中山大學 本科生考试草稿纸 2011-2/1-21.

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

P.64.4 设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\le f(x)\le 1$，$\forall x\in[0,1]$

证明：在 $[0,1]$ 中存在一点 t，使 $f(t)=t$.

证：作 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$\varphi(0)=f(0)-0=f(0)\ge 0$,

$\varphi(1)=f(1)-1\le 0$

由介值定理，至少有一点 $t\in[0,1]$ 使 $\varphi(t)=0$，即 $f(t)=t$，$t\in[0,1]$

P.64.5 设 $y=f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=f(2)$

证明：在 $[0,2]$ 中存在两点 x_1 与 x_2，使得 $|x_1-x_2|=1$，且 $f(x_1)=f(x_2)$.

证：作 $F(x)=f(x+1)-f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$F(0)=f(1)-f(0)$

$F(1)=f(2)-f(1)=-[f(1)-f(0)]$

① 如果 $f(1)-f(0)\ne 0$，则 $F(0)\cdot F(1)<0$，由零点定理，必有 $\xi\in(0,1)$

使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi+1)-f(\xi)=0$

取 $x_1=\xi+1$，$x_2=\xi$，则 $x_1, x_2\in[0,2]$

并 $|x_2-x_1|=1$，$f(x_2)=f(x_1)$

② 如果 $f(1)-f(0)=0$，但 $f(1)=f(0)\ne 0$，取 $x_1=0$，$x_2=1$

则 $|x_2-x_1|=|1-0|=1$，$f(x_2)=f(x_1)$，并 $x_1, x_2\in[0,2]$

③ 如果 $f(1)-f(0)=0$，且 $f(1)=f(0)=0$

则 $f(1)=f(0)=f(2)$

取 $x_1=1$，$x_2=2$，则 $|x_2-x_1|=1$，$f(x_1)=f(x_2)$

$x_1, x_2\in[0,2]$