2.24

October 13, 2018

1 Статистика, прикладной поток

1.1 Практическое задание 2

В данном задании вы визуализируйте некоторые свойства оценок (несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность), посмотрите на свойства оценки максимального правдоподобия, а также сравните некоторые оценки при помощи построения функций риска.

Правила:

- Дедлайн 13 октября 23:59. После дедлайна работы не принимаются кроме случаев наличия уважительной причины.
- Выполненную работу нужно отправить на почту `mipt.stats@yandex.ru`, указав тему письма "`[applied] Фамилия Имя - задание 2`". Квадратные скобки обязательны. Если письмо дошло, придет ответ от автоответчика.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию (без архивов). Названия файлов должны быть такими: `2.N.ipynb` и `2.N.pdf`, где `N` - ваш номер из таблицы с оценками.
- Решения, размещенные на каких-либо интернет-ресурсах не принимаются. Кроме того, публикация решения в открытом доступе может быть приравнена к предоставлении возможности списать.
- Для выполнения задания используйте этот ноутбук в качествие основы, ничего не удаляя из него.
- Никакой код из данного задания при проверке запускаться не будет.

Баллы за задание:

- Задача 1 - 10 баллов
- Задача 2 - 5 баллов
- Задача 3 - 5 баллов
- Задача 4 - 5 баллов
- Задача 5 - 5 баллов
- Задача 6 - 20 баллов

Все задачи имеют тип О2. Подробнее см. в правилах выставления оценки.

```
In [3]: import numpy as np
        import scipy.stats as sps
        from scipy.special import factorial
        import matplotlib.pyplot as plt
        %matplotlib inline
```

Задача 1. В этой задаче предлагается изучить свойство несмещённости.

---

1. Пусть $X_1, ..., X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Рассмотрим оценки $X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}, 2\overline{X}$ параметра θ.

Какие из этих оценок являются несмещенными?

Ответ: Несмещенными оценками является $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ и $2\overline{X}$, Так как $\mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta$, $\mathbb{E}\overline{X} = \frac{\theta}{2}$

Теперь проверьте это на практике. Для каждой из приведенных выше оценок $\widehat{\theta}$:

Вычислите $k = 500$ независимых оценок $\widehat{\theta_1}, ..., \widehat{\theta_k}$ по независимым выборкам $(X_1^1, ..., X_n^1), ..., (X_1^k, ..., X_n^k)$, сгенерированным из распределения $U[0, 1]$. Далее вычислите среднее этих оценок, которое обозначим $\overline{\theta}$.

Визуализируйте полученные значения, построив на одном графике точки \$$(\widehat{\theta_1}, y)$, ... , $(\widehat{\theta_k}, y)$\$$(\overline{\theta}, y)$, где y -- произвольные различные (например 0, 1, 2) координаты для трёх различных типов оценок.

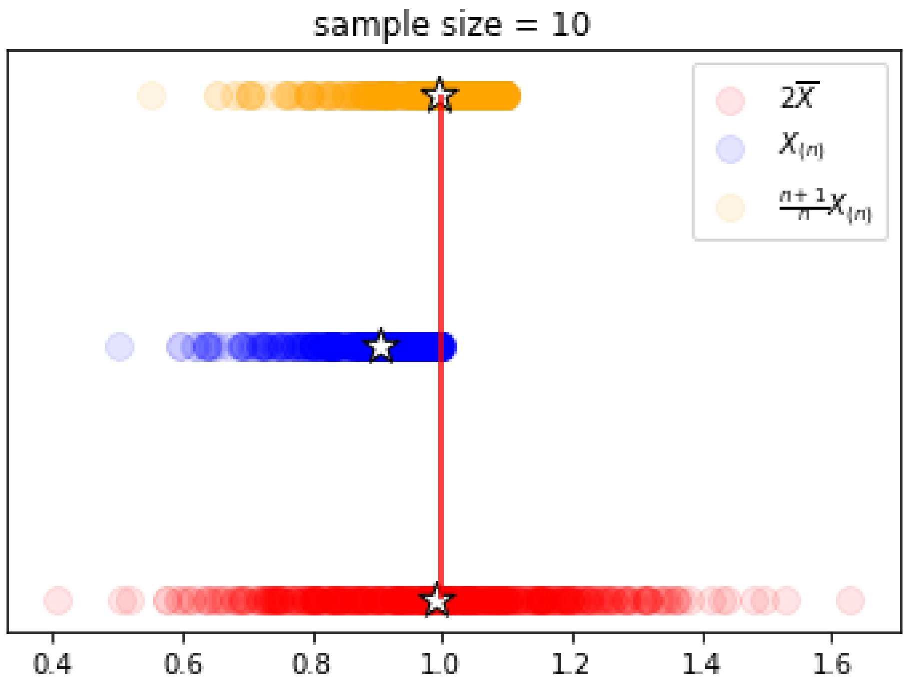
Повторите действие три раза для $n \in \{10, 100, 500\}$. В итоге получится три графика для различных n, на каждом из которых изображено поведение трёх типов оценок и их среднее.

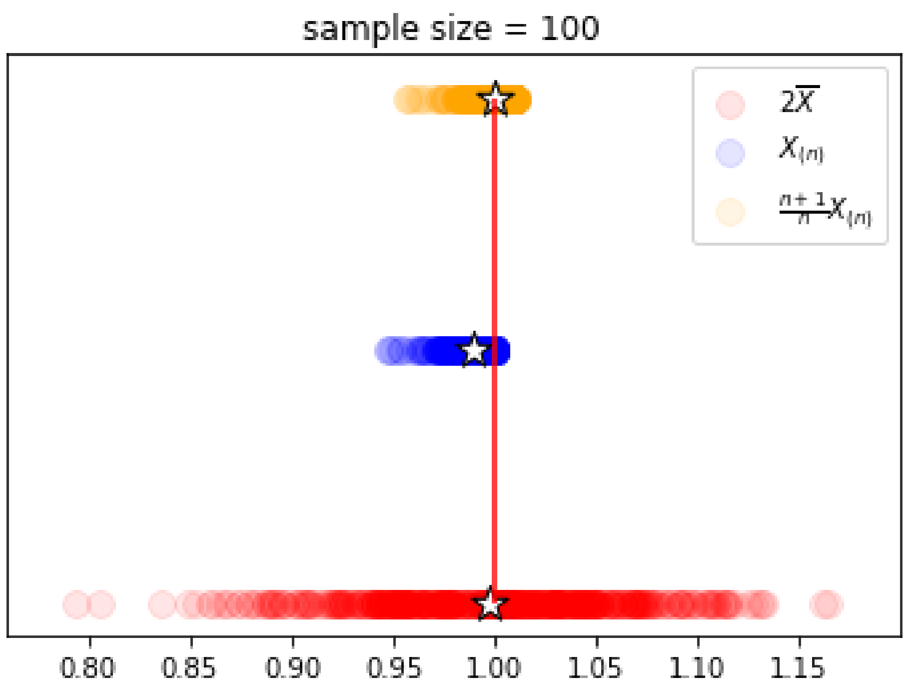
Копипаста неприемлема, используйте циклы и функции.

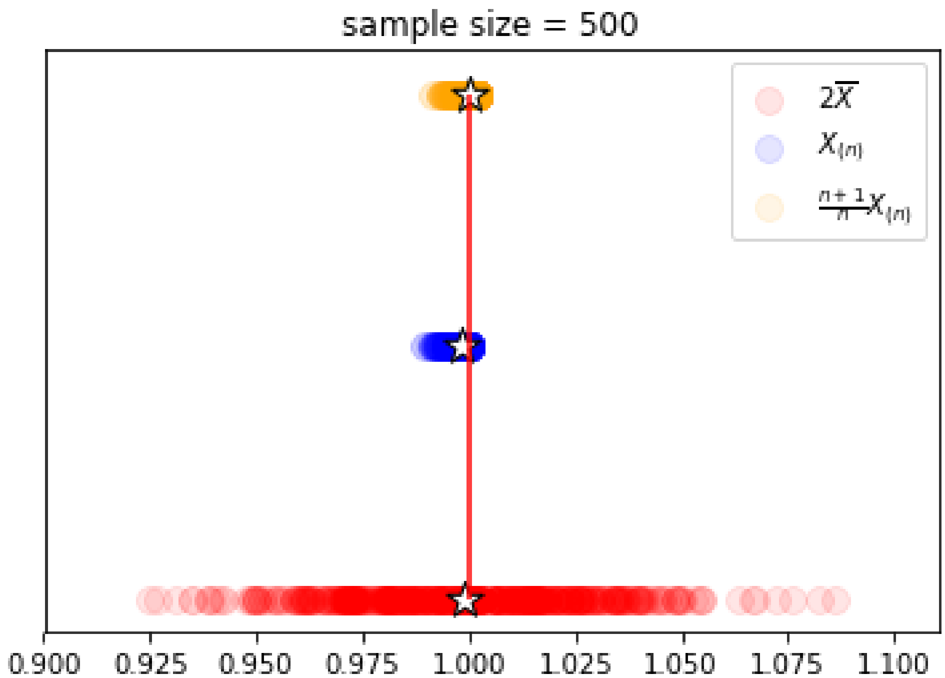
Используйте данный шаблон для визуализации значений:

In [4]:
```
# Для каждой оценки:
def scatter_estimator(estimators, y, color, label):
    plt.scatter(estimators , np.zeros(500) + y,
                alpha=0.1, s=100, color=color, label=label)
    plt.scatter(estimators.mean(), y, marker='*', s=200,
                color='w', edgecolors='black')

# Для всего графика:
def get_plot(n):
    plt.vlines(1, 0, 2, color='r')
    plt.title('sample size = %d' % n)
    plt.yticks([])
    plt.legend()
```

In [5]:
```
ns = [10, 100, 500]

for n in ns:
    sample = sps.uniform(loc=0, scale=1).rvs(size=(500, n))
    plt.figure()
    scatter_estimator(2*sample.mean(axis=1), 0, 'red', '$2\overline{X}$')
    scatter_estimator(sample.max(axis=1), 1, 'blue', '$X_{(n)}$')
    scatter_estimator((n+1)/n*sample.max(axis=1), 2,
                                  'orange', r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$')
    get_plot(n)
    plt.show()
```


sample size = 10
$2\overline{X}$
$X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6


sample size = 100
$2\overline{X}$
$X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15

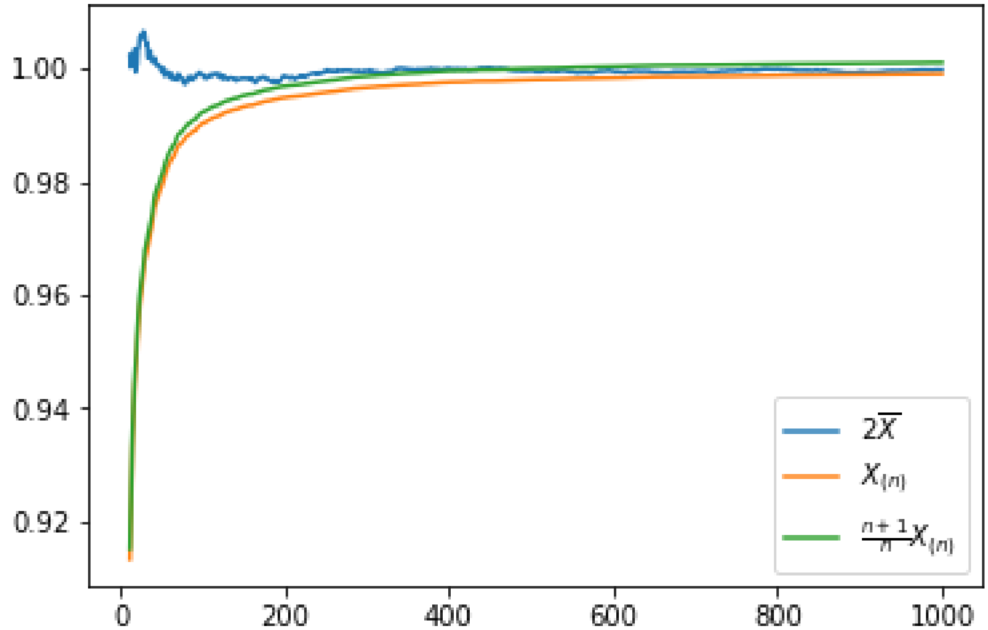


---

2. Изучим поведение среднего оценок из первого пункта при росте размера n выборки. Постройте график зависимости $\overline{\theta}$ от n для трёх типов оценок. Какие из оценок являются асимптотически несмещёнными (т.е. $\forall \theta \in \Theta$: $\mathsf{E}_\theta \widehat{\theta} \to \theta$ при $n \to +\infty$)?

```
In [7]: max_n = 1000
        sample = sps.uniform(loc=0, scale=1).rvs(size=(500, max_n))
        grid = np.linspace(1, max_n, max_n)

        def plot(estimators, label):
            global max_n, grid
            theta_mean_sample = estimators.sum(axis=0)/500
            plt.plot(grid[10 :], theta_mean_sample[10:], label=label)



        max_sample = np.maximum.accumulate(sample, axis=1)

        plt.figure()

        plot(2*sample.cumsum(axis=1)/grid, r'$2\overline{X}$')
        plot(max_sample, r'$X_{(n)}$')
        plot((n+1)/n*max_sample, r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$')
```

```
plt.legend()
plt.show()
```



Каждая из этих оценок является асмиптотически несмещенной. Ну, это логично, так как $2\overline{X}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ - уже являются несмещенными, а значит и асимптотически несмещ. в том числе. А $X_{(n)}$ - асим. несмещенная, потому что $\mathbb{E}X_{(n)} = \frac{n}{n+1}\theta \to \theta$ при $n \to +\infty$.

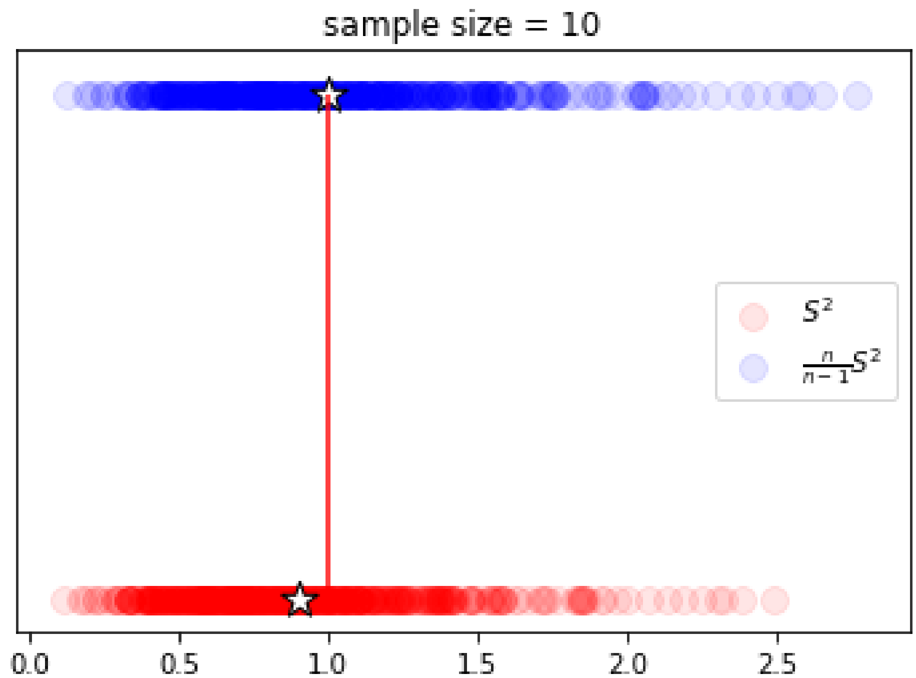
---

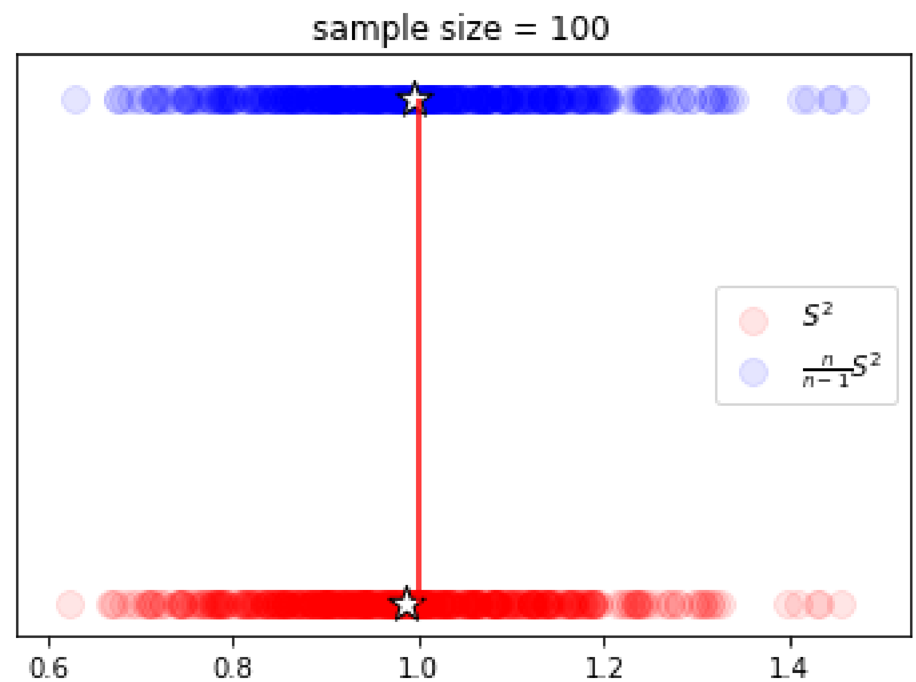
3. Пусть теперь $X_1, ..., X_n$ --- выборка из распределения $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Известно, что в качестве оценки параметра σ^2 можно использовать следующие оценки S^2, $\frac{n}{n-1}S^2$. Какие из этих оценок являются несмещенными?

