§1.4　　嵌套量词(Nested quantifiers)

一．量词的嵌套：

即一个量词的辖域落在另一个量词的辖域之内。

例如：$\forall x \exists y(x+y=0)$.

令 $P(x,y)$: $x+y = 0$, $Q(x)$: $\exists y(x+y=0)$

原公式$=\forall xQ(x)=\forall x\exists yP(x,y)$

$\forall x$ 的辖域为 $Q(x)$, 即$\exists yP(x,y)$，也即$\exists y(x+y=0)$，

而$\exists y$ 的辖域为 $P(x,y)$, 即$(x+y=0)$。

例 1：假设 x 和 y 的论域为实数的集合。

$\forall x\forall y(x+y=y+x)$表示对任意实数 x 和 y，有 $x+y=y+x$.

$\forall x\exists y(x+y=0)$表示对任意实数 x，它有一个加法逆元 y，使得 $x+y=0$.

$\forall x\forall y\forall z(x+(y+z)=(x+y)+z)$, 表示实数满足加法结合律。

例 2：将以下句子翻译成自然语言：

$\forall x\forall y((x > 0)\wedge(y < 0)\rightarrow(xy < 0))$,

其中，x，y 的论域为实数集。

解：该公式表示，对任意两个实数，一个正数，一个负数，它们的乘积是负数。

二．　量词的顺序

1. 相同量词的嵌套

*如果嵌套的量词都是全称量词或者都是存在量词，它们可以任意调换顺序。

例 3：令 $P(x,y)$: $x+y=y+x$.

$\forall x\forall yP(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall xP(x,y)$.

它表示“对任一实数 x，对任一实数 y，有 $x+y=y+x$”这与“对任一实数 y，对任一实数 x，有 $x+y=y+x$”是相同的。

再例如：$\exists x\exists y(x+y=0)\Leftrightarrow\exists y\exists x(x+y=0)$.

2. 不同量词的嵌套

*不同量词的嵌套一般不能调换顺序。

例 4：设 $Q(x,y)$: $x+y = 0$. 论域为实数集合。

那么，$\forall x\exists yQ(x,y)=\forall x\exists y(x+y = 0)$为真，

但　　$\exists y\forall xQ(x,y)=\exists y\forall x(x+y = 0)$为假。

例子：$\exists y\forall xQ(x,y)\rightarrow\forall x\exists yQ(x,y)$为真（是普遍有效的）。

证：对任意谓词 $Q(x,y)$，对任意论域，假设$\exists y\forall xQ(x,y)$为真，那么存在 $y=b$,使得对任意 $x=a$，有 $Q(a,b)$为真，故对任意 x，取 $y=b$，有 $Q(x,b)$为真，故$\forall x\exists yQ(x,y)$为真。

但反之，$\forall x\exists yQ(x,y)\rightarrow\exists y\forall xQ(x,y)$不一定为真（见例 4）。

例 5：设 $Q(x,y,z)$: $x+y = z$，论域为实数集。

$\forall x\forall y\exists zQ(x,y,z)$真值为真。

它表示：对任意实数 x，对任意实数 y，存在实数 z，有 $x+y=z$。

但$\exists z\forall x\forall yQ(x,y,z)$不为真。

它表示：存在实数 z，对任意实数 x，对任意实数 y，有 $x+y=z$。

三．将数学语句翻译成有嵌套量词的公式

例 6：两个正整数的和总是正整数。

解：设论域是整数的集合。

公式为：$\forall x \forall y((x>0)\wedge(y>0)\rightarrow(x+y>0))$.

如果论域为正整数的集合，那么公式为：$\forall x \forall y(x+y>0)$.

例 7：除 0 外，任意实数有乘法逆元。

注：实数 x 有乘法逆元 y 是说 xy=1.

解：设论域为实数集。

上句翻译为：$\forall x((x\neq 0)\rightarrow \exists y(xy=1))$.

例 8：用谓词公式描述极限的定义。

解：极限 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的定义是：

对任意实数 ε> 0,存在实数 δ>0，使得当 $0<|x-a|<\delta$, 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$.

该定义可描述为：$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x(0<|x-a|<\delta\rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)$,

其中：ε，δ 的论域为正实数集，x 的论域为实数集。

该定义也可描述为：$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall x(0<|x-a|<\delta\rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)$

其中：ε，δ 和 x 的论域均为实数集。

四．将谓词公式翻译成自然语言。

例 9：$\forall x(C(x)\vee \exists y(C(y)\wedge F(x,y)))$,

其中：C(x)：x 有一台计算机，F(x, y)：x 和 y 是朋友。

论域：你们学校的学生。

解：翻译成：你们学校每个学生，或者他有一台计算机，或者他的朋友有一台计算机。

例 10：$\exists x \forall y \forall z((F(x,y)\wedge F(x,z)\wedge(y\neq z)\rightarrow\neg F(y,z))$,

论域：你们学校的学生。F(x,y)与上例相同。

解：翻译成：你们学校一定有这样一个学生，他的朋友互相不是朋友。

五．将自然语言翻译成谓词公式

例 11：如果有一个人是女的并且是做父母的，那么她一定是某个人的妈妈。论域：所有人的集合。

解：设 F(x): x 是女的；P(x): x 是做父母的; M(x, y): x 是 y 的妈妈。

翻译成：$\forall x((F(x)\wedge P(x))\rightarrow \exists yM(x,y))$

也可表示成：$\forall x\exists y((F(x)\wedge P(x))\rightarrow M(x,y))$

例 12：每个人恰好有一个最好的朋友。论域：所有人的集合。

解：设：B(x,y): y 是 x 的最好的朋友；N(x,y): $x\neq y$.

翻译成：$\forall x\exists y(B(x,y)\wedge \forall z(N(y,z)\rightarrow \neg B(x,z)))$.

