Условная минимизация.

$$\min_{x \in Q \subset R^n} f(x)$$

Примеры:

$Q = \{x : a \le x \le b\}$

$Q = \{x : \|x\| \le \alpha\}$

$Q = \{x : Ax = b\}$

① Условия экстремума.

$x^* \in Q$ лок. т. min $f(x) \ge f(x^*)$ $\forall x \in Q$, $\|x - x^*\| \le \varepsilon$ при нек-м $\varepsilon > 0$

глоб. т. min $f(x) \ge f(x^*)$ $\forall x \in Q$.

<u>Теорема.</u>

Пусть $f(x)$ дифф-на в т. min x^*, а Q - вып. мн-во. Тогда

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \ge 0. \quad \forall x \in Q.$$

Вектор a: $\langle a, x - x^* \rangle \le 0$ $\forall x \in Q$ наз-ся опорным к Q в т. $x^* \in Q$.

$a \ne 0 \to$ $\langle a, x - x^* \rangle = 0$ - опорная гипер-ть.

$s = x - x^*$, $x \in Q$ $\to$ допуст. напр. в т. x^*

$$x^* + \alpha s \in Q \quad \alpha \in [0;1].$$

$$f'(x; s) = \langle \nabla f(x), s \rangle.$$

$\to$ производная по $\forall$ допустимому направлению в т. min неотрицательна.

<u>Теорема</u> (дост. усл. 1-го порядка)

Пусть $f(x)$ дифф-на в т. $x^* \in Q$, Q вып-ло и выполняется усл.

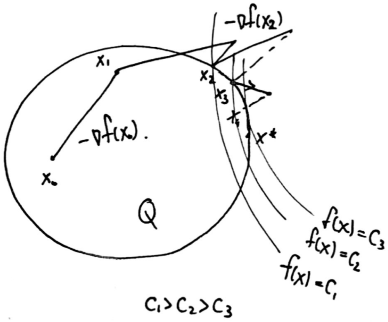
$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \ge \alpha \|x - x^*\|, \quad \alpha > 0 \quad \forall x \in Q, \ \|x - x^*\| \le \varepsilon, \ \varepsilon > 0.$$

Тогда x^* - т. лок. минимума $f(x)$ на Q.

1. Метод проекции градиента.

$$x^{k+1} = P_Q(x^k - \alpha\nabla f(x^k))$$

$$P_Q(x) = \underset{y\in Q}{\arg\min}\,\|x-y\|$$



Т. Пусть $f(x)$ - вып. дифф. ф-ия в $\mathbb{R}^n$, градиент которой удовлетворяет на Q усл.-ю Липшица с L. Пусть Q - выпуклое и замкнутое $X^* = \underset{x\in Q}{\mathrm{Argmin}}\, f(x) \neq \emptyset$, $0<\gamma<\frac{2}{L}$

Тогда: а) $x^k \to x^* \in X^*$

б) $f(x)$ - сильно выпукла, то $x^k \to x^*$ со ск-тью геом. прогрессии.

в) $f(x)$ - дважды дифф-ма и $lI \leq \nabla^2 f(x) \leq LI$, $x\in Q$, $l>0$ то знамен. прогр. $q = \max\{|1-\gamma l|, |1-\gamma L|\}$.

г) если x^* - т. острого min, то метод конечен: $x^k = x^*$ для нек-го k.

Пример: 1). $Q=\{x: x\geq 0\}$, $x\in\mathbb{R}^n$ $\quad P_Q(x) = x_+$

$$x^{k+1} = (x^k - \gamma\nabla f(x^k))_+$$

2). $Q=\{x: a\leq x\leq b\}$, $x\in\mathbb{R}^n$

$$(\tau)_a^b = \begin{cases} \tau, & a\leq\tau\leq b \\ b, & \tau>b \\ a, & \tau<a \end{cases} \qquad (x_i)_{a_i}^{b_i}$$

$$x^{k+1} = (x^k - \gamma\nabla f(x^k))_a^b$$

3). $Q=\{x: \|x\|\leq\rho\}$

$$x^{k+1} = \begin{cases} x^k - \gamma\nabla f(x^k), & \|x^k - \gamma\nabla f(x^k)\|\leq\rho \\ \rho\,\dfrac{x^k-\gamma\nabla f(x^k)}{\|x^k-\gamma\nabla f(x^k)\|}, & \|x^k-\gamma\nabla f(x^k)\|>\rho \end{cases}$$

2. Метод условного градиента.

$$\overline{x}^k = \underset{x\in Q}{\arg\min}\,(\nabla f(x^k), x).$$

$$x^{k+1} = x^k + \gamma_k(\overline{x}^k - x^k).$$

Т. Пусть $f(x)$ - дифф-мая ф-ия, градиент которой на Q удовл. усл. Липшица с константой L, а Q выпукло, замкнуто и ограничено. Пусть γ_k определяется из условия скорейшего спуска $\gamma_k = \underset{0\leq\gamma\leq 1}{\arg\min}\, f(x^k + \gamma(\overline{x}^k - x^k))$.

