数列通项公式总结

1. $a_{n+1}=a_n+d$ 型

等差数列，略

2. $a_{n+1}=q\cdot a_n$ 型

等比数列，略

3. 累加法

常见形式为 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ **，且**$f(n)$**的前n项和易求得（比如等差、等比、差比、裂项等）** 有：

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_2-a_1)=f(n-1)+f(n-2)+...+f(1),(n\geq 2)$$

4. 累乘法

常见形式为：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$$

有：

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot...\cdot\frac{a_2}{a_1}=f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot...\cdot f(1)$$

5. $a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 型

> **核心思想：构造等比数列 方法一：待定系数法** 在等式两边加同一个常数，使得等式两边成等比数列：
>
> $$a_{n+1}+k=p\cdot a_n+q+k$$
>
> 待定系数法确定k值，有：
>
> $$\frac{k}{1}=\frac{q+k}{p}$$
>
> 解得：
>
> $$k=\frac{q}{p-1}$$
>
> 带回递推式：
>
> $$a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p\cdot a_n+\frac{pq}{p-1}=p\cdot(a_n+\frac{q}{p-1})$$
>
> 令数列$b_n=a_n+\frac{q}{p-1}$,得
>
> $$b_{n+1}=p\cdot b_n$$

> 转化为等比数列求解即可
>
> **方法二：逐项相减法** 有：
>
> $$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$$
> $$a_n=p\cdot a_{n-1}+q$$
>
> 两式相减可得：
>
> $$a_{n+1}-a_n=p\cdot(a_n-a_{n-1}),n\geq 2$$
>
> 令数列 $b_n=a_n-a_{n-1},n\geq 2$,有：
>
> $$b_{n+1}=p\cdot b_n$$
>
> 转化为等比数列求解即可 **特别地，$p=1$时，k 值不存在，但是此时递推式直接退化为等差数列。**

6. $a_{n+1}=pa_n+kn+b$ 型

> **方法一：逐项相减法** 有：
>
> $$a_{n+1}=pa_n+kn+b$$
> $$a_n=pa_{n-1}+k(n-1)+b$$
>
> 两式相减得：
>
> $$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})+k,n\geq 2$$
>
> 令 $b_n=a_n-a_{n-1},n\geq 2$ ，有：
>
> $$b_{n+1}=pb_n+k$$
>
> 转化成$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 型求解即可。
>
> **方法二：待定系数法** 此方法的思路依旧是**构造等比数列。** 在等式两边同时加一项 $x(n+1)+y$ ，得：
>
> $$a_{n+1}+x(n+1)+y=pa_n+(x+k)n+x+y+b$$
>
> 对应项成比例，有：
>
> $$x+k=px$$
> $$x+y+b=py$$
>
> 解得：
>
> $$x=\frac{k}{p-1}$$
> $$y=\frac{k}{(p-1)^2}+\frac{b}{p-1}$$
>
> 带回原式：
>
> $$a_{n+1}+\frac{k}{p-1}(n+1)+\frac{k+bp-b}{(p-1)^2}=pa_n+\frac{pk}{p-1}n+\frac{pk+bp^2-bp}{(p-1)^2}$$

> 令$b_n=a_n+\frac{k}{p-1}n+\frac{k+bp-b}{(p-1)^2}$ ，得:
>
> $$b_{n+1}=pb_n$$
>
> 转化为等比数列即可。

7. $a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot m^n$ 型

> **核心思想：构造等比数列**
> **方法一：** 在等式两边同时除以 m^{n+1} 得:
>
> $$\frac{a_{n+1}}{m^{n+1}}=p\cdot\frac{a_n}{m^n}+\frac{q}{m}$$
>
> 令数列$b_n=\frac{a_n}{m^n}$,那么:
>
> $$b_{n+1}=p\cdot b_n+\frac{q}{m}$$
>
> 即转化为$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 型
>
> **方法二：** 类似第三种$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 型，在等式两边同时加一项 $k\cdot m^{n+1}$，得:
>
> $$a_{n+1}+k\cdot m^{n+1}=p\cdot a_n+(q+km)\cdot m^n$$
>
> 等比数列需要指数项和数列项成比例， 由待定系数法确定 k 值:
>
> $$\frac{k}{1}=\frac{q+km}{p}$$
>
> 解得
>
> $$k=\frac{q}{p-m}$$
>
> 带回递推式
>
> $$a_{n+1}+\frac{q}{p-m}\cdot q^{n+1}=p\cdot a_n+(q+\frac{q}{p-m}m)\cdot q^n=p\cdot(a_n+\frac{q}{p-m}\cdot q^n)$$
>
> 令数列$b_n=a_n+\frac{q}{p-m}\cdot q^n$ ，那么;
>
> $$b_{n+1}=p\cdot b_n$$
>
> 即转化为等比数列

8. $a_{n+1}=pa_n^q$ 型

> 见到指数型，**取对数**
>
> $$lga_{n+1}=q\cdot lga_n+lgp$$
>
> 令数列$b_n=lga_n$，有:
>
> $$b_{n+1}=qb_n+lgp$$

> 这依然是$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 型，求解即可。

9. $a_{n+1}=\frac{a\cdot a_n}{b\cdot a_n+c}$ 型

> **倒数法** 两边取倒数：
>
> $$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{c}{a}$$
>
> 令数列$b_n=\frac{1}{a_n}$，有：
>
> $$b_{n+1}=\frac{b}{a}\cdot b_n+\frac{c}{a}$$
>
> 即转化为$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 型

10. $a_{n+1}=\frac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$ 型

> **方法一：待定系数法** 受到上一种类型的启发，是否可以构造一个数列，使得该问题可以转化为上一种类型的问题？ 两边同时加常数k：
>
> $$a_{n+1}+k=\frac{(a+ck)\cdot a_n+(b+dk)}{c\cdot a_n+d}\quad(1)$$
>
> 想要取倒数之后，可以用另一个数列来换元，就需要右侧分子和左侧对应系数成比例：
>
> $$\frac{k}{1}=\frac{b+dk}{a+ck}$$
>
> 这是一个关于k的一元二次方程，分下面两种情况：
>
> 1. 若k有解，那么把k带入（1）式，再取倒数，对右侧进行分离常数，即可转化为$a_{n+1}=\frac{a\cdot a_n}{b\cdot a_n+c}$型；
> 2. 若k无解，那么数列a_n是周期数列。
>
> **方法二：不动点法（了解）** 不动点的定义为：满足$f(x_0)=x_0$的值x_0称为函数$f(x)$的不动点。 对于数列递推式$a_{n+1}=\frac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$，把数列项全部换成x，有：
>
> $$x=\frac{ax+b}{cx+d}$$
>
> 这是关于x的一元二次方程，会发现它和方法一中待定系数方程一样。这里详细地说一下它的解对数列的影响：
>
> 1. 若方程有两个解 λ、μ,那么数列$\frac{a_n-\lambda}{a_n-\mu}$为等比数列；
> 2. 若方程有唯一解 λ，那么数列$\frac{1}{a_n-\lambda}$为等差数列；
> 3. 若方程无解，那么数列a_n是周期数列。
>
> **该方法可以当做一个技巧去记忆，但是切记不可以钻牛角尖；在平时做题你会看到很多形如$a_{n+1}=\frac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$的递推式，但是多数情况并不需要求它的递推式，尤其在小题中，可以使用不动点法判断a_n是否为周期数列，否则不要把该方法当成第一考虑的方法。**