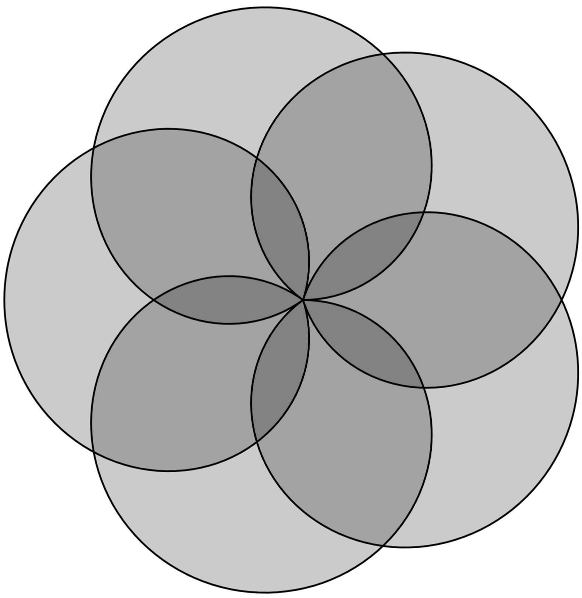
关于《高等代数简明教程》课后习题的个人思考整理

IKAW



2025 年 5 月 25 日 ver1.1

基于 LaTeX 排版.

$\zeta Prime$

前言

1. 本书是针对教科书《高等代数简明教程》（蓝以中，北京大学出版社，第二版，以下简称《教程》）的习题的个人解答，基本涵盖了在《教程》的前六章的所有课后习题（不包括 6.4 节）；

2. 我是一个业余数学爱好者，这些解答是由我一个人逐字逐句编写并对其进行 LaTeX 排版整理的，其定位上应当属于我个人的**学习笔记**，主要目的在于记录一些所思所想，仅代表我个人见解，其内容和观点**不对任何人负责**，也**不会有任何学术水平上的保证**，分享出来仅仅是为了给其他学习者提供一点参考；

3. 技术上尽量避免引入超前章节的理论去解答落后章节的题目；

4. 叙述上较为详细，尽量不跳步，同时我在行文中或有意或无意写了很多重复、强调、过渡性或提示性语句，可能会稍显啰嗦，请见谅；

5. 观点上较为朴素，我没有读过（比线性代数）先进的代数理论，很多事情我暂时还不了解，因此关于各种题目的背景我也不敢妄加评注；

6. **（警告）**解答时针对部分题目的论证逻辑进行过一些基本的检查和斟酌，但个人水平和精力有限，加之大多数解答完成于我理解尚不成熟之际，也没有经过其他人审阅，无法完全保证正确性，甚至可能出现一些逻辑完全混乱的情况，所以**请务必谨慎看待！**

作者

目录

第零章　说明与注记

（**1**）本书涉及到的参考资料是蓝以中著的《高等代数简明教程》以及配套的《高等代数学习指南》（均为北京大学出版社出版），以后用“《教程》”一词指代《高等代数简明教程》（文献 [1]），用“《指南》”一词指代《高等代数学习指南》（文献 [2]）.

（**2**）本书所采用的科学名词或符号的风格基本与《教程》保持一致，但为了编辑的简明方便，在个别不要紧的细节上会稍有不同. 比如对 n 个元素枚举的表示，《教程》采用较为正式的如下居中半格高省略号：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n.$$

而本书采用如下简单形式表示：

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n.$$

又如矩阵括号的写法，《教程》中主要使用方括号（少许圆括号），在本书中只采用圆括号. 还有其他的例子，不在此一一列举.

对于本书出现了，但可能在《教程》未出现的符号，一般都会作出说明. 此外，作为提醒，在此举出本书中几个要注意辨别的符号：

一是“$'$”（撇），可以代表矩阵（或向量）转置，亦可以用于代替下标的功能以区分类似的数学对象，没有具体含义，比如 α 和 α'.

二是“*”（星），矩阵 A^* 一般表示 A 的伴随矩阵（adjugate matrix），而 $\boldsymbol{A}^*$ 则表示线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的共轭变换，本书**不会**用符号 A^* 表示 A 的共轭转置.

三是“$\overline{x}$”（上划线，拔），可以表示复数的共轭或复矩阵的共轭，也可表示线性空间 V 到商空间 V/M 的自然映射（即 $\overline{a}$ 表示以 a 为代表的的模 M 剩余类）.

四是“$\subset$”，表示集合的真包含于关系，而“$\subseteq$”表示包含于.

（**3**）本书行文中会大量引用《教程》内容，例如，某道习题的解答中可能出现了下面这句话：

“由《教程》定理 3.2”或“由《教程》命题 3.2”，

这个叙述并未指明具体章号，其表示的意思是："此处引用在《教程》正文中该题目所对应章节的（第 3 小节）定理 3.2"或"……命题 3.2". 而如果需要引用其他章节的内容，引用时会指明具体章节号.

对于已经解答过的习题进行引用，会出现如下表述：

"由题目 5（的结论）",

这也未指明具体章号，其理解逻辑同上.

(4) 一些题目的解答后面会有对这道题的批注（相当于 Remark），主要用于写一些解释和补充，以及与题目相关的背景的指示. 在某些段落中会添加脚注，如[1]，脚注用于特别提醒.

(5) 一些引理放也会出现在某些题目的解答后面，在该题或以后的解题过程当中可能会用到这些引理. 例如，某道题目的解答出现了下面这句话：

"根据题目 3 的引理",

则表示，"在本书的该题目所对应章和节的第 3 个题目的解答后面，提出并证明了一个引理，在此处对那个引理进行引用". 如果引用的是其他章节的习题引理，则会指明具体章节号.

(6) 很多符号与论断的含义不是那么清晰，尤其是涉及到一些下标变化量的相关命题，请联系上下文具体分析判断.

(7) 很多难题在《指南》中也有解答，但是本书的解答和《指南》的解答不尽相同.

[1]脚注示例.

第一章　代数学的经典课题

1.1　若干准备知识

1. 按照数域的定义验证即可. **(1)** 是. **(2)** 是. **(3)** 是.

2. **(1)** 既不是单射，也不是满射.

(2) 不是单射，但是满射.

(3) 是单射，但不是满射.

3. **(1)** 如果 $f: S \to S$ 是单射,则集合 S 作为值域必然含有 $f(1), f(2), ..., f(n)$ 这 n 个元素，且根据单射的定义它们两两不同. 而 S 也只有 n 个两两不同的元素，所以 $f(1), f(2), ..., f(n)$ 必然分别取到 S 不同的所有元素. 也即 f 是满射.

(2) 如果 $f: S \to S$ 是满射，则 $f(1), f(2), ..., f(n)$ 必然取到值域 S 中的所有元素. 因为值域 S 有 n 个不同的元素 $1, 2, ..., n$，而 $f(1), f(2), ..., f(n)$ 总共只有 n 个数，若想让 $f(1), f(2), ..., f(n)$ 取到 S 中 n 个不同的值，它们只能两两不同. 从而 f 是单射.

4. 为了叙述清晰，我们用 $p_1 \vee p_2$ 表示命题 p_1, p_2 至少其中之一成立，用 $p_1 \wedge p_2$ 表示命题 p_1, p_2 同时成立.

(1) 任取 $x \in A \cap (B \cup C)$，则有

$$\begin{aligned}
&(x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \\
\Longrightarrow &(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\
\Longrightarrow &((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\
\Longrightarrow &(x \in (A \cap B)) \vee (x \in (A \cap C)) \\
\Longrightarrow &x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

从而 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 反过来推理也同样成立，即 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. 故 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2) 任取 $x \in A \cup (B \cap C)$，则有

$$
\begin{aligned}
&(x \in A) \vee (x \in (B \cap C)) \\
\Longrightarrow &(x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \\
\Longrightarrow &((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C)) \\
\Longrightarrow &(x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup C)) \\
\Longrightarrow &x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}
$$

从而 $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$，反过来推理也同样成立，即 $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. 故 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. 设 $f(a_p) = f(a_q)$，则有 $2p = 2q$，即 $p = q$，从而 $a_p = a_q$，f 是一个单射. 任取正偶数 $m \in B$，则 $n = m/2$ 是一个整数，从而存在一个数 $a_n \in A$，使得 $f(a_n) = 2n = m$，f 也是一个满射. 故 f 是一个双射.

6. 将全体正有理数按本节题目 5 的方式排成一个序列 $\{a_n\}$，再定义序列 $a_{-n} = -a_n$（即全体负有理数组成的序列），则必然有 $\mathbb{Q} = \{0, a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2}, ...\}$，那么对 $k = 1, 2, 3, ...$，定义

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{N}; \\
0 &\longmapsto 1, \\
a_k &\longmapsto 2k, \\
a_{-k} &\longmapsto 2k + 1.
\end{aligned}
$$

不难验证 f 是一个双射. 从而 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{N}$ 之间存在一个一一对应.

7. 设 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$. 对任意 $x \in A$，定义

$$
\begin{aligned}
f : A &\longrightarrow B; \\
x &\longmapsto 1.
\end{aligned}
$$

对任意 $y \in B$，定义

$$
\begin{aligned}
g : B &\longrightarrow A; \\
y &\longmapsto 1.
\end{aligned}
$$

则有 $gf = \mathrm{id}_A$，但 $fg(2) = 1$，从而 f 不是可逆映射.

8. 任取 $a, b, c \in K \cap L, c \neq 0$，则有 $a, b, c \in K$ 且 $a, b, c \in L$，又 K, L 都是数域，从而 $a \pm b, ab, a/c \in K$ 且 $a \pm b, ab, a/c \in L$,，即 $a \pm b, ab, a/c \in K \cap L$，故 $K \cap L$ 是数域.

现取 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}|a, b \in \mathbb{Q}\}, L = \mathbb{Q}(\mathrm{i}) = \{a + b\mathrm{i}|a, b \in \mathbb{Q}\}$，容易验证 K, L 都是数域，但 $K \cup L$ 不是数域. 这是因为取 $\sqrt{2} \in K, \mathrm{i} \in L$，此时 $\sqrt{2}, \mathrm{i} \in K \cup L$，但显然 $\sqrt{2} + \mathrm{i}$ 既不在 K 中也不在 L 中，即 $\sqrt{2} + \mathrm{i} \notin K \cup L$. 从而 $K \cup L$ 不是数域.

9. 设 $f(a + b\sqrt{2}) = f(c + d\sqrt{2})$，则有 $a - b\sqrt{2} = c - d\sqrt{2}$，即 $(a - c) = (b - d)\sqrt{2}$，因为 $\sqrt{2}$ 为无理数，$a - c, b - d$ 为有理数，从而 $b - d = 0$（否则 $\sqrt{2} = (a - c)/(b - d)$ 矛盾），同时也有 $a - c = 0$，故 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$，$f$ 是单射.

现任取 $c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$，则存在一个数 $c - d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$，使得 $f(c - d\sqrt{2}) = c - (-d)\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$，从而 f 是满射.

综上 f 是双射，容易推知 $f^{-1} = f$.

10. **(1)** 求自然数幂和方法很多，比如升幂，裂项，Abel 分部求和，组合数公式等等，甚至还可以用待定系数法（求出表达式后用归纳法证明），但这些都是组合学上的代数变形技巧，与线性代数本身联系不大，本书并不着重于讨论这些内容，故不再赘述.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (i+1)(i+2) &= \sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + 2n \\
&= \frac{n(n^2 + 6n + 11)}{3}.
\end{aligned}$$

(2) 利用等比序列求和以及错位相减（或用 Abel 分部求和）.

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = \frac{(-1)^n-1}{2},$$
$$\sum_{i=1}^{n}i(-1)^i = \frac{(-1)^n-1}{4} - \frac{n(-1)^{n+1}}{2}.$$

11. 裂项，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

12. 用 $\binom{n}{k}$ 表示组合数（从有 n 个不同元素的集合中选出 k 个元素的方法总数），则

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

13. 充分性，如果 $K\subseteq L$，则 $K\cup L = L$ 自然是数域. $L\subseteq K$ 同理.

必要性，设 $K\cup L$ 是数域，若 $K\not\subseteq L$，则存在 $k\in K$ 但 $k\notin L$. 现任取 $l\in L$，则有 $k,l\in K\cup L$，从而 $k+l\in K\cup L$. 如果 $k+l\in L$，则由 L 是数域知 $k+l-l=k\in L$，矛盾. 故 $k+l\in K$，此时由 K 是数域知，$k+l-k=l\in K$. 这说明任意的 $l\in L$，都有 $l\in K$，从而 $L\subseteq K$.

14. 必要性显然成立. 考虑充分性，以下将 A 记为 $\mathbb{Q}$. 因为对任意 $a,b\in\mathbb{Q}$，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，根据本题后面的引理可知，对任意 $r\in\mathbb{Q}$，必然有

$$f(r) = rf(1). \tag{1.1}$$

现在，若 $\forall a\in\mathbb{Q}, f(a)=0$，则 f 是零变换，此时命题成立. 若存在 $a_1\in\mathbb{Q}$ 使得 $f(a_1)\neq 0$，则在 $f(ab)=f(a)f(b)$ 中，令 $a=a_1, b=1$，有 $f(a_1)=f(a_1)f(1)$，从而 $f(1)=1$. 进而由式 (1.1) 知 $\forall r\in\mathbb{Q}, f(r)=rf(1)=r$. 即 $f=\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. 此时命题也成立.

引理 (柯西方程) 如果 f 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个变换，且满足对任意 $a,b\in\mathbb{Q}$，有

$$f(a+b) = f(a)+f(b),$$

则对任意 $r\in\mathbb{Q}$，有

$$f(r) = rf(1). \tag{1.2}$$

证明： 证明分三步走.

(i) 我们来证，对任意 $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Q}$，有

$$f(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n). \tag{1.3}$$

利用数学归纳法，首先当 $n = 1$ 时命题显然成立. 假设当 $n = k - 1$ 时命题成立，则当 $n = k$ 时，有

$$\begin{aligned} f(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) &= f(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + f(a_k) \\ &= f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{k-1}) + f(a_k). \end{aligned}$$

命题也成立，故由数学归纳法知命题对任意正整数 n 都成立.

(ii) 证明 f 为奇函数.

在 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 中令 $b = 0$，有 $f(a) = f(a) + f(0)$，从而 $f(0) = 0$. 又对任意 $a \in \mathbb{Q}$，有 $0 = f(0) = f(a - a) = f(a) + f(-a)$，从而 $f(-a) = -f(a)$（即 f 是奇函数）.

(iii) 证明式 (1.2).

首先对任意有理数 $r \in \mathbb{Q}$，在式 (1.3) 中取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = r$，有

$$f(nr) = f(r + r + \cdots + r) = f(r) + f(r) + \cdots + f(r) = nf(r),$$

现在考虑任意正有理数 $r = p/q \in \mathbb{Q}^+$，其中 p, q 都为正整数且 $q \neq 0$，按照上式有

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f(p) = f(p \cdot 1) = pf(1).$$

也即

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1).$$

因此式 (1.2) 对正有理数成立.

而对任意负有理数 $r = -p/q$,因为 f 是奇函数,有 $f(-p/q) = -f(p/q) = -(p/q)f(1)$，从而式 (1.2) 也对负有理数成立，又由 $f(0) = 0$，可知对任意有理数 $r \in \mathbb{Q}$，式 (1.2) 成立. ■

批注. 本题可参考《指南》引言例 3.

15. 分而治之.

任取有理数 $a, c \in \mathbb{Q}$，令 $\alpha = a + 0\sqrt{2}, \beta = c + 0\sqrt{2}$，按照题设 $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$，有

$$f(a + c) = f(a) + f(c),$$

根据本节题目 14 的引理可知，对所有理数 $a\in\mathbb{Q}$，$f(a)=af(1)$.

由于对任意有理数 $x\in\mathbb{Q}$，有 $x\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，因此可定义 $g(x)=f(\sqrt{2}x)$，根据题设，任取有理数 $b,d\in\mathbb{Q}$，有

$$\begin{aligned}g(b+d)&=f(\sqrt{2}(b+d))\\&=f(\sqrt{2}b+\sqrt{2}d)\\&=f(\sqrt{2}b)+f(\sqrt{2}d)\\&=g(b)+g(d),\end{aligned}$$

根据本节题目 14 的引理可知，对所有理数 $b\in\mathbb{Q}$，$g(b)=bg(1)=bf(\sqrt{2})$. 那么对一切 $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$（$a,b\in\mathbb{Q}$），有

$$f(a+b\sqrt{2})=f(a)+f(b\sqrt{2})=f(a)+g(b)=af(1)+bf(\sqrt{2}). \tag{1.4}$$

现在，若 $\forall\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}),f(\alpha)=0$，则 f 是零变换，此时命题直接成立. 若存在 $\alpha_1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 使得 $f(\alpha_1)\neq 0$，则在 $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ 中，令 $\alpha=\alpha_1,\beta=1$，有 $f(\alpha_1)=f(\alpha_1)f(1)$，从而 $f(1)=1$. 再令 $\alpha=\beta=\sqrt{2}$，有 $f(2)=f(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=f(\sqrt{2})f(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})^2$，而 $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2$，从而 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ 或 $f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$. 因此按式 (1.4)，对一切 $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，我们有

$$f(a+b\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$$

或

$$f(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}.$$

故此时命题也成立.

1.2 一元高次代数方程的基础知识

1. 根据题设该数域必须包含 $\pm\sqrt{5}\mathrm{i}$，而由数域的性质知任何数域都应该包含 $\mathbb{Q}$，从而由数域的定义，任何有理数 a 加上 $\sqrt{5}\mathrm{i}$ 必然在这个数域中，任何有理数 b 乘上 $\sqrt{5}\mathrm{i}$ 也必然在这个数域中. 据此不难推知 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{5}\mathrm{i}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ 就是满足题设的最小数域.

2. 利用多项式除法可知 $q(x)=2x^3+2x^2-x$.

3. 按照《教程》命题 2.1 的论证可知

$$q(x) = a_0 q_n(x) + a_1 q_{n-1}(x) + \cdots + a_{n-1},$$

其中

$$q_k(x) = x^{k-1} + a x^{k-2} + \cdots + a^{k-1}.$$

把 $q_k(x)$ 代入 $q(x)$ 的表达式中，可知 $q(x)$ 的系数都由 $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a$ 进行有限次乘积或求和得到，由于 $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a \in K$，所以这些系数都在数域 K 中.

4. 简单改写 $f(x)$，得

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0 (x-a+a)^n + a_1 (x-a+a)^{n-1} + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

把上式的 $x-a$ 看作一个整体，各项按牛顿二项式展开，得到的是一个关于 $x-a$ 的多项式，其系数 b_i 由 $a_1, a_2, ..., a_n, a$ 进行有限次乘积或求和得到，因此 $b_i \in K$.

5. 根据《教程》命题 2.2，存在 n 个复数 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 使得

$$f(x) = a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

再根据《教程》命题 2.4，如果 α_s 是实系数多项式 $f(x)$ 的一个零点，则 $\overline{\alpha}_s$ 必然也是 $f(x)$ 的一个零点，从而可以将上式写作

$$\begin{aligned} f(x) =& a_0 (x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha}_1)(x-\alpha_2)(x-\overline{\alpha}_2)\cdots(x-\alpha_m)(x-\overline{\alpha}_m) \\ =& a_0 \prod_{i=1}^{m} (x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha}_i). \end{aligned}$$

对于每个乘积 $(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha}_i)$，如果 $\alpha_i \in \mathbb{R}$，则 $(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha}_i) = (x-\alpha_i)^2$，此时将 α_i 归入 b_i. 如果 α_i 非实数，则 $(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha}_i) = x^2 - (\alpha_i + \overline{\alpha}_i)x + \alpha_i\overline{\alpha}_i$，不难验证 $\alpha_i + \overline{\alpha}_i, \alpha_i\overline{\alpha}_i$ 都是实数，此时将 $\alpha_i + \overline{\alpha}_i$ 和 $\alpha_i\overline{\alpha}_i$ 分别归入 p_j 和 q_j，最终即可得到题述形式的 $f(x)$.

6. 由《教程》命题 2.1 知，存在 $\mathbb{C}$ 上的多项式 $q(x)$ 使得

$$f(x) = q(x)(x-1) + f(1).$$

上式代入 $x=a$ 得

$$f(a)=q(a)(a-1)+f(1)=0.$$

因为 $f(x)$ 是整系数多项式，由本节题目 3 的结论可知，$q(x)$ 的系数都是整数. 从而 $q(a)$ 也是整数，故 $a-1$ 整除 $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$. 同理，我们也有

$$f(x)=q_1(x)(x+1)+f(-1).$$

令 $x=a$ 得

$$f(a)=q_1(a)(a+1)+f(-1)=0.$$

从而 $a+1$ 整除 $f(-1)=(-1)^n(a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^n a_n)$.

7. 用常数项因子与首项系数因子之比逐一试根，求得一根后利用多项式除法降幂，不难得到

(1) $x^3-6x^2+15x-14=(x-2)(x^2-4x+7)$，有理数零点为 2；

(2) $4x^4-7x^2-5x-1=(2x+1)^2(x^2-x-1)$，有理数零点为 $-\frac{1}{2}$；

(3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=(x-3)(x+1)^4$，零点为 $-1,3$.

8. 根据《教程》命题 2.3，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \alpha_i^2&=\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j\\&=\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^2-2\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\\&=\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^2-2\frac{a_2}{a_0}\\&=\frac{a_1^2-2a_0a_2}{a_0^2}.\end{aligned}$$

因为方程的系数属于 K，故上式也属于 K.

9. 若 $\varepsilon^k=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n}=1$，此时当且仅当其辐角 $2k\pi/n=2m\pi, m\in\mathbb{Z}$，即 $k=mn$，或者说 n 整除 k，我们有

$$\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\cdots+\varepsilon^{nk}=n.$$

若 $\varepsilon^k\neq 1$，此时当且仅当 n 不整除 k，按照等比序列求和，我们有

$$\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\cdots+\varepsilon^{nk}=\varepsilon^k\frac{1-\varepsilon^{nk}}{1-\varepsilon^k}=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n}\frac{1-\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n}},$$

注意到 $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=1$，因此上式等于 0.

1.3 线性方程组

1. 利用矩阵的初等变换消元即可.

(1) $x_1=0, x_2=2, x_3=5/3, x_4=-4/3$.

(2) $x_1=-\frac{1}{2}x_5, x_2=-1-\frac{1}{2}x_5, x_3=0, x_4=-1-\frac{1}{2}x_5$.

(3) 无解.

(4) $x_1=-8, x_2=3, x_3=6, x_4=0$.

(5) $x_1=\frac{3}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4, x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4$.

(6) 无解.

(7) $x_1=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}x_4, x_2=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}x_4, x_3=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}x_4$.

2. 若 a_{11} 和 a_{21} 至少有一个非零，不妨设 $a_{11}\neq 0$（如果是 a_{21} 非零，则交换方程位置即可），则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}.$$

此时如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ 成立，则 $a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}=0$，$x_2$ 是自由未知量，显然有非零解，故充分性成立. 反过来，如果方程有非零解 $x_1=k_1, x_2=k_2$（k_1, k_2 不全为 0），显然 $k_2\neq 0$（否则 $a_{11}k_1=0$ 从而 k_1 也为 0），则 $\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)k_2=0 \Rightarrow a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}=0$，从而 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，必要性成立.

若 $a_{11}=a_{21}=0$，此时方程恒有非零解 $x_1=1, x_2=0$，而 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ 也恒成立. 从而充分必要性都成立.

3. 对系数矩阵作初等变换化为阶梯形判断即可.

(1) 无非零解.

(2) 有非零解. 方程组的解为 $x_1=0, x_2=x_4, x_3=2x_4$.

(3) 未知数个数大于方程数，根据《教程》命题 3.2 知必有非零解.

(4) 有非零解. 方程组的解为 $x_1=x_4, x_2=x_4, x_3=x_4$.

4. 对系数矩阵进行初等变换有

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -a/2 & -1-a/2 \\ 0 & 1/2 & 7/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & a & 2+a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2-6a \end{pmatrix},$$

可见只有 $2-6a=0$，即 $a=1/3$ 时有非零解. 此时 x_3 是自由未知量，方程的解为 $x_1=3x_3, x_2=-7x_3$.

5. 对增广矩阵作初等变换.

(1)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{pmatrix} = P.$$

当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$，即有 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$，若 $\lambda=1$，则上述矩阵 P 只有第一行全为 1，第二行第三行均为 0，此时原方程组等价于 $x_1+x_2+x_3=1$，其解为 $x_1=1-x_2-x_3$，其中 x_2,x_3 是自由未知量. 若 $\lambda=-2$，则

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

此时 P 的第三行对应矛盾方程，从而无解.

当 $(1-\lambda)(2+\lambda)\neq 0$ 时，即 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$，此时可以直接解出方程的唯一解

$$x_1=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, x_2=\frac{1}{\lambda+2}, x_3=\frac{\lambda^2+1}{\lambda+2}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & -b & 0 & -1 \\ 0 & 1-2ab & 1-a & 4-4a \end{pmatrix} \to \cdots$$

当 $b=0$ 时，则上述矩阵的第二行对应矛盾方程，从而无解. 当 $b\neq 0$，继续做初等变换有

$$\cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & (4b-2ab-1)/b \end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时，若又有 $4b-2ab-1=2b-1\neq 0$，即 $b\neq 1/2$，此时第三行对应矛盾方程，无解. 若 $b=1/2$，则方程的解为 $x_1=2-x_3, x_2=2$，其中 x_3 为自由未知量. 当 $a\neq 1$ 时，方程有唯一解

$$x_1=\frac{1-2b}{b(1-a)}, x_2=\frac{1}{b}, x_3=\frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}.$$

综上，当 $b=0$ 时无解；

当 $a=1$ 且 $b\neq 1/2$ 时也无解；

当 $a=1$ 且 $b=1/2$ 时方程的解为 $x_1=2-x_3, x_2=2$（x_3 为自由未知量）；

当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时方程的解为

$$x_1=\frac{1-2b}{b(1-a)}, x_2=\frac{1}{b}, x_3=\frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}.$$

(3) 易知

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}.$$

当 $a\neq 0$ 或 $b-a\neq 2$ 时，上述矩阵后两行对应矛盾方程，无解. 当 $a=0$ 且 $b=2$ 时，方程的解为

$$x_1=-2+x_3+x_4+5x_5, x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5.$$

其中 x_3,x_4,x_5 是自由未知量.

6. 如果该方程组有解，将这五个方程相加就可以得到 $\sum_{i=1}^5 a_i=0$. 从而必要性成立.

如果 $\sum_{i=1}^5 a_i=0$，对增广矩阵作初等变换，将前四行依次加到第 5 行，有

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-10&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

此时令 x_5 为自由未知量，解得

$$x_1=a_1+a_2+a_3+a_4+x_5, \qquad x_2=a_2+a_3+a_4+x_5,$$
$$x_3=a_3+a_4+x_5, \qquad x_4=a_4+x_5.$$

故方程组有解. 充分性也成立. 上面的解正是其一般解.

7. 对系数矩阵进行初等变换，依次将第 2 行减去第 1 行，第 3 行减去第 2 行……不断进行下去，则有

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1-(-1)^n\end{pmatrix}.$$

故有 $(1-(-1)^n)x_n=0$. 当 n 为奇数时，$x_n=0$，代入原方程可依次得到 $x_{n-1}=x_{n-2}=\cdots=x_1=0$. 当 n 为偶数时，x_n 是自由未知量，此时有 $x_1=-x_n,x_2=x_n,x_3=-x_n,\cdots,x_{n-1}=(-1)^{n-1}x_n$.

8. 平面上任意一条二次曲线的方程都可以设为 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$，其中 a_{11},a_{12},a_{22} 不全为零. 任给不共线的五个点，将它们的坐标代入这个曲线方程后，得到一个关于待定系数 $a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0$ 的齐次线性方程组. 五个点一共可以得到五个方程，但未知数共有六个，由《教程》命题 3.2 知，该方程组必有非零解，这就说明至少有一条二次曲线通过这五个点，且因为这五个点不共线，求出的二次曲线方程不可能退化到直线方程.

对 P,Q,R,S 四个点，我们有

$$\begin{cases}P:a_{11} & & +2a_1 & +a_0=0,\\Q:a_{11} & -2a_{12}+a_{22} & +2a_1-2a_2 & +a_0=0,\\R:a_{11} & -4a_{12}+4a_{22} & -2a_1+4a_2 & +a_0=0,\\S:4a_{11} & +12a_{12}+9a_{22} & +4a_1+6a_2 & +a_0=0.\end{cases}$$

利用矩阵消元法解该方程组即可. 解得

$$a_{11}=-\frac{66}{13}a_2-\frac{16}{13}a_0,\qquad a_{12}=-\frac{6}{13}a_2+\frac{3}{26}a_0,$$
$$a_{22}=\frac{14}{13}a_2+\frac{3}{13}a_0,\qquad a_1=\frac{33}{13}a_2+\frac{3}{26}a_0.$$

其中 a_2, a_0 是自由未知量. 且此处 a_2, a_0 不全为 0（否则该解是零解）. 例如取 $a_2 = 13, a_0 = 26$，可以得到一条二次曲线如下

$$-98x^2 - 6xy + 20y^2 + 72x + 26y + 26 = 0.$$

验证可知，该二次曲线确实通过 P, Q, R, S 四个点.

9. 由题意可知 $n \geqslant 3$. 对增广矩阵作初等变换，有

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & a & \cdots & a & a & b_2 \\ 1 & a & 0 & \ddots & a & a & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \ddots & 0 & a & b_{n-1} \\ 1 & a & a & \cdots & a & 0 & b_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_2 - ab_1 \\ 1 & 0 & -a & \ddots & 0 & 0 & b_3 - ab_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & -a & 0 & b_{n-1} - ab_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a & b_n - ab_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & ab_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - ab_1) \\ 1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_2 - ab_1 \\ 1 & 0 & -a & \ddots & 0 & 0 & b_3 - ab_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & -a & 0 & b_{n-1} - ab_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a & b_n - ab_1 \end{pmatrix}.$$

从而得到等价的方程组

$$\begin{cases} (n-1)x_1 = ab_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^n (b_i - ab_1) = (2-n)ab_1 + \sum_{i=2}^n b_i, \\ x_1 - ax_k = b_k - ab_1, k = 2, 3, ..., n. \end{cases}$$

解得

$$x_1 = \frac{(2-n)ab_1}{n-1} + \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n b_i,$$
$$x_k = -\frac{b_k}{a} + \frac{b_1}{n-1} + \frac{1}{a(n-1)} \sum_{i=2}^n b_i, k = 2, 3, ..., n.$$

10. 如果 $a_1, a_2, ..., a_n$ 全部为 0，则方程恒成立，其解是所有未知量都取任意 K 内数. 若 $a_1, a_2, ..., a_n$ 不全为零，设 $a_t \neq 0$. 则考虑方程组中如下形式的方程

$$a_t a_t x_{jk} - a_j a_k x_{tt} = 0,$$

此时如果把 x_{tt} 看作自由未知量，则对任意 j,k 都有

$$x_{jk}=\frac{a_ja_kx_{tt}}{a_t^2}.$$

可以注意到，这实际上已经表示出了方程的全部未知量，并且所有未知量都仅由这个自由未知量 x_{tt} 确定，从而这正是方程的全部解.

第二章　向量空间与矩阵

2.1　m 维向量空间

1.　解向量方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 + x_5\alpha_5 = \beta$ 即可. 可解得

$$x_1 = 1 + \frac{5}{3}x_5, x_2 = 1 - \frac{4}{3}x_5, x_3 = 1, x_4 = 1 + \frac{2}{3}x_5.$$

取 $x_5 = 0$ 有 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$.

2.　解向量方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$ 即可.

(1) 解得

$$x_1 = 5/4, x_2 = 1/4, x_3 = -1/4, x_4 = -1/4.$$

即 $\beta = (5/4)\alpha_1 + (1/4)\alpha_2 - (1/4)\alpha_3 - (1/4)\alpha_4$.

(2) 解得

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0.$$

即 $\beta = \alpha_1 - \alpha_3$.

3.　解向量方程 $\sum x_i\alpha_i = 0$，判断有没有非零解即可.

(1) 只有零解，线性无关.

(2) 只有零解，线性无关.

(3) 解得

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_4, x_2 = -\frac{1}{2}x_4 - x_5, x_3 = -x_5.$$

取 $x_4 = -2, x_5 = 0$ 有 $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_4 = 0$，故线性相关.

(4) 解得

$$x_1 = x_5, x_2 = x_5, x_3 = x_5, x_4 = x_5$$

取 $x_5 = 1$ 有 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$，故线性相关.

4. 首先 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可线性表示 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是显然的. 而通过待定系数法可以得到

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)+\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_1),\\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)-\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_1),\\
\alpha_3 &= -\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)+\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_1).
\end{aligned}$$

所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 亦可线性表示 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 因此这两个向量组线性等价.

5. 设

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)=0,$$

则

$$(k_1+\cdots+k_s)\alpha_1+(k_2+\cdots+k_s)\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的线性无关性有

$$\begin{cases}
k_1+k_2+\cdots+k_s=0,\\
\qquad k_2+\cdots+k_s=0,\\
\qquad\qquad \cdots\\
\qquad\qquad\quad k_s=0.
\end{cases}$$

解得 $k_1=\cdots=k_s=0$. 所以 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,...,\alpha_1+\cdots+\alpha_s$ 线性无关.

6. 由线性相关性可知，存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,...,k_s,k_{s+1}$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k_{s+1}\beta=0,$$

若 $k_{s+1}=0$ 则与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的线性无关性矛盾，因此 $k_{s+1}\neq 0$. 从而

$$\beta=-\frac{1}{k_{s+1}}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s).$$

批注. 本题其实是《教程》命题 3.2.

7&8. 若一个向量组有一个部分组线性相关，则由《教程》命题 1.2，部分组内有一个向量可以被其余向量线性表示，也相当于这个向量被整个向量组线性表示（多余向量配以系数 0），所以整个向量组线性相关.

9. **(1)** 考虑向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$，将其按分量写开，得到分量方程组 $x_1a_{1i}+x_2a_{2i}+\cdots+x_ma_{mi}=0, i=1,2,...,n$，去掉其中的 $i=i_1,i_2,...,i_s$ 的 s 条方程，只考虑余下的方程组，它们正是 $x_1\alpha_1'+x_2\alpha_2'+\cdots+x_m\alpha_m'=0$ 的分量方程，从而由 $\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_m'$ 的无关性，得到其唯一解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关.

(2) 取 **(1)** 的逆否命题即可.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 1.1.

10. 考虑向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 和其非齐次方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$，将其按分量写开，容易知道题目所述的对分量的三种变换其实就对应着方程组的初等变换，待证命题 **(1)**,**(2)**,**(3)** 实际上在描述方程组经过初等变换后的解保持不变（**(1)** 表示齐次方程原来只有零解，变换后也只有零解，**(2)** 表示齐次方程原来有非零解，变换后也有非零解，**(3)** 表示非齐次方程有解，变换后也有解），故命题成立.

11. 充分性由《教程》命题 1.2 得到. 下证必要性.

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$（$\alpha_1\neq 0$）线性相关，由于 $\alpha_1\neq 0$，故它作为一个非零孤向量组总是线性无关的。

考虑 α_1,α_2 是否线性相关, 若线性相关，则由本节题目 6 的结论，α_2 可被 α_1 线性表示，命题得证. 若线性无关，则继续考虑 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性相关，类似地，若其线性相关则 α_3 可以被 α_1,α_2 线性表示，命题得证. 若其线性无关，则继续考虑 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是否线性相关，不断重复此过程，直到找到一组线性相关部分组。因为整个向量组是线性相关的，所以包括整个向量组在内，总能找到一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i$ 是线性相关的，并且 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1}$ 是线性无关的，这就相当于题目所述的论断.

12. 利用筛选法（《教程》命题 1.6）即可.

(1) 显然 α_2 不能被 α_1 线性表示，但 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，故按筛选法，去掉 α_3，极大线性无关部分组是 α_1,α_2，秩为 2.

(2) 显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 各自都不可以被其前面向量线性表示，但 $\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_3$，$\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$，故按筛选法，去掉 α_4,α_5. 极大线性无关部分组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，秩为 3.

(3) 显然 $\alpha_2=2\alpha_1$，去掉 α_2，保留 α_3，又 $\alpha_4=-\alpha_3$，故去掉 α_4，极大线性无关部分组是 α_1,α_3，秩为 2.

13. 如果 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是极大线性无关部分组，则 (1) 当然成立. 对于向量组 $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$，向量 α_i 可被其余向量线性表示，由《教程》命题 1.2，该向量组线性相关. 反过来，如果 (1) 和 (2) 成立，由本节题目 6 的结论可知 α_i 可被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性表示，由 α_i 的任意性，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是极大线性无关部分组.

批注. 在涉及向量组的极大线性无关部分组和秩相关内容的讨论中，一般都不会去特意考虑全零向量组的极端情况，全零向量组的秩 $r = 0$，没有极大线性无关部分组（或者说它的极大线性无关部分组是空向量组），但即便发生了这种情况，各个结论也是不变的. 以下均假定讨论的向量组至少含有一个非零向量，此时筛选法（《教程》命题 1.6）保证了极大线性无关部分组总是存在的.

14. 设原向量组的一个线性无关的部分组为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$，并向其加入原向量组中的任一向量 α_i，得到向量组 $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$, 这其中的每个向量总是可以被原向量组的一个极大线性无关部分组线性表示，也即用 r 个向量线性表示出了 $r+1$ 个向量，由《教程》命题 1.4，向量组 $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 线性相关. 再由本节的题目 13 的结论可以推知，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是一个极大线性无关部分组.

15. 显然，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 与原向量组线性等价（因为可以互相表示），由《教程》命题 1.5 的推论 2，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 的秩与原向量组的秩相等，都为 r. 因此取 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 的一个极大线性无关部分组，记为 (I)，则 (I) 总是有 r 个向量，且两两不能相同（否则线性相关），故 (I) 只能为向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 本身，并且 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$（作为自身的一个极大无关部分组而言）是线性无关的. 再由本节的题目 14 的结论可推知，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 也是原向量组的一个极大线性无关部分组.

16. 设向量组 (I)，(II) 各自的一个极大线性无关部分组分别为 (I′)，(II′). 显然 (II′) 能线性表示 (I′)（《教程》命题 1.3），则此时 (I′) 向量的个数必然小于或等于 (II′) 的向量个数，否则，由《教程》命题 1.4，(I′) 必然线性相关，与 (I′) 是一个极大线性无关部分组矛盾. 从而 (I) 的秩小于或等于 (II) 的秩.

批注. 本题其实是《教程》命题 4.3.

17. 显然 n 维坐标向量也总是可以线性表示 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$,因此 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 和 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 线性等价，从而等秩（《教程》命题 1.5 推论 2），秩都为 n. 那么取 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 的一个极大线性无关部分组，要取 n 个向量，只能是它本身，故 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关.

18. 充分性：如果任意一个 n 维向量都能被 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表示，则它们必能线性表示 n 维坐标向量，由本节题目 17 的结论，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关.

必要性：设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关，任取一个 K^n 内的向量 α_{n+1}，考虑如下向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_{n+1},\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n.$$

记这个向量组为 (I)，其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 是 n 维坐标向量. 因为 K^n 中的向量总可以被 n 维坐标向量线性表示，从而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 就是 (I) 的一个极大线性无关部分组. 进而 (I) 的秩为 n. 又因为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关，由本节题目 14 的结论，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 (I) 的一组极大线性无关部分组，从而 α_{n+1} 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表示. 由 α_{n+1} 的任意性知本题条件必要性成立.

19. 将这个向量组的向量重新排列顺序，把待扩充的线性无关部分组排整个向量组的最前面. 此时这个向量组的第一个向量必定非零. 对整个向量组作筛选法（《教程》命题 1.6），就可以将这个线性无关部分组扩充成一个极大线性无关部分组.

20. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 的一个极大线性无关部分组为 (I)，则由题目条件 (I) 的向量个数就等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,\alpha_{r+1},...,\alpha_s$ 的秩，又因为 (I) 线性无关，所以由本节题目 14 的结论，(I) 构成 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,\alpha_{r+1},...,\alpha_s$ 的一个极大线性无关部分组. 故 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,\alpha_{r+1},...,\alpha_s$ 同时和 (I) 线性等价，从而它们也线性等价.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 1.5.

21. 只需用 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 线性表示 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$. 因为

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r=(r-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r),$$

故对任意的 $1 \leqslant i \leqslant r$，都有

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r - \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ k \neq i}} \alpha_k \\ &= \frac{1}{r-1}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) - \beta_i.\end{aligned}$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 可被线性表示.

22. 利用筛选法（《教程》命题 1.6）. 首先 $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$（否则 α_1, α_2 线性相关），进而以它为起点. 对 $\alpha_2 - \alpha_3$，它不能被 $\alpha_1 - \alpha_2$ 线性表示，这是因为如果存在 k 使得，$\alpha_2 - \alpha_3 = k(\alpha_1 - \alpha_2)$，则 $k\alpha_1 - (k+1)\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性无关性矛盾，所以保留. 对 $\alpha_3 - \alpha_1$，我们有

$$\alpha_3 - \alpha_1 = -(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3),$$

所以舍弃. 故一个极大线性无关部分组为 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$.

23. 由本节题目 21 结论可知，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 和向量组 $\alpha - \alpha_1, \alpha - \alpha_2, ..., \alpha - \alpha_n$ 等秩. 故只需找到后者的 r 个线性无关的向量. 下证 $\alpha - \alpha_{i_1}, \alpha - \alpha_{i_2}, ..., \alpha - \alpha_{i_r}$ 即为所求，设

$$s_1(\alpha - \alpha_{i_1}) + s_2(\alpha - \alpha_{i_2}) + \cdots + s_r(\alpha - \alpha_{i_r}) = 0,$$

即

$$(s_1 + s_2 + \cdots + s_r)\alpha - s_1\alpha_{i_1} - s_2\alpha_{i_2} - \cdots - s_r\alpha_{i_r} = 0.$$

代入 $\alpha = k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_r\alpha_{i_r}$，并记 $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_r$ 得到

$$(sk_1 - s_1)\alpha_{i_1} + (sk_2 - s_2)\alpha_{i_2} + \cdots + (sk_r - s_r)\alpha_{i_r} = 0.$$

由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 的线性无关性得到 $sk_j - s_j = 0, j = 1, 2, ..., r$，即

$$\begin{cases} sk_1 - s_1 = 0, \\ sk_2 - s_2 = 0, \\ \qquad \cdots \\ sk_r - s_r = 0. \end{cases}$$

将这 r 个方程相加，并记 $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ 得到

$$sk - s = 0,$$

又因为题设,$k \neq 1$,因此 $s = 0$, 进而由 $sk_j - s_j = 0$ 得到 $s_j = 0, j = 1, 2, ..., r$. 从而向量组 $\alpha - \alpha_{i_1}, \alpha - \alpha_{i_2}, ..., \alpha - \alpha_{i_r}$ 线性无关. 再由本节题目 14 的结论知它正是 $\alpha - \alpha_1, \alpha - \alpha_2, ..., \alpha - \alpha_n$ 的一个极大线性无关部分组.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 1.6

24. 设 $k_1, k_2, ..., k_s \in K$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0. \tag{2.1}$$

我们取 $|k_1|, |k_2|, ..., |k_s|$ 中的最大者，设为

$$|k_p| = \max\{|k_1|, |k_2|, ..., |k_s|\}, 1 \leqslant p \leqslant s.$$

以下我们来证明 $|k_p| = 0$. 用反证法，假设 $|k_p| > 0$，则将式 (2.1) 的向量和按分量展开并考虑第 p 个分量构成的式子，有

$$k_1 a_{1p} + k_2 a_{2p} + \cdots + k_p a_{pp} + \cdots + k_s a_{sp} = 0,$$

即

$$\begin{aligned} -k_p a_{pp} &= k_1 a_{1p} + k_2 a_{2p} + \cdots + k_{p-1} a_{p-1,p} + k_{p+1} a_{p+1,p} + \cdots + k_s a_{sp} \\ &= \sum_{i=1, i\neq p}^{s} k_i a_{ip}. \end{aligned}$$

一方面，对上式两边取绝对值有

$$|k_p||a_{pp}| = \left| \sum_{i=1, i\neq p}^{s} k_i a_{ip} \right| \leqslant \sum_{i=1, i\neq p}^{s} |k_i||a_{ip}|; \tag{2.2}$$

另一方面，根据假设 $|k_p| > 0$，从而由题目条件可知

$$|k_p||a_{pp}| > |k_p| \sum_{i=1, i\neq p}^{s} |a_{ip}|. \tag{2.3}$$

综合式 (2.2) 和式 (2.3) 可知，

$$\sum_{i=1, i\neq p}^{s} (|k_i| - |k_p|)\, |a_{ip}| > 0.$$

但是又因为 $|k_i| - |k_p| \leqslant 0$，$|a_{ip}| \geqslant 0$，从而这个和式的全部项都非正，这就产生了矛盾. 故 $|k_p| = 0$，又因为 $|k_p|$ 是 $|k_1|, |k_2|, ..., |k_s|$ 中的最大者，所以 $|k_1|, |k_2|, ..., |k_s|$ 全为零，即 $k_1, k_2, ..., k_s$ 全为 0，故 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 1.3. 本题所涉及的矩阵一般被称之为（严格）对角占优矩阵，主要应用在数值线性代数理论中.

25. 设 $k_1, k_2, ..., k_n \in K$ 使得

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_n\eta_n = 0.$$

将上式按分量展开，并设 $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$，有

$$k + k_i a_i = 0, i = 1, 2, ..., n. \tag{2.4}$$

我们来说明 $k = 0$，若不然，按上式则有

$$\frac{1}{a_i} = -\frac{k_i}{k}, i = 1, 2, ..., n.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{k} = -1,$$

与题目条件矛盾. 故 $k = 0$，此时式 (2.4) 变成

$$k_i a_i = 0, i = 1, 2, ..., n.$$

因为 $a_i \neq 0$，所以 $k_i = 0, i = 1, 2, ..., n$，此时向量组 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ 线性无关，其秩为 n.

批注. 本题参考《指南》第一章例 1.15.

2.2 矩阵的秩

1. **(1)** 4. **(2)** 3. **(3)** 2. **(4)** 3. **(5)** 5.

2. 按照《教程》例 2.3 的方法，以 α_i 为列向量排成一矩阵，对该矩阵作初等变换化成阶梯形即可.

(1) 极大线性无关部分组可以是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$，秩为 3.

(2) 极大线性无关部分组可以是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$，秩为 3.

3. 作初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

如果 $-1-2\lambda=0$，即 $\lambda=-1/2$，此时有

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 21/2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 21 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

有 3 个阶梯，即 $\mathrm{r}(A)=3$.

如果 $-1-2\lambda \neq 0$，有

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & m & n \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} m &= -5-\frac{(10-\lambda)(\lambda+2)}{-1-2\lambda} = -\frac{(\lambda-3)(\lambda+5)}{2\lambda+1}, \\ n &= -1-\frac{10-\lambda}{-1-2\lambda} = -\frac{3(\lambda-3)}{1+2\lambda}. \end{aligned}$$

故当 $\lambda=3$ 时，$m=n=0$，此时 $\mathrm{r}(A)=2$，其余情况 $\mathrm{r}(A)=3$.

综上，当 $\lambda=3$ 时，$\mathrm{r}(A)=2$，当 $\lambda\neq 3$ 时，$\mathrm{r}(A)=3$.

4. n 阶方阵共有 n^2 个元素，因此按题意至多有 $n-1$ 个元素不是零. 这些元素排在对角线上时（即标准形）A 的秩最大，此时 $\mathrm{r}(A)_{\max}=n-1<n$.

5. **(1)** 说明行列初等变换反身、对称、传递即可. 这是显然的.

(2)&(3) 只说明 **(3)**，对于 $m\times n$ 矩阵 A，若有 $n\leqslant m, \mathrm{r}(A)=n$，可根据高斯消元法，通过初等行变换将矩阵变成阶梯形，即

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

由于矩阵的秩的限制，这个阶梯形的每级台阶长度（即非零行中第一个非零元所在列数与下一行第一个非零元所在列数之差）只能为 1，否则阶梯数（即非零行个数）不足以达到矩阵的秩。于是该矩阵分成了上下两部分，

上面部分是一个 $n \times n$ 上三角方阵，元素 1 处在对角线位置，下面是一个 $(m-n) \times n$ 的零矩阵.

此时可单独对上面的矩阵作行变换，先用第 n 行的不同常数倍加到前 $n-1$ 行，使得前 $n-1$ 行最后一列元素为 0，即得到

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

然后继续用第 $n-1$ 行的不同常数倍加到前 $n-2$ 行，使得前 $n-2$ 行倒数第二列的元素为 0，重复此过程即可得到题目所述形式.

6. A 经过若干次初等行变换变成阶梯形矩阵 F 后，再对 F 进行初等列变换，从第一行开始依次将 F 中每行第一个非零元素（即阶梯左角元）所在的列向量的不同常数倍加到后面的各列中，总可以使得各行阶梯左角元后面所有的元素皆为 0，此时得到的矩阵每行和每列最多有 1 个非零元，之后再交换各列的位置，同时对各行乘不同常数倍将非零元化为 1，即得到了标准形.

在上述过程中，F 非零行向量的阶梯左角元总是被保留了下来，最终变成了标准形的 1，这说明阶梯数正是标准形中 1 的个数，便证明了该题目.

7. 交换 i, j 两行即化为了标准形，该矩阵的秩为 n.

8. 依次将矩阵第二行减去第一行，第三行减去第二行……第 n 行减去第 $n-1$ 行，得到一个阶梯形，前 $n-1$ 行的对角线元素为 1，第 n 行第 n 列的元素为 $1-(-1)^n$，所以当 n 为偶数时，$\mathrm{r}(A) = n-1$，当 n 为奇数时，$\mathrm{r}(A) = n$.

9. 我们把 A, B, C 的列向量组分别记为 (L_A), (L_B), (L_C)，那么：

(a) 取 (L_A) 或 (L_B) 的一个极大线性无关部分组 (I)，则按题设，(I) 也是 (L_C) 的一个线性无关部分组，由第 1 节题目 19 的结论，(I) 可扩充为 (L_C) 的一个极大线性无关部分组，所以 $\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B) \leqslant \mathrm{r}(C)$，即 $\max[\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)] \leqslant \mathrm{r}(C)$.

(b) 取 (L_C) 的一个极大线性无关部分组 (II). 那么 (II) 的向量可以分成两部分：一部分（记为 (II_1)）来自 (L_A)，是 (L_A) 的线性无关部分组；另一部分（记为 (II_2)）来自 (L_B)，是 (L_B) 的线性无关部分组. 故可将 (II_1) 和 (II_2) 分别扩充为 (L_A) 和 (L_B) 的极大线性无关部分组，所以 $\mathrm{r}(C) \leqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

10. 分别取 A 和 B 的列向量各自的一个极大线性无关部分组，合并为一个向量组 (I)，显然 (I) 可以线性表示矩阵 C 的列向量组，由第 1 节题目 16 的结论，C 的秩小于或等于 (I) 的秩，即 $\mathrm{r}(C) \leqslant \mathrm{r}(\mathrm{I})$，而向量组 (I) 的秩天然小于或等于向量组 (I) 的向量个数，即 $\mathrm{r}(\mathrm{I}) \leqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$，所以 $\mathrm{r}(C) \leqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

批注. 类似 9、10 题这样的关于矩阵的秩相关的不等式，将会在《教程》命题 4.4 到命题 4.6 出现. 对于这些不等式的求证，除了使用将矩阵本身拆分成向量组的方法外，还可以利用后面第 2.3 节的线性方程组的解的理论来说明，这取决于看待问题的角度是什么，但这些方法本质都是一样的.

11. 不难看出，对向量形式的线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0,$$

进行题述的初等行变换，这个过程正等同于，对以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 进行初等行变换变成 B，再以 B 的列向量代替上述方程中的 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$，即变换为

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = 0.$$

故它们同解，于是命题得证.

12. 我们用 C 表示将矩阵 A 任取的 s 行划去，剩下的 $(m-s)\times n$ 矩阵. 那么可以对矩阵 A 进行初等变换，把所讨论的 s 行交换到最上面，有

$$A \to \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

（这里采用了分块矩阵的记号，相当于 B 和 C 两个矩阵纵向并排放在一起构成新的矩阵）从而由本节题目 9 的结论（稍作变化）可知，$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{r}(B)+\mathrm{r}(C) \leqslant \mathrm{r}(B)+m-s$.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 1.12.

13. 如果 $\mathrm{r}(A)=0$，则 A 就是零矩阵，只需取 $a_i, b_j=0, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n$ 即可. 如果 $\mathrm{r}(A)=1$，设 A 的列向量组为 (I): $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，则 (I) 的秩为 1，可取 (I) 的一个极大线性无关部分组为某个非零向量 $\alpha_p\neq 0$. 那么必然存在 $k_1,k_2,...,k_n\in K$ 使得

$$\alpha_1=k_1\alpha_p, \alpha_2=k_2\alpha_p, ..., \alpha_n=k_n\alpha_p.$$

（特别地，$k_p=1$）此时只需取 $a_1,a_2,...,a_m$ 使得列向量 $(a_1,a_2,...,a_m)'=\alpha_p$，再取 $b_1=k_1, b_2=k_2,...,b_n=k_n$ 就能满足题意.

2.3　线性方程组的理论课题

1. 各个方程基础解系如下：

(1) $\eta_1=(1,-2,1,0,0), \eta_2=(1,-2,0,1,0), \eta_3=(5,-6,0,0,1)$.

(2) $\eta_1=(6,12,8,13,3)$.

(3) $\eta_1=(-1,-1,1,2,0), \eta_2=(7,5,-5,0,8)$.

(4) 只有零解.

(5) $\eta_1=(0,1,2,1)$.

(6) $\eta_1=(0,1,1,0,0), \eta_2=(0,1,0,1,0), \eta_3=(1,-5,0,0,3)$.

2. 与基础解系等价的向量组可线性表示出基础解系，从而可以线性表示出方程的所有解向量（《教程》命题 1.3），同时这个向量组是线性无关的，这说明它确实是一个基础解系.

3. 把这 $n-r$ 个线性无关的解向量和一个基础解系 (K)（由《教程》定理 3.1 知，(K) 的向量个数为 $n-r$）放在一起构成一个向量组 (I)，此时显然 (I) 的一个极大线性无关部分组就是其中的那个基础解系 (K)，故 (I) 的秩为 $n-r$. 由第 1 节题目 14 的结论，(I) 中那 $n-r$ 个线性无关的解向量也是一个极大线性无关部分组，从而可以线性表示出 (I) 中已有的基础解系 (K)，这说明它与基础解系等价，由本节题目 2 的结论，它确实也是一个基础解系.

4. 因为方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0. \end{cases} \tag{2.5}$$

的解必定是方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \tag{2.6}$$

的解，故当我们考虑 (2.5) 的某一解时，可以将 (2.6) 并入 (2.5) 而保持这个解仍然有效. 也就是说，方程组 (2.5) 的解必定是如下方程组的解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \\ \quad b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

设方程组 (2.5) 和 (2.7) 的系数矩阵分别为 A 和 B.

一方面，设 $\mathrm{r}(A) = r$，则取方程组 (2.5) 的一个基础解系，由《教程》定理 3.1 知，其必有 $n-r$ 个线性无关的解向量，进而这 $n-r$ 个线性无关的解向量也必定是方程组 (2.7) 的解向量，也即它们可以被方程组 (2.7) 的基础解系线性表示，这必然有 $n - \mathrm{r}(B) \geqslant n - r$，否则，方程组 (2.7) 基础解系的向量个数小于 $n-r$，却线性表示出了 $n-r$ 个线性无关的向量，这显然与《教程》第 1 节命题 1.4 相矛盾. 因此 $\mathrm{r}(B) \leqslant r = \mathrm{r}(A)$.

另一方面，矩阵 B 实际上可以看作是矩阵 A 多加了一行产生的，总是有 $\mathrm{r}(B) \geqslant \mathrm{r}(A)$（参考第 3 节题目 9，简单来说就是 B 的行向量包含了 A 的行向量，所以 A 的行向量极大线性无关部分组可以在 B 的行向量组中扩充成极大线性无关部分组）.

综合上述两个方面我们有 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$. 又因为 A' 和 B' 分别是线性方程组 $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2' + \cdots + x_n\alpha_n' = \beta'$ 的系数矩阵和增广矩阵（其中 $'$ 表示矩阵转置或向量转置），即此时有 $\mathrm{r}(A') = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(B')$，说明系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，方程组有解. 也就相当于 β 可被 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性表示.

5. 由题意以及《教程》定理 3.1，它们的基础解系的解向量个数都满足 $n - r_i > n/2, i = 1, 2$，设第一个方程组的基础解系 (K_1) 为：$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r_1}$，第二个方程组的基础解系 (K_2) 为：$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-r_2}$. 将 (K_1) 和 (K_2) 放在一起构成一个向量组 (I)：

$$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-r_1}, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-r_2}.$$

则 (I) 的向量个数必大于 n. 又因为 (I) 的向量都属于 K^n，从而能被 n 个单位坐标向量线性表示，这相当于 n 个向量线性表示出了多于 n 个的

向量，故 (I) 必然线性相关（《教程》命题 1.4）. 也即存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, ..., k_{n-r_1}, s_1, s_2, ..., s_{n-r_2}$ 使得

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r_1}\eta_{n-r_1} + s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + \cdots + s_{n-r_2}\xi_{n-r_2} = 0,$$

从而

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r_1}\eta_{n-r_1} = -s_1\xi_1 - s_2\xi_2 - \cdots - s_{n-r_2}\xi_{n-r_2},$$

方程左右两边都是各自基础解系的线性组合，从而都是各自方程组的解向量，等号说明了这个解向量是公共的.

6. 该线性方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

此时再将 2 到 $n-1$ 行的常数倍依次加到第 n 行即可得到一个秩为 n 的阶梯形矩阵，故根据《教程》定理 3.1 知该线性方程组没有非零解.

7. 将这个线性无关的解向量组和一个基础解系 (K) 合并构成一个向量组 (I)，则由第 1 节的题目 19，这个解向量组可以扩充成 (I) 的一个极大线性无关部分组，这个极大线性无关部分组可以线性表示出基础解系 (K)，显然也是一组基础解系.

8. 以下用 γ_0 表示特解，η_i 表示基础解系的解向量.

(1) $\gamma_0 = (2/3, 1/6, 0, 0, 0), \eta_1 = (0, 1, 2, 0, 0), \eta_2 = (0, -1, 0, 2, 0), \eta_3 = (2, 5, 0, 0, 6)$.

(2) $\gamma_0 = (2/3, -1/6, 1/6, 0), \eta_1 = (2, 7, 5, -6)$.

9. 如果这个方程组是齐次线性方程组，那么结论已经在《教程》正文中提及. 如果这个方程组是非齐次的，则由《教程》定理 3.3 知它的任意一个解向量都可以表示为

$$\gamma = \gamma_0 + s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + \cdots + s_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中，$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-r}$ 这个非齐次方程组的导出方程组的一个基础解系，γ_0 是这个非齐次方程组的某个预先固定的解向量，$s_1, s_2, ..., s_{n-r} \in K$. 因此

$$\begin{aligned}
k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t = {} & k_1(\gamma_0 + s_{11}\xi_1 + s_{12}\xi_2 + \cdots + s_{1,n-r}\xi_{n-r}) \\
& + k_2(\gamma_0 + s_{21}\xi_1 + s_{22}\xi_2 + \cdots + s_{2,n-r}\xi_{n-r}) \\
& + \cdots \\
& + k_t(\gamma_0 + s_{t1}\xi_1 + s_{t2}\xi_2 + \cdots + s_{t,n-r}\xi_{n-r}) \\
= {} & (k_1 + k_2 + \cdots + k_t)\gamma_0 \\
& + k_1(s_{11}\xi_1 + s_{12}\xi_2 + \cdots + s_{1,n-r}\xi_{n-r}) \\
& + k_2(s_{21}\xi_1 + s_{22}\xi_2 + \cdots + s_{2,n-r}\xi_{n-r}) \\
& + \cdots \\
& + k_t(s_{t1}\xi_1 + s_{t2}\xi_2 + \cdots + s_{t,n-r}\xi_{n-r}).
\end{aligned}$$

上式中第一项 γ_0 的系数 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1$，而余下的项的和仍然是 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-r}$ 的线性组合，因此 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$ 依然是一个解.

10. 将这 n 个平面的方程联立成方程组 (C). 则

当 (C) 有唯一解的时候，这 n 个平面通过同一点，此时由《教程》定理 3.3 知系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，且秩等于 3，基础解系包含零个向量.

当 (C) 的解可以表示为一个特解加一个解向量的任意常数倍时，这 n 个平面通过同一条直线，此时系数矩阵等于增广矩阵的秩，且秩等于 2，基础解系包含一个向量.

11. 根据第 2 节题目 9 的结论，矩阵 B 的秩满足

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix} & \geqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \\
& \geqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

即 $\mathrm{r}(B) \geqslant \mathrm{r}(\bar{A}) \geqslant \mathrm{r}(A)$，其中 $\bar{A}$ 是线性方程组的增广矩阵. 又因为 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$，所以 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(\bar{A}) = \mathrm{r}(A)$，故由《教程》定理 3.3 知方程组有解.

12. 对增广矩阵作行初等变换，有

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a & b & b_1 \\ a & a & \cdots & b & a & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a & b_{n-1} \\ b & a & \cdots & a & a & b_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a & b & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & b-a & a-b & b_2-b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & a-b & b_{n-1}-b_1 \\ b-a & 0 & \cdots & 0 & a-b & b_n-b_1 \end{pmatrix},$$

当 $b-a=0$，即 $a=b$ 时，只有满足 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 原方程组才有可能有解，此时原方程组等价于

$$a(x_1+x_2+\cdots+x_n)=b_1.$$

对于这个方程，当 $a \neq 0$ 或 $a=b_1=0$ 时，它有无穷多组解，当 $a=0$ 但 $b_1 \neq 0$ 时，无解.

当 $b-a \neq 0$，即 $a \neq b$ 时，继续对矩阵作初等行变换有

$$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b+(n-1)a & b_1 - a\sum_{i=2}^{n}(b_i-b_1)/(b-a) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & (b_2-b_1)/(b-a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & (b_{n-1}-b_1)/(b-a) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & (b_n-b_1)/(b-a) \end{pmatrix}.$$

此时若 $b+(n-1)a \neq 0$，即 $b \neq -(n-1)a$，则方程组系数矩阵和增广矩阵的秩都为 n，此时由《教程》定理 3.3 知方程组有唯一解. 若 $b=-(n-1)a$，则

$$b_1 - a\sum_{i=2}^{n}\frac{(b_i-b_1)}{b-a} = b_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{(b_i-b_1)}{n} = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

当 $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$ 时，系数矩阵和增广矩阵的秩都为 $n-1$，方程组有无穷多组解，否则无解.

综上，当 $a=b=b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，方程组有无穷多组解；

当 $a=b\neq 0$ 且 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时，方程组有无穷多组解；

当 $a \neq b$ 且 $-(n-1)a=b$ 且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$ 时，方程组有无穷多组解；

当 $a \neq b$ 且 $-(n-1)a \neq b$ 时，方程组有唯一一组解；

其余情况均无解.

13. 设 γ 是线性方程组的任一解，则由《教程》定理 3.3，有

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s \\ &= \gamma_0 + k_1(\gamma_1 - \gamma_0) + k_2(\gamma_2 - \gamma_0) + \cdots + k_s(\gamma_s - \gamma_0) \\ &= (1 - k_1 - k_2 - \cdots - k_s)\gamma_0 + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_s\gamma_s.\end{aligned}$$

故只需令 $k_0 = 1 - k_1 - k_2 - \cdots - k_s$，就有

$$\gamma = k_0\gamma_0 + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_s\gamma_s.$$

并且满足 $k_0 + k_1 + \cdots + k_s = 1.$

14. 根据《教程》定理 3.3，该非齐次线性方程组有解，设一个特解为 γ_0（显然 $\gamma_0 \neq 0$），再取导出方程组的基础解系为 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$（这里 $s = n - r$，且只考虑 $s > 0$，$s = 0$ 的情况是显然的），然后根据本节题目 13 的方法构造出 $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$，即令

$$\gamma_i = \gamma_0 + \eta_i, i = 1, 2, ..., s.$$

此时 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ 都是该非齐次方程组的解向量，根据题目 13 的结论，方程组的任意解都可以被 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ 线性表示，那么只需证它们线性无关，设

$$k_0\gamma_0 + k_1\gamma_1 + \cdots + k_s\gamma_s = 0,$$

则有

$$(k_0 + k_1 + \cdots + k_s)\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s = 0.$$

记 $t_0 = k_0 + k_1 + \cdots + k_s$，如果 $t_0 \neq 0$，则

$$\gamma_0 = \frac{1}{t_0}(-k_1\eta_1 - k_2\eta_2 - \cdots - k_s\eta_s),$$

即 γ_0 被表示为导出方程组的基础解系的线性组合，从而是导出方程组的解，与其是非齐次方程组的特解矛盾，因此 $t_0 = 0$. 那么有

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s = 0.$$

再由 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$ 的线性无关性得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$，并代入 $t_0 = k_0 + k_1 + \cdots + k_s = 0$ 得 $k_0 = 0$. 从而 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ 线性无关.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 2.6.

15. **(1)** 平面上任意一条直线方程都可以设为 $k_1x+k_2y+k_3=0$，其中 k_1,k_2,k_3 不全为 0. 显然 A,B,C 三点不共线的充分必要条件是关于 k_1,k_2,k_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_1k_1+a_2k_2+k_3=0,\\ b_1k_1+b_2k_2+k_3=0,\\ c_1k_1+c_2k_2+k_3=0. \end{cases}$$

不存在非零解，根据《教程》定理 3.1，这等价于其系数矩阵 A 的秩等于 n，也即

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}=n=3.$$

(2) 我们设该外接圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

代入 A,B,C 三点的坐标可以得到

$$\begin{cases} a_1D+a_2E+F=-a_1^2-a_2^2\\ b_1D+b_2E+F=-b_1^2-b_2^2\\ c_1D+a_2E+F=-c_1^2-c_2^2 \end{cases}$$

上式是关于 D,E,F 的非齐次线性方程组，由 **(1)** 知当 A,B,C 不共线时其系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=3$. 而其增广矩阵的秩不小于系数矩阵的秩，故 $\mathrm{r}(\bar{A})=\mathrm{r}(A)=3$. 根据《教程》定理 3.3 知该方程有唯一解 $D=D_1,E=E_1,F=F_1$. 因为该方程的系数都是有理数，我们把它看成有理数域上的方程组，它的解也为有理数. 易知圆心为 $(-D_1/2,-F_1/2)$，故其坐标为有理数.

16. 设题述方程组的系数矩阵为 A. 先来澄清一下题目条件，对于实系数的齐次线性方程组而言，若其存在复数非零解，可将解向量拆分成实部向量和虚部（系数）向量，容易验证这两个向量至少有一个是原方程组在实数域上的非零解，并由《教程》定理 3.1 知 $\mathrm{r}(A)<n$. [1]

基于上一段论述，可设题述方程组的一组非零实数解为 $x_1=k_1,x_2=k_2,...,x_n=k_n$. 设 $a_{ii}=\lambda,i=1,2,...,n$，一方面，由于 $k_1,k_2,...,k_n$ 是方程

[1]另一种理解方式是把实数矩阵 A 看成在复数域上的矩阵，方程组看作是复数域上的方程组，由《教程》定理 3.1 直接得出在复数域上 $\mathrm{r}(A)<n$，从而在实数域上也有 $\mathrm{r}(A)<n$. 这是因为对任何在数域 K 上的矩阵 A，将其所在域扩大并不会改变它本身的秩 $\mathrm{r}(A)$. 当然，如果将其所在域缩小后该矩阵还存在的话，其秩也是不变的，因为原来的域可看作缩小的域扩大得到的. 关于这一点请参考 [3]

组的解，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_ik_j=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_j\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i\cdot 0=0.$$

另一方面，由于 $a_{ij}=-a_{ji}$，直接计算可知

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_ik_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}k_{ii}^2=\lambda(k_{11}^2+k_{22}^2+\cdots+k_{nn}^2).$$

从而

$$\lambda(k_{11}^2+k_{22}^2+\cdots+k_{nn}^2)=0.$$

又因 $k_1,k_2,...,k_n$ 是实数且不全为零，$k_{11}^2+k_{22}^2+\cdots+k_{nn}^2>0$，所以 $\lambda=0$.

批注. （此段内容需要矩阵乘法的概念）对于方程 $PX=0$，如果 P 是实矩阵，一般认定该方程是定义在实数域上的方程（此时它的解被限制在实向量中，请参考《教程》页 33，关于方程组及其解的定义，并且是按照线性方程组的解理论判断其存在性的）. 但这种观念并不是天然奏效的，如果说确实需要将 $PX=0$ 看作是复数域上的方程，即便 P 是实矩阵，其解也有可能包括了非实数解向量. 考虑 U,V 是 $PX=0$ 的两个实非零解向量，则很容易验证 $U+\mathrm{i}V$ 是 $PX=0$ 的非实解向量. 如果 P 是非实矩阵，$PX=0$ 的解有可能非实，也有可能为实，例如

$$\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&0\end{pmatrix}X=0$$

的解就可以是 $X=(0,1)'$. 实际上，它的通解是 $X=k(0,1)',k\in\mathbb{C}$. 但有一些方程需要注意，如 $(\lambda E-A)X=0$，其中 λ 是非实数，而 A 是实矩阵，则其非零解向量必然是非实解向量. 这些观念在后面章节都会得到强化.

2.4 矩阵的运算

1. **(1)** $\begin{pmatrix}31/2&-10&-9/2\\9&-1&3\\-11/2&11/2&21/2\\-2&3&-2\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}3\\2\\5\\-2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\1-\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\2+2\mathrm{i}\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}8&-6&0\\1&-4&-2\\1&3&6\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-3&1&0&0&0\\-4&1&0&0&0\\0&0&4&3&5\\0&0&-2&2&0\\0&0&2&-1&1\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} & \lambda_1 a_{14} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} & \lambda_2 a_{24} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} & \lambda_3 a_{34} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_3 a_{13} & \lambda_4 a_{14} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{23} & \lambda_4 a_{24} \\ \lambda_1 a_{31} & \lambda_2 a_{32} & \lambda_3 a_{33} & \lambda_4 a_{34} \end{pmatrix}$.

2. (1) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;

$(AB)' = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A'B' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $AB = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$;

$AB-BA = \begin{pmatrix} b-ac & a^2-ab+b^2-b+c^2-c & -a^2+2ca+b^2-2c \\ c-bc & 2ac-2b & a^2-ab+b^2-b+c^2-c \\ -c^2-2a+3 & c-bc & b-ac \end{pmatrix}$;

$(AB)' = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c & 3 \\ a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac & a+b+c \\ b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 & a+b+c \end{pmatrix}$;

$A'B' = \begin{pmatrix} a+c+ac & a+b+bc & c^2+2a \\ b+c+ab & b^2+2b & a+b+bc \\ a^2+2c & b+c+ab & a+c+ac \end{pmatrix}$.

3. (1) 0. **(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $a_{11}x^2 + (a_{12}+a_{21})xy + a_{22}y^2 + (a_{13}+a_{31})x + (a_{23}+a_{32})y + a_{33}$.

(4) 这其实是双线性函数的解析表达式（《教程》第五章）. 不难得到原式为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j.$$

4. 按矩阵计算规则，有

$$AJ = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}, JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

要使 $AJ = JA$，对比矩阵元素可以知道，此时 A 有如下形式（空白处元素为 0）.

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & & & & \\ k_2 & k_1 & & & \\ k_3 & k_2 & k_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ k_n & \cdots & k_3 & k_2 & k_1 \end{pmatrix}.$$

如果对下标比对感到混乱，可以取 3 阶的 A 或 4 阶的 A，可立即辨别清楚.

5. **(1)** 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}), (A + B)C = (t_{ij}), AC + BC = (l_{ij})$，则对任意的 p, q，根据矩阵乘法的定义

$$t_{pq} = \sum_{i=1}^{n}(a_{pi} + b_{pi})c_{iq} = \sum_{i=1}^{n} a_{pi}c_{iq} + \sum_{i=1}^{n} b_{pi}c_{iq} = l_{pq}.$$

(2) 设 $AC = (r_{ij}), A = (a_{ij}), C = (c_{ij})$，则对任意的 p, q，有

$$kr_{pq} = k\sum_{i=1}^{n} a_{pi}c_{iq} = \sum_{i=1}^{n}(ka_{pi})c_{iq} = \sum_{i=1}^{n} a_{pi}(kc_{iq}).$$

6. 根据矩阵乘法的规则，有

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & a_{n-k+1,n} \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

（其中空白处的元素为 0）

批注. 可参考《指南》第一章例 3.1.

