Методы Оптимизации, ДЗ №5

Начинкин Илья, 695

27 октября 2018 г.

Задача №1

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to min$$

$$s.t. x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$

Построить двойственную задачу (ДЗ), решить ее и по решению ДЗ найти решение прямой задачи.

Решение:

$L(x, \mu, \lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 4) + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 5)$
$g(\mu, \lambda) = \inf_x L(x, \mu, \lambda)$ - двойств. функция. Посчитаем ее:
$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 6 + \lambda + 2\mu x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{6-\lambda}{2(1+\mu)}$
$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 + 2\lambda + 2\mu x_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{2-\lambda}{1+\mu}$
Подставим эти значения в лангранжиан и получим двойств. функцию
То есть двойств. функция $g(\mu, \lambda) = -\frac{5\lambda^2 + 16\lambda\mu - 12\lambda + 20\mu^2 - 32\mu}{4(\mu+1)}$
Двойств. задача:

$$g(\mu, \lambda) \to max$$

$$s.t. \mu \geq 0$$

Условие Слейтера выполнено , т.к. при $x_1 = 0, x_2 = 2$ выполнено $x_1^2 + x_2^2 < 5$ - То есть строгое неравенство $\Longrightarrow$ сильная двойственность.

Ищем решение двойств. задачи:

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \frac{-5\lambda - 8\mu + 6}{2\mu + 2} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{5\lambda^2 - 28\lambda - 20\mu^2 - 40\mu + 32}{4(\mu + 1)^2} = 0$$

Решаем эту систему и получаем: $\mu = -\frac{7}{3}$ - Но это неподходит под ограничение. А другое решение
$\mu^* = \frac{1}{3}, \lambda^* = \frac{2}{3}$ - подходит. Это и есть решение двойств. задачи. Тогда $x_1^* = 2, x_1^* = 1 \Longrightarrow f(x) = 2$

Ответ:$f(x) = 2$

Задача №2

$$max(3x_1 + 2x_2)$$

$$s.t. x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$6x_1 - x_2 = 4$$

$$x_! + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Найти зазор двойственности, решения прямой и двойств. задачи.

Решение:

эта задача экв. нахождению $-min(-3x_1 - 2x_2)$

$L(x, \mu, \lambda) = -3x_1 - 2x_2 + \lambda(6x_1 - x_2 - 4) + \mu_1(x_1 + 3x_2 - 3) + \mu_2(x_1 + x_2 - 2) - \mu_3 x_1 - \mu_4 x_2 = x_1(-3 + 6\lambda + \mu_1 + \mu_2 - \mu_3) + x_2(-2 - \lambda + 3\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_4) + (-4\lambda - 3\mu_1 - 2\mu_2)$

По теореме ККТ:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = -3 + 6\lambda + \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ L'_{x_2} = -2 - \lambda + 3\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_4 = 0 \\ \mu_1(x_1 + 3x_2 - 3) = 0 \\ \mu_2(x_1 + 2x_2 - 2) = 0 \\ \mu_3 x_1 = 0 \\ \mu_4 x_2 = 0 \end{cases}$$

Рассм. случай: $\mu_4 > 0; x_2 = 0; \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0:$

$$\begin{cases} -3 + 6\lambda = 0 \\ -2 - \lambda + \mu_4 = 0 \\ 6x_1 = 4 \end{cases}$$

$x_1 = 2/3; x_2 = 0$ - минимум $\Longleftarrow p^* = f_{min} = -2$

Теперь найдем решние двойств. задачи:

$g(\mu, \lambda) = \inf_x L(x_1, x_2, \lambda, \mu)$

Поскольку $x_i \geq 0$, то $\inf_x$ отличен от $-\infty$, когда коэф-фы перед x_i неотрицательны. А именно:

$$\begin{cases} -3 + 6\lambda + \mu_1 \geq 0 \\ -2 - \lambda + 3\mu_1 \geq 0 \end{cases}$$

То есть : $\mu_1 \geq \frac{15}{19}; \lambda \geq \frac{7}{19}$

Получаем:

$$g(\lambda, \mu_1, \mu_2) = \begin{cases} -4\lambda - 3\mu_1 - 2\mu_2, \mu_1 \geq \frac{15}{19}, \lambda \geq \frac{7}{19} \\ -\infty, \text{ иначе} \end{cases}$$

$\max_{\lambda, \mu_1, \mu_2} g(\lambda, \mu_1, \mu_2) = max(-(4\lambda + 3\mu_1 + 2\mu_2)) = -min(4\lambda + 3\mu_1 + 2\mu_2) = \frac{-73}{9} = d^*$

Ответ: $p^* = -2$

$d^* = \frac{-73}{9}$ $\epsilon = p^* - d^* = \frac{35}{9}$