因为前后两个量词的辖域不重叠，可用不同的名字来表示。

再例如：$\forall x(T(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$, $\forall x$ 的辖域为：$(T(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$，而$\exists y$ 的辖域为 $G(x,y,z)$。x 在整个公式

中约束出现，T(x,y)中的 y 是自由出现，而 G(x,y,z)中的 y 是约束出现，G(x,y,z)中的 z 是自由出现。

如果变量 x 在公式 A 中都是约束出现，则 x 称为公式 A 中的约束变量，如果 x 不是公式 A 的约束变量，即 x 在 A 中某处是自由出现，则称 x 为公式 A 的自由变量。

*根据前面的例子解释。

四．包含量词的逻辑等值式

1. 定义：两个具有谓词和量词的公式是逻辑等值的当且仅当不管其中替换什么样的谓词也不管论域是什么，这两个公式始终等值。我们用 $S \equiv T$ 或 $S \Leftrightarrow T$ 表示公式 S 和 T 逻辑等值（简称等值）。

2. 例子：

例 19：证明：$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$.

证：对任意谓词 P 和 Q，对任意论域，

假设$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$为真，即对论域中任一元素 a，有 $P(a) \wedge Q(a)$为真，因而对论域中任一 a，有 P(a)为真，且对论域中任一元素 a，有 Q(a)为真， 故$\forall xP(x)$为真，且$\forall xQ(x)$为真，故$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$。

再设$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$为真。故$\forall xP(x)$为真且$\forall xQ(x)$为真，故对论域中任一元素 a, 有 P(a)为真，也有 Q(a)为真，故有 $P(a) \wedge Q(a)$ 为真，又因为 a 是论域中任一元素，故 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$为真。

所以$\forall x(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$.

3. 量词的否定(Negating quantified expression)

例如：你们班每一个学生都学了微积分课。

令 $P(x)$: x 学了微积分课。

上述句子表示为$\forall xP(x)$。论域是你们班的学生。

其否定为：你们班（至少）有一个学生没学微积分。

即$\exists x\neg P(x)$.

(1) $\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)$

证明：对任意命题函数 $P(x)$和任意论域，$\neg\forall xP(x)$为真当且仅当$\forall xP(x)$为假，即存在论域中的某个元素 a, 使得 $P(a)$为假，即$\neg P(a)$为真，当且仅当$\exists x\neg P(x)$为真。即$\neg\forall xP(x)$为真当且仅当$\exists x\neg P(x)$为真。

(2) $\neg\exists xQ(x)\Leftrightarrow\forall x\neg Q(x)$

证明：对任意谓词 $Q(x)$和任意论域，$\neg\exists xQ(x)$为真当且仅当$\exists xQ(x)$为假，即对论域中所有元素 a 有 $Q(a)$为假，即$\neg Q(a)$为真，当且仅当$\forall x\neg Q(x)$为真。即$\neg\exists xQ(x)$为真当且仅当$\forall x\neg Q(x)$为真。

这两个公式称为量词的德•摩根律。

例 20：求以下句子的否定式：（1）存在一个诚实的政治家；（2）所有美国人都吃芝士汉堡。

解：（1）设 $H(x)$: x 是诚实的；论域：所有政治家的集合。

第一句：$\neg\exists xH(x)$; 即 $\forall x\neg H(x)$.

翻译成自然语言：所有政治家都是不诚实的。

（2）设 C(x): x 吃芝士汉堡，论域：所有美国人的集合。

第二句：$\neg\forall xC(x)$; 即 $\exists x\neg C(x)$.

翻译成自然语言：有一个美国人不吃芝士汉堡。

例 22：证明：$\neg\forall x(P(x)\to Q(x))\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$.

证：$\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg(P(x)\to Q(x))$ 量词德•摩根律

$\Leftrightarrow\exists x\neg(\neg P(x)\vee Q(x))$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow\exists x(\neg\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$ 双重否定律

五．将自然语言翻译成谓词逻辑公式

例 23：这个班的每一个学生都学了微积分。

解：设 C(x): x 学了微积分；设论域为这个班所有学生的集合。

则公式为：$\forall xC(x)$.

若论域为所有人的集合，令 S(x): x 是这个班的学生；

则公式为：$\forall x(S(x)\to C(x))$.

注意：不能表示成$\forall x(S(x)\wedge C(x))$，该公式表示："所有人都是这个班的学生并且学了微积分"。

例 24：（1）这个班的某些学生访问过墨西哥；（2）这个班的所有学生访问过加拿大或墨西哥。

解：（1）设 M(x): x 访问过墨西哥。

设论域为这个班的学生的集合。

则公式为：$\exists xM(x)$.

