第九章　复数与解析函数不等式

§1　复数不等式

1.　(1)　$\max\{|x|,|y|\}\leqslant|z|\leqslant 2\max\{|x|,|y|\}$.

(2)　$|z-1|\leqslant||z|-1|+|z|\cdot|\arg z|$.　$(z\neq 0)$.

(3)　$\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right|\leqslant|\arg z|$.

2.　设 $z=|z|e^{i\alpha}$，α 为实数，则对任意实数 β，成立

$|z-e^{i\alpha}|\leqslant|z-e^{i\beta}|\leqslant|z+e^{i\alpha}|$.

3.　设 x,y 为实数，则

$$\left|\frac{x-i}{x+i}-\frac{y-i}{y+i}\right|\leqslant 2|x-y|.$$

4.　$\left|\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{(1+\sqrt{1-z})^2}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{9}\ (|z|\leqslant 1)$，

其中上界$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$是最好的. 证明见[8]P.176—177.

5.　$|x|^3+|y|^3\leqslant|z|^3\leqslant\sqrt{2}(|x|^3+|y|^3)$.

提示：将复数 z 用极坐标表示，问题变成求函数 $f(\theta)=\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大最小值.

6.　$1+2(z+\bar{z})+|z|^2+\dfrac{1}{5}|z|^4\leqslant|1+z|^4\leqslant 1+2(z+\bar{z})+8|z|^2+3|z|^4$.

证　令 $z=re^{it}$，则

$$F=|1+z|^4-\{1+2(z+\bar{z})+|z|^2+(1/5)|z|^4\}$$

$$=2r^2\cos 2t+3r^2+4r^3\cos t+\frac{4}{5}r^4=\frac{4}{5}r^2+(4\cos t)r+(3+2\cos 2t).$$

只要证明对于所有 t 及所有 $r\geqslant 0$，有 $F\geqslant 0$. 这只要注意到判别式

$\Delta=16\cos^2 t-\dfrac{16}{5}(3+2\cos 2t).=-\dfrac{8}{5}(1-\cos 2t)\leqslant 0$，即可证明左边不等式. 为证右边不等式，只要注意到

$$|1+z|^4\leqslant 1+2(z+\bar{z})+6|z|^2+4|z|^3+|z|^4$$

以及　$|z|^3\leqslant\dfrac{1}{2}(|z|^2+|z|^4)$.

7.　设 $1<p<2$，$1/p+1/q=1$，则

$|z_1+z_2|^q+|z_1-z_2|^q\leqslant 2\{|z_1|^p+|z_2|^p\}^{q-1}$.

8. [MCM]**Clarkson 不等式**:设 z,w 为复数,$\alpha \geqslant 2$,则

$$2(|z|^\alpha+|w|^\alpha) \leqslant |z+w|^\alpha+|z-w|^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(|z|^\alpha+|w|^\alpha).$$

提示:不妨设 $|z| \geqslant |w|$,于是可以令 $w = zre^{i\theta}(0 \leqslant r \leqslant 1)$,左边不等式归结成要证 $1+r^\alpha \leqslant (1+r^2)^{\alpha/2}$;

9. $\max\{|z_1|,|z_2|\} \leqslant |z_1|+|z_2| \leqslant 2\max\{|z_1|,|z_2|\}$.

10. [MCM].设 $|z_k|<1, k=1,\cdots,n \quad (n>3)$,而且

$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$,则至少有两个复数 $z_k, z_j (k \neq j)$,使得 $|z_k+z_j|<1$.

11. 设复数 z_1,z_2 不为 0,则

$$|z_1 \pm z_2| \geqslant \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} \pm \frac{z_2}{|z_2|}\right|,$$

仅当 $|z_1|=|z_2|$ 时等号成立.

12. 设 a_1,a_2 为不同时为 0 的实数,则

$$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2| \leqslant 2\frac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2} \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|.$$

提示:令 $\operatorname{tg}\beta == a_1/a_2$,将表达式写成 $f(\beta) = A + B\sin 2\beta + C\cos 2\beta$,求 $f(\beta)$ 的最大最小值.

13. 设 a,b 为实数,$a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0$,若 $1/a+1/b>0$,则

$$\frac{|z_1+z_2|^2}{a+b} \leqslant \frac{1}{a}|z_1|^2+\frac{1}{b}|z_2|^2.$$

若 $1/a+1/b<0$.则不等号反向.仅当 $az_2 = bz_1$ 时等号成立.

