

## Домашнее задание № 2

1. Рассмотрим задачу бинарной классификации ( $Y = \{+1, -1\}$ ). Вектор правильных ответов:  
 $(y_1, \dots, y_{10}) = (-1, +1, -1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, +1)$ .  
Вектор решений некоего классификатора:  
 $(a_1, \dots, a_{10}) = (+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, +1)$ .  
Не используя пакет scikit-learn, **подсчитайте**: true positive rate, false positive rate, true negative rate, false negative rate, accuracy, precision, recall,  $F_1$ -score.
2. **Объяснить**, почему добавление  $l_1$ -регуляризации в задачах классификации либо регрессии приводит к отбору (выбросу несущественных) признаков.
3. **Опишите** процедуру **наискорейшего** градиентного спуска. **Зачем** она применяется?
4. **Продифференцировать** формулу вероятности для логистической регрессии по  $w$ :  $p(w) = \frac{1}{1+e^{-wx}}$ . Указание: получить ответ в виде  $p'(w) = F(p(w))G(x)$ .
5. Предположим, что выборка для решения задачи бинарной классификации ( $X^m = (x_i, y_i)_{i=1}^m$ ,  $Y = \{+1, -1\}$ ) линейно разделима:  $\exists w, w_0$  т.ч.  $(\langle w, x_i \rangle - w_0)y_i > 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ . **Доказать**, что существует вектор параметров  $w$  и свободный член  $w_0$  т.ч.: а)  $(\langle w, x_i \rangle - w_0)y_i \geq 1$ ; б) существует по крайней мере одна точка на каждой из границ:  $\exists x_{\pm} \in X^m : \langle w, x_{\pm} \rangle - w_0 = \pm 1$
6. **Доказать**, что любые  $m + 1$  векторов размерности  $n$  из  $X = \mathbb{R}^n$  могут быть разделены на любые два класса с помощью мономиального отображения  $\varphi : X \rightarrow \{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}\}_{i_1+i_2+\dots+i_n \leq m}$  степени не больше  $m$ .
7. Методом опорных векторов **найти аналитическое решение** для разделения классов  $A = \{x_1, x_2\}$  и  $B = \{x_3\}$ , если  $x_1 = (1, 1)$ ,  $x_2 = (1, 5)$ ,  $x_3 = (1, 3)$ . Указание: можно использовать полиномиальное ядро.

8. Предположим, что в задаче бинарной классификации точек на плоскости все точки одного класса лежат внутри эллипса  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ,  $a, b > 0$ , а все точки другого класса – снаружи этого эллипса. **Постройте** ядро, которое позволит линейному классификатору в новом пространстве разделить эти два класса без ошибки. **Какая** будет **размерность** спрямляющего пространства  $H$ ?
9. **Найти** размерность спрямляющего пространства  $H$  для ядра  $K(x_1, x_2) = (\langle x_1, x_2 \rangle + 1)^2$ , если  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ .
10. **Доказать**, что радиальная функция  $K(x_1, x_2) = e^{-\gamma \|x_1 - x_2\|^2}$  является ядром.