7. 由《教程》命题 4.6 的不等式立得.

8. 由题意得到 $AB-AC=0$，由分配律，有 $A(B-C)=0$. 两边取矩阵的秩，因为 $\mathrm{r}(A)=n$，由《教程》命题 4.6 的不等式得到

$$0=\mathrm{r}(A(B-C))\geqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B-C)-n=\mathrm{r}(B-C)\geqslant 0,$$

从而 $\mathrm{r}(B-C)=0$，当且仅当 $B-C$ 为零矩阵时成立，故 $B=C$.

9. 如果 $AB=0, B\neq 0$，则由《教程》命题 4.6 的不等式得到

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leqslant 3,$$

因此必有 $\mathrm{r}(A)\neq 3$，否则 $\mathrm{r}(B)=0$，与 $B\neq 0$ 矛盾. 对矩阵 A 作初等变换有

$$A\to\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&1&1\\k&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&7\\0&0&-1+3k\end{pmatrix},$$

故 $-1+3k=0$，$k=1/3$. 下面求 B，考虑线性方程组 $AX=0$，解得 $X=k\begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}$. 任取 3 个不全为 0 的解向量排成一个矩阵即可得到 B，例如：

$$B=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&-7\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由矩阵乘法的规则可知 B 满足题意.

10. 考虑线性方程组 $(A+B)X=0$，由《教程》命题 4.4 知 $\mathrm{r}(A+B)\leqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)<n$，故该方程必有非零解向量. 设其中一个非零解向量为 X_1（列向量），要使 $(A+B)C=0$ 则由矩阵乘法的规则可知只需令

$$C=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&X_1\end{pmatrix}.$$

其中的 0 代表 K^n 的零列向量.

11. 考虑线性方程组 $AX=0$，则非零矩阵 C 的列向量都是它的解，且其中必有一个非零，从而有 $\mathrm{r}(A)<n$. 再由《教程》命题 4.5 可知，$\mathrm{r}(AB)\leqslant \mathrm{r}(A)<n$，从而线性方程组 $ABX=0$ 必有非零解 X_1（列向量），要使 $ABD=0$ 则只需令

$$D=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & X_1\end{pmatrix}.$$

其中的 0 代表 K^n 的零列向量.

12. 我们依次讨论四个线性方程组，并逐步扩充其基础解系. 首先考虑方程组 $CX=0$，容易知道其等价于 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同时成立，根据线性方程组解的理论，取 $CX=0$ 的一个基础解系为

$$\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-\mathrm{r}(C)}.\quad \text{记为 } (\mathrm{K}_1).$$

这个基础解系 (K_1) 也是 $AX=0$ 的解，且线性无关，所以由第 3 节题目 7 的结论，可将该基础解系扩充为 $AX=0$ 的一个基础解系（扩充后共有 $n-\mathrm{r}(A)$ 个解向量），有

$$\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-\mathrm{r}(C)},\gamma_1,\gamma_2,....,\gamma_{\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(A)}.\quad \text{记为 } (\mathrm{K}_2).$$

类似的 (K_1) 也是 $BX=0$ 的解，同样将 (K_1) 扩充为 $BX=0$ 的一个基础解系（扩充后共有 $n-\mathrm{r}(B)$ 个解向量），有

$$\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-\mathrm{r}(C)},\zeta_1,\zeta_2,....,\zeta_{\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(B)}.\quad \text{记为 } (\mathrm{K}_3).$$

再将 (K_2) 和 (K_3) 两个向量组合并，得到如下的向量组

$$\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-\mathrm{r}(C)},\gamma_1,\gamma_2,....,\gamma_{\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(A)},\zeta_1,\zeta_2,....,\zeta_{\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(B)}.\quad \text{记为 } (\mathrm{K}_4).$$

显然 (K_4) 中的向量要么满足 $AX=0$，要么满足 $BX=0$，这说明它们都是线性方程组 $ABX=BAX=0$ 的解向量，如果我们能证明 (K_4) 是线性无关的，我们就能断定 (K_4) 的向量个数必然小于 $ABX=BAX=0$ 的基础解系向量个数，从而得到与秩相关的不等式. 故设

$$\begin{aligned}&k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_u\eta_u\\&+s_1\gamma_1+s_2\gamma_2+\cdots+s_v\gamma_v\\&+t_1\zeta_1+t_2\zeta_2+\cdots+t_w\zeta_w=0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中 $u=n-\mathrm{r}(C),v=\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(A),w=\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(B)$. 则有

$$\begin{aligned}t_1\zeta_1+t_2\zeta_2+\cdots+t_w\zeta_w=&-k_1\eta_1-k_2\eta_2-\cdots-k_u\eta_u\\&-s_1\gamma_1-s_2\gamma_2-\cdots-s_v\gamma_v.\end{aligned}$$

这说明向量 $t_1\zeta_1+t_2\zeta_2+\cdots+t_w\zeta_w$ 可以表示为向量组 (K_2) 的线性组合，从而是 $AX=0$ 的解，但它本身是 $\zeta_1,\zeta_2,....,\zeta_w$ 的线性组合，从而也是 $BX=0$ 的解. 也即 $t_1\zeta_1+t_2\zeta_2+\cdots+t_w\zeta_w$ 同时是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解，故它也满足 $CX=0$，即可以被 (K_1) 线性表示，从而

$$t_1\zeta_1+t_2\zeta_2+\cdots+t_w\zeta_w=k_1'\eta_1+k_2'\eta_2+\cdots+k_u'\eta_u,$$

也即

$$t_1\zeta_1+t_2\zeta_2+\cdots+t_w\zeta_w-k_1'\eta_1-k_2'\eta_2-\cdots-k_u'\eta_u=0.$$

但由 (K_3) 线性无关性，有

$$t_1=t_2=\cdots=t_w=k_1'=k_2'=\cdots=k_u'=0.$$

代入式 (2.8)，由 (K_2) 的线性无关性知

$$k_1=k_2=\cdots=k_u=s_1=s_2=\cdots=s_v=0.$$

从而 (K_4) 确实线性无关. 那么根据 (K_4) 的向量个数小于 $ABX=BAX=0$ 的基础解系向量个数得出

$$u+v+w=n-\mathrm{r}(C)+\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(C)-\mathrm{r}(B)\leqslant n-\mathrm{r}(AB).$$

整理得

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\geqslant \mathrm{r}(C)+\mathrm{r}(AB).$$

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.2.

13. 由线性无关性显然有 $s\leqslant n$. 我们设由向量 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_s$ 并排而成的矩阵 A 如下（此处默认 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_s$ 为列向量）：

$$A=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_s\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\eta_1'\\ \eta_2'\\ \vdots\\ \eta_s'\end{pmatrix},$$

其中 $'$ 表示对矩阵或向量转置. 现在考虑如下的线性方程组

$$AX=0.$$

它的系数矩阵 A 的大小为 $s\times n$ 且其行向量组线性无关，从而 $\mathrm{r}(A)=s$，此时这个线性方程组必然有 $n-s$ 个线性无关的解向量（列向量），设这些解

向量为 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-s}$. 记矩阵 $B = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-s} \end{pmatrix}$，那么 B 的大小为 $n \times (n-s)$，且 $\mathrm{r}(B) = n - s$. 此时由矩阵乘法规则有

$$AB = 0,$$

两边取转置得到

$$B'A' = 0. \tag{2.9}$$

其中 $A' = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_s \end{pmatrix}$. 考虑线性方程组 $B'X = 0$，则其系数矩阵 $\mathrm{r}(B') = \mathrm{r}(B) = n - s$，且由式 (2.9) 知该方程组有 s 个线性无关的解向量 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$，从而由第 3 节题目 3 的结论知，$\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$ 必定是该方程组的一个基础解系. 因此 $B'X = 0$ 就是题目要寻找的方程组.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.3.

14. 首先我们来证明向量组 $\gamma_1 - \gamma_0, \gamma_2 - \gamma_0, ..., \gamma_s - \gamma_0$ 线性无关. 设

$$k_1(\gamma_1 - \gamma_0) + k_2(\gamma_2 - \gamma_0) + \cdots + k_s(\gamma_s - \gamma_0) = 0,$$

即

$$-(k_1 + k_2 + \cdots + k_s)\gamma_0 + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_s\gamma_s = 0.$$

由 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ 线性无关得到

$$-(k_1 + k_2 + \cdots + k_s) = k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0.$$

从而 $\gamma_1 - \gamma_0, \gamma_2 - \gamma_0, ..., \gamma_s - \gamma_0$ 线性无关.

由本节题目 13 的结论可知，存在 K 上的一个齐次线性方程组 $PX = 0$ 使得 $\gamma_1 - \gamma_0, \gamma_2 - \gamma_0, ..., \gamma_s - \gamma_0$ 为该方程组的一个基础解系. 现考虑非齐次线性方程组 $PX = P\gamma_0$，则显然 $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_s$ 都是 $PX = P\gamma_0$ 的解向量. 并且由非齐次线性方程组的解的理论知，该方程组的任意一个解 γ 都可以表示为

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + t_1(\gamma_1 - \gamma_0) + t_2(\gamma_2 - \gamma_0) + \cdots + t_s(\gamma_s - \gamma_0) \\ &= (1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_s)\gamma_0 + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 + \cdots + t_s\gamma_s. \end{aligned}$$

其中 $t_1, t_2, ..., t_s \in K$，从而 γ 都可以被 $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_s$ 线性表示.

15. 我们来证 $B\eta_{k+1},...,B\eta_l$ 线性无关. 设

$$t_{k+1}B\eta_{k+1}+t_{k+2}B\eta_{k+2}+\cdots+t_lB\eta_l=0,$$

也即

$$B(t_{k+1}\eta_{k+1}+t_{k+2}\eta_{k+2}+\cdots+t_l\eta_l)=0.$$

说明 $t_{k+1}\eta_{k+1}+t_{k+2}\eta_{k+2}+\cdots+t_l\eta_l$ 是方程 $BX=0$ 的一个解，因为 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_k$ 是 $BX=0$ 的一个基础解系，我们有

$$t_{k+1}\eta_{k+1}+t_{k+2}\eta_{k+2}+\cdots+t_l\eta_l=t_1\eta_1+t_2\eta_2+\cdots+t_k\eta_k,$$

也即

$$t_1\eta_1+t_2\eta_2+\cdots+t_k\eta_k-t_{k+1}\eta_{k+1}-t_{k+2}\eta_{k+2}-\cdots-t_l\eta_l=0.$$

因为 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_k,\eta_{k+1},...,\eta_l$ 是 $ABX=0$ 的基础解系，由线性无关性得

$$t_1=t_2=\cdots=t_l=0.$$

从而 $B\eta_{k+1},...,B\eta_l$ 线性无关. 由线性方程组解的理论，$B\eta_{k+1},...,B\eta_l$ 的秩为 $l-k=s-\mathrm{r}(AB)-(s-\mathrm{r}(B))=\mathrm{r}(B)-\mathrm{r}(AB)$.

注意到 $B\eta_{k+1},...,B\eta_l$ 都是方程 $AX=0$ 的解，从而这个向量组的秩不超过基础解系的秩，有

$$\mathrm{r}(B)-\mathrm{r}(AB)\leqslant n-\mathrm{r}(A),$$

也即

$$\mathrm{r}(AB)\geqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n.$$

这就证明了命题 4.6.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.4.

16. 我们来证明 $\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},...,\gamma_{i_r}$ 就是一个极大线性无关部分组. 首先说明线性无关，由题意 $\gamma_i=A\beta_i,i=1,2,...,s$，则设

$$k_1\gamma_{i_1}+k_2\gamma_{i_2}+\cdots+k_r\gamma_{i_r}=k_1A\beta_{i_1}+k_2A\beta_{i_2}+\cdots+k_rA\beta_{i_r}=0,$$

也即

$$A(k_1\beta_{i_1}+k_2\beta_{i_2}+\cdots+k_r\beta_{i_r})=0.$$

从而 $k_1\beta_{i_1}+k_2\beta_{i_2}+\cdots+k_r\beta_{i_r}$ 是线性方程组 $AX=0$ 的一个解，又因为 $\mathrm{r}(A)=n$，由线性方程组解的理论可知该方程组只有零解，所以

$$k_1\beta_{i_1}+k_2\beta_{i_2}+\cdots+k_r\beta_{i_r}=0.$$

由 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},...,\beta_{i_r}$ 的线性无关性知

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0.$$

从而 $\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},...,\gamma_{i_r}$ 线性无关.

然后我们来说明 C 的秩为 r. 由《教程》命题 4.6 知

$$\mathrm{r}(C)=\mathrm{r}(AB)\geqslant\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n=r,$$

又由《教程》命题 4.5 知

$$\mathrm{r}(C)=\mathrm{r}(AB)\leqslant\mathrm{r}(B)=r,$$

从而 $\mathrm{r}(C)=r$，即 C 的列向量组的秩为 r. 因此 $\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},...,\gamma_{i_r}$ 是 C 列向量的一个极大线性无关部分组.

2.5 n 阶方阵

1. **(1)** $\begin{pmatrix}7&4&4\\9&4&3\\3&3&4\end{pmatrix}$. **(2)** $\begin{pmatrix}3&-2\\4&8\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 实际上是一个初等矩阵，按照初等矩阵的运算法则，任何矩阵 A 左乘这个矩阵，相当于把 A 的第二行加到第一行. 即

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}.$$

(4) 先观察 $n=2$ 的情况，有

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\cos^2\varphi-\sin^2\varphi&-2\sin\varphi\cos\varphi\\2\sin\varphi\cos\varphi&\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2\varphi&-\sin2\varphi\\\sin2\varphi&\cos2\varphi\end{pmatrix}.$$

猜测对任意正整数 n 有

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{pmatrix}.$$

用数学归纳法，$n=1$ 时命题已经成立，假设命题对 $n=k-1$ 成立，则 $n=k$ 时有

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^k\\
=&\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{k-1}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\cos(k-1)\varphi & -\sin(k-1)\varphi\\ \sin(k-1)\varphi & \cos(k-1)\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\cos(k-1)\varphi\cos\varphi-\sin(k-1)\varphi\sin\varphi & -\cos(k-1)\varphi\sin\varphi-\sin(k-1)\varphi\cos\varphi\\ \sin(k-1)\varphi\cos\varphi+\cos(k-1)\varphi\sin\varphi & -\sin(k-1)\varphi\sin\varphi+\cos(k-1)\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

说明命题对 $n=k$ 也成立，由数学归纳法知，命题对任意正整数 n 都成立.

(5) 把该题的矩阵记作 A，则 $n=2$ 时正好是

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4\end{pmatrix}.$$

即 $A^2=4E$，故当 $n=2k$ 时，$A^n=A^{2k}=(A^2)^k=4^kE$，当 $n=2k+1$ 时，$A^n=4^kA$.

(6) 看成是 $(J+\lambda E)^n$，其中 $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 按牛顿二项式展开有

$$\begin{aligned}(J+\lambda E)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}J^k\\
&=\lambda^nE+\binom{n}{1}\lambda^{n-1}J+\binom{n}{2}\lambda^{n-2}J^2+\binom{n}{3}\lambda^{n-3}J^3+\cdots\end{aligned}$$

注意到当 $i\geqslant 3$ 时，$J^i=J^3J^{i-3}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^3J^{i-3}=0$，故上式的 J 的高次项都为 0，保留前三项，有

$$(J+\lambda E)^n=\lambda^nE+\binom{n}{1}\lambda^{n-1}J+\binom{n}{2}\lambda^{n-2}J^2=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}.$$

批注. 本题 **(6)** 可参考《指南》第一章例 3.8.

2. 事实上用 J 左乘一个矩阵 A，等效于将这个矩阵 A 向上“推”了一行. 准确地说，矩阵 JA 的前 $n-1$ 行依次等于矩阵 A 的后 $n-1$ 行，而第 n 行元素全都变为 0. 即

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

这可以根据矩阵乘法的规则直接得出，从而题目的结论是显然的.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.7.

3. 按照定义计算即可，$f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. 在这里我们直接考虑 $J_{n\times n}$ 的情况（$J_{n\times n}$ 表示本节题目 2 所述的矩阵 J），这实际上和第 4 节题目 4 是完全类似的，可以按照相同的方法写出答案. 也可以按照如下方法：将矩阵 $J_{n\times n}$ 转置得到

$$J'_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

由第 4 节题目 4 的结论，可以知道，如下的可交换条件

$$J'_{n\times n}A = AJ'_{n\times n}$$

成立当且仅当 A 是如下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & & & & \\ k_2 & k_1 & & & \\ k_3 & k_2 & k_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ k_n & \cdots & k_3 & k_2 & k_1 \end{pmatrix}.$$

而通过两边取转置可知式 (2.10) 又等价于 $A'J_{n\times n}=J_{n\times n}A'$，从而说明与 $J_{n\times n}$ 可交换的矩阵 B 实际上是 A'，也即 B 有如下形式

$$B=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ & k_1 & k_2 & \ddots & \vdots \\ & & k_1 & \ddots & k_3 \\ & & & \ddots & k_2 \\ & & & & k_1 \end{pmatrix}.$$

5. 记

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

根据《教程》行文已经指出的对角矩阵乘法，有

$$AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix}.$$

如果 $\lambda_i(i=1,2,...,n)$ 两两不等且 $AB=BA$,则对比元素易得 $b_{ij}=0,i\neq j$，即 B 是对角矩阵.

6. A 可以与所有 n 阶方阵交换，则必然可以和对角矩阵交换，从而由本节题目 5 的结论可知 A 是一个对角矩阵. 设

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

再考虑 A 与 E_{ij} 的乘积，根据《教程》正文所述，一个矩阵左乘 E_{ij} 相当于把这个矩阵的第 j 行放到第 i 行，其他行全都变为 0；一个矩阵右乘 E_{ij} 相当于把这个矩阵的第 i 列放到第 j 列，其他列全都变为 0，从而对任

意 $i,j=1,2,...,n$，有：

$$E_{ij}A=\begin{array}{cc} & \text{第}j\text{列} \\ \text{第}i\text{行} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \lambda_j & \cdots \\ & & \vdots & \\ & & \vdots & \end{pmatrix}\end{array}, AE_{ij}=\begin{array}{cc} & \text{第}j\text{列} \\ \text{第}i\text{行} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \lambda_i & \cdots \\ & & \vdots & \\ & & \vdots & \end{pmatrix}\end{array}.$$

要使这两个矩阵相等，则 $\lambda_i=\lambda_j$，从而 A 是一个数量矩阵.

7. **(1)** 首先因为 $A^2=E$，由《教程》命题 5.4 及其推论可知 A 是可逆的（逆矩阵也为 A），也是满秩的, 即 $\mathrm{r}(A)=n$. 按照题设，考虑

$$(A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2=A^2-E=0,$$

两边取秩，根据《教程》命题 4.6 得到

$$0=\mathrm{r}((A+E)(A-E))\geqslant\mathrm{r}(A+E)+\mathrm{r}(A-E)-n,$$

同时由《教程》命题 4.4 知

$$\mathrm{r}(A+E)+\mathrm{r}(A-E)\geqslant\mathrm{r}(A+E+A-E)=\mathrm{r}(2A)=\mathrm{r}(A)=n,$$

综合上式，得到 $\mathrm{r}(A+E)+\mathrm{r}(A-E)=n$.

(2) 和 **(1)** 类似，考虑

$$A(A-E)=A^2-AE=A^2-A=0,$$

两边取秩，根据《教程》命题 4.6 有

$$0=\mathrm{r}(A(A-E))\geqslant\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)-n,$$

又因为 $\mathrm{r}(A-E)=\mathrm{r}(E-A)$，由《教程》命题 4.4 有

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)\geqslant\mathrm{r}(A+E-A)=\mathrm{r}(E)=n,$$

综合上式，得到 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)=n$.

批注. 在 **(1)** 的解答中第二个不等式也可以直接根据 $\mathrm{r}(A+E)+\mathrm{r}(A-E)=\mathrm{r}(A+E)+\mathrm{r}(E-A)\geqslant\mathrm{r}(2E)=n$ 得到.

8. 考虑次对角线矩阵依次为 $1, -1, 1, -1, ...$ 的反对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & -1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}.$$

直接验证即可.

9. 连续使用《教程》命题 4.4 的不等式即可

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{r}(A_1A_2\cdots A_k) &\geqslant \mathrm{r}(A_1) + \mathrm{r}(A_2A_3\cdots A_k) - n \\ &\geqslant \mathrm{r}(A_1) + \mathrm{r}(A_2) + \mathrm{r}(A_3A_4\cdots A_k) - 2n \\ &\geqslant \cdots \\ &\geqslant \mathrm{r}(A_1) + \mathrm{r}(A_2) + \cdots + \mathrm{r}(A_k) - (k-1)n. \end{aligned}$$

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.13.

10. **(1)** 计算 A 与所给矩阵的乘积即可.

(2) 这个线性方程组正是 $AX = B$，其中 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}'$. 从而

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2b_1 + b_2 - 4b_3 \\ -15b_1 - 7b_2 + 30b_3 \\ 22b_1 + 10b_2 - 43b_3 \end{pmatrix}.$$

11. **(1)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. **(2)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ -1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

(3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. **(4)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

(5) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(6) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{pmatrix}$. **(7)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

(8) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\-5&7&-3&-4\\2&-2&1/2&1/2\end{pmatrix}$. **(9)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/6&1/2&-7/6&10/3\\-7/6&-1/2&5/6&-5/3\\3/2&1/2&-1/2&1\\1/2&1/2&-1/2&1\end{pmatrix}$.

(10) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/4&1/8&-1/16&1/32\\0&1/2&-1/4&1/8&-1/16\\0&0&1/2&-1/4&1/8\\0&0&0&1/2&-1/4\\0&0&0&0&1/2\end{pmatrix}$.

12. 矩阵方程 $AX=B$ 只需对并排的矩阵 (A,B) 作初等行变换，把 A 化成 E，此时 B 就化成了 X.

(1) $X=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$. **(2)** $X=\begin{pmatrix}11/6&7/6&1/3\\-1/6&1/6&-2/3\\2/3&1/3&2/3\end{pmatrix}$.

(3) $X=\begin{pmatrix}-1/3&1/3&4/3\\2/3&1/3&1/3\\2/3&5/6&4/3\end{pmatrix}$.

(4) 首先利用 $(A,E)\to(E,A^{-1})$ 很容易求出系数矩阵的逆为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\&1&1&\cdots&1&1\\&&1&\cdots&1&1\\&&&\ddots&\vdots&\vdots\\&&&&1&1\\&&&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\&1&-1&\cdots&0&0\\&&1&\ddots&&\vdots\\&&&\ddots&\ddots&0\\&&&&1&-1\\&&&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

从而有

$$X=A^{-1}B=A^{-1}(2E+J+J')=2A^{-1}+A^{-1}J+A^{-1}J'.$$

其中的矩阵 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，这其实是本节题目 2 提到的矩阵 J，$A^{-1}J$ 实际上是将 A^{-1} 向右“推”一列，$A^{-1}J'$ 实际上是将 A^{-1} 向左“推”一列，计算可知

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & & \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \\ & 1 & \ddots & \ddots & -1 \\ & & \ddots & 1 & -1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

其中主对角线是 $1, 1, ..., 1, 2$.

13. 对 (A, E) 作行初等变换有

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & a_1 & & & & & 1 & & & \\ & & a_2 & & & & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & & & & & 1 \\ a_n & & & & & 1 & & & & \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & 1/a_n \\ & 1 & & & & 1/a_1 & & & & \\ & & 1 & & & & 1/a_2 & & & \\ & & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & & & & 1/a_{n-1} & \end{pmatrix},$$

从而

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & & 1/a_n \\ 1/a_1 & & & & \\ & 1/a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1/a_{n-1} & \end{pmatrix}.$$

14. (a) 本题实际上是循环矩阵求逆问题的特例. 我们希望用行初等变换将 (A, E) 化作 (E, A^{-1}). 但由于本题形式较为复杂，我们不直接处理矩阵

(A,E)，而是用一个一般的列向量 C 来代替其中的矩阵 E，再处理 $n\times(n+1)$ 矩阵 (A,C). 只需用行初等变换将 (A,C) 化成 (E,C_2)，得到 C_2 的表达式（其实 C_2 就是 $A^{-1}C$），再依次令 C 为 K^n 中的单位坐标向量，计算所有单位坐标向量对应的 C_2 并将它们拼成矩阵，结果就是 A^{-1}. 这个方法本质上和对 (A,E) 作初等行变换相同，只是将计算过程按列分开了而已.

设 $C=(c_1,c_2,...,c_n)'$，那么有

$$(A,C)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & c_1 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 & c_2 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 & c_n \end{pmatrix}.$$

对 (A,C) 作行初等变换，将矩阵的后 $n-1$ 行全部加到第 1 行，再将第 1 行除以 $\frac{n(n+1)}{2}$，有

$$(A,C)\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n c_i \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 & c_2 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 & c_n \end{pmatrix}\to\cdots$$

记 $c_0=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n c_i$，将第 i 行减去第 $i+1$ 行，其中 i 依次为 $2,3,...,n-1$，有

$$\cdots\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & c_0 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & c_2-c_3 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & c_3-c_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & c_{n-1}-c_n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & c_n \end{pmatrix}\to\cdots$$

将第 i 行减去第 1 行，再将第 i 行除以 n，其中 i 依次为 $2,3,...,n-1$，有

$$\cdots\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & c_0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (c_2-c_3-c_0)/n \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & (c_3-c_4-c_0)/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & (c_{n-1}-c_n-c_0)/n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & c_n \end{pmatrix}\to\cdots$$

将第 n 行减去两倍的第 1 行，再加上 $i-1$ 倍的第 i 行，其中 i 依次为 $2,3,...,n-1$，有

$$\cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & c_0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (c_2-c_3-c_0)/n \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & (c_3-c_4-c_0)/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & (c_{n-1}-c_n-c_0)/n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & m \end{pmatrix} \to \cdots$$

其中

$$\begin{aligned} m &= c_n - 2c_0 + \frac{c_2-c_3-c_0}{n} + \frac{2(c_3-c_4-c_0)}{n} + \cdots + \frac{(n-2)(c_{n-1}-c_n-c_0)}{n} \\ &= c_n - 2c_0 + \frac{c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{n-1}-(n-2)c_n-\frac{(n-2)(n-1)}{2}c_0}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{n-1}+2c_n-\frac{n^2+n+2}{2}c_0\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{n-1}+2c_n-\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)-c_0\right) \\ &= \frac{c_n-c_1-c_0}{n}. \end{aligned}$$

最后将矩阵的后 $n-1$ 行全部加到第 1 行，再将后 $n-1$ 行取相反数，简单计算可得

$$\cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (c_2-c_1+c_0)/n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (c_3-c_2+c_0)/n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & (c_4-c_3+c_0)/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & (c_n-c_{n-1}+c_0)/n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & (c_1-c_n+c_0)/n \end{pmatrix} = (E, C_2).$$

当 C 为 K^n 的单位坐标向量 $\varepsilon_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 时，有 $c_k=1, c_i=0, i\neq k$. 此时无论 k 如何，对应的 $c_0=\frac{2}{n(n+1)}$. 依照上式可求出各个 ε_k 对应的 C_2，并将所有 C_2 排成矩阵就得到

$$A^{-1} = \frac{2}{n^2(n+1)}E + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) 本题实际上是范德蒙德矩阵求逆问题的特例. 求解本题需要观察到矩阵 B（的行向量组）有一个特别的性质，设 B_i 是 B 的第 i 行向量，即

$$B_i = \left(1, \varepsilon^{i-1}, \varepsilon^{2(i-1)}, ..., \varepsilon^{(n-1)(i-1)}\right).$$

我们来计算 B 的行向量与其他共轭行向量（即将该行向量所有元素取共轭复数）之间的“逐项相乘”[2]（可以表示为行向量与列向量的乘法），即

$$\begin{aligned} B_i\overline{B}_j' &= \left(1, \varepsilon^{i-1}, \varepsilon^{2(i-1)}, ..., \varepsilon^{(n-1)(i-1)}\right)\begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{\varepsilon^{j-1}} \\ \vdots \\ \overline{\varepsilon^{(n-1)(j-1)}} \end{pmatrix} \\ &= 1 + \varepsilon^{i-1}\overline{\varepsilon^{j-1}} + \varepsilon^{2(i-1)}\overline{\varepsilon^{2(j-1)}} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)(i-1)}\overline{\varepsilon^{(n-1)(j-1)}}. \end{aligned}$$

注意到 $\overline{\varepsilon^k} = \overline{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n}} = \mathrm{e}^{-2k\pi\mathrm{i}/n} = \varepsilon^{-k}$，并且对 $i, j = 1, 2, ..., n$，由于 $-(n-1) \leqslant i - j \leqslant n - 1$，所以 $\varepsilon^{i-j} = 1 \Leftrightarrow i = j$，故上式为

$$\begin{aligned} B_i\overline{B}_j' &= 1 + \varepsilon^{i-1}\varepsilon^{1-j} + \varepsilon^{2(i-1)}\varepsilon^{2(1-j)} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)(i-1)}\varepsilon^{(n-1)(1-j)} \\ &= 1 + \varepsilon^{i-j} + \varepsilon^{2(i-j)} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)(i-j)} \\ &= \begin{cases} n, & i = j; \\ \frac{1-\varepsilon^{n(i-j)}}{1-\varepsilon^{i-j}}, & i \neq j. \end{cases} \\ &= \begin{cases} n, & i = j; \\ \frac{1-\mathrm{e}^{2n(i-j)\pi\mathrm{i}/n}}{1-\mathrm{e}^{2(i-j)\pi\mathrm{i}/n}}, & i \neq j.\ (\text{注意到}\mathrm{e}^{2(i-j)\pi\mathrm{i}} = 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} n, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

因此矩阵 B 的行向量具有某种“垂直”的性质，即当取 B 的某行，将它与另一行之共轭逐项相乘时，如果两行不同，则乘积为 0，如果两行相同，则乘积为 n.

基于这种特殊的性质，我们可以考虑计算矩阵乘积 $D = B\overline{B}'$，其中 $\overline{B}'$ 表示将 B 取的所有元素共轭，再将所得矩阵转置（当然，由于 B 是对称的，转置后的矩阵与原矩阵仅取共轭一样）. 根据矩阵乘法规则，对于 D 的每一个元素 d_{ij}，都有

$$d_{ij} = B_i\overline{B}_j' = \begin{cases} n, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

[2] 内积运算，会在《教程》第六章详细讲解.

这说明 $D=nE$，即 $B\overline{B}'=nE$，或者说 $B\left(\frac{1}{n}\overline{B}'\right)=E$，根据《教程》命题 2.4 的推论，这实际上已经给出了 B 的逆为

$$B^{-1}=\frac{1}{n}\overline{B}'=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \cdots & \varepsilon^{-(n-1)}\\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \cdots & \varepsilon^{-2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{-(n-1)^2}\end{pmatrix}.$$

批注.　本题可参考《指南》第一章例 3.9 和例 3.10.

15.　由转置矩阵的性质

$$\begin{aligned}(A+A')'&=A'+(A')'=A'+A=A+A';\\ (AA')'&=(A')'A'=AA';\\ (A'A)'&=A'(A')'=A'A;\\ (A-A')'&=A'-(A')'=A'-A=-(A-A').\end{aligned}$$

16.　设 $AB=BA$，则两边取转置得到 $(AB)'=(BA)'=A'B'$，又因为 A 和 B 是对称矩阵，即 $A'=A, B'=B$，所以 $(AB)'=A'B'=AB$.

反过来设 $(AB)'=AB$，也即 $AB=B'A'$，又因为 A 和 B 是对称矩阵，所以 $AB=BA$.

17.　若 $A'=A$，则 $(T'AT)'=T'A'(T')'=T'AT$，类似地，若 $A'=-A$，则 $(T'AT)=T'(-A)(T')'=-T'AT$.

18.　**(1)** 若一个矩阵可逆，其转置的逆矩阵就是逆矩阵的转置. 从而若 $A=A'$，则 $(A^{-1})'=(A')^{-1}=A^{-1}$；若 $A=-A'$，则 $(A^{-1})'=(A')^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$（最后一个等号是因为任意可逆矩阵 A，$(kA)(k^{-1}A^{-1})=E$，从而 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$）.

(2) 只证上三角矩阵的情形. 若 A 是可逆上三角矩阵，则 A 满秩，我们先来证明此时它的主对角线上的元素必定非零，若不然，设主对角线从上

到下第一个 0 元素所在行为 t，即 $a_{tt}=0$，有

$$A=\begin{array}{cc} & \text{第}t\text{列} \\ \text{第}t\text{行} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array},$$

记 A 右下角的第 t 到 n 行，t 到 n 列的 $(n-t+1)$ 阶子方阵块为 A_1，即

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n-t+1)\times(n-t+1)},$$

若单独考虑这个方阵 A_1，它的第一列向量是零向量，故该 A_1 不满秩，所以可单用初等行变换（把这些变换记作 T）将 A_1 化成阶梯形，记该阶梯形为 A_2，此时 A_2 的阶梯数（即非零行个数）m 必然小于 $n-t+1$.

现将 A_1 放在 A 中考虑，将相同的初等列变换 T 相应施行到矩阵 A 的 t 到 n 行，则矩阵 A 中的子矩阵块 A_1 处（即第 t 到 n 行，t 到 n 列）也会变成一个同样的阶梯形 A_2，此时 A 整体也变成了一个阶梯形，它的阶梯数为 $t-1+m<n$，从而矩阵 A 不满秩，矛盾. 因此可逆上三角矩阵 A 的主对角线必非 0.

下面求 A 的逆矩阵，我们按照《教程》所给出的办法，将矩阵 A 与一单位矩阵 E 并排放置，排成一个 $n\times 2n$ 的矩阵：$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$，此时可对这个 $n\times 2n$ 的矩阵同时作初等行变换，将左边的 A 化为 E 即可得到逆矩阵. 具体而言，因为 A 的对角线的元素都不为 0，所以可以将第 n 行的不同常数倍分别加到前 $n-1$ 行使得前 $n-1$ 行的最后一列元素为 0，再将第 $n-1$ 行的不同常数倍分别加到前 $n-2$ 行使得前 $n-2$ 行的倒数第二列元素为 0，依次重复下去，最后再将各行乘适当的常数倍，就可以将 A 化作 E. 容易观察出，当经过这些行变换，$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$ 中右边的矩阵 E 所有主对角线下面的元素不受影响，依然还是 0，即 E 会变成一个上三角矩阵，这就是 A 的逆矩阵.

19. 直接验证即可：

$$
\begin{aligned}
&(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})\\
=&E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-(A+A^2+\cdots+A^k)\\
=&E-A^k=E.
\end{aligned}
$$

从而由《教程》命题 5.4 推论知题目成立.

20. 同上题一样直接验证：

$$
\begin{aligned}
&A\left(-\frac{1}{a_m}(a_0A^{m-1}+a_1A^{m-2}+\cdots+a_{m-1}E)\right)\\
=&-\frac{1}{a_m}(a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A)\\
=&-\frac{1}{a_m}(a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE-a_mE)\\
=&-\frac{1}{a_m}(f(A)-a_mE)=E.
\end{aligned}
$$

21. 本题的关键在于认识到 $V'B^{-1}U$ 实际上是一个数！这个数在矩阵乘法中可以先行计算，从而与其他矩阵交换乘法次序，我们有：

$$
\begin{aligned}
&A\left(B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V'B^{-1})\right)\\
=&\frac{1}{\gamma}AB^{-1}\left(\gamma E-UV'B^{-1}\right)\\
=&\frac{1}{\gamma}(B+UV')B^{-1}\left(\gamma E-UV'B^{-1}\right)\\
=&\frac{1}{\gamma}(E+UV'B^{-1})\left(\gamma E-UV'B^{-1}\right)\\
=&\frac{1}{\gamma}\left(\gamma E+(\gamma-1)UV'B^{-1}-(UV'B^{-1})(UV'B^{-1})\right)\\
=&\frac{1}{\gamma}\left(\gamma E+(\gamma-1)UV'B^{-1}-U(V'B^{-1}U)V'B^{-1}\right)\\
=&\frac{1}{\gamma}\left(\gamma E+(\gamma-1)UV'B^{-1}-(\gamma-1)UV'B^{-1}\right)=E.
\end{aligned}
$$

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.12.

22. 上三角矩阵主对角线不为 0 时本身就是一个阶梯形，此时它满秩，从而可逆.

23. **(1)** 设 AB 的第 i 行第 j 列的元素为 t_{ij}，BA 的第 i 行第 j 列的元素为 s_{ij}，按照矩阵乘法的规则有

$$\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{i=1}^n t_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij}=\sum_{i=1}^n s_{ii}=\mathrm{Tr}(BA).$$

(2) 设 AA' 的第 i 行第 j 列的元素为 t_{ij}，按照矩阵乘法则有

$$\mathrm{Tr}(AA')=\sum_{i=1}^n t_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

因为 $a_{ij}\in\mathbb{R}$，所以上式 $\geqslant 0$，且等号取得时，当且仅当所有 $a_{ij}=0$，即 $A=0$.

(3) 考虑矩阵 $C=AB-BA$，则由 $A=A', B=B'$ 知 $C'=BA-AB$. 由 **(1)**，**(2)** 和矩阵迹的线性性质知

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(CC')&=\mathrm{Tr}((AB-BA)(BA-AB))\\&=\mathrm{Tr}\left(AB^2A\right)-\mathrm{Tr}\left((AB)^2\right)-\mathrm{Tr}\left((BA)^2\right)+\mathrm{Tr}\left(BA^2B\right)\\&=\mathrm{Tr}\left(A^2B^2\right)-\mathrm{Tr}\left((AB)^2\right)-\mathrm{Tr}\left((AB)^2\right)+\mathrm{Tr}\left(A^2B^2\right)\\&=2\left(\mathrm{Tr}\left(A^2B^2\right)-\mathrm{Tr}\left((AB)^2\right)\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

（注意上式中第三个等号用到了 **(1)** 中的结论,比如 $\mathrm{Tr}\,(AB^2A)=\mathrm{Tr}\,((AB^2)A)=\mathrm{Tr}\,(A(AB^2))=\mathrm{Tr}\,(A^2B^2)$）也即

$$\mathrm{Tr}\left(A^2B^2\right)\geqslant\mathrm{Tr}\left((AB)^2\right).$$

批注. 本题 **(2)**、**(3)** 可参考《指南》第一章例 3.14.

2.6 分块矩阵

1. 按分块求逆即可.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/3&1/3&0&0&0\\0&1/3&-2/3&0&0&0\\-1&2/3&-1/3&0&0&0\\0&0&0&1&-4&-3\\0&0&0&1&-5&-3\\0&0&0&-1&6&4\end{pmatrix}.$$

2. $X^{-1}=\begin{pmatrix}0 & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$,因为根据分块矩阵的乘法 $\begin{pmatrix}0 & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ C & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$. 这里简要说明以下这个矩阵如何得来的. 类似《教程》第 5 节所讲的办法，将矩阵排成如下形状

$$P=\begin{pmatrix}0 & A & E & 0\\ C & 0 & 0 & E\end{pmatrix},$$

可以对这个矩阵 P 作（广义的）初等行变换，具体而言，是先交换第一行和第二行，再用 A^{-1} 左乘第二行，用 C^{-1} 左乘第一行. 右边即可得到逆矩阵，此时验证可知这确实是成立的. 注意这里的“左乘”很重要，不能右乘。

批注. 作为对《教程》理论的一点简单补充，我们给出广义初等变换的定义. 我们称对分块矩阵 A 作一次广义初等行（列）变换，即是对分块矩阵 A 进行如下三种操作之一：

1) 交换 A 的两行（列）;

2) 用一个大小适合的可逆方阵 M 左乘（右乘）A 的某一行（列）;

3) 将一个由大小适合的矩阵块作为元素构成的行（列）向量 P 加到 A 中某一行（列）中，其中 P 是用一个大小适合的矩阵 N 作为系数矩阵左乘（右乘）A 的另一行（列）得出的.

（注意：上述操作左乘对应行，右乘对应列，操作 3) 中的 N 无需是方阵）这三种操作本质上也是普通的初等变换，均不改变分块矩阵的秩，且完全等效于对 A 左乘或右乘一个满秩的分块方阵（称为广义初等矩阵），因此也可单用分块矩阵乘法的语言代替这三种操作而不必引入这三种操作的概念（这样做更严谨，但不够直观）.

广义初等矩阵和普通的初等矩阵的形成方法是完全类似的（《教程》第 5 节，n 阶初等矩阵的定义），只对需单位矩阵 E 作准对角的分块（即将它分块成一个准对角矩阵，其对角线上都是更低阶的单位矩阵，比如 $E_{5\times5}=\begin{pmatrix}E_{2\times2} & 0\\ 0 & E_{3\times3}\end{pmatrix}$），然后对其进行一次上述三种广义初等变换之一，就能得到一个广义初等矩阵 P（比如将上述 $E_{5\times5}$ 的第 1 行左乘大小为 3×2 的 N 加到第 2 行，就得到 $P=\begin{pmatrix}E_{2\times2} & 0\\ N & E_{3\times3}\end{pmatrix}$）. 可以直接验证 PA（或 AP）就是对 A 作一次相应类型的广义初等行（列）变换的结果.

3. 类似于上一题，考虑如下矩阵

$$F=\begin{pmatrix}A & 0 & E & 0\\ C & B & 0 & E\end{pmatrix},$$

用 $-CA^{-1}$ 左乘第一行加到第二行，再分别对 $1,2$ 行左乘 A^{-1},B^{-1} 得到

$$F\to\begin{pmatrix}A & 0 & E & 0\\ 0 & B & -CA^{-1} & E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E & 0 & A^{-1} & 0\\ 0 & E & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix},$$

因此逆矩阵为

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix}.$$

验证可知这确实成立.

4. 取 $T=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix}$，则 $T^{-1}=\begin{pmatrix}T_1^{-1} & 0\\ 0 & T_2^{-1}\end{pmatrix}$，此时有

$$T^{-1}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}T_1^{-1} & 0\\ 0 & T_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1^{-1}AT_1 & 0\\ 0 & T_2^{-1}BT_2\end{pmatrix}.$$

显然为对角矩阵.

5. 设 $\mathrm{r}(A)=m$，注意到 A 是 m 行矩阵，故其标准形必然为 $(E_m,0)$，按照《教程》命题 6.1 的证明过程可知，可以对 M 施行初等行列变换，使得 M 化为

$$M\to M_1=\begin{pmatrix}D_1 & C_1\\ 0 & D_2\end{pmatrix},$$

其中

$$D_1=\begin{pmatrix}E_m & 0\end{pmatrix},D_2=\begin{pmatrix}E_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},s=\mathrm{r}(B).$$

因此可以完全利用 D_1 中的 1 经过初等列变换将 C_1 中的非零元消去（此时 D_2 不变），即

$$M_1\to M_2=\begin{pmatrix}E_m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

显然有 $\mathrm{r}(M)=m+s=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$. 对 $\mathrm{r}(B)=l$ 的情况同理.

6. 利用数学归纳法. 首先对于每个 s，我们记题述的 M 为 M_s. 当 $s=2$ 时，这正是《教程》命题 6.1 和本节第题目 5 的结论，从而本题命题成立. 现在假设当 $s=k-1$ 时本题命题（包括对于取等条件的论断）成立，则当 $s=k$ 时，将 M_k 重新分块：

$$M_k=\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{k-1} & \\ & & & & A_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{k-1} & * \\ 0 & A_k \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

此时对式 (2.11) 应用《教程》命题 6.1，可知 $\mathrm{r}(M_{k-1})+\mathrm{r}(A_k)\leqslant \mathrm{r}(M_k)$，此时按归纳假设 $\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\cdots+\mathrm{r}(A_{k-1})\leqslant \mathrm{r}(M_{k-1})$，有

$$\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\cdots+\mathrm{r}(A_{k-1})+\mathrm{r}(A_k)\leqslant \mathrm{r}(M_{k-1})+\mathrm{r}(A_k)\leqslant \mathrm{r}(M_k).$$

即当 $s=k$ 时，命题所述不等式成立. 下面讨论取等条件.

当 $\mathrm{r}(A_i)=m_i(i=1,2,...,k-1)$ 时，按归纳假设中对取等条件的论断，有 $\mathrm{r}(M_{k-1})=\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\cdots+\mathrm{r}(A_{k-1})=\sum_{i=1}^{k-1}m_i$，即 M_{k-1} 的秩等于 M_{k-1} 的行数，故对式 (2.11) 应用本节题目 5 的结论，可知

$$\mathrm{r}(M_k)=\mathrm{r}(M_{k-1})+\mathrm{r}(A_k)=\mathrm{r}(A_1)+\mathrm{r}(A_2)+\cdots+\mathrm{r}(A_{k-1})+\mathrm{r}(A_k).$$

不等式等号成立. 对 $\mathrm{r}(A_i)=n_i(i=2,...,s)$ 的情形可类似证明. 所以当 $s=k$ 时命题对取等条件的论断也成立. 综上，由数学归纳法知原命题对所有的正整数 $s\geqslant 2$ 都成立.

7. 利用广义初等变换（参见本节题目 2 批注）即可. 用 $-A_{21}A_{11}^{-1}$ 和 $-A_{31}A_{11}^{-1}$ 左乘第一行，再分别加到第 2、第 3 行上，对列类似操作. 只要将这个变换用广义初等矩阵（或其乘积）的语言表示即可得到 P,Q. 按照广义初等矩阵的书写方法，容易写出

$$P=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E & 0 \\ -A_{31}A_{11}^{-1} & 0 & E \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{11}^{-1}A_{13} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

简单验证可知成立.

8. 和本节题目 7 类似，按照广义初等变换，写出对应的广义初等矩阵：

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{第1列} & & & & \end{array} \\ \text{第}i\text{行} & \begin{pmatrix} E & & & & 0\\ \vdots & \ddots & & & \\ -A_{i1}A_{11}^{-1} & & E & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & E \end{pmatrix} \end{array}.$$

即在单位分块矩阵中的第 i 行第 1 列放置分块 $-A_{i1}A_{11}^{-1}$. 其中 E 代表阶数合适的单位矩阵.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.15.

9. 首先由准对角矩阵的性质可知

$$J^k=\begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & J_2^k & \\ & & J_3^k \end{pmatrix}.$$

从而容易验证矩阵多项式 $f(J)$ 可以表示为

$$f(J)=\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & f(J_2) & \\ & & f(J_3) \end{pmatrix}.$$

故要使 $f(J)=0$，只需找到一个多项式 $f(x)$ 使得 $f(J_i)=0, i=1,2,3$. 注意到 J_i 有特殊的形式，我们考虑 J_i 加上常数倍的单位矩阵，实际上就可以化成类似于第五节题目 2 的“矩阵 J”的形式，再对其取幂得到零矩阵. 不难推知只需取

$$f_1(J_1)=(J_1+2E)^2; f_2(J_2)=(J_2+2E)^3; f_3(J_3)=(J_3-3E)^2.$$

就得到了三个多项式 $f_i(x)$ 分别使得 $f_i(J_i)=0, i=1,2,3$, 将它们相乘就能得到 $f(x)$ 使得 $f(J)=0$. 同时我们注意到 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 有相同的公因式 $(x+2)^2$，因此相乘的时候这些重复的因式只乘一次，从而我们有

$$f(x)=(x+2)^3(x-3)^2=x^5-15x^3-10x^2+60x+72.$$

10. 按照本节题目 9 的想法，只需令

$$f(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{n_i},$$

即可满足 $f(J)=0$. 其中多项式的次数 $m=\sum_{i=1}^{s}n_i=n$. 若不同的 J_i 块对应的 $f_i(x)$ 有相同的因式，可以只乘一次从而降低次数.

11. 按照分块矩阵乘法规则直接计算:

$$AA'=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1' & 0\\ A_2' & A_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_1'+A_2A_2' & A_2A_3'\\ A_3A_2' & A_3A_3'\end{pmatrix};$$

$$A'A=\begin{pmatrix}A_1' & 0\\ A_2' & A_3'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1'A_1 & A_1'A_2\\ A_2'A_1 & A_2'A_2+A_3'A_3\end{pmatrix}.$$

对比可知 $A_2A_2'=A_2'A_2=0$. 设 $A_2=(a_{ij}),A_2'=(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}$，因为 A_2 为 $r\times(n-r)$ 矩阵，从而 A_2A_2' 为 r 阶方阵. 设 $A_2A_2'=(t_{ij})=0$，考虑其主对角线上的元素 t_{pp}，根据矩阵乘法的计算法则，有

$$t_{pp}=\sum_{i=1}^{n-r}a_{pi}b_{ip}=\sum_{i=1}^{n-r}a_{pi}a_{pi}=\sum_{i=1}^{n-r}a_{pi}^2=0.$$

又因为 A_2 是实矩阵，即 $a_{pi}\in\mathbb{R}$，有 $a_{pi}=0,i=1,2,...,n-r$，再由 p 的任意性，取遍 $p=1,2,...,r$ 后可知 $\forall i,j,a_{ij}=0$. 所以 $A_2=0$.

批注. 本题可参考《指南》第一章例 3.19.

12. **(1)** 由《教程》命题 4.5 知 $\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\geqslant\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(E)=m$. 又因为矩阵的秩不超过其行数和列数，有 $\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\leqslant m$. 从而 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=m$.

(2) 由《教程》命题 4.5 知

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(ABC)&\leqslant\min\{\mathrm{r}(AB),\mathrm{r}(C)\}\\&\leqslant\min\{\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\},\mathrm{r}(C)\}\\&=\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B),\mathrm{r}(C)\}.\end{aligned}$$

又由《教程》命题 4.6 知

$$\mathrm{r}(ABC)\geqslant\mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(C)-s\geqslant\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n+\mathrm{r}(C)-s.$$

综合以上两式得到

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)+\mathrm{r}(C)\leqslant n+s+\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B),\mathrm{r}(C)\}.$$

第三章　行列式

3.1　平行六面体的有向体积

3.2　n 阶方阵的行列式

1.　分别用定义验证即可. 比如 $f(A)$，它是取矩阵列向量组每个向量的第一个分量的乘积，有 $f(...,\lambda\beta_1+\mu\beta_2,...)=a_1\cdots a_j(\lambda b_1+\mu b_2)a_{j+2}\cdots a_n=\lambda a_1\cdots a_j b_1 a_{j+2}\cdots a_n+\mu a_1\cdots a_j b_2 a_{j+2}\cdots a_n=\lambda f(...,\beta_1,...)+\mu f(...,\beta_2,...)$. 从而 f 是列线性的. 其余函数可类似验证.

2.　(1) $\Longrightarrow$ (2)、(3) 已经由《教程》命题 2.1 保证.

现在单假设 (2) 成立，则考虑 $i,j(i\neq j)$ 两列相同的 A，互换 i,j 两列，依然得到 A，但 $f(A)=-f(A)$，从而 $f(A)=0$. 从而 (2) $\Longrightarrow$ (1).

再单假设 (3) 成立，同样则考虑 $i,j(i\neq j)$ 两列相同的 A，将 A 第 j 列的 -1 倍加到第 i 列得到矩阵 B，此时 B 的第 i 列为零向量，故 $f(A)=f(B)=0$. 从而 (3) $\Longrightarrow$ (1).

综上 (1)(2)(3) 互相等价.

3.　由《教程》命题 2.1 的推论 2 知道，问题等价于证明存在无穷多个在 $M_n(K)$ 内的反对称列线性函数. 设 det 是 $M_n(K)$ 内的行列式函数（按《教程》定理 2.1 知这个函数是唯一存在的），它是一个反对称列线性函数. 现在定义 $M_n(K)$ 内的数量函数 f，满足 $f(A)=k\det(A)$，其中 $k\in K$，则 f 也是一个反对称的列线性函数（参见后面的引理），这样的 f 根据不同的 k 可以有无数个.

引理　一个反对称列线性函数的常数倍依然是反对称列线性函数.

证明：设 g 是一个 $M_n(K)$ 上的一个反对称列线性函数，再设 $f(A)=$

$ag(A), a \in K$，则有

$$\begin{aligned} f(..., \lambda\beta_1 + \mu\beta_2, ...) &= ag(..., \lambda\beta_1 + \mu\beta_2, ...) \\ &= a(\lambda g(..., \beta_1, ...) + \mu g(..., \beta_2, ...)) \\ &= \lambda ag(..., \beta_1, ...) + \mu ag(..., \beta_2, ...) \\ &= \lambda f(..., \beta_1, ...) + \mu f(..., \beta_2, ...), \end{aligned}$$

所以 f 是列线性的，并且，当 A 有两列相等的时候，

$$f(A) = ag(A) = a0 = 0,$$

从而 f 是反对称的. ■

4. 首先，当 A 不满秩的时候，由《教程》命题 2.1 推论 2 知 $f(A) = 0$. 只需考虑 A 满秩的情况，此时 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A_0)$，则按照《教程》第二章命题 5.2 的推论 2，$A$ 与 A_0 相抵，存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, ..., P_k, Q_1, Q_2, ..., Q_l$ 使得 $A = P_1P_2\cdots P_kA_0Q_1Q_2\cdots Q_l$，仿照《教程》命题 2.3 的证明过程容易推知，$f(A) = \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k f(A_0)\varepsilon_1'\varepsilon_2'\cdots\varepsilon_l'$，其中每个 ε_i 或 ε_j' 都是由某一个初等矩阵（或者说初等变换）所决定的常数，是 -1 $\lambda, 1$ 其中之一，设它们的乘积为 k，总有 $f(A) = kf(A_0) = 0$. 从而 $f \equiv 0$.

5. $N(23145) = 2$，偶排列；

$N(985467321) = 31$，奇排列；

$N(375149) = 6$，偶排列；

$N(n(n-1)(n-2)\cdots 321) = n(n-1)/2$，当 $n = 4k, 4k+1$ 时（即 $n \equiv 0, 1 (\mathrm{mod}\ 4)$），为偶排列，当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时（即 $n \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\ 4)$），为奇排列；

$N((2n+1)(2n-1)\cdots 531) = n(n+1)/2$，当 $n = 4k, 4k+3$ 时（即 $n \equiv 0, 3 (\mathrm{mod}\ 4)$），为偶排列，当 $n = 4k+1, 4k+2$ 时（即 $n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\ 4)$），为奇排列.

6. **(1)** 当 $i = 8, k = 3$ 时，$N(127435689) = 10$，为偶排列.

(2) 当 $i = 3, k = 6$ 时，$N(132564897) = 5$，为奇排列.

7. $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} = a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，$N(431265) = 6$，应该带正号；

$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25} = a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$，$N(452316) = 8$，应该带正号.

8. $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

9.　按照《教程》对行列式的定义可知，该行列式其实是如下形式的项之和：

$$(-1)^{N(i_1i_2i_3i_4i_5)}a_{i_1}b_{i_2}c_{i_3}d_{i_4}e_{i_5},$$

其中 $i_1i_2i_3i_4i_5$ 为 $1,2,3,4,5$ 的任意一个排列，且 $c_{i_3},d_{i_4},e_{i_5}=0(i_3,i_4,i_5=3,4,5)$. 因为这每一项的 $i_1,i_2,...,i_5$ 是从 $1,2,...,5$ 取出来的，由抽屉原理可知，i_3,i_4,i_5 必定有一个取到 $3,4,5$ 其中之一，从而导致该项为零. 因此整个行列式为 0.

10.　x^4 的系数为 2，x^3 的系数为 -1.

11.　元素全为 1 的 n 阶行列式的所有项必然与前 n 个自然数的排列一一对应，并且每项要么为 1，要么为 -1，当与偶排列对应时，该项为 1，当与奇排列对应时，该项为 -1，所有项的和即行列式的值为 0，说明 $1,-1$ 的数量相同. 故奇偶排列各占一半.

12.　对任一排列 $j_1j_2\cdots j_n$,我们将题述和式中的行列式记为 $|A(j_1j_2\cdots j_n)|$，由本题后面的引理可知，$j_1j_2\cdots j_n$ 总可以通过 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 次互换两数位置变成正序排列 $12\cdots n$，这等价于对 $|A(j_1j_2\cdots j_n)|$ 的列重新排序，从而由行列式的性质有

$$|A(j_1j_2\cdots j_n)|=(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}|A(12\cdots n)|.$$

进而由本节题目 11 的结论知

$$\begin{aligned}\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}|A(j_1j_2\cdots j_n)|&=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}|A(12\cdots n)|\\&=|A(12\cdots n)|\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}1\cdot1\cdot...\cdot1\\&=|A(12\cdots n)|\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

引理　设 n 个自然数 $i_1,i_2,...,i_n$ 满足 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n$，把它们组成任意排列 $j_1j_2\cdots j_n$，则该排列可以通过 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 次互换两数位置的操作，使其变成正序排列 $i_1i_2\cdots i_n$，其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数.

证明: 我们将排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中的数从小到大依次调换到排列前面，从 i_1 开始，让 i_1 交替不断与前一个相邻的数互换，直到换到第 1 个位置，此时所

用互换次数记为 $\tau(i_1)$，再考虑 i_2，同样将其交替不断与前一个相邻的数互换，直到换到第 2 个位置，此时所用次数记为 $\tau(i_2)$. 以此类推，操作完 n 个数后，不难得知所用的总次数为

$$N = \tau(i_1) + \tau(i_2) + \cdots + \tau(i_n) = N(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

其中 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为反序数. ■

批注. 以上涉及的其实是第 4 节命题 4.2 的内容.

13. 我们设 f 在 E 处的取值 $f(E) = a$. 因为 $f \not\equiv 0$，所以 $a \neq 0$，否则与本节题目 4 的结论相矛盾. 此时对任意矩阵 A，再设 $g(A) = f(A)/a$，我们来说明 g 就是行列式函数. 显然 $g(E) = 1$，因为 f 是一个反对称列线性函数，所以 g 也是一个反对称列线性函数（本节题目 3 的引理），按照《教程》命题 2.1 的推论 2 知，对任意不满秩的方阵 A 都 $g(A) = 0$. 从而由《教程》行列式函数的定义，g 确实是一个行列式函数，再由《教程》定理 2.1 知 $g = \det$，即 $f(A) = ag(A) = \det(A)$.

14. 根据《教程》定理 2.2，有

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{k=1}^{4} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A\tbinom{1}{k}) \\ &= a_{11} \det(A\tbinom{1}{1}) - a_{12} \det(A\tbinom{1}{2}) + a_{13} \det(A\tbinom{1}{3}) - a_{14} \det(A\tbinom{1}{4}).\end{aligned}$$

15. $M_{13} = M_{31} = -1, M_{24} = 0$.

16. 对 $A' = -A$ 两边取行列式，左边 $|A'| = |A|$，右边对 $|-A|$ 提出每列的因子 -1，共 n 列，有 $|-A| = (-1)^n |A|$，又因为 n 是奇数，从而 $|-A| = -|A|$. 故 $|A| = -|A|$，即 $|A| = 0$.

17. 对行列式的第一列展开，容易得到

$$1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{vmatrix} - (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - (-1)^{n+1+n-1} = 0.$$

18. **(1)** -6. **(2)** 25. **(3)** -483. **(4)** 0. **(5)** 24. **(6)** 3/8.

19.　利用行列式的各种性质即可.

(1) 将第 2 列和第 3 列加到第 1 列，得

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix} = (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix} = (2x+2y)(-x^2+y(x-y)) = -2(x^3+y^3).$$

(2) 依次将第 1 行减去第 2 行，第 2 行减去第 3 行，第 3 行减去第 4 行，提出 xy，再将第 4 行减去第 1 和第 3 行，得

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & y+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

(3) 后 3 列减去第 1 列得

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \cdots$$

后两列减去第 2 列的 2，3 倍得

$$\cdots = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 0 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 0 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 0 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(4) 48.　**(5)** 160.

(6) 行列之间互相加减运算，有

$$\begin{vmatrix}0&1&1&a\\1&0&1&b\\1&1&0&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1&a\\0&-2&0&b-c-a\\1&1&0&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1&a\\0&-2&0&b-c-a\\1&0&0&c\\a&b-c-a&c&d\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&0&1&a\\0&-2&0&b-c-a\\1&0&0&c\\0&0&0&m\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0&a\\0&-2&0&b-c-a\\0&0&1&c\\0&0&0&m\end{vmatrix}=2m.$$

其中 $m=d-ca+\frac{1}{2}(b-c-a)^2-ac$, 故该行列式为

$$2m=2d-4ac+(b-c-a)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d.$$

20. 拆开即可.

$$\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&c+a&a+b\\b_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&c+a&a+b\\c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b&c+a&a\\b_1&c_1+a_1&a_1\\b_2&c_2+a_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&a+b\\c_1&a_1&a_1+b_1\\c_2&a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b&c&a\\b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&b\\c_1&a_1&b_1\\c_2&a_2&b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}.$$

21. A 每个元素 a_{ij} 的代数余子式构成的矩阵为 $(A_{ij})=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-1&-3&1\\-1&-3&-5\end{pmatrix}$.

$|A|$ 对第二行和对第三列的展开公式为

$$|A|=2A_{21}+A_{22}-A_{23},$$
$$|A|=0A_{13}-A_{23}+A_{33}.$$

其中 A_{ij} 是 A 中 a_{ij} 的代数余子式.

22. $|A|=7A_{31}-A_{32}+0A_{33}+2A_{34}-A_{35}$. 其中 A_{ij} 是 A 中 a_{ij} 的代数余子式.

23. 不断对行列式的最后一行展开，有

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1} a_{n1} (-1)^{n-1+1} a_{n-1,2} \begin{vmatrix} a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,3} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\cdots+3} a_{n1} a_{n-1,2} \cdots a_{2,n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{(n+4)(n-1)/2} a_{n1} a_{n-1,2} \cdots a_{2,n-1} a_{1n} \\
&= (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} a_{n-1,2} \cdots a_{2,n-1} a_{1n}.
\end{aligned}
$$

24. **(1)** 根据《教程》例 2.6 的范德蒙德行列式可知

$$P(x) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n-1} (a_i - a_j) \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - x).$$

显然是一个 $n-1$ 次多项式.

(2) $P(x)$ 的 $n-1$ 个根是 $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$.

25. 按照行列式的定义，有

$$
\begin{aligned}
|B| &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} b^{1-j_1} a_{2j_2} b^{2-j_2} \cdots a_{nj_n} b^{n-j_n} \\
&= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)},
\end{aligned}
$$

因为 $j_1, j_2, ..., j_n$ 正是 $1, 2, ..., n$ 的一个排列，显然有 $1+2+\cdots+n = j_1+j_2+\cdots+j_n$，故上式化为

$$|B| = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = |A|.$$

26. **(1)** 利用行列式的"加边"手段，由行列式的展开定理知，原行列式等于如下加了一行一列的 $n+1$ 阶行列式，结合行列式的计算性质知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & a_1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix},$$

以下固定 $a_1, a_2, ..., a_n$，对 $i = 1, 2, ..., n$ 定义

$$\psi_i = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} (a_i - x) = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\cdots(a_n-x).$$

$$\psi = \prod_{k=1}^{n} (a_i - x) = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x).$$

则 ψ_i 和 ψ 都是关于 x 的函数（为了简明，只考虑 $x\in\mathbb{R}$）. 以下有

$$\begin{aligned}\psi|A| &= \begin{vmatrix} \psi & x & x & \cdots & x \\ -\psi & a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ -\psi & 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\psi & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \psi+\sum_{i=1}^n x\psi_i & x & x & \cdots & x \\ 0 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix} \\ &= (\psi+\sum_{i=1}^n x\psi_i)\psi.\end{aligned}$$

当 $x \neq a_k, k = 1, 2, ..., n$ 时，$\psi \neq 0$，由上式知 $|A| = \psi + \sum_{i=1}^n x\psi_i$. 而当 $x = a_k, 1 \leqslant k \leqslant n$ 时，$\psi = 0$，上式无法给出有效信息，但是因为该行列式的每个元素都是由 x 的多项式（在本题即 a_k 和 x）组成的，由行列式的定义

$$|A| = \sum_{(j_1 j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

知 $|A|$ 必然是关于 x 的一个多项式，从而是一个连续函数，将其记为 $|A|(x)$，有 $|A|(a_k) = \lim\limits_{x\to a_k} |A|(x) = \lim\limits_{x\to a_k} (\psi + \sum_{i=1}^n x\psi_i) = \psi + \sum_{i=1}^n a_k\psi_i$，这说明

$|A| = \psi + \sum_{i=1}^n x\psi_i$ 对 $x = a_k$ 也成立. 综上可知 $|A| = \psi + \sum_{i=1}^n x\psi_i$. 特别地，当 $x \neq a_k, k = 1, 2, ..., n$ 时，$|A| = \psi + \psi x \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i - x}$.

(2) 从最后一行开始，依次减去上一行，有

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

从而由本节题目 23 的结论知

$$|A| = (-1)^{n(n-1)/2} n.$$

(3) 若 $b_{n-1} \neq 0$，我们记这样的行列式为 D_n，将最后一行的 b_n 提出，然后扩充 b_{n-1} 倍，减去倒数第二行，再将得到的行列式按最后一行展开，有

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_{n-1} & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1b_{n-1} & a_2b_{n-1} & a_3b_{n-1} & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_{n-1}b_n & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b_n}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_{n-1} & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1b_{n-1} & a_2b_{n-1} & a_3b_{n-1} & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_1b_{n-1} & a_2b_{n-1} & a_3b_{n-1} & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & a_nb_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b_n}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_{n-1} & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1b_{n-1} & a_2b_{n-1} & a_3b_{n-1} & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b_n}{b_{n-1}} (a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n) D_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

若 $b_{n-1}=0$，则 D_n 倒数第二行和倒数第二列除了最后一个元素都为 0，直接按 D_n 的导数第二列展开可知

$$D_n = -a_{n-1}b_n D_n\binom{n}{n-1},$$

其中 $D_n\binom{n}{n-1}$ 表示 D_n 第 n 行第 $n-1$ 列元素的余子式，再对 $D_n\binom{n}{n-1}$ 的最后一列展开可知

$$D_n = (-a_{n-1}b_n)(a_{n-1}b_n)D_{n-2} = -(a_{n-1}b_n)^2 D_{n-2}.$$

这里我们可以定义 $D_0=1$，则上式对 $n\geqslant 2$ 都成立.

综合上面的式子，该行列式转化为如下的递推问题（记作 (R)）的解：

$$D_n = \begin{cases} \frac{b_n}{b_{n-1}}(a_n b_{n-1} - a_{n-1}b_n)D_{n-1}, & b_{n-1}\neq 0; \\ -(a_{n-1}b_n)^2 D_{n-2}, & b_{n-1}=0, \end{cases} \quad n\geqslant 2; \tag{3.1}$$

$$D_1 = a_1 b_1; \tag{3.2}$$

$$D_0 = 1. \tag{3.3}$$

显然 (R) 有唯一解，以下求之. 当 $b_1, b_2, ..., b_n \neq 0$ 时，根据式 (3.1) 的第一种情况有

$$\begin{aligned} D_n &= D_1 \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b_i}{b_{i-1}}(a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_i)\right) \\ &= \frac{b_n}{b_1} a_1 b_1 \prod_{i=2}^{n}(a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_i) \\ &= a_1 b_n \prod_{i=2}^{n}(a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_i), \quad n\geqslant 2 \end{aligned}$$

注意到上式在运算中的分母奇点 b_i 全部被消解掉了，猜测该式就是 (R) 的最终解. 为此只需要验证对 $2\leqslant n\leqslant k-1$ 时 D_n 同样满足式 (3.1) 的第二种情况，当 $n=2,3$ 时是显然的，当 $n\geqslant 4$ 时，设 $b_{n-1}=0$，此时有

$$\begin{aligned} D_n &= a_1 b_n \prod_{i=2}^{n}(a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_i) \\ &= a_1 b_n (a_n b_{n-1} - a_{n-1}b_n)(a_{n-1}b_{n-2} - a_{n-2}b_{n-1}) \prod_{i=2}^{n-2}(a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_i) \\ &= -(a_{n-1}b_n)^2 \left(a_1 b_{n-2} \prod_{i=2}^{n-2}(a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_i)\right) \\ &= -(a_{n-1}b_n)^2 D_{n-2}. \end{aligned}$$

说明 D_n 满足式 (3.1) 的所有情况，即 D_n 确实为 (R) 的解. 综上所述，该行列式的值为

$$D_n=\begin{cases}a_1b_n\prod_{i=2}^{n}(a_ib_{i-1}-a_{i-1}b_i), & n\geqslant 2;\\ a_1b_1, & n=1.\end{cases}$$

(4) 这是一类特殊的三对角矩阵的行列式，我们在本题后面的引理中给出该类行列式的一般结果. 按照引理，我们写出该行列式所对应的特征方程为

$$\begin{aligned}&\lambda^2-7\lambda+10=0;\\ \Longrightarrow&\lambda_1=2;\lambda_2=5.\end{aligned}$$

从而有

$$|A_n|=\frac{\lambda_2^{n+1}-\lambda_1^{n+1}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}.$$

(5) 按照本题后面引理所述，写出该行列式的特征方程为

$$\lambda^2-(2\cos\alpha)\lambda+1=0.$$

判别式 $\Delta=4\cos^2\alpha-4\leqslant 0$. 当 $\Delta<0$ 时，$\cos\alpha\in(-1,1)$，为简单起见，只考虑 $\alpha\in(0,\pi)$，此时特征根为

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\cos\alpha+\mathrm{i}\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha};\\ \lambda_2&=\cos\alpha-\mathrm{i}\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

从而有

$$|A_n|=\frac{\lambda_2^{n+1}-\lambda_1^{n+1}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

当 $\Delta=0$ 时，$\cos\alpha=1$ 或 -1，此时特征根为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cos\alpha.$$

从而有

$$|A_n|=(n+1)\cos^n\alpha.$$

综上所述，该行列式的值为

$$|A_n|=\begin{cases}\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}, & \cos\alpha\in(-1,1),\\ (n+1)\cos^n\alpha, & \cos\alpha=-1 \text{ or } 1.\end{cases}$$

(6) 记该行列式为 D_n，按最后一列展开，可得

$$\begin{aligned} D_n &= x_n D_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n (-x_1)(-x_2)\cdots(-x_{n-1}) \\ &= x_n D_{n-1} + a_n x_1 x_2 \cdots x_{n-1}, \quad n \geqslant 3. \end{aligned}$$

初值为

$$D_2 = a_1 x_2 + a_2 x_1.$$

直接递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= x_n D_{n-1} + a_n x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \\ &= x_n (x_{n-1} D_{n-2} + a_{n-1} x_1 x_2 \cdots x_{n-2}) + a_n x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \\ &= x_n x_{n-1} D_{n-2} + a_{n-1} \left(\prod_{i=1, i\neq n-1}^{n} x_i \right) + a_n \left(\prod_{i=1, i\neq n}^{n} x_i \right) \\ &= \cdots \\ &= (x_n x_{n-1} \cdots x_3) D_2 + \sum_{k=3}^{n} a_k \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} x_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} x_i \right), \quad n \geqslant 3. \end{aligned}$$

验证可知，上式对 $n = 2$ 也成立. 故本题的解为

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} x_i \right), \quad n \geqslant 2.$$

引理 已知实数域上的 n 阶三对角矩阵 A_n 定义如下

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

设 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta\gamma = 0$ 的两根（可以是复数），那么有

$$\begin{aligned} |A_n| &= \begin{cases} \frac{\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ (n+1)\lambda_1^n, & \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}. \end{aligned}$$

证明：证明的方法和《教程》例 2.7 一致，当 $n \geqslant 3$ 时，对行列式的第一行展开有

$$|A_n| = \alpha|A_{n-1}| - \beta|A_n\binom{2}{1}|,$$

再对余子式 $|A_n\binom{2}{1}|$ 的第一列展开有

$$|A_n| = \alpha|A_{n-1}| - \beta\gamma|A_{n-2}|, \quad n \geqslant 3.$$

这是一个序列的常系数二阶递推问题，并且有初值条件

$$|A_1| = \alpha, |A_2| = \alpha^2 - \beta\gamma.$$

利用特征根法，我们写出关于 $|A_n|$ 递推式的特征方程为

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta\gamma = 0.$$

按题设，该方程的两个特征根分别为 λ_1, λ_2. 此时必然有如下的递推式

$$\begin{aligned} |A_n| - \lambda_1|A_{n-1}| &= \lambda_2(|A_n| - \lambda_1|A_{n-1}|), \quad n \geqslant 3; \\ |A_n| - \lambda_2|A_{n-1}| &= \lambda_1(|A_n| - \lambda_2|A_{n-1}|), \quad n \geqslant 3. \end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned} |A_n| - \lambda_1|A_{n-1}| &= \lambda_2^{n-2}(|A_2| - \lambda_1|A_1|), \quad n \geqslant 3; \\ |A_n| - \lambda_2|A_{n-1}| &= \lambda_1^{n-2}(|A_2| - \lambda_2|A_1|), \quad n \geqslant 3. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &|A_1| = \alpha = \lambda_1 + \lambda_2; \\ &|A_2| = \alpha^2 - \beta\gamma = (\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2. \end{aligned}$$

代入可知

$$|A_n| - \lambda_1|A_{n-1}| = \lambda_2^n, \quad n \geqslant 3; \tag{3.4}$$

$$|A_n| - \lambda_2|A_{n-1}| = \lambda_1^n, \quad n \geqslant 3. \tag{3.5}$$

现若 $\Delta = \alpha^2 - \beta\gamma \neq 0$，特征方程有两个不相等的实根或共轭复根，即 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，此时由式 $\lambda_2(3.4) - \lambda_1(3.5)$ 可知

$$|A_n| = \frac{\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad n \geqslant 3.$$

若 $\Delta=\alpha^2-\beta\gamma=0$，特征方程有两个相等的实根，此时 $\lambda_1=\lambda_2$，则有式 (3.4) 直接递推有

$$\begin{aligned}
|A_n| &= \lambda_1^n+\lambda_1|A_{n-1}| \\
&= \lambda_1^n+\lambda_1(\lambda_1^{n-1}+\lambda_1|A_{n-2}|) \\
&= 2\lambda_1^n+\lambda_1^2|A_{n-2}| \\
&= \cdots \\
&= (n-1)\lambda_1^n+\lambda_1^{n-1}|A_1| \\
&= (n-1)\lambda_1^n+2\lambda_1^n \\
&= (n+1)\lambda_1^n, \quad n\geqslant 3.
\end{aligned}$$

综合上面的式子，可以验证 $n=1,2$ 时也是成立的，故对所有正整数都有

$$\begin{aligned}
|A_n| &= \begin{cases} \frac{\lambda_2^{n+1}-\lambda_1^{n+1}}{\lambda_2-\lambda_1}, & \lambda_1\neq\lambda_2; \\ (n+1)\lambda_1^n, & \lambda_1=\lambda_2, \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

27. 暂且认为 $f_i(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_ix^i$. [1]

那么将行列式的第 n 行减去第 $n-1$ 行，再将 $n-1$ 行减去 $n-2$ 行，依次进行下去. 因为 $f_i(x)-f_{i-1}(x)=a^ix^i$，可以得到

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} f_0(b_1) & f_0(b_2) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_1) & f_1(b_2) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(b_1) & f_{n-1}(b_2) & \cdots & f_{n-1}(b_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_0(b_1) & f_0(b_2) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_1)-f_1(b_1) & f_1(b_2)-f_1(b_2) & \cdots & f_1(b_n)-f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(b_1)-f_{n-2}(b_1) & f_{n-1}(b_2)-f_{n-2}(b_2) & \cdots & f_{n-1}(b_n)-f_{n-2}(b_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}b_1^n & a_{n-1}b_2^n & \cdots & a_{n-1}b_n^n \end{vmatrix} = a_0a_1\cdots a_{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

[1] 事实上，题目仅仅指定了 $f_i(x)$ 的首项系数为 a_i，对其余系数并未指定. 然而如果其余系数都任意，则是任意的多项式，这样此条件就没有意义了，应该不是题目的本意，所以我们不予考虑.