14. 设 $|z_1|<1, |z_2|<1$,则

$$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|<1, \ |z_1^n+z_2^n|<|1+z_1^n \cdot \bar{z}_2^n|.$$

15. 设 $|z_1| \leqslant r < R < 1, |z_2|=1$,则

$$\frac{1+Rr}{R+r} \leqslant \frac{R|z_1|+1}{R+|z_1|} \leqslant \left|\frac{Rz_1-z_2}{R-\bar{z}_1z_2}\right| \leqslant \frac{1-R|z_1|}{R-|z_1|} \leqslant \frac{1-Rr}{R-r}.$$

证明见[334]1992,35(1):76.

16. 设 $0<|z_1|<1, |z_2| \leqslant \gamma < 1$,则

$$\left|\frac{z_1+|z_1|z_2}{(1-\bar{z}_1z_2)z_1}\right| \leqslant \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

17. 设 $z_k = x_k + iy_k, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^2}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k|.$$

提示:利用 Cauchy 不等式.

18. 设 $|z|=1$,则 $0 \leqslant |z^2-z+1| \leqslant 3$.

提示:令 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,则 $|z^2-z+1| = |2\cos\theta-1|$.

19. $\operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} z_j z_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$,仅当 $z_1=z_3=z_5=\cdots=\overline{z}_2=\overline{z}_4=\overline{z}_6=\cdots$ 时,等号成立.

20. 设 $\operatorname{Re}z\geqslant 1$,则 $|z^{n+1}-1|>|z|^n|z-1|$.

证明见[305]1962,69:927－928.

21. 设 $z=e^{i\alpha}\cos\alpha, 0<\alpha<\pi/2$,则 $|1-z|<|1-z^n|$.(见[305]1968,75:85.)

22. 设 $|\arg z_1-\arg z_2|\leqslant\theta\leqslant\pi$,则

$$|z_1-z_2|^n\leqslant(|z_1|^n+|z_2|^n)\max\left\{1,2^{n-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^n\right\}.$$

23. 对于任意复数 $z_1,\cdots,z_n$,都存在 $\{1,\cdots,n\}$ 的一个子集 M,使得

$$\left|\sum_{k\in M}z_k\right|\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

其中常数 $1/\pi$ 是最好的.证明及其推广见[4]P456－47.

24. 设 $|z+1/z|=1$,则

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1),\tag{1.1}$$

$$k\pi+\pi/3\leqslant\operatorname{Arg}z\leqslant k\pi+\frac{2}{3}\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{1.2}$$

提示:将复数 z 用极坐标表示:$z=re^{i\theta}$,代入

$$|z+1/z|=1.\text{得 } r^2+r^{-2}+2\cos2\theta=1.\tag{1.3}$$

即 $$r^4+(2\cos2\theta-1)r^2+1=0.\tag{1.4}$$

由判别式 $\Delta=(2\cos2\theta-1)^2-4\geqslant0$ 即可推得(1.2)式,再由(1.3)式得 $2\leqslant r^2+r^{-2}\leqslant3$,由此即可推得(1.1)式成立.

25. [MCM] 设 $|z_k|(1\leqslant k\leqslant3)$ 不全小于或等于 1,$\alpha\leqslant2/3$,则

$$\alpha\left(\sum_{k=1}^{3}|z_k|\right)\leqslant1+\left|\sum_{k=1}^{3}z_k\right|+|z_1\cdot z_2\cdot z_3|+|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|.\tag{1.5}$$

若 $z_k(1\leqslant k\leqslant3)$ 为任意复数,则使以上不等式成立的 α 的最大值为 $2^{-(2/3)}$.

