第四章 归纳与递归 (Induction and recursion)

§4.1 数学归纳法

例如：有一个无穷级的梯子，我们想知到我们能否登上每一级梯子。我们知道两件事：

1.我们能登上第一级梯子。

2.如果我们能登上某一级梯子，我们就能登上上一级梯子。

由（1），我们能登上第一级梯子，再由（2），我们能登上第二级梯子，再由（2），我们能登上第3级梯子，继续这个论证，我们能登上第4级、第5级梯子。重复100次步骤（2），我们可以登上第101级梯子。反复地应用步骤（2），我们可以登上第n级梯子，对任意正整数n成立。

这个证明技术称为数学归纳法(mathematical induction).

一．数学归纳法

1.数学归纳法的步骤：要证明P(n)对所有正整数n成立，其中P(n)是一个命题函数，我们需要两个步骤：

归纳基础：我们验证P(1)为真。

归纳步：我们证明蕴涵式P(k)P(k+1)对所有正整数k成立。

\*假设P(k)为真,称为归纳假设。

\*用谓词公式表示数学归纳法:

2.理解数学归纳法

(1)登无穷级的梯子

(2)n个人传秘密

(3)多米诺骨牌

二．用数学归纳法证明的例子

1.证明和式

例1：证明前n个正整数的和：。

解：设P(n)表示前n个正整数的和为。

归纳基础：验证P(1)为真，。

归纳步：作归纳假设，设P(k)为真，即

, 在这个假设下证明P(k+1)为真.

, 故P(k+1)为真.

故P(n)对任意正整数n成立。

例2：给出前n个奇正整数的和的猜想，并用数学归纳法证明。

解：

,因此我们猜想：

, 用归纳法证明：

归纳基础：验证P(1)成立。，结论成立。

归纳步：假设，即P(k)为真，证明P(k+1)为真。

故成立。所以P(n)对任意正整数n成立。

例4：（几何级数的和式）

解：归纳基础：n=0时，

归纳步：假设n=k时，公式成立，即

证明n=k+1时，公式仍成立。

故公式对所有非负整数成立。

2. 证明不等式

例5：证明：对所有正整数n成立。

解：归纳基础：当n=1时，，结论成立。

归纳步：假设n=k时，有成立。

当n=k+1时，，故结论成立。

例6：用数学归纳法证明: 对所有正整数n成立。(注意：n=1,2,3时，该不等式不成立)

解：设P(n)表示。

归纳基础：n=4时，，故P(4)成立。

归纳步：假设P(k)为真，即。

证明P(k+1)也为真。 故P(n)对所有的正整数n成立。

例7：调和数的不等式。

调和数

证明：

解：归纳基础：n=0时，

归纳步：假设n=k时，结论成立。即 .