上式由《教程》例 2.6 的范德蒙德行列式可知

$$|A| = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (b_i - b_j).$$

28. 解决此题我们可能需要先了解 n 倍角公式（或棣莫弗公式）. 下面先简单介绍这个公式，我们注意到对任意 α，由复数的整数幂运算算有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^k$，即

$$\cos k\alpha + \mathrm{i}\sin k\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^k.$$

上式右边用牛顿二项式展开有

$$\begin{aligned}
&\cos k\alpha + \mathrm{i}\sin k\alpha \\
=& \cos^k\alpha + \binom{k}{1}\cos^{k-1}\alpha(\mathrm{i}\sin\alpha) + \binom{k}{2}\cos^{k-2}\alpha(\mathrm{i}\sin\alpha)^2 + \cdots + (\mathrm{i}\sin\alpha)^k \\
=& \left(\cos^k\alpha - \binom{k}{2}\cos^{k-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{k}{4}\cos^{k-4}\alpha\sin^4\alpha + \cdots\right) \\
&+ \mathrm{i}\left(\binom{k}{1}\cos^{k-1}\alpha\sin\alpha - \binom{k}{3}\cos^{k-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots\right).
\end{aligned}$$

对比左右两边复数的实部有

$$\begin{aligned}
\cos k\alpha &= \cos^k\alpha - \binom{k}{2}\cos^{k-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{k}{4}\cos^{k-4}\alpha\sin^4\alpha + \cdots \\
&= \cos^k\alpha - \binom{k}{2}\cos^{k-2}\alpha(1-\cos^2\alpha) + \binom{k}{4}\cos^{k-4}\alpha(1-\cos^2\alpha)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

将上式右边括号全部展开就得到了余弦函数的 n 倍角公式，这其实是关于 $\cos\alpha$ 的多项式，将其记为 $P_k(\cos\alpha)$，我们来计算 $P_k(\cos\alpha)$ 的最高次项系数 a_{k0}，依照上式显然有

$$a_{k0} = \binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \cdots + \binom{k}{2\left[\frac{k}{2}\right]} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{k}{2i} = 2^{k-1}.$$

其中符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 上述式子最后一个等号其实是关于组合数的一个常用公式（可以用归纳法证明，构造二项式也可以，请查阅相关资料）. 这样我们就得到了

$$\cos k\alpha = P_k(\cos\alpha) = 2^{k-1}\cos^k\alpha + a_{k1}\cos^{k-1}\alpha + \cdots + a_{k,k-1}\cos\alpha + a_{kk}.$$

回到原题，我们有

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n \\ \cos 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_2 & \cdots & \cos 2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \\ \cos(n-1)\alpha_1 & \cos(n-1)\alpha_2 & \cdots & \cos(n-1)\alpha_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n \\ 2\cos^2\alpha_1 - 1 & 2\cos^2\alpha_2 - 1 & \cdots & 2\cos^2\alpha_n - 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_1 + \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_2 + \cdots & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_n + \cdots \end{vmatrix}$$

根据行列式的计算性质，可依次将上面每一行 $\cos\alpha_i$ 的非最高次项都用该行上一行的常数倍消去，从而得到

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n \\ 2\cos^2\alpha_1 & 2\cos^2\alpha_2 & \cdots & 2\cos^2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \\ 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_1 & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_2 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$$

$$= 2^{1+2+\cdots+(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n \\ \cos^2\alpha_1 & \cos^2\alpha_2 & \cdots & \cos^2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \\ \cos^{n-1}\alpha_1 & \cos^{n-1}\alpha_2 & \cdots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

从而根据《教程》例 2.6 的范德蒙德行列式可知

$$|A| = 2^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\cos\alpha_i - \cos\alpha_j).$$

3.3 行列式的初步应用

1. 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0$，将 β_i 代入，得到

$$k_1 \sum_{j=1}^{s} a_{1j}\alpha_j + k_2 \sum_{j=1}^{s} a_{2j}\alpha_j + \cdots + k_s \sum_{j=1}^{s} a_{sj}\alpha_j = 0,$$

整理得到

$$\left(\sum_{i=1}^{s} k_i a_{i1}\right)\alpha_1 + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i a_{i2}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i a_{is}\right)\alpha_s = 0,$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的线性无关性可知

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} k_i a_{i1} = 0, \\ \sum_{i=1}^{s} k_i a_{i2} = 0, \\ \qquad \cdots \\ \sum_{i=1}^{s} k_i a_{is} = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

这其实是一个关于 $k_1, k_2, ..., k_n$ 的线性方程组，且其系数矩阵正是

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}'.$$

现若 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ 线性无关，则方程组 (3.6) 只有零解，按照《教程》命题 3.1 有 $|A'| = |A| \neq 0$. 反过来推理也成立. 从而命题得证.

2. $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. 利用 $A^{-1} = A^*/|A|$ 即可.

(1) $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, |A| = 3, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ -1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

(2) $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}, |A| = -1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, |A| = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. **(1)** 构造如下行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

可以看出，上述行列式其实是对原方程的系数矩阵添加了最后一行得到的行列式，最后一行取什么数都无所谓，对这行列式应用《教程》命题 3.2，有

$$a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \cdots + a_{in}A_{nn} = \delta_{in}|A|, i = 1, 2, ..., n-1.$$

其中 A_{nj} 为 a_{nj} 的代数余子式，即有 $A_{nj} = (-1)^{n+j}M_j$. 显然，在上式中，总有 $\delta_{in} = 0$，故

$$a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + a_{in}(-1)^{n-1}M_n = 0, i = 1, 2, ..., n-1.$$

这说明 $(M_1, -M_2, ..., (-1)^{n-1}M_n)$ 是原方程组的解向量.

(2) 如果题述方程组的系数矩阵的秩为 $r = n-1$，一方面，由第二章第 3 节题目 3 的结论可知，方程组的任意 $n-r = 1$ 个线性无关的解向量都是它的一个基础解系，另一方面，由《教程》命题 3.5，该方程组的系数矩阵有一 $n-1$ 阶子式不为 0，即 $M_1, M_2, ..., M_n$ 不全为零，也即 $\eta_1 = (M_1, -M_2, ..., (-1)^{n-1}M_n)$ 非零，结合 **(1)** 即说明 η_1 本身是该方程组的一个线性无关的解向量组. 从而 η_1 是该方程组的一个基础解系，方程组的任意解都可以表示为 $\gamma = k\eta_1$.

5. 由伴随矩阵的性质可知 $AA^* = |A|E$. 如果 $|A| \neq 0$，上式两边取行列式，由《教程》定理 3.4 得到 $|A||A^*| = |A|^n$，即 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 如果 $|A| = 0$，则 $AA^* = 0$，此时由《教程》第二章命题 4.6 知 $0 = \mathrm{r}(AA^*) \geqslant \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A^*) - n$，从而 $\mathrm{r}(A^*) \leqslant n - \mathrm{r}(A)$. 此时若又有 $\mathrm{r}(A) \geqslant 1$，则由 $\mathrm{r}(A^*) \leqslant n-1 < n$，从而 A^* 不满秩，由《教程》命题 3.1 知，$|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$ 成立. 若 $\mathrm{r}(A) = 0$，则 A 是零矩阵，此时 A^* 也是零矩阵，从而 $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$ 也成立.

6. 当 $\mathrm{r}(A) = n$ 时，矩阵满秩，从而由《教程》命题 3.1 知 $|A| \neq 0$，由本节题目 5 的结论可知 $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$，从而 A^* 也满秩，即 $\mathrm{r}(A^*) = n$.

当 $\mathrm{r}(A) = n-1$ 时，由《教程》第二章命题 4.6 知 $0 = \mathrm{r}(AA^*) \geqslant \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A^*) - n$，从而 $\mathrm{r}(A^*) \leqslant n - \mathrm{r}(A) = 1$，而由《教程》命题 3.5 知，$A$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式都不为零，由伴随矩阵的定义知 A^* 不是零矩阵，故 $\mathrm{r}(A^*) \geqslant 1$，从而 $\mathrm{r}(A^*) = 1$.

当 $\mathrm{r}(A) < n-1$ 时，由《教程》命题 3.5 知，A 的所有 $\mathrm{r}(A)+1$ 阶子式为零，而 $\mathrm{r}(A)+1 \leqslant n-1$，按解答下方的引理可知，$A$ 的所有 $n-1$ 阶子式也为 0，从而 $A^* = 0$，即 $\mathrm{r}(A^*) = 0$.

引理 设 p 是一个小于 n 的正整数，若一个 n 阶矩阵 A 的所有 p 阶子式为 0，则 A 的所有大于 p 阶的子式也为 0，即 A 的所有 $p, p+1, p+2, ..., n$ 阶子式都为 0.

证明：待证命题是对任意的 $m(p \leqslant m \leqslant n)$，$A$ 的所有 m 阶子式都为 0. 利用数学归纳法，当 $m = p$ 时命题成立，对某正整数 $k(p+1 \leqslant k \leqslant n)$，假设在 $m = k-1$ 时命题也都成立，则当 $m = k$ 时，任取 A 的一个 k 阶子式，记为 $|A_k|$，按照行列式展开公式，可以将 $|A_k|$ 展开成 $k-1$ 阶子式的线性组合，按照归纳假设，所有的 $k-1$ 阶子式为 0，从而 $|A_k| = 0$，故命题对 $m = k$ 也成立. 由数学归纳法知，命题对任意的 $m(p \leqslant m \leqslant n)$ 成立. ■

推论 将上面的引理中的 n 阶方阵 A 换成 $m \times n$ 的矩阵 A，结论也成立.

证明：A 的所有子式都可以看作 A 的某子方阵块的子式，而由上面的引理可知，A 的所有子方阵块的大于 p 阶的子式为 0，这就说明 A 的所有大于 p 阶的子式为 0. ■

批注. 本题可参考《指南》第二章例 2.2.

7. **(1)** 由《教程》定理 3.4 和行列式的性质可知

$$|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}||A||T| = |T|^{-1}|A||T| = |A|.$$

(2) 由《教程》定理 3.4 和行列式的性质可知

$$|B| = |T'AT| = |T'||A||T| = |T||A||T| = |T|^2|A| > 0.$$

8. 只需对矩阵作广义初等变换（第二章第 6 节题目 2 的解答的批注）即可. 我们有

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

对上式两边取行列式，由《教程》定理 3.4 和命题 2.8 知道，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \\ &= \left| \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} \\ &= |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.\end{aligned}$$

9. 记 $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$，那么可以将该二次曲线记作

$$X'PX = 0.$$

再记

$$X_1 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0 \\ \sin\theta & \cos\theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则坐标变换实际上等价于如下关系

$$X = TX_1.$$

经坐标变换后的曲线方程为

$$(TX_1)'P(TX_1) = X_1'(T'PT)X_1 = 0.$$

现在要证明 F 是不变量，实际上是要证明

$$|T'PT| = |P|.$$

而上式左边为 $|T'PT| = |T|^2|P|$，故只需证明 $|T|^2 = 1$，而事实上由《教程》命题 2.8，我们有

$$|T| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0 \\ \sin\theta & \cos\theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} |1| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

从而确实有 $|T|^2 = 1$. 所以 F 是一个不变量.

10. 按照克莱姆法则计算即可.

(1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

(2) $x_1 = -11/10, x_2 = 37/20, x_3 = -9/10, x_4 = -39/20$.

11. 我们设该多项式为 $f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{n-1} x^{n-1}$，那么按照题设 $f(a_i) = b_i$，我们有

$$\begin{cases} k_0 + a_1 k_1 + a_1^2 k_2 + \cdots + a_1^{n-1} k_{n-1} = b_1, \\ k_0 + a_2 k_1 + a_2^2 k_2 + \cdots + a_2^{n-1} k_{n-1} = b_2, \\ \cdots \\ k_0 + a_n k_1 + a_n^2 k_2 + \cdots + a_n^{n-1} k_{n-1} = b_n. \end{cases}$$

这恰是一个关于 $k_0, k_1, ..., k_{n-1}$ 的 n 个未知量 n 个方程的方程组，其系数矩阵的行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

这个行列式(的转置)正是《教程》例 2.6 的范德蒙德行列式,因为 $a_1, a_2, ..., a_n$ 两两不等，对上式有

$$|A| = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) \neq 0.$$

由克莱姆法则（《教程》定理 3.3）可知，上述方程组有唯一的一组解. 从而多项式 $f(x)$ 唯一存在.

批注. 可以给出该多项式的一个具体形式，参考第四章第 1 节题目 19.

12. **(1)** 根据行列式的计算性质知

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} \\
&= y_1\begin{vmatrix} x_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ x_2 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix} \\
&= y_1\begin{vmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + (y_2y_3\cdots y_n)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix} = 0(n \geqslant 2).
\end{aligned}
$$

当 $n = 1,2$ 时，上式最后一个等号不成立. 直接计算可知当 $n = 1$ 时，$|A| = 1+x_1y_1$，当 $n = 2$ 时，$|A| = (1+x_1y_1)(1+x_2y_2)-(1+x_1y_2)(1+x_2y_1) = (x_1-x_2)(y_1-y_2)$.

(2) 只需要注意到该行列式分解为两个范德蒙德行列式的乘积，根据《教程》定理 3.4 知

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix} &= \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| \\
&= \left(\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\right)^2.
\end{aligned}
$$

(3) 本题是从另一个方向建立的循环矩阵，通过不断互换矩阵的行将其转化为《教程》例 3.3 的循环矩阵的形式. 观察第一列元素的下标可知，这相当于将排列 $123\cdots n$ 重新排序成为排列 $1\ n\ n-1\cdots 2$（或者反过来），根据本章第 2 节题目 12 的引理可知，此过程需要进行两行互换的操作数量为

$N(1\ n\ n-1\cdots 2)=(n-1)(n-2)/2$，因此根据《教程》例 3.3 的结果有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{(n-1)(n-2)/2} f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

其中 $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}, \varepsilon_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{n}}, k=1,2,...,n.$

13. 本题在《教程》中疑似排版有误，原题如下：

> 13. 设 A,B 分别为数域 K 上的 $n\times m$ 与 $m\times n$ 矩阵. 证明:
> $$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n-AB||E_m-BA|.$$

现在修正本题并解答如下:

> 13. 设 A,B 分别为数域 K 上的 $n\times m$ 与 $m\times n$ 矩阵. 证明:
> $$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n-AB| = |E_m-BA|.$$

按照矩阵的广义初等变换的观点（第二章第 6 节题目 2 的解答的批注）可推知

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n-AB \end{pmatrix},$$

上面两边取行列式，由《教程》定理 3.4 和命题 2.8 知道

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}$$
$$= \left|\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}\right|$$
$$= \begin{vmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n-AB \end{vmatrix}$$
$$= |E_m||E_n-AB| = |E_n-AB|.$$

同理可证上式等于 $|E_m - BA|$.

14. 对 M 作初等列变换，首先将 M 第 m 列和 $m-1$ 列交换，再将 $m-1$ 列和 $m-2$ 列交换，依次进行下去直到 M 的第 m 列最终移动到第 1 列的位置，同理将 $m+1$ 列依次和它的前一列交换直到它移动到第 2 列，重复这个过程，总共经过 mn 次交换后，可以将 M 变换成如下矩阵

$$M \to \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

再由行列式的性质以及命题 2.8 知 $|M| = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$.

15. 记 $\mathbb{N}$ 为非负整数集，同时记

$$U = \{u \in \mathbb{N} | \text{存在 } t \in \mathbb{N}\text{，对任意 } s \in \mathbb{N} \text{ 且 } s \geqslant t\text{，} |A_{s,u}| = 0\}.$$

这个集合表达的含义是："若某个非负整数 $u_0 \in U$，则当 s 足够大时，总有 $|A_{s,u_0}| = 0$."

按照题目条件，正整数 $n \in U$（注意此 n 是题目已经取定的一个固定整数），故 U 是非空的. 如果 $0 \in U$，则当 s 足够大时，总有 $a_s = 0$，此时命题显然成立（只需取 S 足够大，$b_0 = 1, b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 即可满足题意）. 下面假设 $0 \notin U$. 此时 U 是正整数集的非空子集，所以必然能在 U 中取到最小正整数，将其设为 n_0，那么存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对任意 $s \geqslant k_0$，$|A_{s,n_0}| = 0$.

我们来证明如下的命题：存在非负整数 T，使得当 $s \geqslant T$ 时，$|A_{s,n_0-1}| \neq 0$，也即当 s 足够大时，$|A_{s,n_0-1}| \neq 0$ 恒成立.

用反证法，假设无论 T 多大，总存在 $s_p > T$ 使得 $|A_{s_p,n_0-1}| = 0$，取 $T = k_0$，即存在 $s_p > k_0$ 使得 $|A_{s_p,n_0-1}| = 0$，那么此时也有 $|A_{s_p,n_0}| = 0$. 以下将通过证明 $|A_{s_p+1,n_0-1}| = 0$. 来导出矛盾（下图中的蓝色框矩阵是 A_{s_p,n_0-1}，红色框矩阵和绿色框矩阵是 A_{s_p+1,n_0-1}）.

$$A_{s_p,n_0} = \begin{pmatrix} a_{s_p} & a_{s_p+1} & \cdots & a_{s_p+n_0-1} & a_{s_p+n_0} \\ a_{s_p+1} & a_{s_p+2} & \cdots & a_{s_p+n_0} & a_{s_p+n_0+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s_p+n_0-1} & a_{s_p+n_0} & \cdots & a_{s_p+2n_0-2} & a_{s_p+2n_0-1} \\ a_{s_p+n_0} & a_{s_p+n_0+1} & \cdots & a_{s_p+2n_0-1} & a_{s_p+2n_0} \end{pmatrix}.$$

我们考虑 A_{s_p,n_0} 的伴随矩阵 $A^*_{s_p,n_0} = (\Lambda_{ij})'$，其中 Λ_{ij} 是 A_{s_p,n_0} 在 i 行 j 列元素的代数余子式. 由于 $|A_{s_p,n_0}| = 0$，故 A_{s_p,n_0} 不满秩，从而根据题目

6 的结论可知，$\mathrm{r}(A^*_{s_p,n_0}) \leqslant 1$. 再根据第二章第 2 节题目 13 的结论知，存在 K 内的数 $p_1, p_2, ..., p_{n_0+1}; q_1, q_2, ..., q_{n_0+1}$ 使得

$$A^*_{s_p,n_0} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \cdots & \Lambda_{n_0+1,1} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{n_0+1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{1,n_0+1} & \Lambda_{2,n_0+1} & \cdots & \Lambda_{n_0+1,n_0+1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} p_1q_1 & p_1q_2 & \cdots & p_1q_{n_0+1} \\ p_2q_1 & p_2q_2 & \cdots & p_2q_{n_0+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n_0+1}q_1 & p_{n_0+1}q_2 & \cdots & p_{n_0+1}q_{n_0+1} \end{pmatrix}.$$

由于 $|A_{s_p,n_0-1}| = 0$，故 $\Lambda_{n_0+1,n_0+1} = 0$，从而上式中的 $p_{n_0+1}q_{n_0+1} = 0$，即 $p_{n_0+1} = 0$ 或 $q_{n_0+1} = 0$，进而 $\Lambda_{1,n_0+1}(= p_{n_0+1}q_1)$ 和 $\Lambda_{n_0+1,1}(= p_1q_{n_0+1})$ 必然有一个为零，又因为 $\Lambda_{1,n_0+1} = \Lambda_{n_0+1,1} = \pm|A_{s_p+1,n_0-1}|$，所以 $|A_{s_p+1,n_0-1}| = 0$. 以上我们从 $|A_{s_p,n_0-1}| = 0$ 推出了 $|A_{s_p+1,n_0-1}| = 0$，而此时依然有 $|A_{s_p+1,n_0}| = 0$ 成立，进而又可根据上述方法推出 $|A_{s_p+2,n_0-1}| = 0$，不断递推可知，对任意整数 $s \geqslant s_p$，都有 $|A_{s,n_0-1}| = 0$，这说明 $n_0 - 1 \in U$，与 n_0 是 U 中的最小元矛盾，从而命题得证.

根据上述的命题，我们已经对 $|A_{s,n}|$ 的行为有了大致的了解，只要 s 足够大，总有 $|A_{s,n_0}| = 0$ 且 $|A_{s,n_0-1}| \neq 0$.

现在任取一个足够大的 s_0，由于 $|A_{s_0,n_0}| \neq 0$，方程 $A_{s_0,n_0}X = 0$ 存在非零解 $X_0 = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n_0})'$，我们来说明 X_0 也是方程 $A_{s_0+1,n_0}X = 0$ 的非零解. 注意到 A_{s_0+1,n_0} 的前 n_0 行就是 A_{s_0,n_0} 的后 n_0 行，故 X_0 天然满足 $A_{s_0+1,n_0}X = 0$ 的前 n_0 行方程，只需考虑第 $n_0 + 1$ 行方程. 因为 $|A_{s_0+1,n_0-1}| \neq 0$，从而 A_{s_0+1,n_0-1} 的行向量线性无关，这可以推知 A_{s_0+1,n_0} 的前 n_0 行向量线性无关（第二章第 1 节题目 9），又因为 $|A_{s_0+1,n_0}| = 0$，从而 A_{s_0+1,n_0} 的行向量线性相关，此时 A_{s_0+1,n_0} 的第 $n_0 + 1$ 行向量可以被前 n_0 行向量线性表示（《教程》第二章命题 3.2）. 设 A_{s_0+1,n_0} 的行向量为 $P_1, P_2, ..., P_{n_0}, P_{n_0+1}$，则有

$$P_{n_0+1} = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_{n_0}P_{n_0},$$

右乘 X_0 有

$$P_{n_0+1}X_0 = c_1P_1X_0 + c_2P_2X_0 + \cdots + c_{n_0}P_{n_0}X_0 = 0.$$

从而 X_0 也满足 $A_{s_0+1,n_0}X = 0$ 的第 $n_0 + 1$ 行方程，故 X_0 也是方程 $A_{s_0+1,n_0}X = 0$ 的非零解. 按照此过程不断递推知对 $s \geqslant s_0$，此 X_0 均满足

方程 $A_{s,n_0}X=0$. 据此不难得知只需取 $S=s_0, b_0=x_0, b_1=x_1,\dots,b_{n_0}=x_{n_0}, b_{n_0+1}=b_{n_0+2}=\cdots=b_n=0$（注意 $n_0\leqslant n$），题目所需满足的任何等式都被包括在某个等式组 $A_{s,n_0}X_0=0$ 当中，因此得证.

批注. 本题可参考《指南》第二章例 2.6.

3.4　Laplace 展开式与 Binet-Cauchy 公式

1. **(1)** 由《教程》定理 4.1，取 $i_1=2, i_2=3$，即按照 2,3 行展开，有

$$\begin{aligned}|A|&=(-1)^{2+3}\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant 4}(-1)^{j_1+j_2}A\begin{Bmatrix}2&3\\j_1&j_2\end{Bmatrix}A\begin{bmatrix}2&3\\j_1&j_2\end{bmatrix}\\&=-(-1)^{1+4}A\begin{Bmatrix}2&3\\1&4\end{Bmatrix}A\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}\\&=\begin{vmatrix}2&8\\3&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&3\\4&7\end{vmatrix}=100.\end{aligned}$$

(2) 195.　**(3)** $-ayz-bxz-cxy$.

(4) 由《教程》定理 4.1，取 $i_1=1, i_2=2$，即按 1,2 行展开，有

$$\begin{aligned}|A|&=(-1)^{1+2}\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant 5}(-1)^{j_1+j_2}A\begin{Bmatrix}1&2\\j_1&j_2\end{Bmatrix}A\begin{bmatrix}1&2\\j_1&j_2\end{bmatrix}\\&=A\begin{Bmatrix}1&2\\1&2\end{Bmatrix}A\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}-A\begin{Bmatrix}1&2\\1&3\end{Bmatrix}A\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\\&=(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_4-x_3)\end{aligned}$$

2. 由《教程》定理 4.1，取 $i_1=n, i_2=n+1$，即按 $n, n+1$ 行（中间两行）展开，有

$$\begin{aligned}|A|&=(-1)^{n+n+1}\cdot\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant 2n}(-1)^{j_1+j_2}A\begin{Bmatrix}n&n+1\\j_1&j_2\end{Bmatrix}A\begin{bmatrix}n&n+1\\j_1&j_2\end{bmatrix}\\&=(-1)^{2n+1}(-1)^{n+n+1}A\begin{Bmatrix}n&n+1\\n&n+1\end{Bmatrix}A\begin{bmatrix}n&n+1\\n&n+1\end{bmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a_{n,n}&a_{n,n+1}\\a_{n+1,n}&a_{n+1,n+1}\end{vmatrix}A\begin{bmatrix}n&n+1\\n&n+1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

上式中的 $A\begin{bmatrix} n & n+1 \\ n & n+1 \end{bmatrix}$ 是 A 的一个 $2n-2$ 阶子式，并且与 A 具有类似的形式，继续对 $A\begin{bmatrix} n & n+1 \\ n & n+1 \end{bmatrix}$ 的 $n-1, n$ 行展开，又可得到 A 的一个 $2n-4$ 阶子式，故不断递推可得

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n+2} \\ a_{n+2,n-1} & a_{n+2,n+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n+3} \\ a_{n+3,n-2} & a_{n+3,n+3} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,2n} \\ a_{2n,1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{k,2n-k+1} \\ a_{2n-k+1,k} & a_{2n-k+1,2n-k+1} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{k=1}^{n} (a_{kk}a_{2n-k+1,2n-k+1} - a_{k,2n-k+1}a_{2n-k+1,k}).
\end{aligned}$$

3. 由《教程》定理 4.1，取定理中的 i_s 恰等于题目给定的 $i_s, s=1,2,...,k$，即按 $i_1, i_2, ..., i_k$ 行展开，有

$$\begin{aligned}
|A| = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k} \cdot & \\
& \sum_{1 \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_k \leqslant n} (-1)^{v_1+v_2+\cdots+v_k} A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{Bmatrix} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

我们来考虑其中的子式 $A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{Bmatrix}$，在 $v_1, v_2, ..., v_k$ 遍历 1 到 n 的所有正序排列过程中，只要 $v_1, v_2, ..., v_k$ 有一个取到 $j_q, 1 \leqslant q \leqslant l$，该子式就含一个零列，导致该子式的值为 0. 显然无论怎么排列，$v_1, v_2, ..., v_k$ 总是至少有一个取到 j_q，否则整个行列式 $|A|$ 至少应当有 $k+l$ 列，但 $k+l>n$，与 $|A|$ 是 n 阶行列式矛盾. 这意味着所有 $A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{Bmatrix}$ 都为零. 从而 $|A|=0$.

4. 由《教程》定理 4.1，取 $i_s = s, s=1,2,...,k$，即按 $1,2,...,k$ 行展开，有

$$\begin{aligned}
|M| = (-1)^{1+2+\cdots+k} \cdot & \\
& \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n} (-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_k} A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{Bmatrix} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \\
= (-1)^{k(k+1)/2} & (-1)^{n-k+1+n-k+2+\cdots+n} |A||B| \\
= (-1)^{(n+1)k} & |A||B|.
\end{aligned}$$

批注. 按照本章第 3 节题目 14 的方法可得 $|M|=(-1)^{(n-k)k}|A||B|$，事实上 $(-1)^{(n-k)k}=(-1)^{(n+1-1-k)k}=(-1)^{(n+1)k}(-1)^{(k+1)k}=(-1)^{(n+1)k}$，其中 $(k+1)k$ 总是偶数.

5. 由 Binet-Cauchy 定理（《教程》定理 4.2）得

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\\
=&\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 & \sum_{i=1}^{n}a_ib_i\\ \sum_{i=1}^{n}a_ib_i & \sum_{i=1}^{n}a_i^2\end{vmatrix}\\
=&\left|\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_n & b_n\end{pmatrix}\right|\\
=&\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}A\begin{Bmatrix}1 & 2\\ j & k\end{Bmatrix}B\begin{Bmatrix}j & k\\ 1 & 2\end{Bmatrix}\\
=&\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\begin{vmatrix}a_j & a_k\\ b_j & b_k\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_j & b_j\\ a_k & b_k\end{vmatrix}\\
=&\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)^2.
\end{aligned}$$

批注. 本题的 Lagrange 恒等式是从代数观点出发的，而从空间解析几何的观点来看，上式其实可以表示为

$$(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2. \tag{3.7}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 表示直角坐标系的空间向量. 在形式上，式 (3.7) 简洁优美，而且类似于勾股定理，故又称“二维勾股定理”. 当然，该式只能描述本题中 $n\leqslant 3$ 的情况，而不能描述更高维的情况，这是因为叉乘只对 $\mathbb{R}^3$ 中的向量有定义.

此外，Lagrange 恒等式也是《教程》定理 4.2 后面例题所述的 Cauchy 恒等式的一个特例，Cauchy 恒等式也可以用空间向量表达成

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

取式 (3.8) 中的 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$ 即可得到式 (3.7). 在空间解析几何当中，式 (3.8) 其实是混合积和二重叉乘的基本运算，而线性代数在此处提供了一种不同的理解视角.

6. 由本节题目 5 的 Lagrange 恒等式可知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 \geqslant 0.$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

批注. 这其实是欧式空间的柯西-布尼雅可夫斯基不等式.

7. 由行列式的计算性质可知

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ -b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ a_2 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -b_2 & \cdots & -b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} -1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ -1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} \\
&= (b_2 b_3 \cdots b_n) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \cdots & -1 \\ a_2 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} -1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0, \\
&\quad (n \geqslant 2).
\end{aligned}$$

当 $n = 1, 2$ 时，上式最后一个等号不成立. 直接计算可知当 $n = 1$ 时，$|A| = a_1 - b_1$，当 $n = 2$ 时，$|A| = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) - (a_1 - b_2)(a_2 - b_1) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$.

第四章　线性空间与线性变换

4.1　线性空间的基本概念

1.　首先检查在 $D(a,b)$ 上定义的运算是否良定义（加法、数乘是否对集合封闭），再逐条验证线性空间的八条规则即可. 显然它们都是满足的.

2.　**(1)** 是.　**(2)** 是.　**(3)** 是.

(4) 否，注意到该集合的加法定义不良，因为两个不平行于某非零向量的向量之和有可能平行于该非零向量，例如取一个非零平面向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，设所有不平行于 $\boldsymbol{p}$ 的平面向量的集合记为 V，显然 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\in V$，但是 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\notin V$.

(5) 是.

(6) 否，注意到题目指定集合不满足线性空间八条规则中的分配律 (vii). 设指定集合为 V，考虑 $k,l\in\mathbb{R}$，向量 $\alpha=\boldsymbol{i}\in V$，则有 $(k+l)\circ\alpha=\alpha=\boldsymbol{i}$，但 $k\circ\alpha+l\circ\alpha=\alpha+\alpha=2\boldsymbol{i}$，从而 $(k+l)\circ\alpha\neq k\circ\alpha+l\circ\alpha$.

(7) 是，显然运算是良定义的。只需验证八条规则，要注意该集合的零元素（零向量）为正实数 1. 那么 $\forall a,b,c\in\mathbb{R}^+,k,l\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}:(a\oplus b)\oplus c=ab\oplus c=abc=a\oplus bc=a\oplus(b\oplus c);\\
&\text{(ii)}:a\oplus b=ab=ba=b\oplus a;\\
&\text{(iii)}:\exists 1\in\mathbb{R}^+,a\oplus 1=a;\\
&\text{(iv)}:\exists 1/a\in\mathbb{R}^+,a\oplus 1/a=a(1/a)=1;\\
&\text{(v)}:1\circ a=a^1=a;\\
&\text{(vi)}:(kl)\circ a=a^{kl}=(a^k)^l=k\circ(l\circ a);\\
&\text{(vii)}:(k+l)\circ a=a^{k+l}=a^ka^l=(k\circ a)\oplus(l\circ a);\\
&\text{(viii)}:k\circ(a\oplus b)=(ab)^k=a^kb^k=(k\circ a)\oplus(k\circ b).
\end{aligned}$$

3.　首先检查运算是否良定义，对任意 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ 以及 $k\in\mathbb{Q}$，根据有理数加法和乘法的封闭性，有 $a+c,b+d,ka,kb\in\mathbb{Q}$，从而 $a+b\omega+c+d\omega=$

$(a+c)+(b+d)\omega \in \mathbb{Q}(\omega); k(a+b\omega) = ka+kb\omega \in \mathbb{Q}(\omega)$，运算是良定义的. 再逐条验证线性空间的八条运算规则，根据有理数加法和乘法的运算律可知，这也是显然成立的. 所以 $\mathbb{Q}(\omega)$ 构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.

4. 新的数乘显然是良定义的. 但我们注意到 $\forall \alpha \in V, \alpha \neq 0, \forall k, l \in \mathbb{R}, k, l \neq 0$，有

$$\text{(vii)}: (k+l)\circ\alpha = \frac{1}{k+l}\alpha \neq \frac{1}{k}\alpha + \frac{1}{l}\alpha = (k\circ\alpha)+(l\circ\alpha).$$

上式中间的等号不成立是因为，只需取 $k=l=1$，根据线性空间 V 对原有定义的数乘可知

$$\frac{1}{k}\alpha + \frac{1}{l}\alpha = \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right)\alpha = 2\alpha,$$

而

$$\frac{1}{k+l}\alpha = \frac{1}{2}\alpha,$$

如果等号成立，则必然有

$$\frac{1}{2}\alpha = 2\alpha,$$

按照线性空间的基本属性（《教程》第 1 节第 2 目，共 6 条），容易推知 $\alpha = 0$，这与我们的假设 $\alpha \neq 0$ 矛盾. 从而 V 对加法和新的数乘不构成线性空间.

5. 显然，这两个运算都是良定义的. 只需验证八条规则即可. 注意到 f 是一个双射，而 V 是一个线性空间，必然存在一个元素 $\eta \in A$，使得 $f(\eta) = 0 \in V$（这里的 0 是 V 中的零向量）. 那么 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k, l \in K$，有

$$\begin{aligned}
\text{(i)}: (\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma &= f^{-1}(f(f^{-1}(f(\alpha)+f(\beta)))+f(\gamma)) \\
&= f^{-1}(f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)) \\
&= f^{-1}(f(\alpha)+f(f^{-1}(f(\beta)+f(\gamma)))) \\
&= \alpha\oplus(\beta\oplus\gamma);
\end{aligned}$$

$$\text{(ii)}: \alpha\oplus\beta = f^{-1}(f(\alpha)+f(\beta)) = f^{-1}(f(\beta)+f(\alpha)) = \beta\oplus\alpha;$$

$$\text{(iii)}: \exists \eta \in A, \alpha\oplus\eta = f^{-1}(f(\alpha)+f(\eta)) = f^{-1}(f(\alpha)) = \alpha;$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)}: \exists -\alpha = f^{-1}(f(\eta)-f(\alpha)) \in A, \alpha\oplus(-\alpha) \\
= f^{-1}(f(\alpha)+f(f^{-1}(f(\eta)-f(\alpha)))) = \eta;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{v}): 1 \circ \alpha = f^{-1}(1f(\alpha)) = \alpha;\\
&(\mathrm{vi}): (kl) \circ \alpha = f^{-1}(klf(\alpha)) = f^{-1}(kf(f^{-1}(lf(\alpha)))) = k \circ (l \circ \alpha);\\
&(\mathrm{vii}): (k+l) \circ \alpha = f^{-1}((k+l)f(\alpha))\\
&\qquad = f^{-1}(f(f^{-1}(kf(\alpha))) + f(f^{-1}(lf(\alpha))))\\
&\qquad = (k \circ \alpha) \oplus (l \circ \alpha);\\
&(\mathrm{viii}): k \circ (\alpha \oplus \beta) = f^{-1}(kf(f^{-1}(f(\alpha) + f(\beta))))\\
&\qquad = f^{-1}(kf(\alpha) + kf(\beta))\\
&\qquad = f^{-1}(f(f^{-1}(kf(\alpha))) + f(f^{-1}(kf(\beta)))) = (k \circ \alpha) \oplus (k \circ \beta).
\end{aligned}
$$

故 A 成为 K 上的线性空间.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 1.3.

6. **(1)** 设 $k_1 \cos^2 x + k_2 \sin^2 x \equiv 0$，显然令 $x = 0$ 得到 $k_1 = 0$，令 $x = \pi/2$ 得到 $k_2 = 0$，从而原向量组线性无关，其秩为 2.

(2) 由于 $\cos^2 x + \sin^2 x - 1 \equiv 0$，从而原向量组是线性相关的，其秩只能小于 3. 又因为 $\cos x$ 和 $\sin x$ 是线性无关的，所以原向量组是线性相关的，其秩为 2.

(3) 设 $k_1 \sin x + k_2 \sin \sqrt{2}x \equiv 0$，令 $x = \pi$，得到 $k_2 \sin \sqrt{2}\pi = 0$，显然 $\sin \sqrt{2}\pi \neq 0$，从而 $k_2 = 0$，此时 $k_1 \sin x \equiv 0$，再令 $x = \pi/2$ 有 $k_1 = 0$，从而原向量组线性无关，其秩为 2.

(4) 设 $k_1 \sin \alpha x + k_2 \cos \beta x \equiv 0$，取 $x = 0$ 得到 $k_2 = 0$，此时有 $k_1 \sin \alpha x \equiv 0$，再取 $x = \pi/(2\alpha)$，可得 $k_1 = 0$. 从而原向量组线性无关，其秩为 2.

(5) 设 $k_0 + k_1 \sin x + \cdots + k_n \sin nx \equiv 0$，取 $x = 0$，得到 $k_0 = 0$，此时 $k_1 \sin x + k_2 \sin 2x + \cdots + k_n \sin nx \equiv 0$，考虑在 $x \in (0, \pi/n)$ 对该式子连续求 $n-1$ 次**二阶**微商，联立得到如下关于 $k_1, k_2, ..., k_n$ 的方程组：

$$
\begin{cases}
k_1 \sin x & +k_2 \sin 2x + \cdots & +k_n \sin nx = 0;\\
k_1 \sin x & +2^2 k_2 \sin 2x + \cdots & +n^2 k_n \sin nx = 0;\\
 & & \cdots\\
k_1 \sin x & +2^{2n-2} k_2 \sin 2x + \cdots & +n^{2n-2} k_n \sin nx = 0.
\end{cases}
$$

取其系数矩阵的行列式，并根据范德蒙德行列式（《教程》第三章例 2.6），

不难得到

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \cdots & \sin nx \\ \sin x & 2^2\sin 2x & \cdots & n^2 \sin nx \\ \sin x & 2^4 \sin 2x & \cdots & n^4 \sin nx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin x & 2^{2n-2}\sin 2x & \cdots & n^{2n-2}\sin nx \end{vmatrix} \\
&= \sin x \sin 2x \cdots \sin nx \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i^2-j^2),
\end{aligned}
$$

显然 $\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i^2-j^2)\neq 0$，而当 $x\in(0,\pi/n)$ 时，对 $k=1,2,...,n$ 都有 $0<kx<\pi$，进而 $\sin kx\neq 0$，故其系数行列式 $|A|\neq 0$，这说明关于上面 $k_1,k_2,...,k_n$ 的方程组只有零解，故 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，从而原向量组线性无关，秩为 $n+1$.

(6) 该向量组是线性无关的. 利用数学归纳法，现在对 $n=1,2$，孤向量组 1 和向量组 $1,\sin x$ 显然都线性无关. 下面假设 $n=m-1$ 时，向量组线性无关，则 $n=m$ 时，考虑 $k_0+k_1\sin x+k_2\sin^2 x+\cdots+k_m\sin^m x\equiv 0$，令 $x=0$，得到 $k_0=0$，此时 $k_1\sin x+k_2\sin^2 x+\cdots+k_m\sin^m x\equiv 0$，也即 $\sin x(k_1+k_2\sin x+\cdots+k_m\sin^{m-1}x)\equiv 0$，考虑 $x\in(0,\pi)$，$\sin x\neq 0$，从而上式变为 $k_1+k_2\sin x+\cdots+k_m\sin^{m-1}x\equiv 0$，再按照归纳假设，向量组 $1,\sin x,\sin^2 x,...,\sin^{m-1}x$ 线性无关，从而得到 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$. 这说明对 $n=m$ 向量组 $1,\sin x,\sin^2 x,...,\sin^m x$ 也线性无关. 由数学归纳法知，对任意正整数 n，向量组 $1,\sin x,...,\sin^n x$ 都线性无关，其秩为 $n+1$.

7. **(1)** 线性相关，秩为 1. 因为 $3=6\times\frac{1}{2},-7=(-14)\times\frac{1}{2}$，故 3 和 -7 都能被 1/2 线性表示. 因此 1/2 是一个极大线性无关部分组.

(2) 线性相关，秩为 2. 设 $k_1+k_2\omega=0,k_1,k_2\in\mathbb{Q}$，若 $k_2\neq 0$，则 $\omega=-\frac{k_1}{k_2}$ 为有理数，矛盾，所以 $k_1=k_2=0$. 即 $1,\omega$ 线性无关. 同时可以验证

$$
\begin{aligned}
&\omega^2=-1-\omega,\\
&\omega^3=1,\\
&\omega^4=\omega.
\end{aligned}
$$

故 $\omega^2,\omega^3,\omega^4$ 都能被 $1,\omega$ 线性表示，因此 $1,\omega$ 是一个极大线性无关部分组.

(3) 线性相关，秩为 2. 设 $k_1\omega+k_2\bar{\omega}=0,k_1,k_2\in\mathbb{Q}$，则

$$
-\frac{1}{2}(k_1+k_2)+\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}(k_1-k_2)=0.
$$

从而 $k_1+k_2=0, k_1-k_2=0$，即 $k_1=k_2=0$，$\omega,\bar{\omega}$ 线性无关. 同时 $\sqrt{3}\mathrm{i}=\omega-\bar{\omega}$，即 $\sqrt{3}\mathrm{i}$ 可以被 $\omega,\bar{\omega}$ 线性表示. 因此 $\omega,\bar{\omega}$ 是一个极大线性无关部分组.

8. 由本节题目 7**(2)** 的论证可知，$1,\omega$ 线性无关，同时因为 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的任意元素 $a+b\omega$ 显然已经被 $1,\omega$ 线性表示，因此，$1,\omega$ 是 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的一组基. $\dim\mathbb{Q}(\omega)=2$.

9. 设 K 上全体 n 阶对称矩阵组成的线性空间为 V，对任意 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，定义如下 n 阶矩阵

$$P_{ij}=\begin{cases}E_{ij}+E_{ji}, & i<j;\\ E_{ii}, & i=j.\end{cases}$$

则很容易知道 P_{ij} 为对称矩阵. 设 (I) 为由所有 $P_{ij}, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$ 组成的向量组，我们来证明 (I) 就是 V 的一组基. 首先，对任意对称矩阵 $A=(a_{ij})$，满足 $a_{ij}=a_{ji}$，有

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{ij}P_{ij},$$

故 V 中的任意一个向量都能被 (I) 线性表示. 其次，设

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}k_{ij}P_{ij}=0,$$

上式左边即为对称矩阵 (k_{ij})，从而 $k_{ij}=k_{ji}=0, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，即向量组 (I) 线性无关. 因此 (I) 就是 V 的一组基，V 的维数是 $\dim V=n(n+1)/2$.

10. 设 K 上全体 n 阶反对称矩阵组成的线性空间为 V，类似于上一题的构造，注意到 n 阶反对称矩阵主对角线元素都为 0，则对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，定义矩阵

$$Q_{ij}=E_{ij}-E_{ji},$$

设 (I) 为由所有 $Q_{ij}, 1\leqslant i<j\leqslant n$ 组成的向量组，则仿照上一题的证明可知 (I) 必然为一组基，V 的维数是 $\dim V=n(n-1)/2$.

11. **(5)** 维数为 2，$(1,0),(0,1)$ 为一组基. 设 $(k_1\circ(1,0))\oplus(k_2\circ(0,1))=0$，即有 $(k_1,\frac{k_1(k_1-1)}{2}+k_2)=0$，从而 $k_1=k_2=0$，$(1,0),(0,1)$ 线性无关. 又因为对该空间的任意向量 (p,q)，其中 $p,q\in\mathbb{R}$，令 $k_1=p,k_2=q-\frac{p(p-1)}{2}$，有 $(k_1\circ(1,0))\oplus(k_2\circ(0,1))=(p,q)$，故该空间的任意向量都可以被 $(0,1),(1,0)$ 线性表示.

(7) 维数为 1，正实数 e（自然对数的底）为一组基. 首先该线性空间的零向量为正实数 1，$\mathrm{e}\neq 1$，从而 e 作为非“零”孤向量组线性无关. 同时对任意正实数 a，令 $k=\ln a$，有 $k\circ\mathrm{e}=a$，从而任何正实数都可以被 e 线性表示.

12. 验证线性空间是显然的. 该线性空间的零元即为零矩阵. 因为 $\omega^3=1,\omega^4=\omega$，我们先尝试写出一些 A 的幂如下

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega^2&0\\0&0&\omega\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E,A^4=A,...$$

下面我们来证 E,A,A^2 即为该线性空间的一组基. 先来证线性无关，设

$$k_1E+k_2A+k_3A^2=0,$$

即有

$$\begin{pmatrix}k_1+k_2+k_3&0&0\\0&k_1+k_2\omega+k_3\omega^2&0\\0&0&k_1+k_2\omega^2+k_3\omega\end{pmatrix}=0.$$

从而有

$$\begin{cases}k_1&+k_2&+k_3&=0;\\k_1&+k_2\omega&+k_3\omega^2&=0;\\k_1&+k_2\omega^2&+k_3\omega&=0.\end{cases}$$

这是关于 k_1,k_2,k_3 的复数域上的线性方程[1]，其系数矩阵的行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\omega-1&\omega^2-1\\0&\omega^2-1&\omega-1\end{vmatrix}\\&=(\omega-1)^2-(\omega^2-1)^2\\&=-\omega(\omega+2)(\omega-1)^2\neq 0.\end{aligned}$$

[1] 尽管我们需要讨论的线性空间是实数域上的，但是并不妨碍我们在复数域上考虑该方程的解.

从而其系数矩阵行列式不为 0. 该线性方程组在复数域上无非零解，从而也无实数的非零解. 故 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. E, A, A^2 线性无关.

再来证对任何实数域上的 n 次多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 (a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$，$f(A)$ 都可被线性表示. 当 $n \leqslant 2$ 时是显然成立的，当 $n > 2$ 时，只需证明对任何一个 A 的高次幂 $A^k (k > 2)$ 都可被线性表示即可. 对任意 k，设 3 除 k 的余数为 r，则 r 只能为 $0, 1, 2$ 之一，我们有 $k = 3m + r, m, r \in \mathbb{Z}$，从而

$$A^k = A^{3m+r} = (A^3)^m A^r = E^m A^r = A^r.$$

从而 A^k 正是 E, A, A^2 三者之一. 故 $f(A)$ 总能被 E, A, A^2 线性表示. 从而 E, A, A^2 是一组基. 该线性空间维数为 3.

13. 证明是一组基是显然的，只需说明线性方程组 $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 + k_4\varepsilon_4 = 0$ 只有零解即可.

(1) $\beta = \frac{5}{4}\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon_2 - \frac{1}{4}\varepsilon_3 - \frac{1}{4}\varepsilon_4$.

(2) $\beta = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 + 2\varepsilon_2$.

14. 首先设

$$k_0 E + k_1 A + k_2 A^2 + \cdots + k_{m-1} A^{m-1} = 0,$$

其中 $k_0, k_1, ..., k_{m-1} \in K$. 如果 $k_0, k_1, ..., k_{m-1}$ 中至少有一个不为 0，设它们下标最大的那个为 $k_p (p \leqslant m-1)$，这意味着存在小于 m 次的非零多项式 $g(\lambda) = k_p\lambda^p + k_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + k_0 (k_p \neq 0)$ 使得 $g(A) = 0$，与题设中 f 是使得 $f(A) = 0$ 的最低次非零多项式矛盾（注意题设的多项式 f 要求了 $a_0 \neq 0$，所以指的是非零多项式，也即次数不为 $-\infty$）. 故 $k_0 = k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$. 从而 $E, A, A^2, ..., A^{m-1}$ 线性无关.

再由 $f(A) = 0$ 可知

$$A^m = -\frac{1}{a_0}(a_1 A^{m-1} + a_2 A^{m-2} + \cdots + a_m E), \tag{4.1}$$

A^m 可以由 $E, A, A^2, ..., A^{m-1}$ 线性表示. 现在我们来证明任何 $A^n, n \geqslant m$ 都可以被 $E, A, A^2, ..., A^{m-1}$ 线性表示，利用数学归纳法，首先 $n = m$ 的情况已经被证明，现在假设 $n = m+1, m+2, ..., k-1$ 时命题成立，我们对 (4.1) 两边同时左乘 A^{k-m}，则有

$$A^k = -\frac{1}{a_0}(a_1 A^{k-1} + a_2 A^{k-2} + \cdots + a_m A^{k-m}),$$

这说明，A^k 可以被 $A^{k-1}, A^{k-2}, \cdots, A^{k-m}$ 线性表示，而按照归纳假设，必然有 $A^{k-1}, A^{k-2}, \cdots, A^{k-m}$ 都可以 $E, A, A^2, ..., A^{m-1}$ 线性表示，从而 A^k

也可以被其线性表示. 即对 $n=k$ 命题也是成立的. 此时根据（第二类的）数学归纳法知命题对所有的正整数 $n\geqslant m$ 成立.

综上，$E,A,A^2,...,A^{m-1}$ 可以线性表示 K 中全体关于 A 的多项式，并且线性无关，故确实是一组基. 下面我们求 $(A-aE)^k,0\leqslant k\leqslant m$ 在这组基下的坐标. 注意到 A 和 E 可交换，由牛顿二项式，当 $0\leqslant k\leqslant m-1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&(A-aE)^k\\
=&\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}(-a)^{k-t}A^t\\
=&(-a)^kE+k(-a)^{k-1}A+\frac{1}{2}k(k-1)(-a)^{k-2}A^2+\cdots+A^k\\
=&\begin{pmatrix}E & A & A^2 & \cdots & A^k & A^{k+1} & \cdots & A^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-a)^k\\ k(-a)^{k-1}\\ \frac{1}{2}k(k-1)(-a)^{k-2}\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

右边的 m 维列向量即为所求坐标. 而对于 $(A-aE)^m$ 的坐标，按牛顿二项式展开后，只需先将 A^m 按式 (4.1) 用 $E,A,A^2,...,A^{m-1}$ 线性表示，再相应写出坐标即可.

15. 先写出从基 $E,A,A^2,...,A^{m-1}$ 到向量组 $E,A-aE,(A-aE)^2,...,(A-aE)^{m-1}$ 的过渡矩阵 T，即有

$$\begin{pmatrix}E & A-aE & (A-aE)^2 & \cdots & (A-aE)^{m-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & A & A^2 & \cdots & A^{m-1}\end{pmatrix}T,$$

T 的列向量就是 $(A-aE)^k$ 在基 $E,A,A^2,...,A^{m-1}$ 下的坐标，此时按本节题目 14 的结论可知

$$T=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2 & \cdots & (-a)^{m-1}\\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (m-1)(-a)^{m-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(-a)^{m-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

因为 T 是阶梯形，对角线全是 1，故满秩. 此时按《教程》命题 1.3 可知，$E,A-aE,(A-aE)^2,...,(A-aE)^{m-1}$ 正是线性空间 V 的一组基.

16. 可以按照《教程》例 1.17 的方法或利用线性方程组求解，这里提供一种较为直观的形式化运算的方法. 以下我们默认所有用字母表示的向量都为列向量，将 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ 和 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ 看作方阵来直接运算. 则由 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T$ 可得过渡矩阵为

$$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4).$$

设 β 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标分别为 X 和 Y，则由 $\beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)X$ 和 $\beta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)Y$ 得

$$\begin{aligned} X &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1}\beta; \\ Y &= (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^{-1}\beta. \end{aligned}$$

(1)

$$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/3 & -1 & -11/9 \\ 1/27 & 4/9 & -1/3 & -23/27 \\ 1/3 & 0 & 0 & -2/3 \\ -7/27 & -1/9 & 1/3 & 26/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} T &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \\ &= \begin{pmatrix} 3/13 & 2/13 & -6/13 & 5/13 \\ 5/13 & -1/13 & 3/13 & 4/13 \\ -2/13 & 3/13 & 4/13 & 1/13 \\ -3/13 & -2/13 & -7/13 & 8/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1}\beta \\ &= \begin{pmatrix} 3/13 & 2/13 & -6/13 & 5/13 \\ 5/13 & -1/13 & 3/13 & 4/13 \\ -2/13 & 3/13 & 4/13 & 1/13 \\ -3/13 & -2/13 & -7/13 & 8/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/13 \\ 5/13 \\ -2/13 \\ -3/13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
T &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)^{-1}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\\
&= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 3/4 & 7/4 & 1/2 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/2 & 3/4\\ -1/4 & 3/4 & 0 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},\\
Y &= (\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{-1}\beta\\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1\\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ -3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ -1/2\\ 4\\ -3/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

17. 亦即找到 $\xi \neq 0$，使得

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)^{-1}\xi = (\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{-1}\xi.$$

即

$$((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4) - (\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4))\xi = 0.$$

其中 $\xi \in K^4$. 将上式写成方程组的形式则有

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -6\\ -1 & -2 & -3 & -6\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\xi = 0.$$

解此线性方程组可得

$$\xi = k(-1,-1,-1,1)', k \in K.$$

18. 因为线性空间 $K[x]_n$ 的维数为 $\dim K[x]_n = n$（《教程》例 1.10），显然要想证明 $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ 是一组基，只需证明其线性无关即可. 设

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) \equiv 0,$$

按题设有 $f_i(a_j)=0, j\neq i$ 而 $f_i(a_i)\neq 0$，故对上式分别令 $x=a_1,a_2,...,a_n$ 即可得到 $k_1,k_2,...,k_n=0$. 从而 $f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)$ 线性无关，确实是一组基.

19. 只需令 $f(x)$ 为所谓的 Lagrange 插值多项式即可.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{x-a_j}{a_i-a_n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_j)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}. \end{aligned}$$

代入验证可知 $f(a_i)=b_i$ 确实成立，显然 f 的次数小于 n.

批注. 该多项式是唯一的，参考第三章第 3 节题目 11，或《教程》第一章命题 2.2 的推论 2.

20. 根据《教程》例 1.8，$\dim M_n(K)=n^2$. 考虑向量组 $E,A,A^2,...,A^{n^2}$ 共 $n+1$ 个向量，则它们显然是线性相关的. 从而存在不全为 0 的数 $k_0,k_1,k_2,...,k_{n^2}$ 使得

$$k_0E+k_1A+k_2A^2+\cdots+k_{n^2}A^{n^2}=0.$$

设不为 0 的 k_i 中下标最大的那个是 k_p，那么我们要找的多项式正是

$$f(x)=k_px^p+k_{p-1}x^{p-1}+\cdots+k_0(k_p\neq 0).$$

21&22&23. 我们直接来证明题目 23 的加法交换律，题目 21 和题目 22 其实是中间的两个步骤 **(a.)** 和 **(b.)**. 总的来说，我们的思路基于如下一个简单的观察：

$$\begin{aligned} -(-\alpha+(-\beta)) &= \beta+\alpha, \\ (-1)(-\alpha+(-\beta)) &= \alpha+\beta. \end{aligned}$$

第一个式子其实是负元素定义，第二个式子是数乘分配律，这两者相等就可以推出加法可交换，因此只需要朝着这个方向补充其中细节即可. 这些细节很多已经在《教程》本节第 2 目“线性空间的基本属性”中被提及了，但是其中的推导可能用到了加法交换律，为了严谨起见，这里不直接引用《教程》的内容，而是从线性空间的七条规则（排除了交换律）重新推导.

以下假设 V 是满足七条规则的集合，为了区别 V 中的零元素和数域中的 0，我们将 V 中的零元素记作 $\mathbf{0}$，而数字 0 的记号不变.

证明前先对两条规则作一点解释. 规则 (iii) 要求 V 存在一个 $\mathbf{0}$，满足对任意 $\alpha \in V$，都有 $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$，没有要求“$\mathbf{0}$”的唯一性，因此我们并不能立即看出此 V 中是否还有其他“零元素”. 然而规则 (iv) 要求，对任意 α，存在 β，使得 $\alpha + \beta = \mathbf{0}$，那么这里等式右边的“$\mathbf{0}$”是否会因为其（潜在的）不唯一性而产生歧义呢？答案是没有歧义! 从概念上讲，规则 (iv) 里等式右边的 $\mathbf{0}$ 是指在规则 (iii) 中某一个*取定好的*零元素，这就是说，规则 (iv) 的等式只需对一个固定的零元素成立即可，即便有其他的零元素 $\mathbf{0}' \neq \mathbf{0}$ 满足 (iii)，我们也不需要此 $\mathbf{0}'$ 满足规则 (iv) 的等式[2].

下面开始证明，证明过程分为六步.

(a.) 对任意 $\alpha \in V$，$\mathbf{0} + \alpha = \alpha$.

由规则 (iv)，对任意 $\alpha \in V$，存在负元素 $\beta, \gamma \in V$，使得

$$\alpha + \beta = \mathbf{0};$$
$$\beta + \gamma = \mathbf{0}.$$

再由规则 (i) 和规则 (iii)，首先有

$$\mathbf{0} + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \mathbf{0} = \alpha. \tag{4.2}$$

从而有

$$\mathbf{0} + \gamma = (\mathbf{0} + \mathbf{0}) + \gamma = \mathbf{0} + (\mathbf{0} + \gamma) = \mathbf{0} + \alpha.$$

由上面两式得到 $\mathbf{0} + \alpha = \alpha$. ■

(b.) 对于 α 的某个负元素 β，也有 $\beta + \alpha = \mathbf{0}$.

由于上一条规则 **(a.)** 对任意 α 都成立，故对上述取定的 γ 自然也成立. 从而有

$$\mathbf{0} + \gamma = \gamma$$

再由式 (4.2) 得到 $\alpha = \gamma$. 因此 $\mathbf{0} = \beta + \gamma = \beta + \alpha$. ■

上面两条规则 **(a.)** 和 **(b.)** 确定了零元素既是“左零”也是“右零”，负元素既是“左负”也是“右负”.

(c.) 零元素唯一.

---

[2]注意，虽然我们定义了零元素就是 $\mathbf{0}$，但在自然语言的直觉上，我们对“零元素”一词，代表的是如下关于 ε 的方程 (E) 的任意解（或者说通解），还是某一个预先指定的特解，是天然模糊不清的，因为“零元素”这类词语具有一定的泛指意义，我们总是有按前者解释的倾向.

$$(\mathrm{E}): \forall \alpha \in V, \alpha + \varepsilon = \alpha.$$

如果 (E) 的解是不唯一的，就会出现这样的论断：“某个向量 ε_0 是 (E) 的解，但它不一定是零元素.”听起来有些让人感到困惑. 当然现实中这种情况其实不会发生.

为了清晰起见，我们的叙述认为“零元素”一词指代 (E) 的任意解，而“$\mathbf{0}$”指代 (E) 的某一特解.

设 V 中含有其他零元素 $\mathbf{0}'$ 也满足 (iii)，一方面，根据其本身定义，有

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}.$$

另一方面，根据上述的规则 **(a.)**，有

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'.$$

由上面两式得 $\mathbf{0}=\mathbf{0}'$. ■

(d.) 任意元素的负元素唯一.

对任意 $\alpha\in V$，设 β 和 β' 都是其负元素，则根据规则 **(a.)** 和 **(b.)** 有

$$\beta=\beta+\mathbf{0}=\beta+(\alpha+\beta')=(\beta+\alpha)+\beta'=\mathbf{0}+\beta'=\beta'.\blacksquare$$

确认了唯一性之后，以下把向量 α 的负元素记作 $-\alpha$.

(e.) 对任意 $\alpha\in V$，$0\alpha=\mathbf{0},-\alpha=(-1)\alpha$.

由规则 (vii) 可得

$$0\alpha=(0+0)\alpha=0\alpha+0\alpha.$$

上式两边同时右加上 -0α，有

$$0\alpha+(-0\alpha)=(0\alpha+0\alpha)+(-0\alpha).$$

上式左边为 $\mathbf{0}$，右边根据规则 (i) 重新结合，有

$$\mathbf{0}=0\alpha+(0\alpha+(-0\alpha))=0\alpha+\mathbf{0}=0\alpha.$$

结合由规则 (v) 和 (vii)，有

$$\mathbf{0}=0\alpha=(1+(-1))\alpha=1\alpha+(-1)\alpha=\alpha+(-1)\alpha$$

根据上式，由规则 **(d.)**（负元素唯一）得到 $-\alpha=(-1)\alpha$. ■

(f.) **(加法交换律)** 对任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

现在考虑元素 $-\alpha+(-\beta)$ 的负元素，一方面由规则 (i) 和负元素的性质有

$$\begin{aligned}(-\alpha+(-\beta))+(\beta+\alpha)&=(-\alpha+((-\beta)+\beta))+\alpha\\&=(-\alpha+\mathbf{0})+\alpha\\&=-\alpha+\alpha=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

根据上式，由规则 **(d.)**（负元素唯一）的唯一性有

$$-(-\alpha+(-\beta))=\beta+\alpha.$$

. 另一方面由规则 (v),(vi),(viii) 和 **(e.)** 得到

$$\begin{aligned}(-1)(-\alpha+(-\beta)) &= (-1)\left((-1)\alpha+(-1)\beta\right)\\ &= (-1)((-1)\alpha)+(-1)((-1)\beta)\\ &= ((-1)(-1))\alpha+((-1)(-1))\beta\\ &= 1\alpha+1\beta\\ &= \alpha+\beta.\end{aligned}$$

综合上面两式，并根据规则 **(e.)**，应该有 $-(-\alpha+(-\beta))=(-1)(-\alpha+(-\beta))$，从而得到加法交换律

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.\blacksquare$$

批注. 21、22、23 题可参考《指南》第三章例 1.4.

24. 注意到本节题目 2**(6)** 的例子，线性空间的八条规则中，它只有规则 (vii) 不满足，而其他规则全部满足. 这就说明了并不是任意一条都可以规则都可由其他规则推出.

4.2 子空间与商空间

1. **(1)** 任取 $B,D\in C(A),k\in K$，则 $AB=BA,AD=DA$，从而

$$\begin{aligned}A(B+D)&=AB+AD=BA+DA=(B+D)A,\\ A(kB)&=kAB=(kB)A.\end{aligned}$$

从而 $B+D\in C(A),kB\in C(A)$. 根据《教程》命题 2.1 知 $C(A)$ 是子空间.

(2) 由对角矩阵的性质可知任意对角矩阵都可以和 A 交换，而根据第二章第 5 节题目 5 的结论知，任何与 A 交换的矩阵都是对角矩阵. 从而 $C(A)$ 正是全体对角矩阵. 显然 $E_{ii},i=1,2,...,n$ 是 $C(A)$ 的一组基，维数为 $\dim C(A)=n$.

2. 设矩阵 $D=(d_{ij})$ 与 A 可交换，则有

$$AD=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 3d_{11}+d_{21}+2d_{31} & 3d_{12}+d_{22}+2d_{32} & 3d_{13}+d_{23}+2d_{33} \end{pmatrix},$$

$$DA=\begin{pmatrix} d_{11}+3d_{13} & d_{12}+d_{13} & 2d_{13} \\ d_{21}+3d_{23} & d_{22}+d_{23} & 2d_{23} \\ d_{31}+3d_{33} & d_{32}+d_{33} & 2d_{33} \end{pmatrix}.$$

令 $AD=DA$，对比元素可知，只需满足如下关系即可

$$\begin{aligned} &d_{13}=d_{23}=0, \\ &d_{31}=-3d_{11}-d_{21}+3d_{33}, \\ &d_{32}=-3d_{12}-d_{22}+d_{33}. \end{aligned}$$

可见把 $d_{11},d_{21},d_{12},d_{22},d_{33}$ 当作自由未知量，取定一组值后其他元素随之确定. 那么我们可取 $C(A)$ 的一组基如下

$$D_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, D_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

容易验证上述矩阵线性无关，并且对任意矩阵 $D=(d_{ij})\in C(A)$，都有

$$D=d_{11}D_1+d_{12}D_2+d_{21}D_3+d_{22}D_4+d_{33}D_5.$$

从而确实是一组基，并且 $\dim C(A)=5$.

3. 取 $(1,0)\in M$，有

$$(1,0)\oplus(1,0)=(2,1)\notin M.$$

而任取 $(0,b_1),(0,b_2)\in N, k\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{gathered} (0,b_1)\oplus(0,b_2)=(0,b_1+b_2)\in N, \\ k\circ(0,b_1)=(0,kb_1)\in N. \end{gathered}$$

根据《教程》命题 2.1，M 不是子空间，N 是子空间.

4. 否. 注意到题目所谈及的数域 K 不一定为有理数域，比如若 $K=\mathbb{R}$，取 $\alpha=(1,1,...,1)\in M, k=\sqrt{2}\in K$，则 $k\alpha=(\sqrt{2},\sqrt{2},,...,\sqrt{2})\notin M$. 从而 M 对数乘不封闭，由《教程》命题 2.1 知 M 不是子空间.

5. 是. 任取 $a,b\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Q}$，有 $a+b\in\mathbb{R}, ka\in\mathbb{R}$，由《教程》命题 2.1 知 $\mathbb{R}$ 是子空间.

6. 否. 取 $\alpha=1\in\mathbb{R}, k=\mathrm{i}\in\mathbb{Q}(\mathrm{i})$，则有 $k\alpha=\mathrm{i}\notin\mathbb{R}$，从而 $\mathbb{R}$ 对数乘不封闭，由《教程》命题 2.1 知 $\mathbb{R}$ 不是子空间.

7. 取这个子空间的一组基 (I)：$\eta_1,\eta_2,...,\eta_s$，则由第二章第 4 节题目 13 的结论可知，存在 K 上的一个齐次线性方程组以 (I) 为基础解系，从而解空间正是 $L(\eta_1,\eta_2,...,\eta_s)=M$. 若该子空间为零子空间，取方程组 $EX=0$ 即可.

8. 设数域 K 上的线性空间 V 有 n 个真子空间 $M_1,M_2,...,M_n$，需证明 $M_1\cup M_2\cup...\cup M_n\subset V$ [3].

利用数学归纳法，当 $n=1$ 时，$M_1\subset V$ 显然成立. 以下假设命题对 $n=k-1$ 成立，则对 $n=k$，设

$$N_k=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k\subseteq V.$$

现取一向量 $\alpha\in V$，满足 $\alpha\notin M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_{k-1}$.（注意，这样的 α 是存在的，否则 $V=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_{k-1}$ 与归纳假设矛盾，后面的 β 也是一样）此时如果还成立 $\alpha\notin M_k$，则其实已经说明了 $N_k\subset V$. 故只考虑 $\alpha\in M_k$.

再取 V 中另外一向量 $\beta\notin M_2\cup M_3\cup\cdots\cup M_k$，与 α 类似，如果 $\beta\notin M_1$，则已经说明了 $N_k\subset V$，只考虑 $\beta\in M_1$. 此时我们已经得到了两个向量 α,β，其中 α 仅仅属于 M_k，β 仅仅属于 M_1.

现在引入一个参数 $t\in K$ 且 $t\neq 0$，考虑如下的向量:

$$\gamma_t=\alpha+t\beta.$$

首先 γ_t 依旧是线性空间 V 内的向量. 但对任何非零的 $t\in K$，γ_t 既不属于 M_1，也不属于 M_k，若不然，不妨设 $\gamma_t\in M_k$，则根据 $-\alpha\in M_k$ 和线性空间的运算性质，有 $(1/t)(\gamma_t-\alpha)\in M_k$，即 $\beta\in M_k$，这与 β 仅仅属于 M_1 矛盾，同理可证 $\gamma_t\notin M_1$.

[3] $A\subset B$ 表示 A 真包含于 B，即 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$.

下面我们证明，对某个 $M_i(2 \leqslant i \leqslant k-1)$，如果存在 $t_i \in K$ 使得 $\gamma_{t_i} \in M_i$，则 t_i 是唯一的. 假设有两个不同的 $p, q(p, q \neq 0, p \neq q)$ 使得 $\gamma_p, \gamma_q \in M_i$，那么根据线性空间的性质 $\frac{1}{p-q}(\gamma_p - \gamma_q) \in M_i$，即得到 $\beta \in M_i$，与 β 定义矛盾. 从而 t_i 确实是唯一的.

根据我们上述的讨论，最多存在 $k-2$ 个数 $t_2, t_3, ..., t_{k-1}$，使得 $\gamma_{t_i} \in M_i$. 故我们取数域 K 中的一个数 t_0，使得 $t_0 \neq t_2, ..., t_{k-1}$（因为数域是无限的，所以这样的 t_0 总是存在），则有 $\gamma_t \notin M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$，即 $N_k \subset V$. 从而命题对 $n = k$ 亦成立.

根据数学归纳法知，命题对所有正整数 n 都成立.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 2.6. 应当说本题证明的构思较为考验纯代数思维. 事实上，这个命题被称之为非完全覆盖原理（或填不满原理），它对无限域上的线性空间成立，上面展示的正是其经典证明方法.

9. 类似第 1 节题目 6**(5)** 的解答过程可证向量组 $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x$ 线性无关，显然是其生成的空间 $L(1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x)$ 的一组基，并且该空间的维数 $\dim L(1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x) = 4$.

10. 取 M 的一组基作为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 就可满足题意. 如果 M 为零子空间则单取向量 $\alpha_1 = 0$ 即可.

