МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. Г. Гутова

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Издатель:
Кемеровский государственный университет

ISBN 978-5-8353-2378-4 (Ч. 1)
ISBN 978-5-8353-2377-7

Об издании – 1, 2, 3

Кемерово 2019

ББК В19я73-5
УДК 519.6(075.8)
Г 89

Издается по решению редакционно-издательского совета Кемеровского государственного университета

Рецензенты:

доцент кафедры информационных технологий и прикладной математики Кемеровского института (филиала) РЭУ им. Г. В. Плеханова, кандидат физико-математических наук **Я. В. Славолюбова;**

кафедра математики КузГТУ (заведующая кафедрой кандидат технических наук, доцент, **Е. А. Николаева**)

Автор:
Гутова Светлана Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики

Г 89 **Основы дискретной математики. Ч. 1:** учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]: / С. Г. Гутова; КемГУ. – Электрон. дан. (0,89 Мб). – Кемерово: КемГУ, 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей), 1,2ГГц; 512 Мб оперативной памяти; видеокарта SVGA, 1280x1024 High Color (32 bit); 5 Мб свободного дискового пространства; операц. система Windows XP/7/8; Adobe Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8353-2378-4 (Ч. 1)
ISBN 978-5-8353-2377-7

Учебно-методическое пособие разработано по дисциплине «Дискретная математика» и включает краткий теоретический материал, примеры решения задач и индивидуальные задания по темам: операции над множествами, проекции векторных множеств на оси, перечислительная комбинаторика, соответствия, отношения, способы задания и локальные степени вершин графа, маршруты и расстояния в неориентированном графе, характеристические числа графа. Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика в соответствии с требованиями ФГОС ВО. Может быть использовано для изучения данных тем обучающимися естественно научных направлений подготовки.

Утверждено на заседании кафедры прикладной математики
Заведующая кафедрой,
Е. С. Каган

Рекомендовано научно-методическим советом института фундаментальных наук
Председатель совета доцент
С. М. Сирик

ISBN 978-5-8353-2378-4 (Ч. 1)
ISBN 978-5-8353-2377-7

Текстовое электронное издание

Минимальные системные требования:

Компьютер: Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей), 1,2 ГГц; ОЗУ 512 Мб; 5 Мб на жестком диске; видеокарта SVGA, 1280x1024 High Color (32 bit); привод CD-ROM

Операционная система: Windows XP/7/8

Программное обеспечение: Adobe Reader

Оглавление

Введение..5
ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. 6
Тема 1. Множества..6
Тема 2. Векторы и прямые произведения множеств. Проекция вектора на ось 13
Тема 3. Комбинаторика 18
Тема 4. Соответствия 31
Тема 5. Отношения 37
ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ 46
Тема 6. Способы задания графов. Локальные степени вершин......46
Тема 7. Маршруты. Расстояние между вершинами графа. Диаметр и центр графа 53
Тема 8. Характеристические числа графов 57
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 62
1. Индивидуальные задания по теме «Множества» 62
2. Индивидуальные задания по теме «Векторы и прямые произведения множеств. Проекция вектора на ось».......................65
3. Индивидуальные задания по теме «Комбинаторика»....................67
4. Индивидуальные задания по теме «Соответствия».......................70
5. Индивидуальные задания по теме «Отношения» 71
6. Индивидуальные задания по теме «Способы задания графов. Локальные степени вершин» 74
7. Индивидуальные задания по теме «Маршруты. Расстояние между вершинами графа. Диаметр и центр графа» 78
8. Индивидуальные задания по теме «Характеристические числа графов» 81
Литература 85

Введение

Учебно-методическое пособие разработано по дисциплине «Дискретная математика» для направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика в соответствии с требованиями ФГОС ВО.

В результате освоения данной дисциплины формируется компетенция учебного плана по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика:

– способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие включает краткий теоретический материал, примеры решения задач и индивидуальные задания по темам: операции над множествами, проекции векторных множеств на оси, перечислительная комбинаторика, соответствия, отношения, способы задания и локальные степени вершин графа, маршруты и расстояния в неориентированном графе, характеристические числа графа. Может быть использовано для изучения данных тем обучающимися естественно научных направлений подготовки.

ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Тема 1. Множества

Множество – один из ключевых объектов математики, в частности, теории множеств. «Множество есть многое, мыслимое нами как единое»,– говорил Георг Кантор (1845–1918гг.). Это не является в полном смысле логическим определением понятия множество, а всего лишь пояснением.

Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку [1] .

Множество состоит из ***элементов***. В зависимости от их числа множества различают как ***конечные*** или ***бесконечные***. Конечные множества могут состоять из одного или нескольких элементов.

Мощность множества – количество его элементов. Мощность множества М обозначается так: $|M|$.

Множество, не содержащее элементов, называется ***пустым множеством*** и обозначается $\varnothing$.

Множество обозначают заглавными буквами, а его элементы – прописными. Для записи множества используют фигурные скобки. Например, множество натуральных чисел от 3 до 10: $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Говоря об определенном множестве, мы полагаем, что для каждого объекта имеется две возможности: либо он входит в рассматриваемое множество, т. е. является его элементом, принадлежит ему (обозначается $x \in X$); либо нет (обозначается $x \notin X$).

Способы задания множества:

– перечисление всех элементов множества, например, множество однозначных неотрицательных чисел $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$;

– указание общего свойства, которым обладают все элементы множества, например, множество четных натуральных чисел $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$ или $X = \{x\colon x = 2n, \forall n \in N\}$;

– рекуррентно, например: $x_1 = 1;$, $x_n = x_{n-1} \cdot n;$ и др.

Множество A называют ***подмножеством*** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является также элементом множества B.

Множества A и B называют ***равными*** ($A = B$), если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B и наоборот, т. е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Другими словами, два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Если $A \subseteq B$, но при этом $A \neq B$, то A называется строгим (или собственным) подмножеством B.

На рисунке 1.1 приведена диаграмма Эйлера-Вьенна [2], где видно, что множество A целиком содержится в множестве B.

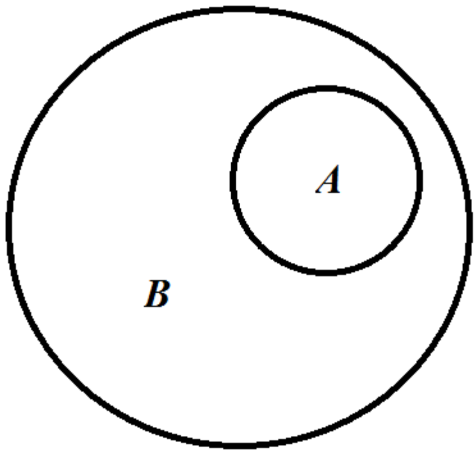


Рис. 1.1. Множество A – строгое подмножество B

Заметим, что контуры на данном рисунке могут иметь любую форму. Чаще всего используются окружности. Поэтому диаграмму Эйлера-Вьенна иначе называют – ***круги Эйлера.***

Множество U называется ***универсальным множеством*** (*множество всех подмножеств*) для некоторой системы множеств, если каждое множество этой системы является подмножеством U, то есть $\{A, B, C, \ldots\}$: $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, …

Дополнением множества A называется множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества, которые не входят в множество A.

На рисунке 1.2 приведена диаграмма, где темным цветом выделено множество $\overline{A}$.

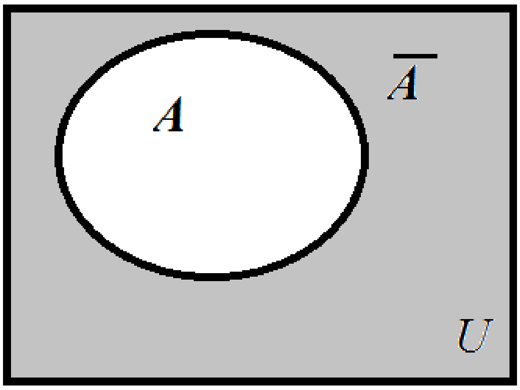


Рис.1.2. Дополнение множества *A*

Пересечением двух множеств *A* и *B* называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам *A* и *B* одновременно.

На рисунке 1.3 приведены круги Эйлера, где темным цветом выделено пересечение множеств *A* и *B*.

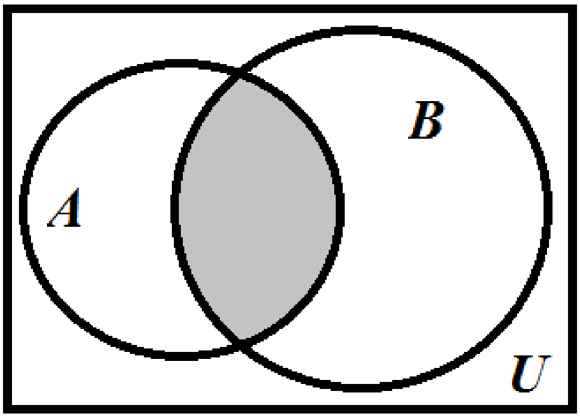


Рис. 1.3. Пересечение множеств *A* и *B*

Объединением двух множеств *A* и *B* называется множество $A \cup B$, состоящее из тех элементов, которые принадлежат или множеству *A*, или *B*, или *A* и *B* одновременно, то есть хотя бы одному из них.

На рисунке 1.4 приведены круги Эйлера, где темным цветом выделено объединение множеств *A* и *B*.

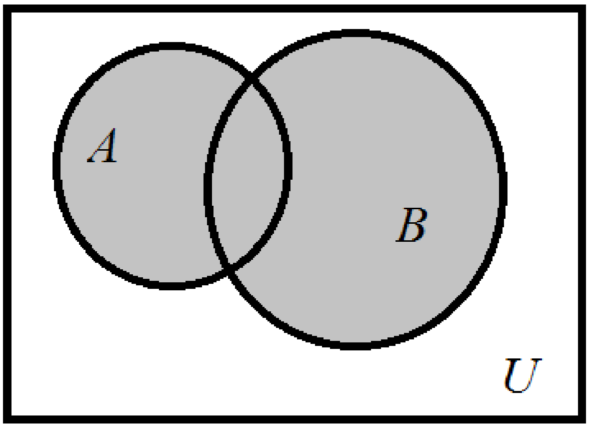


Рис. 1.4. Объединение множеств *A* и *B*

Разностью двух множеств *A* и *B* называется множество $A-B$ (или $A\setminus B$), состоящее из тех элементов множества *A*, которые не принадлежат множеству *B*:

$$A-B=A\cap\overline{B}.$$

На рисунке 1.5 приведены круги Эйлера, где темным цветом выделена разность множеств *A* и *B*.

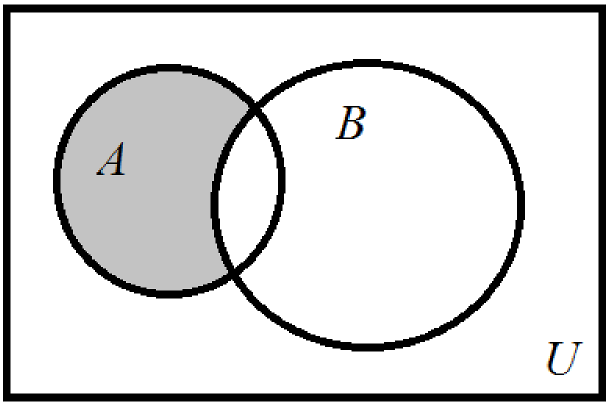


Рис. 1.5. Разность множеств *A* и *B*

Пример 1.1. Заданы два множества: A = {-2, -1, 0, 1, 2} и B = {0, 2, 4, 5}. Определить множества $A\cap B$; $A\cup B$; $A\setminus B$; $B\setminus A$ и их мощность.

Решение. Множество A = {-2, -1, 0, 1, 2} состоит из пяти элементов, следовательно мощность этого множества равна 5: $|A|=5$.

Аналогично, B = {0, 2, 4, 5} содержит 4 элемента: $|B|=4$.

По определению *пересечение* двух множеств состоит только из общих для обоих множеств элементов, следовательно, $A \cap B = \{0, 2\}$ и $|A \cap B| = 2$.

По определению *объединение* двух множеств состоит из всех элементов, которые принадлежат только множеству *A*, или только множеству *B*, или множествам *A* и *B* одновременно, следовательно, $A \cup B$ = {-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5} и $|A \cup B| = 7$.

Множество $A \setminus B$ является *разностью* двух множеств *A* и *B* и состоит из элементов множества *A*, которые одновременно не принадлежат множеству *B*, следовательно $A \setminus B =$ {-2, -1, 1} и $|A \setminus B| = 3$.

Аналогично, $B \setminus A = \{4, 5\}$ и $|B \setminus A| = 2$.

Пример 1.2. Дано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; множества $A = \{1, 2, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$. Найти: $(A \bigcup B) \bigcap \overline{C}$. Записать ответ в виде списка.

Решение. Решаем по действиям.

1) Найдем $A \bigcup B$. Это множество элементов, которые принадлежат либо *A*, либо *B*, либо *A* и *B* одновременно. Это означает, что надо составить общий список элементов этих множеств. Так как порядок элементов в множестве произвольный, то при получении объединения *A* и *B* сначала выпишем все элементы множества *A*, затем добавим те элементы множества *B*, которые еще не встречались. Удобно переобозначить это множество одной буквой, например *D*.

$$D = A \bigcup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}.$$

2) Найдем множество $\overline{C}$. Для этого выпишем те элементы множества *U*, которые не принадлежат *C*. Так 1 принадлежит *C*, значит, ее не включаем в $\overline{C}$, 2 – принадлежит *C*, значит, ее не включаем в $\overline{C}$, 3 – **не** принадлежит *C*, значит, ее **включаем** в $\overline{C}$, и так далее.

$$\overline{C} = \{3, 5, 7\}.$$

3) Найдем $D \cap \overline{C}$. Это множество элементов принадлежащих одновременно *D* и $\overline{C}$. Для этого будем брать по очереди элементы *D* и проверять их наличие в множестве $\overline{C}$. Если элемент есть в обоих множествах, включаем его в $D \cap \overline{C}$. Например, $1 \in D$, но $1 \notin \overline{C}$, значит, 1 **не включаем** в искомое

пересечение. Далее, $2 \in D$, но $2 \notin \overline{C}$, значит, 2 **не включаем** в искомое пересечение; $5 \in D$ и $5 \in \overline{C}$, значит, 5 **включаем** в искомое пересечение, и так далее.

$$D \cap \overline{C} = \{5, 7\}.$$

Пример 1.3. На диаграмме Вьенна-Эйлера изобразить результат действия

$$\left(A - \overline{B}\right) \cap C.$$

Решение. Решаем по действиям. На каждой копии диаграммы необходимо восстановить контуры всех множеств, участвующих в задании. Они должны пересекаться в самом общем виде. Самый большой контур – универсальное множество. Оно содержит в себе все множества задачи. На рисунке 1.6 приведена такая диаграмма для данного примера. Это основа диаграммы для выполнения каждого действия.

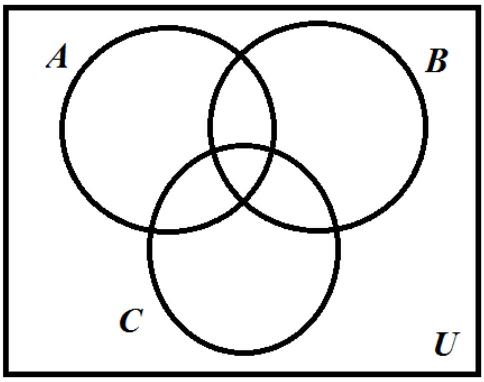


Рис.1.6. Основа диаграммы для трех множеств

1) Изобразим на 1 диаграмме множества, вступающие в 1 действие (действие в скобках). Каждое множество заштриховываем штриховкой своего вида (с наклоном влево, с наклоном вправо, горизонтальной или вертикальной). Множества штрихуются ***целиком,*** независимо от их пересечения с другими множествами диаграммы.