提示:不妨设 $|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant|z_3|$.令 $z_2=bz_1,z_3=cz_1$,则由假设 $|z_1|>1$,$|c|\leqslant|b|\leqslant1$,引入辅助函数

$$f(t)=1+t|1+b+c|+t^2|b+c+bc|+t^3|bc|-\alpha t(1+|b|+|c|).\tag{1.6}$$

易证 $f'(t)\geqslant(1-2|c|)^2/3\geqslant0(t\geqslant1)$,从而由 $|z_1|>1$ 得 $f(|z_1|)\geqslant f(1)\geqslant0$.当 z_1,z_2,z_3 为任意复数时,还要考虑 $1\geqslant|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant|z_3|$ 的情形.在(1.6)式中令 $t=|z_1|$,求得 $f(t)\geqslant1+t^3-3\alpha t$.令 $g(t)=1+t^3-3\alpha t$,从 $g'(t)=0$ 求出 $t=\sqrt{\alpha}$,又 $g''(t)=6>0$ 知当 $t=\sqrt{\alpha}$ 时 $g(t)$ 有最小值.由 $g(\sqrt{\alpha})=0$ 解出 $\alpha=2^{-(2/3)}$,且当 $z_1=z_2=z_3=(\sqrt[3]{4}/2)\exp(i2\pi/3)$ 时,(1.5)式中等号成立.

26. 设 $|z_1|\leqslant r$, $|z_2|\leqslant r$, $z_1\neq z_2$,则

$$\left|\frac{z_1^n-z_2^n}{z_1-z_2}-nz_2^{n-1}\right|\leqslant\frac{1}{2}n(n-1)r^{n-2}|z_1-z_2|.$$ 证明见[4]P440－441.

27. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 为复数($n\geqslant 3$),$z_{n+1}=z_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k+1}|^2\geqslant 2(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n})\operatorname{Im}(\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k z_{k+1}),$$

仅当 $z_k=\alpha\exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)+\beta\ (1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立,其中 α,β 为任意复数.(见[4]P.432)

28. 设 $\sum|z_k|\leqslant a<1$,(k 从 1 到 n),则

$$\left|\prod(a+z_k)-1-\sum z_k\right|\leqslant\frac{a^2}{1-a},\text{(Bourbaki,N,[4]P.432 - 433).}$$

29. 设 $z=e^{i\theta}$,则

(1) $|z^{2n}-1|\leqslant 2n|\sin\theta|$.

(2) $\sum_{k=n}^{n+m}|z^{2k}-1|\leqslant(2n+m)(m+1)|\sin\theta|$.

提示:用数学归纳法.

30. **反向三角不等式**:设 $\alpha\in R^1$,$0<\theta<\pi/2$,$\alpha-\theta\leqslant\arg z_k\leqslant\alpha+\theta$. $k=1,\cdots,n$,则有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\geqslant(\cos\theta)\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

证 $|\sum z_k|=|e^{i\alpha}\sum z_k|\geqslant\operatorname{Re}(e^{-i\alpha}\sum z_k)=\sum|z_k|\cos(-\alpha+\arg z_k)\geqslant(\cos\theta)\sum|z_k|$.

推广 设 $\alpha<\arg z_k\leqslant\alpha+\theta<\alpha+\frac{\pi}{2}$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\geqslant\max\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\theta\right\}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

见[301]1986,118(1):140.

31. 设 n 个复数 z_k 满足 $|z_k|\leqslant 1$,则存在 $\varepsilon_k=\pm 1\ (1\leqslant k\leqslant n)$,使得

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j z_j\right|<\sqrt{3},k=1,2,\cdots,n.$$

提示:用数学归纳法证明.见[305]1987,94(8):788 - 789.

32. 设 n 个复数 z_k 满足 $\sum z_k=0$,则

(1) $$\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\leqslant\begin{cases}(\frac{n-1}{2})^p\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k+1}|^p,\\ (\frac{n^2-1}{12})^p\sum_{k=1}^{n}|z_{k-1}-2z_k+z_{k+1}|^p,\end{cases}$$

式中 $z_n=z_0$,$z_1=z_{n+1}$,见[2]P.184..

(2) $\frac{12n}{n^2-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_{k+1}-z_k|$, 式中 $z_{n+1}=z_1$ (Alzer,H.).

33. **Archbold 不等式**:设 z_k 为复数,$a_k>0$,$k=1,\cdots,n$,

且 $\sum_{k=1}^{n}(1/a_k)=1$,则 $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k|z_k|^2$,仅当 $\sqrt{a_1}z_1=\cdots=\sqrt{a_n}z_n$ 时等号成立.