11. 一方面，

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \{t_1\alpha + t_2\beta | t_1, t_2 \in K\} \\ &= \{t_1 k_1^{-1}(-k_2\beta - k_3\gamma) + t_2\beta | t_1, t_2 \in K\} \\ &= \{(t_2 - k_2 k_1^{-1} t_1)\beta - k_3 k_1^{-1} t_1 \gamma | t_1, t_2 \in K\} \subseteq L(\beta, \gamma), \end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} L(\beta, \gamma) &= \{t_1\beta + t_2\gamma | t_1, t_2 \in K\} \\ &= \{t_1\beta + t_2 k_3^{-1}(-k_1\alpha - k_2\beta) | t_1, t_2 \in K\} \\ &= \{-k_1 k_3^{-1} t_2 \alpha + (t_1 - k_2 k_3^{-1} t_2)\beta | t_1, t_2 \in K\} \subseteq L(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

从而 $L(\beta, \gamma) = L(\alpha, \beta)$.

12. 即找 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关部分组. 有很多种方法求解，可以利用《教程》第二章的筛选法（命题 1.6），也可利用《教程》第二章例 2.2 或例 2.3 的办法. 以下设 $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

(1) $\dim V=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一组基（$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$）.

(2) $\dim V=2$，α_1,α_2 是一组基（$3\alpha_1+2\alpha_2=\alpha_3, 2\alpha_1+3\alpha_2=\alpha_4$）.

13. 可求得此线性方程组的一组基础解系为

$$\eta_1=(-1,24,9,0),\eta_2=(2,-21,0,9).$$

则 η_1,η_2 就是解空间的一组基，其维数是 2.

14. 记 M,N 分别为 α_i,β_i 所生成的子空间. 我们按照《教程》例 2.7 所给出的办法求解. 首先求 $M+N$ 的一组基，即求全部向量 α_i,β_j 的一个极大线性无关部分组. 再根据维数公式和向量的表法确定 $M\cap N$ 的维数和一组基. 利用《教程》第二章例 2.3 的办法可以很轻松看出各个向量之间的线性相关或线性无关性，以及相互表示关系.

(1) 所有向量的一个极大线性无关部分组为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$，并且 $\beta_2=-\alpha_1+4\alpha_2+3\beta_1$. 从而 $\dim(M+N)=3$，$M+N$ 的一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$. 又显然 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 也线性无关，从而 $\dim M=2,\dim N=2$，由维数公式得到 $\dim(M\cap N)=1$. 而 $-\alpha_1+4\alpha_2=-3\beta_1+\beta_2=(-5,2,3,4)\in M\cap N$. 且 $(-5,2,3,4)\neq 0$，从而 $-\alpha_1+4\alpha_2$ 是 $M\cap N$ 的一组基.

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 线性无关，从而 $M+N$ 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$. 由维数公式得 $\dim M\cap N=0$. 从而 $M\cap N=\{0\}$，没有基.

(3) 所有向量的一个极大线性无关部分组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$. 并且 $\beta_1=3\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$. 从而 $\dim(M+N)=4$，$M+N$ 的一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$. 显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1,β_2 也线性无关，从而 $\dim M=3,\dim N=2$ 由维数公式得到 $\dim(M\cap N)=1$. 又因为 $\beta_1=3\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=(2,5,-6,-5)\in M\cap N$ 且 $(2,5,-6,-5)\neq 0$，从而 β_1 是 $M\cap N$ 一组基.

15. 一方面，对任何解向量 $\eta=(x_1,x_2,...,x_n)\in N$，都会有

$$\eta=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n, i=1,2,...,m. \tag{4.3}$$

也即 $\eta\in M_i(i=1,2,...,m)$，从而 $N\subseteq M_i$，即 $N\subseteq M_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_m$.

另一方面，对任何解向量 $\gamma=(x_1,x_2,...,x_n)\in M_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_m$，都有 $\gamma\in M_i, i=1,2,...,m$，必然也成立 (4.3)，从而是齐次线性方程组的一个解，即 $\gamma\in N$. 进而 $M_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_m\subseteq N$.

综上，$N=M_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_m$.

16. 如果一个矩阵 A 既是反对称矩阵，又是对称矩阵，则有 $A' = A = -A$，从而 $A = 0$. 这表示 $M \cap N = \{0\}$. 由《教程》定理 2.2 知 $M + N$ 是直和. 对任何矩阵 $B \in M_n(K)$，将 B 分解为

$$B = \frac{B + B'}{2} + \frac{B - B'}{2},$$

显然其中 $\frac{B+B'}{2}$ 是对称矩阵,而 $\frac{B-B'}{2}$ 是反对称矩阵. 即 B 总可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和,$M_n(K) \subseteq M \oplus N$,从而 $M_n(K) = M \oplus N$.

17. 否. 注意到单位矩阵既是上三角矩阵，又是下三角矩阵. 从而 $E \in M \cap N$，也即 $M \cap N \neq \{0\}$，由《教程》定理 2.2 知 $M + N$ 不是直和.

18. 首先设 $\gamma = (x_1, x_2, ..., x_n) \in M_1, M_2$，则 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nx_1 = 0$，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，$\gamma = 0$. 从而 $M_1 \cap M_2 = \{0\}$，由《教程》定理 2.2 知 $M_1 + M_2$ 是直和. 下面考虑 M_1, M_2 的维数，第一个线性方程组的系数矩阵的秩显然为 1，故解空间维数为 $\dim M_1 = n - 1$. 第二个线性方程组实际上等价于如下方程组

$$\begin{cases} x_1 & & & - x_n & = 0; \\ & x_2 & & - x_n & = 0; \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & x_{n-1} - x_n & = 0. \end{cases}$$

其系数矩阵的秩为 $n-1$，从而其解空间维数为 $\dim M_2 = n-(n-1) = 1$. 因此由《教程》定理 2.3，$\dim(M_1 \oplus M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = n$，即 $M_1 \oplus M_2$ 是 V 的 n 维子空间，这很容易推知 $V = M_1 \oplus M_2$（见批注）.

批注. 设 V 是 n 维线性空间，则 V 是 V 唯一的 n 维子空间. 事实上，设 M 是 V 的 n 维子空间，取其一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$，它包含 n 个线性无关的向量，从而也是 V 的一组基，此时必然有 $V = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = M$. 这件事情比较平凡，但以后会经常用到.

19. 先来证明 $M_1 + M_2 + N$ 是直和,只需反复利用《教程》定理 2.3(ii),即直和等价于零的表法唯一. 设 $0 = m_1 + m_2 + n$,其中 $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, n \in N$，因为 $M = M_1 \oplus M_2$，有 $m_1 + m_2 \in M$，又因为 $V = M \oplus N$，从而由零的表法唯一得 $m_1 + m_2 = 0, n = 0$，又由 $M = M_1 \oplus M_2$，再由零的表法唯一得 $m_1 = m_2 = 0$，从而 $m_1 = m_2 = n = 0$，因此子空间 $M_1 + M_2 + N$ 是直

和. 再由《教程》定理 2.3 关于维数的公式，有

$$\begin{aligned}\dim(M_1 \oplus M_2 \oplus N) &= \dim M_1 + \dim M_2 + \dim N \\ &= \dim(M_1 \oplus M_2) + \dim N \\ &= \dim M + \dim N \\ &= \dim(M \oplus N) \\ &= \dim V,\end{aligned}$$

从而 $M_1 \oplus M_2 \oplus N$ 是 V 的 $\dim V$ 维向量空间，因此 $V = M_1 \oplus M_2 \oplus N$.

批注. 本题说明直和运算可以随意去括号，即 $(M_1 \oplus M_2) \oplus M_3 = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$，类似可证 $M_1 \oplus (M_2 \oplus M_3) = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$，就得出了直和运算的结合律，这和实数加法的去括号与结合律是类似的，但是请注意其逻辑上和实数加法有一些微妙的区别.

在很多传统的场合下，实数加法可去括号是一种由结合律导出的“记号”，而不是一个定理，基于 $(a+b)+c = a+(b+c)$，即三数加法运算与计算次序无关，我们定义运算 $a+b+c$ 为 $(a+b)+c$，即多元加法运算实际上是用二元加法“归纳”出来的，这是一种间接定义.

而《教程》在定义多重直和的时候，并不是通过这种方式“$M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 = (M_1 \oplus M_2) \oplus M_3$”来归纳定义的，而是直接定义（请阅读《教程》正文），在此定义方式下，三者“$M_1 \oplus M_2 \oplus M_3, (M_1 \oplus M_2) \oplus M_3, M_1 \oplus (M_2 \oplus M_3)$”在逻辑上都不是直接相同的（甚至于 $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ 的存在性都没有直接保证 $M_1 \oplus M_2$ 存在）. 当然，现实中它们确实都平凡地保持一致，但应当说这是一种定理.

20. A 满秩说明 A 的行向量都线性无关，从而 B, C 的行向量也都线性无关，即 $\mathrm{r}(B) = k, \mathrm{r}(C) = n-k$. 由线性方程组解的理论可知，有

$$\begin{aligned}\dim M &= n - \mathrm{r}(B) = n-k; \\ \dim N &= n - \mathrm{r}(C) = k.\end{aligned}$$

我们来证明 $M+N$ 为直和. 设 $X_t \in M \cap N$，因为 A 满秩，故线性方程组 $AX = 0$ 只有零解，从而

$$X_t \in M \cap N \Longleftrightarrow \begin{cases} BX_t = 0; \\ CX_t = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow AX_t = 0 \Longleftrightarrow X_t = 0.$$

这说明 $M \oplus N = \{0\}$. 由《教程》定理 2.2 知，$M+N$ 是直和，且

$$\dim(M \oplus N) = \dim M + \dim N = n.$$

这说明 $M\oplus N$ 是 K^n 的 n 维子空间，从而 $K^n=M\cap N$.

21. 首先证明 $M+(N\cap L)$ 是直和，因为 $M+L$ 是直和，由《教程》定理 2.2 知 $M\cap L=\{0\}$，那么有 $M\cap(N\cap L)=(M\cap L)\cap N=\{0\}\cap N=\{0\}$，从而 $M+(N\cap L)$ 是直和.

现在按 $V=M\oplus L$，V 中的任意向量 v 都可以表示成 $v=m+l$，其中 $m\in M,l\in L$，因为 $N\subseteq V$，将 v 取为 N 中的一个向量 $n\in N$，设其可表示为 $n=m_1+l_1$，其中 $m_1\in M\subseteq N,l_1\in L$，由线性空间的性质，$l_1=n-m_1\in N$，从而 $l_1\in N\cap L$. 这说明 N 中的任何一个向量都可以表示为 M 的向量和 $N\cap L$ 的向量之和，从而 $N=M\oplus(N\cap L)$.

22. 子空间的和与直和的交换律其实是比较平凡、并且符合直觉的事情. 一方面由子空间和的定义可知，任取 $\alpha\in M_1+M_2+\cdots+M_k$，有

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k(\alpha_j\in M_j,j=1,2,...,k),$$

按加法交换律有

$$\alpha=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}(\alpha_j\in M_j,j=1,2,...,k).$$

这说明 $M_1+M_2+\cdots+M_k$ 的任何向量也都可以表示为 $M_{i_1},M_{i_2},...,M_{i_k}$ 依次各取一个向量再取和，从而 $\sum_{j=1}^k M_j\subseteq\sum_{j=1}^k M_{i_j}$. 反过来推导当然也成立. 故 $\sum_{j=1}^k M_j=\sum_{j=1}^k M_{i_j}$. 因此子空间的和具有交换律.

另一方面由《教程》定理 2.3 知，若 $M_1+M_2+\cdots+M_k$ 是直和则必然有

$$\dim\sum_{j=1}^k M_j=\sum_{j=1}^k\dim M_j,$$

此时按照子空间和的交换律以及加法交换律有

$$\dim\sum_{j=1}^k M_{i_j}=\sum_{j=1}^k\dim M_{i_j}.$$

所以 $M_{i_1}+M_{i_2}+\cdots+M_{i_k}$ 也是直和，这说明子空间的直和在交换之后的和仍然是直和，即子空间的直和也具有交换律.

23. 用数学归纳法，首先当 $k=2$ 的时候，正是《教程》定理 2.2，从而命题成立.

假设 $k=m-1$ 时命题（包括充分性和必要性）成立，当 $k=m$ 时，先考虑必要性，设 $\sum_{i=1}^m M_i$ 是直和. 此时它的子和 $\sum_{i=1}^{m-1} M_i$ 必然也是直和，

这是因为设 $0=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i$，其中 $\alpha_i\in M_i$，则 $0=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i+0$，最末尾的 0 看作 M_m 的向量，由零的表示法唯一知 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{m-1}=0$. 那么按照归纳假设可知

$$M_i\cap\left(\sum_{j=1}^{i-1}M_j\right)=\{0\},i=2,...,m-1.$$

同时由《教程》定理 2.3(iii) 知，$\sum_{i=1}^{m}M_i$ 是直和必然有

$$M_m\cap\left(\sum_{j=1}^{m-1}M_j\right)=\{0\}.$$

综合上述两式得到

$$M_i\cap\left(\sum_{j=1}^{i-1}M_j\right)=\{0\},i=2,...,m.$$

因此对 $k=m$ 命题的必要性成立.

再考虑充分性，设

$$M_i\cap\left(\sum_{j=1}^{i-1}M_j\right)=\{0\},i=2,...,m.$$

则由归纳假设可知，$N=\sum_{i=1}^{m-1}M_i$ 是直和，再由条件 $M_m\cap N=\{0\}$ 可知，$N+M_m$ 是直和，此时必然有 $M_1+M_2+\cdots+M_m$ 是直和，这是因为设 $0=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$，其中 $\alpha_i\in M_i$，反复利用零的表法唯一，由 $0=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i+\alpha_m$，$N+M_m$ 是直和得到 $\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i=\alpha_m=0$，再由 $N=\sum_{i=1}^{m-1}M_i$ 是直和得到 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{m-1}=0$. 故对 $k=m$ 命题的充分性也成立.

那么根据数学归纳法，该命题对所有正整数 $k(k\geqslant 2)$ 成立.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 2.10.

24. 必要性由直和的定义保证. 只证充分性，如果且向量 α 有唯一的表示方式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k(\alpha_i\in M_i)$，我们来证 0 向量的表法也唯一. 设 $0=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k(\beta_i\in M_i)$，则对向量 α 有 $\alpha=\alpha+0=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_k+\beta_k)$，其中 $\alpha_i+\beta_i\in M_i$，由 α 表法的唯一性可知，对 $i=1,2,...,k$ 都有 $\alpha_i+\beta_i=\alpha_i$，从而 $\beta_i=0$，即零向量的表法唯一，故由《教程》定理 2.3 知，$\sum_{i=1}^{k}M_i$ 是直和.

25. 显然 α_1,α_2 线性无关，从而 α_1,α_2 为 M 的一组基，我们将其扩展为 K^4 的一组基，考虑向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4.$$

其中 ε_i 是 K^4 的单位坐标向量. 利用《教程》第二章的相关方法可以求出这个向量组的一个极大线性无关部分组为

$$\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2.$$

显然这正是 K^4 的一组基，从而由《教程》命题 2.5 的证明过程可知，K^4/M 的一组基为以 ε_1 和以 ε_2 为代表的模 M 剩余类 $\bar{\varepsilon}_1 = \overline{(1,0,0,0)}, \bar{\varepsilon}_2 = \overline{(0,1,0,0)}$.

26. 按照第 1 节题目 10 的结论可知，$\dim M = n(n-1)/2$，从而由《教程》命题 2.5 可知，

$$\dim M_n(K)/M = \dim M_n(K) - \dim M = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

下面寻找 $M_n(K)/M$ 的基，定义矩阵

$$Q_{ij} = E_{ij} - E_{ji},$$

设 (I) 为由所有 $Q_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant n$ 组成的向量组，由第 1 节题目 10 的结论可知 (I) 是 M 的一组基，现在将其扩充为 $M_n(K)$ 的一组基，考虑加入由如下矩阵全体组成的向量组 (II)：

$$E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

我们来证明 (I) 和 (II) 合并的向量组 (III) 线性无关，设

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} k_{ij} Q_{ij} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} s_{ij} E_{ij} = 0,$$

则

$$\begin{pmatrix} s_{11} & k_{12} + s_{12} & \cdots & k_{1n} + s_{1n} \\ -k_{12} & s_{22} & \cdots & k_{2n} + s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_{1n} & -k_{2n} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

这表明同时有 $k_{ij} = 0, 1 \leqslant i < j \leqslant n$ 和 $s_{ij} = 0, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，从而向量组 (III) 确实线性无关.

现在，向量组 (II) 共有 $n(n+1)/2$ 个向量，则向量组 (III) 的向量个数为 $n(n+1)/2 + n(n-1)/2 = n^2$，我们已经知道 $M_n(K)$ 的维数是 n^2，即任意 n^2 个线性无关的向量都是 $M_n(K)$ 的一组基，从而 (III) 确实是一组基.

故按照《教程》命题 2.5 的论证过程，$M_n(K)/M$ 的一组基实际上是以 (II) 的向量为代表的模 M 剩余类全体，亦即如下所有的元素：

$$\overline{E}_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

27. 设

$$T=\begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & T_0 \end{pmatrix}$$

将矩阵方程 $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_r,\eta_{r+1},...,\eta_n)=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n)T$ 作分块，不难得到

$$(\eta_{r+1},...,\eta_n)=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_r)B+(\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n)T_0,$$

设 $B=(b_{ij}),T_0=(c_{ij})$，则进一步将上面矩阵的乘积展开，有

$$\begin{aligned}
\eta_{r+1}&=(b_{11}\varepsilon_1+b_{21}\varepsilon_2+\cdots+b_{r1}\varepsilon_r)+(c_{11}\varepsilon_{r+1}+c_{21}\varepsilon_{r+2}+\cdots+c_{n-r,1}\varepsilon_n),\\
\eta_{r+2}&=(b_{12}\varepsilon_1+b_{22}\varepsilon_2+\cdots+b_{r2}\varepsilon_r)+(c_{12}\varepsilon_{r+1}+c_{22}\varepsilon_{r+2}+\cdots+c_{n-r,2}\varepsilon_n),\\
&\cdots\\
\eta_n&=(b_{1,n-r}\varepsilon_1+b_{2,n-r}\varepsilon_2+\cdots+b_{r,n-r}\varepsilon_r)+(c_{1,n-r}\varepsilon_{r+1}+c_{2,n-r}\varepsilon_{r+2}\\
&\quad+\cdots+c_{n-r,n-r}\varepsilon_n).
\end{aligned}$$

可以看出，每个 η_i 都是由两个线性组合组成的，前面一部分是 $\varepsilon_1,...,\varepsilon_r$ 的线性组合，后一部分是 $\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n$ 的线性组合. 因为 $\varepsilon_1,...,\varepsilon_r$ 是在 M 内的向量，它们的线性组合也在 M 中，其模 M 剩余类是商空间 V/M 的 0 向量. 因此我们上面的式子对两边取各自的模 M 剩余类，可以将前一个线性组合消去. 比如对于 η_{r+1}，有

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}_{r+1}&=\overline{(b_{11}\varepsilon_1+b_{21}\varepsilon_2+\cdots+b_{r1}\varepsilon_r)+(c_{11}\varepsilon_{r+1}+c_{21}\varepsilon_{r+2}+\cdots+c_{n-r,1}\varepsilon_n)}\\
&=\overline{(b_{11}\varepsilon_1+b_{21}\varepsilon_2+\cdots+b_{r1}\varepsilon_r)}+\overline{(c_{11}\varepsilon_{r+1}+c_{21}\varepsilon_{r+2}+\cdots+c_{n-r,1}\varepsilon_n)}\\
&=\overline{0}+(c_{11}\overline{\varepsilon}_{r+1}+c_{21}\overline{\varepsilon}_{r+2}+\cdots+c_{n-r,1}\overline{\varepsilon}_n)\\
&=c_{11}\overline{\varepsilon}_{r+1}+c_{21}\overline{\varepsilon}_{r+2}+\cdots+c_{n-r,1}\overline{\varepsilon}_n,
\end{aligned}$$

对其余的向量也同理，有

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}_{r+2}&=c_{12}\overline{\varepsilon}_{r+1}+c_{22}\overline{\varepsilon}_{r+2}+\cdots+c_{n-r,2}\overline{\varepsilon}_n,\\
&\cdots\\
\overline{\eta}_n&=c_{1,n-r}\overline{\varepsilon}_{r+1}+c_{2,n-r}\overline{\varepsilon}_{r+2}+\cdots+c_{n-r,n-r}\overline{\varepsilon}_n.
\end{aligned}$$

综合上面的式子，它们显然正是 $(\overline{\eta}_{r+1},...,\overline{\eta}_n)=(\overline{\varepsilon}_{r+1},...,\overline{\varepsilon}_n)T_0$.

28. **(1)** 首先检查加法和数乘是否良定义. 设 $f_1, f_2 \in P(K), k \in K$，对任意列向量 α, β 都有

$$\begin{aligned}
(f_1+f_2)(...,\alpha+\beta,...) &= f_1(...,\alpha+\beta,...)+f_2(...,\alpha+\beta,...)\\
&= f_1(...,\alpha,...)+f_2(...,\alpha,...)+f_1(...,\beta,...)+f_2(...,\beta,...)\\
&= (f_1+f_2)(...,\alpha,...)+(f_1+f_2)(...,\beta,...);\\
(kf)(...,\alpha+\beta,...) &= kf(...,\alpha+\beta,...)\\
&= k(f(...,\alpha,...)+f(...,\beta,...))\\
&= (kf)(...,\alpha,...)+(kf)(...,\beta,...).
\end{aligned}$$

因此 $f_1+f_2 \in P(K), kf_1 \in P(K)$. 再验证线性空间的八条规则即可，验证后可知都是满足的.[4]

(2) 我们设 $f, g \in P(K)$，满足对任意正整数 $1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_n \leqslant n$，都有 $f(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n}) = g(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n})$. 则由列线性函数的性质知，对任意 $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$，有

$$\begin{aligned}
f(A) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\varepsilon_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\varepsilon_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\varepsilon_{i_n}\right)\\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} f(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n})\\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} g(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n})\\
&= g\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\varepsilon_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\varepsilon_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\varepsilon_{i_n}\right) = g(A).
\end{aligned}$$

从而 $f \in P(K)$ 由所有 $f(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n}), 1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_n \leqslant n$ 唯一决定.

(3) 唯一性已由 **(2)** 推出，只需证明存在性. 事实上在 **(2)** 的证明过程中已经给出了这样的 f，任意 $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$，定义 f 为

$$f(A) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} b_{i_1 i_2 \cdots i_n}.$$

此时对任意固定的不超过 n 的正整数 $k_1, k_2, ..., k_n$，都有

$$f(\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}, ..., \varepsilon_{k_n}) = b_{k_1 k_2 \cdots k_n}.$$

此项即上述 $f(A)$ 和式的下标取 $i_1 = k_1, i_2 = k_2, ..., i_n = k_n$ 的项. 接下来需要证明 $f \in P(K)$，设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$，其中 α_j 为 n 维列向量，对

[4]注意，$P(K)$ 并非 $\mathrm{Hom}(M_n(K), K)$（《教程》第四章第 3 节）的子空间，$P(K)$ 里的向量其实是所谓的多重线性映射，并非线性映射.

任意 n 维列向量 $\gamma=(c_1,c_2,...,c_n)'$ 和任意 j，有

$$\begin{aligned}f(...,\lambda\alpha_j+\mu\gamma,...)&=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_11}\cdots(\lambda a_{i_jj}+\mu c_{i_j})\cdots a_{i_nn}b_{i_1i_2\cdots i_n}\\&=\lambda\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_11}\cdots a_{i_jj}\cdots a_{i_nn}b_{i_1i_2\cdots i_n}\\&+\mu\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_11}\cdots c_{i_j}\cdots a_{i_nn}b_{i_1i_2\cdots i_n}\\&=\lambda f(...,\alpha_j,...)+\mu f(...,\gamma,...).\end{aligned}$$

从而 $f\in P(K)$.

(4) 由 **(2)**、**(3)** 注意到 $P(K)$ 中的每个 f 都与一组数 $b_{i_1i_2\cdots i_n}$（共 n^n 个）一一对应，这暗示了 $P(K)$ 的维数正是 n^n. 事实上，对任意 $1\leqslant j_1,j_2,...,j_n\leqslant n$，只需要令

$$f_{j_1j_2\cdots j_n}(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})=\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\cdots\delta_{i_nj_n},\forall\ 1\leqslant i_1,i_2,...,i_n\leqslant n.$$

其中 $\delta_{i_kj_k}$ 表示克朗涅克记号. 则由 **(3)** 可知每个下标组合 $j_1j_2\cdots j_n$ 都按上式确定了唯一的函数 $f_{j_1j_2\cdots j_n}\in P(K)$. 我们来证明全体 $f_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是 $P(K)$ 的一组基. 首先证明它们线性无关，设

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}s_{j_1j_2\cdots j_n}f_{j_1j_2\cdots j_n}=0.$$

上式左边表示一个列线性函数，对所有的 $1\leqslant i_1,i_2,...,i_n\leqslant n$，将这个函数作用在 $(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})$，上式变成

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}s_{j_1j_2\cdots j_n}f_{j_1j_2\cdots j_n}\right)(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})\\=&\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}s_{j_1j_2\cdots j_n}f_{j_1j_2\cdots j_n}(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})\\=&\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}s_{j_1j_2\cdots j_n}\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\cdots\delta_{i_nj_n}\\=&\ s_{i_1i_2\cdots i_n}=0.\end{aligned}$$

从而全体 $f_{j_1j_2\cdots j_n}$ 线性无关. 并且，对任意 $f\in P(K)$，容易验证

$$f=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}f(\varepsilon_{j_1},\varepsilon_{j_2},...,\varepsilon_{j_n})f_{j_1j_2\cdots j_n}.$$

（只需要验证上式两边的函数在 $(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n})$ 处的值相等即可，由 **(2)** 给出的唯一性命题可确保左右两边的函数相等）从而全体 $f_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是 $P(K)$ 的一组基，$\dim P(K) = n^n$.

(5) 根据第三章题目 13 的结论可知，$M_n(K)$ 上的反对称列线性函数都可以表示为行列式函数的常数倍，即

$$SP(K) = \{a \det | a \in K\}.$$

显然 $SP(K)$ 是 $P(K)$ 的子空间，其一组基为 det，维数为 $\dim SP(K) = 1$.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 2.7.

29. 这里暂时用 $A(B)$ 这样的记号表示数域 B 上的线性空间 A. 首先我们可以检查，若 L 是 F 上的线性空间，F 是 K 上的线性空间，则 L 确实是 K 上的线性空间. 这是因为 $K \subseteq F$，K 的任何数总可以看作 F 的一个数，从而 $L(K)$ 的数乘运算可以完全按照 $L(F)$ 的数乘规则进行，线性空间要求的所有性质均保持不变，这就说明 $L(K)$ 是线性空间.

现取 $F(K)$ 的一组基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$ 和 $L(F)$ 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$，我们来证明以下全体向量:

$$\eta_j \varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m$$

构成的向量组 (I) 正是 $L(K)$ 的一组基.

设 $k_{ij} \in K, i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m$，满足

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} k_{ij} \eta_j \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} k_{ij} \eta_j \right) \varepsilon_i = 0,$$

从而由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 的线性无关性知，

$$\sum_{j=1}^{m} k_{ij} \eta_j = 0, i = 1, 2, ..., n.$$

再由 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$ 的线性无关性知

$$k_{ij} = 0, j = 1, 2, ..., m; i = 1, 2, ..., n.$$

这说明 (I) 是线性无关的. 又因为对任何 $\alpha \in L(F)$，都存在 $f_1, f_2, ..., f_n \in F$ 使得

$$\alpha = f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + \cdots + f_n \varepsilon_n. \tag{4.4}$$

而对于这些 $f_i \in F(K), i=1,2,...,n$ 也存在 $k_{i1}, k_{i2}, ..., k_{im} \in K$ 使得

$$f_i = k_{i1}\eta_1 + k_{i2}\eta_2 + \cdots + k_{im}\eta_m, i=1,2,...,n. \tag{4.5}$$

把式 (4.5) 代入 (4.4) 可知 α 可以被向量组 (III) 线性表示. 从而 (III) 确实是一组基.

批注. 从本题可以看出，线性空间所在的数域缩小之后，其维数会增大，从直观上来看，这其实是因为数域缩小之后，线性空间的向量相互线性表示的能力变弱了（因为可选择的系数变少了），因此一组基就需要更多向量，才能够表示整个线性空间.

84eb8605ecfb46c3ff89fe615a505816（请忽略这行内容）

30. **(1)** 两个数量函数之和以及数和数量函数之间的乘积显然都是数量函数，所以运算是良定义的，且容易验证 $F(K)$ 满足线性空间的八条性质，故为线性空间.

(2) 由本节题目 28 的 **(1)**，$P(K)$ 是线性空间，从而是 $F(K)$ 的子空间.$Q(K)$ 同理.

(3) 在本节题目 28 的 **(4)** 中，我们已经找到了 $P(K)$ 的一组基为全体 $f_{j_1j_2\cdots j_n}$，其中 $j_1, j_2, ..., j_n$ 取遍所有不大于 n 的正整数. 对 $Q(K)$ 而言，按照与题目 28 相同的方法，也可以得到一组基 $g_{j_1j_2\cdots j_n}$，其中 $j_1, j_2, ..., j_n$ 也取遍所有不大于 n 的正整数，并且对每个固定的下标组合 $j_1j_2\cdots j_n$，有

$$g_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{pmatrix}\varepsilon'_{i_1}\\ \varepsilon'_{i_2}\\ \vdots\\ \varepsilon'_{i_n}\end{pmatrix} = \delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\cdots\delta_{i_nj_n}, 1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_n \leqslant n.$$

其中 $\varepsilon'_k = (0, ..., 1_{k\text{th}}, ..., 0), k=1,2,...,n.$

现在我们来证明如下命题，取定某一个下标组合 $p_1p_2\cdots p_n$，则存在一个下标组合 $q_1q_2\cdots q_n$，使得 $g_{q_1q_2\cdots q_n} = f_{p_1p_2\cdots p_n}$ 成立的充分必要条件是 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个排列. 且当这个条件满足时，$q_1q_2\cdots q_n$ 也是一个排列.

对于某个固定的下标组合 $p_1p_2\cdots p_n$ 和任意矩阵 $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$

的作用，由列线性有

$$\begin{aligned}
f_{p_1p_2\cdots p_n}(A) &= f_{p_1p_2\cdots p_n}\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_11}\varepsilon_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_22}\varepsilon_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_nn}\varepsilon_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} f_{p_1p_2\cdots p_n}(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\delta_{i_1p_1}\delta_{i_2p_2}\cdots\delta_{i_np_n} \\
&= a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.
\end{aligned}$$

也就是说 $f_{p_1p_2\cdots p_n}(A)$ 其实是取遍矩阵 A 所有第 k 列取第 p_k 行的元素，然后将其相乘. 相应的，对下标组合 $q_1q_2\cdots q_n$，$g_{q_1q_2\cdots q_n}(A)$ 也有类似的结果

$$\begin{aligned}
&g_{q_1q_2\cdots q_n}(A) \\
=&g_{q_1q_2\cdots q_n}\begin{pmatrix} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1}\varepsilon'_{i_1} \\ \sum_{i_1=1}^{n} a_{2i_2}\varepsilon'_{i_2} \\ \vdots \\ \sum_{i_1=1}^{n} a_{ni_n}\varepsilon'_{i_n} \end{pmatrix} = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_1}\cdots a_{1i_n} g_{q_1q_2\cdots q_n}\begin{pmatrix} \varepsilon'_{i_1} \\ \varepsilon'_{i_2} \\ \vdots \\ \varepsilon'_{i_n} \end{pmatrix} \\
=&\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\delta_{i_1q_1}\delta_{i_2q_2}\cdots\delta_{i_nq_n} \\
=&a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}.
\end{aligned}$$

因此,对于固定的下标组合 $p_1p_2\cdots p_n$,如果要找到 $q_1q_2\cdots q_n$ 使得 $g_{q_1q_2\cdots q_n}(A) = f_{p_1p_2\cdots p_n}(A)$,我们只需要保证 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} = a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 即可. 考虑 a_{ij} 的任意性,这其实等价于选择下标组合 $q_1q_2\cdots q_n$,使得乘积 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 在交换因子顺序之后能化为 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，也即

$$\{(1, q_1), (2, q_2), ..., (n, q_n)\} = \{(p_1, 1), (p_2, 2), ..., (p_n, n)\}. \tag{4.6}$$

若 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个排列，只需把式 (4.6) 右边集合的元素按第一个坐标分量从小到大排序，再取其第二个坐标分量构成的排列作为 $q_1q_2\cdots q_n$ 即可使式 (4.6) 成立,从而充分性得证,反之,若式 (4.6) 成立,则必然有 $p_1, p_2, ..., p_n$ 以及 $q_1, q_2, ..., q_n$ 都与 $1, 2, ..., n$ 一一对应，从而 $p_1p_2\cdots p_n$ 和 $q_1, q_2, ..., q_n$ 都是排列，必要性得证. 由此我们得到如下结论 **(i)**：

$$\{f_{p_1p_2\cdots p_n}|p_1p_2\cdots p_n\text{是排列}\} = \{g_{q_1q_2\cdots q_n}|q_1q_2\cdots q_n\text{是排列}\} \in P(K)\cap Q(K);$$
$$\{f_{p_1p_2\cdots p_n}|p_1p_2\cdots p_n\text{不是排列}\} \cap \{g_{q_1q_2\cdots q_n}|q_1q_2\cdots q_n\text{不是排列}\} = \varnothing.$$

我们再来证明，对于所有的排列 $p_1p_2\cdots p_n$，全体 $f_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是 $P(K)\cap Q(K)$ 的一组基. 显然 $f_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是线性无关的，只需证明所有具有行线性和

列线性的函数都可以被 $f_{p_1p_2\cdots p_n}$ 线性表示. 设 $f\in P(K)\cap Q(K)$，那么对任意 $A=(a_{ij})\in M_n(K)$，有

$$\begin{aligned}f(A)&=f\left(\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_11}\varepsilon_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_22}\varepsilon_{i_2},...,\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_nn}\varepsilon_{i_n}\right)\\&=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}f(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n}).\end{aligned}$$

在上面的和式中，由于行线性的作用，会迫使一些 $f(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})$ 为零. 具体来说，当下标组合 $i_1i_2\cdots i_n$ 不是一个排列时，也即至少有某两个 i_k 相等时，矩阵 $(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})$ 的某两列是相同的，又因为这个矩阵每列都有唯一的元素 1，而其余位置为 0，某两列相同意味着矩阵在这两列的同一行取了 1，从而该矩阵在该行至少有两个 1，而整个矩阵的元素只有 n 个 1，那么在除去该行的剩余行中至少会出现一个全零行. 由于 f 的行线性作用，可以将此全零行的 0 提出，导致 $f(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})=0$. 因此在上面 $f(A)$ 的求和式中，只需考虑下标组合 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个排列的项

$$f(A)=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}f(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n}).$$

其中求和代表 $i_1i_2\cdots i_n$ 取遍所有排列. 我们在前面已经证明 $f_{p_1p_2\cdots p_n}(A)=a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，改写上式有

$$f(A)=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}f(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})f_{i_1i_2\cdots i_n}(A).$$

上式对任意矩阵 $A\in M_n(K)$ 都成立，从而有

$$f=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}f(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})f_{i_1i_2\cdots i_n}.$$

即任意 $f\in P(K)\cap Q(K)$ 都可以被全体 $f_{p_1p_2\cdots p_n}$ 线性表示，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 式排列，故其确实是 $P(K)\cap Q(K)$ 一组基，进而 $\dim P(K)\cap Q(K)=n!$.

(4) 由维数公式，有

$$\dim(P(K)+Q(K))=\dim P(K)+\dim Q(K)-\dim P(K)\cap Q(K)=2n^n-n!.$$

考虑集合

$$B=\{f_{j_1j_2\cdots j_n}\}\cup\{g_{j_1j_2\cdots j_n}\},$$

其中 $j_1,j_2,...,j_n$ 取遍全体不超过 n 的正整数，则集合 B 的元素全体构成 $P(K)+Q(K)$ 的一组基. 这是因为，由 **(3)** 的结论 **(i)** 知，集合 B 含有的元素个数正好是 $2n^n-n!$，并且 B 的向量可以表示任何 $f+g,f\in P(K),g\in Q(K)$.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 2.7.

4.3 线性映射与线性变换

1. 简单验证即可，对任意 $\alpha,\beta\in K^n, k\in K$，

$$\begin{aligned}f(\alpha+\beta)&=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_m+b_m)\\&=(a_1,a_2,...,a_m)+(b_1,b_2...,b_m)\\&=f(\alpha)+f(\beta),\\f(k\alpha)&=(ka_1,ka_2,...,ka_m)\\&=k(a_1,a_2,...,a_m)\\&=kf(\alpha).\end{aligned}$$

对 g 也是同理，不再赘述. 以下有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}f&=\{(0,0,...,0,k_{m+1},...,k_n)|k_{m+1},...,k_n\in K\},\\\mathrm{Im}f&=K^m,\\\mathrm{Coker}f&=\{\bar{0}\},\\\mathrm{Ker}g&=\{0\},\\\mathrm{Im}g&=\{(k_1,k_2,...,k_m,0,...,0)|k_1,...,k_m\in K\},\end{aligned}$$

最后，我们用 ε_i 表示 K^n 中的第 i 个单位坐标向量（第 i 个分量为 1，其余为 0），则

$$\mathrm{Coker}g=L(\overline{\varepsilon}_{m+1},\overline{\varepsilon}_{m+2},...,\overline{\varepsilon}_n).$$

其中 $\overline{\varepsilon}_i$ 表示 ε_i 的模 $\mathrm{Im}g$ 剩余类. 我们来写一个具体的 $\mathrm{Coker}g$ 的元素，比如

$$\overline{(0,0,...,0,1,2,...,n-m)}=\{(k_1,k_2,...,k_m,1,2,...,n-m)|k_1,...,k_m\in K\}.$$

这个剩余类的代表 $(0,0,...,0,1,2,...,n-m)$ 的前 m 个分量 0 随意更换为 K 中的其他数都不改变剩余类本身.

2. 由《教程》第二章命题 5.2 推论 2，$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$ 说明 A,B 相抵，即存在满秩方阵 P,Q 使得 $B=PAQ$. 此时我们定义可逆矩阵 $T=Q^{-1}$，对任意 $Y\in U$，即 $AY=0$，有

$$B(TY)=BQ^{-1}Y=PAY=0.$$

从而 $TY\in V$. 这说明 $f(Y)=TY$ 确实是 U 到 V 的映射，又根据《教程》例 3.8 知 f 亦为线性映射，要说明 f 是同构映射，只需证 f 是双射.

对任意 $Y_1,Y_2\in U$，若 $TY_1=TY_2$，则由两边左乘 T 的逆矩阵 $T^{-1}=Q^{-1}$ 知 $Y_1=Y_2$，从而 f 是单射. 又因为 U,V 维数相等，则 f 必为双射（关于这一点，我们在解答后面给出了两个简单的引理，此处用到了引理 1. 这两个引理都是关于同构的基本认识，可以作为对《教程》的理论补充）. 从而 f 为同构映射.

引理 1 设有 K 上同为 n 维的线性空间 U,V，$f\in\mathrm{Hom}(U,V)$，若 f 是单射或满射（其中之一），则 f 是双射，也即同构映射.

证明: 根据《教程》命题 3.5 推论 1 可知

$$\dim\mathrm{Ker}f+\dim\mathrm{Im}f=\dim U=n,$$

若 f 为单射，则由《教程》命题 3.4 知 $\mathrm{Ker}f=\{0\}$，$\dim\mathrm{Ker}f=0$，从而根据上式 $\dim\mathrm{Im}f=n$，即 $\mathrm{Im}f$ 是 V 的 n 维子空间，因此 $\mathrm{Im}f=V$，f 是满射，从而也是双射或同构映射.

若 f 为满射，则 $\mathrm{Im}f=V$，$\dim f=n$，从而根据上式 $\dim\mathrm{Ker}f=0$，必然有 $\mathrm{Ker}f=\{0\}$. 由《教程》命题 3.4 知，f 为单射，从而也是双射或同构映射. ■

引理 2 设有 K 上同为 n 维的线性空间 U,V，取它们各自的一组基分别为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$，则存在唯一的可逆线性映射 f(即同构映射)，使得 $f(\varepsilon_i)=\eta_i$，并且 f 在给定基下的矩阵 A 可逆，其逆矩阵正是 f^{-1} 在给定基下的矩阵.

证明: 根据《教程》命题 3.6(ii)，存在唯一的映射 $f\in\mathrm{Hom}(U,V)$ 使得 $f(\varepsilon_i)=\eta_i(i=1,2,...,n)$，也存在唯一的线性映射 g 使得 $g(\eta_i)=\varepsilon_i(i=1,2,...,n)$，我们来证明 g 正是 f 的逆映射，对任何 $\alpha\in U$，设 $\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$，则根据线性映射的性质有

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=f(k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n)\\&=k_1f(\varepsilon_1)+k_2f(\varepsilon_2)+\cdots+k_nf(\varepsilon_n)\\&=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n,\end{aligned}$$

对上式左右两边同时用 g 作用，同样根据线性映射的性质有

$$\begin{aligned}gf(\alpha) &= g(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_n\eta_n) \\ &= k_1 g(\eta_1) + k_2 g(\eta_2) + \cdots + k_n g(\eta_n) \\ &= k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n \\ &= \alpha,\end{aligned}$$

这说明 $gf = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$，同理可得 $fg = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$，从而 f 可逆，f 为双射或者说 U 到 V 的同构映射，g 是 f 的逆映射. 以下将 g 记为 f^{-1}，设 f, f^{-1} 在给定基下的矩阵为分别为 A, B，则有

$$\begin{aligned}f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) &= (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)A, \\ f^{-1}(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)B,\end{aligned}$$

依照形式结合律，有

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) &= f^{-1}(f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)) \\ &= f^{-1}((\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)A) \\ &= (f^{-1}(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n))A \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)BA,\end{aligned}$$

从而

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)(E - BA) = 0.$$

由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 线性无关可推知 $BA = E$，即 A 可逆，且其逆矩阵正是 B. 如果将线性映射 f, f^{-1} 在给定基下的矩阵分别（形式地）记为 $\sigma(f), \sigma(f^{-1})$，则有 $\sigma(f)^{-1} = \sigma(f^{-1})$. ■

3. 把第 1 节题目 1**(5)** 的线性空间记作 V,取 V 的两个向量 $\eta_1 = (1, 0), \eta_2 = (0, 1)$，我们来证明这两个向量就是 V 的一组基. 先证明它们线性无关，设

$$(k_1 \circ \eta_1) \oplus (k_2 \circ \eta_2) = 0.$$

则有

$$\begin{aligned}&\left(k_1, \frac{k_1(k_1 - 1)}{2}\right) \oplus (0, k_2) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\left(k_1, \frac{k_1(k_1 - 1)}{2} + k_2\right) = 0.\end{aligned}$$

因为 V 中的零向量是 $(0,0)$，所以

$$\begin{cases} k_1 = 0; \\ \frac{k_1(k_1-1)}{2} + k_2 = 0. \end{cases}$$

即 $k_1 = k_2 = 0$，η_1, η_2 线性无关. 再证明任何向量都能被 $\eta_1\ \eta_2$ 线性表示，设 $\alpha = (a,b)$，则显然有

$$\alpha = (a \circ (1,0)) \oplus \left(b - \frac{a(a-1)}{2} \circ (0,1) \right).$$

因此 η_1, η_2 确实是 V 的一组基，$\dim V = 2$. 又因为 $\mathbb{R}^2$ 的一组基为 $\varepsilon_1 = (1,0), \varepsilon_2 = (0,1)$，故只需定义映射 φ 使得 $\varphi(\eta_1) = \varepsilon_1, \varphi(\eta_2) = \varepsilon_2$，根据本节题目 2 的引理 2 可知，$\varphi$ 唯一存在并且是 V 到 $\mathbb{R}^2$ 的同构映射.

不难推知，φ 可以显式地表为

$$\begin{aligned} &\varphi : V \to \mathbb{R}^2; \\ &(a,b) \mapsto \left(a, b - \frac{a(a-1)}{2} \right). \end{aligned}$$

可以直接验证 φ 是一个线性映射，即有

$$\begin{gathered} \varphi((a_1,b_1) \oplus (a_2,b_2)) = \varphi(a_1,b_1) + \varphi(a_2,b_2); \\ \varphi(k \circ (a_1,b_1)) = k\varphi(a_1,b_1). \end{gathered}$$

4. 这样的映射有很多，比如定义映射 S 为在 $[a,b]$ 上的定积分：

$$\begin{aligned} S : C[a,b] &\to \mathbb{R}, \\ f(x) &\mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

显然有 $S(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda S f(x) + \mu S g(x)$，从而 S 是线性映射.

5. 对任意 $a, b \in \mathbb{Q}$，只需定义

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}(\mathrm{i}) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \\ a + b\mathrm{i} &\mapsto a + b\sqrt{2}. \end{aligned}$$

则 φ 就是一个同构映射（其线性很容易验证，而单性和满性都是显然成立的）.

6. 设 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$，以及

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

则 $f(X)=AX$，由《教程》例 3.1 可知，f 是一个线性映射. 以下求取各个空间.

首先是 $\mathrm{Ker}f$，因为 $f(X)=0\iff AX=0$，求解该线性方程组得到的解空间即为 $\mathrm{Ker}f$，为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}f&=\{\gamma|\gamma=k_1(5,1,2,0)'+k_2(1,0,0,1)',k_1,k_2\in K\}\\&=L((5,1,2,0)',(1,0,0,1)').\end{aligned}$$

接着是 $\mathrm{Im}f$，设 $Y=(y_1,y_2,y_3)'$，若 $f(X)=AX=Y$ 有解，由线性方程组解的理论知 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\bar{A})$，那么根据

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1 & y_1\\ 0 & -2 & 1 & 0 & y_2\\ -1 & -1 & 3 & 1 & y_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1 & y_1\\ 0 & -2 & 1 & 0 & y_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3-y_1-y_2\end{pmatrix},$$

只需满足 $y_3-y_1-y_2=0$，其解空间正是 $\mathrm{Im}f$，为

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}f&=\{\gamma|\gamma=k_1(-1,1,0)'+k_2(1,0,1)',k_1,k_2\in K\}\\&=L((-1,1,0)',(1,0,1)').\end{aligned}$$

最后是 $\mathrm{Coker}f=K^3/\mathrm{Im}f$，我们将 $(-1,1,0)',(1,0,1)'$ 扩展为 K^3 的一组基，为

$$(-1,1,0)',(1,0,1)',(1,0,0)'.$$

从而由《教程》命题 2.5 的证明过程可知，$\mathrm{Coker}f$ 的一组基为 $\overline{(1,0,0)'}$，即

$$\mathrm{Coker}f=\{k\overline{(1,0,0)'}|k\in K\}=L\left(\overline{(1,0,0)'}\right).$$

设 f 在给定基下的矩阵为 B，则有

$$(f(\varepsilon_1),f(\varepsilon_2),f(\varepsilon_3),f(\varepsilon_4))=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)B.$$

把 $(f(\varepsilon_1),f(\varepsilon_2),f(\varepsilon_3),f(\varepsilon_4))$ 和 (η_1,η_2,η_3) 看作矩阵，解该矩阵方程可得

$$B=\begin{pmatrix}5/2 & 1 & 5/2 & 6\\ -1/2 & 1 & -1/2 & -1\\ -3/2 & -3 & -3/2 & -4\end{pmatrix}.$$

7. 与本节题目 6 完全类似.

(1) 计算可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}f &= \{0\};\\ \mathrm{Im}f &= L((-1,1,0,0)' + k_2(0,0,1,0)' + k_3(1,0,0,1)');\\ \mathrm{Coker}f &= L\left(\overline{(1,0,0,0)'}\right).\end{aligned}$$

(2) 设 f 在给定基下的矩阵为 B，则

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. 显然 f 就是取多项式在区间 $[0,x]$ 上的变上限积分，类似于《教程》例 3.10 很容易验证 f 是线性映射，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}f &= \{0\},\\ \mathrm{Im}f &= \{k_1x + k_2x^2 + \cdots + k_nx^n | k_1, k_2, ..., k_n \in K\},\end{aligned}$$

再来求余核，考虑 $K[x]_{n+1}$ 的每一个零次（以及负无穷次）多项式 $t_0 + 0x + \cdots + 0x^{n+1}$（下面直接记作 t_0）的模 $\mathrm{Im}f$ 剩余类，有

$$\overline{t_0} = \{t_0 + k_1x + k_2x^2 + \cdots + k_nx^n | k_1, k_2, ..., k_n \in K\},$$

显然

$$\mathrm{Coker}f = \{\overline{t_0} | t_0 \in K\} = L(\bar{1}).$$

在给定的基下，我们有

$$\begin{aligned}f(1,x,...,x^n) &= \left(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3 ..., \frac{1}{n}x^n\right)\\ &= \left(1, x, x^2, ..., x^n\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

上式最右端就是在给定基下的矩阵.

9. **(1)** 若 $\alpha \neq 0$ 则不是，$\boldsymbol{A}(\xi+0)=\xi+\alpha \neq \xi+\alpha+0+\alpha=\boldsymbol{A}\xi+\boldsymbol{A}0$，若 $\alpha=0$ 则是.

(2) 若 $\alpha \neq 0$ 则不是，此时 $\boldsymbol{A}(\xi+0)=\alpha \neq \alpha+\alpha=\boldsymbol{A}\xi+\boldsymbol{A}0$，若 $\alpha=0$ 则是.

(3) 不是，此时 $\boldsymbol{A}((1,0,0)+(1,0,0))=(4,0,0) \neq (1,0,0)+(1,0,0)=\boldsymbol{A}(1,0,0)+\boldsymbol{A}(1,0,0)$.

(4) 是. **(5)** 是. **(6)** 是.

(7) 不是，取 $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$，有 $\boldsymbol{A}(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})=-1 \neq 1=\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{A}(\mathrm{i})$.

(8) 是.

10. 任取 $f_1(x), f_2(x) \in D_0(a,b), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))\\
=&(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))''+x(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))'+\sin x\cdot(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))\\
=&\lambda f_1''(x)+\mu f_2''(x)+\lambda x f_1'(x)+\mu x f_2'(x)+\lambda\sin x\cdot f_1(x)+\mu\sin x\cdot f_2(x)\\
=&\lambda(f_1''(x)+xf_1'(x)+\sin x\cdot f_1(x))+\mu(f_2''(x)+xf_2'(x)+\sin x\cdot f_2(x))\\
=&\lambda\boldsymbol{A}f_1(x)+\mu\boldsymbol{A}f_2(x).
\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换. 取 $f(x)=\mathrm{e}^x$，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(f(x)+f(x))=&\boldsymbol{B}(2\mathrm{e}^x)\\
=&(2\mathrm{e}^x)^2+2x\mathrm{e}^x+2\sin x\cdot\mathrm{e}^x\\
=&4\mathrm{e}^{2x}+2(x+\sin x)\mathrm{e}^x,
\end{aligned}$$

然而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}f(x)+\boldsymbol{B}f(x)=&2\boldsymbol{B}(\mathrm{e}^x)\\
=&2\mathrm{e}^{2x}+2(x+\sin x)\mathrm{e}^x,
\end{aligned}$$

显然 $\boldsymbol{B}(f(x)+f(x)) \neq \boldsymbol{B}f(x)+\boldsymbol{B}f(x)$. 从而 $\boldsymbol{B}$ 不是线性变换.

11. 任取 $f_1(x), f_2(x) \in C[a,b], \lambda, \mu \in \mathbb{R}$，由积分的性质，显然

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))&=\int_a^x K(t)(\lambda f_1(t)+\mu f_2(t))\mathrm{d}t\\
&=\lambda\int_a^x K(t)f_1(t)\mathrm{d}t+\mu\int_a^x K(t)f_2(t)\mathrm{d}t\\
&=\lambda\boldsymbol{A}f_1(x)+\mu\boldsymbol{A}f_2(x).
\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换.

12. 任取 K 中的对称方阵 X,Y，任取 $\lambda,\mu\in K$，由矩阵乘法的性质有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\lambda X+\mu Y)&=T'(\lambda X+\mu Y)T\\&=\lambda T'XT+\mu T'YT\\&=\lambda\boldsymbol{A}X+\mu\boldsymbol{A}Y.\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换.

13. 线性变换 $\boldsymbol{A}$ 即为求微商，类似《教程》例 3.9 知它是线性变换，而对于 $\boldsymbol{B}$，任取 $f_1(x),f_2(x)\in K[x],\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))&=x(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))\\&=\lambda xf_1(x)+\mu xf_2(x)\\&=\lambda\boldsymbol{B}f_1(x)+\mu\boldsymbol{B}f_2(x).\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{B}$ 也是线性变换. 以下由线性映射的运算可知，任取 $f(x)\in K[x]$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})f(x)&=\boldsymbol{AB}f(x)-\boldsymbol{BA}f(x)\\&=\boldsymbol{A}(xf(x))-\boldsymbol{B}f'(x)\\&=(xf(x))'-xf'(x)\\&=f(x)+xf'(x)-xf'(x)\\&=f(x).\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

14. 用数学归纳法，当 $k=1$ 时，命题显然成立. 假设命题对于 $k=m-1$ 时成立，即有

$$\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}^{m-1}=(m-1)\boldsymbol{A}^{m-2},$$

两边用 $\boldsymbol{A}$ 左乘，有

$$\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}^{m-1}=(m-1)\boldsymbol{A}^{m-1},$$

将 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$ 代入，有

$$\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})\boldsymbol{A}^{m-1}=(m-1)\boldsymbol{A}^{m-1},$$

即

$$\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}^{m}=m\boldsymbol{A}^{m-1}.$$

从而命题对于 $k=m$ 成立. 由数学归纳法知命题对所有的正整数 k 成立.

15. **(1)** 根据投影变换的定义，任取 $\alpha \in V, \alpha = m+n, m \in M, n \in N$，有

$$\boldsymbol{P}^2\alpha = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}\alpha) = \boldsymbol{P}m = m = \boldsymbol{P}\alpha,$$

即 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$.

(2) 当 $V \neq M$ 时，显然有 $N \neq \{0\}$，则 N 中至少存在一个非零向量 n_1，此时 $\boldsymbol{P}n_1 = \boldsymbol{P}(0+n_1) = 0$，即 $n_1 \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$，也即 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P} \neq \{0\}$，从而由《教程》命题 3.4 知 $\boldsymbol{P}$ 不是单射，自然也不可逆.

(3) 任取 $\alpha \in V, \alpha = m+n, m \in M, n \in N$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_1\alpha &= \boldsymbol{P}n = \boldsymbol{P}(0+n) = 0,\\ \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}\alpha &= \boldsymbol{P}_1 m = \boldsymbol{P}(m+0) = 0.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$.

16. **(1)** 任取 $\alpha \in V$，由题意有 $\boldsymbol{A}^2\alpha = \boldsymbol{A}\alpha$，令 $\alpha_1 = \boldsymbol{A}\alpha$，则 $\boldsymbol{A}\alpha_1 = \alpha_1$，再令 $\alpha_2 = \alpha - \boldsymbol{A}\alpha$，则 $\boldsymbol{A}\alpha_2 = \boldsymbol{A}\alpha - \boldsymbol{A}^2\alpha = 0$，此时显然成立 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

再证唯一性，设 $\alpha = \beta_1 + \beta_2$，满足 $\boldsymbol{A}\beta_1 = \beta_1, \boldsymbol{A}\beta_2 = 0$，则有 $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$，两边用 $\boldsymbol{A}$ 作用，得到 $\beta_1 = \alpha_1$，进而 $\beta_2 = \alpha_2$.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 作用在 $\boldsymbol{A}\alpha = -\alpha$ 两边，得 $\boldsymbol{A}^2\alpha = -\boldsymbol{A}\alpha = \boldsymbol{A}\alpha$，从而 $\boldsymbol{A}\alpha = 0$，即 $\alpha = -\boldsymbol{A}\alpha = 0$.

17. 根据线性映射的运算法则，以及 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$，我们有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A},$$

从而有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}.$$

用 $\boldsymbol{A}$ 同时左乘上式两边，结合 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 得到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \tag{4.7}$$

再用 $\boldsymbol{A}$ 右乘式 (4.7)，得到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，代回式 (4.7) 得到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}.$$

18. 如果线性变换 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 是双射，从而由《教程》命题 3.2 知，$\boldsymbol{A}\varepsilon_1, \boldsymbol{A}\varepsilon_2, ..., \boldsymbol{A}\varepsilon_n$ 是一组基，从而线性无关.

如果 $\boldsymbol{A}\varepsilon_1, \boldsymbol{A}\varepsilon_2, ..., \boldsymbol{A}\varepsilon_n$ 线性无关，因为 $\dim V = n$，故 $\boldsymbol{A}\varepsilon_1, \boldsymbol{A}\varepsilon_2, ..., \boldsymbol{A}\varepsilon_n$ 是一组基. 由本节题目 2 的引理 2 可知，存在唯一的可逆线性变换 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{B}\varepsilon_i = \boldsymbol{A}\varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n$，不难得知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

19. 考虑线性变换 $\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_j (i \neq j)$，因为 $\boldsymbol{A}_i \neq \boldsymbol{A}_j$，所以存在 $\alpha \in V$，使得 $(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_j)\alpha \neq 0$，从而 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_j) \neq V$，即 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_j)$ 是 V 的真子空间，按照第 2 节题目 8 的结论可知，有限个真子空间并不能填满 V，即有

$$\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_j) \subset V.$$

故只需取 $\alpha \in V \setminus \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_j)$，则有对任意 $i \neq j$，$(\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{A}_j)\alpha \neq 0$，即 $\boldsymbol{A}_1\alpha, \boldsymbol{A}_2\alpha, ..., \boldsymbol{A}_k\alpha$ 两两不同.

20. **(1)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 注意，$\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)$，所以 $L(\varepsilon_2)$ 实际指的是 y 轴，投影可以用向量的点乘简单计算，那么

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}; \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}; \boldsymbol{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}.$$

显然它们各自在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(3) 给定的基 $\varepsilon_i = \binom{x}{i}$ 为广义组合数. 那么由组合数的性质 $\binom{\alpha-1}{m-1} +$

$\binom{\alpha-1}{m}=\binom{\alpha}{m}$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}(\varepsilon_0,\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1})\\
=&\left(0,\binom{x+1}{1}-\binom{x}{1},\binom{x+1}{2}-\binom{x}{2},...,\binom{x+1}{n-1}-\binom{x}{n-1}\right)\\
=&\left(0,\binom{x}{0},\binom{x}{1},...,\binom{x}{n-2}\right)\\
=&\left(\binom{x}{0},\binom{x}{1},...,\binom{x}{n-1}\right)\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

右边的矩阵即为 $\boldsymbol{A}$ 在给定基下的矩阵.

(4) 直接对给定的各个向量求微商，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}\varepsilon_1&=\alpha\varepsilon_1-\beta\varepsilon_2;\\
\boldsymbol{D}\varepsilon_2&=\beta\varepsilon_1+\alpha\varepsilon_2;\\
\boldsymbol{D}\varepsilon_3&=\varepsilon_1+\alpha\varepsilon_3-\beta\varepsilon_4;\\
\boldsymbol{D}\varepsilon_4&=\varepsilon_2+\beta\varepsilon_3+\alpha\varepsilon_4;\\
\boldsymbol{D}\varepsilon_5&=\varepsilon_3+\alpha\varepsilon_5-\beta\varepsilon_6;\\
\boldsymbol{D}\varepsilon_6&=\varepsilon_4+\beta\varepsilon_5+\alpha\varepsilon_6.
\end{aligned}$$

由上式可知，对任意 $f(x)\in V=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_6)$，总有 $\boldsymbol{D}f(x)\in V$，结合由微商的性质知 $\boldsymbol{D}$ 是一个线性变换，且

$$\boldsymbol{D}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6)\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

右边的矩阵即为 $\boldsymbol{D}$ 在给定基下的矩阵.

(5) 由《教程》命题 3.9 知，待求矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

(6)&(7) 由《教程》命题 3.6 知该线性变换被唯一确定. 根据 $\boldsymbol{A}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A_\eta$ 可先求出 $\boldsymbol{A}$ 在 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为

$$A_\eta=\begin{pmatrix}2&3&5\\-1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

再由《教程》命题 3.9 知 $\boldsymbol{A}$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A_\varepsilon=\begin{pmatrix}-5/7&20/7&-20/7\\-4/7&-5/7&-2/7\\27/7&18/7&24/7\end{pmatrix}.$$

21. **(1)** 设 $B,C\in M_2(K),k\in K$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(B+C)&=A(B+C)-(B+C)A\\&=AB-BA+AC-CA\\&=\boldsymbol{A}B+\boldsymbol{A}C,\\\boldsymbol{A}(kB)&=A(kB)-(kB)A\\&=k(AB-BA)\\&=k\boldsymbol{A}B.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是 $M_2(K)$ 内的线性变换.

(2) 设 $A=(a_{ij})$，直接计算可知

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})\\=&\left(\begin{pmatrix}0&-a_{12}\\a_{21}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_{21}&a_{11}-a_{22}\\0&a_{21}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}&0\\a_{22}-a_{11}&-a_{12}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&a_{12}\\-a_{21}&0\end{pmatrix}\right)\\=&(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})\begin{pmatrix}0&-a_{21}&a_{12}&0\\-a_{12}&a_{11}-a_{22}&0&a_{12}\\a_{21}&0&a_{22}-a_{11}&-a_{21}\\0&a_{21}&-a_{12}&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

右边的矩阵即为 $\boldsymbol{A}$ 在给定基下的矩阵.

22. 设 $C,D\in M_2(K),k\in K$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(C+D)=B^{-1}(C+D)B=B^{-1}CB+B^{-1}DB=\boldsymbol{A}C+\boldsymbol{A}D,\\\boldsymbol{A}(kC)=B^{-1}(kC)B=kB^{-1}CB=k\boldsymbol{A}C.\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 是 $M_2(K)$ 内的线性变换. 接下来求解 λ_0 与 X_0. 此处提供两种方法，一种是设出待定矩阵元素直接求解，另一种是标准的特征方程法（参见《教程》本章第 4 节）.

法一 (待定元素法)

要使 $\boldsymbol{A}X_0=\lambda_0X_0$，即需 $B^{-1}X_0B=\lambda_0X_0$，亦即 $X_0B-\lambda_0BX_0=0$，设

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}.$$

直接代入 B 计算出关于 x_i 方程为

$$\begin{pmatrix}\lambda_0-1 & 2 & \lambda_0 & 0\\ -1 & \lambda_0+1 & 0 & \lambda_0\\ -2\lambda_0 & 0 & -\lambda_0-1 & 2\\ 0 & -2\lambda_0 & -1 & 1-\lambda_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0. \tag{4.8}$$

$X_0\neq 0$ 即等价于该方程组有非零解，其充分必要条件是系数矩阵行列式为零（《教程》第三章定理 3.1），计算可知

$$\begin{vmatrix}\lambda_0-1 & 2 & \lambda_0 & 0\\ -1 & \lambda_0+1 & 0 & \lambda_0\\ -2\lambda_0 & 0 & -\lambda_0-1 & 2\\ 0 & -2\lambda_0 & -1 & 1-\lambda_0\end{vmatrix}=(\lambda_0+1)^2(\lambda_0-1)^2=0.$$

从而 $\lambda_0=\pm1$.

当 $\lambda_0=1$ 时，代入式 (4.8) 解得

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=k_1(-2,-1,2,0)+k_2(1,0,0,1).$$

即此时有

$$X_0=k_1\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_0=-1$ 时，代入式 (4.8) 解得

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=k_1(0,1,2,0)+k_2(-1,-1,0,1).$$

即此时有

$$X_0=k_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

以上过程的 $k_1,k_2\in K$ 且 k_1,k_2 不同时为零.

法二 (特征方程法)

在 $M_2(K)$ 内取一组基为

$$\varepsilon_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

我们先求出 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵 A，显然有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})\\=&\left(\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}\right)\\=&(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})\begin{pmatrix}-1&2&-1&2\\-1&1&-1&1\\2&-4&1&-2\\2&-2&1&-1\end{pmatrix}\\=&(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})A.\end{aligned}$$

我们设满足题目条件的 X_0 在 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22}$ 下的坐标为 $X_t\in K^4$，则 $X_t\neq 0$，并且有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}X_0-\lambda_0X_0=0\\\Longleftrightarrow&\boldsymbol{A}(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})X_t-\lambda_0(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})X_t=0\\\Longleftrightarrow&(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})AX_t-\lambda_0(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})X_t=0\\\Longleftrightarrow&(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})(AX_t-\lambda_0X_t)=0.\end{aligned}$$

由基的线性无关性，上式等价于 $AX_t-\lambda_0X_t=0$，也即 $(\lambda_0E-A)X_t=0$，这样问题就转化为了求出 λ_0 使得关于 X_t 的方程 $(\lambda_0E-A)X_t=0$ 有非零解，根据《教程》第三章定理 3.1，必然有 $|\lambda_0E-A|=0$，计算可知

$$|\lambda_0E-A|=\begin{vmatrix}\lambda_0+1&-2&1&-2\\1&\lambda_0-1&1&-1\\-2&4&\lambda_0-1&2\\-2&2&-1&\lambda_0+1\end{vmatrix}=(\lambda_0+1)^2(\lambda_0-1)^2=0.$$

从而有 $\lambda_0=\pm1$.

当 $\lambda_0=1$ 时，代入方程 $(\lambda_0E-A)X_t=0$ 解得

$$X_t=k_1(-2,-1,2,0)'+k_2(1,0,0,1)'.$$

此时有

$$\begin{aligned}X_0 &= (\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})X_t\\ &= k_1\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

当 $\lambda_0=-1$ 时，代入方程 $(\lambda_0E-A)X_t=0$ 解得

$$X_t=k_1(0,1,2,0)'+k_2(-1,-1,0,1)'.$$

此时有

$$\begin{aligned}X_0 &= (\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})X_t\\ &= k_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

以上过程的 $k_1,k_2\in K$ 且 k_1,k_2 不同时为零. 与**法一**的答案是一致的.

批注. 利用特征方程求解的方法基于线性空间理论，而直接设出矩阵的待定元素仅仅基于方程观点，无论在处理问题的普适性上还是处理过程的科学性上，法二都要优于法一，具有更高的理论价值.

23. **(1)** 两组基的过渡关系可表示为

$$\begin{aligned}(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1) &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T.\end{aligned}$$

这说明过渡矩阵 $T=P_3(1,3)$（初等矩阵），从而由《教程》命题 3.9，$\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵为

$$A_2=T^{-1}AT=P_3(1,3)^{-1}AP_3(1,3)=P_3(1,3)AP_3(1,3)=\begin{pmatrix}a_{33} & a_{32} & a_{31}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{13} & a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

(2) 两组基的过渡关系可表示为

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3) &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T.\end{aligned}$$

这说明过渡矩阵 $T=P_3(k\cdot 2)$，从而由《教程》命题 3.9，$\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A_2=T^{-1}AT=P_3(k\cdot 2)^{-1}AP_3(k\cdot 2)=P_3\left(\frac{1}{k}\cdot 2\right)AP_3(k\cdot 2)$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21}/k & a_{22} & a_{23}/k \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(3) 两组基的过渡关系可表示为

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)T.$$

这说明过渡矩阵 $T=P_3(1\cdot 1, 2)$，从而由《教程》命题 3.9，$\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A_2=T^{-1}AT=P_3(1\cdot 1, 2)^{-1}AP_3(1\cdot 1, 2)=P_3(-1\cdot 1, 2)AP_3'(1\cdot 2, 1)$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11}+a_{22}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

24. 用反证法. 设存在不全为零的数 $s_0, s_1, ..., s_{k-1}$ 使得

$$s_0\xi+s_1\boldsymbol{A}\xi+\cdots+s_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\xi=0,$$

在 $s_0, s_1, ..., s_{k-1}$ 的不为零的数当中，设下标最小的那个为 s_p，则有

$$s_p\boldsymbol{A}^p\xi+s_{p+1}\boldsymbol{A}^{p+1}\xi+\cdots+s_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\xi=0, (s_p\neq 0) \tag{4.9}$$

而按条件可知，对于任何 $i>k$，必然有 $\boldsymbol{A}^i\xi=\boldsymbol{A}^{i-k}(\boldsymbol{A}^k\xi)=0$. 故对式 (4.9) 两边用 $\boldsymbol{A}^{k-1-p}$ 作用，必然将 $\boldsymbol{A}$ 的高次幂消去，有

$$s_p\boldsymbol{A}^{k-1}\xi=0.$$

而 $\boldsymbol{A}^{k-1}\xi\neq 0$，所以 $s_p=0$，与先前的假设矛盾. 从而 $\xi, \boldsymbol{A}\xi, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\xi$ 线性无关.

批注. 本题是关于循环不变子空间的一些基本认识. 可参考《教程》第七章第 1 节第 1 目的论述，我们上面采用的方法与其是完全一致的. 也可采用数学归纳法证明，本质上逻辑都相同，只是叙述角度不同.

25.　由本节题目 24 的结论可知，$\xi, \boldsymbol{A}\xi, ..., \boldsymbol{A}^{n-1}\xi$ 是 n 个线性无关的向量，故必然为 V 的一组基. 考虑到题目要求的矩阵的具体形式，将这组基调整顺序为 $\boldsymbol{A}^{n-1}\xi, \boldsymbol{A}^{n-2}\xi, ..., \boldsymbol{A}\xi, \xi$，此时有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-1}\xi, \boldsymbol{A}^{n-2}\xi, ..., \boldsymbol{A}\xi, \xi) &= (0, \boldsymbol{A}^{n-1}\xi, ..., \boldsymbol{A}^2\xi, \boldsymbol{A}\xi) \\ &= (\boldsymbol{A}^{n-1}\xi, \boldsymbol{A}^{n-2}\xi, ..., \boldsymbol{A}\xi, \xi)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

右端矩阵即为所求证.

26.　显然 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由《教程》命题 3.9 知 $\boldsymbol{A}$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的矩阵为

$$A_2 = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 2/3 & -4/3 & 10/3 & 10/3 \\ 8/3 & -16/3 & 40/3 & 40/3 \\ 0 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

27.　求出过渡矩阵后利用《教程》命题 3.9 即可.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.　**(2)** $\begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 & -3/2 & -3/2 \\ 1/2 & 3 & -1/4 & -3/2 \\ 1/2 & -3/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 7/2 & -5/4 & -3 \end{pmatrix}$.

28.　**(1)** 由 $\boldsymbol{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)T$ 知 $\boldsymbol{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的矩阵正是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵，为

$$A_\varepsilon = T = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

(2) 由《教程》命题 3.9 知

$$A_\eta = T^{-1}A_\varepsilon T = T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 8/3 & 7/3 & 3 \\ -2/3 & -1/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

29. 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

将情形简化，考虑 A 中的任意两个不同下标的对角元 $\lambda_i, \lambda_j (i \neq j)$ 互换后的矩阵 A_1，若能证明 $A \sim A_1$，则说明对角矩阵某两个对角元对换依然能与原矩阵相似. 此时继续对 A_1 的对角元对换，经过有限次对换后总能得到 B. 因为相似有传递性，从而 $A \sim B$. 下面我们来证明 $A \sim A_1$，考虑初等矩阵 $P_n(i,j)$，则有

$$P_n(i,j)^{-1}AP_n(i,j) = P_n(i,j)AP_n(i,j),$$

由初等矩阵的性质可知，$P_n(i,j)$ 左乘矩阵相当于互换矩阵的 i, j 两行，$P_n(i,j)$ 右乘矩阵相当于互换矩阵的 i, j 两列，所以上式正是

$$P_n(i,j)^{-1}AP_n(i,j) = A_1.$$

从而 $A \sim A_1$. 这就证明了此命题.

30. 此时有 $AB = A(BA)A^{-1}$，由相似矩阵的定义可知，AB 和 BA 相似.

31. 若 $A \sim B, C \sim D$，则存在可逆矩阵 T_1, T_2 使得 $B = T_1^{-1}AT_1, D = T_2^{-1}CT_2$，此时有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1^{-1}AT_1 & 0 \\ 0 & T_2^{-1}CT_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从而相似.

32. **(1)** 因为 $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ 与矩阵空间 $M_n(K)$ 同构，从而有 $\dim \mathrm{End}(V) = \dim M_n(K) = n^2$（《教程》命题 3.7）.

