Методы Оптимизации, ДЗ №2

Начинкин Илья, 695

20 сентября 2018 г.

Задача 1

$f = \|X\|_2$ Найти $\bigtriangledown f(x), f^{''}(x)$. Проверить гессиан на на (полу)определенность (положительную, отрицательную).

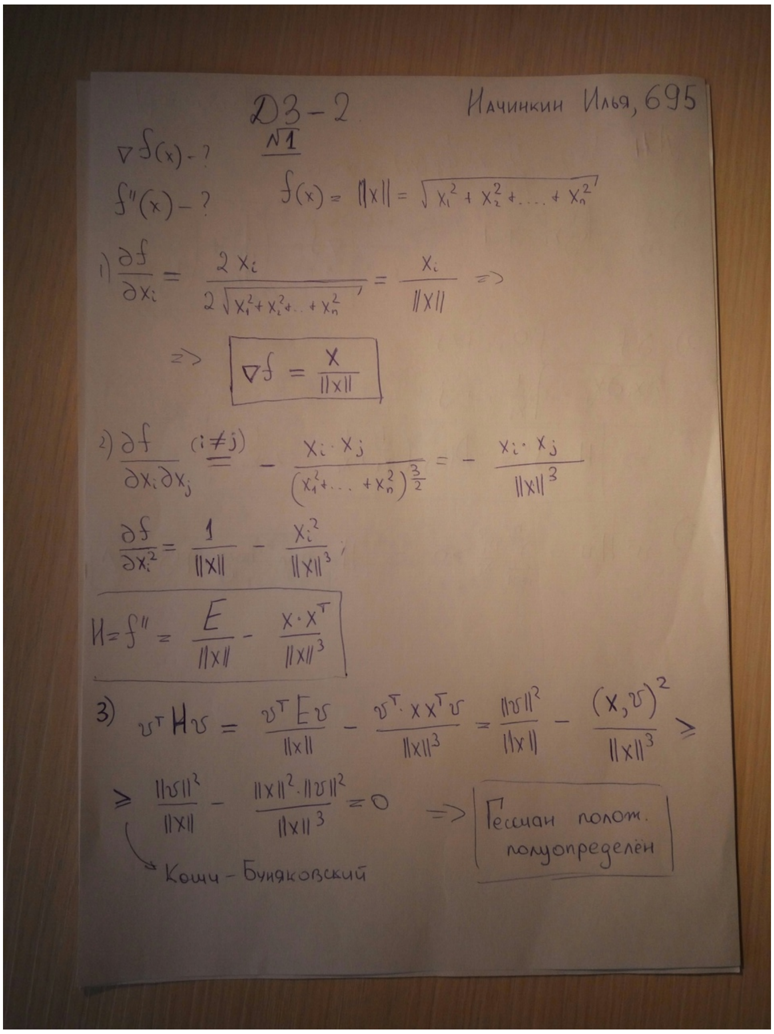
Решение

$$\bigtriangledown f(x) = \frac{\vec{X}}{\|X\|}$$

$$H = f^{''}(x) = \frac{E}{\|X\|} - \frac{X^T X}{\|X\|^3}$$

$$\forall v; v^T H v \geq 0$$

. То есть гессиан положительно определен.



ДЗ-2 Начинкин Илья, 695

№1

$\nabla f(x)$ - ?

$f''(x)$ - ?

$$f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

1) $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f = \frac{x}{\|x\|}}$$

2) $$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \underset{(i \neq j)}{=} -\frac{x_i \cdot x_j}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_i \cdot x_j}{\|x\|^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i^2}{\|x\|^3};$$

$$\boxed{H = f'' = \frac{E}{\|x\|} - \frac{x \cdot x^T}{\|x\|^3}}$$

3) $$v^T H v = \frac{v^T E v}{\|x\|} - \frac{v^T \cdot x x^T v}{\|x\|^3} = \frac{\|v\|^2}{\|x\|} - \frac{(x,v)^2}{\|x\|^3} \geq$$

$$\geq \frac{\|v\|^2}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2 \cdot \|v\|^2}{\|x\|^3} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Гессиан полож. полуопределён}}$$