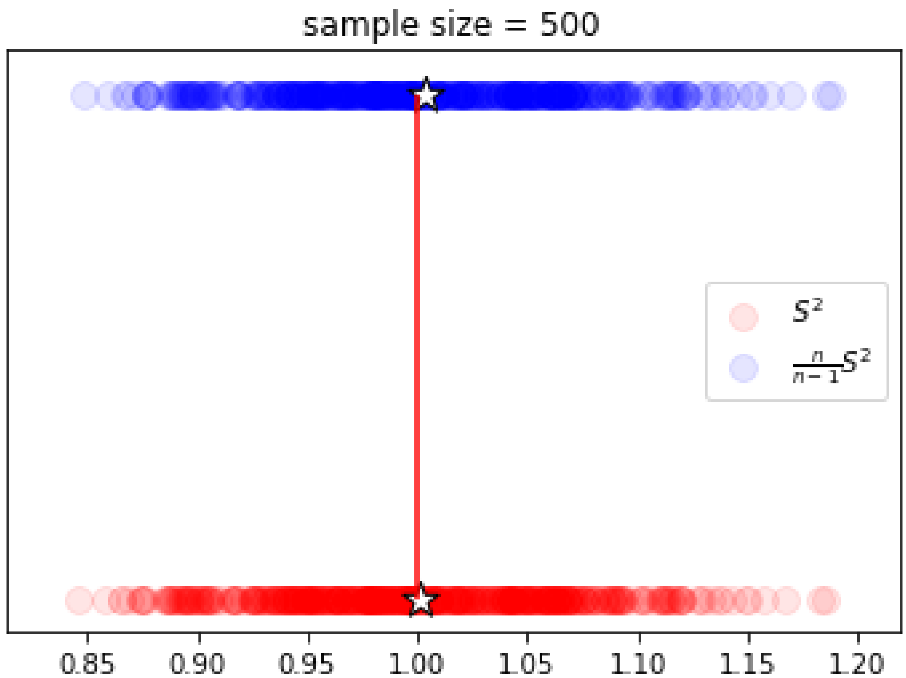
Напоминание: $S^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$

Ответ: $\frac{n}{n-1}S^2$ - несмещенная, а S^2 - нет, так как $\mathbb{E}S^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
Для данной модели повторите действия из первых двух частей.

```
In [8]: for n in ns:
            sample = sps.norm(loc=0, scale=1).rvs(size=(500, n))
            plt.figure()
            sample_variance = (sample**2).mean(axis=1) - (sample.mean(axis=1))**2
            scatter_estimator(sample_variance, 0, 'red', '$S^2$')
            scatter_estimator(n/(n-1)*sample_variance, 2, 'blue', r'$\frac{n}{n-1}S^2$')
            get_plot(n)
            plt.show()
```


sample size = 10
S^2
$\frac{n}{n-1}S^2$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5


sample size = 100
S^2
$\frac{n}{n-1}S^2$
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4



Сделайте вывод о том, что такое свойство несмещенности. Подтверждают ли сделанные эксперименты свойство несмещенности данных оценок? Поясните, почему в лабораторных по физике при оценке погрешности иногда используют $n-1$ в знаменателе, а не n.

Вывод: Если оценка обладает свойством несмещенности, это значит, что если у нас много выборок, и мы вычисляем значение оценки по выборкам, то среднее значение получается примерно равно истинному значению оценки.

В физике множество результатов какого-то опыта можно описать равномерным распределением $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, где a - это истинный результат эксперимента, а σ - это среднеквадратичная ошибка. Поэтому чтобы оценить погрешность эксперимента, то есть квадрат ошибки σ^2, можно использовать $\frac{n}{n-1}S^2$, (то есть $n-1$ в знаменателе, а не n) тогда оценка нашей погрешности будет несмещенной.

Задача 2. В этой задаче нужно визуализировать свойство состоятельности.

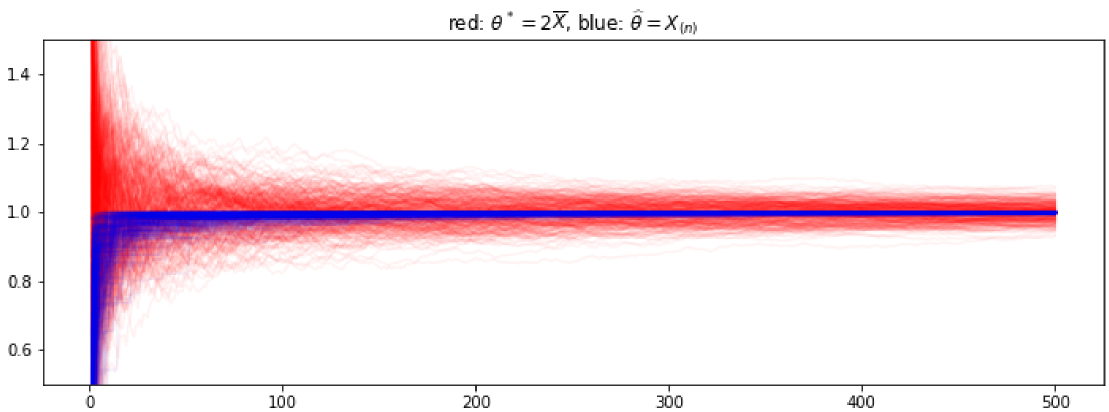
Пусть $X_1, ..., X_n$ --- выборка из распределения $U(0, \theta)$. Из домашнего задания известно, что оценки $\theta^* = 2\overline{X}, \widehat{\theta} = X_{(n)}$ являются состоятельными оценками θ. Вам нужно убедиться в этом, сгенерировав множество выборок, посчитав по каждой из них указанные выше оценки параметра θ в зависимости от размера выборки и визуализировав их состоятельность.

Сгенерируйте множество выборок $X^1, \ldots, X^{300}$ из распределения $U[0,1]$: $X^j = (X_1^j, \ldots, X_{500}^j), 1 \le j \le 300$. По каждой из них посчитайте оценки $\theta_{jn}^* = 2\frac{X_1^j + \cdots + X_n^j}{n}$, $\widehat{\theta}_{jn} = \max(X_1^j, \ldots, X_n^j)$ для $1 \le n \le 500$, то есть оценки параметра θ по первым n наблюдениям j-й выборки. При написании кода могут помочь функции `numpy.cumsum(axis=...)` и `np.maximum.accumulate(axis=...)`.

```
In [9]: sample = sps.uniform(loc=0, scale=1).rvs(size=(300, 500))



        sample_mean = 2*sample.cumsum(axis=1)/np.arange(1, 501)

        max_sample = np.maximum.accumulate(sample, axis=1)
```

Для каждой оценки $\theta^*, \widehat{\theta}$ нарисуйте следующий график. Для каждого j нанесите на один график зависимости θ^*_{jn} или $\widehat{\theta}_{jn}$ от n с помощью `plt.plot`. Каждая кривая должна быть нарисована одним цветом с прозрачностью `alpha=0.05`. Поскольку при малых n значения средних могут быть большими по модулю, ограничьте область графика по оси y с помощью функции `plt.ylim((min, max))`.

```
In [10]: grid = (np.arange(500*300) % 500 + 1).reshape(300, 500)
         plt.figure(figsize=(12, 4))
         plt.ylim((0.5, 1.5))
         plt.title(r'red: $\theta^* = 2\overline{X}$, blue: $\widehat{\theta} = X_{(n)}$')

         plt.plot(grid.T, sample_mean.T, alpha=0.05, color='red')
         plt.plot(grid.T, max_sample.T, alpha=0.05, color='blue')


         plt.show()
```



Сделайте вывод о смысле состоятельности. Подтверждают ли сделанные эксперименты теоретические свойства?