(2) 在 $\mathrm{End}(V)$ 中考虑 n^2+1 个向量 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^{n^2}$，它们显然是线性相关的. 从而存在不全为零的数 $k_0, k_1, k_2, ..., k_{n^2}$ 使得

$$k_0\boldsymbol{E} + k_1\boldsymbol{A} + k_2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + k_{n^2}\boldsymbol{A}^{n^2} = 0.$$

设不为 0 的 k_i 中下标最大的那个是 k_p，那么我们要找的多项式正是

$$f(\lambda) = k_p\lambda^p + k_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + k_0 (k_p \neq 0).$$

批注. 本题第 **(2)** 问实际上正是第 1 节的题目 20.

33. 设 $f(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + \cdots + k_n\lambda^n$，由 $A \sim B$，存在 n 阶可逆矩阵 T 使得 $B = T^{-1}AT$，故有

$$\begin{aligned} f(B) &= k_0E + k_1B + k_2B^2 + \cdots + k_nB^n \\ &= k_0E + k_1T^{-1}AT + k_2(T^{-1}AT)^2 + \cdots + k_n(T^{-1}AT)^n, \end{aligned}$$

而对任意 i，有 $(T^{-1}AT)^i = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT) = T^{-1}A^iT$，从而上式可化为

$$\begin{aligned} f(B) &= k_0E + k_1T^{-1}AT + k_1T^{-1}A^2T \cdots + k_nT^{-1}A^nT \\ &= T^{-1}(k_0E + k_1A + k_2A^2 + \cdots + k_nA^n)T \\ &= T^{-1}f(A)T. \end{aligned}$$

即 $f(A) \sim f(B)$.

34. 类似于本节题目 29 的想法，我们通过初等矩阵 $P_n(i, i+1)$ 调换 $i, i+1$ 两行，再调换 $i, i+1$ 两列，就可以把在 J 上三角区域的元素 1 换至下三角区域中. 定义

$$T = \prod_{i=1}^{n-1} P_n(i, i+1) = P_n(1,2)P_n(2,3)\cdots P_n(n-1,n),$$

显然 T 可逆，其逆矩阵为

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} P_n(i, i+1)\right)^{-1} \\ &= P_n(n-1,n)^{-1}P_n(n-2,n-1)^{-1}\cdots P_n(1,2)^{-1} \\ &= P_n(n-1,n)P_n(n-2,n-1)\cdots P_n(1,2), \end{aligned}$$

利用初等矩阵的乘法规则不难得到

$$\begin{aligned}&T^{-1}JT\\=&P_n(n-1,n)\cdots P_n(2,3)P_n(1,2)JP_n(1,2)P_n(2,3)\cdots P_n(n-1,n)\\=&J'.\end{aligned}$$

35. (1) $\Longleftrightarrow$ (2)：如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，说明 $\boldsymbol{A}$ 是双射，从而由《教程》命题 3.4 知 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}=\{0\}$，从而任何非零向量 $\alpha\in V$，都有 $\boldsymbol{A}\alpha=0$.

反过来，如果对任何非零向量 $\alpha\in V$，都有 $\boldsymbol{A}\alpha=0$，则 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}=\{0\}$，由《教程》命题 3.4 知 $\boldsymbol{A}$ 是单射，再由本节题目 2 的引理 1 知，$\boldsymbol{A}$ 也为双射，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3): 因为 n 维线性空间中 V 中，n 个向量线性无关和这 n 个向量是一组基等价，从而由本节题目 18 推得.

(1) $\Longrightarrow$ (4): 首先根据解答后面的引理，子空间在线性映射下的像集依然为子空间，从而 $\boldsymbol{A}(M)$ 和 $\boldsymbol{A}(N)$ 都是子空间，这点是讨论问题的基础.

现在设 (1) 成立. 我们来证当 $V=M\oplus N$ 时，$V=\boldsymbol{A}(M)\oplus\boldsymbol{A}(N)$. 此时任取 $\alpha\in V$，有 $\alpha=m+n,m\in M,n\in N$，从而有 $\boldsymbol{A}\alpha=\boldsymbol{A}m+\boldsymbol{A}n,\boldsymbol{A}m\in\boldsymbol{A}(M),\boldsymbol{A}n\in\boldsymbol{A}(N)$，也即 $\boldsymbol{A}(V)=\boldsymbol{A}(M)+\boldsymbol{A}(N)$，又因为 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，从而是满射，有 $V=\mathrm{Im}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(V)=\boldsymbol{A}(M)+\boldsymbol{A}(N)$.

再取 $\beta\in\boldsymbol{A}(M)\cap\boldsymbol{A}(N)$，有 $\beta=\boldsymbol{A}m_1=\boldsymbol{A}n_1,m_1\in M,n_1\in N$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是单射，有 $m_1=n_1\in M\cap N$，又 $V=M\oplus N$，从而 $M\cap N=\{0\}$，即 $m_1=n_1=0,\beta=\boldsymbol{A}m_1=\boldsymbol{A}n_1=0$，这说明 $\boldsymbol{A}(M)\cap\boldsymbol{A}(N)=\{0\}$，即 $V=\boldsymbol{A}(M)\oplus\boldsymbol{A}(N)$.

(4) $\Longrightarrow$ (1): 设我们有 $V=M\oplus N=\boldsymbol{A}(M)\oplus\boldsymbol{A}(N)$，我们来证 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 此时任取 $\alpha\in V$，有 $\alpha=\boldsymbol{A}m+\boldsymbol{A}n=\boldsymbol{A}(m+n)$，从而 $V=\boldsymbol{A}(V)=\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 是满射. 再由本节题目 2 的引理 1 知，$\boldsymbol{A}$ 也为双射，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

引理 若 V 是 K 上的线性空间，$\boldsymbol{A}\in\mathrm{End}(V)$，设 M 是 V 的子空间，则 $\boldsymbol{A}$ 在 M 的像集 $\boldsymbol{A}(M)$ 也是 V 的子空间.

证明: 显然 $\boldsymbol{A}(M)$ 非空，任取 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{A}(M)$，则有 $\alpha=\boldsymbol{A}\alpha_1,\beta=\boldsymbol{A}\beta_1,\alpha_1,\beta_1\in M$，又因为 M 是子空间，$\alpha_1+\beta_1\in M$，此时有 $\alpha+\beta=\boldsymbol{A}\alpha_1+\boldsymbol{A}\beta_1=\boldsymbol{A}(\alpha_1+\beta_1)\in\boldsymbol{A}(M)$. 再任取 $k\in K$，同样 $k\alpha_1\in M$，$k\alpha=k\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{A}(k\alpha_1)\in\boldsymbol{A}(M)$. 这说明 $\boldsymbol{A}(M)$ 对运算封闭，是 V 的子空间. ■

36. **(1)** 按照定义，对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha+\beta)&=f(\alpha+\beta)+g(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)+g(\alpha)+g(\beta).\\&=f(\alpha)+g(\alpha)+f(\beta)+g(\beta)=(f+g)(\alpha)+(f+g)(\beta);\\(kf)(\alpha+\beta)&=kf(\alpha+\beta)=k(f(\alpha)+f(\beta))=kf(\alpha)+kf(\beta)\\&=(kf)(\alpha)+(kf)(\beta).\end{aligned}$$

从而 $f+g,kf\in Q(V,U)$.

(2) 按照线性空间的八条规则验证即可.

(3) 只需证明对任意 $f\in Q(V,U),r\in\mathbb{Q},\alpha\in V$，有 $f(r\alpha)=rf(\alpha)$ 即可. 可以看出，该命题在形式上正是柯西方程（第一章第 1 节题目 15 的引理），因此我们完全可以仿照处理柯西方程的方法平行地证明本题. 事实上，两者拥有相同的本质. 为了更加清楚地凸显这种本质，我们采用映射的观点来证明. 设 U 是 n 维线性空间，且 U 的一组基为 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$，取固定的 $\alpha\in V$，任意有理数 r，总存在有理数 $s_1,s_2,...,s_n$，使得

$$f(r\alpha)=s_1\eta_1+s_2\eta_2+\cdots+s_n\eta_n.$$

上式的每个 s_i 都是由 r 唯一确定的，故可将其看作关于变量 $r\in\mathbb{Q}$ 的函数 $s_i=s_i(r)$，即

$$\begin{aligned}s_i:\mathbb{Q}&\to\mathbb{Q};\\r&\mapsto s_i(r).\end{aligned}$$

那么对任意 $a,b\in\mathbb{Q}$ 有

$$\begin{aligned}f((a+b)\alpha)&=f(a\alpha+b\alpha)=f(a\alpha)+f(b\alpha)\\&=s_1(a)\eta_1+s_2(a)\eta_1+\cdots+s_n(a)\eta_n\\&\quad+s_1(b)\eta_1+s_2(b)\eta_1+\cdots+s_n(b)\eta_n\\&=(s_1(a)+s_1(b))\eta_1+(s_2(a)+s_2(b))\eta_1+\cdots+(s_n(a)+s_n(b))\eta_n.\end{aligned}$$

这说明 s_i 满足 $s_i(a+b)=s_i(a)+s_i(b),i=1,2,...,n$（即 s_i 满足柯西方程），由第一章第 1 节题目 15 的引理知对任意 $r\in\mathbb{Q}$ 有

$$s_i(r)=rs_i(1).$$

因此有

$$\begin{aligned}f(r\alpha)&=s_1(r)\eta_1+s_2(r)\eta_2+\cdots+s_n(r)\eta_n\\&=r\left(s_1(1)\eta_1+s_2(1)\eta_2+\cdots+s_n(1)\eta_n\right)\\&=rf(1\cdot\alpha)=rf(\alpha).\end{aligned}$$

命题得证.

37. **(1)** 本题的想法与第 3 节题目 29 是一致的. 由于 $V_{\mathbb{R}}$ 的加法和数乘的规则相比于 V 并未改变（仅仅是数域缩小），故线性空间的八条性质也保持不变. 举例来说，将 $V_{\mathbb{R}}$ 内的加法和数乘分别记作 $+_{\mathbb{R}}$ 和 $\cdot_{\mathbb{R}}$，而将 V 内的加法和数乘分别记作 $+$ 和 $\cdot$，那么有

$$\begin{gathered}\alpha +_{\mathbb{R}} (\beta +_{\mathbb{R}} \gamma) = \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) +_{\mathbb{R}} \gamma;\\ (kl) \cdot_{\mathbb{R}} \alpha = (kl) \cdot \alpha = k(l \cdot \alpha) = k(l \cdot_{\mathbb{R}} \alpha).\end{gathered}$$

从而线性空间要求的规则 (i) 和规则 (vi) 都成立，其余规则是类似的. 故 $V_{\mathbb{R}}$ 是实数域上的线性空间. 关于 $V_{\mathbb{R}}$ 的维数，设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 是 V 的一组基，考虑到 $\mathbb{C}$ 本身作为 $\mathbb{R}$ 的线性空间的一组基为 $1, \mathrm{i}$，很容易证明（可参考第 3 节题目 29 的证明过程）向量组

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, \mathrm{i}\varepsilon_1, \mathrm{i}\varepsilon_2, ..., \mathrm{i}\varepsilon_n$$

是 $V_{\mathbb{R}}$ 的一组基，从而 $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 在 V 有线性性质，故对任意 $\alpha, \beta \in V, k, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$，有

$$\boldsymbol{A}(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\boldsymbol{A}\alpha + \mu\boldsymbol{A}\beta.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 在 $V_{\mathbb{R}}$ 内依然是线性变换.

(2) 设 $A_{\mathbb{C}} = A + \mathrm{i}B$，其中 A, B 都是实矩阵，则不难得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)(A + \mathrm{i}B)\\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)A + (\mathrm{i}\varepsilon_1, \mathrm{i}\varepsilon_2 ..., \mathrm{i}\varepsilon_n)B\\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, \mathrm{i}\varepsilon_1, ..., \mathrm{i}\varepsilon_n)\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix};\\ \boldsymbol{A}(\mathrm{i}\varepsilon_1, \mathrm{i}\varepsilon_2, ..., \mathrm{i}\varepsilon_n) &= \mathrm{i}\boldsymbol{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)\\ &= \mathrm{i}((\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)A + (\mathrm{i}\varepsilon_1, \mathrm{i}\varepsilon_2 ..., \mathrm{i}\varepsilon_n)B)\\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)(-B) + (\mathrm{i}\varepsilon_1, \mathrm{i}\varepsilon_2 ..., \mathrm{i}\varepsilon_n)A\\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, \mathrm{i}\varepsilon_1, ..., \mathrm{i}\varepsilon_n)\begin{pmatrix}-B\\ A\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, \mathrm{i}\varepsilon_1, ..., \mathrm{i}\varepsilon_n) &= (\boldsymbol{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n), \boldsymbol{A}(\mathrm{i}\varepsilon_1, ..., \mathrm{i}\varepsilon_n))\\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, \mathrm{i}\varepsilon_1, ..., \mathrm{i}\varepsilon_n)\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

即有 $\boldsymbol{A}_{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}$.

上述式子的正确性由形式运算律保证，这就是说可以把 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ 看作一种特殊的行向量（或者说单行矩阵），从而满足矩阵运算规则. 关于这一点在批注中补充.

再来计算两个矩阵的行列式，为了统一符号，以下均采用 det 来表示矩阵的行列式，而 $|\cdot|$ 表示复数模.

法一 (利用广义初等变换直接计算)

根据广义初等变换，并且结合行列式的性质（《教程》第三章命题 2.8）我们有

$$\begin{aligned}\det A_{\mathbb{R}}&=\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B+\mathrm{i}A & A-\mathrm{i}B\end{pmatrix}\\&=\det\begin{pmatrix}A+\mathrm{i}B & -B\\ 0 & A-\mathrm{i}B\end{pmatrix}=\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)\\&=\det A_{\mathbb{C}}\overline{\det A_{\mathbb{C}}}=|\det A_{\mathbb{C}}|^2.\end{aligned}$$

如果不熟悉上述广义初等变换，也可写成矩阵语言如下

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ \mathrm{i}E & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ -\mathrm{i}E & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+\mathrm{i}B & -B\\ 0 & A-\mathrm{i}B\end{pmatrix}.$$

法二 (间接处理)

先研究 A 可逆的情况，此时由第三章第 3 节题目 8 的结论知

$$\det A_{\mathbb{R}}=\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}=\det A\det(A+BA^{-1}B).$$

由行列式的性质知

$$\begin{aligned}|\det A_{\mathbb{C}}|^2&=\det A_{\mathbb{C}}\overline{\det A_{\mathbb{C}}}=\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)\\&=\det(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)\\&=\det A\det(E+\mathrm{i}A^{-1}B)\det A\det(E-\mathrm{i}A^{-1}B)\\&=(\det A)^2\det(E+\mathrm{i}A^{-1}B)(E-\mathrm{i}A^{-1}B)\\&=(\det A)^2\det\left(E+(A^{-1}B)^2\right)\\&=\det A\det(A+BA^{-1}B).\end{aligned}$$

故有 $\det A_{\mathbb{R}}=|\det A_{\mathbb{C}}|^2$. 对于 A 不可逆的情况，我们采矩阵理论中的摄动法逼近 A.

首先注意到将上述推理中的矩阵 A 换作任意可逆矩阵，推理过程依然成立，故对任意可逆矩阵 R 都有

$$\det\begin{pmatrix} R & -B \\ B & R \end{pmatrix} = |\det(R+\mathrm{i}B)|^2. \tag{4.10}$$

若 A 是不可逆矩阵，取 $R(t)=tE+A=(r_{ij})$，则在 $t=0$ 处的某个去心邻域[5]内 $R(t)$ 是可逆矩阵，这是因为由行列式的（反序数）定义可知

$$\det R(t) = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} r_{1j_1}r_{2j_2}\cdots r_{nj_n},$$

其中 r_{ij} 都是 t 的一次式或常数，从而 $\det R(t)$ 是关于 t 的一个非零多项式（非零是因为 $R(t)$ 至少含有 t^n 一项），又由 A 不可逆，有 $\det R(0)=\det A=0$，即 $t=0$ 是 $\det R(t)$ 的一个零点，显然 $\det R(t)$ 在 $t=0$ 处的某个去心邻域内是恒不为零的[6]，此时 $R(t)$ 可逆.

现在因为 $R(t)$ 是连续(矩阵)函数,由行列式的定义可知 $\det\begin{pmatrix} R(t) & -B \\ B & R(t) \end{pmatrix}$ 和 $|\det(R(t)+\mathrm{i}B)|$ 也是连续函数，故由式 (4.10) 得

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} R(0) & -B \\ B & R(0) \end{pmatrix} = \lim_{t\to 0}\det\begin{pmatrix} R(t) & -B \\ B & R(t) \end{pmatrix} \\ &= \lim_{t\to 0}|\det(R(t)+\mathrm{i}B)|^2 = |\det(R(0)+\mathrm{i}B)|^2 = |\det(A+\mathrm{i}B)|^2.\end{aligned}$$

故命题对不可逆的矩阵 A 也成立.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 3.12.

为什么可以将 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ 等包含抽象元素的向量看作“真的”行向量，从而能对其他矩阵作乘法或进行数乘，并且满足矩阵运算规则呢？这是因为虽然矩阵乘法的各种规则是由数域上的矩阵（即以数字为元素的矩阵）推得的，但其推导过程本质上只是乘法和加法自身性质的体现（即加法结合律，乘法交换律等），而与元素是否为数字无关，这意味着只要 ε_k 与其他数字的乘积以及相互之间求和的性质，相比于数字间乘积以及数字间求和的性质完全一致的话，就可以定义出完全相同的矩阵乘法结构. 而这些性质是由 ε_k 所在的线性空间保证的.

举例来说，对于数字，有 $(1\times 2)\times 3=1\times(2\times 3)$，而对于线性空间 V 中的向量，也有 $(1\cdot 2)\cdot\alpha=1\cdot(2\cdot\alpha)$，这可视作一种数学结构上的一致性.

[5]即 $(-\delta,0)\cup(0,\delta),\delta>0$.

[6]因为多项式只有有限个零点.

4.4 线性变换的特征值与特征向量

1. 对任意 i,有 $\boldsymbol{A}^i\alpha=\boldsymbol{A}^{i-1}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\boldsymbol{A}^{i-1}\alpha=\lambda_0\boldsymbol{A}^{i-2}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0^2\boldsymbol{A}^{i-2}\alpha=\cdots=\lambda_0^i\alpha$，则

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})\alpha&=(a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{E})\alpha\\&=a_0\boldsymbol{A}^m\alpha+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}\alpha+\cdots+a_m\boldsymbol{E}\alpha\\&=a_0\lambda_0^m\alpha+a_1\lambda^{m-1}\alpha+\cdots+a_m\alpha\\&=f(\lambda_0)\alpha.\end{aligned}$$

2. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 得到 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\alpha)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\alpha)=\lambda_0(\boldsymbol{B}\alpha)$，从而 $\boldsymbol{B}\alpha\in V_{\lambda_0}$.

3. 本题的证明过程已经在《教程》例 4.2 中有了论述.

4. 由分块矩阵的行列式性质，不难推知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda E-J_1&0\\0&\lambda E-J_2\end{vmatrix}=|\lambda E-J_1||\lambda E-J_2|=\lambda^r\lambda^{n-r}=\lambda^n,$$

故 $|\lambda E-A|=0$ 仅有一个 n 重根 $\lambda_0=0$，从而 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值 $\lambda_0=0$. 考虑线性方程组 $(\lambda_0E-A)X=0$，即 $AX=0$，由系数矩阵 A 的形状可知，x_1,x_{r+1} 是自由未知量，解得这个方程组的一个基础解系为

$$\eta_1=(1,0,...,0),\eta_2=(0,0,...,0,1_{(r+1)\text{th}},0,...,0).$$

以 η_1,η_2 为坐标写出 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $\varepsilon_1,\varepsilon_{r+1}$，这就是 V_{λ_0} 的一组基，从而有 $V_{\lambda_0}=L(\varepsilon_1,\varepsilon_{r+1})$.

5. 利用特征方程 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=0$ 求出特征值 λ_i，由 $(\lambda E-A)X=0$ 求出属于各个特征值的线性无关的特征向量坐标，从而得到 V_{λ_i} 的基.

(1) 特征值 $\lambda_1=7,\lambda_2=-2$，V_{λ_1} 的一组基为：$\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$V_{\lambda_2}$ 的一组基为：$-4\varepsilon_1+5\varepsilon_2$. A 可对角化，过渡矩阵 $T=\begin{pmatrix}1&-4\\1&5\end{pmatrix}$.

(2) 若 $a=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，特征值为 $\lambda_1=0$，V_{λ_1} 的一组基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$. A 可对角化，过渡矩阵为 E.

若 $a\neq0$，则特征值为 $\lambda_1=a\mathrm{i},\lambda_2=-a\mathrm{i}$，$V_{\lambda_1}$ 的一组基为 $\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2$，$V_{\lambda_2}$ 的一组基为 $-\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2$. A 可对角化，过渡矩阵 $T=\begin{pmatrix}1&-1\\\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

(3) 特征多项式为 $\lambda^3-4\lambda^2+2\lambda+4$，特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{3},\lambda_3=1-\sqrt{3}$，$V_{\lambda_1}$ 的一组基为 $-2\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$V_{\lambda_2}$ 的一组基为 $(6+3\sqrt{3})\varepsilon_1-(2+\sqrt{3})\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$V_{\lambda_3}$ 的一组基为 $(6-3\sqrt{3})\varepsilon_1+(\sqrt{3}-2)\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$A$ 可对角化，过渡矩阵

$$T=\begin{pmatrix}-2 & 6+3\sqrt{3} & 6-3\sqrt{3}\\ 1 & -2-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) 特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，V_{λ_1} 的一组基为 $\varepsilon_1-\varepsilon_3$，$V_{\lambda_2}$ 的一组基为 $\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_3$. A 可对角化，过渡矩阵

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(5) 特征多项式为 $\lambda^3+14\lambda$，特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{14}\mathrm{i},\lambda_3=-\sqrt{14}\mathrm{i}$，$V_{\lambda_1}$ 的一组基是 $3\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3$，$V_{\lambda_2}$ 的一组基是 $(-6-\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_1+(2-3\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_2+10\varepsilon_3$ ，V_{λ_3} 的一组基是 $(-6+\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_1+(2+3\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_2+10\varepsilon_3$. A 可对角化，过渡矩阵

$$T=\begin{pmatrix}3 & -6-\sqrt{14}\mathrm{i} & -6+\sqrt{14}\mathrm{i}\\ -1 & 2-3\sqrt{14}\mathrm{i} & 2+3\sqrt{14}\mathrm{i}\\ 2 & 10 & 10\end{pmatrix}.$$

(6) 特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$，V_{λ_1} 的一组基为：ε_3，V_{λ_2} 的一组基为：$3\varepsilon_1-6\varepsilon_2+20\varepsilon_3$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量只有 2 个，故由《教程》定理 4.1，A 不可对角化.

(7) 特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2$，V_{λ_1} 的一组基为：$-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$，$V_{\lambda_2}$ 的一组基为：$\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_4$，$A$ 可对角化，过渡矩阵

$$T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

6. **(1)** 特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=10$，过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1/2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2)$|\lambda E-B|=(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-8)$，$|\lambda E-C|=(\lambda_2-2)^2(\lambda-y)$. 两式相等即 $x=-2,y=-4$. 此时 B 和 C 的特征多项式均为 $(\lambda-2)^2(\lambda+4)$.B 有两个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-4$，属于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量只有 $(-1,0,1)'$，属于 λ_2 的线性无关的特征向量只有 $(1,3,2)'$，故 $\dim V_{\lambda_1}=\dim V_{\lambda_2}=1$，显然 $V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\neq V$，$B$ 不能对角化，故 B 与 C 不相似.

批注. 注意特征多项式相同的矩阵不一定相似，特征多项式相同只能说明特征值（包括重数）相同，然而特征向量会有复杂的行为（需要用 Jordan 标准形来描述）.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵为 A. 那么根据 $\sigma(\boldsymbol{AB})=\sigma(\boldsymbol{A})\sigma(\boldsymbol{B})$ 知，$\boldsymbol{A}^k$ 在该组基下的矩阵为 A^k，又 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$，有 $A^k=0$. 考虑 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，由代数基本定理，至少存在一个根 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 使得 $f(\lambda)=0$，此时存在非零向量 $X_0\in\mathbb{C}^n$，使得 $AX_0=\lambda X_0$，从而有 $0=A^kX_0=\lambda A^{k-1}X_0=\lambda^2A^{k-2}X_0=\cdots=\lambda^kX_0$，从而 $\lambda_0^k=0$，即 $\lambda_0=0$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 存在唯一的特征值 $\lambda_0=0$.

批注. 本题即为《教程》第七章命题 1.1. 这里可能要注意一个细微的问题，此题如果不直接考虑特征多项式的根，只在线性变换层面讨论特征值，由于数域 K 的限制，在逻辑上会存在一些不必要的困难.

具体而言，请看如下论证：

设 $\lambda\in K$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，属于该特征值的一个特征向量为 $\alpha\neq0$，有 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$，而 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$，可以推知 $\boldsymbol{A}^k\alpha=\lambda^k\alpha=0$，即 $\lambda=0$. 这说明若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值，那么特征值一定是 0. 命题（似乎）成立.

但是，$\boldsymbol{A}$ 一定存在特征值吗？

如果该线性空间 V 是在复数域 $\mathbb{C}$ 上定义的，根据代数基本定理，其特征多项式总有至少一个零点，从而 $\boldsymbol{A}$（在 $\mathbb{C}$ 上）至少有一个特征值，那么以上的论证确实成立，此时这个特征值一旦存在，就可以被判定为 0.

如果 V 不是在复数域 $\mathbb{C}$ 上定义的，而是定义在小一点的数域 K 上（比如 $\mathbb{R}$），此时在没有具体讨论特征多项式的零点的情况下，我们无法说明 $\boldsymbol{A}$（在数域 $K=\mathbb{R}$ 上）有特征值. 尽管我们已经把所有 K 上的可能存在的特征值都归结为 0 了，但是正是其存在性我们无法直接保证.

这其中的关键在于，在此情形下，我们不承认 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$ 与 $AX=\lambda X$ 是完全等价的，前者只能考虑 $\lambda\in K$，$\alpha\in V$，如果 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus K$，我们不知道 $\lambda\alpha$ 是什么，这个式子没有定义；而后者却可以考虑 $\lambda\in\mathbb{C}$，$X\in\mathbb{C}^n$（此时 X 不一定在是 V 中某个向量的坐标），从而便于利用代数基本定理. 这种做法实际上扩大了“定义域”，把相关的解求出来后，再将解限制回 K 上.

用比较严谨的语言叙述这两者的区别如下：

1）$\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha \Longrightarrow \lambda=0$ 表示：如果存在 $\lambda\in K,\alpha\in V,\alpha\neq 0$ 使得 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$ 成立，那么 $\lambda=0$；

2）$AX=\lambda X \Longrightarrow \lambda=0$ 表示：如果存在 $\lambda\in\mathbb{C},X\in\mathbb{C}^n,X\neq 0$ 使得 $AX=\lambda X$ 成立，那么 $\lambda=0$.

强调特征值对数域的依赖性，是为了严谨地区分出不同空间中线性变换的实际状态，虽然特征方程并没有真正对数域作出限制，但若脱离了线性空间的数域，特征方程的解是没有意义的. 比如说，设 A 是实矩阵，而 λ_0 是 $|\lambda E-A|=0$ 的非实数解，则方程 $(\lambda E-A)X=0$ 的非零解向量 X_0 一定也是非实解，若不然，AX_0 是实的，但 λX_0 是非实的，矛盾. 这和我们的直觉是相符的，即对于实线性空间 V 上线性变换的特征多项式的复根，它所解出的“特征向量的坐标 X”，其实是一种幻觉，V 根本不可能有向量与该坐标对应.

8. 假设 $\xi_1+\xi_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，设其属于特征值 λ_3，则有 $\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda_3(\xi_1+\xi_2)$，同时按题设我们有 $\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$，从而 $\lambda_3(\xi_1+\xi_2)=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$，即 $(\lambda_3-\lambda_1)\xi_1+(\lambda_3-\lambda_2)\xi_2=0$. 因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，根据《教程》命题 4.3 知 ξ_1,ξ_2 线性无关，从而 $\lambda_3-\lambda_1=\lambda_3-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$ 矛盾. 故 $\xi_1+\xi_2$ 必然不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

9. 若 $\boldsymbol{A}$ 有两个或两个以上的相异特征值，取其中两个记为 λ_1,λ_2，设 ξ_1,ξ_2 分别是是属于这两个特征值的特征向量，必有 $\xi_1+\xi_2\neq 0$（否则线性相关，与《教程》命题 4.3 矛盾），按照本节题目 8 的结论，$\xi_1+\xi_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，与题设矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 有且只有一个特征值，记为 λ，则对 V 中的任意向量（包括零向量）α，都有 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$，故 $\boldsymbol{A}$ 是数乘变换.

10. **(1)** 假设 $\boldsymbol{A}$ 存在特征值 0，则存在非零向量 $\alpha\in V$ 使得 $\boldsymbol{A}\alpha=0$，即 $\alpha\in\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$，从而 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}\neq\{0\}$. 由《教程》命题 3.4 知 $\boldsymbol{A}$ 不是单射，从而不可逆，与题设矛盾.

(2) 如果 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，存在非零向量 $\alpha\in V$ 使得 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$，又 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由 (1) 知 $\lambda\neq 0$，上式两边同时用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 作用得到，$\boldsymbol{A}^{-1}\alpha=(1/\lambda)\alpha$，从而 $1/\lambda$ 是特征值.

11. 令 $\varepsilon_k=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n},k=1,2,...,n$ 为 n 个 n 次单位根，$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的多项式，根据《教程》第三章例 3.3 的证明过程可知，

有下式成立

$$AB=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_n&a_1&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\\varepsilon_1&\varepsilon_2&\cdots&\varepsilon_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\varepsilon_1^{n-1}&\varepsilon_2^{n-1}&\cdots&\varepsilon_n^{n-1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1)&f(\varepsilon_2)&\cdots&f(\varepsilon_n)\\\varepsilon_1f(\varepsilon_1)&\varepsilon_2f(\varepsilon_2)&\cdots&\varepsilon_nf(\varepsilon_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\varepsilon_1^{n-1}f(\varepsilon_1)&\varepsilon_2^{n-1}f(\varepsilon_2)&\cdots&\varepsilon_n^{n-1}f(\varepsilon_n)\end{pmatrix}.$$

在上式中对 B 的每一列作分块，按照分块矩阵乘积可知

$$A\begin{pmatrix}1\\\varepsilon_k\\\vdots\\\varepsilon_k^{n-1}\end{pmatrix}=f(\varepsilon_k)\begin{pmatrix}1\\\varepsilon_k\\\vdots\\\varepsilon_k^{n-1}\end{pmatrix},k=1,2,...,n.$$

即对 $k=1,2,...,n$，$f(\varepsilon_k)$ 是 A 的特征值，而 $(1,\varepsilon_k,...,\varepsilon_k^{n-1})'$ 是属于该特征值的特征向量. 这 n 个特征向量是线性无关的，这是因为以这 n 个特征向量为列构成的矩阵 B 的行列式为范德蒙德行列式（《教程》第三章例 2.6）

$$|B|=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\neq 0.$$

从而 B 是满秩方阵，其列向量线性无关. 根据《教程》定理 4.1，A 可对角化，若取 $T=B$，则可得 $T^{-1}AT$ 为对角形. 注意到上述过程选取 n 个特征向量中不包含任何 a_i，故 B 实际上与 a_i 的取值无关，从而对任意复数域循环矩阵 A，$T^{-1}AT$ 都是对角形.

12.　由题意

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&&&\\-1&\lambda&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&\lambda&1\\&&&-1&\lambda\end{vmatrix}_{n\times n}.$$

设 Λ_1,Λ_2 是方程 $x^2-\lambda x-1=0$ 的两根，即

$$\Lambda_1=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4}}{2},\Lambda_2=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+4}}{2}.\tag{4.11}$$

注意这里 Λ_1 和 Λ_2 为复数[7]. 由第三章题目 26 的引理可知

$$|\lambda E - A| = \begin{cases} \frac{\Lambda_2^{n+1} - \Lambda_1^{n+1}}{\Lambda_2 - \Lambda_1}, & \Lambda_1 \neq \Lambda_2; \\ (n+1)\Lambda_1^n, & \Lambda_1 = \Lambda_2. \end{cases}$$

现在要解关于 λ 的方程 $|\lambda E - A| = 0$，首先在上式 $\Lambda_1 = \Lambda_2$ 的情况中，必然有 $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$，$\Lambda_1 = \pm\mathrm{i}$，从而 $|\lambda E - A| = (n+1)(\pm\mathrm{i}) \neq 0$，故方程的解只能出现在上式 $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ 的情况中，此时有 $\Lambda_2^{n+1} = \Lambda_1^{n+1}$，即 $\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right)^{n+1} = 1$，从而 $\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} = \varepsilon_k = \mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/(n+1)}, k = 1, 2, ..., n$[8]，其中 ε_k 为 $n+1$ 次单位根，代入式 (4.11) 得到

$$\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}} = \varepsilon_k,$$

变形得

$$\lambda^2 = -\frac{(\varepsilon_k + 1)^2}{\varepsilon_k} = -\left(\varepsilon_k + 2 + \frac{1}{\varepsilon_k}\right).$$

注意到 $|\varepsilon_k| = 1$，故 $\frac{1}{\varepsilon_k} = \bar{\varepsilon}_k$，从而有

$$\lambda^2 = -(\varepsilon_k + \bar{\varepsilon}_k + 2) = -2(\mathrm{Re}\varepsilon_k + 1) = -2\left(\cos\frac{2k\pi}{n+1} + 1\right) = -4\cos^2\frac{k\pi}{n+1},$$

其中符号 Re 表示取复数的实部. 那么

$$\lambda = \pm 2\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{n+1}.$$

由于上式对 $k = 1, 2, ..., n$ 都成立，因此，包含正负号在内，上式给出了 $2n$ 个 λ，它们都满足 $|\lambda E - A| = 0$，但方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的（互不相同的）根不可能有 $2n$ 个，所以上面的表达式中应当有些 λ 是重复的，事实上

$$-\cos\frac{k\pi}{n+1} = \cos\left(\pi - \frac{k\pi}{n+1}\right) = \cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}.$$

故实际上 $|\lambda E - A| = 0$ 的 n 个根为 $2\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, ..., n$. 这 n 个根互不相同，根据《教程》命题 4.3 的推论知矩阵 A 可对角化.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.6.

[7]此处的 $\sqrt{\ }$ 的意义是：设 z 为复数，则 $\sqrt{z}$ 表示一个复数 s，满足 $s^2 = z$，且 s 的辐角落在 $[0, \pi)$ 中. 特别地，在此规定下，若 z 为正实数，则 $\sqrt{z}$ 与常规意义的实数算术平方根一致，若 z 为负实数，则 $\sqrt{z} = \mathrm{i}\sqrt{|z|}$.

[8]注意 k 无法取到 $n+1$（或者 0），否则 $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

13. **(1)** 由《教程》命题 3.7 知，$\boldsymbol{AB}$ 在和 $\boldsymbol{BA}$ 在给定基下的矩阵分别为

$$\sigma(\boldsymbol{AB}) = AA^*, \sigma(\boldsymbol{BA}) = A^*A.$$

由伴随矩阵的性质可知 $AA^* = A^*A = |A|E$，即 A 和 A^* 可交换，从而 $\sigma(\boldsymbol{AB}) = \sigma(\boldsymbol{BA})$，从而由 σ 是同构映射可知 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

(2) 先将问题转化到坐标空间上,对于任意 $\alpha \in V$,设 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 下的坐标为 $X \in K^n$，则必然有

$$\boldsymbol{B}\alpha = 0 \Longleftrightarrow A^*X = 0,$$

设 $N = \{X \in K^n | A^*X = 0\}$ 为上述线性方程组的解空间，f 为将任意 $\alpha \in V$ 对应到其给定基下的坐标 $X \in K^n$ 的线性映射，则 f 是 M 到 N 的同构映射，且 f^{-1} 将 N 的一组基映射为 M 的一组基.

线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值总是其在任意一组基下的矩阵 A 的特征值，故 A 有零特征值. 由《教程》命题 4.2 后面作出的论述，有 $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 0$. 故 A 不满秩，即 $\mathrm{r}(A) \leqslant n-1$.

如果 $A = n-1$，此时由第三章第 3 节题目 6 知 $\mathrm{r}(A^*) = 1$，从而 $\dim M = \dim N = n - \mathrm{r}(A^*) = n-1$，又因为

$$A^*A = |A|E = 0,$$

从而 A 的所有列向量都是线性方程组 $A^*X = 0$ 的解，故取 A 的列向量的一个极大线性无关部分组为 $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$，这是 N 的一组基，取其在 f 下的原像则是即得到 M 的一组基为

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)A_1,\\
\eta_2 &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)A_2,\\
&\cdots\\
\eta_{n-1} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)A_{n-1}.
\end{aligned}$$

如果 $\mathrm{r}(A) < n-1$，此时由第三章第 3 节题目 6 知 $\mathrm{r}(A^*) = 0$，则 $A^* = 0$，从而全体属于 K^n 的向量都是 $A^*X = 0$ 的解，即 $N = K^n$，此时 $M = f^{-1}(N) = V$，故 M 的维数 $\dim M = n$，且 M 的一组基正是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$.

14. 必要性，如果 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，设 $\boldsymbol{A}$ 所有互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. 并取 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 使 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下成对角形，则有 $\boldsymbol{A}\varepsilon_i = \lambda_{s_i}\varepsilon_i$，或者 $(\lambda_{s_i}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\varepsilon_i = 0$. 其中 λ_{s_i} 是某个特征值.

首先对任意 i,j，都有

$$(\lambda_i \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_j \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda_j \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_i \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

即 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 和 $\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可交换，证明这点只需对上面的式子两边的括号展开即可，上式左右两边实际上都是 $\lambda_i\lambda_j\boldsymbol{E}-\lambda_i\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$，从而是相等的.

其次若设线性变换

$$\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdots(\lambda_k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

那么对任意 ε_i，有 $\boldsymbol{\Lambda}\varepsilon_i=0$. 这是因为我们总不断交换 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的各个因子的顺序，使得 $\lambda_{s_i}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 先作用于 ε_i，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}\varepsilon_i&=(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdots(\lambda_k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\varepsilon_i\\&=\left(\prod_{j=1,j\neq s_i}^{k}(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\right)(\lambda_{s_i}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\varepsilon_i=0.\end{aligned}$$

现在对任意 $\alpha\in V$，设 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$，则有

$$\boldsymbol{\Lambda}\alpha=a_1\boldsymbol{\Lambda}\varepsilon_1+a_2\boldsymbol{\Lambda}\varepsilon_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\Lambda}\varepsilon_n=0,$$

这说明 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{0}$.

充分性，若 $\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdots(\lambda_k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，设 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵为 A，那么 $\boldsymbol{\Lambda}$ 在这组基下的矩阵（《教程》命题 3.7）为

$$\Lambda=(\lambda_1E-A)(\lambda_2E-A)\cdots(\lambda_kE-A)=0.$$

又由第二章第 5 节题目 9 的结论可知，对上式有

$$\mathrm{r}(\lambda_1E-A)+\mathrm{r}(\lambda_2E-A)+\cdots+\mathrm{r}(\lambda_kE-A)\leqslant(k-1)n.$$

现在要证明 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，由《教程》定理 4.2 只需证明 $V=\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}$，由《教程》命题 4.4，$\sum_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}$ 已经是直和，我们来说明它等于 V. 因为方程 $(\lambda_iE-A)X=0$ 的所有解都是 V_{λ_i} 内的向量的坐标，$(\lambda_iE-A)X=0$ 的解空间与 V_{λ_i} 同构，从而 $\dim V_{\lambda_i}=n-\mathrm{r}(\lambda_iE-A)$. 故有

$$\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_k}\geqslant kn-(k-1)n=n.$$

再由《教程》第 2 节定理 2.3 知

$$\dim\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}\geqslant n$$

而 $\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}\subseteq V$，故 $\dim\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}=n$，即 $\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}$ 是 V 的 n 维子空间，从而有 $V=\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}$，故命题得证.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.7，本题的结论可以直接推出《教程》命题 4.6，过程如下：设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 内的线性变换，且 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，则根据本题结论有

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdots(\lambda_k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}.$$

对于任何不变子空间 M，将上式左边的变换限制到 M 中，有

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|_M)(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|_M)\cdots(\lambda_k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|_M)=\mathbf{0}.$$

从而说明 $\boldsymbol{A}|_M$ 的矩阵也可对角化.

15. 任取 $\alpha\in M+N$，有 $\alpha=m+n, m\in M, n\in N$，从而 $\boldsymbol{A}\alpha=\boldsymbol{A}m+\boldsymbol{A}n$，因为 M,N 都是不变子空间，$\boldsymbol{A}m\in M, \boldsymbol{A}n\in N$，即 $\boldsymbol{A}\alpha=\boldsymbol{A}m+\boldsymbol{A}n\in M+N$，所以 $M+N$ 是不变子空间.

任取 $\alpha\in M\cap N$，则 $\alpha\in M$ 且 $\alpha\in N$，因为 M,N 都是不变子空间，有 $\boldsymbol{A}\alpha\in M$ 且 $\boldsymbol{A}\alpha\in N$，即 $\boldsymbol{A}\alpha\in M\cap N$，所以 $M\cap N$ 是不变子空间.

16. 记题述矩阵为 J，按题设存在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 使得 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵为 J. 我们有 $\boldsymbol{A}\varepsilon_1=\lambda_0\varepsilon_1, \boldsymbol{A}\varepsilon_i=\lambda_0\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1}, i=2,3,...,n$. 设 M 是 V 的一个非平凡不变子空间，可取 M 中的非零向量 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$. 由 $\alpha\neq 0$ 知 $a_1,a_2,...,a_n$ 不全为 0，设这些不为零的数中下标最大的那个为 a_p，则有 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_p(a_p\neq 0)$. 那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\alpha&=a_1(\lambda_0\varepsilon_1)+a_2(\lambda_0\varepsilon_2+\varepsilon_1)+a_2(\lambda_0\varepsilon_2+\varepsilon_1)+\cdots+a_p(\lambda_0\varepsilon_p+\varepsilon_{p-1})\\&=\lambda_0(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_p)+a_2\varepsilon_1+a_3\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_{p-1}\\&=\lambda_0\alpha+a_2\varepsilon_1+a_3\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_{p-1}.\end{aligned}$$

我们记 $\beta_1=a_2\varepsilon_1+a_3\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_{p-1}$，则 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0\alpha+\beta_1$，因为 $\boldsymbol{A}\alpha\in M$，所以 $\beta_1=\boldsymbol{A}\alpha-\lambda_0\alpha\in M$. 同样的我们有

$$\boldsymbol{A}\beta_1=\lambda_0\beta_1+a_3\varepsilon_1+a_4\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_{p-2}.$$

记 $\beta_2=a_3\varepsilon_1+a_4\varepsilon_2+\cdots+a_p\varepsilon_{p-2}$，则 $\beta_2=\boldsymbol{A}\beta_1-\lambda_0\beta_1\in M$. 按这种方式，继续写出 $\beta_3,\beta_4,...,\beta_{p-1}$，则有 $\beta_{p-1}=a_p\varepsilon_1\in M$，又 $a_p\neq 0$，从而 $\varepsilon_1\in M$. 因为 M 是任取的，即所有的非平凡不变子空间都有向量 ε_1. 故不可能存在非平凡的不变子空间 N 使得 $V=M\oplus N$（否则 $\varepsilon_1\in M\cap N=\{0\}$，即 $\varepsilon_1=0$，与 ε_1 是基的一个向量矛盾）.

而当 N 是平凡不变子空间，即 $N=\{0\}$ 或 $N=V$ 时，此时如果有 $M\oplus N=V$，则按维数公式（《教程》定理 2.2）有 $\dim M=\dim V-\dim N=n-\dim N$，则 $\dim M=0$ 或 $\dim M=n$，从而 $M=\{0\}$ 或 $M=V$，与 M 是非平凡子空间矛盾，所以这样的 N 也不存在.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.9.

17. 一方面，若 $\boldsymbol{A}$ 有一非平凡不变子空间 M，M 只能是一维空间. 那么取 M 的一组基 η_1，则由不变性知 $\boldsymbol{A}\eta_1 \in M = L(\eta_1)$，即存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{A}\eta_1 = \lambda_0\eta_1$，从而 $\boldsymbol{A}$ 有一实特征值 λ_0.

另一方面，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2\cos\theta)\lambda + 1.$$

其判别式为 $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1)$，注意到 $\theta \neq k\pi$，$\cos\theta \neq \pm 1$，故 $\Delta < 0$，$|\lambda E - A| = 0$ 无解，所以 $\boldsymbol{A}$ 没有实特征值，与前一段论述矛盾. 从而 $\boldsymbol{A}$ 不存在非平凡不变子空间.

18. 对任意 $a \in K$，设由 a 决定的 F 内的线性变换为 $\boldsymbol{A}_a$，若对全体 $\boldsymbol{A}_a, a \in K$ 有一公共非平凡不变子空间 M，M 只能是一维空间. 取 M 的一组基 η_1，则由不变性知 $\boldsymbol{A}_a\eta_1 \in M = L(\eta_1)$，说明对任意 $a \in K$，存在 $\lambda_a \in K$ 使得 $\boldsymbol{A}_a\eta_1 = \lambda_a\eta_1$，即 λ_a 是 $\boldsymbol{A}_a$ 的一特征值，且 η_1 是属于 λ_a 的特征向量. 而 $\boldsymbol{A}_a$ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A_a| = \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ a-1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a^2 - a,$$

注意到当 $a = 1, 0$ 时，$|\lambda E - A_1| = |\lambda E - A_0| = \lambda^2$，其零点只有 0，从而 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_0$ 只有特征值 0，因此必然有 $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$.

现在考虑线性变换 $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0$，一方面，因为 $\boldsymbol{A}_1\eta_1 = 0, \boldsymbol{A}_0\eta_1 = 0$，从而 $(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0)\eta_1 = 0$，即 $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0$ 也有特征值 0. 但另一方面 $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$A_1 + A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征多项式为 $|\lambda E - (A_1 + A_0)| = \lambda^2 - 1$，零点为 ± 1，从而 $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0$ 只有特征值 ± 1，这就产生了矛盾. 故 M 不可能存在.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$，由代数基本定理知 $f(\lambda) = 0$ 必有一复根 λ_0. 若 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$，则 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，设属于它的一个特征向量为 ξ_0，则 $L(\xi_0)$ 显然是 $\boldsymbol{A}$ 的一个一维不变子空间.

若 $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$，记 $\lambda_0 = a + b\mathrm{i}(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$. 此时 λ_0 是（复数域上的）矩阵 A 的一个特征值，存在一个非零复向量 $X_0 = U + \mathrm{i}V(U, V \in \mathbb{R}^n)$ 使得

$AX_0 = \lambda_0 X_0$，即 $A(U+\mathrm{i}V) = (a+b\mathrm{i})(U+\mathrm{i}V) = aU-bV+\mathrm{i}(aV+bU)$，从而 $AU = aU-bV, AV = aV+bU$. 令 $\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)U, \beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)V$，考虑 $M = L(\alpha, \beta)$，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\alpha &= \boldsymbol{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)U \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)AU \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)(aU-bV) \\ &= a(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)U - b(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)V \\ &= a\alpha - b\beta \in M.\end{aligned}$$

同理有 $\boldsymbol{A}\beta = a\beta + b\alpha \in M$. 从而对任意 $\gamma = p\alpha + q\beta \in M, p, q \in \mathbb{R}$，有 $\boldsymbol{A}\gamma = p\boldsymbol{A}\alpha + q\boldsymbol{A}\beta \in M$，即 M 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个不变子空间. 又因为 U, V 至少有 1 个非零[9]，故 α, β 也至少有 1 个非零，从而 $M = L(\alpha, \beta)$ 是一维或二维空间. 综上 $\boldsymbol{A}$ 必定有一个一维或二维的不变子空间.

20. 对任意 $\xi \in V_\lambda$，ξ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\xi) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\xi) = \boldsymbol{B}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda\boldsymbol{B}\xi$，故 $\boldsymbol{B}\xi \in V_\lambda$. 从而 V_λ 是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间.

21. 设 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，$V_{\lambda_i}(i = 1, 2, ..., k)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_i(i = 1, 2, ..., k)$ 的特征向量. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，则根据《教程》定理 4.2 知，有

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

由本节题目 20 的结论可知，对 $i = 1, 2, ..., k$，V_{λ_i} 都是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间. 因为 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵可对角化，按照《教程》命题 4.6，$\boldsymbol{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 的矩阵也可对角化，因此我们可取每个 V_{λ_i} 的一组基 $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, ..., \varepsilon_{is_i}$ 使得 $\boldsymbol{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 在这组基下的矩阵成对角形，也即对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$，存在 $\mu_{i1}, \mu_{i2}, ..., \mu_{is_i} \in K$ 使得

$$\boldsymbol{B}|_{V_{\lambda_i}}\varepsilon_{ij} = \mu_{ij}\varepsilon_{ij}, j = 1, 2, ..., s_i.$$

将各组基合并之后就成了 V 的一组基，在该组基下，由《教程》定理 4.2 知 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵成对角形，此时 $\boldsymbol{B}\varepsilon_{ij} = \boldsymbol{B}|_{V_{\lambda_i}}\varepsilon_{ij} = \mu_{ij}\varepsilon_{ij}, j = 1, 2, ..., s_i, i = 1, 2, ..., k$，$\boldsymbol{B}$ 的矩阵也成对角形.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 的所有互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$，因为 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，故由《教程》定理 4.2 知

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

[9] 事实上 U, V 都非零，否则要么 $AU = \lambda_0 U$, 要么 $AV = \lambda_0 V$，等式左边为实向量，右边为非实向量，矛盾.

又由《教程》命题 4.6 的证明过程知，对 $\boldsymbol{A}$ 的任意不变子空间有

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k.$$

其中 $N_i = M \cap V_{\lambda_i}, i = 1, 2, ..., k$.

现在，我们在每个 N_i 中取一组基 $(\mathrm{I})_i$，再把所有的 $(\mathrm{I})_i$ 合并成 M 的一组基 (I)，同时，将在每个 N_i 中取的基 $(\mathrm{I})_i$ 扩充为 V_{λ_i} 的一组基 $(\mathrm{II})_i$（注意 $N_i \subseteq V_{\lambda_i}$），再把所有的 $(\mathrm{II})_i$ 合并成 V 的一组基 (II). 设 $\dim M = r$，则将 (I) 记为

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r.$$

则有 $M = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r)$. 再将 (II) 记为

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \eta_{r+2}, ..., \eta_n.$$

取 $N = L(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, ..., \eta_n)$，显然有 $V = M \oplus N$（《教程》命题 2.4 证明过程）. 只需证明 N 是不变的，注意到 (II) 的向量都是在特征子空间 V_{λ_i} 中取得的，故都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，因此对任意 $\alpha \in N$，设 $\alpha = a_{r+1}\eta_{r+1} + a_{r+2}\eta_{r+2} + \cdots + a_n\eta_n$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\alpha &= a_{r+1}\boldsymbol{A}\eta_{r+1} + a_{r+2}\boldsymbol{A}\eta_{r+2} + \cdots + a_n\boldsymbol{A}\eta_n \\ &= a_{r+1}\lambda_{s_{r+1}}\eta_{r+1} + a_{r+2}\lambda_{s_{r+2}}\eta_{r+2} + \cdots + a_n\lambda_{s_n}\eta_n \in N.\end{aligned}$$

其中 $\lambda_{s_i}(i = r+1, r+2, ..., n)$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值，故 N 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.12.

23. 利用（第二类的）数学归纳法，当线性空间 V 的维数 $\dim V = 1$ 时，命题显然成立. 假设当 $1 \leqslant \dim V \leqslant n-1$ 时命题成立，则当 $\dim V = n$ 时，由代数基本定理，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda E - A| = 0$ 必然有一个根 λ_1 作为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，按照题目条件，必然存在不变子空间 N_1 使得 $V = V_{\lambda_1} \oplus N_1$，$\dim N_1 < n$，由归纳假设知 $\boldsymbol{A}|_{N_1}$ 的矩阵可对角化，从而由《教程》定理 4.2 知

$$N_1 = V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

上式中 $V_{\lambda_i}(i = 2, ..., k)$ 的 $\boldsymbol{A}|_N$ 属于特征值 λ_i 的特征子空间，自然也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间. 此时

$$V = V_{\lambda_1} \oplus N_1 = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

（第 2 节题目 19）再由《教程》定理 4.2 知 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，即当 $\dim V = n$ 时命题也成立. 由数学归纳法知，命题对任何有限维线性空间都成立.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.13.

24. 由于 $\dim V = n$，而向量组 $\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, ..., \boldsymbol{A}^n\alpha$ 共有 $n+1$ 个向量，故它们必然是线性相关的. 从而必然有

$$s_0\alpha + s_1\boldsymbol{A}\alpha + \cdots + s_n\boldsymbol{A}^n\alpha = 0.$$

其中 $s_i \in K, i = 0, 1, ..., n$. 设在 $s_1, s_2, ..., s_n$ 的不为零的数当中，下标最大的那个数为 s_k，则有

$$s_0\alpha + s_1\boldsymbol{A}\alpha + \cdots + s_k\boldsymbol{A}^k\alpha = 0.(s_k \neq 0)$$

进而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k\alpha &= -\frac{1}{s_k}\left(s_0\alpha + s_1\boldsymbol{A}\alpha + \cdots + s_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha\right)\\ &= a_0\alpha + a_1\boldsymbol{A}\alpha + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha.\end{aligned}$$

若取 $M = L(\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\alpha)$，则由上式可知 $\boldsymbol{A}^k\alpha \in M$. 那么对任意 $\beta \in M$，设 $\beta = b_0\alpha + b_1\boldsymbol{A}\alpha + \cdots + b_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha$，有

$$\boldsymbol{A}\beta = \left(b_0\boldsymbol{A}\alpha + b_1\boldsymbol{A}^2\alpha + \cdots + b_{k-2}\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha\right) + \left(b_{k-1}\boldsymbol{A}^k\alpha\right) \in M.$$

从而 M 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间. 接下来求特征多项式，显然 $\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\alpha$ 是 M 的一组基，我们直接求取 $\boldsymbol{A}|_M$ 在 $\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\alpha$ 下的矩阵，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}|_M\left(\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\alpha\right)\\ =&\left(\boldsymbol{A}\alpha, \boldsymbol{A}^2\alpha, ..., \boldsymbol{A}^k\alpha\right)\\ =&\left(\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\alpha\right)\begin{pmatrix}0 & & & & & a_0\\ 1 & 0 & & & & a_1\\ & 1 & 0 & & & a_2\\ & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & 0 & a_{k-2}\\ & & & & 1 & a_{k-1}\end{pmatrix}\\ =&\left(\alpha, \boldsymbol{A}\alpha, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\alpha\right)A_M.\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{A}|_M$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A_M|=\begin{vmatrix}\lambda & & & & & -a_0\\ -1 & \lambda & & & & -a_1\\ & -1 & \lambda & & & -a_2\\ & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & -1 & \lambda & -a_{k-2}\\ & & & & -1 & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}.$$

这个行列式可以用递推求解，不断对行列式的第一行展开可得

$$\begin{aligned}f(\lambda)&=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & & & -a_1\\ -1 & \lambda & & -a_2\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & -1 & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}+(-1)^{k+1}(-a_0)(-1)^{k-1}\\
&=\lambda\left(\lambda\begin{vmatrix}\lambda & & & -a_2\\ -1 & \lambda & & -a_3\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & -1 & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}+(-1)^{k-1+1}(-a_1)(-1)^{k-2}\right)-a_0\\
&=\lambda^2\begin{vmatrix}\lambda & & & -a_2\\ -1 & \lambda & & -a_3\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & -1 & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}-a_1\lambda-a_0\\
&=\cdots\\
&=\lambda^{k-2}\begin{vmatrix}\lambda & -a_{k-2}\\ -1 & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}-a_{k-3}\lambda^{k-3}-\cdots-a_1\lambda-a_0\\
&=\lambda^k-a_{k-1}\lambda^{k-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0.\end{aligned}$$

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.14.

25. 对 V 中任一非零向量 α，根据题目 24 的结论，存在不变子空间 $M=L(\alpha,\boldsymbol{A}\alpha,...,\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha)$ 满足

$$\boldsymbol{A}^k\alpha=a_0\alpha+a_1\boldsymbol{A}\alpha+\cdots+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha,$$

并且 $\boldsymbol{A}|_M$ 的特征多项式为

$$g(\lambda)=\lambda^k-a_{k-1}\lambda^{k-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0,$$

从而有

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{A})\alpha &= (\boldsymbol{A}^k - a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1} - \cdots - a_1\boldsymbol{A} - a_0\boldsymbol{E})\alpha \\ &= \boldsymbol{A}^k\alpha - a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha - \cdots - a_1\boldsymbol{A}\alpha - a_0\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

[10]现设 $\boldsymbol{A}$ 在 V 内的特征多项式为 $f(\lambda)$，又设 $\boldsymbol{A}$ 在 V/M 的诱导变换特征多项式为 $h(\lambda)$，则由《教程》命题 4.7 知

$$f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda),$$

从而有

$$f(\boldsymbol{A})\alpha = g(\boldsymbol{A})h(\boldsymbol{A})\alpha = h(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\alpha = 0.$$

因为 α 是任取的，所以 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.15，Hamilton-Cayley 定理是线性代数中的一个较为深刻和重要的定理，证明方法非常多，除本题的证明外，也可利用 Jordan 标准形理论（参见《教程》第七章第 3 节）来证明. 更为常规的做法是基于伴随矩阵构造多项式的证明（参考Wikipedia[11]），其主要思路如下，利用伴随矩阵的性质，构造出关于 λ 的矩阵函数等式

$$f(\lambda)E = |\lambda E - A|E = (\lambda E - A)(\lambda E - A)^*,$$

注意到伴随矩阵的定义，$(\lambda E - A)^*$ 的每一个元素都是 $\lambda E - A$ 的代数余子式，从而都可以表示为 λ 的 $n-1$ 次多项式，于是可将整个矩阵 $(\lambda E - A)^*$ 拆分成系数为矩阵的关于 λ 的多项式函数，并与 $f(\lambda)E$ 对比系数直接得到结论. 此法较为简明.

而本题（连同题目 25）中的证明方法的思路是线性空间 V 的任何非零向量 α 都能构造出一个 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间 M，对于在这子空间内 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f|_M$，$\boldsymbol{A}$ 按照该多项式产生的形式变换 $f|_M(\boldsymbol{A})$ 的核 $\mathrm{Ker}f|_M(\boldsymbol{A})$ 总是有 α 存在，又由于 $\mathrm{Ker}f|_M(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathrm{Ker}f(\boldsymbol{A})$，从而对任何非零向量 α，$f(\boldsymbol{A})\alpha = 0$. 此法较为抽象，但值得研究.

26. 由于诱导变换 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，且 $\dim V/M = n-1$（《教程》命题 2.5），存在 V/M 的一组基 $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, ..., \bar{\varepsilon}_{n-1}$，且 $\boldsymbol{A}$ 在该组基下成对角形，即有 $\boldsymbol{A}\bar{\varepsilon}_i = \lambda_i\bar{\varepsilon}_i, i = 1, 2, ..., n-1$. 其中 λ_i 是诱导变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 那么有

[10]注意此处不能说明 $g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$，因为 $g(\boldsymbol{A})$ 与 α 有关.

[11]https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Hamilton_theorem#A_direct_algebraic_proof

$\overline{\boldsymbol{A}\varepsilon_i} = \overline{\lambda_i \varepsilon_i}$. 由商空间的定义有 $\lambda_i\varepsilon_i - \boldsymbol{A}\varepsilon_i \in M$，从而 $\lambda_i\varepsilon_i - \boldsymbol{A}\varepsilon_i = k_i\alpha$，也即 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\varepsilon_i = k_i\alpha$. 两边以 $\boldsymbol{A}$ 作用，显然有

$$\boldsymbol{A}(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\varepsilon_i = (\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}\varepsilon_i) = k_i\boldsymbol{A}\alpha = 0.$$

这说明 $\boldsymbol{A}\varepsilon_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，并且属于特征值 λ_i. 而 α 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量，我们下面来证特征向量组 $\alpha, \boldsymbol{A}\varepsilon_1, \boldsymbol{A}\varepsilon_2, ..., \boldsymbol{A}\varepsilon_{n-1}$ 线性无关. 设

$$s_0\alpha + s_1\boldsymbol{A}\varepsilon_1 + \cdots + s_{n-1}\boldsymbol{A}\varepsilon_{n-1} = 0,$$

两边取模 M 的剩余类，由于 $\bar{\alpha} = \bar{0}$，有

$$\begin{aligned} &\overline{s_0\alpha + s_1\boldsymbol{A}\varepsilon_1 + \cdots + s_{n-1}\boldsymbol{A}\varepsilon_{n-1}} = \bar{0} \\ \Longleftrightarrow & s_1\boldsymbol{A}\bar{\varepsilon}_1 + s_2\boldsymbol{A}\bar{\varepsilon}_2 + \cdots + s_{n-1}\boldsymbol{A}\bar{\varepsilon}_{n-1} = \bar{0} \\ \Longleftrightarrow & \boldsymbol{A}(s_1\bar{\varepsilon}_1 + s_2\bar{\varepsilon}_2 + \cdots + s_{n-1}\bar{\varepsilon}_{n-1}) = \bar{0}, \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}$ 是双射，从而由《教程》命题 3.4 知 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \{\bar{0}\}$. 故上式等价于

$$s_1\bar{\varepsilon}_1 + s_2\bar{\varepsilon}_2 + \cdots + s_{n-1}\bar{\varepsilon}_{n-1} = \bar{0}.$$

又因为 $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, ..., \bar{\varepsilon}_{n-1}$ 是 V/M 的一组基，故由线性无关性

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_{n-1} = 0.$$

又 $\alpha \neq 0$，进而也有 $s_0 = 0$，从而向量组 $\alpha, \boldsymbol{A}\varepsilon_1, \boldsymbol{A}\varepsilon_2, ..., \boldsymbol{A}\varepsilon_{n-1}$ 线性无关，由《教程》定理 4.1 知 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.16.

27. 对每一个 $\lambda_0 \in K$，我们设 V_{λ_0} 的一组基为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r$，其中 $r = \dim V_{\lambda_0}$. 由于 V_{λ_0} 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，可设 $\boldsymbol{A}|_{V_{\lambda_0}}$ 在该组基下的矩阵为 A_M，则 $A_M = \lambda_0 E$，故 $\boldsymbol{A}|_M$ 的特征多项式为 $g(\lambda) = |\lambda E - A_M| = |\lambda E - \lambda_0 E| = (\lambda - \lambda_0)^r$，再由《教程》命题 4.7 得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r h(\lambda)$，其中 $h(\lambda)$ 是诱导变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 该式表明方程 $f(\lambda) = 0$ 中 λ_0 至少是 r 重根，也即

$$e \geqslant r = \dim V_{\lambda_0}.$$

批注. 一般把 $\dim V_{\lambda_i}$ 称之为 λ_i 的几何重数，把 λ_i 作为特征方程的根的重数称之为 λ_i 的代数重数. 本题说明特征值的几何重数总是小于或等于代数重数.

28. 设 V 是数域 K 上的某一线性空间，而 $\boldsymbol{A}$ 是 V 的线性变换，且 $\boldsymbol{A}$ 在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 下的矩阵为题述的矩阵 A，则从 A 可以看出，对任意 i 总有 $\boldsymbol{A}\varepsilon_i=\varepsilon_{n-i+1},\boldsymbol{A}\varepsilon_{n-i+1}=\varepsilon_i$，这说明子空间 $L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})$ 是不变的，我们采用逐步分解的方法求解（参见后面的批注），考虑如下分解式

$$V=L(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\oplus L(\varepsilon_2,\varepsilon_{n-1})\oplus\cdots\oplus L\left(\varepsilon_{[(n+1)/2]},\varepsilon_{n-[(n+1)/2]+1}\right).$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数（下同）. 若这些子空间能够继续分解成特征子空间（也即 $\boldsymbol{A}|_{L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})}$ 的矩阵能对角化），$\boldsymbol{A}$ 的矩阵自然能够对角化. 设 $\boldsymbol{A}|_{L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})}$ 在 $\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1}$ 下的矩阵 A_i，有

$$A_i=\begin{pmatrix}0&a_i\\a_{n-i+1}&0\end{pmatrix}.$$

其特征多项式为

$$f_i(\lambda)=|\lambda E-A_i|=\lambda^2-a_ia_{n-i+1}.$$

显然特征多项式的根为 $\pm\sqrt{a_ia_{n-i+1}}$ [12].

若 $\sqrt{a_ia_{n-i+1}}\notin K$，则 $\boldsymbol{A}|_{L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})}$ 没有特征值，其矩阵 A_i 必然不能（在 K 内）对角化.

若 $\sqrt{a_ia_{n-i+1}}\in K$，则：

当 $a_ia_{n-i+1}=0$ 时，如果 $a_i=a_{n-i+1}=0$，则 $A_i=0$ 本身就是对角矩阵，当然可对角化；只考虑 a_i 和 a_{n-i+1} 其一为零，此时 $\boldsymbol{A}|_{L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})}$ 只有一个特征值 $\lambda_{i1}=0$，那么只有 $L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})=V_{\lambda_{i1}}$ 时，A_i 才可对角化，但是 $\dim V_{\lambda_{i1}}=2-\mathrm{r}(\lambda_{i1}E-A_i)=2-\mathrm{r}\begin{pmatrix}0&a_i\\a_{n-i+1}&0\end{pmatrix}=1<\dim L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})$，因此 $L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})\neq V_{\lambda_{i1}}$，故此时 A_i 不能对角化；

当 $a_ia_{n-i+1}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}|_{L(\varepsilon_i,\varepsilon_{n-i+1})}$ 有两个特征值 $\lambda_{i1}=\sqrt{a_ia_{n-i+1}},\lambda_{i2}=-\sqrt{a_ia_{n-i+1}}$. 因为 $\lambda_{i1}\neq\lambda_{i2}$，从而由《教程》命题 4.3 的推论知 A_i 能对角化.

综上不难推知，A 可对角化的条件是对任意 $i=1,2,...,[n/2]$ [13]，都有 $\sqrt{a_ia_{n-i+1}}\in K$，且 a_i,a_{n-i+1} 两者同时为零或同时非零.

批注. 本题可参考《指南》例 4.10. 本题的解答过程中，我们对 V 进行了"逐步分解"，具体地说，设 V 是数域 K 上的线性空间，$\boldsymbol{A}$ 是 V 的线性变

[12]此处的 $\sqrt{\ }$ 的意义是：设 z 为复数，则 $\sqrt{z}$ 表示一个复数 s，满足 $s^2=z$，且 s 的辐角落在 $[0,\pi)$ 中.

[13]此处分 n 为奇和偶讨论更严谨，但结论一致.

换，若我们希望判断 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵能否对角化，根据《教程》定理 4.2，只需判断 V 能否分解成 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间的直和即可，也就是

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

但这并不是显然的，当直接分解存在困难时，我们可以考虑逐步分解的手段，即先将 V 分解成若干个 $\boldsymbol{A}$ 的（非平凡）不变子空间的直和，即

$$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_l.$$

再对各个不变子空间 M_j 继续分解成更小的不变子空间的直和，如此不断进行，直到分解成特征子空间的直和为止. 例如若 $V = M_1 \oplus M_2$，$M_1 = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$，$M_2 = V_{\lambda_3} \oplus V_{\lambda_4}$，则 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3} \oplus V_{\lambda_4}$（请注意直和具有交换律和结合律，并且可以随意去括号，参考第 2 节题目 19 和题目 22）.

关于这个方法，有两个基本的问题需要解释：

第一个问题是，为什么必须分解成不变子空间的直和，而不能是任意子空间？这是因为只有不变子空间才有继续分解成更小的不变子空间的直和的可能（参见本节题目 15），又由于整个空间 V 最终要分解成特征子空间（当然也是不变子空间）的直和，所以只有每一步分解出来的子空间都是不变的，才可能分解到最后.

第二个问题是，在 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化的条件下，逐步分解总是能进行下去吗？答案是肯定的. 因为根据《教程》命题 4.6 可知，如果 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，则 $\boldsymbol{A}|_M$ 的矩阵也可对角化，从而 $\boldsymbol{A}$ 的任意不变子空间 M 都能分解成特征子空间的直和，即不管把 V 分解成什么不变子空间，逐步分解总是能运行到最后. 换言之，如果 $\boldsymbol{A}$ 存在一个不变子空间 M（如果它不是特征子空间的话）不能分解成两个（非平凡的）不变子空间的直和，则 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵必然不能对角化.

29. 设 A 的列向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. 我们用列线性函数 g 的形式来表示行列式，则 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = g(\lambda\varepsilon_1 - \alpha_1, \lambda\varepsilon_2 - \alpha_2, ..., \lambda\varepsilon_n - \alpha_n)$，其中 ε_i 代表 K^n 的单位坐标列向量，从而将上式按照列线性展开，每列可以选

择 $\lambda\varepsilon_i$ 或 $-\alpha_i$，则有

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= g(\lambda\varepsilon_1-\alpha_1,\lambda\varepsilon_2-\alpha_2,...,\lambda\varepsilon_n-\alpha_n)\\
&= g(\lambda\varepsilon_1,\lambda\varepsilon_2,...,\lambda\varepsilon_n)+\left(\sum_{i_1=1}^{n} g(\lambda\varepsilon_1,...,-\alpha_{i_1},...,\lambda\varepsilon_n)\right)\\
&\quad+\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} g(\lambda\varepsilon_1,...,-\alpha_{i_1},...,-\alpha_{i_2},...,\lambda\varepsilon_n)\right)+\cdots\\
&\quad+g(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n)\\
&= \lambda^n g(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)-\lambda^{n-1}\left(\sum_{i_1=1}^{n} g(\varepsilon_1,...,\alpha_{i_1},...,\varepsilon_n)\right)\\
&\quad+\lambda^{n-2}\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} g(\varepsilon_1,...,\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_2},...,\varepsilon_n)\right)+\cdots\\
&\quad+(-1)^n g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).
\end{aligned}$$

如果用 $E_n(i_1,i_2,...,i_k)$ 表示将 n 阶单位矩阵 E 的第 $i_1,i_2,...,i_k$ 列用 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_k}$ 替换所得的行列式，则由上式知 $f(\lambda)$ 的 $\lambda^{n-k}(k=1,2,...,n)$ 前面的系数为

$$(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} E_n(i_1,i_2,...,i_k),$$

特别地，λ^n 前面的系数为 $g(\lambda\varepsilon_1,\lambda\varepsilon_2,...,\lambda\varepsilon_n)=|E|=1$.

按照《教程》第三章定理 4.1，对每个 $E_n(i_1,i_2,...,i_k)$，按 $i_1,i_2,...,i_k$ 行展开，显然展开的和式中只有一项不为零，该项对应着矩阵的第 $i_1,i_2,...,i_k$ 列. 设 $i=i_1+i_2+\cdots+i_k$，则有

$$\begin{aligned}
E_n(i_1,i_2,...,i_k) &= (-1)^i(-1)^i A\begin{Bmatrix} i_1 & \cdots & i_k\\ i_1 & \cdots & i_k\end{Bmatrix} A\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_k\\ i_1 & \cdots & i_k\end{bmatrix}\\
&= A\begin{Bmatrix} i_1 & \cdots & i_k\\ i_1 & \cdots & i_k\end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

综合上式，我们有

$$f(\lambda)=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^k A\begin{Bmatrix} i_1 & \cdots & i_k\\ i_1 & \cdots & i_k\end{Bmatrix}\lambda^{n-k}\right).$$

批注. 每一个 $A\begin{Bmatrix} i_1 & \cdots & i_k\\ i_1 & \cdots & i_k\end{Bmatrix}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$ 称之为 A 的一个 k 阶主子式（参见《教程》第五章第 4 节）.

30. 利用逐步分解的方法（参见本节题目 28 的批注）. 设 A_i 的阶数为 σ_i，$\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 的线性变换，并设 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的一组基

$$\varepsilon_{(2k,1)},\varepsilon_{(2k,2)},...,\varepsilon_{(2k,\sigma_{2k})},\varepsilon_{(2k-1,1)},...,\varepsilon_{(2k-1,\sigma_{2k-1})},...,\varepsilon_{(1,1)},...,\varepsilon_{(1,\sigma_1)}$$

下的矩阵为 M. 对 $i=1,2,...,k$，设

$$U_i=L\big(\varepsilon_{(i,1)},...,\varepsilon_{(i,\sigma_i)},\varepsilon_{(2k-i+1,1)},...,\varepsilon_{(2k-i+1,\sigma_{2k-i+1})}\big),$$

则不难得知 U_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，且 $\boldsymbol{A}|_{U_i}$ 在对应基下的矩阵正是 M_i. 由《教程》命题 4.6，若 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵 M 可对角化，则矩阵 M_i 也必然可对角化，反过来，若 M_i 可对角化，则 U_i 可以分解为特征子空间的直和（《教程》定理 4.2），从而由 $V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$ 知 V 也可以分解成特征子空间的直和，从而 M 可对角化.

