§2.3 函数 (Functions)

1. 函数的定义
2. 定义：设A和B是两个非空集合。f称为从A到B的函数，是说：对于A中的每一个元素a，有B中唯一的元素b与a对应，记作f(a)=b. 从A到B的函数f记为f: A

\*函数有时也称为映射(mapping)或变换(transformation).

例子：一个班学生的成绩可以看作是一个函数。

（见书P139, 图1）

\*函数常常可以用一个公式表示，例如：f(x) = x+1, 其中A和B都是实数集。

\*函数也可以用一个二元关系来定义，f: A, 是一个二元关系，使得对于每一个只有唯一的一个有序对, 那么我们定义f(a)=b.

2. 定义域与值域

设f: A为函数，那么A称为f的定义域(domain),B称为f的值域(codomain)。如果f(a)=b, 那么b称为a在f下的像(image), a称为b在f下的原像(preimage)。f(A)={f(a) | aA}称为A在f下的像集(range).

1. 两个函数相等的定义

两个函数f: AB和g:相等，当且仅当A=C, B=D且

，有f(x)=g(x).

1. 例子：

例1：在前面的学生成绩的例子中，函数的定义域、值域和像集是什么？

解；函数G: {Adams,Chou,Goodfriend,Rodriguez,Stevens}

{A,B,C,D,F}, 定义域：{Adams,Chou,Goodfriend,Rodriguez, Stevens}， 值域：{A,B,C,D,F}，像集：{A,B,C,F}。

例2：设给定研究生和他们的年龄偶对组成的二元关系R如下，由R确定的函数是什么？R={(Abdul, 22), (Brenda, 24),

(Carla, 21), (Desire, 22), (Eddie, 24), (Felicia, 22)}.

解：由R确定的函数f是：

f: { Abdul, Brenda, Carla, Desire, Eddie, Felicia}{21,22,23,24}

其中：f(Abdul)= 22, f(Brenda)= 24, f(Carla)= 21, f(Desire)= 22,

f(Eddie)= 24, f(Felicia)= 22.

例4：设函数f: ZZ, 其中. 那么f的定义域和值域是Z，像集是：{0, 1, 4, 9, }.

\*函数的运算：

设和都是A到R的函数，那么和也是A到R的函数，定义为：

例6：设: 使得, .

问：和是什么样的函数？

解：.

\*像：设f是A到B的函数，, S在f下的像f(S)(image of S under f)定义为：

简写为：f(S)={f(s)

例7：设A={a,b,c,d,e}和B={1,2,3,4}, 函数f: 定义为:

f(a)=2, f(b)=1, f(c)=4, f(d)=1, f(e)=1, S={b,c,d}. 那么

f(S)={1,4}.

1. 单射、满射和双射
2. 单射：

函数称为是一一映射(one to one)或单射(injective)当且仅当f(a)=f(b)蕴含a=b对任意a,bA成立。

\*为真，也可定义为其中a, b的论域为A。

\*这两个定义提供了证明单射的方法。

例8：设f: {a,b,c,d}{1,2,3,4,5}满足：f(a)=4, f(b)=5, f(c)=1,

f(d)=3. 那么f是一个单射函数。

\*单射函数的图像（见书P142, 图3）

例9：设f: RR且, 问f是否单射？

解：因为f(=f(1)=1, 但，故f不是单射。

如果限制f的定义域：f: f(x)=，那么f是单射。

例10：设 满足: f(x)=x+1，问f是否单射？

解：f是单射函数. 因为.

\*单调函数和严格单调函数

设函数f: , 如果, 那么f称为单调递增函数(increasing function);, 那么f称为严格单调递增函数(strictly increasing function); 如果

，那么f称为单调递减函数(decreasing function);

如果, 那么f称为严格单调递减函数(strictly decreasing function).

1. 满射

函数称为是映上函数(onto)或满射(surjective)当且仅当对任意。

\*函数f: 是满射当且仅当为真，y的论域是B，x的论域是A。

\*这个定义提供了证明满射的方法。

例11：设f: {a,b,c,d}{1,2,3}, 满足：f(a)=3, f(b)=2, f(c)=1, f(d)=3, f是否满射？

解：f是满射。

\*满射的图像见书P143, 图4.

例12：设f: Z且f(x)=, 问：f是否满射？

解：f不是满射，因为存在，但对任意.

1. 双射

函数f: 称为是一一映上的(one to one correspondence)或双射(bijection)当且仅当f既是满射,又是单射。

例13：函数f: 且f(x)=x+1，问f是否双射？

解：f是双射。首先证明f是单射，在例10中已证明。

再证明f是满射。，

即存在. 所以f是满射。

因为f既是单射又是满射，故f是双射。

例14：设f: {a,b,c,d}{1,2,3,4}且f(a)=4, f(b)=2, f(c)=1, f(d)=3.

问：f是否双射？

解：f是双射，因为f既满足单射的定义，又满足满射的定义。

\*几种函数的图像见书P144,图5.