欲证： 。

。

故对所有非负整数n成立. (注意是一个发散的级数)。

3. 证明可整除性

例8：证明：可被3整除，其中n为正整数。

证明：归纳基础：n=1时，可被3整除。

归纳步：假设n=k时，可被3整除(k。

当n=k+1时，

.已知能被3整除，又因为3(也能被3整除，故能被3整除。

4. 证明集合的有关结果

例9：（有穷集合的子集数）设集合S有n个元素（n为非负整数），那么S有个子集。

解：设P(n): n个元素的集合S有个子集。

归纳基础：n=0时，S只有一个子集：空集，故S有个子集。

归纳步：假设n=k时，P(k)为真，即有k个元素的集合S有个子集。

当n=k+1时，设T有k+1个元素，a是T中某一个元素，有

T=或S，那么S中有k个元素。由归纳假设，S有个子集，对于S中的每一个子集X，T中有两个不同的子集X和。而S有个子集，故T中有个不同的子集。

5. 创造性地使用归纳法

例12：奇数个人扔饼游戏。

有奇数个人站在院子里，任意两个人的距离互不相同。所有人同时朝距离他最近的人扔饼。证明：总有一个人不会被饼打到。

解：设：P(n):表示2n+1个人中总有一个人不会被饼打到。

归纳基础：当n=1时，共有2n+1=3个人。设有A,B,C三个人，假设A和B距离最近，那么A和B互相扔饼，C朝A或B扔饼，因此，C不会被饼打到。

归纳步：假设n=k时，P(k)成立。

现在设n=k+1，共有2(k+1)+1=2k+3个人。设其中A和B两个人距离最近，故A和B两人互相扔饼，剩下的2k+1人中如果有一个人朝A或B扔饼，共有2k+1人，而扔向这2k+1人的饼至多有2k个，故有一人不会被饼打到。若这2k+1人中没有人向A和B扔饼，由归纳假设，2k+1人中总有一人不会被饼打到。在任何情况下，这2k+3个人中总有一人不会被饼打到。故P(k+1)成立。

例13：设n是正整数。证明棋盘删去其中一个方格后总能被直角三米诺填充。

\*画图略讲（见书P327, 图6，图7）。

三．为什么数学归纳法合理？

1. 良序性质：每一个元素是正整数的集合有一个最小元。

2. 数学归纳法的合理性证明：数学归纳法证明P(1)成立，并对任意正整数k，由P(k)为真推出P(k+1)为真。假若P(n)不是对所有正整数n成立。令S={m是正整数且P(m)为假}。显然，因为已证P(1)成立。由良序性质，S中存在最小元k+1，因而且P(k)成立。由归纳法知，P(k)为真蕴含P(k+1)为真，因而，这与k+1是S中的最小元矛盾。

四．归纳法证明中常见的错误

例14：证明：n条两两不平行的直线交于一个公共点。

“证明：”设P(n)表示n条两两不平行的直线交于一个公共点(n。

归纳基础：当n=2时，由平行线的定义，2条不平行的直线交于一点。故P(2)得证。

归纳步：假设P(k)为真，现在设n=k+1。设是两两不平行的k+1条直线。考虑，由归纳假设，它们交于一个公共点M，再考虑，由归纳假设，它们交于一个公共点N。若M和N不同，则经过M和N的直线只能有一条，但都经过M和N，故M和N是同一点。证毕。

解：这个证明不适用于k=2的情形。当k=2，只有一条直线，上述证明M等于N不成立。

§4.2 强归纳和良序

一．强归纳法 (strong induction)

强归纳法：要证明P(n)对所有正整数n成立，其中P(n)是一个命题函数，我们需要以下两步：

归纳基础：我们验证P(1)为真。

归纳步:我们证明蕴涵式

对所有正整数k成立。

\*强归纳法与数学归纳法是等价的。

\*任何用数学归纳法能证明的定理，用强归纳法都能证，因为数学归纳法的假设P(k)是强归纳法的假设中的一部分，如果，则必有。

\*强归纳法有时称为第二归纳原理(second principle of mathematical induction)或完全归纳法(complete induction)。

\*强归纳法和无穷梯子

强归纳法告诉我们，如果我们做到以下两步，我们可以登上无穷梯子的每一级。

1. 我们能登上第一级梯子；
2. 对每一个正整数k，如果我们能登上梯子的前k级，那么我们能登上梯子的第k+1级。

例1：如果我们能登上无穷梯子的第一、第二级，并且我们知道，如果我们能登上梯子的第k级，那么我们能登上梯子的第k+2级。用强归纳法证明，我们能登上梯子的每一级。

解：\*用数学归纳法没办法证明。

用强归纳法证明：

归纳基础：首先我们验证我们能登上梯子的第一、第二级。

归纳步：假设我们可以登上梯子的第1级，第2级，, 现在考虑第k+1级。因为我们可以登上第级（由归纳假设），由我们题目的条件知，我们可以登上第级。故结论得证。

二．用强归纳法证明的例子

例2：证明：如果n是一个大于1的整数，那么n可以写成素数的乘积.