Вывод: Смысл в том, что оценка $\widehat{\theta}$ параметра $\tau(\theta)$ при $n \to +\infty$ будет стремится к самому параметру $\tau(\theta)$. Судя по графикам, проделанные эксперименты подверждают эти свойства, так они стремятся к θ при $n \to +\infty$

Задача 3. В этой задаче нужно визуализировать свойство асимптотической нормальности.

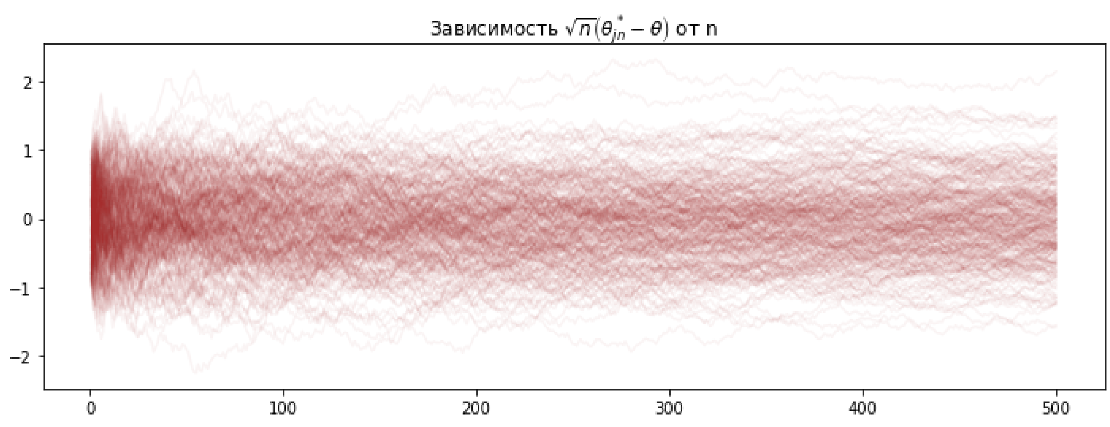
а). Пусть $X_1, ..., X_n$ --- выборка из распределения $U(0,1)$. Согласно центральной предельной теореме оценка $\theta^* = 2\overline{X}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра θ. Вам нужно убедиться в этом, сгенерировав множество наборов случайных величин и посчитав по каждому из наборов величину $Z_n = \sqrt{n}\left(2\overline{X} - \theta\right)$ в зависимости от размера набора.

Сгенерируйте множество выборок $X^1, \ldots, X^{300}$ из распределения $U[0,1]$: $X^j = (X_1^j, \ldots, X_{500}^j), 1 \leq j \leq 300$. По каждой из них посчитайте оценки $\theta_{jn}^* = 2\frac{X_1^j + \cdots + X_n^j}{n}$ для $1 \leq n \leq 500$, то есть оценку параметра θ по первым n наблюдениям j-й выборки. Для этих оценок посчитайте статистики $Z_{jn} = \sqrt{n}\left(\theta_{jn}^* - \theta\right)$, где $\theta = 1$.

```
In [24]: sample = sps.uniform(loc=0, scale=1).rvs(size=(300, 500))
         grid = np.arange(1, 501)

         sample_mean = 2*sample.cumsum(axis=1)/grid

         z = (grid**0.5)*(sample_mean - 1)
```

Для каждого j нанесите на один график зависимость Z_{jn} от n с помощью `plt.plot`. Каждая кривая должна быть нарисована одним цветом с прозрачностью `alpha=0.05`. Сходятся ли значения Z_{jn} к какой-либо константе?

```
In [21]: plt.figure(figsize=(12, 4))

         plt.title(r'Зависимость $\sqrt{n} \left( \theta^*_{jn} - \theta \right)$ от n')

         x = np.arange(500*300) % 500 + 1

         plt.plot(x.reshape(300, 500).T, z.T, alpha=0.05, color='brown')

         plt.show()
```

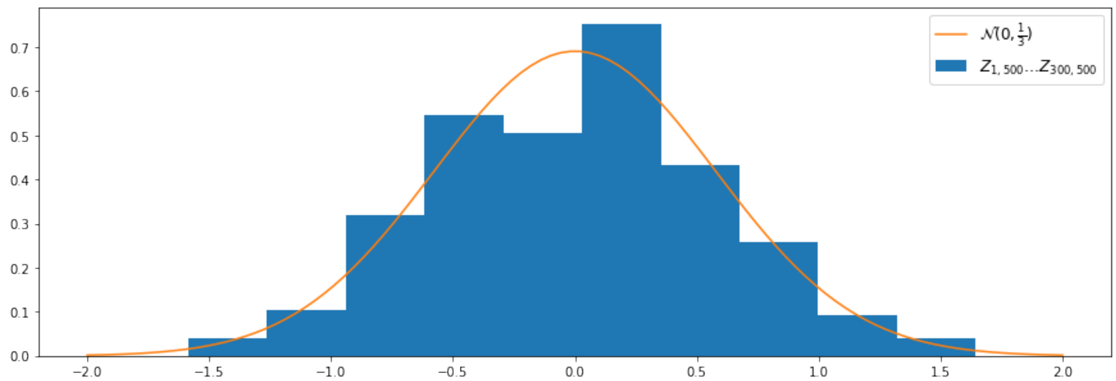


Нет, не стремится ни к какой константе

Для $n = 500$ по выборке $Z_{1,500}, ..., Z_{300,500}$ постройте гистограмму и график плотности распределения $\mathcal{N}(0,1)$. Не забудьте сделать легенду.

```
In [45]: plt.figure(figsize=(15, 5))


         plt.hist(z[:,-1], bins=10, normed=True, label=r'$Z_{1,500} \dots Z_{300,500}$')
         plt.plot(np.linspace(-2, 2, 100),
                  sps.norm(loc=0,scale=(1/3)**(0.5)).pdf(np.linspace(-2, 2, 100)),
                                                   label=r'$\mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$')
         plt.legend(fontsize=12)

         plt.show()
```

```
/home/ilya/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/matplotlib/axes/_axes.py:6462: UserWarning: The
  warnings.warn("The 'normed' kwarg is deprecated, and has been "
```



Сделайте вывод о смысле свойства асимптотической нормальности. Подтверждают ли сделанные эксперименты теоретические свойства?

Смысл асимптотической нормальности в том, что асимп. норм. оценка параметра $\tau(\theta)$ при $n \to +\infty$ стремится к этому параметру $\tau(\theta)$, причем с разбросом, стремящимся к нулю, а именно равным $\frac{\sigma^2}{n}$. Эксперименты подтверждают эти свойства, так $\sqrt{n}\left(\theta^*_{jn} - \theta\right)$ с ростом ведет себя как нормальное распределение $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = \frac{1}{3})$

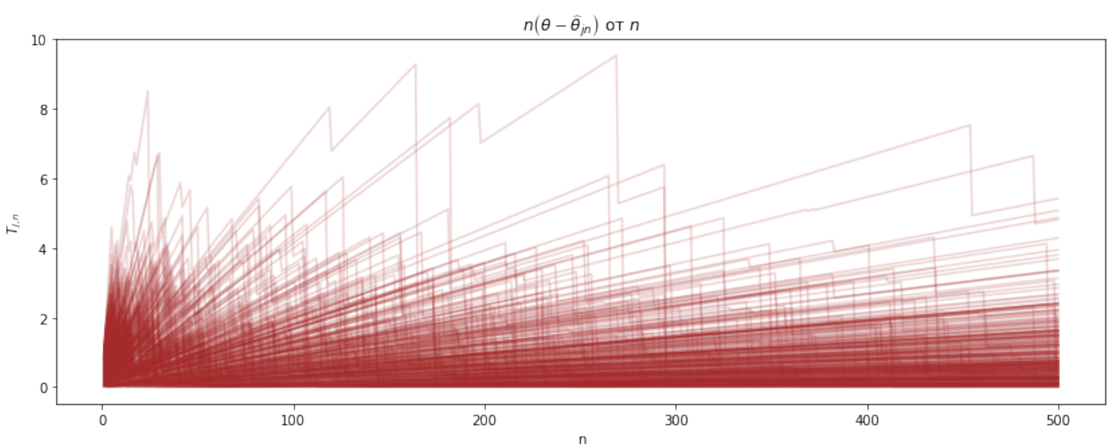
Задача 4. Пусть $X_1, ..., X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Из домашнего задания известно, что $n\left(\theta - X_{(n)}\right) \xrightarrow{d_\theta} Exp\,(1/\theta)$. Вам нужно убедиться в этом, сгенерировав множество выборок, посчитав по каждой из них оценку $X_{(n)}$ параметра θ в зависимости от размера выборки и визуализировав рассматриваемое свойство.

