§2.2 集合的运算

一．集合的运算

１.　集合Ａ与Ｂ的并：(union)

.

\*文氏图见书P127,图1.

例1：设A={1,3,5}, B={1,2,3}, 那么={1,2,3,5}.

2. 集合Ａ与Ｂ的交：(intersection)

.

\*文氏图见书P127,图2.

例3：设A={1,3,5}, B={1,2,3}, 那么={1,3}.

\*两个集合A和B称为是不相交的(disjoint)是说：.

例5：设A={1,3,5,7,9}, B={2,4,6,8,10}, 那么。

\*容斥原理(principle of inclusion and exclusion)

\*用文氏图说明。

3. 集合A与B的差：(difference of Aand B)

.

\*文氏图见书P129,图3.

例6：设A={1,3,5}, B={1,2,3}, 那么={5}，

4. 集合A的补： (complement).

设U是全集，那么=.

.

例8：假设全集U包含且仅包含英文字母表中的26个字母，A是所有元音字母的集合，即A={a,e,i,o,u}, 那么={b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z}.

例9：假设U是所有正整数的集合，A是所有大于10的整数的集合，那么={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

二．集合的恒等式

\*回忆：两个集合相等当且仅当这两个集合的所有元素相同。

\*集合运算有以下定律：

1. 同一律

(Identity laws)

2. 零律

(Domination laws)

3. 幂等律

(Idempotent laws)

4. = A 双重否定律(Complementation law)

5. 交换律

(Commutative laws)

6. 结合律

(Associative laws)

7. 分配律

(Distributive laws)

8. = 德摩根律

(De Morgan’s laws)

9. 吸收律

(Absorption laws)

10. 排中律(Complement laws)

11. 矛盾律(Complement laws)

\*下面我们举几个例子，证明几个集合恒等式。

例10：证明：。

证：要证明，就要证以及

.

1. 首先证：。假设, 由补集的定义，有, 由交的定义，有为真，由逻辑中的德摩根律，有¬(或¬,即或，由补集的定义，有或,再由集合并的定义，。

所以，。

再证：。假设,由集合并的定义，或。再由补集的定义，有或，即¬(¬，再由逻辑中的德摩根律，有，由集合交的定义，有,再由集合补的定义，有。所以。

从而有。

例11：我们可以用逻辑等值式直接证明：

证明：对任意元素x,

x

¬()

¬(¬

所以。

例12：证明分配律：。

解：我们将证等式两边互相包含。

先证：。假设由交的定义，且, 再由并的定义，且，

或,由逻辑中“与”对“或”的分配律，有且,或, 再由集合交的定义，有或

, 再由集合并的定义，有。所以有。

再证：。假设。由集合并的定义，有或，再由集合交的定义，有且,或, 由逻辑中“与”对“或”的分配律（反过来用），且，或，由集合并的定义，有且，再由集合交的定义，有。故。

从而有。

三．集合等式（包含式）的证明

例14：设A, B, C是集合，证明：.

证明：

= 德摩根律

= 德摩根律

= 交换律

例子: 证明：A―(B∪C)=(A―B)∩(A―C)

证:对任意x,

x∈A―(B∪C)

 x∈A∧x(B∪C)

 x∈A∧(x∈B∨x∈C)

x∈A∧((x∈B)∧(x∈C))

x∈A∧xB∧xC

(x∈A∧xB)∧(x∈A∧xC)

x∈(A―B)∧x∈(A―C)

x∈(A―B)∩(A―C)

所以A―(B∪C)=(A―B)∩(A―C).

例子: 证明： A∩U=A

证明:对任意x∈A∩U,有x∈A且x∈U,故有x∈A,从而

A∩UA.

对任意x∈A,由于AU,故有x∈U,也就有x∈A∧x∈U,故

AA∩U.从而A∩U=A.

\*以上证明的基本思想是:设P,Q为集合公式,欲证P=Q,可证

PQ且QP为真.也就是要证,对任意的x,有

x∈Px∈Q和x∈Qx∈P成立.

对于某些恒等式可以将这两个方向的推理合到一起,就是

x∈Px∈Q .

\*证明集合恒等式的另一种方法是利用已知的恒等式来代入.

例子: 已知集合恒等式(1)-(8),证明：A∪(A∩B)=A。

证明: A∪(A∩B)=(A∩U)∪(A∩B) 同一律

=A∩(U∪B) 分配律

=A∩(B∪U) 交换律

=A∩U 零律

=A 同一律

\*定义：（称为A与B的对称差）

(symmetric difference of A and B)。

\*一些常用的集合运算性质:

(1) A∩BA, A∩BB

(2) AA∪B, BA∪B

(3) A―BA

(4) A―B=A∩

(5) (A∪B)=BABA∩B=AA―B=φ

(6) AB=BA

(7) (AB)C=A(BC)

(8) Aφ=A

(9) AA=φ

(10) AB=ACB=C

例子: A―B=A∩

证明:对任意x,

x∈A―B

x∈A∧xB

x∈A∧x∈U∧xB

x∈A∧x∈

x∈A∩ .

例子: 证明：(A―B)∪B = A∪B。

证明:(A―B)∪B = (A∩)∪B

= (A∪B)∩(∪B)

= (A∪B)∩U

= A∪B .

例子:证明: A∪B=BABA∩B=AA―B=φ。

证明:先证A∪B=BAB .

对任意x,

x∈Ax∈A∨x∈Bx∈A∪Bx∈B(因为A∪B=B),所以

AB .

再证: ABA∩B=A .

显然有A∩BＡ，下面证ＡＡ∩Ｂ．

对任意x,

x∈A x∈A∧x∈A x∈A∧x∈B(因为ＡＢ)x∈A∩B.

从而有AA∩B,故A∩B=A .

然后证A∩B=AA―B=φ .

A―B=A∩

=(A∩B)∩ (因为A∩B=A)

=A∩(B∩)

=A∩φ

=φ .

最后证A―B=φA∪B=B

由上例及A―B=φ,有

A∪B=B∪(A―B)=B∪φ=B .

例子:化简((A∪B∪C)∩(A∪B))―((A∪(B―C))∩A) .

解:因为A∪BA∪B∪C,A A∪(B―C),由上例,有

((A∪B∪C)∩(A∪B))―((A∪(B―C))∩A)

=(A∪B)―A

=(A∪B)∩

=(A∩)∪(B∩)

=φ∪(B∩)

=B∩

=B―A .

例子:已知AB=AC,证明B=C .

证:已知AB=AC,所以有

A(AB)= A(AC)

(AA)B=(AA)C

 φB=φC

B=C

四．广义并和广义交

\*集合的交和并可以推广到3个或3个以上的集合的交和并。

\*文氏图见书P127, 图5.

例15：设A={0,2,4,6,8}, B={0,1,2,3,4}, C={0,3,6,9}.

求：和.

解：={0,1,2,3,4,6,8,9}, ={0}.

1. 广义并(generalized union)

=={x | 对某个i (}.

1. 广义交(generalized intersection)

=={x | 对所有i=1,2,...,n}.

1. 例子：

例16：设={i, i+1, i+2, }, 那么

=={1,2,3,}.

=}={n,n+1,n+2,

\*我们还可以定义无穷个集合的交和并

=

=

更一般地，使用记号和

=)}

=

例17：设={1,2,3,, i}, i = 1,2,3,. 那么

={1,2,3,}=

={1}.

\*证明以上结论。

作业：

1. 设A,B为任意集合，证明：

。

1. 设A,B,C是任意集合，证明：
2. 设A,B,C是任意集合，证明：

).

1. 设, 求：
2. ; (b) 。