**2.1 流形插值—一种调和扩展法**

设为高维流形中点的集合，为X的一个子集。假设我们在上定义一个（可能的向量值）标记函数g(X)，我们想要插值一个函数u，它定义在整个流形上，并且可以用来标记整个数据集X。在高维空间中利用基函数进行插值将受限于维度，然而，调和扩展法是找到合适插值函数的一种自然和优雅的方法，其通过最小化狄利克雷能量(Dirichlet energy)函数来定义：

(1)

边界条件：

其中w(x, y)是一个加权函数，通常选择高斯分布：，其中是尺度参数。对于式(1)的欧拉-拉格朗日方程：

(2)

通过求解线性方程组(2)，我们得到未标记数据的插值标记u(x)，当标记数据量很小，例如，该插值将变得无效。解决这一问题有两种解决方法：一种是用p-拉普拉斯算子代替方程(1)中的2-拉普拉斯算子，另一种是增加欧拉-拉格朗日方程中标记数据的权重，其给出以下加权非局部拉普拉斯(WNLL)插值函数：

为简化符号，我们将上述方程的解u(x)命名为。对于分类任务，g(x)为示例x的一个one-hot标记。为确保WNLL的准确性，标记数据应该覆盖X中数据的所有类别，我们在定理中给出了一个必要条件。

定理：假设我们有一个由N个数据类统一形成的数据池，每个类的实例数量足够的大。如果我们希望所有类别的数据至少采样一次，那么平均至少需要从数据池中采样个数据。在这种情况下，对每个类所期望的采样数据的数量为。