Тогда: а) $\langle\nabla f(x^k), x^k - \overline{x}^k\rangle \to 0$ и для $\forall$ предельной т. посл-ти x^k удовл-ся необх. условие экстремума

б) если $f(x)$ выпукла, то пред. т. - т. min $f(x)$ на Q и справедлива оценка

$f(x^k)-f^*=O\left(\frac{1}{k}\right), \; f^*=\min\limits_{x\in Q} f(x)$

$f(x^k)\geq f^* \geq f(x^k)+\langle \nabla f(x^k), \bar{x}^k - x^k\rangle.$

Рассмотрим задачу:

$\min f_0(x)$

$f_i(x)\leq 0, \; i=1,\dots,m$ – гладкие.

Опр. Непрерывн. ф-ия $\Phi(x)$ наз-ся штрафной ф-ей для замкнутого мн-ва Q, если

- $\Phi(x)=0$ для $\forall x\in Q$
- $\Phi(x)>0$ для $\forall x\notin Q$

Если $\Phi_1(x)$ – штраф для Q_1, $\Phi_2(x)$ – штраф для Q_2, то $\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$ штраф для $Q_1\cap Q_2$

Пример. Введем обозначение $(a)_+=\max\{a,0\}$

$$Q=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f_i(x)\leq 0, \; i=1,\dots,m\}$$

Тогда след. ф-ии яв. штрафными на Q:

1) квадратичн. штраф $\Phi(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}(f_i(x))_+^2$

2) негл. штраф $\Phi(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}(f_i(x))_+$

Метод штрафных ф-ий:

0. Выберем $x_0\in\mathbb{R}^n$. Выберем посл-ть штрафных коэф-тов. $0<t_k<t_{k+1}$, $t_k\to\infty$
1. k-я итерация $(k\geq 0)$

   Найдем точку $x_{k+1}=\operatorname{argmin}\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{f_0(x)+t_k\Phi(x)\}$. исп. в качестве нач. т. x_k

---

$\Psi_k(x)=f_0(x)+t_k\Phi(x), \quad \Psi_k^*=\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\Psi_k(x)$

Теорема. Пусть $\exists\ \bar{t}>0$, что $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f_0(x)+\bar{t}\Phi(x)\leq f_0(x^*)\}$ ограничено.

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=f_0(x^*)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(x_k)=0$

Опр. Q – замкн. мн-во, имеющ. внутр. точку. Непрер. ф-ия $F(x)$ называется барьерной для Q, если $F(\cdot)\to\infty$ для т., приближ. к границе мн-ва.

! задача должна удовл. усл. Слейтера. $\exists\bar{x}: f_i(\bar{x})<0$, $i=1,\dots,m$.

Пример. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, .., m\}$. Тогда все перечисл. ниже ф-ии явл. барьерами для Q.

1. степенной барьер $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{(-f_i(x))^p}$, $p \geq 1$.

2. логарифмический барьер $F(x) = -\sum\limits_{i=1}^{m} \ln(-f_i(x))$

3. экспоненциальный барьер $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \exp\left(\dfrac{1}{-f_i(x)}\right)$.

Метод барьерных функций.

0. Выберем $x_0 \in \operatorname{int} Q$. Выберем посл. штрафных коэф-тов $0 < t_k < t_{k+1}$, $t_k \to \infty$

1. k-я итерация ($k \geq 0$)

   Найдем точку

$$x_{k+1} = \operatorname*{argmin}_{x \in Q} \left\{ f_0(x) + \frac{1}{t_k} F(x) \right\}$$ исп. в качестве н. т. x_k.

$$\psi_k(x) = f_0(x) + \frac{1}{t_k} F(x), \qquad \psi_k^* = \min_{x \in Q} \psi_k(x)$$

Теорема: Пусть барьер $F(x)$ ограничен снизу на Q.

Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} \psi_k^* = f^*$