31. **(1)** $\boldsymbol{P}$ 其实是将矩阵的各个列按重新排序. 可以在 $M_n(\mathbb{C})$ 内找出如下 n 个的线性无关的矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},...,A_n=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},$$

因每个 A_i 的所有列均相同，有 $\boldsymbol{P}A_i=A_i$，故这些矩阵即为所求特征向量.

(2) 容易知道 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P}=\{0\}$，即 $\boldsymbol{P}$ 是单射（《教程》命题 3.4），而 $\boldsymbol{P}\in\mathrm{End}(M_n(\mathbb{C}))$，从而 $\boldsymbol{P}$ 是可逆映射（第 3 节题目 2 引理 1）. 现在我们考虑 $\boldsymbol{P}$ 的所有高次幂 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^2,\boldsymbol{P}^3,...$，显然每个 $\boldsymbol{P}^i$ 的作用都是对矩阵的各个列重新排序，因为所有可能的重新排序的方式只有有限多种，而 $\boldsymbol{P}^i$ 有无限多个，故其中必然有无数个 $\boldsymbol{P}^i$ 相等，那么至少存在 p,q 且 $p>q$，使得

$$\boldsymbol{P}^p=\boldsymbol{P}^q.$$

又 $\boldsymbol{P}$ 可逆，有

$$\boldsymbol{P}^{p-q}=\boldsymbol{E}.$$

令 $k=p-q>0$，则 $\boldsymbol{P}^k=\boldsymbol{E}$. 若 λ_0 是 $\boldsymbol{P}$ 的特征值，设 A 是属于 λ_0 的 $\boldsymbol{P}$ 的特征向量，则有

$$A=\boldsymbol{E}A=\boldsymbol{P}^kA=\lambda_0^kA,$$

即 $(\lambda_0^k-1)A=0$，又 $A\neq0$，从而有 $\lambda_0^k=1$.

(3) 我们考虑对 $\boldsymbol{P}^k-\boldsymbol{E}$ 进行分解，按照多项式的观点，有

$$z^n-1=(z-\varepsilon_1)(z-\varepsilon_2)\cdots(z-\varepsilon_n).$$

其中 $\varepsilon_k=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n},k=1,2,...,n$ 是 n 次单位根，据此容易说明

$$\boldsymbol{P}^k-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{P}-\varepsilon_1\boldsymbol{E})(\boldsymbol{P}-\varepsilon_2\boldsymbol{E})\cdots(\boldsymbol{P}-\varepsilon_n\boldsymbol{E}).$$

由本题 **(2)** 的证明过程知上式为 0，亦即

$$(\varepsilon_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})(\varepsilon_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})\cdots(\varepsilon_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})=\mathbf{0}.$$

再由本节题目 14 的结论知 $\boldsymbol{P}$ 的矩阵可以对角化.

批注. 本题可参考《指南》第三章例 4.11. 本题 **(3)** 的结论对任意给定的排列均成立.

第五章　双线性函数与二次型

5.1　双线性函数

1.　线性函数天然就是一种线性映射，即 $f \in \mathrm{Hom}(V, K)$. 故由《教程》第四章命题 3.6 知 f 存在且唯一.

2.　根据定积分的性质,$I(\lambda f_1+\mu f_2) = \int_a^b(\lambda f_1(x)+\mu f_2(x))\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+\mu\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x = I(f_1) + I(f_2)$，且其运算结果是实数，故 $I(f)$ 是线性函数.

3.　根据矩阵的迹的性质，我们有 $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$，$\mathrm{Tr}(kA) = k\mathrm{Tr}(A)$，从而 $f(A)$ 是线性函数.

4.　由空间向量点乘的性质

$$f(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = \lambda f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \mu f(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}),$$
$$f(\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c}) = \lambda \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \lambda f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \mu f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

从而 $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 是双线性函数.

5.　根据定积分的性质

$$\begin{aligned} I(\lambda f_1 + \mu f_2, g) &= \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))g(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_a^b f_1(x)g(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b f_2(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda I(f_1, g) + \mu I(f_2, g). \end{aligned}$$

同理也有 $I(f, \lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda I(f, g_1) + \mu I(f, g_2)$. 从而 $I(f, g)$ 是双线性函数.

6.　按题设有 $f(\alpha, \beta) = \alpha'\beta$,从而 $f(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2, \beta) = (\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2)'\beta = \lambda\alpha_1'\beta+\mu\alpha_2'\beta = \lambda f(\alpha_1, \beta) + \mu f(\alpha_2, \beta)$. 同理也有 $f(\alpha, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) = \lambda f(\alpha, \beta_1) + \mu f(\alpha, \beta_2)$，从而 $f(\alpha, \beta)$ 是双线性函数.

7. **(1)** 验证定义即可. 事实上，在一组基下，任何表示成 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$ 的 $f(\alpha,\beta)$ 都是双线性函数.

(2) $f(\alpha,\beta)$ 在给定基下的矩阵为 $(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))$，计算得到

$$(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))=\begin{pmatrix}-4&-14&15&6\\15&-1&-2&-7\\-12&-10&1&14\\3&4&-15&-2\end{pmatrix}.$$

(3) 按照《教程》第 1 节第 2 目所述的不同基下矩阵变换公式，有 $(f(\eta_i,\eta_j))=T'(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))T$. 计算得到

$$(f(\eta_i,\eta_j))=\begin{pmatrix}-9&-29&11&35\\25&-3&69&-11\\1&-123&-3&-11\\-5&-1&-1&-9\end{pmatrix}.$$

8. **(1)** 由矩阵的迹的性质，AB 和 BA 的迹相等（参考第二章第 6 节题目 23）.

$$\begin{aligned}f(\lambda A+\mu C,B)&=\mathrm{Tr}((\lambda A+\mu C)B)\\&=\mathrm{Tr}(\lambda AB+\mu CB)\\&=\lambda\mathrm{Tr}(AB)+\mu\mathrm{Tr}(CB),\\&=\lambda f(A,B)+\mu f(C,B),\\f(A,B)&=\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)=f(B,A).\end{aligned}$$

故 $f(A,B)$ 是对称双线性函数

(2) 在给定基下的矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}\mathrm{Tr}(\varepsilon_{11}^2)&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{12})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{21})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22})\\\mathrm{Tr}(\varepsilon_{12}\varepsilon_{11})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{12}^2)&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{12}\varepsilon_{21})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{12}\varepsilon_{22})\\\mathrm{Tr}(\varepsilon_{21}\varepsilon_{11})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{21}\varepsilon_{12})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{21}^2)&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{21}\varepsilon_{12})\\\mathrm{Tr}(\varepsilon_{22}\varepsilon_{11})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{22}\varepsilon_{12})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{22}\varepsilon_{21})&\mathrm{Tr}(\varepsilon_{22}^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(3) 显然有

$$\begin{aligned}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)&=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\\&=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})T.\end{aligned}$$

按照《教程》第 1 节第 2 目所述的不同基下矩阵变换公式，在新基下的矩阵为 $(f(\eta_i,\eta_j)) = T'PT$. 计算得到

$$(f(\eta_i,\eta_j)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4) 由 **(2)** 可知矩阵 P 的秩为 $\mathrm{r}(P) = 4$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 1.5.

9. 首先，取 V 上的一组基，对任意 $\alpha,\beta \in V$，设它们的在这组基下的坐标分别为 X,Y，f 在这组基下的矩阵为 A，则 $f(\alpha,\beta) = X'AY$.

必要性，设有

$$\forall \beta \in V, f(\alpha,\beta) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0.$$

这等价于

$$\forall Y \in K^n, X'AY = 0 \Longrightarrow X = 0. \tag{5.1}$$

考虑线性方程组 $A'X = 0$，若这个方程组有解，任何解 X_1 都满足 $A'X_1 = 0$，取转置即 $X_1'A = 0$，从而对任意 $Y \in K^n$，都有 $X_1'AY = 0$，由式 (5.1) 可知 $X_1 = 0$，这说明线性方程组 $A'X = 0$ 只有零解，从而 $n - \mathrm{r}(A') = 0$，$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A') = n$，即矩阵 A 满秩，$f(\alpha,\beta)$ 是满秩双线性函数.

充分性，设 $f(\alpha,\beta)$ 是满秩双线性函数，若对任意 $Y \in K^n$，$X'AY = 0$，取 Y 为单位矩阵 E 的前 n 个列向量 $e_1,e_2,...,e_n$（即 n 维单位坐标向量），有 $X'Ae_i = 0(i = 1,2,...,n)$，所以 $X'A(e_1,e_2,...,e_n) = X'AE = X'A = 0$，又因为 A 满秩（从而可逆），有 $X' = (X'A)A^{-1} = 0$，从而 $X = 0$. 即式 (5.1) 成立.

10. 取 $M_n(K)$ 内的一组基为

$$E_{ij}, i,j = 1,2,...,n.$$

也即

$$E_{11},E_{12},...,E_{1n},E_{21},E_{22},...,E_{2n},....,E_{n1},E_{n2},...,E_{nn}.$$

.

设在此组基下 $f(A,B)$ 的矩阵为 F，大小为 $n^2\times n^2$，则 F 的每个元素都是 $\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl}), 1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$，而因为

$$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il}, & j=k;\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

而对 E_{il}，只有当 $i=l$ 时，$\mathrm{Tr}(E_{il})=1$，否则 $\mathrm{Tr}(E_{il})=0$，故有

$$\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl})=\begin{cases}1, & j=k, i=l;\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$$

取遍 $i,j,k,l=1,2,...,n$，从上式可以看出 F 中有 n^2 个元素为 1，其余元素为 0，又对任何 $E_{ij}, 1\leqslant i,j\leqslant n$，都存在 $k=i, l=j$，使得 $\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl})=1$，即 F 的每一行都存在至少一个元素为 1，同理每一列也至少又 1 个元素为 1，而 F 是 n^2 阶矩阵，从而 F 的共有 n^2 个 1 分布在不同行不同列，其余元素都为 0，显然 F 是满秩的.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 1.5.

11. **(1)** 按照定义验证即可.

(2)$f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵为

$$(f(\eta_i,\eta_j))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(3) 显然 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

按照《教程》第 1 节第 2 目所述的不同基下矩阵变换公式，在这组基下的矩阵为 $(f(\eta_i,\eta_j))=T'(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)T$. 计算得到

$$(f(\eta_i,\eta_j))=\begin{pmatrix}5&2&10&14\\2&10&11&19\\10&11&37&47\\14&19&47&64\end{pmatrix}.$$

(4) 可取 $\alpha=(0,0,1,1)$.

12. 取 4 个单位坐标向量为一组基后，容易推知 α 的坐标和 α 本身是相等的，故各个 $f(\alpha,\beta)$ 的表达式也是它们在这组基下的表达式，可以直接写出各个 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵（因为 x_ix_j 前的系数正是该矩阵的第 i 行第 j 列个元素 a_{ij}）. 直接判断该矩阵是否对称和满秩即可.

(1) 不是对称的（$a_{12}=1\neq -1=a_{21}$），但是满秩的.

(2) 是对称的，但不是满秩的.

(3) 不是对称的（$a_{13}=-1\neq 1=a_{31}$），也不是满秩的.

(4) 是对称的，但不是满秩的.

13. 设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix},$$

再设 A_1 是 A 的任意两个对角元 λ_i,λ_j 交换后的矩阵，只需证明 A 与 A_1 合同. 考虑初等矩阵 $P_n(i,j)$，则有

$$P_n(i,j)'AP_n(i,j)=P_n(i,j)AP_n(i,j),$$

由初等矩阵的性质可知，$P_n(i,j)$ 左乘矩阵相当于互换矩阵的 i,j 两行，$P_n(i,j)$ 右乘 A 相当于互换矩阵的 i,j 两列，所以上式正是

$$P_n(i,j)'AP_n(i,j)=A_1.$$

从而 A 与 A_1 合同. 这样经过有限次这样的对角元交换后，按合同关系的传递性，可得到 A 与 B 合同.

14. **(1)** 设 A 反对称，即 $A'=-A$，此时对任意 n 维列向量 X，有 $(X'AX)'=X'A'X=-X'AX$，又因为 $X'AX$ 是一个数，从而 $(X'AX)'=X'AX$，故 $X'AX=-X'AX$，即 $X'AX=0$.

反过来，设对任意 $X\in K^n$，$X'AX=0$，则 $X'AX=(X'AX)'=X'A'X=-X'AX=0$，即 $X'(A+A')X=0$. 显然这里的 $A+A'$ 是一个对称矩阵. 现在在某一线性 n 维线空间 V 上取定一组基，任取 $\alpha\in V$，设其在这组基下的坐标为 X，则由对称矩阵 $A+A'$ 可构造一个 V 内的一个二次型函数 $Q_f(\alpha)=X'(A+A')X$，这个二次型函数 $Q_f(\alpha)$ 又唯一决定一个 V 内的对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(Q_f(\alpha+\beta)-Q_f(\alpha)-Q_f(\beta))=X'(A+A')Y$，显然此时 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵为 $A+A'$. 又因为 $Q_f(\alpha)\equiv 0$，所以

$f(\alpha,\beta)\equiv 0$，即 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵为零矩阵，从而 $A+A'=0$，即 $A'=-A$.

(2) A 对称，由 **(1)** 又知 A 反对称，即 $A'=A=-A$，所以 $A=0$.

批注. 对于 $A\in M_n(K), X\in K^n$，线性空间 K^n 上的二次型函数 $f(X)=X'AX$ 被称作 K 上的二次型（在《教程》第五章第 2 节），称 A 是该二次型的矩阵. **(1)** 的第二段其实是《教程》命题 2.1 的直接结论.

15. 本题实际上在《教程》行文中已经提及. 任取 V 的一组基，设 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵为 A，对任意 $\alpha,\beta\in V$，设它们在这组基下的坐标为 X,Y，有 $f(\alpha,\beta)=X'AY$. 现在若 A 是对称矩阵，则 $f(\alpha,\beta)=X'AY=(X'AY)'=Y'A'X=Y'AX=f(\beta,\alpha)$，从而 $f(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数. 故若 $f(\alpha,\beta)$ 不是对称双线性函数，A 必然不是对称矩阵，更不必说对角矩阵.

16. 设 $f(\alpha,\beta)$ 在 V 的任意一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，则 $A=(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))$，按题设，对任意 i,j，有 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$，从而 A 是反对称矩阵.

17. 若 $f(\alpha,\beta)$ 是反对称双线性函数，总有 $f(\alpha,\alpha)=0$，并由题目 16 的结论知，$f(\alpha,\beta)$ 在任意一组基下的矩阵都是反对称矩阵. 以下仿照《教程》定理 1.1 的证明过程利用数学归纳法来证明该题目.

当 $n=1$ 时，显然 $f(\alpha,\beta)$ 在任一组基下的矩阵为零矩阵，命题成立.

当 $n=2$ 时，任取一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，若 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0$，则 $f(\alpha,\beta)$ 在此组基下的矩阵为零矩阵，若 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d_1\neq 0$，取新的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2/d_1$，则 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2/d_1)=1, f(\varepsilon_2/d_1,\varepsilon_1)=-1$，则 $f(\alpha,\beta)$ 在此组基下的矩阵为 S，故命题也成立.

现在假设当 $n=k-2$ 时命题成立（$k\geqslant 3$），则当 $n=k$ 时，首先，若 $f(\alpha,\beta)\equiv 0$，$f(\alpha,\beta)$ 在任一组基下的矩阵为零矩阵，命题自然成立，若 $f(\alpha,\beta)\not\equiv 0$，则存在两个向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，使得 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=-f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=d_1\neq 0$. 把 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 扩充成 V 的一组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,...,\varepsilon_k.$$

令

$$\begin{cases}\eta_1=\varepsilon_1,\\ \eta_2=\dfrac{\varepsilon_2}{d_1},\\ \eta_i'=\dfrac{f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)}{d_1}\varepsilon_2-f(\varepsilon_2,\varepsilon_i)\varepsilon_1-\varepsilon_i.(i=3,4,...,k)\end{cases}$$

显然 $\eta_1,\eta_2,\eta'_3,...,\eta'_k$ 是 V 的一组基（因为和 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3...,\varepsilon_k$ 可互相线性表示），且

$$\begin{aligned}
f(\eta_1,\eta'_i) &= f(\varepsilon_1,\frac{f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)}{d_1}\varepsilon_2 - f(\varepsilon_2,\varepsilon_i)\varepsilon_1 - \varepsilon_i)\\
&= \frac{f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)}{d_1}f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) - f(\varepsilon_2,\varepsilon_i)f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) - f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)\\
&= 0,(i=3,4,...,k)\\
f(\eta_2,\eta'_i) &= f(\frac{\varepsilon_2}{d_1},\frac{f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)}{d_1}\varepsilon_2 - f(\varepsilon_2,\varepsilon_i)\varepsilon_1 - \varepsilon_i)\\
&= \frac{f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)}{d_1^2}f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) - \frac{f(\varepsilon_2,\varepsilon_i)}{d_1}f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2,\varepsilon_i)\\
&= 0.(i=3,4,...,k)
\end{aligned}$$

命 $M=L(\eta'_3,...,\eta'_k)$，这是一个 $k-2$ 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 可以看做 M 内的反对称双线性函数，对于任意 $\alpha\in M$，有 $\alpha=s_3\eta'_3+\cdots+s_k\eta'_k$，于是

$$f(\alpha,\eta_1) = -f(\eta_1,\alpha) = -s_3f(\eta_1,\eta'_3)-\cdots-s_kf(\eta_1,\eta'_k)=0, \tag{5.2}$$

$$f(\alpha,\eta_2) = -f(\eta_2,\alpha) = -s_3f(\eta_2,\eta'_3)-\cdots-s_kf(\eta_2,\eta'_k)=0. \tag{5.3}$$

按归纳假设，在 M 内存在一组基 $\eta_3,\eta_4,...,\eta_k$，使得 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下呈题设形式的准对角形，我们设这个对角形为

$$A_1=\begin{pmatrix} S & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

因为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,,...,\eta_k$ 和 $\eta_1,\eta_2,\eta'_3,,...,\eta'_k$ 线性等价，故它也是 V 的一组基，现在 $\eta_3,,...,\eta_k\in M$，由式 (5.2) 和式 (5.3) 可知，

$$\begin{aligned}
f(\eta_i,\eta_1) &= -f(\eta_1,\eta_i)=0,(i=3,4,...,k)\\
f(\eta_i,\eta_2) &= -f(\eta_2,\eta_i)=0.(i=3,4,...,k)
\end{aligned}$$

又因为 $f(\eta_1,\eta_2)=-f(\eta_2,\eta_1)=1$，从而 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,,...,\eta_k$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

故 $n=k$ 时命题成立. 由数学归纳法知，命题对所有正整数 n 都成立.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 1.6.

18. 显然 $L(M)$ 和 $R(M)$ 都非空（包含 0）. 任取 $\alpha,\gamma\in L(M)$，$k\in K$，则对任意 $\beta\in M$，$f(\alpha,\beta)=f(\gamma,\beta)=0$，由双线性函数的性质，

$$f(\alpha+\gamma,\beta)=f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)=0,$$
$$f(k\alpha,\beta)=kf(\alpha,\beta)=0.$$

从而 $\alpha+\gamma,k\alpha\in L(M)$，即 $L(M)$ 对运算封闭，$L(M)$ 是 V 子空间. 同理可证 $R(M)$ 也是子空间.

下面求 $L(M)$ 的维数,我们将 $L(M)$ 转化为坐标空间来讨论. 记 $\dim M=r$，取 M 中的一组基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r$，将它扩充为 V 的一组基为

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n.$$

设 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵为 A,且 A 满秩,并记分块矩阵 $A=(A_r,A_{n-r})$，其中 A_r 为 A 的前 r 个列向量组成的矩阵. 对任意 $\alpha,\beta\in V$，设 α,β 在这组基下的坐标为 X,Y，则 $f(\alpha,\beta)=X'AY$. 那么 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r$ 在这组基下的坐标分别为

$$\begin{aligned}
e_1&=(1,0,...,0,0,...,0)',\\
e_2&=(0,1,...,0,0,...,0)',\\
&\cdots\\
e_r&=(0,0,...,1_{\text{rth}},0,...,0)'.
\end{aligned}$$

在给定基下，记子空间 M 的所有向量的坐标构成的 K^n 的子空间为 K_M^n，$L(M)$ 所有向量的坐标构成的 K^n 的子空间为 $L_X(M)=\{X\in K^n|X'AY=0,\forall Y\in K_M^n\}$. 此时 $L(M)$ 和 $L_X(M)$ 同构，我们来求 $L_X(M)$ 的维数.

由上述定义知 $e_1,e_2,...,e_r$ 是 K_M^n 的一组基，那么有如下等价链成立：

$$\begin{aligned}
X\in L_X(M)&\Longleftrightarrow \forall Y\in K_M^n,\ X'AY=0\\
&\Longleftrightarrow \forall i=1,2,...,n,\ X'Ae_i=0\\
&\Longleftrightarrow X'A(e_1,e_2,...,e_r)=X'A\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}\\
&\qquad =X'\begin{pmatrix}A_r & A_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}=X'A_rE_r=X'A_r=0\\
&\Longleftrightarrow A_r'X=0.
\end{aligned}$$

(E_r为 r 阶单位矩阵)

（上述第二个等价符号成立的原因是 $e_i \in K_M^n$ 且任何 $Y \in K_M^n$ 都可以由 e_i 来线性表示）这说明 $L_X(M)$ 正是线性方程组 $A_r'X = 0$ 的解空间. 因为 A 满秩，A 的列向量组线性无关，所以 $\mathrm{r}(A_r) = r$，从而 $\dim L_X(M) = n - r = \dim L(M)$，这说明 $\dim L(M) = n - \dim M$. 同理也有 $\dim R(M) = n - \dim M$.

设 $\beta_1 \in M, \alpha_1 \in L(M)$，则有 $f(\alpha_1, \beta_1) = 0$，从而 $\beta_1 \in R(L(M))$，这说明 $M \subseteq R(L(M))$，又因为 $\dim R(L(M)) = n - \dim L(M) = n - (n - \dim M) = \dim M$，从而 M 是 $R(L(M))$ 的 $\dim R(L(M))$ 维子空间，即 $M = R(L(M))$. 同理可知 $M = L(R(M))$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 1.7.

19. 取 $\alpha \in L(M) \cap L(N)$. 对任意 $\beta \in M + N$，都有 $\beta = \beta_1 + \beta_2, \beta_1 \in M, \beta_2 \in N$，从而 $f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = f(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2) = 0$，因此 $\alpha \in L(M + N)$，也即 $L(M) \cap L(N) \subseteq L(M + N)$.

反过来，取 $\alpha \in L(M + N)$，则对任意 $\beta \in M + N$，有 $f(\alpha, \beta) = 0$，那么对任意 $\beta_1 \in M \subseteq M + N$，当然也有 $f(\alpha, \beta_1) = 0$. 从而 $\alpha \in L(M)$，也即 $L(M + N) \subseteq L(M)$. 同理 $L(M + N) \subseteq L(N)$. 综合上述结果得到 $L(M + N) = L(M) \cap L(N)$. 同理 $R(M + N) = R(M) \cap R(N)$.

设 $f(\alpha, \beta)$ 满秩. 首先，取 $\alpha \in L(M) + L(N)$，则 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in L(M), \alpha_2 \in L(N)$. 此时对任意 $\beta \in M \cap N$，有 $f(\alpha, \beta) = f(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta_2) = 0$. 因此 $\alpha \in L(M \cap N)$. 也即 $L(M \cap N) \subseteq L(M) + L(N)$. 下证 $L(M \cap N)$ 和 $L(M) + L(N)$ 维数相等. 由题目 18 的结论和维数公式知

$$
\begin{aligned}
\dim(L(M) + L(N)) &= \dim L(M) + \dim L(N) - \dim(L(M) \cap L(N)) \\
&= \dim L(M) + \dim L(N) - \dim(L(M + N)) \\
&= n - \dim M + n - \dim N - (n - \dim(M + N)) \\
&= n - (\dim M + \dim N - \dim(M + N)) \\
&= n - \dim(M \cap N) \\
&= \dim L(M \cap N).
\end{aligned}
$$

从而 $L(M \cap N)$ 是 $L(M) + L(N)$ 的 $\dim(L(M) + L(N))$ 维子空间，因此 $L(M \cap N) = L(M) + L(N)$. 同理 $R(M \cap N) = R(M) + R(N)$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 1.8.

20.　用反证法，假设存在 $\gamma,\beta\in V$，使得 $f(\gamma)\neq 0, g(\beta)\neq 0$. 因为 f 是线性函数，结合题设有

$$\begin{aligned}0=f(\gamma+\beta)g(\gamma+\beta)&=(f(\gamma)+f(\beta))(g(\gamma)+g(\beta))\\&=f(\gamma)g(\alpha)+f(\gamma)g(\beta)+f(\beta)g(\gamma)+f(\beta)g(\beta)\\&=f(\gamma)g(\beta)+f(\beta)g(\gamma).\end{aligned}$$

因此 $f(\beta)g(\gamma)=-f(\gamma)g(\beta)\neq 0$. 即 $f(\beta)\neq 0, g(\gamma)\neq 0$. 但这导致了 $f(\gamma)g(\gamma)\neq 0$，与题目条件矛盾. 故总是有 $f(\alpha)\equiv 0$ 或 $g(\alpha)\equiv 0$.

批注.　本题可参考《指南》第四章例 1.9.

21.　对任意 $\alpha,\beta\in V$，由于 f 是对称双线性函数，有 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，故由题设可知

$$g(\alpha)h(\beta)=g(\beta)h(\alpha). \tag{5.4}$$

.

若 $g(\alpha)\equiv 0$，则 $f(\alpha,\beta)\equiv 0$，只需令 $\lambda=1, l(\alpha)=0$ 命题即可成立. 因此设存在 $\alpha_1\in V$ 使得 $g(\alpha_1)\neq 0$，则在式 (5.4) 中令 $\alpha=\alpha_1$，有 $h(\beta)=\frac{g(\beta)h(\alpha_1)}{g(\alpha_1)}$，此时

$$f(\alpha,\beta)=g(\alpha)\cdot\frac{g(\beta)h(\alpha_1)}{g(\alpha_1)}=\frac{h(\alpha_1)}{g(\alpha_1)}g(\alpha)g(\beta).$$

若 $h(\alpha_1)=0$，则同样有 $f(\alpha,\beta)\equiv 0$，前面已经知道命题成立. 若 $h(\alpha_1)\neq 0$，则令 $\lambda=\frac{h(\alpha_1)}{g(\alpha_1)}, l(\alpha)=g(\alpha)$，从而得到 $f(\alpha,\beta)=\lambda l(\alpha)l(\beta)$ 且 $\lambda\neq 0$，命题依然成立.

批注.　本题可参考《指南》第四章例 1.12.

5.2　二次型

1.　**(1)** $\begin{pmatrix}-2&0&1/2\\0&-2&-1/2\\1/2&-1/2&0\end{pmatrix}$.　**(2)** $\begin{pmatrix}0&0&-1/2&-1\\0&0&0&0\\-1/2&0&1&-5/2\\-1&0&-5/2&0\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$.　**(4)** $\begin{pmatrix}0&0&0&1/2\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\1/2&0&0&0\end{pmatrix}$.

2. **(1)** $f(\alpha,\beta)$ 在这组基的矩阵为矩阵为

$$(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))=\begin{pmatrix}-1&2&0&-2\\2&-3&0&1\\0&0&0&0\\-2&1&0&2\end{pmatrix}.$$

对任意 $\alpha\in K^4$，设 α 在这组基下的坐标为 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$ [1]，则 $f(\alpha,\alpha)$ 在这组基下的解系表达式为

$$Q_f(\alpha)=X'(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))X=-x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_4+3x_2^2+2x_2x_4+2x_4^2.$$

(2) 设过渡矩阵为 T，则 $f(\alpha,\beta)$ 在新基下的矩阵为

$$(f(\eta_i,\eta_j))=T'(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

对任意 $\alpha\in K^4$，设 α 在这组基下的坐标为 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$ [2]，从而 $f(\alpha,\alpha)$ 在这组基下的解系表达式为

$$Q_f(\alpha)=X'(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))X=x_1^2-x_2^2-x_3^2.$$

(3) 直接配方可得

$$f=-(x_1-2x_2+2x_4)^2+(x_2-3x_4)^2-3x_4^2.$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1-2x_2+2x_4,\\y_2=x_2-3x_4,\\y_3=x_3,\\y_4=x_4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1+2y_2+4y_4,\\x_2=y_2+3y_4,\\x_3=y_3,\\x_4=y_4.\end{cases}$$

令 $T=\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，则通过 $X=TY$ 可以将 f 化作标准形

$$f=-y_1^2+y_2^2-3y_4^2.$$

[1]注意：这里复用一下符号，虽然 x_i 已经用来表示 α 的分量了，但为了简洁我们依旧用 x_i 表示 α 在这组基下的坐标的分量.

[2]跟上一小问一样，这里也复用一下符号.

3. 设对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在给定基下的矩阵为 $A=(a_{ij})$，则 $a_{ij}=a_{ji}$，对任意 $\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4),\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in K^4$，设其在给定基的坐标为 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)',Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$. 则由 $\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)X,\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)Y$ 解得 $x_i=a_i,y_i=b_i$.

先由解析表达式求出对应的矩阵 A，因为

$$Q_f(\alpha)=X'AX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=f,$$

从而可以对比系数可以解出 a_{ij}，我们有

$$\textbf{(1)}\ A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.\quad \textbf{(2)}\ A=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2&1/2\\1/2&0&1/2&1/2\\1/2&1/2&0&1/2\\1/2&1/2&1/2&0\end{pmatrix}.$$

求出 A 后，可得对应的对称双线性函数为

$$f(\alpha,\beta)=X'AY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_ia_j.$$

从而有

(1)$f(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3+a_3b_2+a_3b_3+a_3b_4+a_4b_3+a_4b_4$.

(2)$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(a_1b_2+a_1b_3+a_1b_4+a_2b_1+a_2b_3+a_2b_4+a_3b_1+a_3b_2+a_3b_4+a_4b_1+a_4b_2+a_4b_3)$.

4. 利用配方或平方差即可. 设可逆线性变数替换为 $X=TY$ [3]，有

$$\textbf{(1)}\ T=\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\1&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix},f=-4y_1^2+4y_2^2+y_3^2.$$

$$\textbf{(2)}\ T=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},f=y_1^2+y_2^2.$$

$$\textbf{(3)}\ T=\begin{pmatrix}1&1&-3/2\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix},f=y_1^2-4y_2^2.$$

[3]矩阵 T 不唯一，不同的 T 得到的二次型标准形也不同，可以证明，不同的标准形的正（或负）号个数应该是相同的，并且不同的 T 的列向量组（在考虑可调换位置的情况下）对应成比例，故为统一起见，这里选取主对角线为 1 的 T.

(4) $T=\begin{pmatrix}1 & -5/4 & 3/4 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1/4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $f=2y_1^2+2y_2^2-2y_3^2-32y_4^2$.

(5) $T=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1/2\\ 1 & 1 & -1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2$.

(6) $T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3/2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $f=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$.

(7) $T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

(8) 可以看出，若令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_{2n},\\ x_2=y_2+y_{2n-1},\\ \cdots\\ x_{2n-1}=y_2-y_{2n-1},\\ x_{2n}=y_1-y_{2n}.\end{cases}$$

则有 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-y_{n+2}^2-\cdots-y_{2n}^2$. 此时矩阵

$$T=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}_{2n} \to \begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -2 & \cdots & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -2\end{pmatrix}_{2n}.$$

从而 T 可逆. 为了统一起见，改写 T 为主对角线为 1 的矩阵（后 n 列向量

乘 -1），即取

$$T=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{2n}.$$

此时的 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-y_{n+2}^2-\cdots-y_{2n}^2$（与前面的 f 相比并未改变）.

(9) 若令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\ x_2=y_1-y_2,\\ x_i=y_i, i=3,4,...,n.\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}f&=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3+y_3y_4+\cdots+y_{n-1}y_n\\ &=y_1^2-y_2^2+y_3y_1-y_3y_2+y_3y_4+\cdots+y_{n-1}y_n\\ &=\left(y_1+\frac{y_3}{2}\right)^2-\left(y_2+\frac{y_3}{2}\right)^2+y_3y_4+\cdots+y_{n-1}y_n.\end{aligned}$$

可以看出，上式前两个平方项可用两新变量替换，而后面的项其实与原来的二次型相比除了变量数减少以外并没有区别（不考虑字母符号的不同）. 受此启发，当 n 为奇数时，设 $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$（$\mathbb{N}$ 为非负整数集），此时令

$$\begin{cases}x_{2i-1}=y_{2i-1}+y_{2i}, i=1,2,...,k,\\ x_{2i}=y_{2i-1}-y_{2i}, i=1,2,...,k,\\ x_{2k+1}=y_{2k+1}.\end{cases}$$

有

$$\begin{aligned}f=&\left(y_1+\frac{y_3}{2}\right)^2-\left(y_2+\frac{y_3}{2}\right)^2+\left(y_3+\frac{y_5}{2}\right)^2-\left(y_4+\frac{y_5}{2}\right)^2\\ &+\cdots+\left(y_{2k-1}+\frac{y_{2k+1}}{2}\right)^2-\left(y_{2k}+\frac{y_{2k+1}}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{y_3}{2}, \\ z_2 = y_2 + \dfrac{y_3}{2}, \\ \quad \cdots \\ z_{2k-1} = y_{2k-1} + \dfrac{y_{2k+1}}{2}, \\ z_{2k} = y_{2k} + \dfrac{y_{2k+1}}{2}, \\ z_{2k+1} = y_{2k+1}. \end{cases}$$

有 $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + \cdots + z_{2k-1}^2 - z_{2k}^2$. 注意到上述两个变数线性替换显然都是可逆的（因为第一个是互不相交的平方差变换，第二个把矩阵写出来是对角线为 1 的上三角矩阵），所以这确实成立。对于 n 为偶数的情况，设 $n = 2k+2, k \in \mathbb{N}$，此时令

$$\begin{cases} x_{2i-1} = y_{2i-1} + y_{2i}, i = 1, 2, ..., k+1, \\ x_{2i} = y_{2i-1} - y_{2i}, i = 1, 2, ..., k+1. \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} f = &\left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(y_2 + \frac{y_3}{2}\right)^2 + \left(y_3 + \frac{y_5}{2}\right)^2 - \left(y_4 + \frac{y_5}{2}\right)^2 \\ &+ \cdots + \left(y_{2k-1} + \frac{y_{2k+1}}{2}\right)^2 - \left(y_{2k} + \frac{y_{2k+1}}{2}\right)^2 + y_{2k+1}^2 - y_{2k+2}^2. \end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{y_3}{2}, \\ z_2 = y_2 + \dfrac{y_3}{2}, \\ \quad \cdots \\ z_{2k-1} = y_{2k-1} + \dfrac{y_{2k+1}}{2}, \\ z_{2k} = y_{2k} + \dfrac{y_{2k+1}}{2}, \\ z_{2k+1} = y_{2k+1}, \\ z_{2k+2} = y_{2k+2}. \end{cases}$$

有 $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + \cdots + z_{2k-1}^2 - z_{2k}^2 + z_{2k+1}^2 - z_{2k+2}^2$. 与 n 为奇数的情况同理，上述的两个线性变数替换也是可逆的. 变换矩阵 T 较为复杂，在此省略. 综上，f 的标准形可以表达为

$$f = \begin{cases} z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + \cdots + z_{2k-1}^2 - z_{2k}^2, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 + \cdots + z_{2k-1}^2 - z_{2k}^2 + z_{2k+1}^2 - z_{2k+2}^2, n = 2k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

5. **(1)** 配方观察，寻找规律：

$$\begin{aligned}
f_1 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \\
&= x_1^2 + \left(\sum_{i=2}^n x_i\right) x_1 + \sum_{i=2}^n x_i^2 + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^n x_i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=2}^n x_i\right)^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2 + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^n x_i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=2}^n x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) + \sum_{i=2}^n x_i^2 + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^n x_i\right)^2 + \frac{3}{4}\underbrace{\left(\sum_{i=2}^n x_i^2 + \frac{2}{3}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right)}_{f_2}.
\end{aligned}$$

可以看出，上式配方后的余项 f_2（不包括系数 3/4）与原有二次型相比，形式基本一致，而仅仅在 $x_i x_j$ 项处的系数从原来的 1 变作了 2/3. 可按类似过程继续配方有

$$f_2 = \sum_{i=2}^n x_i^2 + \frac{2}{3}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \left(x_2 + \frac{1}{3}\sum_{i=3}^n x_i\right)^2 + \frac{8}{9}\left(\sum_{i=3}^n x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right).$$

余项依然保持类似形式，$x_i x_j$ 项的系数从 2/3 变作了 1/2. 另外，所配的平方项呈现出 $\left(x_k + \frac{1}{k+1}\sum_{i=k+1}^n x_i\right)^2$ 的结构. 这足以启发我们找出一般的规律，考虑

$$\begin{aligned}
f_k &= \sum_{i=k}^n x_i^2 + 2a_k \sum_{k\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \\
&= \left(x_k + a_k \sum_{i=k+1}^n x_i\right)^2 + \left(1-a_k^2\right)\left(\sum_{i=k+1}^n x_i^2 + \frac{2a_k}{1+a_k}\sum_{k+1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\
&= \left(x_k + a_k \sum_{i=k+1}^n x_i\right)^2 + \left(1-a_k^2\right) f_{k+1},\ k = 1, 2, ..., n-1.
\end{aligned}$$

则可以得到序列 a_k 的递推关系：

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = \frac{a_k}{1+a_k}, a_k \neq \pm 1.$$

求解该递推序列，不难得到 $a_k=\frac{1}{k+1}$. 从而有

$$\begin{aligned}
f_1 &= \left(x_1+a_1\sum_{i=2}^n x_i\right)^2+(1-a_1^2)f_2\\
&= \left(x_1+a_1\sum_{i=2}^n x_i\right)^2+(1-a_1^2)\left(x_2+a_2\sum_{i=3}^n x_i\right)^2+\left(1-a_1^2\right)\left(1-a_2^2\right)f_3\\
&= \cdots\\
&= \left(x_1+a_1\sum_{i=2}^n x_i\right)^2+(1-a_1^2)\left(x_2+a_2\sum_{i=3}^n x_i\right)^2+\cdots\\
&\quad +(1-a_1^2)(1-a_2^2)\cdots(1-a_{n-2}^2)(x_{n-1}+a_nx_n)^2+(1-a_1^2)(1-a_2^2)\cdots(1-a_{n-1}^2)x_n^2\\
&= \left(x_1+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^n x_i\right)^2+\frac{3}{4}\left(x_2+\frac{1}{3}\sum_{i=3}^n x_i\right)^2+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}\left(x_{n-1}+\frac{1}{n+1}x_n\right)^2\\
&\quad +\frac{n+1}{2n}x_n^2.
\end{aligned}$$

因此可作可逆线性变数替换

$$\begin{cases}
y_k=x_k+\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=k+1}^n x_i,\ k=1,2,...,n-1,\\
y_n=x_n.
\end{cases}$$

将 f_1 化为标准形：

$$f_1=y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}y_{n-1}^2+\frac{n+1}{2n}y_n^2.$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\\
&= \sum_{i=1}^n\left(\frac{nx_i-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\left(n^2x_i^2-2nx_i\sum_{j=1}^n x_j+\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(n^2\sum_{i=1}^n x_i^2-2n\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2+n\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right).
\end{aligned}$$

则本题化作《教程》第六章第二节例 2.3. 也可参考《指南》第五章例 2.16. 以下我们尝试按照配方法计算，首先上式可以化作

$$\begin{aligned}
f =& \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\
=& \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right). \\
=& \frac{n-1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right).
\end{aligned}$$

我们将最后一个等号右边的式子表示二次型记作 f_1，对 f_1 的变量 x_1 进行配方

$$\begin{aligned}
f_1 =& \frac{n-1}{n}\left(x_1^2 - \frac{2}{n-1}x_1\left(\sum_{i=2}^{n} x_i\right) + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n-1}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\
=& \frac{n-1}{n}\left(\left(x_1 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{(n-1)^2}\left(\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2\right. \\
& \left. + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n-1}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\
=& \frac{n-1}{n}\left(\left(x_1 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{(n-1)^2}\left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right)\right. \\
& \left. + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n-1}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\
=& \frac{n-1}{n}\left(\left(x_1 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 + \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}\sum_{i=2}^{n} x_i^2 - \frac{2n}{(n-1)^2}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\
=& \frac{n-1}{n}\left(x_1 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 + \underbrace{\frac{n-2}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n-2}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right)}_{f_2}.
\end{aligned}$$

上式中我们用符号 f_2 表示配方后的余项，可以发现 f_2 在形式上与 f_1 保持了一致，而仅仅是变量数变成了 $n-1$，这其实已经刻画出了 f 的递推规律. 依照上式，不断递推，可以把余项写到 f_{n-1} 为止（因为 $f_n = 0$），具体而言就是

$$\begin{aligned}
f =& \frac{n-1}{n}\left(x_1 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 + \frac{n-2}{n-1}\left(x_2 - \frac{1}{n-2}\sum_{i=3}^{n} x_i\right)^2 + \cdots \\
& + \frac{2}{3}\left(x_{n-2} - \frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_{n-1}-x_n\right)^2.
\end{aligned}$$

故 f 经过可逆线性变数替换可化为标准形 $\frac{n-1}{n}y_1^2+\frac{n-2}{n-1}y_2^2+\cdots+\frac{1}{2}y_{n-1}^2$.

批注. 配方法实际上是三角形变换的外在表现形式，关于此可参见本节题目 9，并且可以按照题目 9**(2)** 的结论检验上述标准形表达式是否正确. 也可以尝试利用《教程》第六章所述的正交线性变数替换的方法求解，此法利用对角化的思想处理实二次型，有普适性，且结论精确，但难点在于特征值求取复杂，计算量大. 而《教程》第六章第二节例 2.3 所用的方法既非配方法，也非标准的正交线性变数替换的方法，而是采取了一种经过改进的针对性处理策略.

6. 根据定理 1.1，对于数域 K 上的任意对称方阵 A，总存在可逆方阵 T，使得 $A=T'DT$，其中 D 是对角形，并且 $\mathrm{r}(D)=r$，不妨设

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $d_i\neq 0$，则 $D=d_1E_{11}+d_2E_{22}+\cdots+d_nE_{rr}$，从而 $A=d_1T'E_{11}T+d_2T'E_{22}T+\cdots+d_nT'E_{rr}T$，因为 T 满秩，显然其中每个 $d_iT'E_{ii}T$ 都是秩为 1 的矩阵.

7. 设 $X=(x_1,x_2,...,x_n)'$，且矩阵 A 的行向量组为 $A_1,A_2,...,A_n$，利用分块矩阵的性质，可以注意到这个二次型实际上是

$$\begin{aligned} f&=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2\\ &=\sum_{i=1}^{s}(A_iX)^2\\ &=(A_1X)^2+(A_2X)^2+\cdots+(A_nX)^2\\ &=\begin{pmatrix}(A_1X)' & (A_2X)' & \cdots & (A_nX)'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1X\\ A_2X\\ \vdots\\ A_nX\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} X'A_1' & X'A_2' & \cdots & X'A_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1X \\ A_2X \\ \vdots \\ A_nX \end{pmatrix} \\
&= X' \begin{pmatrix} A_1' & A_2' & \cdots & A_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} X \\
&= X'A'AX,
\end{aligned}
$$

即这个二次型 f 的矩阵正是 $A'A$，故只需证明 $\mathrm{r}(A'A) = \mathrm{r}(A)$.

考虑两个实数域上的线性方程组 $A'AX = 0$ 和 $AX = 0$，我们来证明它们同解. 一方面，设 $X_1 \in \mathbb{R}^n$ 是方程组 $AX = 0$ 的解，即 $AX_1 = 0$，那必然有 $A'AX_1 = A'(AX_1) = 0$，即 X_1 也是 $A'AX = 0$ 的解. 另一方面，设 $X_2 \in \mathbb{R}^n$ 是方程 $A'AX = 0$ 的解，即 $A'AX_2 = 0$，则有 $(AX_2)'(AX_2) = X_2'A'AX_2 = X_2'(A'AX_2) = 0$，因为 $AX_2 \in \mathbb{R}^n$，可设 $AX_2 = (k_1, k_2, \cdots, k_n)', k_i \in \mathbb{R}$，则

$$(AX_2)'(AX_2) = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2 = 0,$$

从而 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，即 $AX_2 = 0$，这说明 X_2 也是方程 $AX = 0$ 的解. 由线性方程组解的理论可知 $n - \mathrm{r}(A) = n - \mathrm{r}(A'A)$，即 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A'A)$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 2.3.

8. 由题意知，$B = T'AT$，因为 T 是上三角矩阵，对任意 $r = 1, 2, ..., n$，等式两边的各个矩阵作分块有

$$\begin{pmatrix} B_r & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_r' & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

按照分块矩阵乘法有 $B_r = T_r'A_rT_r$，其中 B_r, T_r, A_r 分别代表 B, T, A 的前 r 行前 r 列组成的子矩阵块. 注意到 T_r 还是主对角线为 1 的上三角矩阵，从而 $|T_r| = 1$，对上式取行列式可得

$$|B_r| = |T_r|^2|A_r| = |A_r|, r = 1, 2, ..., n.$$

也即

$$A \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{Bmatrix}, r = 1, 2, ..., n.$$

批注. 本题可参考《指南》第四章例 2.4.

9. **(1)** 必要性，若 f 可用三角形变换化为 $g=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_r y_r^2=Y'BY$，其中

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}.$$

则由题目 8 的结论可知

$$A\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{Bmatrix}=B\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{Bmatrix}=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\neq 0, & k\leqslant r;\\ 0, & k>r.\end{cases}\tag{5.5}$$

充分性，利用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，$f_1=X'AX=a_{11}x^2$，命题条件为 $a_{11}=A\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\neq 0$，则 f 已经是标准形，施行三角形变换 $X=EY$ 后，$f_1=a_{11}y_1^2$，满足题意. 现在假设命题对 $n=s-1$ 成立，当 $n=s$ 时，设 A 的秩为 r，且 A 满足

$$A\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{Bmatrix}=\begin{cases}D_k\neq 0, & k\leqslant r;\\ 0, & k>r.\end{cases}\tag{5.6}$$

则由 $r\geqslant 1$ 知，总是成立 $a_{11}=A\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\neq 0$. 因此我们可以对 $f_s=X'AX$ 的变元 x_1 进行配方，有

$$\begin{aligned}f_s&=a_{11}x_1^2+2(a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s)x_1+f_{s-1}\\&=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1s}}{a_{11}}x_s\right)^2+h_{s-1}.\end{aligned}$$

其中 f_{s-1} 和 h_{s-1} 都是某个关于变元 $x_2,x_3,....,x_n$ 的二次型. 设 h_{s-1} 的矩阵为 H，则作可逆线性变数替换

$$\begin{cases}y_1=x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{a_{1s}}{a_{11}}x_s;\\ y_i=x_i, i=2,3,...,s.\end{cases}\tag{5.7}$$

将 f 化作 $f=Y'\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & H\end{pmatrix}Y=a_{11}y_1^2+h_{s-1}$（此时 h_{s-1} 看作是 $y_2,...,y_s$ 的二次型）. 将变数替换 (5.7) 表示为 $X=TY$，可以看出 T 是一个对角线元素为 1 的上三角矩阵，故其实际上是一个三角形变换，则根据题目 8 的结论有

$$A\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & H\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{cases}a_{11}, & k=1.\\ a_{11}H\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1\\ 1 & 2 & \cdots & k-1\end{Bmatrix}, & k\geqslant 2.\end{cases} \tag{5.8}$$

当 $r=1$ 时，因为合同矩阵的秩相等，所以 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & H\end{pmatrix}=\mathrm{r}(H)+1=1$，从而 $\mathrm{r}(H)=0$. 即 $H=0$. 此时 $f=a_{11}y_{11}^2$ 命题已经成立.

当 $r>1$ 时，由式 (5.6) 和 (5.8) 知，

$$H\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1\\ 1 & 2 & \cdots & k-1\end{Bmatrix}=\begin{cases}D_k/a_{11}\neq 0, & k=2,3,...,r\\ 0, & k=r+1,...,s.\end{cases}$$

由归纳假设知，存在三角形变换 $Y_1=T_1Z_1$（其中 $Y_1=(y_2,y_3,...,y_s)',Z_1=(z_2,z_3,...,z_s)'$）使得 h_{s-1} 变作标准形

$$h_{s-1}=\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2+\cdots+\lambda_rz_r^2.$$

其中 T_1 为对角线为 1 的上三角矩阵，$\lambda_i\neq 0,i=2,...,r$. 故对 $f=a_{11}y_1^2+h_{s-1}$，只需作如下三角形变换

$$Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & T_1\end{pmatrix}Z$$

即可将 f 化作 $g=a_{11}z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2+\cdots+\lambda_rz_r^2$.

综合对 f 作的两次变数替换，可以看出从 $f=X'AX$ 到 g 的线性变数替换为 $X=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & T_1\end{pmatrix}Z$ 并且也是一个三角形变换，因此命题对 $n=s$ 也成立. 综上，由数学归纳法可知，题述命题的充分性对所有的正整数 n 都成立.

(2) 若 f 可用三角形变换化为 $g=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2=Y'BY$，则由式 (5.5) 可知

$$A\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{Bmatrix}=D_k=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\neq 0,k\leqslant r;$$

从而有 $\lambda_k = \frac{D_k}{D_{k-1}}, k = 1, 2, ..., r$. 其中 $D_0 = 1$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 2.5.

5.3 实与复二次型的分类

1. 设 $f = X'AX$ 经可逆线性变数替换 $X = TU$ 化为规范型. 由《教程》定理 3.1，复二次型的规范性实际上只取决于其矩阵 A 的秩 $r = \mathrm{r}(A)$，故本题只需利用（复数域上的）初等变换求出矩阵的秩即可. 为了明确起见，在此处写出具体的矩阵 T，仅用于检验参考.

(1) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{9}{\sqrt{78}} & \frac{1}{\sqrt{26}}\mathrm{i} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{78}} & \frac{1}{\sqrt{26}}\mathrm{i} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{78}} & \frac{2}{\sqrt{26}}\mathrm{i} \end{pmatrix}, f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$

(2) $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$

(3) $T = \begin{pmatrix} 2^{-1/4}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/8} & 0 & 0 \\ 0 & 6^{-1/4}\mathrm{e}^{(\pi - \arctan\sqrt{2})\mathrm{i}/2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \end{pmatrix}, f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$

(4) $T = \begin{pmatrix} 2^{-1/4}\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/8} & 2^{3/4}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/8} + 2^{-1/4}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/8} & 0 \\ 2^{-1/4}\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/8} & 2^{-1/4}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f = u_1^2 + u_2^2.$

2. 设 $f = X'AX$ 经过可逆线性变数替换 $X = TY$ 化成规范型，则

(1) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}, f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$

(2) $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$

(3) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, f = y_1^2 - y_2^2.$

(4) 注意到

$$f = 3(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4)^2 + (2x_1 - x_3 + 3x_4)^2,$$

直接令括号内的项为新变量，不难得到

$$T=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{4}&\frac{7}{4}&-\frac{5}{4}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},f=y_1^2+y_2^2.$$

3. 首先要指出：（关于 n 个独立变元的）实系数一次齐次多项式一般指 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，其中 $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$，且 $a_1,a_2,...,a_n$ 不全为零.

充分性，由《教程》定理 3.2，可对 $f=X'AX$ 作可逆线性变数替换 $X=TU$ 化为规范形，若 f 秩为 1，则 $f=u_1^2=u_1\cdot u_1$ 或 $f=-u_1^2=(-u_1)\cdot u_1$，而 u_1 实际上是列向量 $U=T^{-1}X$ 的第一个分量，它是一个关于 $x_1,...,x_n$ 的实系数一次齐次多项式，从而命题成立，若 f 秩为 2，且符号差为 0，则 $f=u_1^2-u_2^2=(u_1+u_2)(u_1-u_2)$，其中 u_1,u_2 都是关于 $x_1,...,x_n$ 的实系数一次齐次多项式，u_1+u_2,u_1-u_2 亦然，从而命题也成立.

必要性，设

$$f=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n).$$

记 $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n),\beta=(b_1,b_2,...,b_n)$，则 $\alpha,\beta\neq 0$.

若 α,β 线性相关，则存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得 $\beta=k\alpha$，并且 $k\neq 0$. 此时

$$f=k(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2.$$

因为 $\alpha\neq 0$，不妨设 $a_1\neq 0$，此时若令

$$\begin{cases}y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\\y_i=x_i,i=2,...,n.\end{cases}$$

则上式显然是一个可逆线性变数替换，得到 $f=ky_1^2$，其秩为 1.

若 α,β 线性无关，则将 α,β 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\alpha,\beta,\varepsilon_3,\varepsilon_4,...,\varepsilon_n$，此时令

$$\begin{cases}y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\\y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n,\\y_i=\varepsilon_iX,i=3,4,...,n.\end{cases}$$

其中 $X=(x_1,x_2,...,x_n)'$，则上式显然是一个可逆线性变数替换，得到 $f=y_1y_2$. 再作平方差变数替换

$$\begin{cases}y_1=z_1+z_2,\\y_2=z_1-z_2,\\y_i=z_i,i=3,4,...,n.\end{cases}$$

得到 $f=z_1^2-z_2^2$，即 f 的秩为 2，符号差为 0.

4. 由《教程》定理 3.2，可对 f 作可逆线性变数替换 $X=TU$ 化为规范形，设为

$$f=U'DU=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_p^2-u_{p+1}^2-\cdots-u_r^2.$$

由题目条件可知存在 $U_1=T^{-1}X_1,U_2=T^{-1}X_2$,使得 $U_1'DU_1>0,U_2'DU_2<0$，说明必然有 $0<p<r$，否则 $p=r$ 或 $p=0$，f 的各项要么全为正系数平方项，要么全为负系数平方项，此时 f（在 $\mathbb{R}^n$ 内）不可能同时取到正值和负值，矛盾. 故取 $U_0=(1,0,0,...,0,1_{r\text{th}},0,...,0)'$（即 $u_1=1,u_r=1$，其余为零），则 $U_0\neq 0$，并且

$$f=1^2-1^2=0.$$

此时 $X_0=TU_0$ 即为所求.

批注. 对实二次型 $f=X'AX$，若 $f\geqslant 0$ 对所有 $X\in\mathbb{R}^2$ 都成立，称 f 为半正定二次型，若 $f\leqslant 0$ 对所有 $X\in\mathbb{R}^2$ 都成立，称 f 为半负定二次型. 参见《教程》第 4 节.

5. 根据惯性定理，设 f 经过可逆线性变数替换 $X=TY$ 化成规范形

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2,$$

其中 f 的正惯性指数为 s，负惯性指数为 t. 要证明 $s\leqslant p,t\leqslant q$. 用反证法，以下假设 $s>p$. 由于 $Y=T^{-1}X$，可以把所有 y_i 都视为 $x_1,x_2,...,x_n$ 的实系数一次齐次函数. 那么 f 有两种复合函数表达形式，一种是用 l_i 表达（即题目的式子），另一种是用 y_j 表达（即规范形），以下根据这点构造矛盾.

一方面，考虑关于 $x_1,x_2,...,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} l_i=0,i=1,2,...,p;\\ y_j=0,j=s+1,s+2,...,s+t.\end{cases}$$

注意到 $p+t<s+t\leqslant n$，即该方程组的方程个数小于未知量个数，故根据线性方程组解的理论，该方程至少存在一组非零解 $X_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$.

另一方面，根据 f 用两种复合函数表达的一致性，对任意 $X\in\mathbb{R}^n$ 都必然成立

$$\begin{aligned} f&=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2\\ &=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2.\end{aligned}$$

将 X_0 代入可得

$$(-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2)|_{X=X_0}=(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_s^2)|_{X=X_0}.$$

因为 l_i,y_j 都是实数，上式左边恒非正，右边恒非负，故等号两边皆为零，并且有

$$\begin{aligned}l_{p+1}|_{X=X_0}=l_{p+2}|_{X=X_0}=\cdots=l_{p+q}|_{X=X_0}=0;\\ y_1|_{X=X_0}=y_2|_{X=X_0}=\cdots=y_s|_{X=X_0}=0.\end{aligned}$$

从而有 $Y|_{X=X_0}=T^{-1}X_0=0$. 由于 T^{-1} 是可逆矩阵，从而 $X_0=0$，这与 X_0 是非零向量矛盾. 故 $s\leqslant p$，同理可得 $t\leqslant q$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 3.2.

6. 因为负惯性指数 $q=0$，由《教程》定理 3.2 知，存在 V 的一组基 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$，使得 $f(\alpha,\alpha)$ 在该组基下的解析表达式为

$$f(\alpha,\alpha)=U'DU=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_r^2,$$

其中 r 为 $f(\alpha,\beta)$ 的秩，$U=(u_1\ u_2,...,u_n)'$ 为 α 在该组基下的坐标. 由于 V 是实线性空间，$U\in\mathbb{R}^n$，进而 $f(\alpha,\alpha)=0$ 就等价于

$$u_1=u_2=\cdots=u_r=0.$$

即 $\alpha\in M$ 等价于 α 的坐标的前 r 个分量为零，那么就有

$$\begin{aligned}M&=\{u_{r+1}\eta_{r+1}+u_{r+2}\eta_{r+2}+\cdots+u_n\eta_n|u_{r+1},u_{r+2},...,u_n\in\mathbb{R}\}\\&=L(\eta_{r+1},\eta_{r+2},...,\eta_n).\end{aligned}$$

从而 M 是 V 的子空间，且 $\eta_{r+1},\eta_{r+2},...,\eta_n$ 为 M 的一组基，$\dim M=n-r$.

7. 由《教程》定理 3.2，存在 V 的一组基 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ 使得 $Q_f(\alpha)$ 在该组基下的解析表达式为

$$Q_f(\alpha)=U'DU=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_p^2-u_{p+1}^2-\cdots-u_r^2,$$

其中 $U=(u_1\ u_2,...,u_n)'$ 为 α 在该组基下的坐标. 此时类似于本节题目 4 的论证逻辑，必然有 $0<p<r$，构造

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}&=\eta_i+\eta_j,i=1,2,...,p,j=p+1,p+2,...,r;\\ \beta_{ij}&=\eta_i-\eta_j,i=1,2,...,p,j=p+1,p+2,...,r;\\ \gamma_k&=\eta_k,k=r+1,r+2,...,n.\end{aligned}$$

很容易验证上面的向量都是迷向向量，又因为

$$\eta_i = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \beta_{ij}), i = 1, 2, ..., p;$$
$$\eta_j = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \beta_{ij}), j = p+1, p+2, ..., r;$$
$$\eta_k = \gamma_k, k = r+1, r+2, ..., n.$$

得知由 $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_k$ 全体向量组成的向量组和基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ 可相互线性表示，从而线性等价. 故 $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_k$ 的一个极大线性无关部分组就是 V 的一组基，并且全为迷向向量.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 3.3.

8. 充分性，由《教程》定理 3.2，存在 V 中的一组基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$，使得 $Q_f(\alpha)$ 在该组基下的解析表达式为

$$Q_f(\alpha) = U'DU = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_r^2,$$

其中 $U = (u_1, u_2, ..., u_n)'$ 为 α 在该组基下的坐标. 若任意 $\alpha \in V$，都有 $Q_f(\alpha) \geqslant 0$，则必然有负惯性指数 $q = r - p = 0$，否则 $p < r$，上式中 u_r^2 前的系数必然为 -1，此时取 $\alpha_0 = \eta_r$，得到 $Q_f(\alpha_0) = -1 < 0$ 矛盾. 故由本节题目 6 的结论可知，$N(f)$ 是子空间. 对任意 $\alpha \in V$，都有 $Q_f(\alpha) \leqslant 0$ 的情况同理

必要性，设 $N(f)$ 是 V 的子空间，用反证法，假设题述条件的反面成立，即存在 α_0, β_0 使得 $Q_f(\alpha_0) > 0, Q_f(\beta_0) < 0$，则根据本节题目 7，存在 V 一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \in N(f)$，则 $N(f) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = V$，即对任意 $\alpha \in V$ 都有 $Q_f(\alpha) = 0$，与假设矛盾. 从而必然有对任意 $\alpha \in V$，$Q_f(\alpha) \geqslant 0$ 或任意 $\alpha \in V$，$Q_f(\alpha) \leqslant 0$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 3.4.

9. 本题需要探讨全由迷向向量构成的子空间的最大维数，因此我们设某个子空间 M 全由迷向向量构成（即 $M \subseteq N(f)$）.

由《教程》定理 3.2，存在 V 的一组基 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ 使得 $Q_f(\alpha)$ 在该组基下的解析表达式为

$$Q_f(\alpha) = U'DU = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_r^2,$$

其中 $U = (u_1, u_2, ..., u_n)'$ 为 α 在该组基下的坐标. 令 $M_{\text{pos}} = L(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_p)$，对任意向量 $\beta \in M_{\text{pos}}$ 且 $\beta \neq 0$，设 $\beta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_p\eta_p$，则

$Q_f(\beta) = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_p^2 > 0$. 这说明 M_{pos} 内的非零向量总是使得 $Q_f(\alpha) > 0$，从而 $M_{\text{pos}} \cap M = \{0\}$，所以 $M_{\text{pos}} + M$ 实际上是一个直和（《教程》第四章定理 2.2）. 由维数公式

$$\dim M = \dim(M \oplus M_{\text{pos}}) - \dim M_{\text{pos}} \leqslant n - p.$$

同理可令 $M_{\text{neg}} = L(\eta_{p+1}, \eta_{p+2}, ..., \eta_r)$，可以得到

$$\dim M = \dim(M \oplus M_{\text{neg}}) - \dim M_{\text{neg}} \leqslant n - q.$$

上面两式同时成立，从而有 $\dim M \leqslant n - \max\{p, q\} = n - r + \min\{p, q\}$. 关于等号成立的条件，此处只举一个简单的情形，设 $n = r = 2, p = 1$，$Q_f(\alpha)$ 在 V 的一组基 η_1, η_2 下的解析表达式为

$$Q_f(\alpha) = u_1^2 - u_2^2.$$

令 $M = L(\eta_1 + \eta_2)$，则显然 $M \subseteq N(f)$，且 $\dim M = 1 = n - p$.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 3.5.

10. 按照第二节题目 9 的结论，存在三角形变换使得 $f = X'AX$ 化为

$$\begin{aligned} g &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &= D_1 y_1^2 + \frac{D_2}{D_1} y_2^2 + \cdots + \frac{D_n}{D_{n-1}} y_n^2, \end{aligned}$$

其中 $D_k = A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix}$. 由题意 $D_k > 0$ ，故对任意 $X \neq 0$，$g > 0$. 即对任意 $\alpha \neq 0, Q_f(\alpha) > 0$.

5.4 正定二次型

1. 根据《教程》定理 4.1，我们写出二次型的矩阵 A，验证其各个顺序主子式是否为正. 记 A 的 k 阶顺序主子式为 $|A_k|$，则

(1) $A = \begin{pmatrix} 99 & -6 & 24 \\ -6 & 130 & -30 \\ 24 & -30 & 71 \end{pmatrix}, |A_1| = 99, |A_2| = 12834, |A_3| = 755874.$ 故该二次型正定.

(2) $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{pmatrix}, |A_1| = 10, |A_2| = 4, |A_3| = -3588.$ 故该二次型非正定.

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}, |A_k|=\begin{vmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{k\times k}.$

根据第三章第二节题目 26(**1**) 的结论（或者《教程》第三章例 2.8）可知

$$|A_k|=\left(\frac{1}{2}\right)^k(1+k)>0, k=1,2,...,n.$$

故该二次型正定.

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ & & & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}_{n\times n}, A_k=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ & & & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}_{k\times k}.$

根据第三章第二节题目 26 后面的引理可知

$$|A_k|=\left(\frac{1}{2}\right)^k(1+k)>0, k=1,2,...,n.$$

故该二次型正定.

2. 设二次型的矩阵为 A，记 A 的 k 阶顺序主子式为 $|A_k|$. 根据《教程》定理 4.1 判断.

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}, |A_1|=1, |A_2|=1-t^2, |A_3|=-5t^2-4t$，令 $|A_k|>0, k=1,2,3$，得到 $-4/5<t<0$.

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}, |A_1|=1, |A_2|=4-t^2, |A_3|=-(t-15)^2+120$，令 $|A_2|>0$，得到 $-2<t<2$，但此时 $|A_3|<-13^2+120=-49<0$，故不可能使得 $|A_2|>0$ 和 $|A_3|>0$ 同时成立，从而 t 取任何值该二次型都不是正定的.

3. 设 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间 V 内的对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})$. 任意给定 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$，取 $M=L(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_n})$，将 $f(\alpha,\beta)$ 限制于 M 内，则 $f|_M(\alpha,\beta)$ 在 M 的基

$\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},...,\varepsilon_{i_r}$ 下的矩阵 A_M 的行列式为

$$|A_M| = A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{Bmatrix}.$$

因为 A 正定，即对任意 $\alpha\in M,\alpha\neq 0$，都有 $Q_{f|_M}(\alpha)=Q_f(\alpha)>0$，故由《教程》命题 4.1 推论知，$|A_M|>0$. 这说明 A 的所有主子式都大于零.

4. 我们考虑 $|tE+A|$ 的所有顺序主子式，令 A_k 为 A 的前 k 行和前 k 列交叉元素构成的子矩阵，则有

$$(tE+A)\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix} = |tE+A_k|.$$

上式中的 E 代表阶数适合的单位矩阵. 由《教程》第四章命题 4.2 知

$$|tE+A_k| = |tE-(-A_k)| = t^n - \mathrm{Tr}(-A_k)t^{n-1}+\cdots+(-1)^k|-A_k|.$$

故对 $k=1,2,...,n$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}|tE+A_k|=+\infty$. 取 t 充分大后,对 $k=1,2,...,n$，都有 $|tE+A_k|>0$，从而由《教程》定理 4.1 知，A 正定.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 4.5.

5. 由《教程》命题 4.1，A 正定等价于 $A=T'T$，其中 T 是可逆矩阵，由逆矩阵的性质有 $A^{-1}=T^{-1}(T')^{-1}=((T')')^{-1}(T')^{-1}=((T')^{-1})'(T')^{-1}$. 故 A^{-1} 也是正定矩阵.

6. X 是实向量，从而有 $X'X>0(X\neq 0)$，对任意实对称矩阵 A，设

$$R(A,X)=\frac{X'AX}{X'X},\ X\neq 0.$$

故本题实际上是要证明以 $R(A,X)$ 关于 $X\in\mathbb{R}^n$ 有界（注意题目的 $|X'AX|$ 表示 $X'AX$ 的绝对值）. 显然，若 A 是正定的，则有 $R(A,X)>0$. 由题目 4 的结论可知，当 t 充分大时，$tE+A$ 是正定的，从而存在 t_1，使得

$$R(t_1E+A,X)=\frac{X'(t_1E+A)X}{X'X}=t_1+\frac{X'AX}{X'X}>0.$$

同样地，存在 t_2，使得 t_2E-A 是正定的，即

$$R(t_2E-A,X)=\frac{X'(t_2E-A)X}{X'X}=t_2-\frac{X'AX}{X'X}>0.$$

从而 $R(A,X)$ 有上界 t_2 和下界 t_1，取 $c=\max\{t_1,t_2\}$ 即可得到结论.

批注.　本题可参考《指南》第四章例 4.6. 背景是 Rayleigh quotient.

7.　用反证法，假设对任意的 n 维实向量 X 都有 $X'AX \geqslant 0$，这说明二次型 $f = X'AX$ 是一个半正定二次型，它的规范型为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$. 换言之，存在实数域上的可逆线性变数替换 $X = TY$，使得

$$f = X'AX = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2 = Y'\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y,$$

其中 E_r 是 r 阶单位矩阵. 由《教程》命题 2.2，A 和 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}$ 内合同，即存在可逆实矩阵 T 使得 $A = T'\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T$，取行列式有 $|A| = |T|^2\begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0$（当 $r < n$ 时取等号），与题目条件矛盾.

8.　由《教程》命题 4.1，对任意 $X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$，有 $X'AX > 0, X'BX > 0$，从而 $X'(A+B)X = X'AX + X'BX > 0$，故 $A+B$ 也是正定的.

9.　请注意本章的第 2 节题目 5**(2)** 的解答中开头的变换，有

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \geqslant 0.$$

其中 $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$. 故是该二次型半正定的.

10.　**(1)** 记 $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)'$，$A = (a_{ij})$，则有

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{pmatrix} A & Y \\ Y' & 0 \end{pmatrix}.$$

由题意 A 正定，故 A 可逆，由第三章第 3 节题目 8 的结论知

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = |A||0 - Y'A^{-1}Y| = -|A|Y'A^{-1}Y.$$

其中第二个等号成立的原因是 $Y'A^{-1}Y$ 是一个数. 上式表明二次型 g 实际上是二次型 $h = Y'A^{-1}Y$ 的 $-|A|$ 倍. 现在因为 A 正定，我们有 $|A| > 0$，同时由题目 5 的结论知 A^{-1} 也正定，故可作变数替换将二次型 $h = Y'A^{-1}Y$ 化为规范型 $Z'Z$，有

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = -|A|Y'A^{-1}Y = -|A|Z'Z = -|A|\left(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2\right).$$

这说明 $g(y_1, y_2, ..., y_n)$ 是负定二次型.

(2) 将矩阵 A 作分块.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

其中 A_1 是 A 的前 $n-1$ 行和前 $n-1$ 列交叉元素构成的子方阵，向量 $\alpha = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{n-1,n})$. 显然 A_1 也是正定的（顺序主子式都大于 0），故 A_1 可逆，由第三章第 3 节题目 8 的结论知

$$|A| = |A_1||a_{nn} - \alpha' A_1^{-1}\alpha| = |A_1| \left(a_{nn} - \alpha' A_1^{-1}\alpha\right)$$

上述第二个等号成立的原因是 $a_{nn} - \alpha' A_1^{-1}\alpha$ 是一个数. 由题目 5 的结论知 A^{-1} 也正定，故 $\alpha' A_1^{-1}\alpha \geqslant 0$，又 $|A_1| > 0$，从而有

$$|A| \leqslant a_{nn}|A_1| = a_{nn}P_{n-1}.$$

(3) 由 **(2)** 的结论不断归纳立得.

(4) 注意到 $T'T$ 是一个正定矩阵，且其对角线上的元素正是 $t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2$，由 **(3)** 的结论知

$$|T^2| = |T'T| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2\right)^2.$$

批注. 本题可参考《指南》第四章例 4.7.

11. 必要性，由题目 7 的结论（取其逆否命题）知半正定矩阵 A 的行列式 $|A| \geqslant 0$，之后可完全按照解答题目 3 的思路证明，只需稍作修改即可（将 $Q_f(\alpha) > 0$ 改作 $Q_f(\alpha) \geqslant 0$），此处省略.

充分性的证明使用常规手段较为困难，这是因为合同矩阵间的主子式难以直接相互联系，此处普遍的方法是利用矩阵的特征多项式的展开表达来构建出主子式. 设 A 的主子式都非负，根据第四章第四节题目 29 的结论，令 $f(t) = |tE + A| = |tE - (-A)|$ [4]，则有

$$\begin{aligned} f(t) &= t^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^k (-A) \begin{Bmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{Bmatrix} t^{n-k} \right) \\ &= t^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} A \begin{Bmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{Bmatrix} t^{n-k} \right). \end{aligned}$$

[4] 此处不用字母 λ，而用 t，只是矩阵摄动法上的习惯.

故多项式 $f(t)$ 的系数由 A 的主子式的和组成，这说明这些系数都非负，从而对任意实数 $t>0$，都有 $f(t)=|tE+A|>0$. 注意到上面的推理可以对任何 $f_r(t)=|tE+A_r|$ 进行，其中 A_r 是 A 的 r 阶顺序主子式，故对任意实数 $t>0$，都有 $f_r(t)=|tE+A_r|>0$. 由《教程》定理 4.1 知 $tE+A$ 正定. 从而对任意 $t>0, X\neq 0$，有

$$g(t)=X'(tE+A)X>0.$$

对于固定的 X，$g(t)$ 是关于 t 在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，故有

$$X'AX=g(0)=\lim_{t\to 0^+}X'(tE+A)X\geqslant 0.$$

从而 A 是半正定矩阵.