例15：恒等函数: AA, 满足：。

解：恒等函数是A到A的双射函数。

三．反函数与函数的复合

1. 反函数(Inverse function)

设函数f是A到B的双射函数，那么f的反函数

: B定义为当且仅当f(a)=b。

\*函数f的反函数存在当且仅当f是双射函数。

例16：设f: {a,b,c}{1,2,3}且f(a)=2, f(b)=3, f(c)=1.求:。

解：因为f是双射函数，故存在。.

例17：设f: ，满足：f(x)=x+1, 问f是否可逆？如果是，求：。

解：在例13中已证f是双射函数，故f可逆。, 满足当f(x)=x+1=y, 有。

例18：设f: 满足f(x)=，问f是否可逆的？

解：由例9知f不是单射（事实上，也不是满射），故f不是双射，因而不可逆。

1. 函数的复合

设g: 和f: 是函数，函数f和g的复合，记作，定义为：, .

\*

\*.

例20：设g: {a,b,c}{a,b,c},满足g(a)=b, g(b)=c, g(c)=a;

f: {a,b,c}{1,2,3}, 满足f(a)=3, f(b)=2, f(c)=1, 求：.

解： .

注意：没有定义，因为f的值域不是g的定义域。

例21：设f: 且f(x)=2x+3, g: 且g(x)=3x+2, 求:和.

解：和都有定义，因为f和g的定义域和值域都是Z。

\*注意：一般情况下，.

\*函数f: 与反函数的复合：

设f(a)=b, 那么.

所以 , .

注意有：= f

例子：设g: A→B, f: B→C. 证明：

(1) 如果f和g是满射，则fg是满射；

(2) 如果fg是单射，则g是单射。

证明：(1) 对任意的zC,因为f是满射，故存在yB, 使得f(y) = z。又因为g是满射，存在xA，使得g(x) = y。故存在xA，使得fg(x) = f(g(x)) = f(y) = z。从而fg是满射。

(2) 设fg是单射。若存在yB和a, bA, 使得g(a) = g(b) = y, 那么fg(a) = f(g(a)) = f(y) = f(g(b)) = fg(b)，由于fg是单射，故a = b。从而，由g(a) = g(b), 有a = b。故g是单射。

1. 函数的图像

设f: 为函数，那么函数f的图像定义为.

例22：设f: 且f(n)=2n+1，展示f的图像。

解：f的图像为{(n, 2n+1), 图示见书P148, 图8.

例23：设f: 且f(x)=，展示f的图像。

解：f的图像为{(x, ), 图示见书P148, 图9.

\*当f: 且f(x)=的图像。

五．几个重要的函数

1. 下取整函数和上取整函数(floor function and ceiling function)

实数x的下取整函数是不大于x的最大整数，记为; 实数x的上取整函数是不小于x的最小整数，记为.

\*有时记为.

2. 例子：

例24：=0, =1, =, =0, =3, =4,

=7, =7.

\*下取整和上取整函数的图形见书P149，图10.

.

\*下取整、上取整函数出现在实际应用中的例子。

例25：计算机磁盘上的数据在网络传输中是以字节为单位的，一个字节占8位二进制位。问：要传输100位二进制位的数据，要多少字节？

解：它的字节数应为大于等于100/8的最小整数，即==13个字节。

1. 下取整和上取整函数的一些性质：

(1a)

(1b)

(1c)

(1d)

(2)

(3a)

(3b)

(4a)

(4b)

\*我们选其中一个式子证明。

证明：（4a）假设, 其中m是一个整数。由性质(1a),

,在此不等式两边加上n，得, 再由性质(1a), 有, 这就完成了证明。

\*在考虑我们把x看作x=n+ (0; 我们把x看作x=n (0.

例29：证明：如果x是实数，那么.

解：设, 其中n是整数且0。分两种情形讨论：

情形1：. 在这种情况下，2x=2n+2，因为,

有, 而x+ = n+(，因为, 有= n, 故。

情形2： 这时，

因为所以=2n+1. 因为，并且, 所以

=n+1. 结果,

这就完成了证明。

例28：证明或否证：对任意实数x和y成立。

解：这个公式看起来很合理，但它却为假。当x时，是个反例。因为。

2. n阶乘函数(factorial function)

f: N，其中f(n)=n!= 。

注意：约定f(0)=0!=1

例29：我们有f(1)=1!=1, f(2)=2!=12=2,

f(6)=6!=1

n!随n增长的速度极快，这可由Stirling公式更清楚地看出。

Stirling公式：n!.

f(n)表示:

作业：

1. 设;

h(x)=.

1. 求和;
2. 问和是否为单射、满射或双射？
3. f, g, h中哪些函数有反函数？如果有，求出这些反函数。
4. 设且是双射。

证明：

(1)

(2)

3. 给出一个函数的显式表达式，该函数是从整数集合到正整数集合的函数，且满足以下性质：

(1) 是单射但不是满射；

(2) 是满射但不是单射；

(3) 是双射；

(4) 既不是单射又不是满射；

4. 设x是一个实数。证明：.