На рисунке 1.7 видно, что в результате получилось четыре вида штриховки: левая, правая, двойная и пустая (нет штриховки).

Так как первое действие – разность $D = A - \overline{B}$, из всех видов штриховки надо выбрать ту одинарную штриховку, которая соответствует множеству *A.* То есть отбросить ту часть множества *A*, которая покрыта двойной штриховкой, так как она одновременно является частью множества *B.* Эту часть мы переносим на 2 копию диаграммы в качестве результата 1 действия.

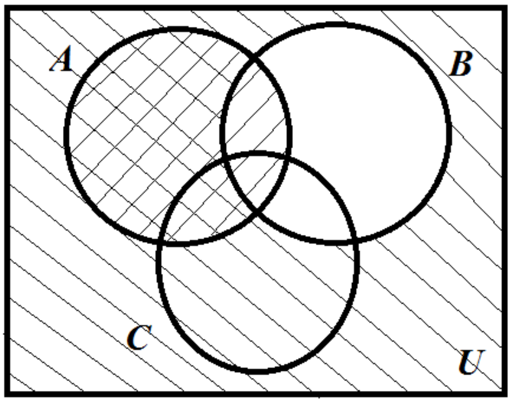


Рис.1.7. Множества, вступающие в 1 действие

2) На 2 копии диаграммы (см. рис. 1.8) надо заштриховать множества, вступающие во второе действие, то есть $D = A - \overline{B}$ и C.

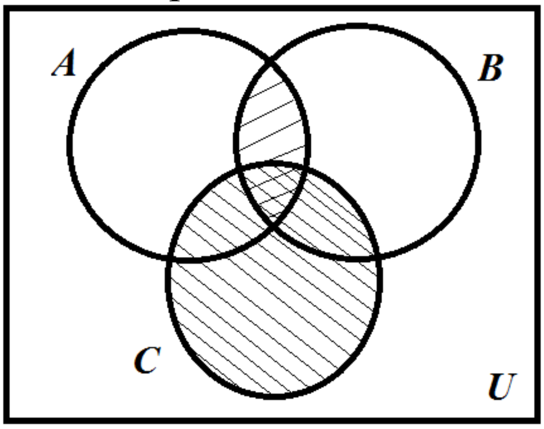


Рис.1.8. Множества, вступающие во 2 действие

Так как второе действие – пересечение $D \cap C$, то из всех видов штриховки надо выбрать двойную штриховку, которая соответствует общей части множеств D и C. Эту часть мы переносим на 3 копию диаграммы в качестве результата 2 действия, то есть ответа (см. рис. 1.9).

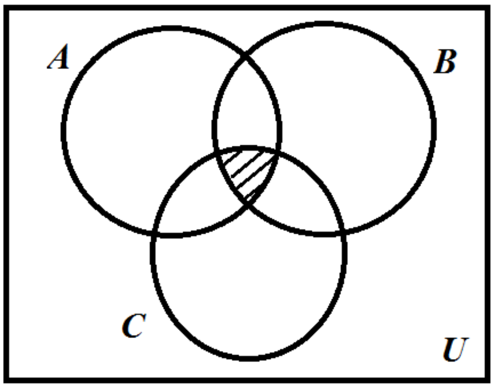


Рис.1.9. Ответ

Заметим, что на каждой копии диаграммы, кроме последней, должно быть ровно два вида штриховки, а на последней копии – один вид.

Тема 2. Векторы и прямые произведения множеств. Проекция вектора на ось

Вектор (***кортеж***) – это упорядоченный набор элементов. Его элементы называются ***координатами*** или ***компонентами*** вектора [1, 3-5].

Длина (***размерность***) вектора – число координат вектора.

В отличие от элементов множества, его координаты могут совпадать. Обозначение вектора – в круглых скобках, координаты – через запятую (0, 5, 4, 5, 0, 1). Иногда скобки и даже запятые опускаются. Тогда вектор называют ***словом***: 054501.

Векторы длины 2 называют упорядоченными парами; длины 3 – тройками; и так далее, длины n – n-ками.

Два вектора ***равны***, если они имеют одинаковую длину, и соответствующие координаты равны, то есть:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

$$\text{если } m = n \text{ и } a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_m = b_n.$$

Прямым (***декартовым***) ***произведением*** двух множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из упорядоченных пар элементов, в которых первый элемент принадлежит множеству A, а второй – множеству B.

Прямое произведение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (обозначается $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$) называется множеством всех векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, длины n таких, что $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$.

Замечание:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ раз}.$$

Теорема (***о мощности прямого произведения множеств***).

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества и $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2$, ... , $|A_n| = m_n$. Тогда мощность множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ равна произведению мощностей множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Следствие: $|A^n| = |A|^n$.

Пример 2.1. Заданы три множества: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ и $C = \{g\}$. Определить множества $A \times B$, $B \times A$, A^2, $A \times B \times A$, $B^2 \times C$.

Решение. При получении множества $A \times B$ надо перечислить все пары, составленные из элементов этих множеств. Применяем ***лексико-графическое упорядочение***. По теореме о мощности прямого произведения множеств можно сказать, что искомых пар будет $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \times 4 = 12$.

При составлении первой пары в качестве первой координаты берем 1-ый элемент множества A, в качестве второй координаты – 1-ый элемент множества B. Получаем пару (0, 4).

При составлении следующей пары в качестве первой координаты оставляем 1-ый элемент множества A, в качестве второй координаты – 2-ой элемент множества B. Получаем пару (0, 6).

Затем, получаем пары (0, 8), (0, 10). Заметим, здесь первая координата фиксирована, а вторая пробегает весь список возможных элементов множества B.

После этого заменяем первую координату на 1, а вторая координата снова пробегает весь список возможных элементов множества B.

Получаем пары (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10). И так далее.

Таким образом, искомое прямое произведение примет вид:

$$A \times B = \{(0, 4), (0, 6), (0, 8), (0, 10), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10)\}.$$

Для получения $B \times A$ можно поменять местами первые и вторые координаты в каждой паре предыдущего множества. Из чего, в частности, следует, что $A \times B \neq B \times A$. Но лучше использовать лексико-графический порядок. Элементов этого множества тоже 12. Тогда получим:

$$B \times A = \{(4, 0), (4, 1), (4, 2), (6, 0), (6, 1), (6, 2), (8, 0), (8, 1), (8, 2), (10, 0), (10, 1), (10, 2)\}.$$

Множество $A^2 = A \times A$ строится из тех соображений, что в качестве первой координаты берут элементы «первого» множества A, а в качестве второй – элементы «второго» множества A. Понятно, что в этом случае, часть пар будет заведомо с одинаковыми координатами. Заметим, что $\left|A^2\right| = |A|^2 = 3^2 = 9.$

$$A^2 = A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

При построении множества $A \times B \times A$ надо помнить, что его элементами являются уже не пары, а тройки (векторы длины 3). Значит, для перечисления элементов $A \times B \times A$ необходимо сначала зафиксировать 1 элемент A на первом месте и 1 элемент B на втором месте, а третья координата пробегает весь список элементов третьего множества, то есть A. Получаем тройки (0, 4, 0), (0, 4, 1), (0, 4, 2).

Затем первая координата остается той же, вторая меняется на следующий по списку (второй элемент B), а третья снова пробегает весь список элементов множества A. Получаем тройки (0, 6, 0), (0, 6, 1), (0, 6, 2).

Затем первая координата остается той же, вторая меняется на следующий по списку (третий элемент B), а последняя снова пробегает весь список элементов множества A. Получаем тройки (0, 8, 0), (0, 8, 1), (0, 8, 2).

Последняя группа троек с первой координатой, равной 0 – (0, 10, 0), (0, 10, 1), (0, 10, 2).

Затем надо заменить первую координату на 1 и повторить перебор претендентов на второе и третье место. Затем первую координату полагаем равной 2.

Удобно заранее определить, что количество искомых троек будет найдено по теореме о мощности прямого произведения множеств: $|A \times B \times A| = |A| \times |B| \times |A| = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36.$

Тогда $A \times B \times A =$

$$\begin{aligned} = \{&(0, 4, 0), (0, 4, 1), (0, 4, 2), (0, 6, 0), (0, 6, 1), (0, 6, 2), \\ &(0, 8, 0), (0, 8, 1), (0, 8, 2), (0, 10, 0), (0, 10, 1), (0, 10, 2), \\ &(1, 4, 0), (1, 4, 1), (1, 4, 2), (1, 6, 0), (1, 6, 1), (1, 6, 2), \\ &(1, 8, 0), (1, 8, 1), (1, 8, 2), (1, 10, 0), (1, 10, 1), (1, 10, 2), \\ &(2, 4, 0), (2, 4, 1), (2, 4, 2), (2, 6, 0), (2, 6, 1), (2, 6, 2), \\ &(2, 8, 0), (2, 8, 1), (2, 8, 2), (2, 10, 0), (2, 10, 1), (2, 10, 2)\}. \end{aligned}$$

Мощность множества $B^2 \times C$ равна $\left|B^2 \times C\right| = 4^2 \cdot 1 = 16$. А именно, четыре с первой координатой 4, четыре с первой координатой 6, четыре с первой координатой 8 и четыре с первой координатой 10.

$$B^2 \times C = \{(4, 4, g), (4, 6, g), (4, 8, g), (4, 10, g),$$
$$(6, 4, g), (6, 6, g), (6, 8, g), (6, 10, g),$$
$$(8, 4, g), (8, 6, g), (8, 8, g), (8, 10, g),$$
$$(10, 4, g), (10, 6, g), (10, 8, g), (10, 10, g)\}.$$

Проекцией вектора $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ длины n на i-ю ось называется его i-я координата (обозначение $пр_i v$) [1, 3, 5]**.**

Проекцией вектора $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на оси с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ называется вектор $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ длины k (обозначение $пр_{i_1 i_2 \dots i_k} v$).

Пусть V – множество векторов *одинаковой* длины.

Проекцией множества векторов **V** на i-ось называется множество проекций всех векторов из V на i-ось:

$$пр_i V = \{пр_i v : v \in V\}.$$

Проекция множества векторов V на оси с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$:

$$пр_{i_1 i_2 \dots i_k} V = \{пр_{i_1 i_2 \dots i_k} v : v \in V\}.$$

Полезно помнить следующее:

- проекция вектора на одну ось – это вектор из одной координаты (скаляр),
- проекция вектора на две оси – вектор из двух координат,
- проекция вектора на три оси – вектор из трех координат и так далее;
- проекция множества векторов на одну ось – это множество векторов из одной координаты (множество скаляров),
- проекция множества векторов на две оси – множество векторов из двух координат,
- проекция множества векторов на три оси – множество векторов из трех координат и так далее.

Пример 2.2.

Проекция точки декартовой плоскости на 1-ю ось – ее абсцисса, на 2-ю ось – ее ордината.

Пример 2.3. Дано множество векторов

$$V=\{v_1=(a,b,d);v_2=(c,b,d);v_3=(d,b,b)\}.$$

Тогда

$np_1v_1=a$ – это вектор из одной координаты вектора v_1, а именно, первой координаты;

$np_3v_2=d$ – это вектор из одной координаты вектора v_2, а именно, третьей;

$np_2v_3=b$ – это вектор из одной координаты вектора v_3, а именно, второй;

$np_{1,2}v_2=(c,b)$ – это вектор из двух координат вектора v_2, а именно первой и второй;

$np_{2,3}v_3=(b,b)$ – это вектор из двух координат вектора v_3, а именно второй и третьей;

$np_{1,3}v_1=(a,d)$ – это вектор из двух координат вектора v_1, а именно первой и третьей;

$np_1V=\{a,c,d\}$ – это множество векторов, составленных из первых координат элементов *V*. Они все различны, поэтому $|np_1V|=3$;

$np_2V=\{b\}$ – это множество векторов, составленных из вторых координат элементов *V*. Они все одинаковы, поэтому $|np_2V|=1$;

$np_3V=\{d,b\}$ – это множество векторов, составленных из третьих координат элементов *V*. Две из трех одинаковы, поэтому $|np_3V|=2$;

$np_{1,2}V=\{(a,b),(c,b),(d,b)\}$ – это множество векторов, составленных из первых и вторых координат векторов множества *V*. Все проекции различны, поэтому $|np_{1,2}V|=3$;

$np_{2,3}V=\{(b,d),(b,b)\}$ – это множество векторов, составленных из вторых и третьих координат векторов множества *V*. Две из трех проекций одинаковы, поэтому $|np_{2,3}V|=2$;

$np_{1,3}V = \{(a, d), (c, d), (d, b)\}$ – это множество векторов, составленных из первых и третьих координат векторов множества *V*. Все проекции различны, поэтому $|np_{1,3}V| = 3$.

3. $V = \{(a, b), (b, c, d), (c, a, d)\}$. Чему равна np_1V? Ее найти нельзя, так как заданное множество *V* – множество векторов разной длины, в отношении которых никаких определений не было сделано.

Тема 3. Комбинаторика

Одно из основных правил комбинаторики – ***правило суммы*** [1, 2, 4]. Его ***классическая формулировка*** имеет вид: если элемент α можно выбрать *k* способами, а элемент β можно выбрать *m* способами, тогда α или β можно выбрать *k* + *m* способами. Например, если в вазе 5 яблок и 6 груш, то 1 фрукт (яблоко ***или*** грушу) можно выбрать 5 + 6 = 11 способами.

Современная формулировка правила суммы известна как ***теорема о мощности объединения множеств***: мощность объединения двух множеств равно сумме мощностей первого и второго множества, за вычетом мощности их пересечения:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3.1}$$

Причем, если множества не пересекаются, то теорема приобретает вид, аналогичный классической формулировке:

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{3.2}$$

Для трех множеств теорема имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Пример 3.1. Из 35 учащихся класс по итогам года имели «5» по математике – 14 человек; по физике – 15 человек; по химии – 18 человек; по математике и физике – 7 человек; по математике и химии – 9 человек; по физике и химии – 6 человек; по всем трем предметам – 4 человека.

1. Сколько человек имеют «5» по указанным предметам?
2. Сколько человек не имеет «5» по указанным предметам?
3. Имеет «5» только по математике?
4. Имеет «5» только по двум предметам?

Решение. Введем обозначения. Обозначим буквой U множество всех учеников класса, буквой M множество учеников, имеющих «5» по математике, буквой Φ – имеющих «5» по физике, X – имеющих «5» по химии. Тогда, согласно условию,

$$|U| = 35,\ |M| = 14,\ |\Phi| = 15,\ |X| = 18,$$

$$|M \cap \Phi| = 7,\ |M \cap X| = 9,\ |\Phi \cap X| = 6,\ |M \cap \Phi \cap X| = 4.$$

1. На рисунке 3.1 приведено множество, состоящее из учеников, имеющих «5» хотя бы по одному из указанных предметов.