批注. 本题可参考《指南》第四章例 4.8. 充分性的证明中，利用了矩阵函数 $tE+A$ 对 A 进行逼近，这种手段在矩阵分析里一般称为摄动法. 若不用此方法，也可以考虑特征值的分布，只需说明 A 的特征值非负即可，参见《教程》第六章第二节题目 16（需将原题改为对半正定矩阵的叙述）.

12. **(1)** 令 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，可见 f 和 g 都是非正定的，但 $f+g$ 却是正定的.

(2) 设 $Q_f(\alpha), Q_g(\alpha)$ 为线性空间 V 内的二次型函数，且在 V 一组基下矩阵分别为 A 和 B. 将它们化为规范型，即存在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 和基 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$，使得 $Q_f(\alpha), Q_g(\alpha)$ 在这两组基下的解析表达式分别为

$$\begin{aligned}Q_f(\alpha)&=Y'D_1Y=y_1^2+\cdots+y_{p_1}^2-y_{p_1+1}^2-\cdots-y_{r_1}^2;\\ Q_g(\alpha)&=Y'D_2Y=y_1^2+\cdots+y_{p_2}^2-y_{p_2+1}^2-\cdots-y_{r_2}^2.\end{aligned}$$

由题意有 $p_1,q_1<n/2$,令 $M=L(\varepsilon_{p_1+1},\varepsilon_{p_1+2},...,\varepsilon_n), N=L(\eta_{p_2+1},\eta_{p_2+2},...,\eta_n)$，则由维数公式

$$\begin{aligned}\dim M\cap N&=\dim M+\dim N-\dim(M+N)\\&\geqslant n-p_1+n-p_2-n\\&=n-(p_1+p_2)>0.\end{aligned}$$

故 $M\cap N\neq\{0\}$，取 $M\cap N$ 的一个非零向量 α_0，则由解析表达式很容易知道 $Q_f(\alpha_0)\leqslant 0, Q_g(\alpha_0)\leqslant 0$，从而 $Q_{f+g}(\alpha_0)=Q_f(\alpha_0)+Q_g(\alpha_0)\leqslant 0$. 这说明 $f+g$ 非正定.

第六章　带度量的线性空间

6.1　欧几里得空间的定义和基本性质

1. **(1)** 设 A 是正定矩阵，则由《教程》第五章命题 4.1，二次型 $X'AX > 0(\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0)$，从而对任意行向量 $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)A\beta' &= \lambda\alpha_1 A\beta' + \mu\alpha_2 A\beta';\\ \alpha_1 A\beta' &= (\alpha_1 A\beta')' = \beta A'\alpha_1' = \beta A\alpha_1';\\ \alpha_1 A\alpha_1' &> 0(\alpha_1 \neq 0);\\ 0A0' &= 0.\end{aligned}$$

从而 $\alpha A\beta'$ 是内积. $\mathbb{R}^n$ 关于这个内积成一欧氏空间.

(2) 柯西-布尼雅可夫斯基不等式是 $|(\alpha, \beta)| \leqslant |\alpha||\beta|$，即

$$|\alpha A\beta'| \leqslant \sqrt{\alpha A\alpha'}\sqrt{\beta A\beta'}.$$

2. 由第五章第 1 节题目 8 知，(A, B) 是一个对称双线性函数，从而满足内积的前两个条件。又对任意对称矩阵 $A \in V$，由第二章第 6 节题目 23 的结论知，$(A, A) = \mathrm{Tr}(AA) = \mathrm{Tr}(AA') \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $A = 0$，从而满足内积的第三个条件. 故 V 关于 (A, B) 成一欧氏空间.

3. 根据 $\langle\alpha, \beta\rangle = \arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$ 直接计算即可.

(1) $\pi/2$.　**(2)** $\pi/4$.　**(3)** $\arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$.

4. 必要性，若 $(\alpha, \beta) = 0$，则对任意 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) &= (\alpha, \alpha) + 2t(\alpha, \beta) + t^2(\beta, \beta)\\ &= (\alpha, \alpha) + t^2(\beta, \beta)\\ &\geqslant (\alpha, \alpha).\end{aligned}$$

从而 $|\alpha + t\beta| \geqslant |\alpha|$.

充分性，若对任意 $t\in\mathbb{R}$，$|\alpha+t\beta|\geqslant|\alpha|$，则有

$$(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)=(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta)\geqslant(\alpha,\alpha)$$

成立，即

$$2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta)\geqslant 0.$$

如果 $\beta=0$，$(\alpha,\beta)=0$ 直接成立. 如果 $\beta\neq 0$，把上式左边看作关于 t 的二次函数，它恒非负，注意到 $(\beta,\beta)>0$，故其无相异零点，系数满足判别式

$$\delta=(2(\alpha,\beta))^2\leqslant 0.$$

从而 $(\alpha,\beta)=0$. 即 α 和 β 正交.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.1.

5. **(1)** 要证 $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，即证

$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta)\leqslant(|\alpha|+|\beta|)^2,$$

即证

$$(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\leqslant(\alpha,\alpha)+2|\alpha||\beta|+(\beta,\beta),$$

即证

$$(\alpha,\beta)\leqslant|\alpha||\beta|.$$

由柯西-布尼雅可夫斯基不等式，$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$，从而上式成立. 故 $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ 成立.

(2) 按 **(1)** 的结果，有

$$\begin{aligned}d(\alpha,\gamma)&=|\alpha-\beta|\\&=|\alpha-\gamma+\gamma-\beta|\\&\leqslant|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|\\&=d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta).\end{aligned}$$

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.2.

6. 设 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ 与 α,β,γ 正交，则有

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

解此方程可得 $X=k(4,0,1,-3)$. 取 $k=1$,对 X 单位化有 $X^0=\frac{1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3)$，即为所求.

7. **(1)** 先对基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 作施密特正交化，则有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\alpha_1,\\
&\varepsilon_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1,\\
&\varepsilon_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2,\\
&\quad\cdots\\
&\varepsilon_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_n,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2-\cdots-\frac{(\alpha_{n-1},\varepsilon_{n-1})}{(\varepsilon_{n-1},\varepsilon_{n-1})}\varepsilon_{n-1}.
\end{aligned}$$

依次对上面每一个式子两边同时与 β 作内积，按题设有

$$\begin{aligned}
&(\beta,\varepsilon_1)=(\beta,\alpha_1)=0,\\
&(\beta,\varepsilon_2)=(\beta,\alpha_2)-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}(\beta,\varepsilon_1)=0,\\
&\quad\cdots\\
&(\beta,\varepsilon_n)=(\beta,\alpha_n)-\frac{(\alpha_n,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}(\beta,\varepsilon_1)-\cdots-\frac{(\alpha_{n-1},\varepsilon_{n-1})}{(\varepsilon_{n-1},\varepsilon_{n-1})}(\beta,\varepsilon_{n-1})=0.
\end{aligned}$$

即向量组 $\beta,\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 两两正交. 如果 $\beta\neq 0$，按《教程》命题 1.2，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n,\beta$ 共 $n+1$ 个向量线性无关，显然与 V 是 n 维线性空间矛盾. 从而 $\beta=0$.

(2) 若 $(\beta_1,\alpha)=(\beta_2,\alpha)$，则按照内积的性质有 $(\beta_1-\beta_2,\alpha)=0(i=1,2,...,n)$，由 **(1)** 可知 $\beta_1-\beta_2=0$，即 $\beta_1=\beta_2$.

8. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 η_1,η_2,η_3 的过渡关系为

$$\begin{aligned}
(\eta_1,\eta_2,\eta_3)&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T\\
&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

对过渡矩阵 T 有

$$T'T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = E.$$

即 T 是一个正交矩阵，按《教程》命题 1.3，η_1, η_2, η_3 也是一组标准正交基.

9. 不难推知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 直接对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 作施密特正交化有

$$\begin{aligned}
\eta_1' &= \alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \\
\eta_2' &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \eta_1')}{(\eta_1', \eta_1')}\eta_1' = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_4 - \varepsilon_5), \\
\eta_3' &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \eta_1')}{(\eta_1', \eta_1')}\eta_1' - \frac{(\alpha_3, \eta_2')}{(\eta_2', \eta_2')}\eta_2' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5.
\end{aligned}$$

再作单位化得到

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5), \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_4 - \varepsilon_5), \eta_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5).$$

η_1, η_2, η_3 即为 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一组标准正交基.

10. 直接求取该方程组的一个基础解系，为

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (0, 1, 1, 0, 0), \\
\gamma_2 &= (-1, 1, 0, 1, 0), \\
\gamma_3 &= (4, -5, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

对其进行施密特正交化有

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (0, 1, 1, 0, 0), \\
\eta_2 &= (-1, 1/2, -1/2, 1, 0), \\
\eta_3 &= (7/5, -6/5, 6/5, 13/5, 1).
\end{aligned}$$

单位化有

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0, 0), \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, -1, 2, 0), \\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{\sqrt{315}}(7, -6, 6, 13, 5).
\end{aligned}$$

11. **(1)** 直接计算各个向量之间的内积，以下设 $p,q=1,2,...,n$ 且在同一式子中 $p\neq q$，有

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos px\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{p}\sin px\right)_{-\pi}^{\pi} = 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin qx\mathrm{d}x &= \left(-\frac{1}{q}\cos qx\right)_{-\pi}^{\pi} = 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\cdot\cos qx\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(p+q)x+\cos(p-q)x}{2}\mathrm{d}x = 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin px\cdot\sin qx\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(p-q)x-\cos(p+q)x}{2}\mathrm{d}x = 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\cdot\sin qx\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(p+q)x-\sin(p-q)x}{2}\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

故该向量组的向量两两正交.

(2) 只需对该向量组进行单位化即可，求出各个向量的模为

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\mathrm{d}x\right)^{1/2} &= \sqrt{2\pi},\\
\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\cdot\cos px\mathrm{d}x\right)^{1/2} &= \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2px}{2}\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\pi},\\
\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin px\cdot\sin px\mathrm{d}x\right)^{1/2} &= \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2px}{2}\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

从而 M 的一组标准正交基为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},...,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}.$$

12. $\mathbb{R}[x]_4$ 的一组基为 $1,x,x^2,x^3$. 对这组基进行施密特正交化，有

$$\begin{aligned}
&\eta_1(x)=1,\\
&\eta_2(x)=x-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1\mathrm{d}x}\cdot 1 = x,\\
&\eta_3(x)=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x^2\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1\mathrm{d}x}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x\cdot x^2\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}x\cdot x\mathrm{d}x}\cdot x = x^2-\frac{1}{3},\\
&\eta_4(x)=x^3-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x^3\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1\mathrm{d}x}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x\cdot x^3\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}x\cdot x\mathrm{d}x}\cdot x-\frac{\int_{-1}^{1}(x^2-1/3)x^3\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(x^2-1/3)^2\mathrm{d}x}\left(x-\frac{1}{3}\right)\\
&\qquad\;\; = x^3-\frac{3}{5}x.
\end{aligned}$$

容易求得各个向量的模长为 $|\eta_1| = \sqrt{2}, |\eta_2| = \sqrt{2/3}, |\eta_3| = \sqrt{8/45}, |\eta_4| = \sqrt{8/175}$. 故对各个向量进行单位化得到 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一组标准正交基为

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \varepsilon_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \varepsilon_4(x) = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).$$

13. (1) 正交化得

$$\varepsilon_1 = (1, 2, -1, 0), \varepsilon_2 = (4/3, -1/3, 2/3, 1), \varepsilon_3 = (-6/5, 13/10, 7/5, 11/10).$$

单位化得

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right), \\
\eta_2 &= \left(\frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right), \\
\eta_3 &= \left(\frac{-4}{\sqrt{70}}, \frac{13}{3\sqrt{70}}, \frac{14}{3\sqrt{70}}, \frac{11}{3\sqrt{70}}\right).
\end{aligned}$$

(2) 正交化得

$$\varepsilon_1 = (2, 1, 0, 1), \varepsilon_2 = (-1, 1/2, 2, 3/2), \varepsilon_3 = (-2/3, 2/3, -1, 2/3).$$

单位化得

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \\
\eta_2 &= \left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right), \\
\eta_3 &= \left(\frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{-3}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right).
\end{aligned}$$

14. 第一种内积：$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. 正交化:

$$\begin{aligned}
&\eta_1(x) = 1, \\
&\eta_2(x) = x - \frac{\int_0^1 1 \cdot x\mathrm{d}x}{\int_0^1 1 \cdot 1\mathrm{d}x} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}, \\
&\eta_3(x) = x^2 - \frac{\int_0^1 1 \cdot x^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 1 \cdot 1\mathrm{d}x} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \cdot x^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

单位化得

$$\varepsilon_1(x) = 1, \varepsilon_2(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), \varepsilon_3(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

第二种内积：$(f,g)=\sum_{k=1}^{n} f(k)g(k)$. 正交化：

$$\begin{aligned}
\eta_1(x) &= 1,\\
\eta_2(x) &= x-\frac{1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1}\cdot 1 = x-2,\\
\eta_3(x) &= x^2-\frac{1\cdot 1^2+1\cdot 2^2+1\cdot 3^2}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1}\cdot 1\\
&\quad -\frac{(1-2)\cdot 1^2+(2-2)\cdot 2^2+(3-2)\cdot 3^2}{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}\cdot(x-2)\\
&= x^2-4x+\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

单位化得

$$\varepsilon_1(x)=\frac{1}{\sqrt{3}},\varepsilon_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2),\varepsilon_3(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2-4x+\frac{10}{3}\right).$$

15. 记矩阵 D 的第 i 个列向量为 $d_i=((\alpha_1,\alpha_i),(\alpha_2,\alpha_i),...,(\alpha_s,\alpha_i))'$，则 $\det(D)\neq 0$ 等价于 D 不满秩，亦等价于向量组 $d_1,d_2,...,d_s$ 线性无关. 故只需证明 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关是 $d_1,d_2,...,d_s$ 线性无关的充分必要条件即可.

充分性，若 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关，我们来证向量组 $d_1,d_2,...,d_s$ 线性无关，设

$$k_1d_1+k_2d_2+\cdots+k_sd_s=0,$$

将上式每个 d_i 按分量写开，并根据内积的线性性质可得

$$\begin{aligned}
(\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)&=0;\\
(\alpha_2,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)&=0;\\
&\cdots\\
(\alpha_s,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)&=0.
\end{aligned}$$

把上面的第 j 行式子分别乘上 $k_j(j=1,2,...,s)$，得到的式子全部相加，并再次根据内积的线性性质，有

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=0.$$

从而 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的线性无关性得 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，即 $d_1,d_2,...,d_s$ 线性无关.

必要性，若 $d_1,d_2,...,d_s$ 线性无关，我们来证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关，设

$$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_s\alpha_s=0,$$

对 $i=1,2,...,s$，将上式两边同时与 α_i 作内积，有

$$\begin{aligned}
t_1(\alpha_1,\alpha_1)+t_2(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+t_s(\alpha_1,\alpha_s)&=0;\\
t_1(\alpha_2,\alpha_1)+t_2(\alpha_2,\alpha_2)+\cdots+t_s(\alpha_2,\alpha_s)&=0;\\
&\cdots\\
t_1(\alpha_s,\alpha_1)+t_2(\alpha_s,\alpha_2)+\cdots+t_s(\alpha_s,\alpha_s)&=0.
\end{aligned}$$

不难看出上式即为 $t_1d_1+t_2d_2+\cdots+t_sd_s=0$，从而由 $d_1,d_2,...,d_s$ 的线性无关性得 $t_1=t_2=\cdots=t_s=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关.

16. 显然 α_1 和 α_2 已经正交，且是单位向量，只需再取两个向量 α_3,α_4，使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，再对其进行施密特正交化和单位化，就可以得到一组标准正交基 $\varepsilon_1(=\alpha_1),\varepsilon_2(=\alpha_2),\varepsilon_3,\varepsilon_4$. 由《教程》命题 1.4 可知，以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为列向量的矩阵 T 是正交矩阵.

求取 α_3,α_4 只需取 K^4 的一组基（最简单的是单位坐标向量），与 α_1,α_2 组成 6 个向量的向量组，再求其包含 α_1,α_2 的极大线性无关部分组即可. 可以利用《教程》第二章的相关方法.

经过计算，一种方法是取 $\alpha_3=(0,0,1,0),\alpha_4=(0,1,0,0)$. 施密特正交化有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\alpha_1,\\
&\varepsilon_2=\alpha_2,\\
&\varepsilon_3'=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2=\left(\frac{1}{3},0,\frac{5}{6},-\frac{1}{6}\right),\\
&\varepsilon_4'=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_4,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2-\frac{(\alpha_4,\varepsilon_3')}{(\varepsilon_3',\varepsilon_3')}\varepsilon_3'=\left(\frac{2}{9},\frac{5}{9},0,\frac{4}{9}\right).
\end{aligned}$$

再单位化得 $\varepsilon_3=\left(\frac{2}{\sqrt{30}},0,\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}}\right),\varepsilon_4=\left(\frac{2}{3\sqrt5},\frac{5}{3\sqrt5},0,\frac{4}{3\sqrt5}\right)$，故可取

$$T=\begin{pmatrix}
\frac13 & -\frac{2}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{3\sqrt5}\\
-\frac23 & 0 & 0 & \frac{5}{3\sqrt5}\\
0 & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0\\
\frac23 & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{4}{3\sqrt5}
\end{pmatrix}.$$

此时有 $T'T=E$，即 T 是正交矩阵.

17. 若 T 是上三角矩阵，则 T' 是下三角矩阵. 若 T 同时又是正交矩阵，则 $T'T=E$，或 $T^{-1}=T'$，由第二章第 5 节题目 18**(2)** 可知，T 是上三角矩

阵则其逆矩阵 $T^{-1} = T'$ 也是上三角矩阵，也即 T' 既是上三角矩阵又是下三角矩阵，故 T' 只能是对角矩阵，T 也只能是对角矩阵. 设

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则由 $T'T = T^2 = E$ 可知 $\lambda_i^2 = 1, i = 1, 2, ..., n$. 又因为 T 是实矩阵，$\lambda_i \in \mathbb{R}$，从而 $\lambda_i = \pm 1$.

18. 设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. 由 $|A| \neq 0$ 知 A 不满秩，从而 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关. 因为 A 是实方阵，故可以把 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 看作是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组，我们对其作施密特正交化，有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1' = \alpha_1,\\
&\varepsilon_2' = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \varepsilon_1')}{(\varepsilon_1', \varepsilon_1')}\varepsilon_1',\\
&\varepsilon_3' = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \varepsilon_1')}{(\varepsilon_1', \varepsilon_1')}\varepsilon_1' - \frac{(\alpha_3, \varepsilon_2')}{(\varepsilon_2', \varepsilon_2')}\varepsilon_2',\\
&\quad\cdots\\
&\varepsilon_n' = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \varepsilon_1')}{(\varepsilon_1', \varepsilon_1')}\varepsilon_1' - \frac{(\alpha_n, \varepsilon_2')}{(\varepsilon_2', \varepsilon_2')}\varepsilon_2' - \cdots - \frac{(\alpha_{n-1}, \varepsilon_{n-1}')}{(\varepsilon_{n-1}', \varepsilon_{n-1}')}\varepsilon_{n-1}'.
\end{aligned}$$

将式子右边的 ε_i' 项移动至左边，我们有

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \varepsilon_1',\\
&\alpha_2 = \frac{(\alpha_2, \varepsilon_1')}{(\varepsilon_1', \varepsilon_1')}\varepsilon_1' + \varepsilon_2',\\
&\alpha_3 = \frac{(\alpha_3, \varepsilon_1')}{(\varepsilon_1', \varepsilon_1')}\varepsilon_1' + \frac{(\alpha_3, \varepsilon_2')}{(\varepsilon_2', \varepsilon_2')}\varepsilon_2' + \varepsilon_3',\\
&\quad\cdots\\
&\alpha_n = \frac{(\alpha_n, \varepsilon_1')}{(\varepsilon_1', \varepsilon_1')}\varepsilon_1' + \frac{(\alpha_n, \varepsilon_2')}{(\varepsilon_2', \varepsilon_2')}\varepsilon_2' + \cdots + \frac{(\alpha_{n-1}, \varepsilon_{n-1}')}{(\varepsilon_{n-1}', \varepsilon_{n-1}')}\varepsilon_{n-1}' + \varepsilon_n'.
\end{aligned}$$

再对 ε_i' 进行单位化，令 $\varepsilon_i = \varepsilon_i'/|\varepsilon_i'|$，则有 $\varepsilon_i' = |\varepsilon_i'|\varepsilon_i$，代入上式，并且重命名所有系数，得到

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = t_{11}\varepsilon_1,\\
&\alpha_2 = t_{12}\varepsilon_1 + t_{22}\varepsilon_2,\\
&\alpha_3 = t_{13}\varepsilon_1 + t_{23}\varepsilon_2 + t_{33}\varepsilon_3,\\
&\quad\cdots\\
&\alpha_n = t_{1n}\varepsilon_1 + t_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + t_{n-1,n}\varepsilon_{n-1} + t_{nn}\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}\\
&= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)T.
\end{aligned}$$

其中 $t_{ii} = |\varepsilon_i'| > 0$. 上式左边就是矩阵 A，我们令矩阵 $Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$，因为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，由《教程》命题 1.4 可知，Q 是一个正交矩阵. 此时按上式有 $A = QT$，即 A 分解成了一个正交矩阵和一个（对角元为正的）上三角矩阵的乘积.

下面我们来证明分解的唯一性. 假设 A 有两种这样的分解式，即 $A = Q_1T_1 = Q_2T_2$，其中 Q_1, Q_2 都是正交矩阵，T_1, T_2 都是对角元为正的上三角矩阵，故 T_1, T_2 都可逆，令 $D = T_2T_1^{-1}$，有 $Q_1 = Q_2T_2T_1^{-1} = Q_2D$.

一方面，因为 Q_1, Q_2 是正交矩阵，有

$$E = Q_1'Q_1 = (Q_2D)'(Q_2D) = D'Q_2'Q_2D = D'ED = D'D.$$

从而 D 也是正交矩阵.

另一方面，因为 T_1 是上三角矩阵，从而 T_1^{-1} 也是上三角矩阵（第二章第 5 节题目 18**(2)**），又因为 T_2 是上三角矩阵，从而 $D = T_2T_1^{-1}$ 也是上三角矩阵.

故 D 既是上三角矩阵又是正交矩阵，由本节题目 17 知，D 是一个对角矩阵，且对角线上的元素为 ± 1. 注意到 D 的对角元正是 T_2 和 T_1^{-1} 对角元的乘积，不难得知 T_2 和 T_1^{-1} 的对角元都是正的，说明 D 的对角元只能是 1，从而 $D = E$. 故有 $Q_1 = Q_2, T_1 = T_2$，唯一性得证.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.5. 本题的矩阵 T 其实普遍用字母 R 表示，这在矩阵理论中称作 QR 分解.

19. 因为 A 是正定矩阵，由《教程》第五章命题 4.1 知，存在 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶可逆矩阵 P，使得 $A = P'P$，那么 $|P| \neq 0$，我们对 P 作本节题目 18 的分解，存在正交矩阵 Q 和上三角矩阵 T 使得 $P = QT$，进而 $A = (QT)'QT = T'Q'QT = T'ET = T'T$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.6.

20. 取 V 中的一组标准正交基为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$，如果对任意 ε_i，我们能找到一个 β，使得 $f(\varepsilon_i) = (\varepsilon_i, \beta)(i = 1, 2, ..., n)$，此时根据线性函数和内积的性质，对任意 $\alpha \in V$，设 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$，有

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= a_1 f(\varepsilon_1) + a_2 f(\varepsilon_2) + \cdots + a_n f(\varepsilon_n) \\
&= a_1(\varepsilon_1, \beta) + a_2(\varepsilon_2, \beta) + \cdots + a_n(\varepsilon_n, \beta) \\
&= (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n, \beta) \\
&= (\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

事实上，对任意给定的 $f(\alpha)$，只需取

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} f(\varepsilon_j)\varepsilon_j = f(\varepsilon_1)\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2)\varepsilon_2 + \cdots + f(\varepsilon_n)\varepsilon_n.$$

此时由标准正交基的性质知，对任意 ε_i，有

$$(\varepsilon_i, \beta) = f(\varepsilon_i)(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = f(\varepsilon_i).$$

从而证得命题.

21. 先从直觉上分析，在三维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中，取定坐标系 $Oxyz$，设 M 是 xOy 平面，α, β 为空间内任意两点（看作是从原点出发的向量），则 $M^{\perp}$ 为 z 轴，$\alpha + M$ 为空间内过 α 且平行于 xOy 平面的平面，β_1, β_2 分别为向量 $\beta - \alpha$ 在 xOy 平面和 z 轴的投影向量，那么 $|\beta_2|$ 正是点 β 到平面 $\alpha + M$ 的垂直距离，若 ξ 是平面 $\alpha + M$ 上的动点，则 $|\beta_2|$ 就是线段 $\beta\xi$ 的长度最小值.

从上面的几何模型中不难想到，关键之处在于，点 ξ 在平面 $\alpha + M$ 上变动时，$\beta - \xi$ 在 z 轴上的投影（即 $\beta - \xi$ 在 $M^{\perp}$ 上的分量）应该保持不变，同时其在 xOy 平面上的投影总可以取到零，由此就可写出证明.

令 ξ 是 $\alpha + M$ 内一个变动的向量，因为 $\xi \in \alpha + M$，所以 $\alpha - \xi \in M$，

从而

$$\begin{aligned}\beta-\xi&=\beta-\alpha+\alpha-\xi\\&=\beta_1+\beta_2+\alpha-\xi\\&=\beta_2+(\beta_1+\alpha-\xi).\end{aligned}$$

令 $\gamma=\beta_1+\alpha-\xi\in M$，则 $\beta-\xi=\beta_2+\gamma$，γ 随 ξ 变动而变动. 问题转化为 γ 取什么向量时，$\beta_2+\gamma$ 的模取得最小值. 因为 $\beta_2\in M^{\perp}$，所以有 $(\beta_2,\gamma)=0$，从而

$$\begin{aligned}|\beta_2+\gamma|&=\sqrt{(\beta_2+\gamma,\beta_2+\gamma)}\\&=\sqrt{(\beta_2,\beta_2)+2(\beta_2,\gamma)+(\gamma,\gamma)}\\&=\sqrt{(\beta_2,\beta_2)+(\gamma,\gamma)}\geqslant|\beta_2|.\end{aligned}$$

且当 $\gamma=0$ 时，上式等号成立. 为此，只需令 $\xi=\beta_1+\alpha$，就有 $\gamma=0$. 此时 $|\beta-\xi|$ 的最小值为 $|\beta_2|$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.7.

22. 同题目 21 一样，可以借助空间几何模型来理解，比如令 M,N 分别为两个坐标轴 x,y，则 $M+N$ 为 xOy 平面. $(M+N)^{\perp}$ 为 z 轴. 从而 d 可看作是两条空间异面直线的最短距离.

设 ξ,ζ 分别为 $\alpha+M,\beta+M$ 中两个变动的向量，则有 $\alpha-\xi\in M,\beta-\zeta\in N$. 从而 $(\alpha-\xi)-(\beta-\zeta)\in M+N$，有

$$\begin{aligned}\zeta-\xi&=(\alpha-\xi)-(\beta-\zeta)+(\beta-\alpha)\\&=(\alpha-\xi)-(\beta-\zeta)+\beta_1+\beta_2.\end{aligned}$$

令 $\gamma=(\alpha-\xi)-(\beta-\zeta)+\beta_1\in M+N$，则 $\zeta-\xi=\beta_2+\gamma$，γ 随 ξ,ζ 变动而变动. 问题转化为 γ 取什么向量时，$\beta_2+\gamma$ 的模取得最小值. 因为 $\beta_2\in(M+N)^{\perp}$，所以有 $(\beta_2,\gamma)=0$，从而

$$\begin{aligned}|\beta_2+\gamma|&=\sqrt{(\beta_2+\gamma,\beta_2+\gamma)}\\&=\sqrt{(\beta_2,\beta_2)+2(\beta_2,\gamma)+(\gamma,\gamma)}\\&=\sqrt{(\beta_2,\beta_2)+(\gamma,\gamma)}\geqslant|\beta_2|.\end{aligned}$$

且当 $\gamma=0$ 时，上式等号成立. 为此，设 $\beta_1=\beta_{1M}+\beta_{1N}$，其中 $\beta_{1M}\in M,\beta_{1N}\in N$，只需令 $\xi=\beta_{1M}+\alpha,\zeta=\beta_{1N}+\beta$，就有 $\gamma=0$. 此时 $d=\min|\zeta-\xi|=|\beta_2|$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.8.

23. 我们来说明，取固定的 k，对任意整数 l 满足 $0 \leqslant l < k$，都有

$$(P_k(x), x^l) = \int_{-1}^{1} x^l P_k(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^k k!}\int_{-1}^{1} x^l \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^2-1\right)^k \mathrm{d}x = 0.$$

由分别积分可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^l \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^2-1\right)^k \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} x^l \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left(x^2-1\right)^k\right)\\ &= x^l \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left(x^2-1\right)^k\bigg|_{-1}^{1} - l\int_{-1}^{1} x^{l-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left(x^2-1\right)^k \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

上式右边第一项为 0，这是因为 $(x^2-1)^k$ 含有两个 k 重的零点 $-1, 1$，每对 $(x^2-1)^k$ 微分一次，零点的重数减一，微分 $k-1$ 次后这两个零点至少还有 1 重. 对第二项我们可以继续分部积分，其结果与上式类似，不断递推有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^l \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^2-1\right)^k \mathrm{d}x &= -l\int_{-1}^{1} x^{l-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left(x^2-1\right)^k \mathrm{d}x\\ &= (-l)(-(l-1))\int_{-1}^{1} x^{l-2}\frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}x^{k-2}}\left(x^2-1\right)^k \mathrm{d}x\\ &= \cdots\\ &= (-l)(-(l-1))\cdots(-2)(-1)\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{k-l}}{\mathrm{d}x^{k-l}}\left(x^2-1\right)^k \mathrm{d}x\\ &= (-1)^l l!\frac{\mathrm{d}^{k-l-1}}{\mathrm{d}x^{k-l-1}}\left(x^2-1\right)^k\bigg|_{-1}^{1} = 0.\end{aligned}$$

上式说明多项式 $P_k(x)$ 与任何次数低于 k 的 x 的幂正交. 对任意 $0 \leqslant i < j \leqslant n$，由于 $P_i(x) \in \mathbb{R}[x]_{i+1}$ 是 i 次多项式[1]，即可表示为 x 的幂的线性组合，根据内积的线性性质知，$P_i(x)$ 与 $P_j(x)$ 正交. 故由《教程》命题 1.2，题述 Legendre 多项式是 $R[x]_{n+1}$ 的一组正交基.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.9. 注意 Legendre 多项式不是标准的正交基，比如 $P_0(x)$ 的模是 $\sqrt{2}$.

24. $P_k(x)$ 是 k 次多项式是显然的[1]. 我们来证明关于勒让德多项式的如下递推公式

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x).$$

该公式的证明主要源于如下观察：$xP_k(x)$ 是一个 $k+1$ 次多项式，我们可以用 $\mathbb{R}[x]_{k+2}$ 中的勒让德多项式对其线性表示，即

$$xP_k(x) = l_0P_0(x) + l_1P_1(x) + \cdots + l_{k+1}P_{k+1}(x).$$

[1]因为 $P_i(x)$ 是 $2i$ 次多项式的 i 次微分.

其中的系数按照下式计算

$$l_j = \frac{(xP_k(x), P_j(x))}{(P_j(x), P_j(x))}, j = 0, 1, ..., k+1.$$

注意到

$$(xP_k, P_j) = \int_{-1}^{1} xP_k(x)P_j(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} P_k(x)(xP_j(x))\mathrm{d}x = (P_k, xP_j).$$

由题目 23 的证明过程可知，$P_k(x)$ 与任何次数低于 k 的 x 的幂正交，故只要多项式 $xP_j(x)$ 的次数小于 k，上式就立刻为 0. 即当 $j \leqslant k-2$ 时，$l_j = 0$. 从而 $xP_k(k)$ 的表示式至多只有三项

$$xP_k(x) = l_{k-1}P_{k-1}(x) + l_kP_k(x) + l_{k+1}P_{k+1}(x).$$

故只需分别计算 l_{k-1}, l_k, l_{k+1} 即可.

我们先求出 $(P_j(x), P_j(x))$，在计算该内积时，由 $P_j(x)$ 与 x 的幂的正交性，可以将其中一个 $P_j(x)$ 用其本身的 j 次幂项代替，而

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(x^2-1\right)^j = \frac{1}{2^j j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(x^{2j}+\cdots\right) = \frac{1}{2^j j!}\left(\frac{(2j)!}{j!}x^j+\cdots\right).$$

又注意到 $2^j j! = (2j)!!$，故 $P_j(x)$ 的 j 次项其实是 $\frac{1}{2^j j!}\frac{(2j)!}{j!}x^j = \frac{(2j-1)!!}{j!}x^j$，那么

$$(P_j(x), P_j(x)) = \left(P_j(x), \frac{(2j-1)!!}{j!}x^j\right) = \frac{(2j-1)!!}{j!}\left(P_j(x), x^j\right).$$

因此只需计算

$$\left(P_j(x), x^j\right) = \frac{1}{(2j)!!}\int_{-1}^{1} x^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(x^2-1\right)^j \mathrm{d}x.$$

在题目 23 中我们已经演示了对类似形式的积分的处理方法，不断分部积分有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(x^2-1\right)^j \mathrm{d}x &= (-j)\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}x^{j-1}}\left(x^2-1\right)^j \mathrm{d}x \\
&= (-j)(-(j-1))\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{j-2}}{\mathrm{d}x^{j-2}}\left(x^2-1\right)^j \mathrm{d}x \\
&= \cdots \\
&= (-j)(-(j-1))\cdots(-2)(-1)\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^j \mathrm{d}x \\
&= (-1)^j j!\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^j \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^j\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\sin\theta}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2j+1}\theta\mathrm{d}\theta\\ &=2(-1)^j\int_0^{\pi/2}\cos^{2j+1}\theta\mathrm{d}\theta\\ &\xlongequal{\text{Wallis 公式}}2(-1)^j\frac{(2j)!!}{(2j+1)!!}.\end{aligned}$$

故

$$\left(P_j(x),x^j\right)=\frac{1}{(2j)!!}\cdot(-1)^j(j!)\cdot 2(-1)^j\frac{(2j)!!}{(2j+1)!!}=\frac{2(j!)}{(2j+1)!!}.$$

从而有

$$(P_j(x),P_j(x))=\frac{(2j-1)!!}{(j!)}\cdot\frac{2(j!)}{(2j+1)!!}=\frac{2}{2j+1}.$$

再来计算 $(xP_k(x),P_j(x)),j=k-1,k,k+1$.

首先是 $(xP_k(x),P_{k-1}(x))=(P_k(x),xP_{k-1}(x))$，与前面的计算思路相同，取 $xP_{k-1}(x)$ 的 k 次项 $\frac{(2k-3)!!}{(k-1)!}x^k$，按照前面的结果

$$\begin{aligned}(P_k(x),xP_{k-1}(x))&=\left(P_k(x),\frac{(2k-3)!!}{(k-1)!}x^k\right)\\ &=\frac{(2k-3)!!}{(k-1)!}\left(P_k(x),x^k\right)\\ &=\frac{(2k-3)!!}{(k-1)!}\cdot\frac{2(k!)}{(2k+1)!!}\\ &=\frac{2k}{(2k+1)(2k-1)}.\end{aligned}$$

接着是 $(xP_k(x),P_k(x))$，这里 $xP_k(x)$ 是一个 $k+1$ 次多项式，我们在此处引入一个新的观察：“多项式 $xP_k(x)^2$ 是一个奇函数”. 这是因为由 $P_k(x)$ 的定义

$$\begin{aligned}P_k(x)&=\frac{1}{2^kk!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^2-1\right)^k\\ &=\frac{1}{2^kk!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^{2k}+s_1x^{2k-2}+s_2x^{2k-4}+\cdots\right)\\ &=s_0'x^k+s_1'x^{k-2}+s_2'x^{k-4}+\cdots\end{aligned}$$

可以看出 $P_k(x)$ 中 x 的幂总是“隔次”出现，按照多项式乘法不难推知 $P_k(x)^2$ 中只含 x 的偶次幂，从而 $xP_k(x)^2$ 只含 x 的奇数次幂，这说明 $xP_k(x)^2$ 是一个奇函数，故有

$$(xP_k(x),P_k(x))=\int_{-1}^{1}xP_k(x)^2\mathrm{d}x=0.$$

最后是 $(xP_k(x), P_{k+1}(x))$，只需将 $(xP_k(x), P_{k-1}(x))$ 的结果里的 k 替换为 $k+1$ 即可，也就是

$$(xP_k(x), P_{k+1}(x)) = \frac{2(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}.$$

综合上面所有的计算，我们可以得到

$$l_{k-1} = \frac{k}{2k+1}, l_k = 0, l_{k+1} = \frac{k+1}{2k+1}.$$

从而有

$$xP_k(x) = \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x) + \frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x).$$

也即

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x).$$

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.9.

25. 显然解空间 V 的维数 $\dim V = 2n-1$，且一个 V 的一组基为

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (1, 1, 0, ..., 0, 0), \\
\alpha_2 &= (-1, 0, 1, ..., 0, 0), \\
&\cdots \\
\alpha_{2n-2} &= (-1, 0, 0, ..., 1, 0), \\
\alpha_{2n-1} &= (1, 0, 0, ..., 0, 1).
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}^{2n}$. 接下来对上述向量组进行施密特正交化，只需计算前几个向量寻找规律即可（需要一点耐心），有

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= (1, 1, 0, 0, 0..., 0, 0), \\
\varepsilon_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, ..., 0\right), \\
\varepsilon_3 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, ..., 0\right), \\
\varepsilon_4 &= \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, ..., 0\right).
\end{aligned}$$

计算到此处规律已经找到了，显然

$$\varepsilon_i = \left((-1)^{i+1}\frac{1}{i}, (-1)^{i+2}\frac{1}{i}, (-1)^{i+3}\frac{1}{i}, ..., (-1)^{i+i}\frac{1}{i}, 1_{(i+1)\mathrm{th}}, 0, ..., 0\right),$$

$i = 1, 2, ..., 2n-1.$

再进行单位化，可以得到 V 的一组标准正交基.

$$\eta_i=\sqrt{\frac{i}{1+i}}\left((-1)^{i+1}\frac{1}{i},(-1)^{i+2}\frac{1}{i},(-1)^{i+3}\frac{1}{i},...,(-1)^{i+i}\frac{1}{i},1_{(i+1)\mathrm{th}},0,...,0\right).$$

$i=1,2,...,2n-1.$

批注. 本题可参考《指南》第五章例 1.4.

6.2 欧几里得空间中的特殊线性变换

1. **(1)** 对任意 $\alpha,\beta\in V$，由内积的性质以及单位向量 η，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\beta)&=(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)\\&=(\alpha,\beta)-2(\eta,\beta)(\alpha,\eta)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)+4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta)\\&=(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

又因 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换，从而 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换.

(2) 因为 η 是单位向量，我们在 V 中将 η 扩充为一组基，再进行施密特正交化和单位化得到一组标准正交基 $\varepsilon_1(=\eta),\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$，从而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\varepsilon_1&=\varepsilon_1-2(\eta,\varepsilon_1)\eta=\varepsilon_1-2\varepsilon_1=-\varepsilon_1,\\\boldsymbol{A}\varepsilon_i&=\varepsilon_i-2(\eta,\varepsilon_i)\eta=\varepsilon_i(i=2,3,...,n).\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

A 的行列式 $|A|=-1$，从而 $\boldsymbol{A}$ 是第二类正交变换.

(3) $\boldsymbol{A}^2$ 在 **(2)** 中给定基下的矩阵为 $A^2=E$，从而 $\boldsymbol{A}^2$ 是单位变换.

(4) 对任意第二类正交变换 $\boldsymbol{B}$ 和任意镜面反射 $\boldsymbol{A}$，设线性变换 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，由《教程》命题 2.2，$\boldsymbol{A}^{-1}\in O(n)$，进而 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\in O(n)$，而 $\boldsymbol{B}_1$ 在 **(2)** 中给定基下的矩阵为 $B_1=A^{-1}B$，且 $|B_1|=|A^{-1}B|=|A|^{-1}|B|=1$，从而 $\boldsymbol{B}_1$ 是第一类正交变换.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.1.

2. 按题设 $\dim V_{\lambda_0}=n-1$，从而其正交补的维数为 $\dim V_{\lambda_0}^{\perp}=1$. 取 V_{λ_0} 和 $V_{\lambda_0}^{\perp}$ 各自的一组标准正交基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{n-1}$ 和 ε_n，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 构成 V 的一组标准正交基. 而 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 V_{λ_0} 总是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，又因 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换，由《教程》命题 2.5 知其正交补 $V_{\lambda_0}^{\perp}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间. 故 $\boldsymbol{A}\varepsilon_n\in V_{\lambda_0}^{\perp}=L(\varepsilon_n)$，从而存在 $\lambda_1\in\mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{A}\varepsilon_n=\lambda_1\varepsilon_n$，即 λ_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且 ε_n 是属于 λ_1 的特征向量. 由《教程》命题 2.3 的推论 1 知 $|\lambda_1|=\pm1$. 显然 $\lambda_1\neq1$（否则有 $\varepsilon_n\in V_{\lambda_0}\cap V_{\lambda_0}^{\perp}=\{0\}$，即 $\varepsilon_n=0$，这与 ε_n 是 $V_{\lambda_0}^{\perp}$ 的一组基矛盾）. 故 $\lambda_1=-1$. 现在对任意 $\alpha\in V$，设 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$，则显然 $(\varepsilon_n,\alpha)=a_n$，进而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\alpha&=a_1\boldsymbol{A}\varepsilon_1+a_2\boldsymbol{A}\varepsilon_2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}\varepsilon_n\\&=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}-a_n\varepsilon_n\\&=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}+a_n\varepsilon_n-2a_n\varepsilon_n\\&=\alpha-2(\varepsilon_n,\alpha)\varepsilon_n.\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 是一个镜面反射.

3. 必要性，若存在一个正交变换 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{A}\alpha_i=\beta_i$，则对任意 $i,j=1,2,...,s$，有 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\boldsymbol{A}\alpha_i,\boldsymbol{A}\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$.

充分性，若对任意 $i,j=1,2,...,s$ 都有 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$，则不妨设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的一个极大线性无关部分组为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$，我们通过说明 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 的三个“一致性”作为铺垫，最终证明命题.

(i) 极大线性无关部分组一致. $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 也是 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 的一个极大线性无关部分组.

设方阵 $D_1=((\alpha_i,\alpha_j))_{1\leqslant i,j\leqslant r},D_2=((\beta_i,\beta_j))_{1\leqslant i,j\leqslant r}$，由 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$ 知 $D_2=D_1$. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 线性无关，根据第 1 节题目 15 的结论可知，$|D_1|\neq0$，从而 $|D_2|\neq0$，故 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 线性无关. 按同样的手法，由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,\alpha_{r+k}(k=1,2,...,s-r)$ 线性相关可推得 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r,\beta_{r+k}(k=1,2,...,s-r)$ 也线性相关. 故 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 确实是一个极大线性无关部分组.

(ii) 表法一致. 若 $\alpha_{r+k}=a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\cdots+a_{kr}\alpha_r(k=1,2,..,n-r),\beta_{r+k}=b_{k1}\beta_1+b_{k2}\beta_2+\cdots+b_{kr}\beta_r(k=1,2,..,n-r)$，则 $a_{ki}=b_{ki}(i=1,2,...,r,k=1,2,...,s-r)$（即两个向量组在各自基下的表法相同）.

对某个固定的 k，我们对 $\alpha_{r+k}=a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\cdots+a_{kr}\alpha_r$ 两边同时

取与 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 的内积，得到如下关于 $a_{k1},a_{k2},...,a_{kr}$ 的线性方程组

$$\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_1)a_{k1}+(\alpha_1,\alpha_2)a_{k2}+\cdots+(\alpha_1,\alpha_r)a_{kn}=(\alpha_1,\alpha_{r+k}),\\(\alpha_2,\alpha_1)a_{k1}+(\alpha_2,\alpha_2)a_{k2}+\cdots+(\alpha_2,\alpha_r)a_{kn}=(\alpha_2,\alpha_{r+k}),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\(\alpha_r,\alpha_1)a_{k1}+(\alpha_r,\alpha_2)a_{k2}+\cdots+(\alpha_r,\alpha_r)a_{kn}=(\alpha_r,\alpha_{r+k}).\end{cases}$$

如果设 $X=(a_{k1},a_{k2},...,a_{kr})',C_1=((\alpha_1,\alpha_k),(\alpha_2,\alpha_{r+k}),...,(\alpha_r,\alpha_{r+k}))'$，则上述方程等价于 $D_1X=C_1$. 同理对 $\beta_{r+k}=b_{k1}\beta_1+b_{k2}\beta_2+\cdots+b_{kr}\beta_r$ 两边同时取与 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 的内积，设 $Y=(b_{k1},b_{k2},...,b_{kr})',C_2=((\beta_1,\beta_k),(\beta_2,\beta_{r+k}),...,(\beta_r,\beta_{r+k}))'$ 也可以得到类似的方程 $D_2Y=C_2$，因为 $D_1=D_2$ 且由 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$ 也可知 $C_1=C_2$，所以 $D_1X=C_1$ 和 $D_2Y=C_2$ 实际上是同一个方程，故它们的解相同，即 $a_{ki}=b_{ki}(i=1,2,...,r)$.

(iii) 正交单位化过程一致. 将 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 分别进行施密特正交化,再进行单位化,可得到子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r)$ 和 $L(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r)$ 各自的标准正交基，分别为 $p_1,p_2,...,p_r$ 和 $q_1,q_2,...,q_r$，我们设该过程的过渡矩阵为 T_1,T_2，即

$$(p_1,p_2,...,p_r)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r)T_1,$$
$$(q_1,q_2,...,q_r)=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r)T_2.$$

因为 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$，可以推知有 $T_1=T_2$，我们在批注 1 中阐述这一点.

（上述的 **(iii)** *仅仅是为了后面证明* $\boldsymbol{A}$ *是正交变换，如果不用此条性质，也可改用其他方法，请参考批注 2）*

基于以上三点，现在将标准正交基 $p_1,p_2,...,p_r$ 和 $q_1,q_2,...,q_r$ 分别扩充为 V 的一组标准正交基 $p_1,p_2,...,p_r,p_{r+1},...,p_n$ 和 $q_1,q_2,...,q_r,q_{r+1},...,q_n$，显然此时 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,p_{r+1},...,p_n$ 也是 V 的一组基. 定义线性变换 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{A}\alpha_i=\beta_i(i=1,2,...,r),\boldsymbol{A}p_j=q_j(j=r+1,r+2,...,n)$（由《教程》第四章命题 3.6 知这样的线性变换是唯一存在的）. 此时我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(p_1,p_2,...,p_r)&=\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r)T_1\\&=(\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,...,\boldsymbol{A}\alpha_r)T_1\\&=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r)T_2\\&=(q_1,q_2,...,q_r).\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 将 V 的一组标准正交基变为另一组标准正交基，由《教程》命题 2.1 知 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换. 同时，设 $\alpha_{r+k}=a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\cdots+a_{kr}\alpha_r(k=1,2,...,s-r)$，

则按表法一致性 $\boldsymbol{A}\alpha_{r+k} = a_{k1}\beta_1 + a_{k2}\beta_2 + \cdots + a_{kr}\beta_r = \beta_{r+k}(k = 1, 2, ..., s - r)$. 即 $\boldsymbol{A}\alpha_i = \beta_i, i = 1, 2, ..., s$.

批注 1. 关于 **(iii)**，原向量组到单位正交向量组的过渡矩阵实际上只和原向量组的向量之间的内积有关. 这是因为由施密特正交化过程可知，正交向量组的向量被表示成原向量组的线性组合，且系数只依赖于原向量组的向量之间的内积，而单位化只需对正交向量除以它自身的模，显然这些模也只依赖于由施密特正交化决定的系数和原向量组的向量之间的内积. 按题设 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$，说明两组向量的内积是对应相等的，$T_1, T_2$ 自然相同. 在此我们通过演示 $r = 3$ 的情况来简要说明，$r > 3$ 的情况并无本质区别.

$$\begin{aligned}
&p_1 = \alpha_1, && q_1 = \beta_1,\\
&p_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, p_1)}{(p_1, p_1)}p_1, && q_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, q_1)}{(q_1, q_1)}q_1,\\
&p_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, p_1)}{(p_1, p_1)}p_1 - \frac{(\alpha_3, p_2)}{(p_2, p_2)}p_2, && q_3 = \beta_3 - \frac{(\beta_3, q_1)}{(q_1, q_1)}q_1 - \frac{(\beta_3, q_2)}{(q_2, q_2)}q_2.
\end{aligned}$$

显然上面左右两栏各向量的系数总是按如下方式联系着:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{(\alpha_2, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = \frac{(\beta_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} = \frac{(\beta_2, q_1)}{(q_1, q_1)},\\
t_2 &= \frac{(\alpha_3, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{(\alpha_3, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = \frac{(\beta_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} = \frac{(\beta_3, q_1)}{(q_1, q_1)},\\
t_3 &= \frac{(\alpha_3, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{(\alpha_3, \alpha_2 - t_1 p_1)}{(\alpha_2 - t_1 p_1, \alpha_2 - t_1 p_1)} = \frac{(\alpha_3, \alpha_2 - t_1\alpha_1)}{(\alpha_2 - t_1\alpha_1, \alpha_2 - t_1\alpha_1)}\\
&= \frac{(\beta_3, \beta_2 - t_1\beta_1)}{(\beta_2 - t_1\beta_1, \beta_2 - t_1\beta_1)} = \frac{(\beta_3, q_2)}{(q_2, q_2)}.
\end{aligned}$$

从而各系数都相同，因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 p_1, p_2, p_3 的表法和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示 p_1, p_2, p_3 的表法必然相同，重新写为

$$\begin{aligned}
&p_1 = \alpha_1, && q_1 = \beta_1,\\
&p_2 = u_{21}\alpha_1 + \alpha_2, && q_2 = u_{21}\beta_1 + \beta_2,\\
&p_3 = u_{31}\alpha_1 + u_{32}\alpha_2 + \alpha_3, && q_2 = u_{31}\beta_1 + u_{32}\beta_2 + \beta_3.
\end{aligned}$$

如果再进行单位化，则

$$\begin{aligned}
|p_1| &= |\alpha_1| = \sqrt{(\alpha_1, \alpha_1)} = \sqrt{(\beta_1, \beta_1)} = |\beta_1| = |q_1|,\\
|p_2| &= |u_{21}\alpha_1 + \alpha_2| = \sqrt{(u_{21}\alpha_1 + \alpha_2, u_{21}\alpha_1 + \alpha_2)}\\
&= \sqrt{(u_{21}\beta_1 + \beta_2, u_{21}\beta_1 + \beta_2)} = |q_2|,\\
|p_3| &= |u_{31}\alpha_1 + u_{32}\alpha_2 + \alpha_3| = \sqrt{(u_{31}\alpha_1 + u_{32}\alpha_2 + \alpha_3, u_{31}\alpha_1 + u_{32}\alpha_2 + \alpha_3)}\\
&= \sqrt{(u_{31}\beta_1 + u_{32}\beta_2 + \beta_3, u_{31}\beta_1 + u_{32}\beta_2 + \beta_3)} = |q_3|.
\end{aligned}$$

从而这三个向量的模也是相等的. 单位化（除以模）之后各向量系数依然保持对应相等，说明过渡矩阵 $T_1 = T_2$.

批注 2. 证明 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换时如果不希望采用以上思路，可以改用如下方法进行说明，依然采用上述解答中的相关记号和定义，因为 $L(p_{r+1},...,p_n) = L(\alpha_1,...,\alpha_r)^{\perp}, L(q_{r+1},...,q_n) = L(\beta_1,...,\beta_r)^{\perp}$，可以知道

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{A}\alpha_i, \boldsymbol{A}\alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = (\alpha_i, \alpha_j);\\
(\boldsymbol{A}\alpha_i, \boldsymbol{A}p_m) = (\beta_i, q_m) = 0 = (\alpha_i, p_m);\\
(\boldsymbol{A}p_m, \boldsymbol{A}p_l) = (q_m, q_l) = \delta_{ml} = (p_m, p_l).\\
i, j = 1, 2, ..., r; \quad m, l = r+1, r+2, ..., n.
\end{gathered}
$$

所以线性变换 $\boldsymbol{A}$ 作用在 V 的一组基上时保持内积不变，再根据内积的双线性性质，可进一步说明对任意 $\alpha, \beta \in V$，其中 $\alpha = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \cdots + s_r\alpha_r + s_{r+1}p_{r+1} + \cdots + s_np_n, \beta = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_r\alpha_r + t_{r+1}p_{r+1} + \cdots + t_np_n$，有 $(\boldsymbol{A}\alpha, \boldsymbol{A}\beta) = (\alpha, \beta)$. 从而说明 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换. 这种方法不需要使用上面的 **(iii)**.

4. 取由单位向量 $\eta = \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}$ 决定的镜面反射，则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\alpha - \beta &= \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta - \beta\\
&= \alpha - \beta - 2\left(\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}, \alpha\right)\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}\\
&= (\alpha-\beta)\left(1 - \frac{2(\alpha-\beta, \alpha)}{|\alpha-\beta|^2}\right)\\
&= (\alpha-\beta)\frac{(\alpha-\beta, \alpha-\beta) - 2(\alpha-\beta, \alpha)}{(\alpha-\beta, \alpha-\beta)}\\
&= (\alpha-\beta)\frac{(\alpha-\beta, -\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta, \alpha-\beta)}\\
&= (\alpha-\beta)\frac{(\beta, \beta) - (\alpha, \alpha)}{(\alpha-\beta, \alpha-\beta)}.
\end{aligned}
$$

因为 α, β 都是单位向量，有 $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 1$，故上式 $= 0$. 即 $\boldsymbol{A}\alpha = \beta$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.2.

5. 为了解释清楚本题的思路的来龙去脉，在开始解答之前，我们先来从几何意义上更准确地认识一下什么是镜面反射. 考虑三维几何空间 $\mathbb{R}^3$，取定坐标系 $Oxyz$，设 $\boldsymbol{H}$ 由 z 轴的单位向量 $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ 决定的镜面反射，则对任

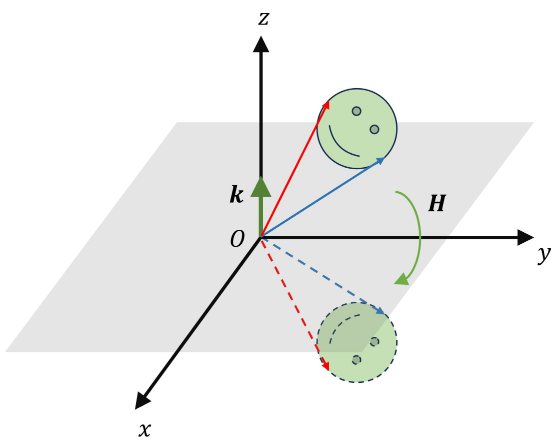


图 6.1: 镜面反射示意图

意向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$，有 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{k},\boldsymbol{a})\boldsymbol{k}=(a_1,a_2,-a_3)$. 这说明 $\boldsymbol{H}$ 的作用其实是将空间中的向量变换为它关于 xOy 面对称的向量，正如一面在 xOy 面上的镜子，把在镜子前的物体映射为镜子中的像（如图6.1所示），故 $\boldsymbol{H}$ 也可称为镜像变换（或豪斯霍尔德变换），当然，除了这种镜像的观点外，也可以解释为入射光线向量到反射光线向量的变换，这是“镜面反射”一词的根本含义，两者是等价的.

我们将上述的几何直观转化为线性空间的语言，可以看出上述的 xOy 平面实际上就是 $L(\boldsymbol{k})$（即 z 轴）的正交补空间，$\boldsymbol{H}$ 将向量在 z 轴上的垂直分量变为其相反向量，而保持其在 xOy 平面上的水平分量不变. 基于此我们可以得到关于镜面反射的直接刻画：

引理 1 设 α 为欧氏空间 V 上的一个非零向量，$\boldsymbol{H}\in\mathrm{End}(V)$，则 $\boldsymbol{H}$ 是由单位向量 $\alpha/|\alpha|$ 决定的镜面反射的充分必要条件是 $\boldsymbol{H}\alpha=-\alpha$，并且对于任意 $\beta\in L(\alpha)^{\perp}$，$\boldsymbol{H}\beta=\beta$.

证明：必要性显然，只证充分性. 设 $\eta=\alpha/|\alpha|$，那么 $L(\alpha)=L(\eta)$，且 $V=L(\eta)\oplus L(\eta)^{\perp}$，对 V 内的任意向量 ξ，设 $\xi=\xi_1+\xi_2,\xi_1\in L(\eta),\xi_2\in L(\eta)^{\perp}$，则显然有 $\xi_1=k\eta$，$\boldsymbol{H}\xi_1=-\xi_1,\boldsymbol{H}\xi_2=\xi_2,(\eta,\xi)=(\eta,\xi_1)$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\xi=\boldsymbol{H}(\xi_1+\xi_2)&=-\xi_1+\xi_2=\xi_1+\xi_2-2\xi_1\\&=\xi-2(\eta,\eta)k\eta=\xi-2(\eta,k\eta)\eta=\xi-2(\eta,\xi_1)\eta\\&=\xi-2(\eta,\xi)\eta.\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{H}$ 是由 η 决定的镜面反射. ■

这个命题告诉我们，对于一个镜面反射 $\boldsymbol{H}$，线性空间 V 总是表示被成了两个 $\boldsymbol{H}$ 的不变子空间的直和，并且这两个子空间互为正交补，其中一

个为 1 维子空间 $L(\eta)$，$\boldsymbol{H}|_{L(\eta)} = -\boldsymbol{E}$，另一个为 $n-1$ 维子空间 $L(\eta)^{\perp}$，$\boldsymbol{H}|_{L(\eta)^{\perp}} = \boldsymbol{E}$. 也就是说 $\boldsymbol{H}$ 仅仅是在一个“局部”[2]一维子空间起一个负号作用，对这个“局部”以外的正交补空间只保持原本向量不变.

与此同时，上面的命题允许我们对一个低维空间内的镜面反射补充定义扩张到高维空间，成为高维空间的镜面反射，只需要定义其在“局部”以外的正交补空间的作用是保持向量不变即可，我们有：

引理 2 设欧氏空间 $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$，其中 V_1 是一个非平凡的子空间，$\boldsymbol{H}_1$ 是 V_1 内的镜面反射，则存在一个线性变换 $\boldsymbol{H}$，满足

$$\boldsymbol{H}\alpha = \begin{cases} \boldsymbol{H}_1\alpha, \alpha \in V_1; \\ \alpha, \alpha \in V_1^{\perp}. \end{cases}$$

且 $\boldsymbol{H}$ 是 V 内的镜面反射.

证明：注意到命题要求寻找的 $\boldsymbol{H}$ 在 V 的一组基上的作用已经被命题指定了，可以验证由这些作用确定出来的线性变换与 $\boldsymbol{H}$ 原本的要求无矛盾，故存在性得证. 因为 $\boldsymbol{H}_1$ 是镜面反射，故由引理 1，存在 V_1 内的一维子空间 V_{11}，以及 V_{11} 在 V_1 内的正交补空间 V_{12}，使得 $\boldsymbol{H}_1|_{V_{11}} = -\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}_1|_{V_{12}} = \boldsymbol{E}$. 因为 $V_{11} \subseteq V_1$，所以 $V_1^{\perp}$ 内的向量与 V_{11} 的向量均正交，故容易证明 V_{11} 在 V 内的正交补 $V_{11}^{\perp} = V_{12} \oplus V_1^{\perp}$，从而根据 $\boldsymbol{H}$ 的定义，有

$$\boldsymbol{H}\alpha = \begin{cases} \alpha, \alpha \in V_{11}^{\perp}; \\ -\alpha, \alpha \in V_{11}. \end{cases}$$

因此由引理 1，$\boldsymbol{H}$ 在 V 内是镜面反射. ■

说明上述两个引理的目的主要在于构建对镜面反射最基本的几何直觉，有助于帮助我们更好地理解原题目解答的思路.

让我们回到原题，需要证明正交变换是若干个镜面反射的乘积. 利用数学归纳法. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维线性空间 V 内一正交变换. 当 $n=1$ 时，$V = L(\eta)$，其中 η 是 V 内的单位向量，显然此时 V 只有一个镜面反射 $\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{E}$. 现在设 $\boldsymbol{A}\alpha = b\alpha$，取模有 $|\boldsymbol{A}\alpha| = |\alpha| = |b||\alpha|$，假定 $\alpha \neq 0$，则有 $|b| = 1$. 若 $b=1$，则 $\boldsymbol{A}\alpha = \alpha$，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$，那么 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}^2$，若 $b=-1$，则 $\boldsymbol{A}\alpha = -\alpha$，即 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E}$，那么 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}$. 从而命题成立.

现假设当 $n = k-1$ 时命题成立，要证明当 $n = k$ 时命题也成立. 先来厘清大致证明思路，既然我们打算用数学归纳法，我们会希望在 V 内找到 $\boldsymbol{A}$ 的一个非平凡的不变子空间 M，然后就可以对 $\boldsymbol{A}|_M$ 运用归纳假设.

这个不变子空间 M 当然总是有的（第四章第 3 节题目 19），但是接下来会发现，不是所有不变子空间都能完成证明，我们其实需要找到一个

[2]这只是个朴素的说法，并非几何学意义上所说的局部.

特别的 M，目前尚不清楚是哪个，不妨先随便指定出一个 M，我们得到 $\boldsymbol{A}|_M = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l$，其中每个 $\boldsymbol{H}_i$ 都是定义在 M 内的镜面变换.

此时该如何去说明 $\boldsymbol{A}$ 也是一系列 V 内的镜面反射的乘积呢？有了前面的几何直觉，我们自然会想到引理 2，将所有的 $\boldsymbol{H}_i$ 在 $M^\perp$ 补充定义，将它们扩张成 V 的镜面反射，这样如果在 $M^\perp$ 内，$\boldsymbol{A}$ 本身的作用和被扩张后的 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l$ 的作用相等，那就可以了. 但这当然是不一定成立的，由引理 2，$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l$ 在 $M^\perp$ 的作用其实就是 $\boldsymbol{E}$，而 $\boldsymbol{A}|_{M^\perp}$ 显然不一定是 $\boldsymbol{E}$，这就迫使我们不能任意地寻找不变子空间 M，而应寻找 M，使得 $\boldsymbol{A}|_{M^\perp} = \boldsymbol{E}$ 成立.

什么样的不变子空间 M 会满足这样的性质？显然，要使 $\boldsymbol{A}|_{M^\perp} = \boldsymbol{E}$，最简单就是令 $M^\perp$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_0 = 1$ 的特征子空间 V_{λ_0}，即 $M = V_{\lambda_0}^\perp$，因此，只要 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1，问题其实就解决了. 那如果 $\boldsymbol{A}$ 没有特征值 1 会如何？这是本题中的一个难点所在，此时我们会找到一个镜面反射 $\boldsymbol{H}_0$，使得 $\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{A}$ 作为一个正交变换有特征值 1，从而运用上述推理将 $\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{A}$ 分解成若干个镜面反射的乘积，最后只需要在等式两边左乘上 $\boldsymbol{H}_0^{-1}$ 即可.

下面我们依照上述思路继续完成证明，分两种情况讨论：

(i) 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_0 = 1$，则取令 $N = V_{\lambda_0}$，由《教程》命题 2.5 知 $M = N^\perp$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，且 $\dim M = k-1$，故由归纳假设，有 $\boldsymbol{A}|_M = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l$，其中每个 $\boldsymbol{H}_i$ 都是定义在 M 内的镜面变换，按照引理 2，我们可以将所有 $\boldsymbol{H}_i$ 扩张为 V 的镜面反射[3]，并且满足当 $\alpha \in M^\perp$ 时，有

$$\boldsymbol{H}_i\alpha = \alpha, i = 1, 2, ..., l.$$

从而有

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l\alpha = \alpha, \alpha \in N.$$

而当 $\alpha \in M^\perp$ 时，α 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 1 的特征向量，从而有 $\boldsymbol{A}\alpha = \alpha$，故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l$ 在 M 和 $M^\perp$ 的限制分别对应相同，那么任取 $\beta \in V$，设 $\beta = \beta_1 + \beta_2, \beta_1 \in M, \beta_2 \in M^\perp$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\beta &= \boldsymbol{A}(\beta_1 + \beta_2) = \boldsymbol{A}\beta_1 + \boldsymbol{A}\beta_2 \\
&= \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l\beta_1 + \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l\beta_2 \\
&= \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l(\beta_1 + \beta_2) \\
&= \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l\beta.
\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l$. 命题成立.

[3] 为了简明起见，我们用依然同一个符号 $\boldsymbol{H}_i$ 表示扩张后的镜面反射.

(ii) 若 $\boldsymbol{A}$ 没有特征值 1，则取一个 V 中的一个单位向量 ε，设 $\boldsymbol{A}\varepsilon=\eta$，则取模知 $|\eta|=1$，η 也是单位向量，并且 $\eta\neq\varepsilon$（否则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1），现在由本节题目 4 的结论，V 内存在一个镜面反射 $\boldsymbol{H}_0$ 使得 $\boldsymbol{H}_0\eta=\varepsilon$，从而有 $\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{A}\varepsilon=\varepsilon$，故正交变换 $\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{A}$ 有特征值 1，ε 是其特征向量，从而根据 **(i)**，存在 V 内的镜面反射 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,...,\boldsymbol{H}_l$ 使得

$$\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l.$$

因为 $\boldsymbol{H}_0^{-1}=\boldsymbol{H}_0$，从而有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\cdots\boldsymbol{H}_l.$$

命题成立.

根据数学归纳法，原命题对所有的正整数 n 都成立，得证.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.3.

6. 只需说明 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换即可. 对于任意 $\alpha,\beta\in V,\lambda,\mu\in K$，我们设向量 $\gamma=\lambda\alpha+\mu\beta$，由

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta,\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta)\\
=&(\boldsymbol{A}\gamma,\boldsymbol{A}\gamma)-\lambda(\boldsymbol{A}\gamma,\boldsymbol{A}\alpha)-\mu(\boldsymbol{A}\gamma,\boldsymbol{A}\beta)\\
&-\lambda(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\gamma)+\lambda^2(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\alpha)+\lambda\mu(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\beta)\\
&-\mu(\boldsymbol{A}\beta,\boldsymbol{A}\gamma)+\lambda\mu(\boldsymbol{A}\beta,\boldsymbol{A}\alpha)+\mu^2(\boldsymbol{A}\beta,\boldsymbol{A}\beta)\\
=&(\gamma,\gamma)-\lambda(\gamma,\alpha)-\mu(\gamma,\beta)\\
&-\lambda(\alpha,\gamma)+\lambda^2(\alpha,\alpha)+\lambda\mu(\alpha,\beta)\\
&-\mu(\beta,\gamma)+\lambda\mu(\beta,\alpha)+\mu^2(\beta,\beta)\\
=&(\gamma-\lambda\alpha-\mu\beta,\gamma-\lambda\alpha-\mu\beta)=0.
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta=0$，即 $\boldsymbol{A}(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda\boldsymbol{A}\alpha+\mu\boldsymbol{A}\beta$，从而 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换，同时也是正交变换.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.4.

7. $\boldsymbol{B}\in O(n)\Rightarrow\boldsymbol{B}^{-1}\in O(n)$，故对任意 $\alpha\in V$，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\alpha&=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}\alpha-2(\eta,\boldsymbol{B}\alpha)\eta)\\
&=\alpha-2(\eta,\boldsymbol{B}\alpha)\boldsymbol{B}^{-1}\eta\\
&=\alpha-2(\boldsymbol{B}^{-1}\eta,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\alpha)\boldsymbol{B}^{-1}\eta.\\
&=\alpha-2(\boldsymbol{B}^{-1}\eta,\alpha)\boldsymbol{B}^{-1}\eta.
\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}$ 是由 $\boldsymbol{B}^{-1}\eta$ 决定的镜面反射.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.1.

8. 由题意有

$$f(\alpha,\beta)=(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta)=(\alpha,\beta)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta).$$

故对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in V,k_1,k_2\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)&=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)-2(\eta,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)(\eta,\beta)\\&=k_1(\alpha_1,\beta)+k_2(\alpha_2,\beta)-2(k_1(\eta,\alpha_1)+k_2(\eta,\alpha_2))(\eta,\beta)\\&=k_1((\alpha_1,\beta)-2(\eta,\alpha_1)(\eta,\beta))+k_2((\alpha_1,\beta)-2(\eta,\alpha_2)(\eta,\beta))\\&=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta).\end{aligned}$$

并且显然 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$. 故 $f(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数.

9. **(1)** 我们求出 A 的特征多项式的根，令 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)=0$，有

$$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\lambda_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

这三个根分别对应于 $(\lambda E-A)X=0$ 的三个复数解为

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

取向量 $X_1,\mathrm{Re}(X_3),\mathrm{Im}(X_3)$，[4]容易看出它们已经相互正交，对它们单位化并排成矩阵，可得

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\end{pmatrix}.$$

此时

$$J=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\0&\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}.$$

[4] $\mathrm{Re}(z)$ 和 $\mathrm{Im}(z)$ 分别表示 z 的实部和虚部（系数），下同.

(2) 求 A 的特征多项式的根，令 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$，有

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=\mathrm{i},\lambda_4=-\mathrm{i}.$$

这四个根分别对应于 $(\lambda E-A)X=0$ 的四个复数解是

$$X_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

取向量 $X_1,X_2,\mathrm{Re}(X_4),\mathrm{Im}(X_4)$，对它们单位化并排成矩阵

$$T=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}.$$

此时

$$J=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\0&0&\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}.$$

10. 给定欧氏空间 V 的任意一组基，设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 在这组基下的矩阵分别为 A_1 和 A_2，α,β 在这组基下的坐标分别为 X,Y，内积在这组基下的度量矩阵为 G，则有

$$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(A_1X)'GY=X'(A_1'G)Y;$$
$$(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=X'G(A_2Y)=X'(GA_2)Y.$$

现在这两个对称双线性函数相等，那么它们在这组基下的矩阵也相同，即 $A_1'G=GA_2$，当取这组基为标准正交基时，$G=E$，就有 $A_1'=A_2$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.7.

11. **(1)** 给定 V 的一组标准正交基，对任意线性变换 $\boldsymbol{A}$，设其在这组基下的矩阵为 A，考虑线性变换 $\boldsymbol{B}$，使得它在这组基下的矩阵为 A'，设 α,β 在这组基下的坐标分别为 X,Y，则有

$$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(AX)'Y=X'A'Y=X'(A'Y)=(\alpha,\boldsymbol{B}\beta).$$

从而 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的共轭变换. 根据本节题目 10 知 $\boldsymbol{A}$ 的任意共轭变换在该组基下的矩阵都是 A'，又因为在一组基下，矩阵可以唯一决定出一个线性变换，所以共轭变换是唯一的. 同时根据内积的性质知

$$(\boldsymbol{A}^*\beta,\alpha)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\beta,\boldsymbol{A}\alpha).$$

即有 $(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{A}^*$.

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in V$，有：充分性，当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$ 时，$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)$，则 $\boldsymbol{A}$ 是对称变换. 必要性，若 $\boldsymbol{A}$ 是对称变换，即 $(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)$，由共轭变换的定义及 **(1)** 中的唯一性知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$.

12. 由本节题目 11**(2)**，只需证明 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*$. 事实上对任意线性变换 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，都有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$，这是因为 $((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\alpha,\beta)=(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)+(\boldsymbol{B}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)+(\alpha,\boldsymbol{B}^*\beta)=(\alpha,(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*)\beta)$. 从而由本节题目 11**(1)**，知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{A}^*+(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*$.

13. **(1)** 设 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的某组标准正交基下的矩阵为 A，若 $\boldsymbol{A}$ 是反对称变换，即 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}$，则由本节题目 10 的结论可知，取等式两边的变换在该组基下的矩阵有，$A'=-A$，即 A 是反对称矩阵. 反之，若 A 为反对称矩阵，即 $A'=-A$，因为在取定基下矩阵能唯一决定 V 中的线性变换，故有 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 是反对称变换.

(2) 由题意有任意 $\alpha\in M,\beta\in M^\perp$，因 $\boldsymbol{A}\alpha\in M$，有

$$0=(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\boldsymbol{A}\beta).$$

从而 $(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=0$，即 $\boldsymbol{A}\beta\in M^\perp$. 这说明 $M^\perp$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.