Коши - Буняковский

Задача 2

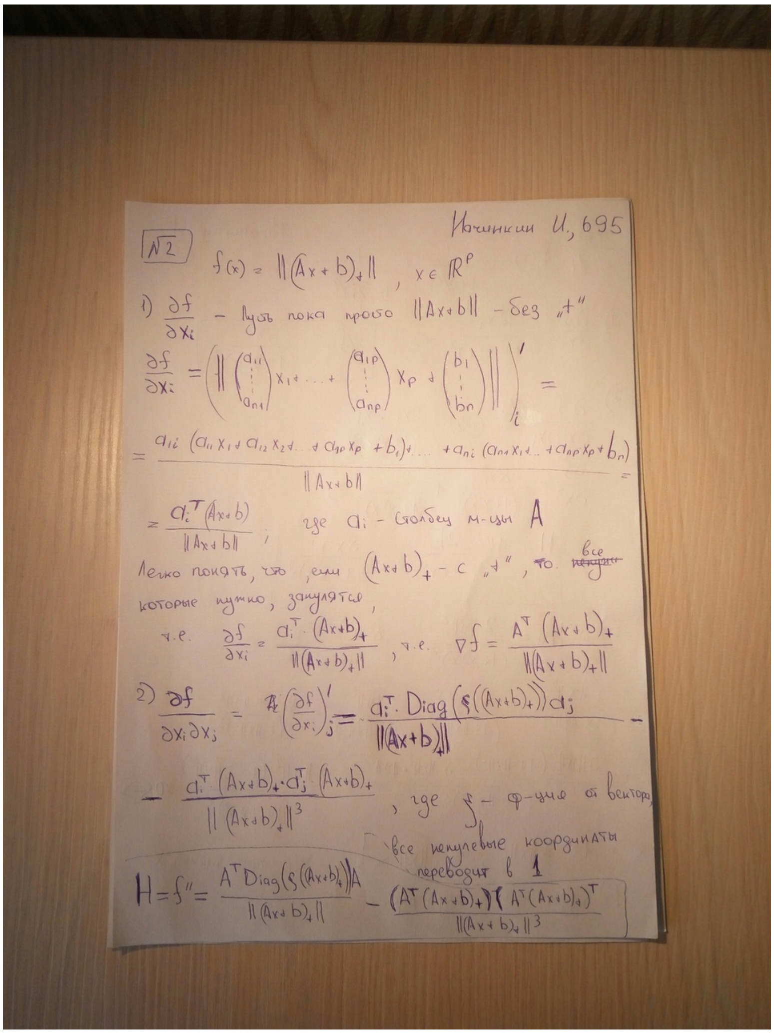
$f = \|(Ax+b)_+\|$.

Решение

$$\nabla f(x) = \frac{A^T(Ax+b)_+}{\|(Ax+b)_+\|}$$

$$H = f^{''}(x) = \frac{A^T Diag(\xi((Ax+b)_+)A)}{\|(Ax+b)_+\|} - \frac{A^T(Ax+b)_+ * (A^T(Ax+b)_+)^T}{(\|(Ax+b)_+\|)^3},$$

Где $\xi-$ функция от вектора, которые переводит все ненулевые координаты в 1



Ночинкин И., 695

$\boxed{№2}$ $f(x) = \|(Ax+b)_+\|$, $x \in \mathbb{R}^p$

1) $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – пусть пока просто $\|Ax+b\|$ – без „+"

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} x_p + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\|\right)'_i =$$

$$= \frac{a_{1i}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + b_1) + \ldots + a_{ni}(a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p + b_n)}{\|Ax+b\|} =$$

$$= \frac{a_i^T(Ax+b)}{\|Ax+b\|},$$ где a_i – столбец м-цы A

Легко понять, что, если $(Ax+b)_+$ – с „+", то ~~нулевые~~ все которые нужно, зануляться,

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{a_i^T \cdot (Ax+b)_+}{\|(Ax+b)_+\|}$, т.е. $\nabla f = \frac{A^T(Ax+b)_+}{\|(Ax+b)_+\|}$

2) $$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)'_j = \frac{a_i^T \cdot Diag(\xi((Ax+b)_+))a_j}{\|(Ax+b)_+\|} - \frac{a_i^T(Ax+b)_+ \cdot a_j^T(Ax+b)_+}{\|(Ax+b)_+\|^3},$$ где ξ – ф-ция от вектора, все ненулевые координаты переводит в 1

$$H = f'' = \frac{A^T Diag(\xi((Ax+b)_+))A}{\|(Ax+b)_+\|} - \frac{(A^T(Ax+b)_+)(A^T(Ax+b)_+)^T}{\|(Ax+b)_+\|^3}$$