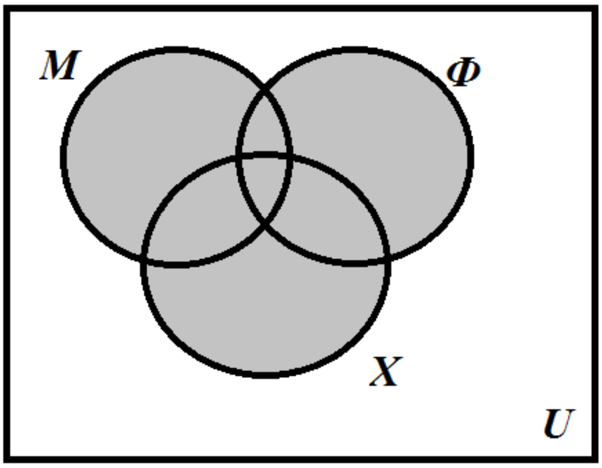


Рис. 3.1. Множество учеников, имеющих «5» хотя бы по одному предмету

Очевидно, что это объединение множеств M, Φ и X. Для нахождения количества элементов объединения воспользуемся формулой (3.3).

$$|M \cup \Phi \cup X| = |M| + |\Phi| + |X| - |M \cap \Phi| - |M \cap X| - |\Phi \cap X| + |M \cap \Phi \cap X|,$$

$$|M \cup \Phi \cup X| = 14 + 15 + 18 - 7 - 9 - 6 + 4 = 29.$$

2. На рисунке 3.2 приведено множество, состоящее из учеников, не имеющих «5» ни по одному из указанных предметов. Обозначим его буквой H.

Очевидно, что это разность между универсальным множеством U и объединением множеств M, Φ и X. Для нахождения количества элементов множества H (3.2).

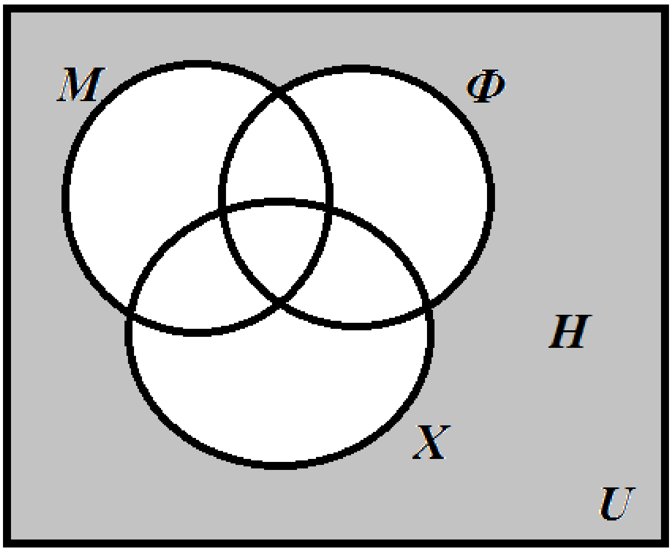


Рис. 3.2. Множество учеников, не имеющих «5»
по указанным предметам

Очевидно, что это разность между универсальным множеством *U* и объединением множеств *М, Ф* и *Х*. Для нахождения количества элементов объединения воспользуемся формулой (3.2).

$$|U| = |H \cup (M \cup \Phi \cup X)| = |H| + |M \cup \Phi \cup X|,$$
$$|H| = |U| - |M \cup \Phi \cup X|.$$
$$|H| = 35 - 29 = 6.$$

3. На рисунке 3.3 приведено множество, состоящее из учеников, имеющих «5» только по математике. Обозначим его буквами *ТМ*.

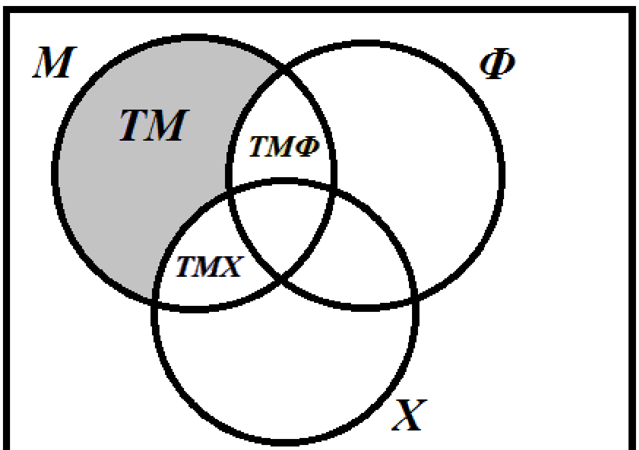


Рис. 3.3. Множество учеников, имеющих «5»
только по математике

Очевидно, что это разность между множеством M и множествами $TM\Phi$ – имеющих «5» только по математике и физике, TMX – имеющих «5» только по математике и химии, и $M \cap \Phi \cap X$.

Тогда

$$|TM\Phi| = |M \cap \Phi| - |M \cap \Phi \cap X|; \tag{3.4}$$

$$|TMX| = |M \cap X| - |M \cap \Phi \cap X|; \tag{3.5}$$

$$|TM| = |M| - |TM\Phi| - |TMX| - |M \cap \Phi \cap X|;$$

$$|TM| = |M| - \left(|M \cap \Phi| - |M \cap \Phi \cap X| \right) - \left(|M \cap X| - |M \cap \Phi \cap X| \right) -$$

$$- |M \cap \Phi \cap X| = |M| - |M \cap \Phi| - |M \cap X| + |M \cap \Phi \cap X|.$$

$$|TM| = 14 - 7 - 9 + 4 = 18 - 16 = 2.$$

4. На рисунке 3.4 приведено множество, состоящее из учеников, имеющих «5» только по двум предметам. Обозначим его $T2$. Очевидно, что $T2$ является суммой трех непересекающихся множеств $TM\Phi$, TMX, $T\Phi X$. Используя (3.4), (3.5) и то, что

$$|T\Phi X| = |M \cap \Phi| - |M \cap \Phi \cap X|,$$

получим:

$$|T2| = |TM\Phi| + |TMX| + |T\Phi X| =$$

$$= |M \cap \Phi| + |M \cap X| + |\Phi \cap X| - 3|M \cap \Phi \cap X|.$$

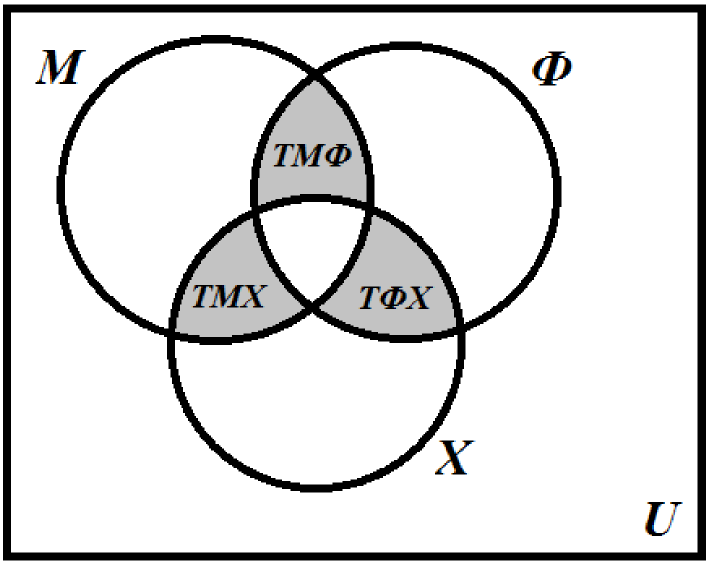


Рис. 3.4. Множество учеников, имеющих «5» только по двум предметам

Тогда $|T2| = 7 + 9 + 6 - 3 \cdot 4 = 22 - 12 = 10.$

Другое основное правило комбинаторики – ***правило произведения***. Его ***классическая формулировка*** имеет вид: если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β можно выбрать m способами, тогда α и β можно выбрать km способами. Например, если на гору ведут 2 дороги, а с горы – 3 дороги, то путь через перевал (дорогу на гору ***и*** дорогу с горы) можно выбрать $2 \cdot 3 = 6$ способами.

Современная формулировка правила произведения известна как ***теорема о мощности прямого произведения множеств***: количество элементов произведения двух множеств равно произведению количества элементов в первом и во втором множестве:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|. \tag{3.6}$$

Правило произведения можно применять для любого количества конечных множеств.

Пример 3.2. 1) Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$? 2) В скольких из них только одна цифра «2»?

Решение.

1) Четырехзначное число – это вектор длины 4, первая координата которого не может равняться «0».

Значит, все четырехзначные числа составляют множество $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$. Здесь A_1 – цифры, претендующие на первое место числа, A_2 – цифры, претендующие на второе место и так далее.

Так как на первом месте не может стоять «0» значит, на него претендуют цифры «1», «2», «3», «4». То есть $|A_1| = 4$.

На втором месте может стоять любая цифра из списка «0», «1», «2», «3», «4», то есть $|A_2| = 5$. Аналогично, на третьем и четвертом местах могут стоять любые цифры, значит $|A_3| = |A_4| = 5$.

Тогда по правилу произведения:

$$|A| = |A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500.$$

2) Пусть искомое множество чисел – B.

Пусть $B_1 \times B_2 \times B_3 \times B_4$ подмножество его элементов, где цифра «2» стоит на первом месте. Здесь B_1 – цифры, претендующие на первое место. Это только «2». Таким образом, $|B_1| = 1.$ На каждом из оставшихся мест не может быть «2», значит список претендентов: «0», «1», «3», «4». Откуда, $|B_2| = |B_3| = |B_4| = 4.$ Значит, таких чисел будет:

$$|B_1 \times B_2 \times B_3 \times B_4| = |B_1| \cdot |B_2| \cdot |B_3| \cdot |B_4| = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1 \cdot 4^3 = 1 \cdot 64 = 64.$$

Пусть теперь цифра «2» стоит на втором месте. Тогда претендентов на первое место – три («1», «3», «4»), на второе место – один (только «2»), на третье место – четыре («0», «1», «3», «4») и на четвертое место – те же четыре элемента. В итоге таких чисел $3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 1 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48.$

Если цифра «2» стоит на третьем месте, то, по аналогии, их тоже 48, если на последнем – 48. То есть 48 надо умножить на число способов выбрать место под «2» среди второго, третьего и четвертого, то есть на 3.

Таким образом, искомое количество чисел найдется по формуле:

$$|B| = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4) = 64 + 3 \cdot 48 = 64 + 144 = 208.$$

Замечание: Факториалом натурального числа n называется функция, находимая по формуле:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Основные свойства факториала:

1) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$; 2) $0! = 1$.

Из правила произведения выводятся различные комбинаторные формулы (***комбинаторные числа***). Перечислим основные из них.

Число размещений без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k различными координатами.

Число размещений без повторений находится по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3.7)$$

Пример 3.3. Сколькими способами можно построить 3-буквенное слово из букв множества $\{b, d, g, h, r\}$ так, чтобы все буквы в слове были различны?

Решение. В данном случае составляется вектор (слово) из трех различных букв ($k = 3$), причем буквы выбираются из множества с пятью различными элементами ($n = 5$). Количество таких слов (3.7) равно числу размещений без повторений из 5 по 3.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{1} \cdot \cancel{2}} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Число размещений с повторениями из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k координатами, среди которых могут быть одинаковые.

Число размещений с повторениями находится по формуле:

$$B_n^k = n^k. \tag{3.8}$$

Пример 3.4. Человек забыл последние три цифры номера телефона. Сколько вариантов номеров он может перебрать?

Решение. Здесь будет столько номеров, сколько можно составить векторов длины 3 ($k = 3$) с любыми цифрами из множества с десятью цифрами $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ($n = 10$). Тогда по формуле (3.8) получим:

$$B_{10}^3 = 10^3 = 1000.$$

Число перестановок без повторений из n элементов – это число способов, сколькими можно расположить на n различных местах n различных элементов.

Число перестановок без повторений находится по формуле:

$$P_n = n!. \tag{3.9}$$

Пример 3.5. 1) Сколькими способами можно расставить на книжной полке 5 различных книг? 2) В скольких случаях две определенные книги A и B окажутся рядом?

Решение:

1) Согласно определению числа перестановок без повторений, 5 книг на 5 местах можно расставить 5! различными способами. Значит общее число расстановок (перестановок) найдется по формуле (3.9):

$$|U| = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

2) Пусть множество A составляют такие расстановки книг, где две определенные книги окажутся рядом. Для нахождения количества способов совершить такие расстановки, надо воспользоваться замечанием.

Замечание:

$$|A| = x \cdot y \cdot z, \tag{3.10}$$

где x – число способов ***выбрать нужные места***; y – число способов ***расположить*** на них ***нужные элементы***; z – число способов ***расположить остальные элементы*** на оставшихся местах.

На рисунке 3.5 приведена схема расстановки книг. В нашем случае, нужные места – это два места рядом. Выбор двух мест рядом из 5 мест производится путем перебора. На рисунке видно, что это пары мест под номерами 12, 23, 34, 45. В итоге этих пар – 4.

Таким образом, в формуле (3.10) $x = 4$.

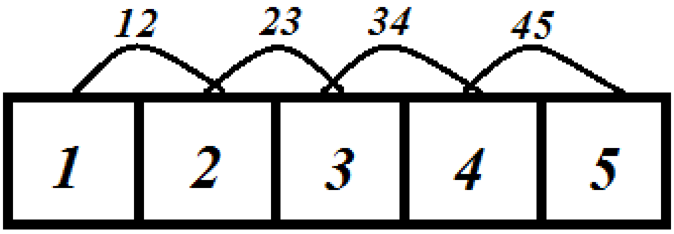


Рис. 3.5. Схема выбора нужных мест

На рисунке 3.6 показано, как на двух выбранных местах можно расставить две 2 книги A и B.

Вообще говоря, то, что для каждой пары выбранных мест имеется ровно два варианта расстановки книг A и B, можно было найти по формуле (3.9). Действительно, 2 элемента на 2 местах можно расставить 2! различными способами. Таким образом, в формуле (3.10) $y = 2! = 2$.

На рисунке 3.7 показано, как на оставшихся 3 местах можно расставить остальные три книги. При этом положение книг A и B уже зафиксировано.

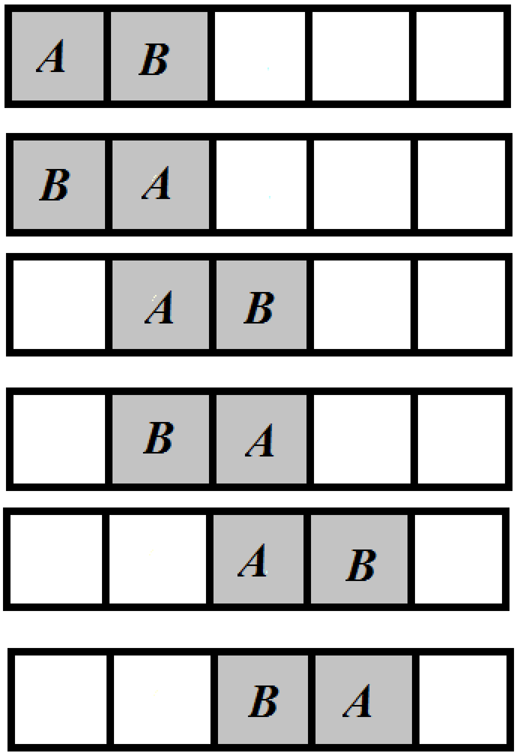


Рис. 3.6. Схема расстановки
нужных элементов на выбранных местах

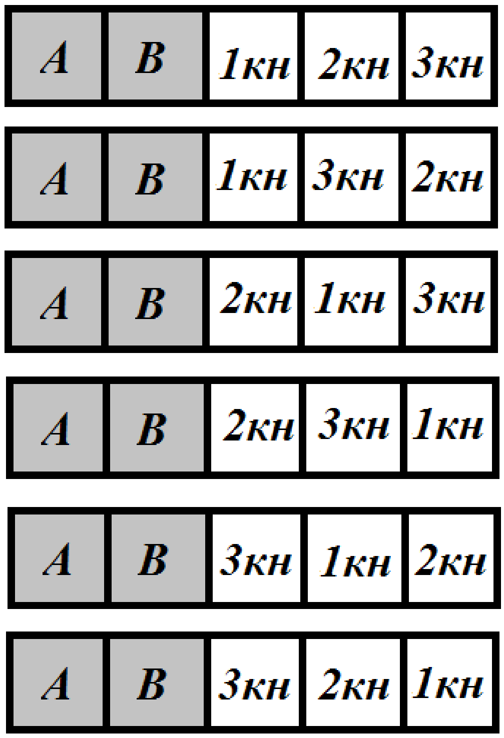


Рис. 3.7. Схема расстановки
остальных элементов на оставшихся местах

Заметим, что количество вариантов расстановки оставшихся 3 книг на оставшихся 3 местах можно было найти по формуле (3.9).