提示:在 Cauchy 不等式 $(\sum b_k)^2 \leqslant (\sum \frac{1}{a_k})(\sum a_k b_k^2) = \sum a_k b_k^2$ 中,令 $b_k = |z_k| \cdot (\sum |z_k|)^{-1}$. 即得 $|\sum z_k|^2 \leqslant (\sum |z_k|)^2 \leqslant \sum a_k |z_k|^2$,
这是第三章 Bohr 不等式的推广. 另见[301]1986,118(1):141.

34. 若 $a_1, \cdots, a_n$ 为实数,$z_1, \cdots, z_n$ 和 λ 为复数,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right|\right),$$

仅当 $a_k = \mathrm{Re}(\lambda z_k)$ 且 $\sum \lambda^2 z_k^2$ 为非负实数时,等号成立,$(k = 1, \cdots, n)$. 证明见[4]P430 - 431.

35. [MCM]. 设复数 $z_k (k = 1, \cdots, n)$ 满足 $\sum |z_k| = 1$,则这 n 个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于 $1/\pi$.

36. 设复数 $z_1, \cdots, z_n$ 互不相同,它们每两点间距离的最小值为 d,则

$$\prod_{j=2}^{n} |z_1 - z_j| \geqslant \left(\frac{d}{3}\right)^{n-1} \sqrt{n!}.$$

若再设在复数平面内,$z_1, \cdots, z_n$ 在一条直线上,则

$$\prod_{j=2}^{n} |z_1 - z_j| \geqslant (d/2))^{n-1}(n-1)!.$$

证明见[345]1980,8:34.

37. 设 $d(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}$,则

$$d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

证 因为 $(z_1 - z_2)(1 + z_3\bar{z}_3) = (z_1 - z_3)(1 + z_2\bar{z}_3) + (z_3 - z_2)(1 + z_1\bar{z}_3)$,所以,
$|z_1 - z_2|(1 + |z_3|^2) \leqslant |z_1 - z_3||1 + z_2\bar{z}_3| + |z_3 - z_2| \cdot |1 + z_1\bar{z}_3|$.
再利用 $|1 + z_2\bar{z}_3|^2 \leqslant (1 + |z_2|^2)(1 + |z_3|^2)$ 和
$|1 + \bar{z}_1 z_3|^2 \leqslant (1 + |z_1|^2)(1 + |z_3|^2)$ 即可得证.

注 $d(z_1, z_2)$ 是椭圆几何中的球面距离. 当 $|z_1| < R$, $|z_2| < R$ 时,还成立

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1 + R^2} \leqslant d(z_1, z_2) \leqslant |z_1 - z_2|.$$

38. $D(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| / |1 - \bar{z}_2 z_1|$ 是双曲几何中的非欧距离或伪弦距离. 若 $|z_1| < \rho$, $|z_2| < \rho, 0 < \rho < 1$,则

$$\frac{|z_1 - z_2|}{2} \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{1 + |\bar{z}_2 z_1|} \leqslant D(z_1, z_2) \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{1 - |\bar{z}_2 z_1|} \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{1 - \rho^2};$$

若 $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$,则

$$\frac{|z_1| - |z_2|}{1 - |z_1| \cdot |z_2|} \leqslant D(z_1, z_2) \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1| \cdot |z_2|}.$$

39. 设 $0 < r < 1$, $|z_k - 1| \leqslant r, 1 \leqslant k \leqslant n, \lambda_k > 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$,
$G = \prod_{k=1}^{n} z_k^{\lambda_k}, H = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z_k}$,则

(1) $(1-r^2)|A|\leqslant|H|\leqslant\frac{|A|}{1-r^2}$; (2) $\frac{(1-r^2)|G|}{1-|G-1|^2}\leqslant|H|\leqslant\frac{|G|^2}{1-r}$.
(Richard,F.,[301]2000,243(2):313 - 325)

40. **华罗庚不等式**(1965):设 x_k 为实数,$\delta,\alpha>0$,则

$$(\delta-\sum_{k=1}^n x_k)^2+\alpha\sum_{k=1}^n x_k^2\geqslant\frac{\alpha\delta^2}{\alpha+n}.$$

1997 年,Pearce-Pecaric 将其推广到复数和复值凸函数,即

(1) 设 $\alpha>0,a_k$ 为实数,δ,z_k 为复数,则

$$|\delta-\sum_{k=1}^n a_kz_k|^2+\frac{\alpha}{2}(\sum_{k=1}^n|z_k|^2+|\sum_{k=1}^n z_k|^2)\geqslant\frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha+\sum_{k=1}^n a_k^2},$$

仅当 $a_k=\mathrm{Re}(\lambda z_k),\lambda$ 为复数,$\sum_{k=1}^n\lambda^2z_k^2$ 为非负实数,

且 $\sum_{k=1}^n a_kz_k=\frac{\delta\sum_{k=1}^n a_k^2}{\alpha+\sum_{k=1}^n a_k^2}$ 时等号成立.