Сгенерируйте множество выборок $X^1, \ldots, X^{300}$ из распределения $U[0,1]$: $X^j = (X^j_1, \ldots, X^j_{500}), 1 \leq j \leq 300$. По каждой из них посчитайте оценки $\widehat{\theta}_{jn} = \max(X^j_1, \ldots, X^j_n)$ для $1 \leq n \leq 500$, то есть оценку параметра θ по первым n наблюдениям j-й выборки. Для этих оценок посчитайте статистики $T_{jn} = n\left(\theta - \widehat{\theta}_{jn}\right)$, где $\theta = 1$.

```
In [39]: sample = sps.uniform(loc=0, scale=1).rvs(size=(300, 500))

         max_sample = np.maximum.accumulate(sample, axis=1)

         t = np.arange(1, 501)*(1 - max_sample)
```

Для каждого j нанесите на один график зависимость T_{jn} от n с помощью `plt.plot`. Все кривые должны быть нарисованы одним и тем же цветом с прозрачностью `alpha=0.2`. Сходятся ли значения T_{jn} к какой-либо константе?

```
In [43]: plt.figure(figsize=(14, 5))

         plt.title(r'$n \left( \theta - \widehat{\theta}_{jn} \right)$ от $n$')
         plt.xlabel('n')
         plt.ylabel('$T_{j,n}$')

         x = np.arange(500*300) % 500 + 1

         plt.plot(x.reshape(300, 500).T, t.T, alpha=0.2, color='brown')

         plt.show()
```



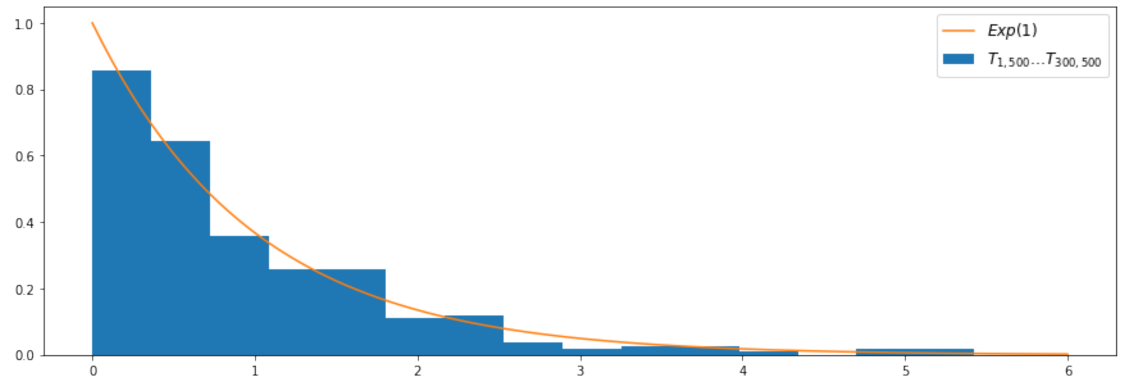
Ответ: Да, сходятся к нулю

Для $n = 500$ по выборке $T_{1,500}, ..., T_{300,500}$ постройте гистограмму и график плотности распределения $Exp(1)$. Не забудьте сделать легенду.

```
In [55]: plt.figure(figsize=(15,5))


         plt.hist(t[:, 499], normed=True, bins=15, label=r'$T_{1,500} \dots T_{300,500}$')
         plt.plot(np.linspace(0, 6, 100),
                          sps.expon(loc=0, scale=1).pdf(np.linspace(0, 6, 100)),
                                                label=r'$Exp(1)$')
```

```
        plt.legend(fontsize=12)
        plt.show()
```

```
/home/ilya/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/matplotlib/axes/_axes.py:6462: UserWarning: The
  warnings.warn("The 'normed' kwarg is deprecated, and has been "
```



Хорошо ли гистограмма приближает плотность распределения $Exp(1)$? Подтверждают ли проведенные эксперименты свойство $n\left(\theta - X_{(n)}\right) \xrightarrow{d_\theta} Exp\left(1/\theta\right)$? Что можно сказать в сравнении с оценкой, рассмотренной в предыдущей задаче?

Вывод: Приближает плотность $Exp(1)$ довольно хорошо, но с погрешностями, видимо из-за небольших значений n, эксперименты подтверждают сходимость по распределению. Такое свойство оценки $X_{(n)}$ параметра θ похоже на свойство асимптотической нормальности, тем что оно также при $n \to +\infty$ стремится к некоторому числу, завис. от θ, а также разброс оценки от θ стремиться к нулю с ростом n

---

Задача 5. Дана параметрическая модель и 3 выборки, состоящие из 2-3 наблюдений. Для удобства, выборки представлены в виде python-кода — каждая выборка записана как список ее элементов; множество выборок представлено как список списков, соответствующих выборкам из множества. Нужно для каждой выборки построить график функции правдоподобия.

a). Параметрическая модель $\mathcal{N}(\theta, 1)$, выборки: `[[-1, 1], [-5, 5], [-1, 5]]`

b). Параметрическая модель $Exp(\theta)$, выборки: `[[1, 2], [0.1, 1], [1, 10]]`

c). Параметрическая модель $U[0, \theta]$, выборки: `[[0.2, 0.8], [0.5, 1], [0.5, 1.3]]`

d). Параметрическая модель $Bin(5, \theta)$, выборки: `[[0, 1], [5, 5], [0, 5]]`

e). Параметрическая модель $Pois(\theta)$, выборки: `[[0, 1], [0, 10], [5, 10]]`

f). Параметрическая модель $auchy(\theta)$, где θ — параметр сдвига, выборки: `[[-0.5, 0.5], [-2, 2], [-4, 0, 4]]`

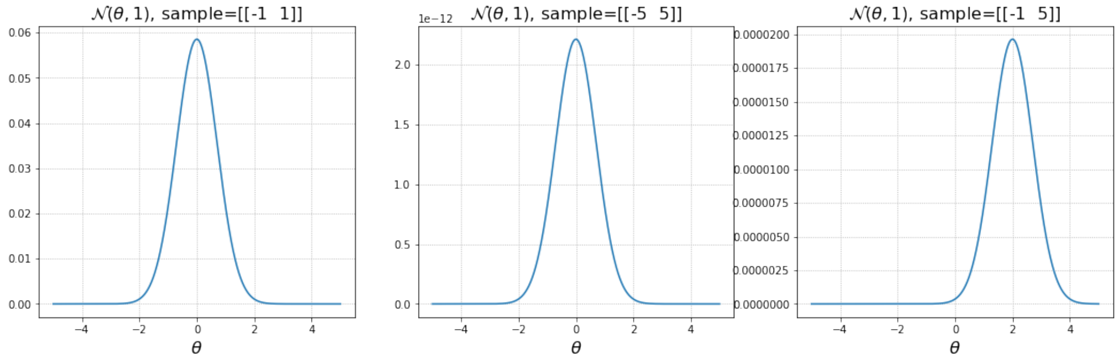
Выполнить задание, не создавая много кода, поможет следующая функция.

```
In [56]: def draw_likelihood(density_function, grid, samples, label):
             """Изображает график функции правдоподобия для каждой из 3 выборок.
```

```
    Аргументы:
        density_function --- функция, считающая плотность
            (обычную или дискретную). На вход данная функция
            должна принимать массив размера (1, len_sample)
            и возвращать массив размера (len_grid, len_sample).
        grid --- массив размера (len_grid, 1), являющийся
                 сеткой для построения графика;
        samples --- три выборки;
        label --- latex-код параметрической модели.
    """

    assert len(samples) == 3, "Число выборок не равно 3."

    plt.figure(figsize=(18, 5))
    for i, sample in enumerate(samples):
        sample = np.array(sample)[np.newaxis, :]
        likelihood = density_function(sample).prod(axis=1)

        plt.subplot(1, 3, i+1)
        plt.plot(grid, likelihood)
        plt.xlabel('$\\theta$', fontsize=16)
        plt.grid(ls=':')
        plt.title(label + ', sample=' + str(sample), fontsize=16)
    plt.show()
```

Первый пункт можно выполнить с помощью следующего кода:

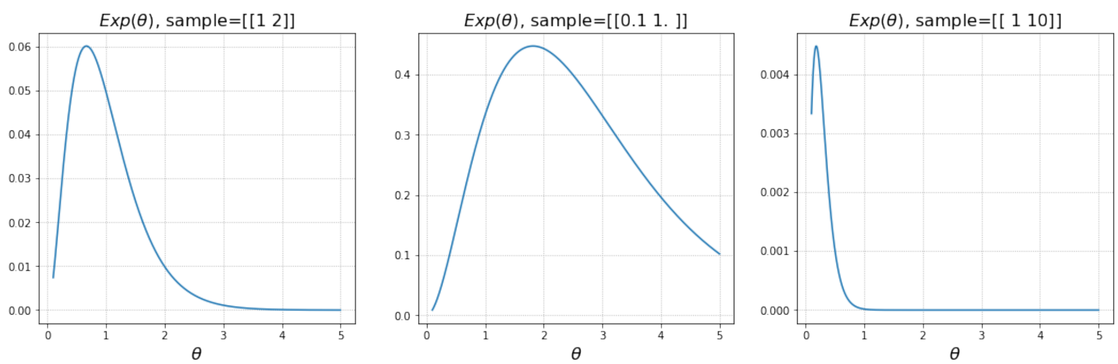
```
In [57]: grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
         draw_likelihood(sps.norm(loc=grid).pdf, grid,
          [[-1, 1], [-5, 5], [-1, 5]], '$\\mathcal{N}(\\theta, 1)$')
```

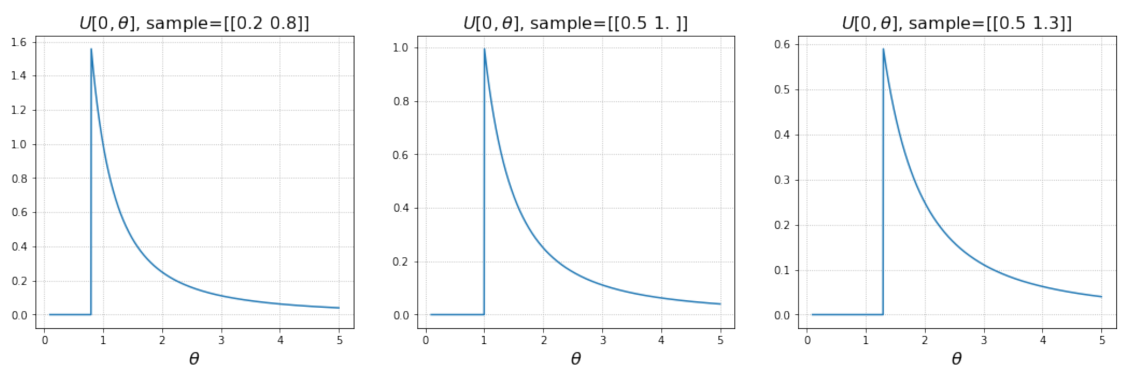


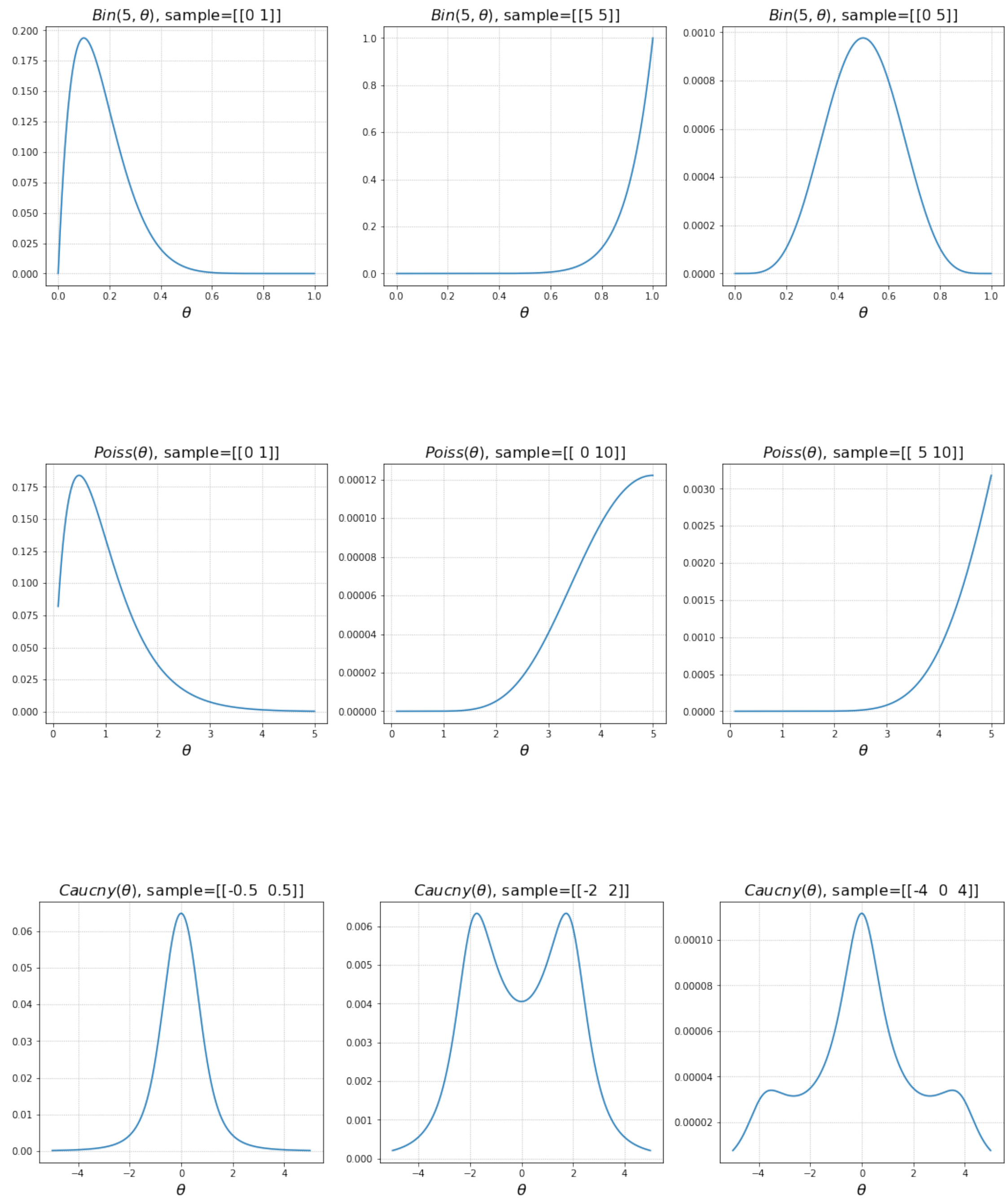
Выполните остальные:

```
In [59]: grid = np.linspace(0.1, 5, 1000).reshape((-1, 1))
```

```
draw_likelihood(sps.expon(scale=1/grid).pdf, grid,
                [[1, 2], [0.1, 1], [1, 10]], '$Exp(\\theta)$')
draw_likelihood(sps.uniform(loc = np.zeros(1000).reshape((-1,1)), scale=grid).pdf,
                grid, [[0.2, 0.8], [0.5, 1], [0.5, 1.3]], r'$U[0, \theta]$')

grid = np.linspace(0, 1, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.binom(n=5, p=grid).pmf, grid,
                 [[0, 1], [5, 5], [0, 5]], r'$Bin(5, \theta)$')


grid = np.linspace(0.1, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.poisson(mu=grid).pmf, grid,
                 [[0, 1], [0, 10], [5, 10]], r'$Poiss(\theta)$')


grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.cauchy(loc=grid).pdf, grid,
                 [[-0.5, 0.5], [-2, 2], [-4, 0, 4]], r'$Caucny(\theta)$')
```







Сделайте вывод о том, как функция правдоподобия для каждой модели зависит от выборки. Является ли функция правдоподобия плотностью?

Вывод:

Известно, что функция правдоподобия, зависящая от θ есть произведение значений плотностей для каждого элемента из выборки. То есть это функция от θ, при фиксированной выборке. То есть плотностью функция правдоподобия не является.

Сгенерируем выборку большого размера из стандартного нормального распределения и посчитаем ее функцию правдоподобия в модели $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Выполните код ниже:

```
In [60]: sample = sps.norm.rvs(size=10**5)
         likelihood = sps.norm.pdf(sample).prod()
         print(likelihood)
```

```
0.0
```

Почему результат отличается от ожидаемого? Как обойти эту неприятность для подсчета оценки максимального правдоподобия? Реализуйте это.