Действительно, 3 элемента на 3 местах можно расставить 3! различными способами. Таким образом, в формуле (3.10) $z = 3! = 6$.

В итоге, искомое количество расстановок равно:

$$|A| = 4 \cdot 2! \cdot 3! = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48.$$

Число перестановок с повторениями из n элементов, среди которых n_1 ***одинаковых,*** n_2 ***одинаковых, …,*** n_k ***одинаковых***, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, находится по формуле [2, 5]:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \qquad (3.11)$$

Пример 3.6. Сколько различных слов можно получить, переставляя карточки разрезной азбуки с буквами слова «мама»?

Решение. Известно, что четыре цифры 1, 2, 3, 4 можно переставлять друг с другом 4! различными способами. В слове «мама» – 4 буквы. Но перестановок из этих букв можно составить не 4! = 24, а всего лишь 6:

мама, маам, ммаа, амам, аамм, амма.

Чтобы понять, как это случилось, поставим в соответствие цифрам 1 и 2 букву «м», а цифрам 3 и 4 – букву «а». Тогда, например, перестановке цифр 1234 – соответствует слово «ммаа», а перестановке 1324 – слово «мама».

Но слово «ммаа» соответствует не только перестановке 1234, но и перестановкам 2134, 1243, 2143. Если цифры 1 и 2 меняются местами, то в соответствующем слове меняются местами две буквы «м», следовательно, само слово остается неизменным. Таким образом, среди 24 перестановок четырех указанных букв будут одинаковыми 2! те, которые отличаются лишь сменой мест букв «м», а также 2! те, которые отличаются лишь переменой букв «а».

И тогда это число различных слов будет меньше 4! в 2!2! раза:

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Пример 3.7. 1) Сколькими способами можно получить слово «обороноспособность», переставляя местами карточки разрезной азбуки, с буквами О, Б, О, Р, О, Н, О, С, П, О, С, О, Б, Н, О, С, Т, Ь? 2) Сколько различных слов можно составить переставляя карточки разрезной азбуки с буквами О, Б, О, Р, О, Н, О, С, П, О, С, О, Б, Н, О, С, Т, Ь?

Решение:

1. Чтобы ответить на 1 вопрос, воспользуемся правилом произведения. Для получения слова «обороноспособность» при перестановке местами карточек разрезной азбуки с указанными буквами надо выяснить, сколько карточек претендует на каждое из 18 мест с тем, чтобы в итоге получилось нужное слово. Заметим, что букв «о» в слове $n_1 = 7$, букв «б» – $n_2 = 2$, букв «р» – $n_3 = 1$, букв «н» – $n_4 = 2$, букв «с» – $n_5 = 3$, букв «п» – $n_6 = 1$, букв «т» – $n_7 = 1$, букв «ь» – $n_8 = 1$.

Так на первое место – 7 претендентов, так как первую букву слова «обороноспособность» (букву «о») можно выбрать 7 способами. На втором месте – буква «б». Карточек с буквой «б» 2 штуки. Значит, претендентов на второе место – 2. На третье место, где тоже стоит буква «о», уже только 6 претендентов, так как одна из 7 карточек с буквой «о» использована.

Таким образом, количество элементов множества A – всех перестановок 18 карточек, приводящих к слову «обороноспособность», находятся как произведение:

$$|A| = \underset{\text{О}}{\underline{7}}\cdot\underset{\text{Б}}{\underline{2}}\cdot\underset{\text{О}}{\underline{6}}\cdot\underset{\text{Р}}{\underline{1}}\cdot\underset{\text{О}}{\underline{5}}\cdot\underset{\text{Н}}{\underline{2}}\cdot\underset{\text{О}}{\underline{4}}\cdot\underset{\text{С}}{\underline{3}}\cdot\underset{\text{П}}{\underline{1}}\cdot\underset{\text{О}}{\underline{3}}\cdot\underset{\text{С}}{\underline{2}}\cdot\underset{\text{О}}{\underline{2}}\cdot\underset{\text{Б}}{\underline{1}}\cdot\underset{\text{Н}}{\underline{1}}\cdot\underset{\text{О}}{\underline{1}}\cdot\underset{\text{С}}{\underline{1}}\cdot\underset{\text{Т}}{\underline{1}}\cdot\underset{\text{Ь}}{\underline{1}} =$$

$$= 7!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1! = 7!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!.$$

2. **Чтобы определить, сколько различных слов можно составить** переставляя карточки разрезной азбуки с буквами О, Б, О, Р, О, Н, О, С, П, О, С, О, Б, Н, О, С, Т, Ь, нужно воспользоваться формулой (3.11). Здесь общее число элементов $n = 18$. Причем эти элементы делятся на 8 групп с одинаковыми элементами, количества которых:

$$n_1 = 7,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1,\ n_4 = 2,\ n_5 = 3,\ n_6 = 1,\ n_7 = 1,\ n_8 = 1;$$

$$7 + 2 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 = 18.$$

Тогда по формуле (3.11) искомое количество ***различных*** слов будет равно:

$$P_{18}(7, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 1) = \frac{18!}{7!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{18!}{7!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!}.$$

Число сочетаний без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов выбрать k штук без учета порядка.

Формула для нахождения числа сочетаний без повторений имеет вид:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad \ldots. \qquad (3.12)$$

Свойства:

1) $C_n^0 = 1;$ 2) $C_n^n = 1;$

3) $C_n^1 = n;$ 4) $C_n^{n-1} = n.$

5) $C_n^k = C_n^{n-k};$

6) $C_n^2 = \frac{n\cdot(n-1)}{2};$ 7) $C_n^3 = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}.$

С помощью числа сочетаний без повторений чаще всего решают ***урновую задачу*** – задачу, в которой производится неупорядоченный выбор сразу нескольких элементов из заданной совокупности.

Пример 3.8. В урне 7 шаров. Из них:3 белых и 4 черных шара. Наугад выбирают 3 шара. 1) Сколькими способами это можно сделать? 2) В скольких случаях среди них будет: *A*) один белый; *B*) один черный; **С**) хотя бы один белый шар?

Решение. Построим схему урновой задачи (см. рис. 3.8).

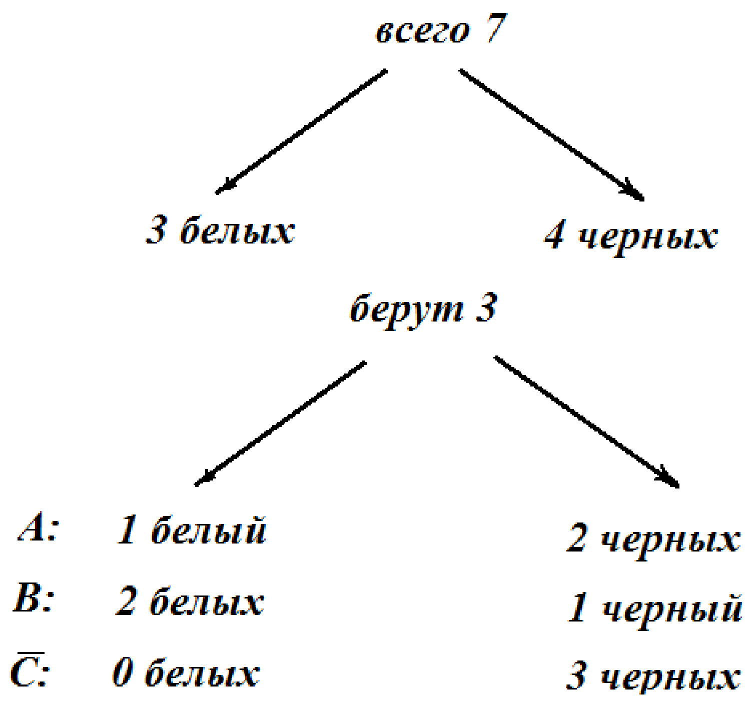


Рис.3.8. Схема урновой задачи

1. Общее число способов выбрать 3 элемента из 7 без учета порядка найдется как число сочетаний без повторений из 7 по 3 по формуле (3.12).

$$|U| = C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 5\cdot 7 = 35.$$

То же самое можно было найти, воспользовавшись свойством 7.

2. Для нахождения числа способов выбрать такие три шара, чтобы среди них был 1 белый и 2 черных, надо найти отдельно число способов выбрать 1 белый шар из 3 белых и число способов выбрать 2 черных шара из 4 черных, и перемножить их согласно правилу произведения.

$$|A| = C_3^1 \cdot C_4^2 = 3\cdot\frac{4\cdot 3}{2} = 3\cdot 6 = 18.$$

Здесь были использованы свойства 3 и 6.

Для нахождения числа способов выбрать такие три шара, чтобы среди них было 2 белых и 1 черный, надо найти отдельно число способов выбрать 2 белых шара из 3 белых и число способов выбрать 1 черный шар из 4 черных, и перемножить их.

$$|B| = C_3^2 \cdot C_4^1 = 3\cdot 4 = 12.$$

Здесь были использованы свойства 4 и 3.

Для нахождения числа способов выбрать такие три шара, чтобы среди них был хотя бы 1 белый, воспользуемся подходом «от обратного». Для этого найдем количество способов выбора таких трех шаров, где нет белых, и вычтем это число из общего количества способов выбрать три шара.

Среди 3 белых шаров берем 0 белых, среди 4 черных – 3 черных.

$$|\overline{C}| = C_3^0 \cdot C_4^3 = 1\cdot 4 = 4.$$

Здесь были использованы свойства 1 и 4.

Тогда искомое число равно:

$$|C| = |U| - |\overline{C}| = 35 - 4 = 31.$$

Тема 4. Соответствия

Соответствием [1, 3-5] множеств A и B называется подмножество G такое, что $G \subseteq A \times B$. Если $(a, b) \in G$, то говорят, что «***b*** соответствует ***a*** при соответствии G».

Область определения соответствия G – множество $пр_1\, G \subseteq A$.

Область значений соответствия G – множество $пр_2 G \subseteq B$.

Соответствие G называется ***всюду*** (***полностью***) ***определенным*** – если $пр_1\, G = A$ (в противном случае – частично определенное соответствие).

Соответствие G называется ***сюрьективным***, если $пр_2\, G = B$.

Образ элемента ***a*** в множестве ***B*** при соответствии G – это множество всех элементов $b \in B$, которые соответствуют $a \in пр_1 G$. Обозначим образ a – ***G*(*a*)**.

Прообраз элемента ***b*** в множестве ***A*** при соответствии G – это множество всех $a \in A$, которым соответствует $b \in пр_2 G$. Обозначим прообраз b – $\boldsymbol{G^{-1}(b)}$.

Образом множества C $\in пр_1\, G$ называется объединение образов всех элементов C. ***Прообразом множества*** **D** $\in пр_2\, G$ называется объединение прообразов всех элементов D.

Соответствие ***G*** называется ***функциональным*** (***однозначным***) соответствием, если образом любого элемента из $пр_1\, G$ является единственный элемент из $пр_2\, G$. Иначе говорят, соответствие G обладает свойством единственности образа.

Соответствие G называется ***инъективным*** соответствием, если прообразом любого элемента из $пр_2\, G$ является единственный элемент из $пр_1 G$. Иначе говорят, соответствие G обладает свойством единственности прообраза.

Соответствие G является ***функцией f типа*** $f : A \to B$**,** если оно функционально. Обозначение функции: $f(a) = b$.

Соответствие G является ***отображением*** множества A в множество B, если оно функционально и полностью определено.

Отображение $G \subseteq A \times B$ будет ***отображением A в B***, если G – не сюрьективно.

Отображение $G \subseteq A \times B$ будет ***отображением A на B***, если G – сюрьективно.

Соответствие G является ***взаимно однозначным***, если оно: 1) всюду определено; 2) сюрьективно; 3) функционально; 4) инъективно.

Преобразованием множества A называется отображение типа $A \to A$.

Функция типа $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется n-местной функцией. Это обозначается: $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$.

Соответствие $H \subseteq B \times A$ называется обратным к соответствию $G \subseteq A \times B$, если H таково, что $(b, a) \in H \Leftrightarrow (a, b) \in G$.

Можно обозначить обратное соответствие $H = G^{-1}$.

Если соответствие, обратное к функции $f : A \to B$ является функциональным, то оно называется функцией, обратной к f. Обозначим обратную функцию f^{-1}.

Пусть дана функция $f : A \to B$. Соответствие f^{-1} является функцией тогда и только тогда, когда f инъективна, и f^{-1} является отображением тогда и только тогда, когда f инъективна и сюрьективна (то есть биективна).

Утверждение:

Для функции $f : A \to B$ существует обратная функция f^{-1} тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначным соответствием между своей областью определения и областью значений.

Пусть даны функции $f : A \to B$ и $g : B \to C$.

Функция $h : A \to C$ называется ***композицией функций f и g***, если $h(x) = g(f(x)),\ \ x \in A$. (Это обозначение $h = f \circ g$). Часто говорят, что ***h*** получена ***подстановкой f в g.***

Для многоместных функций $f : A^m \to B$ и $g : B^n \to C$ возможны различные варианты подстановки f в g, задающие функции различных типов. Например, при $m = 3$ и $n = 4$ функция

$$h = g(b_1,\ f(a_1, a_2, a_3), b_3, b_4)$$

имеет 6 аргументов и тип $B \times A^3 \times B^2 \to C$.

Для множества многоместных функций типа $f_1 : A^{m_1} \to A, \ldots, f_n : A^{m_n} \to A$ возможны любые подстановки функций друг в друга, а также любые переименования аргументов.

Например, переименование x_3 в x_2 из функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ четырёх аргументов порождает функцию трёх аргументов: $f(x_1, x_2, x_2, x_4) = f(x_1, x_2, x_4)$.

Функция, полученная из функций $f_1, \ldots, f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется ***суперпозицией*** функций $f_1, \ldots, f_n$. Выражение, задающее эту суперпозицию и содержащее функциональные знаки, скобки и символы аргументов, называется ***формулой***.

Пример 4.1. Соответствие $G = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$ является подмножеством прямого произведения множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b, c\}$.

Определить свойства соответствия. Является ли оно функцией? Отображением? Почему? Является ли оно взаимно однозначным?

Решение:

На рисунке 4.1 приведена схема соответствия *G*.

Множества *A* и *B* обозначены кругами Эйлера. Внутри каждого множества указаны ***все*** его элементы. Если элемент множества *A* связан с элементом множества *B* соответствием *G*, то на рисунке эти элементы связаны стрелкой.

