 2011 22/7 − 111.

P.230.12. 证明向量 $\vec{a}=(3,4,5)$, $\vec{b}=(1,2,2)$ 和 $\vec{c}=(9,14,16)$ 共面.

证：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的 $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=0 \Longrightarrow (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

而 $$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&2\\9&14&16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-2&-1\\1&0&0\\9&-4&-2\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&-1\\-4&-2\end{vmatrix}=0$$

所以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面。

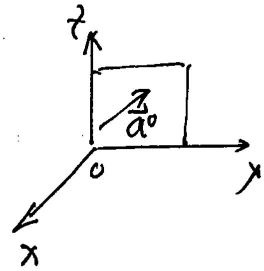
P.230.13. 设 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$, 求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

解：$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{1-\cos^2(\vec{a},\vec{b})}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1\times5\times\frac{4}{5}=4.$$

P.230.14. 设向量 $\vec{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, 下列情况，指出 $\vec{a}$ 的特征。



(1) $\cos\alpha=0$, $\cos\beta\neq0$, $\cos\gamma\neq0$

$\vec{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(0,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\vec{a}\parallel oyz$ 平面。

(2) $\cos\alpha=\cos\beta=0$, $\cos\gamma\neq0$

$\vec{a}^0=(0,0,\cos\gamma)$, $\vec{a}\parallel z$ 轴. ($\vec{a}\perp Oxy$ 平面)

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$, $\vec{a}^0=(\cos\alpha,\cos\alpha,\cos\alpha)$

由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \Rightarrow 3\cos^2\alpha=1$, $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

或 $\alpha=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.