解：设P(n)表示n可以写成素数的乘积。

归纳基础：P(2)成立，因为2可以写成一个素数，即它自己。

归纳步：假设对所有的正整数j有P(j)成立。当n=k+1时，如果k+1是一个素数，那么k+1可以写成它自己。若k+1是一个合数，那么k+1=，其中且，由归纳假设，知a可以写成素数的乘积, b也可以写成素数的乘积，故k+1=也可以写成a中的那些素数和b中的那些素数的乘积。

例3：（取火柴游戏）假设有两堆一样多的火柴，由两个人轮流取火柴，每人每次从一堆中取任意正整数根火柴，最后取火柴的那个人赢。证明：第二个取的人总能够赢。

解：设一开始两堆火柴中各有n根火柴。设P(n)表示在这种情况下，第二个人一定能赢。

归纳基础：当n=1时，第一个人在一堆中取一根火柴，第二个人只需在另一堆中取一根火柴，就赢了。故P(1)成立。

归纳步：假设两堆火柴各有j根(1)时，P(j)成立。

现在设两堆火柴各有k+1根。若第一个人在一堆中取k+1根火柴，则第二个人在剩下的另一堆中也取k+1根，则第二个人就赢了。如果第一个人在一堆中取r根火柴，那么第二个人也在另一堆火柴中取r根，这时，两堆火柴各剩根，由归纳假设，成立，故第二个人总能赢。

例4：证明总数大于或等于12分的邮费可仅用4分和5分的邮票表示。

解：设P(n)表示n分钱的邮费可用4分和5分的邮票表示。

用数学归纳法证明：

归纳基础：12分的邮费可用3张4分的邮票表示。

归纳步：假设P(k)为真。现在证n=k+1时，P(n)为真。因为k分钱的邮票可用4分和5分的邮票表示，若其中至少有一个4分的邮票，那么将它换成5分的邮票就证明了P(k+1)。若k分钱邮费全部是5分钱的邮票，因为，全部是5分的邮票则，其中至少有3张5分的邮票，将其中3张5分的邮票换成4张4分的邮票，就可以表示k+1分钱。故P(k+1)成立。

用强归纳法证明：

归纳基础：可以验证12，13，14和15分钱可用3张4分，2张4分1张5分，1张4分2张5分和3张5分邮票表示。故P(12), P(13), P(14)和P(15)成立。

归纳步：由归纳假设知P(j)对12成立且。要证P(k+1)成立。因为成立且，因此，在分钱的邮票中加一张4分的邮票，就能表示k+1分钱的邮费了，故P(k+1)成立。

三．使用良序性质证明

1. 良序性质(Well-ordering property)：每个非空的非负整数的集合都一定有一个最小元。

\*良序性质和数学归纳法、强归纳法都是等价的，其中任意一个的正确性都可以用另外两个之一来证明。

2.例子：

例5：用良序性质证明除算法。即：如果a是一个整数且d是一个正整数，那么存在唯一的整数q和r，使得a=dq+r且。

解：设S是具有形式的所有非负整数的集合，其中q是一个整数。这个集合S是非空集，因为我们可以取q为负整数，因而使尽可能大。由良序性质，S有一个最小元

.

由集合S的要求，r为非负数，同时有。假若不然，

。由于，因而有

，是S中比r更小的元素，这与r是S中的最小元的结论矛盾。故存在和r使得

。

再证r和q是唯一的。由于r是满足的最小非负整数，假若还有一个也满足是非负整数且, 若

，这与r是最小元的假设矛盾; 若，由于，从而有，即，从而，这与矛盾。故。由知，。从而r和q是唯一的。

作业：

1. 用数学归纳法证明和式: .
2. 用数学归纳法证明: 2整除其中n是一个正整数。
3. 设P(n)表示n分钱的邮费可以只用4分和7分的邮票表示。用强归纳法证明P(n)对的所有整数成立。
4. 用强归纳法证明每一个正整数n可以写成2的不同的幂的和。