Подсказка: нужно использовать некоторый метод класса, реализующий это распределение

Ответ на вопрос и описание метода решения проблемы:

Ответ: Потому что произведение большого количества маленьких чисел(меньше 1) выраждается в ноль в питоне. Решение: берем логарифм плотности и суммируем результат. Получаем логарифм функции правдоподобия и она уже не выраждается в ноль.

```
In [191]: sample = sps.norm.rvs(size=10**5)
          likelihood = sps.norm.logpdf(sample).sum()
          print(likelihood)
```

```
-141957.6264490397
```

Задача 6.

а). Пусть $X_1, ..., X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Рассмотрим оценки $2\overline{X}, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Вам необходимо сравнить эти оценки в равномерном подходе с квадратичной и линейной функциями потерь, построив графики функций риска при помощи моделирования.

Для каждого $\theta \in (0, 2]$ с шагом 0.01 сгенерируйте 5000 независимых выборок $X^1 = \left(X_1^1, \ldots, X_{100}^1\right), \ldots, X^{5000} = \left(X_1^{5000}, \ldots, X_{100}^{5000}\right)$ из распределения $U[0, \theta]$.

Рассмотрим одну из перечисленных выше оценок $\widehat{\theta}$. Посчитайте ее значение по каждой выборке. Тем самым, для данного θ получится 5000 реализаций этой оценки $\widehat{\theta}_1, ..., \widehat{\theta}_{5000}$, где значение $\widehat{\theta}_j$ посчитано по реализации выборки X^j.

Теперь можно оценить функцию риска этой оценки с помощью усреднения

$$\widehat{R}_{\widehat{\theta}}(\theta) = \frac{1}{5000}\sum_{j=1}^{5000} L\left(\widehat{\theta}_j, \theta\right),$$

где L — одна из двух функций потерь: квадратичная $L(x, y) = (x-y)^2$ и линейная $L(x, y) = |x - y|$.

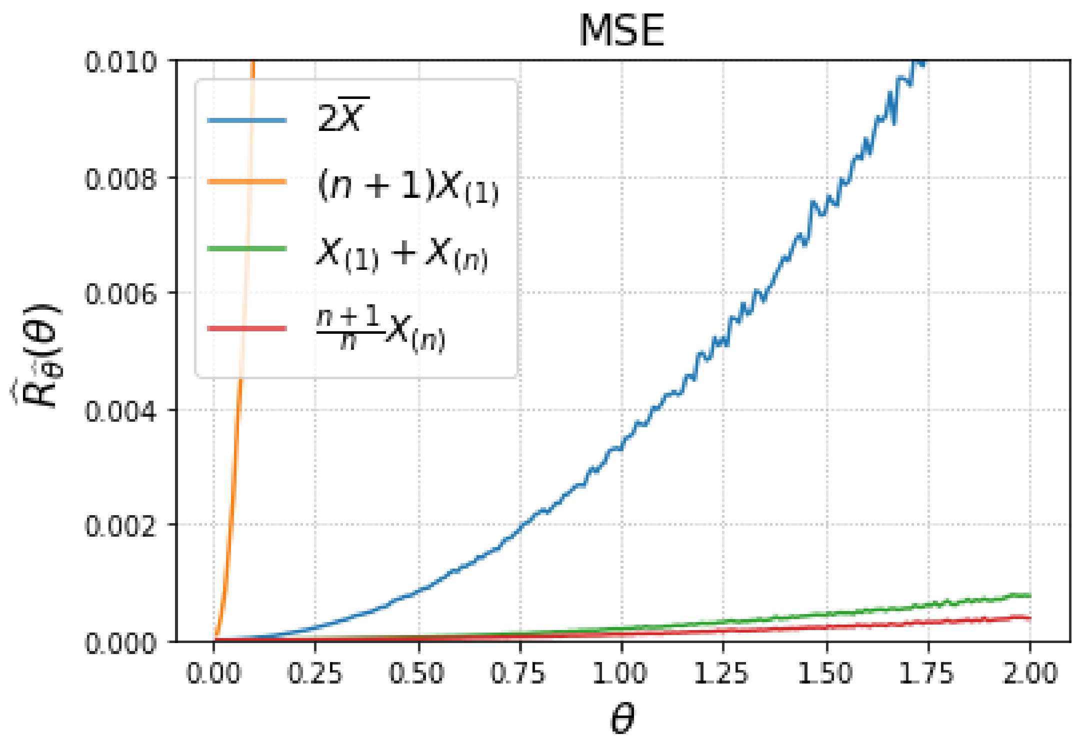
Для каждого из типов функций потерь постройте свой график. Нанесите на этот график для каждой из четырех оценок $\widehat{\theta}$ оценку функции потерь $\widehat{R}_{\widehat{\theta}}(\theta)$, пользуясь шаблоном ниже. Ограничение сверху по оси y ставьте таким, чтобы графики функции риска с малыми значениями четко различались.

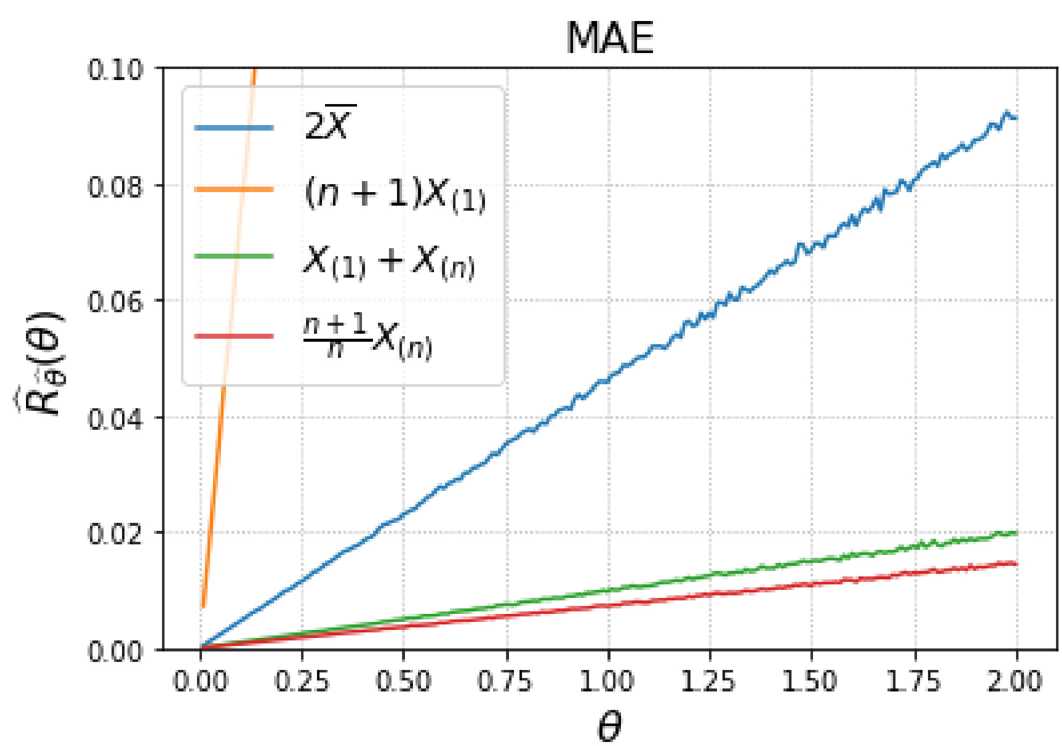
Совет: при тестировании кода запускайте его с небольшими размерами данных. Например, используйте 100 реализаций выборок. Финальные результаты получите, поставив требуемые значения размеров данных.

```
In [84]: def Plot(theta, Risk, estimators, labels, max_ylim):
             for label, estimator in zip(labels, estimators):
                 plt.plot(theta, Risk(estimator, theta),
                       label=label)  # для каждой оценки
             plt.grid(ls=':')
             plt.xlabel('$\\theta$', fontsize=16)
             plt.ylabel('$\\widehat{R}_{\\widehat{\\theta}}(\\theta)$', fontsize=16)
             plt.legend(fontsize=14)
             plt.title(Risk.__name__, fontsize=16)
             plt.ylim((0, max_ylim))
```

Решение:

```
In [85]: theta = np.arange(0, 2, 0.01) + 0.01
         n = 100
         k = 5000

         vectorized_rvs = np.vectorize(lambda scale, size:
                                   sps.uniform(loc=0, scale=scale).rvs(size=size),
                                                   signature='(),(y)->(n,m)')
         sample = vectorized_rvs(scale=theta, size=(k,n))

         sample_mean = 2*sample.mean(axis=2)
         min_sample = (n+1)*sample.min(axis=2)
         max_sample = (n+1)/n*sample.max(axis=2)
         sum_sample = sample.min(axis=2) + sample.max(axis=2)


         def MSE(estimator, theta):
             return ((estimator - theta.reshape((-1, 1)))**2).mean(axis=1)

         def MAE(estimator, theta):
             return (np.abs(estimator - theta.reshape((-1, 1))) ).mean(axis=1)

         labels=[r'$2\overline{X}$', r'$(n+1)X_{(1)}$', r'$X_{(1)} + X_{(n)}$',
                                                 r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$']
         estimators = [sample_mean, min_sample, sum_sample, max_sample]

         plt.figure()
         Plot(theta, MSE, estimators, labels, 0.01)
         plt.show()

         plt.figure()
         Plot(theta, MAE, estimators, labels, 0.1)
         plt.show()
```


