Методы Оптимизации, ДЗ №1

Начинкин Илья, 695

13 сентября 2018 г.

Задача 1

Множество Афинно $\Longleftrightarrow$ его пересечение с любой прямой афинно

Решение:

Покажем сначала, что пересечение афинных множеств афинно. Если пересечение содержит всего одну точку или пусто, то доказано. Если есть хотя бы две точки, то так как точки лежат в каждом из множеств, значит и вся прямая, проходящая через эти две точки, лежит в каждом из множеств, а, значит, и в пересечении. Следовательно, доказано - пересечение афинных множеств афинно.

Теперь покажем наше утверждение:

$\Longrightarrow$: Прямая очевидно является афинным множеством, а пересечение афинных - афинно, значит пересечение афинного множества с любой прямой будет афинным.

$\Longleftarrow$: Если, $\mathcal{X}$ - пустое или состоит из одной точки, то оно афинно. Пусть $x, y \in \mathcal{X}$. Через две точки проходит прямая, а пересечение с любой прямой афинно, значит, так как $x, y \in \mathcal{X} \cap$Прямая, следовательно, вся прямая, проходящая через x, y лежит в пересечении $\mathcal{X}$ и себя самой. Значит, прямая лежит в $\mathcal{X}$. А следовательно, $\mathcal{X}$ - афинно.

Задача 2

$S_1, S_2, \ldots, S_k$ - непустые множества из $\mathbb{R}^n$. Доказать, что $\mathbf{cone}(\bigcup_{i=1}^k S_i) = \sum_{i=1}^k \mathbf{cone}(S_i)$. $\mathbf{conv}(\sum_{i=1}^k S_i) = \sum_{i=1}^k \mathbf{conv}(S_i)$

Решение:

1ое равенство:

$\subseteq$: Пусть $x \in \mathbf{cone}(\bigcup_{i=1}^k S_i)$. То есть $x = \sum_{i=1}^m \theta_i x_i, \forall i \theta_i \geq 0, \exists j x_i \in S_j, m \leq k$. Следовательно, $x \in \sum_{i=1}^m \theta_{j_i} S_{n_i} \subseteq \sum_{n=1}^k \theta_i S_i$ - действительно, для оставшихся S_i возьмем $\theta_i = 0$. Т.к. $\forall i = 1 \ldots k$, $\theta_i S_i \subseteq \mathbf{cone}(S_i)$, то $x \in \sum_{i=1}^k \mathbf{cone}(S_i)$. Доказано.

$\supseteq$: Пусть $x \in \sum_{i=1}^k \mathbf{cone}(S_i)$. $x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \theta_{ij} x_{ij}$, где $\forall i \forall j$ $\theta_{ij} \geq 0, x_{ij} \in S_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k S_i$. Следовательно, $x \in \mathbf{cone}(\bigcup_{i=1}^k S_i)$. Доказано.

2ое равенство:

$\subseteq$: Пусть $x \in \mathbf{conv}(\sum_{i=1}^k S_i)$. Значит, $x = \sum_{i=1}^m \theta_i \sum_{j=1}^k x_{ij} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \theta_i x_{ij}$, где $\theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, x_{ij} \in S_j$. А значит, $x \in \sum_{i=1}^k \mathbf{conv}(S_i)$. Доказано.

$\supseteq$: Пусть $x \in \sum_{i=1}^k \mathbf{conv}(S_i)$. Значит, $x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \theta_{ij} x_{ij}$, где $\theta_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \theta_{ij} = 1, x_{ij} \in S_i$. Аналогично переворачиваем суммы, дополняя перед этим множества θ нулями, так чтобы все m_i были одинаковы и получаем ответ. Доказано.

Задача 3

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпукло $\Longleftrightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$ для всех неотрицательных α, β

$\Longrightarrow$:

$\subseteq$: Пусть $x \in (\alpha + \beta)S$, т.е. $x = (\alpha + \beta)x_1 = \alpha x_1 + \beta x_1$, $x_1 \in S$. Доказано.

$\supseteq$ Пусть $x \in \alpha S + \beta S$, т.е. $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, $x_1, x_2 \in S$. Так как S - выпукло, то $\forall \theta \in [0,1] \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$. Возьмем $\theta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, тогда $\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha+\beta)(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \in (\alpha+\beta)S$. Доказано.

$\Longleftarrow$**:** Пусть теперь $(\alpha+\beta)S = \alpha S + \beta S$. Покажем, что S - выпукло. Пусть $x_1, x_2 \in S, \theta \in [0,1]$, $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \theta S + (1-\theta)S = (\theta + 1 - \theta)S = S$. Доказано.