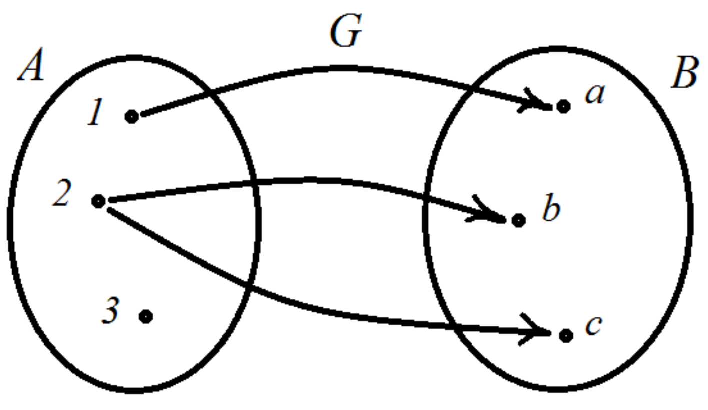


Рис. 4.1. Соответствие $G \subseteq A \times B$

Найдем область определения соответствия *G* – множество $np_1\, G \subseteq A$. Так как соответствие – это совокупность векторов длины 2, то его проекция на 1 ось – это множество всех первых координат этих векторов.

В нашем случае, $пр_1\, G \subseteq$ = {1, 2}. Здесь всего два элемента, так как во 2-ой и 3-ей паре множества G одинаковые первые координаты. Откуда можно сделать вывод, что $пр_1\, G \neq A$. Согласно определению, это означает, что соответствие G является ***частично определенным***. Действительно, так как пары с первой координатой 3 в соответствии G нет, значит G определено не на всех элементах множества A, то есть оно определено не полностью (частично).

Найдем область значений соответствия G – множество $пр_2\, G \subseteq B$. Это множество всех вторых координат этих пар, входящих в соответствие G.

В нашем случае, $пр_2\, G = \{a, b, c\}$. Откуда можно сделать вывод, что $пр_2\, G = B$. Согласно определению, это означает, что соответствие G является ***сюрьективным***.

Найдем образ каждого элемента области определения.

$G(1) = \{a\}$, так как в множестве G имеется единственная пара с первой координатой 1. Это пара $(1, a)$, т. е. элементу 1 из области определения соответствует единственный элемент a из области значений. На рисунке 4.1 видно, что из 1 идет единственная стрелка в элемент a.

$G(2) = \{b, c\}$, так как в множестве G имеется две пары с первой координатой 2. Это пары $(2, b)$ и $(2, c)$, то есть элементу 2 из области определения соответствует два элемента b и c из области значений. На рисунке 4.1 видно, что из 2 идет две стрелки в b и в c.

Образ элемента 3 не ищем, так как он не принадлежит области определения.

Отсюда можно сделать вывод: так как единственности образа нет, то соответствие G ***не является функциональным***.

Найдем прообраз каждого элемента области значений.

$G^{-1}(a) = \{1\}$, так как в множестве G имеется единственная пара со второй координатой a. Это пара $(1, a)$, то есть элемент a из области значений соответствует единственному элементу 1 из области определений. На рисунке 4.1 видно, что в a идет единственная стрелка из элемента 1.

$G^{-1}(b) = \{2\}$, так как в множестве G имеется единственная пара со второй координатой b. Это пара $(2, b)$, то есть элемент b из области значений соответствует единственному элементу 2 из области определений. На рисунке 4.1 видно, что в b идет единственная стрелка из элемента 2.

$G^{-1}(c) = \{2\}$, так как в множестве G имеется единственная пара со второй координатой c. Это пара $(2, c)$, то есть элемент c из области значений соответствует единственному элементу 2 из области определений. На рисунке 4.1 видно, что в c идет единственная стрелка из элемента 2.

Отсюда можно сделать вывод: так как единственности прообраза есть, то соответствие G ***является инъективным.***

Таким образом, соответствие G обладает свойствами:

1) не полностью (частично) определено,
2) сюрьективно,
3) не функционально,
4) инъективно.

Ответим на следующие оставшиеся вопросы.

Соответствие G не является функцией, так как оно не функционально.

Соответствие G не является отображением, так как оно не функционально и не полностью определено.

Соответствие G не является взаимно однозначным, так как оно сюрьективно и инъективно, но не функционально и не полностью определено.

Пример 4.2. Соответствие $H=\{(k,2),(p,4),(q,2)\}$ является подмножеством прямого произведения множеств $M=\{k,p,q\}$ и $N=\{2,4,6\}$.

Определить свойства соответствия. Является ли оно функцией? Отображением? Почему? Является ли оно взаимно однозначным?

Решение:

На рисунке 4.2 приведена схема соответствия H.

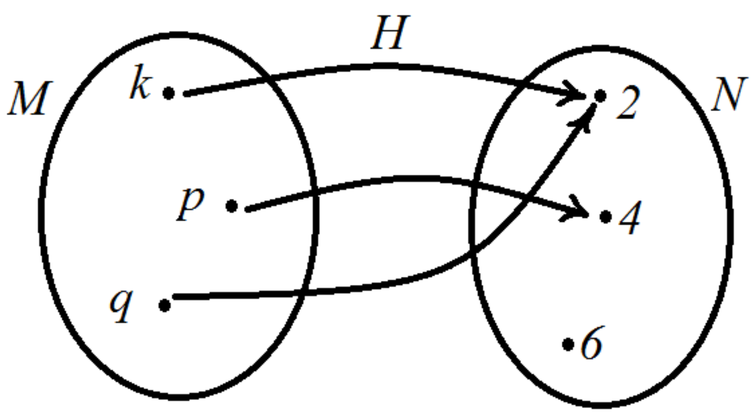


Рис. 4.2. Соответствие $H \subseteq M \times N$

Найдем область определения соответствия H – множество $np_1 H \subseteq M$. Так как соответствие – это совокупность векторов длины 2, то его проекция на 1 ось – это множество всех первых координат этих векторов.

В нашем случае, $np_1 H = \{k, p, q\}$. Откуда можно сделать вывод, что $np_1 H = M$. Согласно определению, это означает, что соответствие H является ***полностью определенным***.

Найдем область значений соответствия H – множество $np_2 H \subseteq N$. Это множество всех вторых координат этих пар, входящих в соответствие H.

В нашем случае, $np_2 H = \{2, 4\}$. Здесь всего два элемента, так как в 1-й и 3-й паре множества H одинаковые вторые координаты. Откуда можно сделать вывод, что $np_2 H \neq N$. Согласно определению, это означает, что соответствие H является ***не сюрьективным***.

Найдем образ каждого элемента области определения.

$H(k) = \{2\}$, так как в множестве H имеется единственная пара с первой координатой k. Это пара $(k, 2)$, то есть элементу k из области определения соответствует единственный элемент 2 из области значений. На рисунке 4.2 видно, что из k идет единственная стрелка в элемент 2.

$H(p) = \{4\}$, так как в множестве H имеется единственная пара с первой координатой p. Это пара $(p, 4)$, то есть элементу p из области определения соответствует единственный элемент 4 из области значений. На рисунке 4.2 видно, что из p идет единственная стрелка в элемент 4.

$H(q) = \{2\}$, так как в множестве H имеется единственная пара с первой координатой q. Это пара $(q, 2)$, то есть элементу q из области определения соответствует единственный элемент 2 из области значений. На рисунке 4.2 видно, что из q идет единственная стрелка в элемент 2.

Отсюда можно сделать вывод: так как есть единственность образа, то соответствие H ***является функциональным***.

Найдем прообраз каждого элемента области значений.

$H^{-1}(2) = \{k, q\}$, так как в множестве H имеется две пары со второй координатой 2. Это пары $(k, 2)$ и $(q, 2)$, то есть элемент 2 из области значений соответствует двум различным элементам из области определений. На рисунке 4.2 видно, что в 2 идет две стрелки из элементов k и q.

$H^{-1}(4) = \{p\}$, так как в множестве H имеется единственная пара со второй координатой 4. Это пара $(p, 4)$, то есть элемент 4 из области значений соответствует единственному элементу p из области определений. На рисунке 4.2 видно, что в 4 идет единственная стрелка из элемента p.

Прообраз элемента 6 из множества N не ищем, так как он не принадлежит области значений.

Отсюда можно сделать вывод: так как единственность прообраза есть, то соответствие H ***не является инъективным.***

Таким образом, соответствие H обладает свойствами:

1) полностью определено,
2) не сюрьективно,
3) функционально,
4) не инъективно.

Ответим на следующие оставшиеся вопросы.

Соответствие H является функцией, так как оно функционально.

Соответствие H является отображением, так как оно функционально и полностью определено.

Соответствие H является отображением M в N, так как оно не сюрьективно.

Соответствие H не является взаимно однозначным, так как оно полностью определено и функционально, но не сюрьективно и не инъективно.

Тема 5. Отношения

Подмножество $R \subseteq M^n$ называется ***n – местным отношением*** [1, 3-5] на множестве M. Говорят, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ находится в отношении R, если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$.

Одноместное отношение – это просто подмножество M. Такие отношения называют признаками: элемент ***a*** – обладает признаком R, если $a \in R$ и $R \subseteq M$.

Свойства одноместных отношений – это свойства подмножеств M, поэтому для случая $n = 1$ термин “отношение” употребляется редко.

Примером ***трехместного (тернарного) отношения*** является множество троек нападающих в хоккейной команде. Любой из нападающих находится в этом отношении со всеми теми игроками, с которыми он играет в одной тройке (один нападающий может, вообще говоря, участвовать более, чем в одной тройке).

При $n = 2$ – отношения называются ***двуместными или “бинарными”***. Если ***a***, ***b*** находятся в отношении ***R***, это записывается ***aRb.***

Способы задания бинарных отношений

Для задания бинарных отношений можно использовать любые способы задания множеств (например, список пар, для которых данное отношение выполняется).

Бинарные отношения, определяемые на конечном множестве, обычно задаются списком пар элементов, бинарной матрицей.

Матрица бинарного отношения, заданного на множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – это квадратная матрица C порядка n, в которой c_{ij} (где i – номер строки, j - номер столбца) определяется так:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \ \text{если } a_i R a_j; \\ 0, \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любого множества M отношение E, заданное единичной матрицей, в которой по главной диагонали стоят “1”, а остальные “0” – называется ***отношением равенства.***

Свойства бинарных отношений

Отношение R на M называется ***рефлексивным,*** если для любого $a \in M$ выполняется aRa. Главная диагональ матрицы такого отношения содержит только единицы.

Отношение R на M называется ***антирефлексивным,*** если ни для какого $a \in M$ aRa не выполняется. Главная диагональ матрицы отношения содержит только нули.

Отношение R на M называется ***симметричным,*** если для любой пары $(a,b) \in M^2$ из aRb следует bRa (иначе говоря, для любой пары отношение R выполняется в обе стороны или не выполняется вообще). Матрица симметричного отношения – симметрична относительно главной диагонали: $c_{ij} = c_{ji}$ для всех *i*, *j*, то есть $C = C^T$

Отношение *R* на *M* называется ***антисимметричным***, если из того, что выполняется ***aRb*** и ***bRa*** следует, что ***a = b*** (то есть ни для каких различных элементов множества *M* отношение *R* не выполняется в обе стороны). Матрица антисимметричного отношения не имеет ни одного симметричного относительно главной диагонали единичного элемента.

Отношение *R* на *M* называется ***транзитивным,*** если для любых ***a, b, c*** из множества *M* из того, что выполняется ***aRb*** и ***bRc*** следует, что ***aRc.***

Отношение эквивалентности

Отношение *R* на *M* называется ***отношением эквивалентности,*** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Равенство – это минимальное отношение эквивалентности в том смысле, что при удалении любой пары из *E* (то есть любой единицы на диагонали матрицы *E*) оно перестает быть рефлексивным и, следовательно, уже не является эквивалентным.

Пусть на множестве *M* задано отношение эквивалентности *R*. Осуществим построение ***классов эквивалентности,*** на которые разбивается множество *M* этим отношением.

Выберем элемент $a_1 \in M$ и образуем класс (подмножество *M*) C_1, состоящий из a_1 и всех элементов, эквивалентных a_1.

Затем выберем элемент $a_2 \notin C_1$, и образуем класс C_2, состоящий из a_2 и всех элементов, эквивалентных a_2, и так далее.

Получится система классов $C_1, C_2, \ldots$ (возможно бесконечная) такая, что любой элемент из *M* входит хотя бы в один класс, то есть

$$\bigcup_i C_i = M.$$

Эта система обладает свойствами:

1) она образует разбиение, то есть классы попарно не пересекаются;

2) любые два элемента из одного класса эквивалентны;

3) любые два элемента из разных классов неэквивалентны.

Мощность системы классов эквивалентности называется ***индексом разбиения***.

Совокупность классов эквивалентности, на которые разбивается множество *M* по отношению эквивалентности *R*, называется ***фактор-множеством*** множества *M* по отношению *R*. Тогда классы эквивалентности – это элементы фактор-множества, а индекс разбиения – мощность фактор-множества.

С другой стороны, любое разбиение *M* на классы определяет некоторое отношение эквивалентности.

Отношение порядка

Отношение называется отношением ***нестрогого порядка,*** если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Отношение называется отношением ***строгого порядка***, если оно антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Оба типа таких отношений называются отношениями порядка.

Элементы a и b ***сравнимы*** по отношению порядка *R*, если выполняется aRb или bRa.

Множество *M,* на котором задано отношение порядка, называется ***полностью упорядоченным***, если любые два элемента *M* сравнимы, иначе говорят, обладает свойством ***полноты.***

Множество *M*, на котором задано отношение порядка, называется ***частично упорядоченным***, если не любые два элемента *M* сравнимы.

Лексико-графический порядок.

Пусть в списке букв конечного алфавита *A* порядок букв зафиксирован, то есть всегда один и тот же, как, например, в русском и латинском алфавите. Тогда этот список определяет полное упорядочение букв, которое назовем отношением предшествования и обозначим «$\prec$»:

$a_i \prec a_j$, если a_i предшествует a_j в списке букв.

На основе отношения предшествования букв строится отношение предшествования слов, определяемое следующим образом.

Пусть даны слова $\alpha_1 = a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}$ и $\alpha_2 = a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$.

Тогда $\alpha_1 \prec \alpha_2$, тогда и только тогда, когда

1) $\alpha_1 = \beta a_i \gamma$, $\alpha_2 = \beta a_j \delta$, где $a_i \prec a_j$ (β, γ, δ – слова возможно непустые, a_i, a_j – буквы);

2) $\alpha_2 = \alpha_1 \beta$, где β – непустое слово.

Это отношение задает полное упорядочение множества всех конечных слов в алфавите A, которое является ***лексикографическим упорядочением слов.***

Пример 5.1. Отношение R «иметь одинаковый остаток от деления на 4», задано на множестве натуральных чисел N.

Построить матрицу бинарного отношения, определить свойства отношения. Является ли оно отношением эквивалентности? Порядка? Если R – отношение эквивалентности, то указать разбиение на классы эквивалентности и определить индекс разбиения. Если R – отношение порядка, то указать строгий порядок или не строгий, полный или не полный (почему?).

Решение:

Каждое натуральное число можно представить в виде суммы числа, кратного 4 и остатка от деления на 4.

Так $1 = 0 \cdot 4 + 1$. Здесь 0 – это целая часть от деления 1 на 4, 1 – остаток от деления 1 на 4.

Так $12 = 3 \cdot 4 + 0$. Здесь 3 – это целая часть от деления 12 на 4, 0 – остаток от деления 12 на 4. И так далее.

Всего различных остатков от деления на 4 – четыре: 0, 1, 2, 3.

Для построения матрицы бинарного отношения выпишем в заголовках строк и столбцов 9 элементов множества N.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	1	0	0	0	1
6	0	1	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Определим свойства отношения.

1. Отношение рефлексивно, так как каждое натуральное число n имеет одинаковый остаток от деления на 4 с самим собой. То есть

$1R1,\ 2R2,\ 3R3$ и так далее. Признаком этого является главная диагональ матрицы, заполненная единицами.