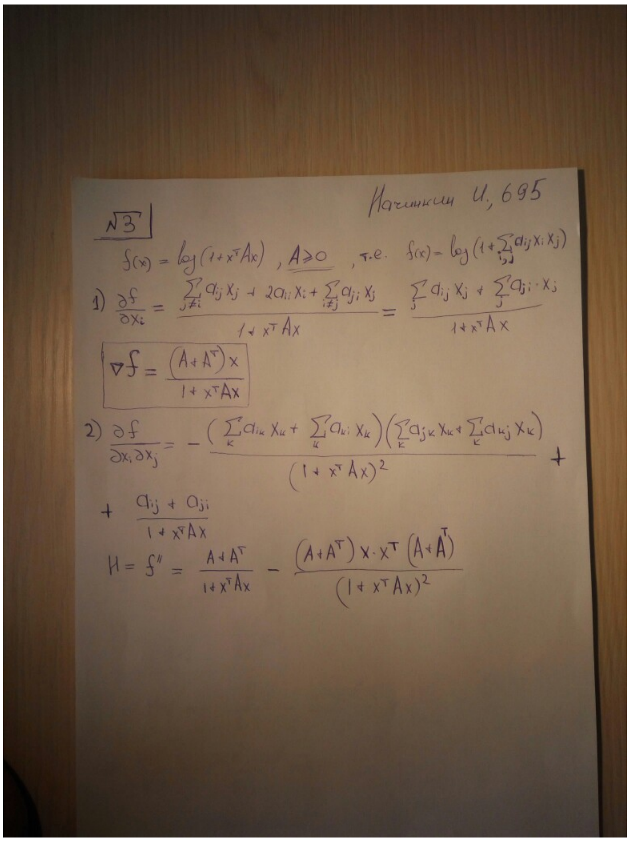
Задача 3

$f = log(1+x^TAx), A \geq 0$

Решение

$$\nabla f(x) = \frac{(A+A^T)x}{1+x^TAx}$$

$$H = f^{''}(x) = \frac{(A+A^T)}{1+x^TAx} - \frac{(A+A^T)x * x^T((A+A^T))}{(1+x^TAx)^2}$$



Начинкин И, 695

№3

$f(x) = \log(1 + x^T A x)$, $A \succeq 0$, т.е. $f(x) = \log(1 + \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j)$

1) $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j + 2 a_{ii} x_i + \sum_{i \neq j} a_{ji} x_j}{1 + x^T A x} = \frac{\sum_j a_{ij} x_j + \sum_j a_{ji} x_j}{1 + x^T A x}$

$\boxed{\nabla f = \frac{(A + A^T) x}{1 + x^T A x}}$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\left(\sum_k a_{ik} x_k + \sum_k a_{ki} x_k\right)\left(\sum_k a_{jk} x_k + \sum_k a_{kj} x_k\right)}{(1 + x^T A x)^2} + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{1 + x^T A x}$

$H = f'' = \frac{A + A^T}{1 + x^T A x} - \frac{(A + A^T) x \cdot x^T (A + A^T)}{(1 + x^T A x)^2}$

