Методы Оптимизации, ДЗ №2

Начинкин Илья, 695

4 октября 2018 г.

Задача 1

$f(x,y) = \frac{x^2}{y}, domf = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 \| y > 0\}$

Решение:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}; \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2};$$

Посчитаем вторые производные для Гессиана

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{x^2}{y^3};$$

$$\bigtriangledown^2 f(x) \succeq 0$$

, так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, det(H) = 0$$

Значит $f(x)$ - выпукла

Задача 3

Проверить на выпуклость: $f(x) = \exp x - 1; f(x_1, x_2) = x_1 * x_2, x \in \mathcal{R}^2_{++}; f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 * x_2}, x \in \mathcal{R}^2_{++}$

Решение:

1.
$$f(x) = \exp x - 1$$
$$f''(x) = e^x \geq 0$$

   , Значит, выпукла.

2.
$$f(x_1, x_2) = x_1 * x_2, x \in \mathcal{R}^2_{++}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$$
$$detH = -1$$

   , Значит, функция невыпукла.

3.
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 * x_2}, x \in \mathcal{R}^2_{++}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{2}{x_1^3 * x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{2}{x_1 * x_2^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{x_1^2 * x_2^2}$$

$$\bigtriangledown^2 f(x) \succeq 0$$

, так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, det(H) = \frac{3}{x_1^4 * x_2^4} > 0$$

Значит, она выпукла.

Задача 4

$D(p, q) = \Sigma_{i=1}^{n}(p_i * log(\frac{p_i}{q_i}) - p_i + q_i \; p, q \in \mathcal{R}_{++}^2$

Доказать, $D(p, q) \geq 0; \forall p, q \in \mathcal{R}_{++}^2$.

Кроме того $D(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

Решение:

Воспользуемся подсказкой:

$D(p, q) = f(p) - f(q) - \bigtriangledown f(q)^T * (p - q), f(p) = \Sigma_{i=1}^{n} p_i * log(p_i)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2} = \frac{1}{p_i}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} = 0$$

То есть Гессиан - есть диагональная матрица с положительными значениями на диагонали, то есть $\bigtriangledown^2 f(x) \succeq 0$, то есть выпукла, значит по критерию 1 выпуклости: Получается, что $D(p, q) \geq 0$

Другой пункт, из того, что $p = q$, очевидно следует, что $D(p, q) = 0$

Задача 2

Показать, что функция вогнута: $f(x) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}, x \in \mathcal{R}_{++}^2$

Решение:

Лемма: $f(x)$ - вогнута $\Leftrightarrow log(f(x))$ - вогнута

Док-во: f - вогнута $\Leftrightarrow \forall x1, x2 \in C$ - выпуклого; $\forall 0 \leq \lambda \leq 1 \; f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$log(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \geq log(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \geq \lambda log(f(x_1)) + (1-\lambda) log(f(x_2))$ - (так как log - вогнута).**ч.т.д.**

Теперь возмем $log(f(x)) = \frac{1}{n} * \Sigma_{i=1}^{n} log(x_i)$

Легко понять, что $\bigtriangledown^2 f(x) = Diag(-\frac{1}{n*x_1^2}, .., -\frac{1}{n*x_n^2}) \preceq 0$, то есть $log(f(x)$ - вогнута, а значит $f(x)$ - вогнута