2. Отношение не антирефлексивно, так как рефлексивно. Одновременно рефлексивным и антирефлексивным отношение быть не может, так как эти два свойства взаимно исключают друг друга.

3. Отношение симметрично, так как если числа n_1 и n_2 имеют одинаковые остатки от деления на 4, то числа n_2 и n_1 тоже имеют одинаковые остатки от деления на 4. То есть $1R5 \Rightarrow 5R1$; $2R6 \Rightarrow 6R2$; $3R7 \Rightarrow 7R3$ и так далее.

Признаком симметричности является главная симметричная матрица бинарного отношения.

4. Отношение не является антисимметричным, так как оно симметрично. Одновременно симметричным и антисимметричным отношение быть не может, так как эти два свойства взаимно исключают друг друга.

5. Отношение является транзитивным, так как из того, что числа n_1 и n_2 имеют одинаковые остатки от деления на 4 и n_2 и n_3 имеют одинаковые остатки от деления на 4 следует, что n_1 и n_3 тоже имеют одинаковые остатки от деления на 4. То есть $1R5\,и\,5R9 \Rightarrow 1R9$; $2R6\,и\,6R2 \Rightarrow 2R2$ и так далее.

Таким образом, отношение R является рефлексивным, симметричным и транзитивным, следовательно, является отношением эквивалентности.

Известно, что отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано на классы.

Образуем первый класс. Возьмем любое натуральное число, например 1, и поместим его в класс C_1. В этот же класс помещаем все натуральные числа, имеющие тот же остаток от деления на 4, что и 1. Так как $1 = 0 \cdot 4 + 1,\ 5 = 1 \cdot 4 + 1,\ 9 = 2 \cdot 4 + 1$ и так далее, то есть $C_1 = \{1, 5, 9, \ldots\}$.

Образуем второй класс. Возьмем любое натуральное число, не вошедшее в C_1, например 2, и поместим его в класс C_2. В этот же класс помещаем все натуральные числа, имеющие тот же остаток от деления на 4, что и 2. Так как $2 = 0 \cdot 4 + 2$, $6 = 1 \cdot 4 + 2$, $10 = 2 \cdot 4 + 2$ и так далее, то есть $C_2 = \{2, 6, 10, \ldots\}$.

Аналогично образуем третий и четвертый классы эквивалентности. $C_3 = \{3, 7, 11, \ldots\}$, $C_4 = \{4, 8, 12, \ldots\}$.

Количество классов эквивалентности – индекс разбиения – равен $I = 4$.

Пример 5.2. На множестве чисел $\{5, 7, 9, 14, 18, 37\}$ задано отношение $R = \{(a, b): a\ больше\ либо\ равно\ b\}$. Построить матрицу бинарного отношения, определить свойства отношения. Является ли оно отношением эквивалентности? Порядка? Если R – отношение эквивалентности, то указать разбиение на классы эквивалентности и определить индекс разбиения. Если R – отношение порядка, то указать строгий порядок или не строгий, полный или не полный (почему?)

Решение:

Для построения матрицы бинарного отношения выпишем в заголовках строк и столбцов элементы данного множества.

	5	**7**	**9**	**14**	**18**	**37**
5	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	0	0	0
9	1	1	1	0	0	0
14	1	1	1	1	0	0
18	1	1	1	1	1	0
37	1	1	1	1	1	1

Определим свойства отношения.

1. Отношение рефлексивно, так как каждое натуральное число m из множества M больше или равно самому себе, то есть $5 \geq 5$, $7 \geq 7$, $9 \geq 9$ и так далее. Признаком этого является главная диагональ матрицы, заполненная единицами.

2. Отношение не антирефлексивно, так как рефлексивно. Одновременно рефлексивным и антирефлексивным отношение быть не может, так как эти два свойства взаимно исключают друг друга.

3. Отношение не симметрично, так как из того, что $7 \geq 5$ не следует, что $5 \geq 7$.

4. Отношение антисимметрично, так как если число $m_1 \neq m_2, m_1 \geq m_2$, то число m_2 не может быть больше или равно числу m_1. Признаком антисимметричного отношения является

нижнетреугольная (или верхнетреугольная) матрица бинарного отношения.

5. Отношение является транзитивным, так как для любых трех чисел множества *M*, таких что $m_1 \geq m_2$ и $m_2 \geq m_3$ следует, что $m_1 \geq m_3$, то есть $37 \geq 14$ и $14 \geq 9 \Rightarrow 37 \geq 9$; $18 \geq 7$ и $7 \geq 5 \Rightarrow 18 \geq 5$ и так далее.

Таким образом, отношение *R* является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, следовательно, это отношение нестрогого порядка.

Любое отношение порядка может задавать либо полный, либо частичный порядок элементов множества *M*. Заметим, что отношение «больше либо равно» позволяет упорядочить любую пару различных элементов. То есть для любых двух чисел $m_1 \neq m_2$ выполняется $m_1 \geq m_2$ либо $m_2 \geq m_1$. Значит порядок полный. А именно: $37 \geq 18 \geq 14 \geq 9 \geq 7 \geq 5$.

Пример 5.3. Отношение *R* на множестве слов $M = \{abb, ba, ac, ca, bba, bbb\}$ задано в виде:

$$R = \{(X, Y): \textit{первая буква слова } X \textit{ не равна первой букве слова } Y\}.$$

Построить матрицу бинарного отношения, определить свойства отношения. Является ли оно отношением эквивалентности? Порядка? Если *R* – отношение эквивалентности, то указать разбиение на классы эквивалентности и определить индекс разбиения. Если *R* – отношение порядка, то указать строгий порядок или не строгий, полный или не полный (почему?).

Решение:

Для построения матрицы бинарного отношения выпишем в заголовках строк и столбцов элементы данного множества.

	abb	***ba***	***ac***	***ca***	***bba***	***bbb***
abb	0	1	0	1	1	1
ba	1	0	1	1	0	0
ac	0	1	0	1	1	1
ca	1	1	1	0	1	1
bba	1	0	1	1	0	0
bbb	1	0	1	1	0	0

Определим свойства отношения.

1. Отношение не рефлексивно, так как элемент ***abb*** не состоит с элементом ***abb*** в данном отношении *R*, то есть $abb\ \overline{R}\ abb$.

2. Отношение антирефлексивно, так как никакой элемент множества *M*, не состоит в данном отношении сам с собой (у всех одинаковых слов одинакова первая буква). Признаком этого является главная диагональ матрицы, заполненная нулями.

3. Отношение симметрично, так как если в слове *X* и *Y* различны первые буквы, то и в словах *Y* и *X* также различны первые буквы. Признаком этого является главная симметричная матрица бинарного отношения.

4. Отношение не является антисимметричным, так как оно симметрично. Одновременно симметричным и антисимметричным отношение быть не может, так как эти два свойства взаимно исключают друг друга.

5. Отношение не является транзитивным, так как из того, что слова ***bba*** и ***abb*** имеют разные первые буквы, и при этом, слова ***abb*** и ***bbb*** имеют разные первые буквы, то это не означает, что слова ***bba*** и ***bbb*** также имеют разные первые буквы.

То есть $bba\ R\ abb$ и $abb\ R\ bbb \not\Rightarrow bba\ R\ bbb$.

Таким образом, отношение *R* является антирефлексивным, следовательно, не может быть отношением эквивалентности; не является транзитивным, значит, не может быть отношением порядка.

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Тема 6. Способы задания графов. Локальные степени вершин

Пусть V – множество вершин, а E – множество ребер. ***Графом*** G называется [1, 3] пара объектов (V, E), между которыми задано отношение инцидентности:

$$\Gamma : e \to (v, w),$$

где вершина v и ребро e ***инцидентны*** друг другу, если вершина является для этого ребра концевой точкой.

Вершины v' и v'' называются ***смежными***, если существует ребро, соединяющее их, то есть они инцидентны одному и тому же ребру.

Ребра e' и e'' называются ***смежными***, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину (инцидентны одной вершине).

Граф, содержащий направленные ребра (дуги) с началом v' и концом v'', называется ***ориентированным графом*** (*орграфом*). Для орграфа

$$(v', v'') \neq (v'', v').$$

Граф, содержащий ненаправленные ребра с конами v' и v'' , называется ***неориентированным графом*** (*н-графом*). Для н-графа

$$(v', v'') = (v'', v').$$

Рис. 6.1. Неориентированное ребро **(*a, b*)**

Рис. 6.2. Ориентированное ребро **(*a, b*)**

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется ***петлей***.

Рис. 6.3. Неориентированная петля

Рис. 6.4. Ориентированная петля

Ребра (дуги), имеющие одинаковые начало и конец, называются параллельными или ***кратными***.

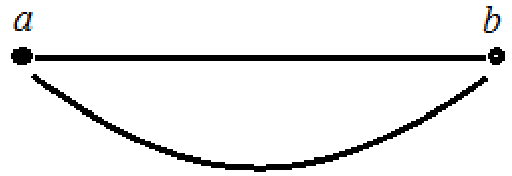


Рис.6.5. Кратные неориентированные ребра

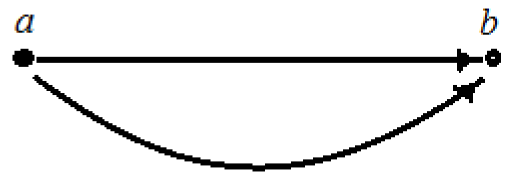


Рис. 6.6. Кратные ориентированные ребра

Ребра орграфа, соединяющие одну и ту же пару вершин в разных направлениях, называются ***симметричными*** или противоположно направленными.

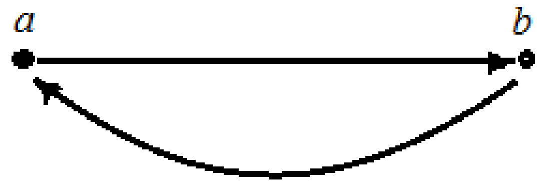


Рис. 6.7. Симметричные ребра

Способы задания графа

Задать граф – значит описать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности.

Для описания вершин и ребер достаточно их занумеровать.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – вершины графа; $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – ребра графа G.

Отношение инцидентности задается:

а) ***матрицей инцидентности*** $\left\| \varepsilon_{ij} \right\|$ размера $m \times n$ (строкам соответствуют ребра, столбцам – вершины графа), в которой

для н-графа:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } e_i \text{ инцидентно } \text{ вершине } v_j; \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

для орграфа:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если вершина } v_j - \text{начало ребра } e_i; \\ \ \ 1, \text{ если вершина } v_j - \text{конец ребра } e_i; \\ \ \ 2, \text{ если } e_i - \text{петля, инцидентна } v_j; \\ \ \ 0 - \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

б) ***списком ребер*** графа, в котором каждая строка соответствует ребру и в ней записаны номера вершин графа, инцидентных этому ребру. Для н-графа порядок вершин в строке произволен, для ор-графа первым стоит номер вершины – начала ребра;

в) ***матрицей смежности*** $\left\| \delta_{ij} \right\|$ размера $n \times n$, столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа. Для н-графа δ_{ij} равно количеству ребер, инцидентных *i*-й и *j*-й вершинам, для ор-графа – δ_{ij} равно количеству ребер с началом в *i*-й и концом в *j*-й вершине;

г) ***рисунком*** или ***геометрической интерпретацией***, когда вершинам сопоставить точки плоскости, ребрам – линии на плоскости, причем линия соединяет только те точки, которые соответствуют вершинам, инцидентным данной линии-ребру.

Граф, для которого возможна геометрическая интерпретация на плоскости, называется ***планарным.***

Вид матриц и списка ребер зависит от нумерации вершин и ребер графа. Граф считается *полностью заданным*, если нумерация его вершин зафиксирована.

Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются ***изоморфными***.

Локальные степени вершин н-графа

Пусть $G = (V, E)$ – н-граф.

(Локальной) ***Степенью*** или (***валентностью***) $\rho(v)$ вершины v называется число ребер, инцидентных вершине v.

Если не оговаривается особо, то петля учитывается дважды при подсчете локальной степени вершины.

Граф называется ***правильным*** (с валентностью r) или ***r-валентным*** графом (*регулярным, однородным*), если степени всех его вершин равны.

Степень изолированной вершины равна 0.

Вектор степеней н-графа **G =(V, E)** – вектор размерности ***n*,** составленный из степеней вершин графа, расположенных по убыванию.

Локальные степени вершин орграфа

В орграфе у каждой вершины две локальные степени: степень исхода $\rho^-(v)$– число ребер, исходящих из вершины v и степень захода $\rho^+(v)$– число ребер, входящих в вершину v.

Вектор степеней исхода орграфа G =(V, E) – вектор размерности ***n*,** составленный из степеней исхода вершин графа, расположенных по убыванию.

Вектор степеней захода орграфа G =(V, E) – вектор размерности ***n*,** составленный из степеней захода вершин графа, расположенных по убыванию.

Пример 6.1. Дан н-граф G (см. рис. 6.8). Построить матрицу инцидентности и матрицу смежности. Найти вектор степеней.

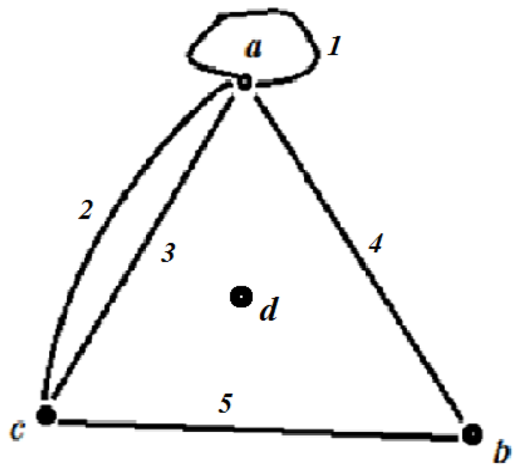


Рис. 6.8. Неориентированный граф

Матрица инцидентности

	a	**b**	**c**	**d**
1	1	0	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	0
5	0	1	1	0

Ребро 1 инцидентно только вершине *a*, поэтому в первой строке только одна 1.

Ребро 2 инцидентно вершинам *a* и *c*, поэтому во второй строке в первом и третьем столбце стоят 1, и так далее.

По матрице видно, что ребро 1 – петля вокруг вершины *a*; что ребра 2 и 3 – кратные, так как строки 2 и 3 одинаковые; что вершина d – изолированная, так как в последнем столбце нет единиц.

Матрица смежности

	a	**b**	**c**	**d**
a	1	1	2	0
b	1	0	1	0
c	2	1	0	0
d	0	0	0	0

Вершина *a* с вершиной *a* связана одним ребром. Поэтому на месте (1,1) матрицы смежности стоит 1.

Вершина *a* с вершиной b связана одним ребром, поэтому на месте (1,2) матрицы смежности стоит 1.

Вершина *a* с вершиной c связана двумя ребрами, поэтому на месте (1,3) матрицы смежности стоит 2.

И так далее.

По матрице видно, что ребро 1 – петля вокруг вершины *a*, так как соответствующий диагональный элемент равен 1; что вершины *a* и *c* связаны парой кратных ребер; что вершина d – изолированная.

Найдем вектор локальных степеней.

Локальная степень вершины *a* – число ребер, инцидентных вершине *a*. Это ребра 1, 2, 3, 4. Но петля в локальной степени вершины считается дважды, поэтому $\rho(a) = 5$.

Локальная степень вершины b – число ребер, инцидентных вершине b. Это ребра 4 и 5. Поэтому $\rho(b)=2$.

Аналогично, $\rho(c)=3$, $\rho(d)=0$.