MSE
$2\overline{X}$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)}+X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$\widehat{R}_{\hat{\theta}}(\theta)$
θ
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00


MAE
$2\overline{X}$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)}+X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$\widehat{R}_{\hat{\theta}}(\theta)$
θ
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

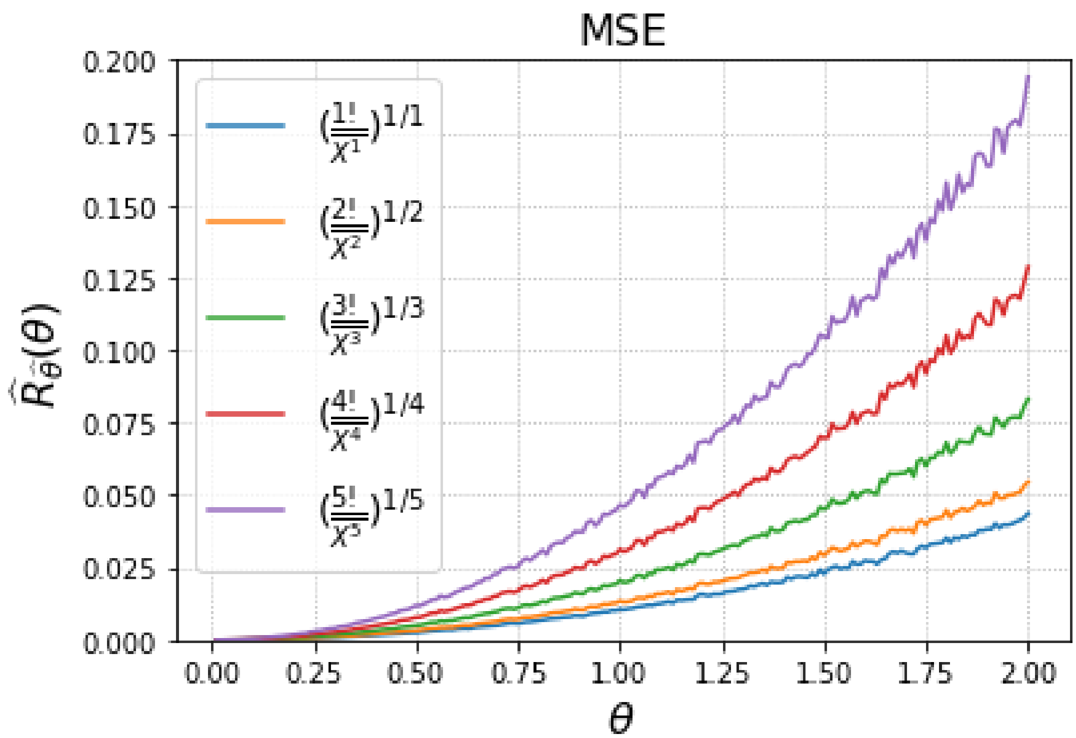
Сделайте вывод о том, какая оценка лучше и в каком подходе.

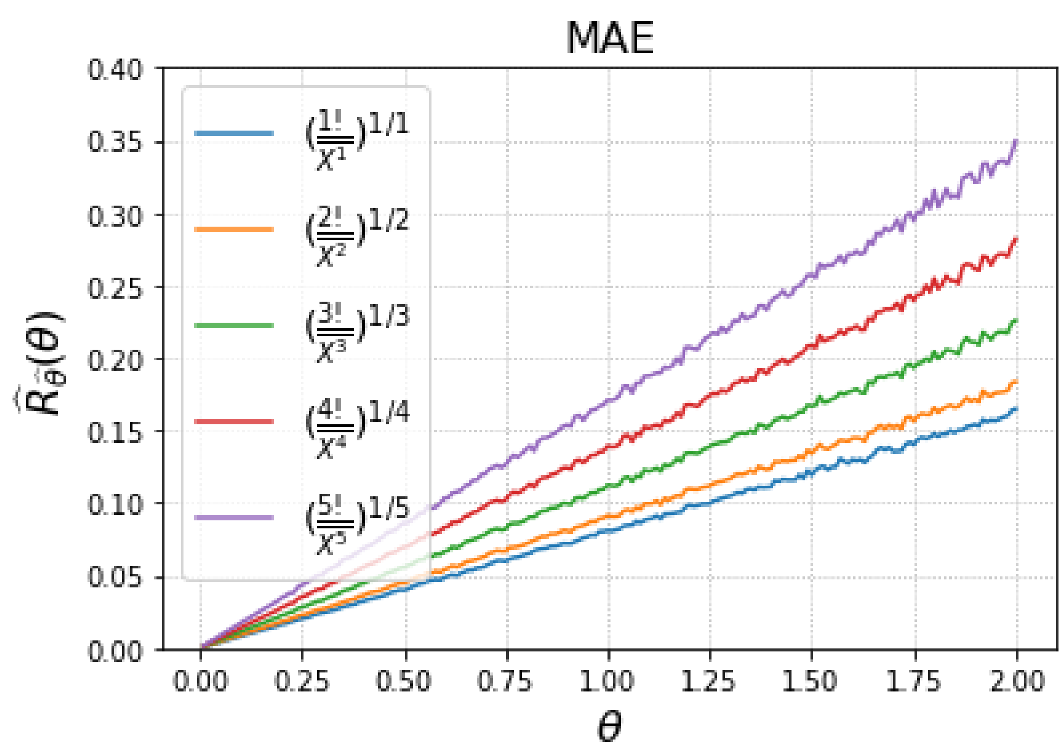
Вывод: Судя по графикам, лучше получается оценка $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$, причем как в среднеквадратичном подходе, так и при линейной функции потерь.

b). Пусть $X_1, ..., X_n$ --- выборка из распределения $Exp(\theta)$. Рассмотрим оценки $\left(k!\Big/\overline{X^k}\right)^{1/k}$ для $1 \leqslant k \leqslant 5$, которые вы получили в домашнем задании. Проведите исследование, аналогичное пункту a). Используйте цикл по k, чтобы не дублировать код. Функция факториала реализована как `scipy.special.factorial`.

Решение:

```
In [95]: from scipy.special import factorial as fact

         vectorized_exp_rvs = np.vectorize(lambda scale, size:
                                           sps.expon(scale=1/scale).rvs(size=size),
                                                                signature='(),(y)->(n,m)')

         sample = vectorized_exp_rvs(scale=theta, size=(5000,100))

         likelihood_estimators = [(fact(k)/((sample ** k).mean(axis=2)))**(1/k)
                                                                for k in range(1, 6)]

         labels = [r'$(\frac{%d!}{\overline{X^%d}})^{1/%d}$' % (k, k, k)
                                                                 for k in range(1, 6)]


         plt.figure()
         Plot(theta, MSE, likelihood_estimators, labels, 0.2)
         plt.show()

         plt.figure()
         Plot(theta, MAE, likelihood_estimators, labels, 0.4)
         plt.show()
```


MSE
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
$\widehat{R}_{\hat{\theta}}(\theta)$
θ
$(\frac{1!}{\overline{\overline{X^1}}})^{1/1}$
$(\frac{2!}{\overline{\overline{X^2}}})^{1/2}$
$(\frac{3!}{\overline{\overline{X^3}}})^{1/3}$
$(\frac{4!}{\overline{\overline{X^4}}})^{1/4}$
$(\frac{5!}{\overline{\overline{X^5}}})^{1/5}$


MAE
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
$\widehat{R}_{\hat{\theta}}(\theta)$
θ
$(\frac{1!}{\overline{\overline{X^1}}})^{1/1}$
$(\frac{2!}{\overline{\overline{X^2}}})^{1/2}$
$(\frac{3!}{\overline{\overline{X^3}}})^{1/3}$
$(\frac{4!}{\overline{\overline{X^4}}})^{1/4}$
$(\frac{5!}{\overline{\overline{X^5}}})^{1/5}$

Вывод: Выходит, что при равномерном подходе лучше всего получается при $k = 1$, причем при как при квадратичной функции потерь, так и при линейной.