设论域为所有人的集合。设 S(x):x 是这个班的学生。

则公式为：$\exists x(S(x)\wedge M(x))$.

注意：不能表示成$\exists x(S(x)\rightarrow M(x))$。当这个班没有学生访问过墨西哥时，$\exists x(S(x)\wedge M(x))$为假，但如果有某个人不是这个班的学生，则$\exists x(S(x)\rightarrow M(x))$仍为真。因为 $S(x)=F$, 不管 $M(x)$是真还是假，有 $S(x)\rightarrow M(x)$为真。故$\exists x(S(x)\rightarrow M(x))$为真。

（2）设 C(x): x 访问过加拿大；M(x): x 访问过墨西哥；S(x):x 是这个班的学生；令论域为：所有人的集合。

则公式为：$\forall x(S(x)\rightarrow(M(x)\vee C(x))$.

例 25：用谓词公式描述以下系统说明：

(1) 每一个大于一兆字节的邮件将被压缩；

(2) 如果一个用户是活跃的，那么至少有一个网络链接可用（available）.

解：（1）设 S(m,y): 邮件 m 大于 y 兆字节，变量 m 的论域为所有邮件，y 的论域为实数集合；C(m): 邮件 m 将被压缩。

则公式为：$\forall m(S(m,1)\rightarrow C(m))$

(2) 设 A(u): 用户 u 是活跃的，u 的论域是全体用户的集合；S(n,x): 网络链接 n 处于状态 x，n 的论域为所有网络链接；x 的论域为网络所有可能的状态。

则公式为：$\exists uA(u)\rightarrow\exists nS(n,available)$.

例 26：以下句子头两句称为前提，第 3 句称为结论，这三句合称为论证（推理）。

(1) 所有狮子都是凶猛的；

(2) 有些狮子不喝咖啡；

(3) 有些凶猛的动物不喝咖啡。

解：设 $P(x)$：x 是狮子；$Q(x)$：x 是凶猛的；$R(x)$：x 喝咖啡；论域：所有动物的集合。

(1) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

(2) $\exists x(P(x) \land \neg R(x))$

(3) $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$

注意：第 2 句不能写成$\exists x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$，这因为如果所有狮子都喝咖啡，则$\exists x(P(x) \land \neg R(x))$为假，但如果有一个动物不是狮子，则$\exists x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$仍为真。

例 27：考虑以下句子：前三句是前提，第 4 句是合法的结论。

(1) 所有蜂鸟都颜色丰富；

(2) 任何大鸟都不吃蜂蜜；

(3) 不吃蜂蜜的鸟颜色单调；

(4) 蜂鸟都很小。

解：设 $P(x)$: x 是蜂鸟；$Q(x)$: x 很大；$R(x)$: x 吃蜂蜜；$S(x)$: x 颜色丰富；设论域是所有鸟的集合。

公式表示为：

(1) $\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$

(2) $\neg\exists x(Q(x)\wedge R(x))$

(3) $\forall x(\neg R(x)\rightarrow\neg S(x))$

(4) $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$

作业：

1. 用真值表和等值演算两种方法，求以下公式的主析取范式和主合取范式：

(1) $(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$

(2) $(\neg p\rightarrow q)\wedge(q\wedge r)$

2. 指出下列公式中每个量词的辖域，说明每个变量的出现是指导变量，约束出现还是自由出现。并给出整个公式的自由变量和约束变量。

(1) $\forall x(P(x)\wedge\exists yQ(y))\vee(\forall xP(x)\rightarrow Q(z))$

(2) $\forall x(P(x)\rightarrow\exists yQ(x,y))\wedge\exists y(R(y)\wedge S(y,z))$

3. 将下列语句翻译成谓词公式，假设论域是所有人的集合。

(1) 没有人是完美的；

(2) 并非每一个人都是完美的；

(3) 你的所有朋友都是完美的；

(4) 你至少有一个朋友是完美的；

(5) 每个人都是你的朋友并且是完美的；

(6) 并非每个人是你的朋友或某人不是完美的。

4. 设 $P(x)$表示 x 是有理数；$Q(x)$表示 x 是实数；$R(x)$表示 x 是无理数；$L(x)$表示 x 是整数；$S(x)$表示 x 是偶数；$W(x)$表示 x 是奇数。试将下列公式翻译成自然语言：

(1) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

(2) $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$

(3) $\forall x(Q(x)\rightarrow((P(x)\wedge\neg R(x))\vee(\neg P(x)\wedge R(x))))$

(4) $\neg\exists x(L(x)\wedge S(x)\wedge W(x))$