例 13：有一个妇女，她坐过世界上每一个航线的航班。

设：w 的论域：所有妇女的集合；f 的论域：所有航班的集合；a 的论域：所有航线的集合。

解：设 P(w,f)：w 坐过航班 f；Q(f,a)：f 是 a 航线的航班。

句子翻译成：$\exists w\forall a\exists f(P(w,f)\wedge Q(f,a))$.

也可以设：R(w,f,a)：w 坐过 a 航线的航班 f。

翻译成：$\exists w\forall a\exists fR(w,f,a)$.

*具体怎样翻译取决于我们要表达什么关系和推出什么结论。

六．否定量词

例 14：表达以下公式的否定：$\forall x \exists y(xy=1)$.

解：$\neg \forall x \exists y(xy=1)$

$\Leftrightarrow \exists x \neg \exists y(xy=1)$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg (xy=1)$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y(xy \neq 1)$.

例 15：用谓词公式表示以下句子：不存在这样的妇女，她坐过世界上所有航线的航班。

解：利用例 13 的解，本例中的句子表示为：

$\neg \exists w \forall a \exists f(P(w,f) \wedge Q(f,a))$

$\Leftrightarrow \forall w \neg \forall a \exists f(P(w,f) \wedge Q(f,a))$

$\Leftrightarrow \forall w \exists a \neg \exists f(P(w,f) \wedge Q(f,a))$

$\Leftrightarrow \forall w \exists a \forall f \neg (P(w,f) \wedge Q(f,a))$

$\Leftrightarrow \forall w \exists a \forall f(\neg P(w,f) \vee \neg Q(f,a))$

最后一句翻译成自然语言是：对任何妇女，存在一条航线，使得对于任何航班，要么该妇女没有坐过这个航班，要么该航班不在这个航线上。

例 16：用谓词公式表示下列命题：

(1) 兔子比乌龟跑得快。

(2) 有的兔子比所有乌龟跑得快。

(3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(4) 不存在跑得一样快的两只兔子。

解：因为没有指定论域，因而采用全总论域。

令 $F(x)$: x 是兔子；　$G(y)$: y 是乌龟；$H(x,y)$: x 比 y 跑得快。

$L(x,y)$: x 与 y 跑得一样快。

(1) 公式为：$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

(2) 公式为：$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

(3) 公式为：$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

(4) 公式为：$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge F(y)\wedge L(x,y))$

例 17：用谓词公式表示下列自然语言的句子。

(1) 没有不透风的墙；

(2) 我的矛能刺穿天下所有的盾，而我的盾天下所有的矛都刺不穿。

(3) 如果甲班有学生考试作弊，那么甲班所有学生都不能获得本年度的奖学金。

(4) 每个自然数都有自然数比它大，但没有最大的自然数。

解：(1)设 $Q(x)$: x 是墙；$T(x)$: x 不透风的。

公式为：$\neg\exists x(Q(x)\wedge T(x))$.

(2) 令 $F(x)$: x 是盾；$G(x)$: x 是矛；$H(x,y)$: x 能刺穿 y；

个体常项：a: 我的矛；b: 我的盾。

前半句：$\forall x(F(x)\rightarrow H(a,x))$

后半句：$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x,b))$

整句公式：$\forall x(F(x)\rightarrow H(a,x))\wedge\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x,b))$

(3) 令 $J(x)$: x 是甲班的学生；$F(x)$: x 考试作弊；

H(x): x 获得本年度的奖学金。

句子前件：$\exists x(J(x)\wedge F(x))$

句子结论：$\forall x(J(x)\rightarrow\neg H(x))$

整句公式：$\exists x(J(x)\wedge F(x))\rightarrow\forall x(J(x)\rightarrow\neg H(x))$

(4) 令 N(x): x 是自然数；G(x,y): x 比 y 大。

前半句：$\forall x(N(x)\rightarrow\exists y(N(y)\wedge G(y,x)))$

后半句：$\neg\exists x(N(x)\wedge\forall y(N(y)\rightarrow G(x,y)))$

*更准确地，应为：$\neg\exists x(N(x)\wedge\forall y(N(y)\rightarrow\neg G(y,x)))$

整句公式：

$\forall x(N(x)\rightarrow\exists y(N(y)\wedge G(y,x)))\wedge\neg\exists x(N(x)\wedge\forall y(N(y)\rightarrow G(x,y)))$

作业：

1. 将下列命题翻译成谓词公式：

(1) 除非李健是东北人，否则他一定怕冷；

(2) 2 大于 3 当且仅当 2 大于 4；

(3) 一切事物都是发展变化的；

(4) 凡有理数都可以表示成分数；

(5) 没有不能表示成分数的有理数；

(6) 存在会说话的机器人；

(7) 不存在比所有火车快的汽车；

(8) 只有一个北京；

(9) 过平面上两点，有且仅有一条直线通过。

2. 假设谓词 $P(x,y)$中 x 的论域是$\{1,2,3\}$，y 的论域是$\{1,2\}$。将以下公式用合取式和析取式表示（消去量词）。

(1) $\forall x\forall yP(x,y)$;

(2) $\exists x\forall yP(x,y)$.

3. 求以下公式的否定式：

(1) $\exists x\exists y\neg P(x,y)\wedge\forall x\forall yQ(x,y)$

(2) $\forall x\exists y(P(x,y)\rightarrow Q(x,y))$

4. 证明：$\exists x(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$.

5. 用谓词公式等值演算证明以下等值式：

(1) $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

(2) $\neg\exists x(N(x)\wedge\forall y(N(y)\rightarrow G(x,y)))\Leftrightarrow\forall x(N(x)\rightarrow\exists y(N(y)\wedge\neg G(x,y)))$