Методы Оптимизации, ДЗ №4

Начинкин Илья, 695

23 октября 2018 г.

Задача 2

$$\Sigma_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x_i}$$

$$s.t.\Sigma_{i=1}^{n}a_i * x_i \leq b$$

$$x_i > 0, b > 0, c_i > 0, a_i > 0$$

Решение:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{c_i}{x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = \frac{2c_i}{x_i^2}; \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

$$f''(x) \succeq 0$$

, значит - выпукла, То есть условие в теореме ККТ является и достаточным для глобального минимума.

$$h_1(x) = \Sigma_{i=1}^{n}a_i * x_i - b$$

$$h_i(x) = -x_i < 0 \Longrightarrow \mu_i = 0$$

- по условию нежесткости, В теореме ККТ такие μ_i можно не учитывать.

По теореме условие условие нежесткости $\mu_i * h_i(x) = 0$ Несколько вариантов:

1. $\mu = 0$ То есть тогда $\bigtriangledown L(x,\mu) = \bigtriangledown f(x) = (-\frac{c_i}{x_i^2})_{i=1..n} = 0$, что невозможно, то есть нет решения.

2. $\mu > 0 \Longrightarrow h(x) = 0$ Тогда $\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_i} = -\frac{c_i}{x_i^2} + \mu * a_i = 0 \Longrightarrow x_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu * a_i}} \Longrightarrow \sum \sqrt{\frac{c_i * a_i}{\mu}} = b \Longrightarrow \mu = \frac{\sum \sqrt{c_i * a_i}}{b^2}$

   То есть при таком μ $x_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu * a_i}}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu c_i a_i}$

Задача 4

$$f(x) = x_1 + 4x_2 + 9x_3$$

$$s.t.\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$$

Решение:

f(x) - выпукла, значит условие в теореме ККТ является и достаточным для глоб. минимума
Запишем:

$$\bigtriangledown L(x, \lambda) = \bigtriangledown f(x) + \lambda \bigtriangledown (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - 1) = 0$$

Из этого путем вычисления частных производных несложно посчитать, что

$$1 = \frac{\lambda}{x_1^2} \Longrightarrow x_1 = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$4 = \frac{\lambda}{x_2^2} \Longrightarrow x_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}$$

$$9 = \frac{\lambda}{x_3^2} \Longrightarrow x_3 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}$$

Всего 6 вариантов. Под условие $g(x) = 0$ подходят только 3 из них:

1. $\lambda = 36 \Longrightarrow x_1 = 6; x_2 = 3; x_3 = 2 \Longrightarrow f(x) = 36$
2. $\lambda = 16 \Longrightarrow x_1 = -4; x_2 = 2; x_3 = \frac{4}{3} \Longrightarrow f(x) = 16$
3. $\lambda = 4 \Longrightarrow x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = \frac{2}{3} \Longrightarrow f(x) = 4$

Тогда ответ получается $f(x) = 4$