DIMOSTRAZIONE TEOREMA PITAGORA

Marco Esposto

February 2022

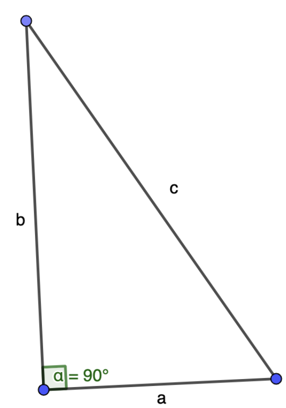
1 Enunciato

Enunciato 1 *In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

La segeunte dimostrazione è una delle molte proposte di Larry Hoehn (The Mathematics Teacher , 88 (1995), p. 168.).

1.1 Ipotesi

$\left\{ \overset{\triangle}{ABC} \textit{ triangolo rettangolo} \right.$

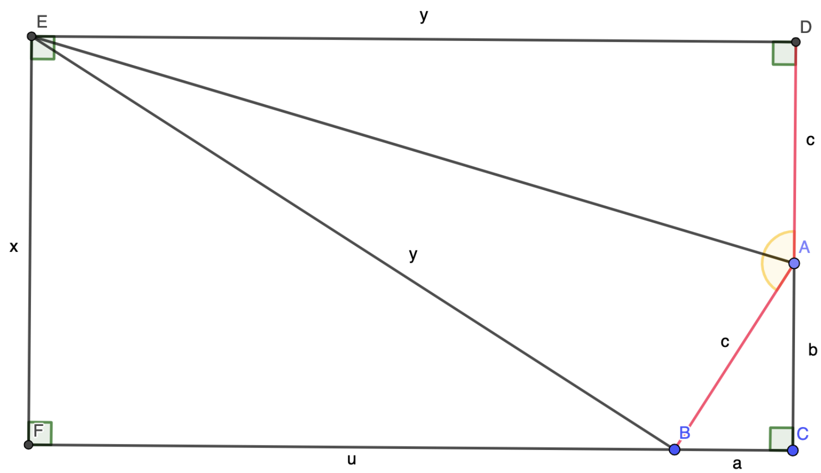


1.2 Tesi

$\left\{ c^2 = a^2 + b^2 \right.$

1.3 Costruzione preliminare

Parto da un triangolo rettangolo $\overset{\triangle}{ABC}$, prolungo il lato AC di un segmento AD. Traccio la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}D$ e la faccio incontrare con la perpendicolare a D nel punto E. Collego i punti E e B con il segmento EB. Infine traccio la perpendicolare a E e la perpendicolare a B, esse si incontrano nel punto F.



1.4 Dimostrazione

Considero i triangoli $\overset{\triangle}{ABE}$ e $\overset{\triangle}{ADE}$, essi hanno:

- BÂE ≅ DÂE per costruzione;
- AE ≅ AE per la proprietà riflessiva della congruenza (assioma);
- BA ≅ AD per costruzione;

Quindi i triangoli $\overset{\triangle}{ABE}$ e $\overset{\triangle}{ADE}$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza tra triangoli (assioma). In particolare ED ≅ EB, e $E\widehat{B}A$ è retto.

Quindi nei triangoli rettangoli $\overset{\triangle}{ABC}$ e $\overset{\triangle}{BEF}$ gli angoli $A\widehat{B}C$ e $E\widehat{B}F$ sommano fino a 90°; ne segue direttamente la congruenza tra gli angoli $A\widehat{B}C = B\widehat{E}F$ e $B\widehat{A}C = E\widehat{B}F$.

Considerando ora i triangoli $\overset{\triangle}{ABC}$ e $\overset{\triangle}{BEF}$, essi hanno:

- $B\widehat{A}C \cong E\widehat{B}F$ perché precedentemente dimostrato;
- $A\widehat{B}C \cong B\widehat{E}F$ perché precedentemente dimostrato;

- $E\widehat{F}B \cong B\widehat{C}A$ per costruzione ;

I due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine fra i triangoli (teorema).

La dimostrazione diventa ora di tipo algebrico perché possiamo porre i lati in proporzione (per quello appena dimostrato):

x/a = u/b = y/c

Ma EF ≅ CD, quindi x = b+c, possiamo allora ricavarci x e y:
u=b(b+c)/a
y=c(b+c)/a

Osserviamo però che anche ED ≅ FC (sempre per costruzione) da cui y=u+a

Possiamo infine riscrivere il rapporto tra i lati nel seguente modo:
c(b + c)/a = b(b + c)/a + a
risolvendo l'equazione troviamo che $c^2 = a^2 + b^2$.

Abbiamo così dimostrato il rapporto tra i lati di un triangolo rettangolo.

c.v.d