(2) 设 $\alpha>0,\delta,z_k,w_k$ 均为复数,$\omega_k\neq0,f$ 是$[0,\infty)$上递增的凸函数,则

$$f(|\delta-\sum_{k=1}^n z_kw_k|)+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n|\omega_k|f(\alpha|z_k|)\geqslant\frac{\alpha+\sum_{k=1}^n|\omega_k|}{\alpha}f\left(\frac{\alpha|\delta|}{\alpha+\sum_{k=1}^n|\omega_k|}\right);$$

若 f 为严格凸,则仅当 $z_k=\frac{\delta\overline{w_k}}{(\alpha+\sum_{k=1}^n|\omega_k|)|\omega_k|}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 时等号成立.

([306]MR98m:26016)

41. **华罗庚不等式**:设 z_k,ω_k 为任意两组复数,$1\leqslant k\leqslant n$.若存在常数 $c>0$,使得

$$\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n|z_k-z_j|\leqslant c,\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n|\omega_k-\omega_j|\leqslant c.\ |z_k-z_j|+|\omega_k-\omega_j|>0,$$

则对于每对同时大于零的绝对差 $|z_k-z_j|>0,|\omega_k-\omega_j|>0$,成立

$$\min\{|z_k-z_j|>0,|\omega_k-\omega_j|>0\}\leqslant\frac{3c}{2n(n-1)}.$$

证明见[8]第一版 P.142 - 143.

42. **Turan 不等式**:

(1) 设复数 z_k,b_k 满足 $z_k\neq0,\sum_{k=1}^n b_k\neq0,k=1,\cdots,n$,对于任一整数 $m\geqslant-1$,定义

$Q=\max\{(\sum_{k=1}^n b_kz_k^r)|\sum_{k=1}^n b_k|^{-1}(\min_{1\leqslant k\leqslant m}|z_k|^r)^{-1}:r=m+1,\cdots,m+n\}$,则

$$Q\geqslant\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^n.$$

1958 年 Dancs, I. 将上述不等式改进为

$$Q \geqslant \frac{1}{2e}\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^{n-1}.$$

1959 年 Makai, E. 以及 1960 年 de Bruijn, N. G 得到最佳估计：

$$Q \geqslant \left[\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{m+k}{k}\right]^{-1}.$$

(2)　设 z_k, b_k 均为复数，$k=1,\cdots,n$，且 $|z_n| \leqslant \cdots \leqslant |z_2| \leqslant |z_1| = 1$，则

$$\max_{r=m+1,\cdots,m+n}\left|\sum_{k=1}^{n} b_k z_k^r\right| \geqslant \left(\frac{n}{A(m+n)}\right)^n \min_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{r} b_k\right|,$$

其中常数 A 满足 $4e \leqslant A \leqslant 8e$.

(3)　设 z_j 为复数，令 $S_k = \sum_{j=1}^{n} z_j^k, k=1,2,\cdots, m = \max_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j|$,

$M = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{S_k}{n}\right|^{1/k}$，若 $z_1,\cdots,z_n$ 不全为 0，则

①　$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \leqslant \frac{M}{m} \leqslant 1$，其中上，下界都为最佳.

②　当 $\lambda > -1, n > (6+3\lambda)^3$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n} k^\lambda |S_k| > \frac{1+\lambda}{2}\ln n.$$

式中 $\frac{1}{2}(1+\lambda)$ 是最佳常数.

(4)　若复数 z_k 满足 $|z_k| \leqslant 1, k=1,2,\cdots,n-1, z_n=1$，则

$$\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k^r\right| > \frac{1}{3}.$$

当 $n < 1.6\times 10^3$ 时，下界可改进为 $\pi/8$，但是最佳下界还不知道. 详见[4] §2.18.