Задача 4

$f = \sum_{i=1}^n x_i log(x_i), x \geq 0$

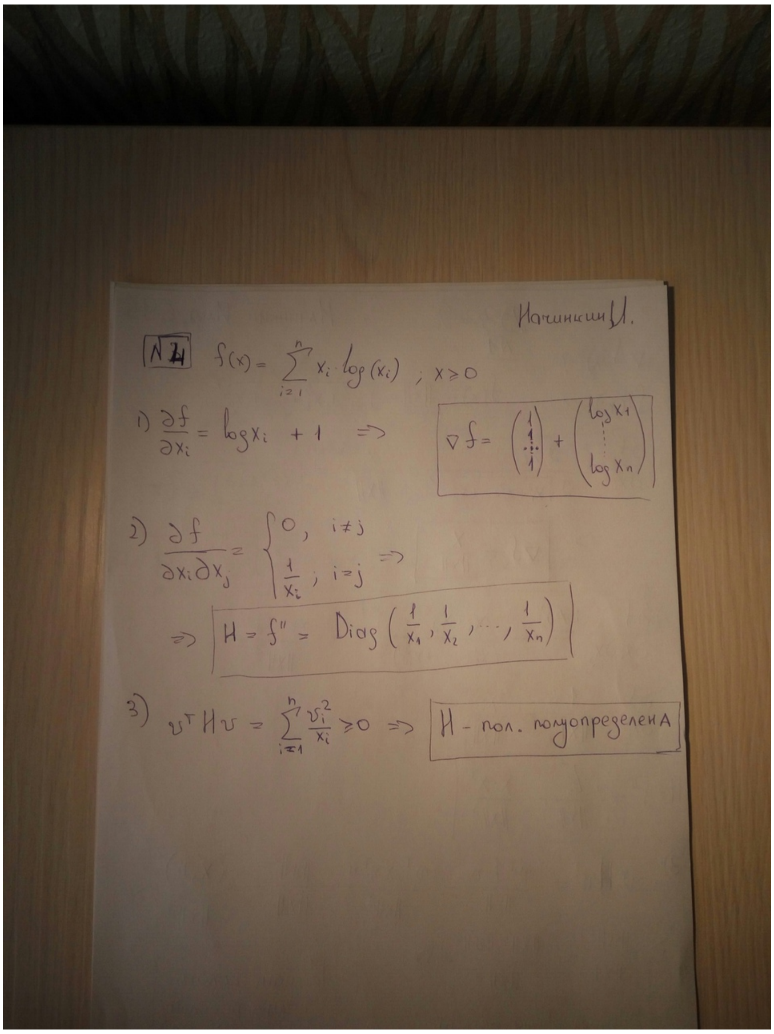
Решение

$$\bigtriangledown f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} log(x_1) \\ log(x_2) \\ ... \\ log(x_n) \end{pmatrix}$$

$$H = f^{''}(x) = Diag(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n})$$

$$v^T Diag(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}) v = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{x_i} \geq 0$$

Значит она положительно полуопределена



Начинкин И.

№4 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i)$; $x \geq 0$

1) $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \log x_i + 1 \Rightarrow$ $\boxed{\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log x_1 \\ \vdots \\ \log x_n \end{pmatrix}}$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{x_i}, & i = j \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{H = f'' = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)}$

3) $v^T H v = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2}{x_i} \geq 0 \Rightarrow$ $\boxed{H\text{ - пол. полуопределена}}$

Задача 5

$f = \frac{-1}{1+x^T x}$

Решение

$$\bigtriangledown f(x) = \frac{2x}{1+x^T x}$$

$$H = f^{''}(x) = \frac{2E}{(1+x^T x)^2} - \frac{8x * x^T}{(1+x^T x)^3}$$

$$v^T H v = \frac{2\left\|v\right\|^2 (1 - 3\left\|x\right\|^2)}{(1+\left\|x\right\|^2)^3} \geq 0 \Longleftrightarrow \left\|x\right\|^2 \leq \frac{1}{3}$$

При таких x гессиан положительно полуопределен.

Начинкин И., 695

№5

$$f(x) = \frac{-1}{1+x^T x} = \frac{-1}{1+\sum_i x_i^2}$$

1) $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{(1+x^T x)^2} \Rightarrow \boxed{\nabla f = \frac{2x}{(1+x^T x)^2}}$$

2) $$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \overset{(i \neq j)}{=} (-2) \cdot \frac{2x_i \cdot 2x_j}{(1+x^T x)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^2} = -\frac{8x_i^2}{(1+x^T x)^3} + \frac{2}{(1+x^T x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = f'' = \frac{2E}{(1+x^T x)^2} - \frac{8x \cdot x^T}{(1+x^T x)^3}}$$

3) $$v^T H v = \frac{2\|v\|^2}{(1+x^T x)^2} - \frac{8 v^T x \cdot x^T v}{(1+x^T x)^3} =$$

$$= \frac{2\|v\|^2}{(1+\|x\|^2)^2} - \frac{8(x,v)^2}{(1+\|x\|^2)^3} \geqslant \frac{2\|v\|^2}{(1+\|x\|^2)^2} - \frac{8\|x\|^2 \cdot \|v\|^2}{(1+\|x\|^2)^3} =$$

$$= \frac{2\|v\|^2(1+\|x\|^2) - 8\|x\|^2 \cdot \|v\|^2}{(1+\|x\|^2)^3} = \frac{2\|v\|^2 \cdot (1-3\|x\|^2)}{(1+\|x\|^2)^3} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 \geq 3\|x\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 \leqslant \frac{1}{3}$ – т.е. при таких x

H – будет пол. полуопред.