Таким образом, искомый вектор степеней примет вид:

$$\rho=(5,3,2,0).$$

Заметим, что если степени некоторых вершин одинаковы, то при составлении вектора локальных степеней надо выписать по убыванию все повторяющиеся значения.

Пример 6.2. Дан орграф G (см. рис. 6.9). Построить матрицу инцидентности и матрицу смежности. Найти вектор степеней исхода и вектор степеней захода орграфа.

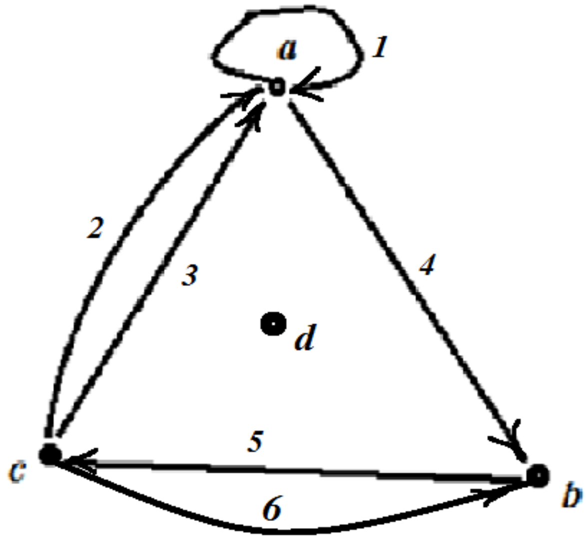


Рис. 6.9. Ориентированный граф

Матрица инцидентности

	a	**b**	**c**	**d**
1	2	0	0	0
2	-1	0	1	0
3	-1	0	1	0
4	-1	1	0	0
5	0	-1	1	0
6	0	1	-1	0

Ребро 1 инцидентно только вершине a – это петля вокруг вершины a, поэтому в первой строке стоит число, отличное от -1, 1, 0.

Ребро 2 выходит из вершины *a* и входит в вершину *c*, поэтому во второй строке в первом столбце стоит -1, а в третьем столбце стоит 1. И так далее.

По матрице видно, что ребро 1 – петля вокруг вершины *a*; что ребра 2 и 3 – кратные, так как строки 2 и 3 одинаковые; что ребра 5 и 6 – симметричные, так как там, где на 5 строке стоит -1, там на 6 строке стоит 1, и наоборот; что вершина *d* – изолированная, так как в последнем столбце нет ничего, кроме 0.

Матрица смежности

	a	***b***	***c***	***d***
a	1	1	0	0
b	0	0	1	0
c	2	1	0	0
d	0	0	0	0

Из вершины *a* в вершину *a* ведет одно ребро, поэтому на месте (1, 1) матрицы смежности стоит 1.

Из вершины *a* в вершину *b* ведет одно ребро, поэтому на месте (1, 2) матрицы смежности стоит 1.

Из вершины *a* в вершины *c* и *d* не ведет ни одного ребра, поэтому на местах (1, 3) и (1, 4) матрицы смежности стоят 0.

И так далее.

По матрице видно, что ребро 1 – петля вокруг вершины *a*, так как соответствующий диагональный элемент равен 1; что вершины *a* и *c* связаны парой кратных ребер, так как на месте (3, 1) стоит 2; что вершины *b* и *c* связаны парой симметричных ребер, так как элементы, стоящие на местах (2, 3) и (3, 2) – одинаковы; что вершина *d* – изолированная.

Найдем векторы локальных степеней.

Локальная степень исхода вершины *a* – число ребер, выходящих из вершины *a*. Это ребра 1, 4. Поэтому $\rho^-(a)=2$.

Локальная степень захода вершины *a* – число ребер, входящих в вершину *a*. Это ребра 1, 2, 3. Поэтому $\rho^+(a)=3$.

Аналогично,

$$\rho^-(b)=1,\ \rho^+(b)=2;$$

$$\rho^-(c)=3,\ \rho^+(c)=1;$$

$$\rho^-(d)=0,\ \rho^+(b)=0.$$

Таким образом, искомые векторы исхода и векторы захода примут вид:

$$\rho^{-} = (3, 2, 1, 0),$$
$$\rho^{+} = (3, 2, 1, 0).$$

Тема 7. Маршруты. Расстояние между вершинами графа. Диаметр и центр графа

Пусть G – конечный н-граф.

Маршрутом в G называется [1, 3] последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину:

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n.$$

Число ребер в маршруте называется его ***длиной.***

Маршрут ***M*** называется ***маршрутом общего вида***, если вершины и ребра повторяются, ***цепью*** – если его ребра не повторяются, ***простой цепью*** – если его вершины не повторяются.

Маршрут, в котором совпадают начальная и конечная вершины, то есть $v_0 = v_n$, называется ***циклическим*** (***замкнутым***).

Циклический маршрут ***M*** называется ***маршрутом общего вида***, если вершины и ребра повторяются, ***циклом*** – если его ребра не повторяются, ***простым циклом*** – если его вершины не повторяются (кроме начала и конца).

Граф, не содержащий циклов, называется ***ациклическим.***

Вершины v_i и v_j называются ***связными***, если существует маршрут с началом в v_i и концом в v_j.

Утверждение: Отношение связности вершин графа является отношением эквивалентности и определяет разбиение множества вершин графа на непересекающиеся подмножества V_i.

Если классов разбиения больше одного, то все подграфы $G(V_i)$ этого графа не связаны маршрутами друг с другом и называются ***связными компонентами графа.***

Граф называется ***связным***, если для любых двух различных вершин существует маршрут, соединяющий их. У связного графа одна компонента связности.

Расстоянием между вершинами ***a*** и ***b*** называется длина минимальной простой цепи, связывающей их. Расстояние обозначается ***d*(*a*, *b*)**. Расстояние удовлетворяет аксиомам метрики.

Аксиомы метрики:

1) $d(a, b) = d(b, a)$;

2) $d(a, b) \geq 0$, $d(a, b) = 0 \leftrightarrow a = b$;

3) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Матрица расстояний, это симметричная квадратная матрица размерности $n = |V|$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а на пересечении строк и столбцов записано расстояние между вершинами v_i, v_j.

	v_1	v_2	…	v_n	$r_i = max\, d(v_i, v_j)$
v_1	$d(v_1, v_1)$	$d(v_1, v_2)$	…	$d(v_1, v_n)$	r_1
v_2	$d(v_2, v_1)$	$d(v_2, v_1)$	…	$d(v_2, v_n)$	r_2
…	…	…	…	…	…
v_n	$d(v_n, v_1)$	$d(v_n, v_2)$	…	$d(v_n, v_n)$	r_n

В последнем столбце матрицы указан ***эксцентриситет*** для каждой вершины – расстояние от данной вершины до наиболее удаленной вершины.

$$r_i = \max_{i=\overline{1,n}} d(v_i, v_j). \qquad (7.1)$$

Диаметр графа *G* – максимальное расстояние между вершинами графа. Диаметр находится по формуле:

$$d(G) = \max_{i \neq j} d(v_i, v_j).$$

Используя найденные эксцентриситеты вершин, диаметр можно найти по формуле:

$$d(G) = \max_{i=\overline{1,n}} r_i . \qquad (7.2)$$

Радиус графа *G* – минимальное значение эксцентриситета. Радиус находится по формуле:

$$r(G) = \min_{i=\overline{1,n}} r_i . \qquad (7.3)$$

Центр графа *G* – такая вершина, для которой $r_i = r(G)$.

Замечание: Центр в графе может быть не единственный.

Диаметральная цепь графа G – простая цепь, длина которой равна *диаметру,* соединяющая наиболее удаленные вершины графа.

Радиальная цепь графа G – простая цепь, длина которой равна *радиусу,* соединяющая центр и наиболее удаленную от него вершину графа.

Пример 7.1. Для н-графа, приведенного на рисунке 7.1, записать: 1) маршрут общего вида, 2) не простую цепь, 3) простую цепь, 4) циклический маршрут общего вида, 5) не простой цикл, 6) простой цикл.

Решение:

1) Маршрут общего вида – это маршрут, в котором начальная и конечная вершина различны, и некоторые ребра повторяются. M_1 = (**1, 4**, 5, **1, 4**, 7, 3). Здесь повторяется ребро (1, 4).

2) Не простая цепь – это маршрут, в котором не повторяются ребра, но повторяются вершины. M_2 = (4, 3, **1**, 5, 6, 7, 4, **1**). Здесь повторяется вершина 1.

3) Простая цепь – это маршрут, в котором не повторяются вершины. M_3 = (4, 3, 7, 5, 6).

4) Циклический маршрут общего вида – это маршрут, в котором начальная и конечная вершины совпадают, и некоторые ребра повторяются. M_4 = (**1, 5,** 4, 3, **1, 5,** 7, 4, **1**). Здесь повторяется ребро (1, 5).

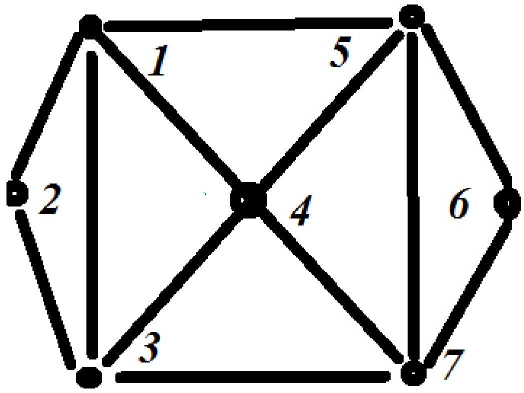


Рис. 7.1. Построение маршрутов
в неориентированном графе

5) Непростой цикл – это циклический маршрут, в котором не повторяются ребра, но повторяются вершины. M_5 = (3, **4**, 5, 7, **4**, 1, 3). Здесь повторяется вершина 4.

Заметим, что непростой цикл бывает только в графах, в которых существует конфигурация типа «песочные часы».

6) Простой цикл – это циклический маршрут, в котором не повторяются вершины. $M_6 = (5, 4, 3, 2, 1, 5)$.

Пример 7.2. Для н-графа, приведенного на рисунке 7.1, построить матрицу расстояний. Определить диаметр и радиус графа. Указать центры графа. Записать диаметральные и радиальные цепи.

Решение:

Для построения матрицы расстояний, сопоставим строки и столбцы вершинам. На пересечении строк и столбцов укажем расстояние между соответствующими вершинами.

***d*(*a*, *b*)**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	r_i
1	0	1	1	1	1	**2**	**2**	**2**
2	1	0	1	2	2	**3**	2	3
3	1	1	0	1	2	2	1	**2**
4	1	2	1	0	1	2	1	**2**
5	1	2	2	1	0	1	1	**2**
6	2	**3**	2	2	1	0	1	3
7	2	2	1	1	1	1	0	**2**

На месте (1, 1) стоит 0, так как кратчайший маршрут между вершиной 1 и вершиной 1 – это вырожденный маршрут (без ребер) длины 0.

На месте (1, 2) стоит 1, так как кратчайший маршрут между вершиной 1 и вершиной 2 – это единственное ребро, связывающее эти вершины.

На месте (1, 6) стоит 2, так как кратчайшая простая цепь, между вершиной 1 и вершиной 6 – это цепь из двух ребер (1, 5, 6). Значит, расстояние между этими вершинами равно 2.

И так далее.

В последнем столбце таблицы указано расстояние от данной вершины до наиболее удаленной от нее вершины – эксцентриситет. Это максимальное значение в строке.

Максимум значений последнего столбца – диаметр графа. Откуда $d(G) = 3$.

Минимум значений последнего столбца – радиус графа. Откуда $r(G) = 2$.

Центрами являются вершины: 1, 3, 4, 5, 7 (выделено красным). Их эксцентриситеты минимальны и равны радиусу графа.

Для построения диаметральных цепей выясним с помощью матрицы расстояний, какие вершины наиболее удалены друг от друга. Так как максимальное расстояние между вершинами – это диаметр графа, значит, найдем вершины, находящиеся на расстоянии, равном диаметру, то есть на расстоянии 3 ребер (они выделены синим). Это вершины 2 и 6. Следовательно, все диаметральные цепи в графе связывают эти вершины. Таких цепей две:

$$D_1 = (2, 1, 5, 6) \text{ и } D_2 = (2, 3, 7, 6).$$

Для построения радиальных цепей выясним с помощью матрицы расстояний, какие вершины наиболее удалены от центров.

От центра, которым является вершина 1, на расстоянии радиуса, равного 2, находятся вершины 6 и 7 (расстояния выделены зеленым). Значит можно провести радиальные цепи:

$$R_1 = (1, 5, 6) \text{ и } R_2 = (1, 4, 7).$$

От другого центра, которым является вершина 3, на расстоянии радиуса находятся вершины 5 и 6 (расстояния выделены зеленым). Значит можно провести радиальные цепи:

$$R_3 = (3, 4, 5) \text{ и } R_4 = (3, 7, 6).$$

Далее аналогично.

Тема 8. Характеристические числа графов

Цикломатическим числом графа $\boldsymbol{G}$ называется число ребер, которые надо убрать, чтобы граф стал ацикличным [1, 4].

Цикломатическое число графа $\boldsymbol{G}$ находится по формуле:

$$\gamma(G) = \mu_e - \mu_v + \mu_c, \tag{8.1}$$

μ_e – число вершин,

μ_v – число ребер,

μ_c – число компонент связности.

Замечание: Если цикломатическое число графа равно 1, то в графе ровно 1 цикл.

Внутренне устойчивым множеством графа ***G*** называется множество вершин ***S***, все вершины которого попарно ***несмежны***.

Число ***внутренней устойчивости***:

$$\alpha(G) = \max_i |S_i|. \qquad (8.2)$$

Внешне устойчивым множеством графа ***G*** называется множество вершин ***Q***, таких, что из всех вершин множества $\overline{Q}$ ведут ребра в вершины множества ***Q.***

Число ***внутренней устойчивости***:

$$\beta(G) = \min_i |Q_i|. \qquad (8.3)$$

Граф ***G*** называется h-хроматическим, если его вершины можно раскрасить h различными красками так, чтобы никакие две смежные различные вершины не были окрашены в один цвет. ***Хроматическое число*** графа – это наименьшее число таких красок.

$$\chi(G) = \min_i h_i.$$

Граф ***G*** называется k-раскрашиваемым, если его ребра можно раскрасить k различными красками так, чтобы никакие два смежных ребра не были окрашены в один цвет. ***Хроматический индекс*** графа – это наименьшее число таких красок.

$$\chi'(G) = \min_i k_i.$$

Согласно ***теореме Визинга***, если максимальное количество ребер, инцидентных вершине графа равно ***k,*** то хроматический индекс подчиняется условию:

$$k \le \chi'(G) \le k+1.$$

Пример 8.1. Для графа, приведенного на рисунке 8.1, найти все характеристические числа.

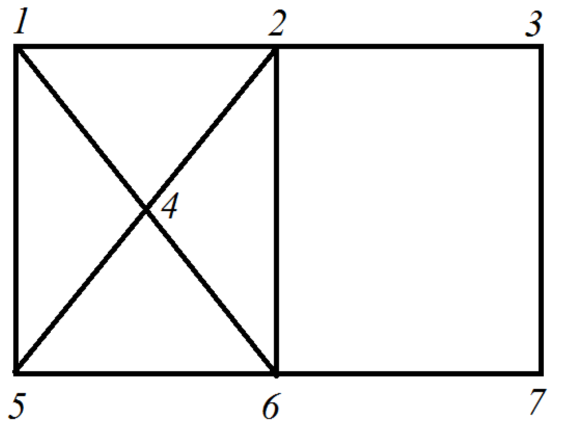


Рис. 8.1. Нахождение характеристических чисел графа

Решение:

Характеристическими числами графа называются: 1) цикломатическое число, 2) число внутренней устойчивости, 3) число внешней устойчивости, 4) хроматическое число, 5) хроматический индекс.