14. **(1)** $|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$，对应的正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix}1/3&2/3&2/3\\2/3&1/3&-2/3\\2/3&-2/3&1/3\end{pmatrix}.$$

(2) $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，对应的正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&-\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac23\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix}.$$

(3) $|\lambda E-A|=(\lambda+5)(\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-5)$，对应的正交矩阵

$$T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) $|\lambda E-A|=(\lambda+4)^3(\lambda-8)$，对应的正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(5) $|\lambda E-A|=\lambda^3(\lambda-4)$，对应的正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

15. 设 f 经正交线性变数替换 $X=TY$ 变为标准型，则有

(1) $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，标准形 $f=-y_1^2+2y_1^2+5y_3^2$.

(2) $T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

(3) $T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，标准形 $f=-y_1^2-y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

(4) $T=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2\\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$，标准形 $f=-3y_1^2-y_2^2+3y_3^2+7y_4^2$.

(5) 由第五章第 2 节题目 5**(2)** 解答中开头的变换有，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right).$$

由此该题化为《教程》本章例 2.3. 本题中的 T 正是例 2.3 中的 T，标准形为 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.

批注. 本题中 **(5)** 的二次型（及其等价形式）已在《教程》中四次提及，分别为第五章第 2 节题目 5**(2)**，第五章第 4 节题目 9，第六章例 2.3，以及本题. 从形式上来看，这几乎就是统计学中的样本方差，因此对这个二次型的处理可能会在一些具体问题中产生应用价值.

16. 设由 A 决定的实二次型为 $f=X'AX, X\in\mathbb{R}^n$. 首先由《教程》命题 2.7 知，实对称矩阵的特征多项式的根皆为实数，从而都是实矩阵 A 的特征值.

充分性，若 A 的特征值都大于 0，由《教程》定理 2.3，存在正交线性变数替换 $X=TZ$ 使得 f 化为标准形

$$f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_nz_n^2.$$

其中 $\lambda_i, i=1,2,...,n$ 恰是 A 的特征值，从而 $\lambda_i>0$. 故可再行可逆线性变数替换 $z_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}y_i, i=1,2,...,n$ 使得 f 化为规范性

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

从而其正惯性指数 p 和秩 r 都等于变量数 n，f 是正定的.

必要性，若 A 正定，则由《教程》第五章命题 4.1，对任意向量 $X\in\mathbb{R}^n$，且 $X\neq 0$，都有 $f=X'AX>0$. 对 A 的任一特征值 λ_i，设 A 的属于该特征值的特征向量为 $X_i=(x_1,x_2,...,x_n)'\in\mathbb{R}^n$，则有

$$f|_{X_i}=X_i'AX_i=X_i'(\lambda_iX_i)=\lambda_iX_i'X_i=\lambda_i(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)>0.$$

从而 $\lambda_i>0$.

批注. 证明必要性时，除了上述思路，也可以考虑在标准形

$$f=Z'DZ=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_nz_n^2$$

中分别取 Z 为 $\mathbb{R}^n$ 的单位坐标向量，这两种思路本质上是相同的.

将本题证明的论述稍加修改可以知道，若 A 是实对称矩阵，A 半正定的充分必要条件是 A 的所有特征值都大于或等于 0. 对 A 负定和半负定也有相类似的结论.

17. 必要性由《教程》第四章命题 4.1 立得. 下证充分性，设 A, B 的特征多项式相同，由《教程》命题 2.7 知，实对称矩阵的特征多项式的根皆为实数，则 A, B 的特征值正是特征多项式的根，从而 A, B 的特征值都相同. 由《教程》定理 2.2 的推论知，存在正交矩阵 T_1, T_2，使得

$$T_1^{-1}AT_1 = D_1, T_2^{-1}BT_2 = D_2.$$

其中 D_1, D_2 都是对角形，其对角线上的元素都是 A（或 B）的特征值. 显然 D_1, D_2 对角线上的元素仅仅是位置不同，故存在一系列 n 阶（第二类）初等矩阵 $P_1, P_2, ..., P_m$，每个 P_k 都是集合 $\{P_n(i,j)|1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 中的一个元素且 $P_k^{-1} = P_k$，使得

$$(P_1P_2 \cdots P_m)^{-1}D_1(P_1P_2 \dots P_m) = D_2.$$

令 $T_3 = P_1P_2 \cdots P_m$，显然 P_k 总是正交矩阵，则 T_3 也是正交矩阵. 从而有

$$(T_1T_3T_2^{-1})^{-1}A(T_1T_3T_2^{-1}) = B.$$

因为 T_1, T_2, T_3 都是正交矩阵，故 $T_1T_3T_2^{-1}$ 也是正交矩阵.

18. 因为 A 正定，从而 A 与单位矩阵 E 合同，故存在一个可逆矩阵 T_1，使得 $T_1'AT_1 = E$. 再令 $C = T_1'BT_1$，显然 C 也是 n 阶实对称矩阵，故由《教程》定理 2.2 推论知，存在 n 阶正交矩阵 T_2，使得 $T_2'CT_2 = D$，其中 D 为对角形. 那么取可逆矩阵 $T = T_1T_2$，则有

$$T'AT = T_2'T_1'AT_1T_2 = T_2'T_2 = E;$$
$$T'BT = T_2'T_1'BT_1T_2 = T_2'CT_2 = D.$$

19. **(1)** 因为 A 正定，由题目 16 的结论可知，A 的特征值都大于零，从而由《教程》定理 2.2 的推论，存在正交矩阵 T 使得 $T'AT = D$，其中 D 为对角形，且其主对角线上的元素皆为 A 的特征值，从而为正. 容易知道 $D^k = (T'AT)^k = T'A^kT = T^{-1}A^kT$，即 A^k 与 D^k 相似，显然 D^k 也是一个对角线元素皆正的对角形，从而 A^k 的特征值也全部为正，故 A^k 是正定矩阵.

(2) 由 **(1)** 知 $D^r = T^{-1}A^rT$，两边左乘 T，再右乘 T^{-1}，即 $A^r = TD^rT^{-1}$，代入题目条件得 $TD^rT^{-1}B = BTD^rT^{-1}$. 两边左乘 T^{-1}，再右乘 T，得 $D^rT^{-1}BT = T^{-1}BTD^r$. 令 $B_1 = T^{-1}BT$，则上式为 $D^rB_1 = B_1D^r$.

现设

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

则

$$D^r=\begin{pmatrix}\lambda_1^r & & & \\ & \lambda_2^r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^r\end{pmatrix}.$$

其中 $\lambda_i>0$. 再设 $B=(b_{ij})$，则根据矩阵乘法定义知，对于 $i,j=1,2,...,n$ 都有

$$\lambda_i^r b_{ij}=\lambda_j^r b_{ij}.$$

若 $b_{ij}\neq 0$，则按上式有 $\lambda_i^r=\lambda_j^r\Rightarrow\lambda_i=\lambda_j$. 此时 $\lambda_i b_{ij}=\lambda_j b_{ij}$. 若 $b_{ij}=0$，则 $\lambda_i b_{ij}=\lambda_j b_{ij}$ 天然成立. 从而有 $DB_1=B_1D$，即 $DT^{-1}BT=T^{-1}BTD$，左乘 T，右乘 T^{-1} 得 $TDT^{-1}B=BTDT^{-1}$，也即 $AB=BA$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.8.

20. 只需证明 $\boldsymbol{A}$ 是一个线性变换，对任意 $\alpha,\beta\in V,\lambda,\mu\in K$，设 $\gamma=\lambda\alpha+\mu\beta$，则有

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta,\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta)\\
=&(\boldsymbol{A}\gamma,\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta)-\lambda(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta)\\
&-\mu(\boldsymbol{A}\beta,\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta)\\
=&(\gamma,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta))-\lambda(\alpha,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta))\\
&-\mu(\beta,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta))\\
=&(\gamma-\lambda\alpha-\mu\beta,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta))\\
=&(0,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta))=0.
\end{aligned}$$

从而有 $\boldsymbol{A}\gamma-\lambda\boldsymbol{A}\alpha-\mu\boldsymbol{A}\beta=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.6.

21. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是反对称变换，对任意 $\alpha \in V$，有 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha) = -(\alpha,\boldsymbol{A}\alpha) = -(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)$，从而 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)=0$. 反过来，如果对任意 $\alpha \in V$，$(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)=0$，则对任意 $\alpha,\beta \in V$，$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)+(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)+(\boldsymbol{A}\beta,\alpha)=(\boldsymbol{A}(\alpha+\beta),\alpha+\beta)=0$，从而 $(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)$. 即 $\boldsymbol{A}$ 是反对称变换.

22. 必要性，设 A 半正定，根据《教程》定理 2.2 推论知，存在 n 阶正交矩阵 T，使得

$$T'AT = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

其中 $\lambda_i, i=1,2,...,n$ 是 A 的特征值. 因为 A 半正定，故由题目 16 的批注可知，A 的特征值 $\lambda_i \geqslant 0$，此时我们可以将上式写作

$$A = TDT' = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}T' = T\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}^2 T'.$$

若记 $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = \sqrt{D}$，则上式表明 $A = T\sqrt{D}\sqrt{D}T' = T\sqrt{D}T'T\sqrt{D}T' = (T\sqrt{D}T')^2$.，令 $B = T\sqrt{D}T'$，显然 B 是实对称矩阵，并且有 $A=B^2$.

充分性，设存在实对称矩阵 B 使得 $A=B^2$，则《教程》定理 2.2 推论知，存在 n 阶正交矩阵 T 使得 $T'BT=D$，其中 D 是一对角矩阵，故有 $A=B^2=(TDT')^2=TD^2T'$，即 A 与 D^2 合同，容易知道 D^2 是半正定的，故 A 也是半正定的.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.9.

23. $A'A$ 是一个半正定矩阵，这是因为对于任意 $X \in \mathbb{R}^n$，设 $Y=AX$，有二次型

$$f = X'(A'A)X = (AX)'(AX) = Y'Y = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

又因为 $y_i \in \mathbb{R}$，所以上式非负，这说明 $A'A$ 是半正定的. 由题目 22 的结论可知，存在 n 阶实对称方阵 B 使得 $A'A=B^2$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.9.

24. 必要性，若 V 存在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 使得 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵在该组基下同时成对角形，则有

$$\boldsymbol{A}\varepsilon_k=\lambda_k\varepsilon_k;\boldsymbol{B}\varepsilon_k=\mu_k\varepsilon_k,k=1,2,...,n.$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}\varepsilon_k&=\boldsymbol{A}(\mu_k\varepsilon_k)=\lambda_k\mu_k\varepsilon_k;\\ \boldsymbol{BA}\varepsilon_k&=\boldsymbol{A}(\lambda_k\varepsilon_k)=\mu_k\lambda_k\varepsilon_k.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 在 V 的一组基上的作用相同，故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性，设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称变换，故由《教程》定理 2.2 知 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化，设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 互不相同的特征值. 对每个固定的 $i(1\leqslant i\leqslant k)$，考虑 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 V_{λ_i}，则根据第四章第 4 节题目 20 知 V_{λ_i} 也是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间. 很容易说明 $\boldsymbol{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 也是对称变换，由《教程》定理 2.2，在 V_{λ_i} 内存在一组标准正交基 (K_i)，使得 $\boldsymbol{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 的矩阵在该组基下成对角形. 将 (K_1),(K_2),...,(K_n) 合并得到向量组 (I)，由《教程》第四章定理 4.2 知

$$V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_k}=V.$$

故 (I) 是 V 的一组基，又由《教程》命题 2.8 可知，(I) 也是 V 的一组标准正交基，并且 (I) 中的向量同时是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵都在 (I) 下成对角形.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.10.

25. 对复矩阵 P，我们记 $\overline{P}$ 为其复共轭矩阵，即 $\overline{P}$ 上所有元素都是 P 对应元素的共轭复数，显然 $\overline{P'}=\overline{P}'$,$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1}\,\overline{P_2}$,$\overline{P_1+P_2}=\overline{P_1}+\overline{P_2}$.

设 $M=(A'-\overline{\lambda}_0E)X$，由于 A 是实矩阵，我们有 $A=\overline{A}$，则

$$\begin{aligned}M'\overline{M}&=\big((A'-\overline{\lambda}_0E)X\big)'\,\overline{(A'-\overline{\lambda}_0E)X}\\&=\Big(\overline{A-\lambda_0E}'X\Big)'\,\overline{(A'-\overline{\lambda}_0E)X}\\&=\Big(X'\overline{A-\lambda_0E}\Big)\overline{(A'-\overline{\lambda}_0E)X}\\&=X'\overline{(A-\lambda_0E)(A'-\overline{\lambda}_0E)X}.\end{aligned}$$

这里 $(A-\lambda E)$ 和 $(A'-\overline{\lambda}E)$ 可交换，这是因为

$$\begin{aligned}(A-\lambda E)(A'-\overline{\lambda_0}E)&=AA'-\overline{\lambda}_0A-\lambda_0A'+\lambda_0\overline{\lambda}_0\\&=A'A-\overline{\lambda}_0A-\lambda_0A'+\lambda_0\overline{\lambda}_0\\&=(A'-\overline{\lambda}_0E)(A-\lambda_0E).\end{aligned}$$

交换后继续计算前式，并由 $(A-\lambda_0E)X=AX-\lambda_0X=0$，得到

$$\begin{aligned}M'\overline{M}&=X'\overline{(A'-\overline{\lambda}_0E)(A-\lambda_0E)X}\\&=X'\overline{(A'-\overline{\lambda}_0E)0}\\&=0.\end{aligned}$$

现在设 $M=(m_1,m_2,...,m_n)'\in\mathbb{C}^n$，则上式表明

$$|m_1|^2+|m_2|^2+\cdots+|m_n|^2=0.$$

从而 $m_i=0,i=1,2,...,n$. 即 $M=0$，所以 $(A'-\overline{\lambda}_0E)X=0$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.13. 另外，本题即《教程》命题 3.7，上述解法其实就是根据《教程》命题 3.7 证明过程，将其中的线性变换和向量全部翻译成矩阵（$\boldsymbol{A}^*$ 用 A' 代替，$\boldsymbol{\xi}$ 用 X 代替），内积翻译成矩阵运算得到的.

26. 对任意 $\alpha\in M,\beta\in M^{\perp}$，有

$$(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=0.$$

从而 $\boldsymbol{A}^*\beta\in M^{\perp}$，即 $M^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的不变子空间.

批注. 本题即《教程》命题 3.6.

27&28. 我们主要证明题目 27，题目 28 是证明过程中间的命题 2. 注意到题目 27 所述准对角形与定理 2.1 中的正交变换准对角形在形式上如出一辙，而正交变换也确实是一种特殊的正规变换，这启发我们可以完全仿照定理 2.1 的证明方法来平行地证明本题.

当然，《教程》定理 2.1 的证明用到了一个前置命题 2.4，因此我们也先仿照《教程》命题 2.4 来证明如下的命题：

命题 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n（$n\geqslant 2$）维欧氏空间 V 的正规变换，$\boldsymbol{A}$ 在 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，若 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 存在一复根

$\lambda_0 = a + \mathrm{i}b$（$b \neq 0$），则在 V 内存在相互正交的单位向量 η_1 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\eta_1 &= a\eta_1 - b\eta_2;\\ \boldsymbol{A}\eta_2 &= b\eta_1 + a\eta_2.\end{aligned}$$

于是 $M = L(\eta_1, \eta_2)$ 为 V 的二维不变子空间，$\boldsymbol{A}|_M$ 在 M 的标准正交基 η_1, η_2 下的矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

证明: 设 $\mathbb{C}$ 上的线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 有一非零解

$$X_0 = U + \mathrm{i}W \neq 0.$$

其中 $U = (u_1, u_2, ..., u_n)', W = (w_1, w_2, ..., w_n)' \in \mathbb{R}^n$，那么有 $U \neq 0$，否则 $W \neq 0$，从而 $AW = \lambda_0 W$，与 λ_0 非实数矛盾. 因为 X_0 乘以任意非零实数 k 后 $kX_0 = kU + \mathrm{i}kW$ 仍为该方程的非零解，因此可假设 U 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量，即设

$$U'U = 1.$$

令

$$\eta_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)U, \eta_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)W.$$

我们下面分两步来证么 η_1, η_2 满足命题的要求.

(i) 我们有

$$A(U + \mathrm{i}W) = (a + \mathrm{i}b)(U + \mathrm{i}W),$$

比较两边的虚部和实部有

$$\begin{aligned}AU &= aU - bW,\\ AW &= bU + aW.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\eta_1 &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)AU\\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)(aU - bW)\\ &= a(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)U - b(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)W\\ &= a\eta_1 - b\eta_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\eta_2 &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)AW \\ &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)(bU+aW) \\ &= b(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)U + a(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)W \\ &= b\eta_1 + a\eta_2.\end{aligned}$$

(ii) 下面证明 η_1,η_2 为互相正交的单位向量，即 $(\eta_1,\eta_1)=(\eta_2,\eta_2)=1,(\eta_1,\eta_2)=0$，根据 V 的内积在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 下的计算公式，这只要证 U,W 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的正交单位向量即可. 现在由于 $\boldsymbol{A}$ 是正规变换，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$，结合题目 10 的结论可知 $AA'=A'A$，又因为 $AX_0=\lambda_0X_0$，进而由题目 25 的结论知 $A'X_0=\overline{\lambda}_0X_0$. 现在对 $AX_0=\lambda_0X_0$ 两边取转置，再右乘 X_0 有

$$X_0'A'X_0=\lambda_0X_0'X_0.$$

再对 $A'X_0=\overline{\lambda}_0X_0$ 左乘 X_0' 有

$$X_0'A'X_0=\overline{\lambda}_0X_0'X_0.$$

比较上面两式得 $\overline{\lambda}_0X_0'X_0=\lambda_0X_0'X_0$. 因为 $\lambda_0=a+b\mathrm{i}\neq\overline{\lambda}_0$，故 $X_0'X_0=0$，即

$$\begin{aligned}&(U'+\mathrm{i}W')(U+\mathrm{i}W)=U'U-W'W+\mathrm{i}(U'W+W'U)=0 \\ &\quad\Longrightarrow UU'-W'W=0, U'W+W'U=0.\end{aligned}$$

因此有 $W'W=U'U=1$. 因为 $U'W=(U,W)=(W,U)=W'U$，故由 $U'W+W'U=0$ 立即推知 $(U,W)=0$.

这表明 U,W 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个正交单位向量，从而 η_1,η_2 为 V 中两个正交单位向量. ■

接下来我们再来将正交变换的一个重要性质延申到正规变换中.

命题 2 在 n 维欧氏空间 V 中，设 M 是正规变换 $\boldsymbol{A}$ 的一个不变子空间，则其正交补 $M^{\perp}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.（本节题目 28,《指南》第五章例 2.12）

证明: 我们使用矩阵方法来证明，首先设 $\boldsymbol{A}|_M$ 在 M 中的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r$ 的矩阵为 A_1，取 $M^{\perp}$ 的一组基 $\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},...,\varepsilon_n$，将两组基合并成 V 的一组基 (I)，那么必然有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n) &= (\varepsilon_1,...,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon_1,...,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n)A.\end{aligned}$$

要证明 $M^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，只需要证明 $A_2=0$. 根据 $\boldsymbol{A}$ 是正规变换和题目 10 的结论可知有 $AA'=A'A$，根据第二章第 6 节题目 11 的结论可知 $A_2=0$. 故命题得证. ■

【（*这里插入一些题外话，以下几段涉及到第 3 节的内容，仅为个人观点，恐不成熟*）应当指出，该命题不是一件平凡的事情，首先它是《教程》命题 2.5 的直接推广，即《教程》命题 2.5 的性质不需要 $\boldsymbol{A}$ 有正交性，只需正规即可. 其次它在酉空间的情形中也成立，但欧氏空间的情形其实是更复杂的.

在酉空间的情形中，因为复线性变换总能找到特征值，从而保证了上述命题对 M 是特征子空间时的小情况是成立的，这主要是根据“正规变换 $\boldsymbol{A}$ 与其共轭变换 $\boldsymbol{A}^*$ 总是用共轭特征值联系着相同特征向量”（《教程》命题 3.7，以下简称**共轭联系性**）来证明的，而藉此小情况利用归纳法已经足够证明正规变换的矩阵是可酉对角化的（《教程》定理 3.1），这是一个较为深刻的结果，这个结果反过来又作用于上述命题，使得其对任意维数的不变子空间 M 都成立（第 3 节题目 14）.

而在欧氏空间的情形中，共轭联系性当然也有（题目 25），假若 $\boldsymbol{A}|_M$ 的矩阵可以对角化，那上述命题的证明和酉空间的情形没有区别，但实线性变换并不一定能找得到特征值，于是可能没有特征向量，这就使得共轭联系性无法利用（注意，在 $\lambda_0\notin\mathbb{R}$ 的情况下，虽然题目 25 的共轭联系性仍然存在，但其中的 λ_0 和 X 对该空间都没有意义），这种证明就失效了. 然而即便如此，还是可以通过矩阵手段证明上述命题是真命题，这不禁让人对矩阵方法的力量感到惊讶.】

基于命题 2，我们可以进一步得到如下更一般的命题：

命题 3 在 n 维欧氏空间 V 中，设 M 是正规变换 $\boldsymbol{A}$ 的一个不变子空间，则 M 和 $M^{\perp}$ 都是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^*$ 的公共不变子空间，并且 $\boldsymbol{A}|_M,\boldsymbol{A}|_{M^{\perp}},\boldsymbol{A}^*|_M,\boldsymbol{A}^*|_{M^{\perp}}$ 都是正规变换.

证明： 根据命题 2，$M^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，再由题目 26 的结论可知，$M=(M^{\perp})^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的不变子空间，从而 M 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 的公共不变子空间. 此时对任意 $\alpha,\beta\in M$ 有

$$(\boldsymbol{A}|_M\alpha,\beta)=(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*|_M\beta).$$

从而 $\boldsymbol{A}^*|_M=(\boldsymbol{A}|_M)^*$，故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}|_M)(\boldsymbol{A}|_M)^*&=(\boldsymbol{A}|_M)(\boldsymbol{A}^*|_M)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)|_M=(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})|_M\\&=(\boldsymbol{A}^*|_M)(\boldsymbol{A}|_M)=(\boldsymbol{A}|_M)^*(\boldsymbol{A}|_M).\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}|_M$ 是正规变换. 用 $M^{\perp}$ 代替上述的 M 可证 $M^{\perp}$ 也是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^*$ 的不变子

空间，并且 $\boldsymbol{A}|_{M^\perp}$ 也是正规变换. 再用 $\boldsymbol{A}^*$ 代替上述的 $\boldsymbol{A}$ 可证 $\boldsymbol{A}^*|_M, \boldsymbol{A}^*|_{M^\perp}$ 都是正规变换. ■

现在让我们回到原题，我们对 n 作数学归纳法. 当 $n=1$ 时，任取 V 的一个单位向量作为一组基即可使命题成立. 当 $n=2$ 时，若 $\boldsymbol{A}$ 有一特征值 $\lambda_1\in\mathbb{R}$，取与 λ_1 相对应的单位特征向量 ε_1，令 $M=V_{\lambda_1}=L(\varepsilon_1)$，则由命题 3，$M^\perp$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一维不变子空间，即是 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间，在 $M^\perp$ 任取一单位向量 ε_2，则 $\boldsymbol{A}\varepsilon_2=\lambda_2=\varepsilon_2$. 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵为

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 没有特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式有一复根 $\lambda_0=a+b\mathrm{i}(b\neq 0)$. 那么根据命题 1，$V$ 内存在一组标准正交基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在该组基下的矩阵为

$$D=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}.$$

故 $n=2$ 时命题也成立.

下面设对维数 $<n$ 命题已成立，当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 维欧氏空间 V 内的正交变换时，分两种情况讨论.

(i) 若 $\boldsymbol{A}$ 有一特征值 λ_s，则找出与 λ_s 对应的单位特征向量 $\varepsilon_n:\boldsymbol{A}\varepsilon_n=\lambda_s\varepsilon_n,|\varepsilon_n|=1$. 令 $M=L(\varepsilon_1)$，则由命题 3，$M^\perp$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 维不变子空间. 并且 $\boldsymbol{A}|_M^\perp$ 为正规变换，由归纳假设，$M^\perp$ 内存在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_3,...,\varepsilon_{n-1}$，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此组基下的矩阵 J_1 具有题目所要求的准对角形. 现在 $\varepsilon_1,\varepsilon_3,...,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，在此基下 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵为

$$D=\begin{pmatrix}J_1 & 0\\ 0 & \lambda_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && D_r &&& \\ &&& \lambda_1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \lambda_s\end{pmatrix}.$$

(ii) 若 $\boldsymbol{A}$ 无特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式有一复根 $\lambda_0=a_1+b_1\mathrm{i}(b\neq 0)$，那么根据命题 1，$V$ 内存在两个单位的正交向量 η_1,η_2，使得 $\boldsymbol{A}$ 为 $M=L(\eta_1,\eta_2)$ 的不变子空间，且 $\boldsymbol{A}|_M$ 在标准正交基 η_1,η_2 下的矩阵为

$$D_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}.$$

现在 $M^{\perp}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-2$ 为不变子空间，由命题 3，$\boldsymbol{A}|_{M^{\perp}}$ 为 $M^{\perp}$ 内的正规变换，按归纳假设，$M^{\perp}$ 存在一组标准正交基 $\varepsilon_3, \varepsilon_4, ..., \varepsilon_n$ 使得 $\boldsymbol{A}|_{M^{\perp}}$ 在这组基下的矩阵 J_1 满足定理条件. 现在 $\eta_1, \eta_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基，$\boldsymbol{A}$ 在此组基下的矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & D_r & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

已符合题目要求.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.14.

29. 本题中 V 中的内积和 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 中的内积的符号都是圆括号，请注意分别.

(1) 任意 $f_1, f_2, g \in \mathrm{Hom}(U, V), k_1, k_2 \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
(k_1 f_1 + k_2 f_2, g) &= \sum_{i=1}^{n} ((k_1 f_1 + k_2 f_2)(\varepsilon_i), g(\varepsilon_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (k_1 f_1(\varepsilon_i) + k_2 f_2(\varepsilon_i), g(\varepsilon_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (k_1 (f_1(\varepsilon_i), g(\varepsilon_i)) + k_2 (f_2(\varepsilon_i), g(\varepsilon_i))) \\
&= k_1 \sum_{i=1}^{n} (f_1(\varepsilon_i), g(\varepsilon_i)) + k_2 \sum_{i=1}^{n} (f_2(\varepsilon_i), g(\varepsilon_i)) \\
&= k_1 (f_1, g) + k_2 (f_2, g); \\
(f_1, g) &= \sum_{i=1}^{n} (f_1(\varepsilon_i), g(\varepsilon_i)) = \sum_{i=1}^{n} (g(\varepsilon_i), f_1(\varepsilon_i)) = (g, f_1); \\
(f_1, f_1) &= \sum_{i=1}^{n} (f_1(\varepsilon_i), f_1(\varepsilon_i)) \geqslant 0. \\
(f_1, f_1) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (f_1(\varepsilon_i), f_1(\varepsilon_i)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (f_1(\varepsilon_i), f_1(\varepsilon_i)) = 0, i = 1, 2, ..., n. \\
&\Leftrightarrow f_1(\varepsilon_i) = 0, i = 1, 2, ..., n. \Leftrightarrow f = 0.
\end{aligned}$$

故 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 对该内积成欧氏空间.

(2) 任意 $f,g\in\mathrm{Hom}(U,V),\lambda,\mu\in\mathbb{R},\alpha\in U$，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})(\lambda f+\mu g))(\alpha)&=(\lambda f+\mu g)(\boldsymbol{A}\alpha)\\&=\lambda f(\boldsymbol{A}\alpha)+\mu g(\boldsymbol{A}\alpha))\\&=\lambda(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})f)(\alpha)+\mu(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})g)(\alpha)\\&=\big(\lambda\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})f+\mu\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})g\big)(\alpha)\end{aligned}$$

因此有 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})(\lambda f+\mu g)=\lambda\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})f+\mu\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})g$，故 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ 是 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 的线性变换.

接下来要证明 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ 是正交变换的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换，我们的思路是取欧式空间 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 的一组标准正交基，将“$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ 是正交变换”转化为“$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ 将这组基变做另一组标准正交基”，从而使问题具体化. 首先我们引入一些记号：

(i) M_{ij} 表示一个 m 行 n 列的实矩阵，其第 i 行 j 列的元素为 1，其余为 0.

(ii) 取 V 中的一组标准正交基为 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_m$，并且设 $\boldsymbol{A}$ 在 U 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，A_i 表示 A 的第 i 列向量，a_{ij} 表示 A 的第 i 行第 j 列的元素.

(iii) 在目前给定的 U,V 的基下，由于 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 与 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 同构，$M_{m,n}(\mathbb{R})$ 中的每一个矩阵都对应一个 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 中的线性映射，设 M_{ij} 对应的线性映射为 f_{ij}（即 f_{ij} 在 U,V 的基下的矩阵为 M_{ij}），$g_{ij}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})f_{ij}$.

以下分三步来证明.

(a) 我们来说明全体线性映射 $f_{ij},i=1,2,...,m,j=1,2,...,n$ 构成的向量组 (I) 为 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 一组标准正交基. 根据 f_{ij} 的定义，对 $1\leqslant k\leqslant n$（k 是正整数），有

$$f_{ij}(\varepsilon_k)=\begin{cases}\eta_i, & j=k;\\ 0, & j\neq k.\end{cases}=\delta_{jk}\eta_i.$$

其中 δ_{jk} 代表克朗涅克记号. 从而对任意 $u,p=1,2,...,m$ 和 $v,q=1,2,...,n$ 我们有

$$\begin{aligned}(f_{uv},f_{pq})&=\sum_{i=1}^{n}(f_{uv}(\varepsilon_i),f_{pq}(\varepsilon_i))=\sum_{i=1}^{n}(\delta_{vi}\eta_u,\delta_{qi}\eta_p)\\&=\sum_{i=1}^{n}\delta_{vi}\delta_{qi}(\eta_u,\eta_p)=\sum_{i=1}^{n}\delta_{vi}\delta_{qi}\delta_{up}\\&=\delta_{up}(\delta_{v1}\delta_{q1}+\delta_{v2}\delta_{q2}+\cdots+\delta_{vn}\delta_{qn})=\delta_{up}\delta_{vq}.\end{aligned}$$

这说明只有当 $(u,v)=(p,q)$ 时 (f_{uv},f_{pq}) 为 1，其余情况为 0，即 (I) 是欧式空间 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 的一组标准正交基.

(b) 写出 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ 对标准正交基 (I) 的作用. 因为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})f_{ij})(\varepsilon_k)&=f_{ij}(\boldsymbol{A}\varepsilon_k)\\&=f_{ij}((\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)A_k)\\&=(f_{ij}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n))A_k\\&=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m)M_{ij}A_k.\end{aligned}$$

其中

$M_{ij}A_k=(0,0,...,0,a_{jk},0,...,0)'\in\mathbb{R}^m$（$a_{jk}$ 位于向量的第 i 个位置.）

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})f_{ij})(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)&=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m)(M_{ij}A_1,M_{ij}A_2,...,M_{ij}A_n)\\&=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m)\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（其中 $a_{j1}\quad a_{j2}\quad\cdots\quad a_{jn}$ 位于矩阵的第 i 行）

从而有

$$g_{ij}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})f_{ij}=a_{j1}f_{i1}+a_{j2}f_{i2}+\cdots+a_{jn}f_{in}.$$

(c) 现在回到原题，根据《教程》命题 2.1，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ 是正交变换等价于全体 $g_{ij},i=1,2,...,m,j=1,2,...,n$ 是 $\mathrm{Hom}(U,V)$ 一组标准正交基. 因此我们来计算这些向量的内积，根据基 (I) 的标准正交性，对任意 $u,p=1,2,...,m$ 和 $v,q=1,2,...,n$，有

$$\begin{aligned}(g_{uv},g_{pq})&=(a_{v1}f_{u1}+a_{v2}f_{u2}+\cdots+a_{vn}f_{un},a_{q1}f_{p1}+a_{q2}f_{p2}+\cdots+a_{qn}f_{pn})\\&=a_{v1}a_{q2}(f_{u1},f_{p1})+a_{v2}a_{q2}(f_{u2},f_{p2})+\cdots+a_{vn}a_{qn}(f_{un},f_{pn})\\&=\delta_{up}(a_{v1}a_{q2}+a_{v2}a_{q2}+\cdots+a_{vn}a_{qn}).\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 U 内的正交变换，则 A 是一个正交矩阵，其行向量构成一组标准正交基，则

$$a_{v1}a_{q1}+a_{v2}a_{q2}+\cdots+a_{vn}a_{qn}=\delta_{vq}.$$

从而有 $(g_{uv}, g_{pq}) = \delta_{up}\delta_{vq}$，即全体 $g_{ij}, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$ 是 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 一组标准正交基. 原命题充分性成立.

反之，若全体 $g_{ij}, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$ 是 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 一组标准正交基，则有

$$\delta_{up}\delta_{vq} = (g_{uv}, g_{pq}) = \delta_{up}(a_{v1}a_{q1} + a_{v2}a_{q2} + \cdots + a_{vn}a_{qn}).$$

从而有 $a_{v1}a_{q1} + a_{v2}a_{q2} + \cdots + a_{vn}a_{qn} = \delta_{vq}$，即 A 的行向量构成一组标准正交基，A 是正交矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是正交变换. 原命题必要性成立.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 2.5.

6.3 酉空间

1. 对任意 $f_1, f_2, g \in \mathbb{C}[x]_n$，有

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2, g) &= \sum_{i=1}^{n}(f(k) + f_2(k))\overline{g(k)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_1(k)\overline{g(k)} + \sum_{i=1}^{n} f_2(k)\overline{g(k)} \\
&= (f_1, g) + (f_2, g); \\
(f_1, g) &= \sum_{i=1}^{n} f_1(k)\overline{g(k)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{f_1(k)}g(k)} = \overline{(g, f_1)}; \\
(f_1, f_1) &= \sum_{i=1}^{n} f_1(k)\overline{f_1(k)} = \sum_{i=1}^{n} |f_1(k)|^2 \geqslant 0('' = 0'' \Leftrightarrow f_1 = 0).
\end{aligned}$$

从而构成内积.

2. 记矩阵

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

且 U 的第 i 个列向量为 $\alpha_i=(u_{1i},u_{2i},...,u_{ni})'$. 则由分块矩阵乘法知以下等价链成立：

$$\begin{aligned}
&\overline{U}'U=E\\
\Longleftrightarrow&U'\overline{U}=E\\
\Longleftrightarrow&\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\alpha}_1 & \overline{\alpha}_2 & \cdots & \overline{\alpha}_n\end{pmatrix}=E\\
\Longleftrightarrow&\alpha_i'\overline{\alpha}_j=\delta_{ij}\\
\Longleftrightarrow&u_{1i}\overline{u}_{1j}+u_{2i}\overline{u}_{2j}+\cdots+u_{ni}\overline{u}_{nj}=\delta_{ij}\\
\Longleftrightarrow&(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

从而 U 是酉矩阵等价于其列向量组构成 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基，对行向量组同理.

3. **(1)** 设 G 的第 i 个列向量为 $d_i=((\varepsilon_1,\varepsilon_i),(\varepsilon_2,\varepsilon_i),...,(\varepsilon_s,\varepsilon_i))'$，要证明 G 可逆，只需证 $d_1,d_2,...,d_s$ 线性无关.

设

$$k_1d_1+k_2d_2+\cdots+k_sd_s=0.$$

将 d_i 按分量写开，根据内积的线性性质可以得到

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_1,k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_s\varepsilon_s)&=0,\\
(\varepsilon_2,k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_s\varepsilon_s)&=0,\\
&\cdots\\
(\varepsilon_s,k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_s\varepsilon_s)&=0.
\end{aligned}$$

把上面的第 j 行式子分别乘上 $k_j(j=1,2,...,s)$，得到的式子再全部相加，再次根据内积的线性性质有

$$(k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_s\varepsilon_s,k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_s\varepsilon_s)=0.$$

从而 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_s\varepsilon_s=0$，由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_s$ 的线性无关性可得 $d_1=d_2=\cdots=d_n=0$，即 $d_1,d_2,...,d_s$ 线性无关.

(2) $G=((\varepsilon_i,\varepsilon_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$，由内积的性质显然有 $\overline{G}'=\left(\overline{(\varepsilon_j,\varepsilon_i)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=((\varepsilon_i,\varepsilon_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=G$.

(3) 设 $X=(x_1,x_2,...,x_n)',Y=(y_1,y_2,...,y_n)'$，由内积的性质有

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)&=(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_i\overline{y}_j\\&=X'G\overline{Y}.\end{aligned}$$

4. $\mathbb{C}[x]_3$ 的一组基为 $1,x,x^2$. 正交化：

$$\begin{aligned}\eta_1(x)&=1,\\ \eta_2(x)&=x-\frac{1\cdot\bar{1}+2\cdot\bar{1}+3\cdot\bar{1}}{1\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{1}}\cdot 1=x-2,\\ \eta_3(x)&=x^2-\frac{1^2\cdot\bar{1}+2^2\cdot\bar{1}+3^2\cdot\bar{1}}{1\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{1}}\cdot 1\\&\quad-\frac{1^2\cdot\overline{(1-2)}+2^2\cdot\overline{(2-2)}+3^2\cdot\overline{(3-2)}}{|1-2|^2+|2-2|^2+|3-2|^2}\cdot(x-2)\\&=x^2-4x+\frac{10}{3}.\end{aligned}$$

单位化得

$$\varepsilon_1(x)=\frac{1}{\sqrt{3}},\varepsilon_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2),\varepsilon_3(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2-4x+\frac{10}{3}\right).$$

5. 设 U 是 $\boldsymbol{U}$ 是酉变换在 V 内一组标准正交基下的矩阵，则 U 是酉矩阵，$\overline{U}'U=E$. 设 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 是酉变换的特征值，α 是对应该特征值的特征向量，且 α 在取定基下的坐标为 X_0，则必然有

$$UX_0=\lambda_0X_0. \tag{6.1}$$

显然 $\lambda_0\neq 0$，否则 $UX_0=0$，又 U 可逆，从而 $X_0=0$，与其是特征向量矛盾.

一方面对式 (6.1) 两边左乘 $\frac{1}{\lambda_0}\overline{X}_0'U^{-1}$，有

$$\frac{1}{\lambda_0}\overline{X}_0'X_0=\overline{X}_0'U^{-1}X_0=\overline{X}_0'\overline{U}'X_0. \tag{6.2}$$

另一方面对式 (6.1) 两边取共轭转置有

$$\overline{X}_0'\overline{U}'=\overline{\lambda}_0\overline{X}_0',$$

再右乘 X_0 有

$$\overline{X}_0'\overline{U}'X_0=\overline{\lambda}_0\overline{X}_0'X_0. \tag{6.3}$$

从而由式 (6.2) 和式 (6.3) 得

$$\frac{1}{\lambda_0}\overline{X}_0'X_0=\overline{\lambda}_0\overline{X}_0'X_0.$$

即

$$(\lambda_0\overline{\lambda}_0-1)\overline{X}_0'X_0=0$$

设 $X_0=(x_0,x_1,...,x_n)'\in\mathbb{C}^n$，则有

$$\overline{X}_0'X_0=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2\neq 0.$$

从而 $\lambda_0\overline{\lambda}_0=1$，于是 $|\lambda_0|=1$.

6. 若仿照《教程》正文对欧几里得空间下柯西-布尼雅可夫斯基不等式的证明，取 $\gamma=t\alpha+\beta,t\in\mathbb{R}$，则

$$\begin{aligned}0\leqslant(\gamma,\gamma)&=(t\alpha+\beta,t\alpha+\beta)\\&=t\bar{t}(\alpha,\alpha)+t(\alpha,\beta)+\bar{t}(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)\\&=(\alpha,\alpha)t^2+2\mathrm{Re}((\alpha,\beta))t+(\beta,\beta).\end{aligned}\tag{6.4}$$

利用二次函数的判别式非正，我们只能证明

$$|\mathrm{Re}((\alpha,\beta))|\leqslant|\alpha||\beta|.$$

其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示 z 的实部.

得到此结果的原因其实也不难理解，我们为了应用实二次函数的判别式，预先限置了 $t\in\mathbb{R}$，但这样做有些考虑不周. 实际上由内积的性质，不仅仅是 $t\in\mathbb{R}$，而是对任何 $t\in\mathbb{C}$，式 (6.4) 都必须要成立. 也就是说，我们放松了本应该有的条件，那么对式 (6.4) 最后得到的二次函数系数的要求自然就减弱了.

既然如此，那就必须考虑 $t\in\mathbb{C}$. 我们依然希望讨论实函数，于是令 $t=t_1+\mathrm{i}t_2,t_1,t_2\in\mathbb{R},\gamma=t\alpha+\beta$，首先当 $\alpha=0$ 时，命题显然成立，当

$\alpha \neq 0$ 时，由式 (6.4) 有

$$\begin{aligned}
(\gamma,\gamma) &= t\bar{t}(\alpha,\alpha)+t(\alpha,\beta)+\bar{t}(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)\\
&=(\alpha,\alpha)(t_1^2+t_2^2)+(t_1+\mathrm{i}t_2)(\alpha,\beta)+(t_1-\mathrm{i}t_2)\overline{(\alpha,\beta)}+(\beta,\beta)\\
&=(\alpha,\alpha)(t_1^2+t_2^2)+2\mathrm{Re}((\alpha,\beta))t_1-2\mathrm{Im}((\alpha,\beta))t_2+(\beta,\beta)\\
&=(\alpha,\alpha)\left(t_1+\frac{\mathrm{Re}((\alpha,\beta))}{(\alpha,\alpha)}\right)^2+(\alpha,\alpha)\left(t_2-\frac{\mathrm{Im}((\alpha,\beta))}{(\alpha,\alpha)}\right)^2\\
&\quad-\frac{\mathrm{Re}((\alpha,\beta))^2+\mathrm{Im}((\alpha,\beta))^2}{(\alpha,\alpha)}+(\beta,\beta).\\
&=(\alpha,\alpha)\left(t_1+\frac{\mathrm{Re}((\alpha,\beta))}{(\alpha,\alpha)}\right)^2+(\alpha,\alpha)\left(t_2-\frac{\mathrm{Im}((\alpha,\beta))}{(\alpha,\alpha)}\right)^2\\
&\quad-\frac{|(\alpha,\beta)|^2}{(\alpha,\alpha)}+(\beta,\beta).
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)$ 分别表示 z 的实部和虚部系数. 我们要求上式在 $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ 都是非负的，故其最小值要非负，亦即

$$-\frac{|(\alpha,\beta)|^2}{(\alpha,\alpha)}+(\beta,\beta)\geqslant 0.$$

上式变形即可得到 $|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$.

再讨论取等条件，当 α 和 β 线性相关时，直接验证知等号成立. 反之，若取得了等号，由前面的表达式知只需取 $t=-\frac{\mathrm{Re}((\alpha,\beta))}{(\alpha,\alpha)}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{Im}((\alpha,\beta))}{(\alpha,\alpha)}$ 就有 $(\gamma,\gamma)=0$，此时 $\gamma=0$，即 $t\alpha+\beta=0$，从而 α 与 β 线性相关.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.1.

7. 要证 $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，即证

$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta)\leqslant(|\alpha|+|\beta|)^2,$$

即证

$$(\alpha,\alpha)+2\mathrm{Re}((\alpha,\beta))+(\beta,\beta)\leqslant(\alpha,\alpha)+2|\alpha||\beta|+(\beta,\beta),$$

即证

$$\mathrm{Re}((\alpha,\beta))\leqslant|\alpha||\beta|.$$

由柯西-布尼雅可夫斯基不等式（题目 6），$\mathrm{Re}((\alpha,\beta))\leqslant|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$，从而上式成立. 故 $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ 成立.

8. **(1)** 由内积的性质立得.

(2) 由内积的性质有

$$\begin{aligned} d(\alpha,\beta) &= \sqrt{(\alpha-\beta,\alpha-\beta)} \\ &= \sqrt{(-1)(\overline{-1})(\beta-\alpha,\beta-\alpha)} \\ &= \sqrt{(\beta-\alpha,\beta-\alpha)} \\ &= d(\beta,\alpha). \end{aligned}$$

(3) 先证 $|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|$，即证

$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta) \leqslant (|\alpha|+|\beta|)^2,$$

即证

$$(\alpha,\alpha)+2\mathrm{Re}((\alpha,\beta))+(\beta,\beta) \leqslant (\alpha,\alpha)+2|\alpha||\beta|+(\beta,\beta),$$

即证

$$\mathrm{Re}((\alpha,\beta)) \leqslant |\alpha||\beta|.$$

其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示 z 的实部. 由柯西-布尼雅可夫斯基不等式（题目 6），$|(\alpha,\beta)| \leqslant |\alpha||\beta|$，从而上式成立. 故 $|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|$ 成立. 此时

$$\begin{aligned} d(\alpha,\gamma) &= |\alpha-\beta| \\ &= |\alpha-\gamma+\gamma-\beta| \\ &\leqslant |\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta| \\ &= d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta). \end{aligned}$$

9. 由题目 5 的结论知，酉变换 $\boldsymbol{U}$ 的特征值的模 λ_i 为 1，即 $|\lambda_i|^2=\lambda_i\overline{\lambda}_i=1$. 并且很容易知道若一个线性变换 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且有特征值 λ，则其逆变换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $1/\lambda$. 从而 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 的特征值为 $1/\lambda_i=\overline{\lambda}_i, i=1,2,...,n$.

10. 直接验证，有

$$\begin{aligned} U'\overline{U}=E &\Longleftrightarrow (P+\mathrm{i}Q)'\overline{(P+\mathrm{i}Q)}=E \\ &\Longleftrightarrow (P'+\mathrm{i}Q')(P-\mathrm{i}Q)=E \\ &\Longleftrightarrow P'P+Q'Q+\mathrm{i}(QP'-P'Q)=E \\ &\Longleftrightarrow P'Q-Q'P=0, P'P+Q'Q=E. \end{aligned}$$

11. $U=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$，则 U 的第 i 个行向量为

$$u_i=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1,\omega^{i-1},\omega^{2(i-1)},...,\omega^{(n-1)(i-1)}\right).$$

因为 $\omega^{k(i-1)}=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}(i-1)\mathrm{i}}$，从而有

$$\begin{aligned}(u_i,u_j)&=\frac{1}{n}\left(1+\overline{\omega^{i-1}}\omega^{j-1}+\cdots+\overline{\omega^{(n-1)(i-1)}}\omega^{(n-1)(j-1)}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}(j-i)\mathrm{i}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}(n-1)(j-i)\mathrm{i}}\right)\\&=\begin{cases}\frac{1}{n}\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi(j-i)\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}(j-i)\mathrm{i}}}=0, & i\neq j;\\ 1, & i=j.\end{cases}\\&=\delta_{ij}.\end{aligned}$$

即 $u_1,u_2,...,u_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基，故由题目 2 的结论可知，U 是酉矩阵.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.2. 本题的矩阵其实是第二章第 5 节题目 14(**2**) 的矩阵.

12. 设酉矩阵

$$U=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}.$$

由题目 2 的结论可知，U 列向量构成 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基，从而有

$$|u_{11}|^2+|u_{21}|^2=1; \tag{6.5}$$

$$|u_{12}|^2+|u_{22}|^2=1; \tag{6.6}$$

$$\overline{u}_{11}u_{12}+\overline{u}_{21}u_{22}=0. \tag{6.7}$$

根据式 (6.5)，可设 $u_{11}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos\varphi, u_{21}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\sin\varphi$，其中 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. 我们以 α,β,φ 作为参数，求出剩下两个元素的表达式. 将 u_{11},u_{21} 代入式 (6.7)，有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\cos\varphi\cdot u_{12}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\sin\varphi\cdot u_{22}=0.$$

这里先假设 $\varphi\neq0,\pi/2$，从而 $\cos\varphi,\sin\varphi>0$，按上式可得

$$u_{12}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}\sin\varphi}{\cos\varphi}u_{22},$$

代入式 (6.6) 得

$$\begin{aligned}&\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}|u_{22}|^2+|u_{22}|^2=1\\ \Longrightarrow&|u_{22}|=\cos\varphi,|u_{12}|=\sin\varphi.\end{aligned}$$

故可设 $u_{12}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\sin\varphi,u_{22}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos\varphi$，代入式 (6.7) 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma-\alpha)}\cos\varphi\sin\varphi+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta-\beta)}\cos\varphi\sin\varphi=0\\ \Longrightarrow&\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma-\alpha)}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta-\beta)}\\ \Longrightarrow&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta-\beta+\alpha)}.\end{aligned}$$

保留 η 作为参数，从而有 $u_{12}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta-\beta+\alpha)}\sin\varphi$. 此时矩阵 U 可表示为

$$U=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos\varphi & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta-\beta+\alpha)}\sin\varphi\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\sin\varphi & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos\varphi\end{pmatrix} \tag{6.8}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta-\beta)}\end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

此为题目所求.

再考虑之前遗漏的情况，比如 $\varphi=\pi/2$，此时 $u_{11}=0,u_{21}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$，代入式 (6.7) 和式 (6.6)，容易求得 $u_{22}=0,u_{12}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma'}$（$\gamma'$ 为参数），只需在式 (6.8) 中令 $\eta=\beta+\gamma'-\alpha$ 即可得到该情况的酉矩阵. 这说明 $\varphi=\pi/2$ 已经包含在式 (6.8) 中了. $\varphi=0$ 的情况可类似验证.

13. 只需验证等式两边的变换对应的矩阵相同，变换和其共轭变换在 V 的一组基下的矩阵互为共轭转置，从而是证明是显然的.

(1) $\overline{E}'=E$.

(2) $\overline{\overline{A}'}'=A$.

(3) $\overline{A+B}'=\overline{A}'+\overline{B}'$.

14. 设 M 是正规变换 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，根据《教程》定理 3.1，M 内存在一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r$ 使得 $\boldsymbol{A}|_M$ 在该组基下的矩阵成对角形，即有 $\boldsymbol{A}\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i,i=1,2,...,r$，再根据《教程》命题 3.7，有 $\boldsymbol{A}^*\varepsilon_i=\overline{\lambda}_i\varepsilon_i,i=1,2,...,r$，这说明 M 也是 $\boldsymbol{A}^*$ 的不变子空间. 又按《教程》命题 3.6 知，$M^\perp$ 为 $(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.4. 本题是第 2 节题目 28 的酉空间情形，这是关于正规变换比较又价值的一个命题. 上面的手段取自《教程》定理 3.1 证明过程，只是此处 M 不再是一维子空间. 可以进一步分析出 $\boldsymbol{A}|_M$ 和 $\boldsymbol{A}|_{M^\perp}$ 仍然是正规变换.

15. 由《教程》定理 3.1，只需证明 $\boldsymbol{A}$ 是正规变换，注意到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = f(\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^* f(\boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}.$$

故命题得证.

16. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值，ξ 是属于该特征值的特征向量，根据《教程》命题 3.7，有 $\overline{\lambda}\xi = \boldsymbol{A}^*\xi = -\boldsymbol{A}\xi = -\lambda\xi$，即 $(\overline{\lambda}+\lambda)\xi = 0$. 从而 $\overline{\lambda}+\lambda = 0$. 显然 λ 是纯虚数.

17. 因为 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$，有 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha) = (\alpha,\boldsymbol{A}^*\alpha) = (\alpha,\boldsymbol{A}\alpha) = \overline{(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)}$，故 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)$ 是实数.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.5.

18. 取定 V 的一组标准正交基，则 E 是内积在该组基下的度量矩阵，设 α 在这组基下的坐标为 X，$\boldsymbol{A}$ 在该组基下的矩阵为 A，则根据题目 3 的结论有，$(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha) = (AX)'\overline{X} = X'A'\overline{X} = \overline{X}'AX$（最后一个等号是因为 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}$，且 $\overline{A}' = A$）. 故 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)$ 实际上是一个厄米特二次型. 根据《教程》定理 3.3 知，存在酉线性变数替换 $X = UY$ 使得该二次型化为标准形

$$(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha) = \overline{Y}'DY = \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 + \cdots + \lambda_n|y_n|^2.$$

其中 $\lambda_i\in\mathbb{R}, i = 1,2,...,n$ 恰为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 此时本题实际上已经转化为了第二节的题目 16，只不过此处 A 是复矩阵.

充分性，若 $\lambda_i > 0$，则根据上式知 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha) > 0$ 对任意非零向量 $\alpha\in V$ 都成立，故 $\boldsymbol{A}$ 为正定厄米特变换.

必要性，若 $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha) > 0$ 对任意非零向量 α 都成立，从而对任意 $X\in\mathbb{C}^n$，且 $X\neq 0$，$\overline{X}'AX > 0$. 对 A 的任意特征值 λ_i，设 A 属于该特征值的特征向量为 $X_i = (x_1,x_2,...,x_n)'\in\mathbb{C}^n$，则有

$$\overline{X}_i'AX_i = \overline{X}_i'(\lambda_i X_i) = \lambda_i\overline{X}_i'X_i = \lambda_i\left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right) > 0.$$

从而 $\lambda_i > 0$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.6. 用类似的方法可以证明，若 $\boldsymbol{A}$ 是半正定厄米特变换，则特征值 $\lambda_i \geqslant 0$.

19. 对任意可逆厄米特变换 $\boldsymbol{A}$，由 $(\boldsymbol{A}^2)^*=(\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{A}^2$ 知 $\boldsymbol{A}^2$ 也是厄米特变换. 又根据《教程》定理 3.2，V 内存在一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 使得 $\boldsymbol{A}\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$，且 $\lambda_i\in\mathbb{R},\lambda_i\neq 0$（否则 $\varepsilon_i\in\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，矛盾）. 所以有 $\boldsymbol{A}^2\varepsilon_i=\lambda_i^2\varepsilon_i$，从而 $\lambda_i^2,i=1,2,...,n$ 就是 $\boldsymbol{A}^2$ 的所有特征值（因为 $\boldsymbol{A}^2$ 在该组基下的矩阵的特征多项式的根都是 λ_i^2），且 $\lambda_i^2>0$，故由题目 18 的结论可知 $\boldsymbol{A}^2$ 是正定厄米特变换.

对任意的正定厄米特变换 $\boldsymbol{A}$，由《教程》定理 3.2，V 内存在一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 使得 $\boldsymbol{A}\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$，且由题目 18 的结论知 $\lambda_i>0$，则在 V 内定义一个线性变换 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{B}\varepsilon_i=\sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i$（此时 $\boldsymbol{B}$ 唯一存在）. 显然 $\boldsymbol{B}$ 在该组标准正交基下的矩阵为实对角矩阵（当然是厄米特矩阵），故 $\boldsymbol{B}$ 是厄米特变换，又 $\sqrt{\lambda_i},i=1,2,...,n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值且都为正，故 $\boldsymbol{B}$ 是正定的. 而因为 $\boldsymbol{B}^2$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 上的作用与 $\boldsymbol{A}$ 相同，所以 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$.

再证上一段 $\boldsymbol{B}$ 的唯一性，即证如果还存在正定厄米特变换 $\boldsymbol{B}_1$ 使得 $\boldsymbol{B}_1^2=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$，则必有 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}$，我们以下分两步证明：

(i) $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

先证明 $\boldsymbol{B}_1$ 的特征值总是 $\sqrt{\lambda_i}$,设 $\boldsymbol{B}_1$ 存在特征值 μ,显然 μ^2 是 $\boldsymbol{B}_1^2=\boldsymbol{A}$ 的特征值，故存在 $1\leqslant i\leqslant n$ 使得 $\mu^2=\lambda_i$，因为 $\boldsymbol{B}_1$ 正定，由题目 18 的结论知 $\mu>0$，从而 $\mu=\sqrt{\lambda_i}$. 即 $\boldsymbol{B}_1$ 的特征值只能是 $\sqrt{\lambda_i},1\leqslant i\leqslant n$.

再证明所有的 $\sqrt{\lambda_i}$ 都是 $\boldsymbol{B}_1$ 的特征值,用反证法,如果不是这样,不妨假设 $\boldsymbol{B}_1$ 的所有特征值为 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},...,\sqrt{\lambda_r}$，而 $\sqrt{\lambda_{r+1}},\sqrt{\lambda_{r+2}},...,\sqrt{\lambda_n}$ 不是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，由《教程》定理 3.2 知，存在 V 的一组标准正交基 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ 使得

$$\boldsymbol{B}_1\eta_1=\sqrt{\lambda_{k_1}}\eta_1,\boldsymbol{B}_1\eta_2=\sqrt{\lambda_{k_2}}\eta_2,...,\boldsymbol{B}_1\eta_n=\sqrt{\lambda_{k_n}}\eta_n.$$

其中 $1\leqslant k_1,k_2,...,k_n\leqslant r$，则由上式可得

$$\boldsymbol{A}\eta_1=\lambda_{k_1}\eta_1,\boldsymbol{A}\eta_2=\lambda_{k_2}\eta_2,...,\boldsymbol{A}\eta_n=\lambda_{k_n}\eta_n.$$

从而 $\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},...,\lambda_{k_n}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值（因为 $\boldsymbol{A}$ 在该组基下的矩阵的特征多项式的根都是 λ_{k_n}）. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，故存在 $1\leqslant i\leqslant n$，使得 $\lambda_{r+1}=\lambda_{k_i}$，即 $\sqrt{\lambda_{r+1}}=\sqrt{\lambda_{k_i}}$，但这意味着 $\sqrt{\lambda_{r+1}}$ 是 $\boldsymbol{B}_1$ 的特征值，与假设矛盾. 故所有的 $\sqrt{\lambda_i}$ 都是 $\boldsymbol{B}_1$ 的特征值.

(ii) $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}$ 属于相同特征值的特征子空间对应相同.

我们记 $V_{\lambda_i}^{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征子空间，$V_{\sqrt{\lambda_i}}^{\boldsymbol{B}}$ 和 $V_{\sqrt{\lambda_i}}^{\boldsymbol{B}_1}$ 分别为 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 各自的属于特征值 $\sqrt{\lambda_i}$ 的特征子空间. 则显然有

$$V_{\sqrt{\lambda_i}}^{\boldsymbol{B}}\subseteq V_{\lambda_i}^{\boldsymbol{A}},i=1,2,...,n.$$

从而

$$\dim V^{\boldsymbol{B}}_{\sqrt{\lambda_i}} \leqslant \dim V^{\boldsymbol{A}}_{\lambda_i}, i=1,2,...,n. \tag{6.10}$$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵都可对角化，故有

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V^{\boldsymbol{B}}_{\sqrt{\lambda_i}} = \bigoplus_{i=1}^{n} V^{\boldsymbol{A}}_{\lambda_i} = V.$$

[5]从而有

$$\sum_{i=1}^{n} \dim V^{\boldsymbol{B}}_{\sqrt{\lambda_i}} = \sum_{i=1}^{n} \dim V^{\boldsymbol{A}}_{\lambda_i} = n.$$

这说明不等式组 (6.10) 的所有等号都必须成立，即

$$\dim V^{\boldsymbol{B}}_{\sqrt{\lambda_i}} = \dim V^{\boldsymbol{A}}_{\lambda_i}, i=1,2,...,n.$$

从而

$$V^{\boldsymbol{B}}_{\sqrt{\lambda_i}} = V^{\boldsymbol{A}}_{\lambda_i}, i=1,2,...,n.$$

同理有

$$V^{\boldsymbol{B}_1}_{\sqrt{\lambda_i}} = V^{\boldsymbol{A}}_{\lambda_i}, i=1,2,...,n.$$

故

$$V^{\boldsymbol{B}}_{\sqrt{\lambda_i}} = V^{\boldsymbol{B}_1}_{\sqrt{\lambda_i}}, i=1,2,...,n.$$

现在在每个特征子空间中 $V^{\boldsymbol{B}}_{\sqrt{\lambda_i}}$ 取一组基（如存在两个或多个不同名字的相同空间，则只取其中某一个的一组基），将各组基合并之后就得到 V 的一组基，显然线性变换 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 在这组基的作用是相同的，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.7 和例 3.8. 用类似方法可以证明，对于半正定厄米特变换 $\boldsymbol{A}$，也存在唯一的半正定厄米特变换 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

20. 首先对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\alpha,\beta) = (\boldsymbol{A}^*\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta) = (\alpha,(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{A}^*\beta) = (\alpha,\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\beta).$$

[5]此处并未要求 λ_i 互不相同. 故这里的直和符号（以及接下来的求和符号）的意义应理解为，如果存在 $\lambda_{l_1}=\lambda_{l_2}=\cdots=\lambda_{l_k}, l_1<l_2<\cdots<l_k$，则将 $\lambda_{l_1},\lambda_{l_2},...,\lambda_{l_k}$ 视作同一个数，此时求和指标 i 只对 l_1（最小的下标）有效，而 $i=l_2,...,l_k$ 都不计入求和. 这样的写法是为了不让下标太复杂.

故 $(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 是厄米特变换. 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，显然 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆（因为在一组基下的矩阵 $\overline{A}'$ 可逆，其逆为 $\overline{A^{-1}}'$），从而对任意 $\alpha\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*\alpha\neq 0$（否则 $\alpha\in\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$）. 从而有

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\alpha,\alpha)=(\boldsymbol{A}^*\alpha,\boldsymbol{A}^*\alpha)>0.$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 正定.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.9. 显然，当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 至少是半正定厄米特变换.

21. 因为 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$，所以：

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是厄米特变换，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*$.

22. 因为 $(k\boldsymbol{A})^*=\overline{k}\boldsymbol{A}^*$，所以 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. $(\mathrm{i}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}))^*=\bar{\mathrm{i}}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*)=-\mathrm{i}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{i}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$.

23. (1)(2)$\Longrightarrow$(3): 设 $\overline{A}'=A, A\overline{A}'=E$，则 $A^2=AA=A\overline{A}'=E$.

(1)(3)$\Longrightarrow$(2): 设 $\overline{A}'=A, A^2=E$，则 $A\overline{A}'=AA=A^2=E$.

(2)(3)$\Longrightarrow$(1): 设 $A\overline{A}'=E, A^2=E$，则 $A=AA\overline{A}'=A^2\overline{A}'=\overline{A}'$.

24. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{U})^*=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B}$，又 $\boldsymbol{U}$ 是酉变换，所以 $\boldsymbol{U}^*=\boldsymbol{U}^{-1}$，从而有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\Longrightarrow\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2$. 由题目 19 的结论可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 而正定厄米特变换当然可逆（因为特征值都大于 0，矩阵行列式非零），从而 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.10.

25. 由题目 20 结论可知，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 是正定厄米特变换，再由题目 19 的结论知，存在唯一的正定厄米特变换 $\boldsymbol{B}_1$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}_1^2$，因为正定厄米特变换可逆，所以有 $\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}_1^{-1}=\boldsymbol{E}$. 又因为可逆厄米特变换的逆变换也是厄米特变换（可用矩阵说明），从而 $(\boldsymbol{B}_1^{-1})^*=\boldsymbol{B}_1^{-1}$，$\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}_1^{-1}=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{E}$，令 $\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^*=\boldsymbol{E}$，从而 $\boldsymbol{U}_1$ 是酉变换，并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_1$. 而对另一种形式的分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{B}_2$，只需考虑 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{B}_2^2$ 即可，推理过程是类似的.

我们来证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_1$ 的唯一性，若存在两种相同形式的分解，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{U}_3$，则 $\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_3^{-1}$，又 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_3\in U(n)\Longrightarrow\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_3^{-1}\in U(n)$，从而由题目 24 的结论可知 $\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{B}_1$.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.12. 本题的分解对应矩阵理论里的极分解. 上面这种证明思路是如何想到的？只需从结果出发，倒过来推导即可. 非可逆的线性变换也可以进行上述分解，此时分解式中的厄米特变换是半正定的，且酉变换是不唯一的（请参考《指南》第五章例 3.13）.

26. 由《教程》定理 3.3 知，对任意厄米特二次型 $\overline{X}'AX$，存在酉线性变数替换 $X=TY$ 使其变成标准形

$$\overline{X}'AX=\overline{Y}'DY=\lambda_1\overline{y}_1y_1+\lambda_2\overline{y}_2y_2+\cdots+\lambda_n\overline{y}_ny_n.$$

其中 $\lambda_i, i=1,2,...,n$ 恰为 A 的特征值. 现在 A 是正定的，由题目 18 的结论知 $\lambda_i>0$，从而对 $\overline{Y}'DY$ 再行可逆线性变数替换

$$y_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}z_i, i=1,2,...,n.$$

使其化为

$$\overline{z}_1z_1+\overline{z}_2z_2+\cdots+\overline{z}_nz_n.$$

将上述两个线性变数替换合并即可.

27. 由题目 26 的结论可知，存在可逆线性变数替换 $X=T_1Z$ 使得

$$f=\overline{Z}'\overline{T}_1'AT_1Z=\overline{z}_1z_1+\overline{z}_2z_2+\cdots+\overline{z}_nz_n.$$

即 $\overline{T}_1'AT_1=E$. 现在也对 g 施行可逆线性变数替换 $X=T_1Y$ 得到

$$g=\overline{X}'BX=Y'\overline{T}'BTY.$$

现在对于厄米特二次型 g，由《教程》定理 3.3，存在酉线性变数替换 $Y=UZ$ 使得

$$g=d_1\overline{z}_1z_1+d_2\overline{z}_2z_2+\cdots+d_n\overline{z}_nz_n.$$

其中 U 是一个酉矩阵，取 $T=T_1U$，则 g 在可逆线性变数替换 $X=TZ=T_1UZ$ 变为上式，而 $f=\overline{X}'AX$ 经过 $X=TZ$ 变为

$$\begin{aligned}f&=\overline{X}'AX=\overline{T_1UZ}'AT_1UZ\\&=\overline{Z}'\overline{U}'\overline{T}_1'AT_1UZ=\overline{Z}'\overline{U}'EUZ\\&=\overline{Z}'Z=\overline{z}_1z_1+\overline{z}_2z_2+\cdots+\overline{z}_nz_n.\end{aligned}$$

批注. 本题实际上等同于第 2 节题目 18.

28. 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换，那么不难推知 $\boldsymbol{AB}$ 是厄米特变换，问题等价于证明 $\boldsymbol{AB}$ 是半正定的，但题目并未要求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换，$\boldsymbol{AB}$ 当然不一定是厄米特变换，更不必提半正定了.

然而，如果仅仅想要 $\boldsymbol{AB}$ 的矩阵能对角化，且特征值非负，并不一定需要 $\boldsymbol{AB}$ 本身是半正定厄米特变换，$\boldsymbol{AB}$ 在 V 的一组基下的矩阵相似于一个半正定厄米特矩阵也是可以的.

根据题目 19 的结论（以及它的半正定情形），存在唯一的正定厄米特变换 $\boldsymbol{A}_1$ 和唯一的半正定厄米特变换 $\boldsymbol{B}_1$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1^2,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1^2$. 取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$. 因为 $\boldsymbol{A}_1$ 正定，从而可逆，有

$$\boldsymbol{CC}^*=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1)^*=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_1^{-1}(\boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{B}_1^2)\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_1^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}_1.$$

又根据题目 20 的结论（需要改为半正定情形，此时不需要 $\boldsymbol{C}$ 可逆），$\boldsymbol{CC}^*$ 是一个半正定厄米特变换，由《教程》定理 3.2 及题目 18 的结论（半正定情形）知 V 存在一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 使得 $\boldsymbol{CC}^*$ 在这组基下的矩阵成对角形 D，且其对角元（特征值）皆为非负实数. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$ 在该组基下的矩阵分别为 A,B,A_1,B_1，则有

$$D=A_1^{-1}(AB)A_1.$$

因此 AB 与 D 相似. 这说明 V 中存在一组基使得 $\boldsymbol{AB}$ 在这组基下的矩阵为 D.

批注. 本题可参考《指南》第五章例 3.14.

29. 在本题中请注意区别复数的共轭和模 M 剩余类（符号都是上划线）.

(1) 以下统一用 $x_M,x_{M^\perp}$ 这样的下标符号来分别表示 V 中的向量 x 在 $M,M^\perp$ 的分量（显然对每个 $x\in V$，$x_M,x_{M^\perp}$ 是唯一的，且算符 $\cdot_M,\cdot_{M^\perp}$ 是线性的）.

首先我们要验证该内积定义是无矛盾的，即参与内积运算的剩余类无论取什么向量作为代表，结果都应该相同. 只验证左元，设 $\overline{\alpha}=\overline{\gamma}\in V/M$，根据商空间的性质，有 $\alpha-\gamma\in M$. 故

$$0=(\alpha-\gamma)_{M^\perp}=\alpha_{M^\perp}-\gamma_{M^\perp},$$

即 $\alpha_{M^\perp}=\gamma_{M^\perp}$，从而对任意 $\beta\in V$ 有

$$(\overline{\alpha},\overline{\beta})=(\alpha_{M^\perp},\beta_{M^\perp})=(\gamma_{M^\perp},\beta_{M^\perp})=(\overline{\gamma},\overline{\beta}).$$

这说明该内积的定义对左元是无矛盾的（对右元同理）.

再验证内积的三条性质

$$\begin{aligned}(\lambda\overline{\alpha}+\mu\overline{\gamma},\beta)&=(\overline{\lambda\alpha+\mu\gamma},\overline{\beta})\\&=((\lambda\alpha+\mu\gamma)_{M^\perp},\beta_{M^\perp})\\&=(\lambda\alpha_{M^\perp}+\mu\gamma_{M^\perp},\beta_{M^\perp})\\&=\lambda(\alpha_{M^\perp},\beta_{M^\perp})+\mu(\gamma,\beta_{M^\perp})\\&=\lambda(\overline{\alpha},\overline{\beta})+\mu(\overline{\gamma},\overline{\beta});\end{aligned}$$

$$(\overline{\alpha},\overline{\beta})=(\alpha_{M^\perp},\beta_{M^\perp})=\overline{(\beta_{M^\perp},\alpha_{M^\perp})}=\overline{(\overline{\beta},\overline{\alpha})};$$

$$(\overline{\alpha},\overline{\alpha})=(\alpha_{M^\perp},\alpha_{M^\perp})\geqslant 0,$$

$$(\overline{\alpha},\overline{\alpha})=0\Leftrightarrow(\alpha_{M^\perp},\alpha_{M^\perp})=0\Leftrightarrow\alpha_{M^\perp}=0\Leftrightarrow\alpha\in M\Leftrightarrow\overline{\alpha}=\overline{0}.$$

故 V/M 关于此内积成酉空间.

(2) 本题的结论在《教程》中实际上已经提到过，请回忆《教程》第四章命题 4.8[6]，按照这个命题，因为 $\boldsymbol{A}$ 是复线性变换，其特征多项式的根当然属于 $\mathbb{C}$，因此题目结论成立.

当然，细看之下，又似乎稍有不同，因为命题 4.8 仅仅要求 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的一组基下的矩阵为上三角矩阵，而本题中由于 V 定义了内积，还要求考虑 V 中取的基是不是标准正交基.

容易想到，如果我们找到了 V 的某一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$，使得 $\boldsymbol{A}$ 在该组基下的矩阵成上三角矩阵 T，只需要直接对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 进行施密特正交化和单位化变成标准正交基 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ 就满足题目要求了. 这是因为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ 的过渡矩阵 T_1 也是一个上三角矩阵（可以参考第 1 节题目 18 的证明过程），设 $\boldsymbol{A}$ 在 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ 下的矩阵为 T_2，则根据线性变换在不同基下的矩阵的相似关系有

$$T_2=T_1^{-1}TT_1.$$

由于上三角矩阵的逆也是上三角矩阵（第二章第 6 节题目 18），故 T_2 确实是上三角矩阵.

除上述方法外，也可以利用 **(1)** 中给商空间定义的内积结构，重新推导题目结论，其过程本质上和《教程》命题 4.6 的证明过程是一样的，只需最后加一步验证工作："在商空间 V/M 中取得的标准正交基，对应到 V 中依然是标准正交的" 即可.

批注. 本题 **(1)** 可参考《指南》第五章例 3.3.

[6]这个命题其实是 Jordan 标准形理论的特殊情况，它出现在《教程》中第四章的主要意义在于初次引入利用商空间处理线性变换的方法，这种方法其实更偏向一种几何上的观点，在《教程》第六章推导 Jordan 标准形理论时，它将会被大规模运用.

参考文献

[1] 蓝以中. 高等代数简明教程. 北京大学出版社, 2002.

[2] 蓝以中. 高等代数学习指南. 北京大学出版社, 2008.

[3] 谢启鸿. 高等代数中若干概念在基域扩张下的不变性. 大学数学, 31(6):6, 2015.