1. Для нахождения цикломатического числа необходимо выяснить, сколько ребер графа достаточно убрать, чтобы разрушить все существующие циклы. Из рисунка 8.2 видно, что таких ребер минимум 5. Они указаны пунктиром.

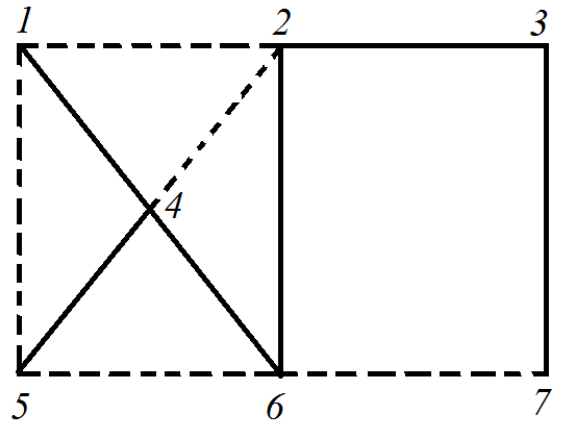


Рис. 8.2. Нахождение цикломатического числа графа

Этот же результат можно получить по формуле (8.1).

$$\gamma(G) = \mu_e - \mu_v + \mu_c = 11 - 7 + 1 = 5.$$

Здесь μ_c – число компонент связности графа. Так как все вершины графа связны (связаны маршрутами), то у этого графа 1 компонента связности.

2. Для нахождения числа внутренней устойчивости, необходимо выяснить, каким будет максимальное внутренне устойчивое множество графа.

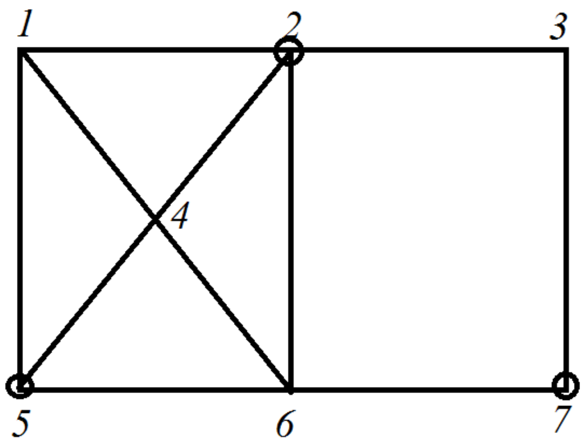


Рис. 8.3. Нахождение числа внутренней устойчивости графа

Для этого надо определить максимальную совокупность попарно несмежных вершин. Из рисунка 8.3 видно, что таких вершин максимум 3. Они помечены кружком на рисунке 8.3.

Таким образом, максимальным внутренне устойчивым множеством будут множества вершин $S_1 = \{2, 5, 7\}$, $S_2 = \{1, 6, 3\}$.

Тогда по формуле (8.2) получим число внутренней устойчивости:

$$\alpha(G) = \max_i |S_i| = 3.$$

3. Для нахождения числа внешней устойчивости, необходимо выяснить, каким будет минимальное внешне устойчивое множество графа.

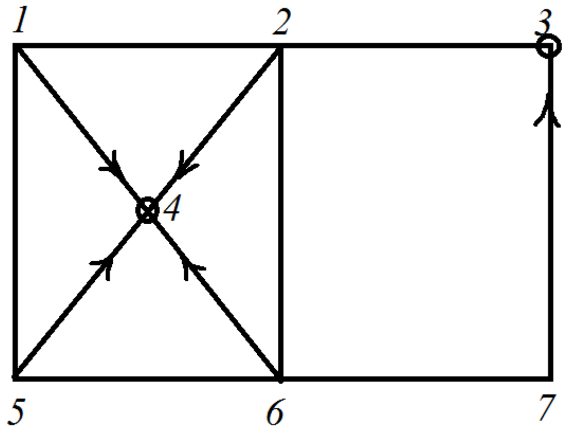


Рис. 8.4. Нахождение числа внешней устойчивости графа

На рисунке 8.4 видно, что вершины множества $Q_1 = \{4, 3\}$ таковы, что из остальных вершин графа, составляющих множество $\overline{Q}_1 = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, ведут ребра в вершины 4 или 3. Значит множество Q_1 – это множество внешней устойчивости. Очевидно, что таким же свойством обладает множество $Q_2 = \{4, 7\}$. Оба этих множества минимальны, то есть множества из одной вершины, обладающего указанным свойством, найти нельзя.

Тогда по формуле (8.3) получим число внешней устойчивости:

$$\beta(G) = \min_i |Q_i| = 2.$$

4. Для нахождения хроматического числа, необходимо выяснить, каким будет минимальное количество красок, в которые можно раскрасить вершины графа, так чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены в один цвет.

Для этого надо определить внутренне устойчивые множества графа с как можно большей мощностью.

На рисунке 8.5 видно, что вершины 2, 5 и 7 – попарно несмежны, значит, их можно раскрасить в один и тот же цвет (например, красный). Он помечен звездочками.

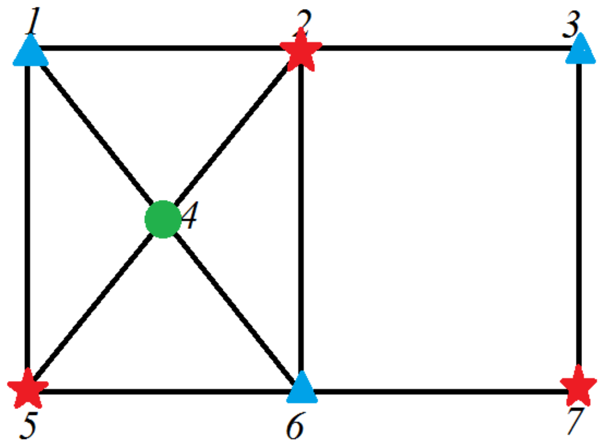


Рис. 8.5. Нахождение хроматического числа графа

Далее, множество несмежных вершин составляют вершины 1, 6 и 3. Значит, они тоже могут быть раскрашены в один цвет (например, голубой). Он помечен треугольниками.

Очевидно, что вершину 4 нельзя раскрасить ни в красный, ни в голубой цвета. Для нее придется использовать третий цвет (например, зеленый). Он помечен кружком.

Таким образом, минимальное количество цветов – 3. Значит хроматическое число графа $\chi(G)=3$.

5. Для нахождения хроматического индекса, необходимо выяснить, каким будет минимальное количество красок, в которые можно раскрасить ребра графа, так чтобы никакие два смежных ребра не были окрашены в один цвет.

Воспользуемся теоремой Визинга. Найдем число *k*, равное максимальному количеству ребер, инцидентных одной и той же вершине.

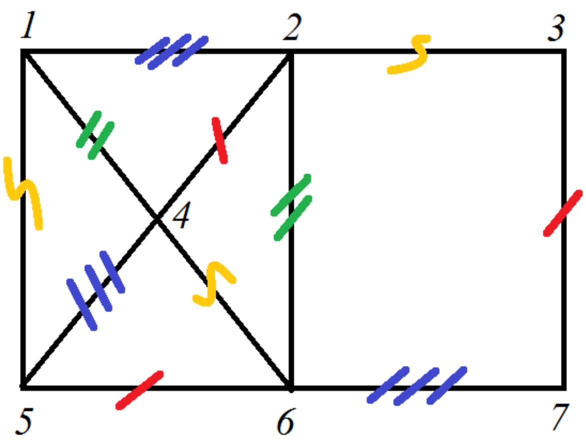


Рис. 8.6. Нахождение хроматического индекса графа

На рисунке 8.6 видно, что, например, вершина 4 имеет самое большое из всех количество инцидентных ребер. Поэтому $k = 4$. Заметим, что этим же свойством обладают вершины 2 и 6.

Тогда по теореме Визинга хроматический индекс подчиняется условию:

$$k \le \chi'(G) \le k+1,$$

$$4 \le \chi'(G) \le 5.$$

Осталось определить, достаточно ли четырех цветов для указанной раскраски ребер, или потребуется пять.

Возьмем вершину 4 и раскрасим все инцидентные ей ребра в разные цвета. Например, красный, зеленый, синий и желтый. На рисунке 8.6 они отмечены соответственно одной чертой, двумя чертами, тремя чертами и волной.

Далее, распределяем указанные цвета на ребрах, оставшихся нераскрашенными, учитывая то, что смежные ребра не могут быть окрашены в один цвет.

В итоге, мы сумели обойтись четырьмя цветами, значит, хроматический индекс $\chi'(G) = 4$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Индивидуальные задания по теме «Множества»

Задание 1

Дано универсальное множество U и множества A, B и C. Найти множество D. Записать ответ в виде списка.

Вариант 1

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 5\}$;

$D = \left(A \cup \bar{B}\right) - C$.

Вариант 2

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$A = \{a, d, e, g\}, B = \{b, d, g, h\}, C = \{a, b, c, g\}$;

$D = \left(A \cup \bar{B}\right) \cap C$.

Вариант 3

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 5, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 8\}$;

$D = \left(A \cap \bar{B}\right) - C$.

Вариант 4

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$A = \{a, c, e, h\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, h\}$;

$D = \left(A - \bar{B}\right) \cup C$.

Вариант 5

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A = \{1, 4, 5, 7\}, B = \{2, 4, 5, 8\}, C = \{1, 2, 4, 5\}$;

$D = \left(\bar{A} \cup \bar{B}\right) - C$.

Вариант 6

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$A = \{a, c, d, g\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, g\}$;

$D = \left(\bar{A} \cup B\right) - C$.

Вариант 7

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A = \{1, 3, 5, 8\}, B = \{2, 3, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 8\}.$;

$D = \left(\bar{A} \cap B\right) - C$.

Вариант 8

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$A=\{a,b,e,g\}, B=\{b,c,f,h\}, C=\{a,b,d,g\}$;

$D=(A-\overline{B})\cap C$.

Вариант 9

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;

$A=\{1,3,6,7\}, B=\{1,4,6,8\}, C=\{1,2,3,6\}$;

$D=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$.

Вариант 10

$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$;

$A=\{b,c,e,g\}, B=\{b,e,f,h\}, C=\{a,b,f,g\}$;

$D=(A\cup\overline{B})\cap C$.

Вариант 11

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;

$A=\{2,3,4,7\}, B=\{1,4,6,8\}, C=\{1,2,4,5\}$;

$D=(\overline{A}\cap B)-C$.

Вариант 12

$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$;

$A=\{a,f,e,g\}, B=\{a,d,f,h\}, C=\{a,b,c,h\}$;

$D=(\overline{A}\cap\overline{B})-C$.

Вариант 13

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;

$A=\{1,4,5,6\}, B=\{1,4,6,8\}, C=\{1,2,3,7\}$;

$D=(\overline{A}\cap B)\cap C$.

Вариант 14

$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$;

$A=\{a,c,e,g\}, B=\{b,d,f,h\}, C=\{a,b,c,g\}$;

$D=(\overline{A}\cup\overline{B})\cup C$.

Вариант 15

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;

$A=\{2,4,5,6\}, B=\{2,3,6,8\}, C=\{1,2,4,5\}$;

$D=(A-\overline{B})-C$.

Задание 2

На диаграмме Вьенна-Эйлера изобразить результат действия:

Вариант 1. $\left(\bar{C}-\bar{B}\right)\cup A$.

Вариант 2.$\left(\bar{C}\cap\bar{B}\right)\cup A$.

Вариант 3. $\left(\bar{C}\cup\bar{B}\right)\cup A$.

Вариант 4. $\left(\bar{C}\cap\bar{B}\right)\cap A$.

Вариант 5. $\left(\bar{C}\cap\bar{B}\right)-A$.

Вариант 6. $\left(C\cap\bar{B}\right)\cap A$.

Вариант 7. $\left(C\cap\bar{B}\right)-\bar{A}$.

Вариант 8. $\left(C\cup\bar{B}\right)\cup A$.

Вариант 9 .$\left(C-\bar{B}\right)\cup A$.

Вариант 10. $\left(C-\bar{B}\right)-A$.

Вариант 11. $\left(C\cup\bar{B}\right)-A$.

Вариант 12. $\left(C\cap\bar{B}\right)-A$.

Вариант 13 .$\left(C\cap\bar{B}\right)\cup\bar{A}$.

Вариант 14. $\left(\bar{C}-\bar{B}\right)-A$.

Вариант 15. $\left(\bar{C}\cup B\right)\cup A$.

2. Индивидуальные задания по теме «Векторы и прямые произведения множеств. Проекция вектора на ось»

Задание 1

Даны множества *A*, *B* и *C*. Найти прямые произведения $A\times B\times C, A^2\times C, B\times C\times B$.

Вариант 1. $A=\{1,2,3\}, B=\{ф, к\}, C=\{0\}$.

Вариант 2. $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}, C=\{ж\}$.

Вариант 3 . $A=\{2,3,4\}, B=\{a, б\}, C=\{1\}$.

Вариант 4. $A=\{b,c,d\}, B=\{2,3\}, C=\{э\}$.

Вариант 5. $A=\{3,4,5\}, B=\{в, г\}, C=\{2\}$.

Вариант 6. $A=\{c,b,e\}, B=\{3,4\}, C=\{м\}$.

Вариант 7. $A=\{4,5,6\}, B=\{д, е\}, C=\{3\}$.

Вариант 8. $A=\{d,e,f\}, B=\{4,5\}, C=\{ч\}$.

Вариант 9 . $A=\{5,6,7\}, B=\{д, т\}, C=\{4\}$.

Вариант 10. $A=\{t,g,h\}, B=\{5,6\}, C=\{щ\}$.

Вариант 11. $A=\{6,7,8\}, B=\{з, с\}, C=\{5\}$.

Вариант 12 . $A=\{z,y,b\}, B=\{6,7\}, C=\{0\}$.

Вариант 13. $A=\{9,1,3\}, B=\{ж, ш\}, C=\{6\}$.

Вариант 14. $A=\{s,q,w\}, B=\{i, j\}, C=\{9\}$.

Вариант 15. $A=\{0,4,7\}, B=\{б, п\}, C=\{7\}$.

Задание 2

Дано множество векторов *V*. Найти проекции векторов и векторного множества на оси:

$np_1 v_1 =$	$np_{2,4} v_2 =$	$np_1 V =$
$np_2 v_3 =$	$np_{1,2,3} v_1 =$	$np_{2,3} V =$
$np_3 v_2 =$	$np_{1,2,4} v_3 =$	$np_{1,4} V =$
$np_{1,2} v_3 =$	$np_{1,3,4} v_3 =$	$np_{1,2,4} V =$
$np_{1,3} v_2 =$	$np_{2,3,4} v_1 =$	$np_{2,3,4} V =$

Вариант 1. $V=\{(1,2,3,2),(1,2,3,3),(2,2,3,3)\}$.

Вариант 2 . $V=\{(a,b,c,d),(a,b,c,a),(a,b,a,b)\}$.

Вариант 3. $V=\{(2,2,3,2),(3,2,3,3),(1,2,3,3)\}$.

Вариант 4 . $V=\{(b,b,c,d),(c,b,c,a),(a,c,a,b)\}$.

Вариант 5 . $V=\{(1,2,1,2),(1,2,1,3),(2,1,3,3)\}$.

Вариант 6 . $V=\{(a,b,b,d),(c,b,c,a),(a,a,a,b)\}$.

Вариант 7 . $V=\{(1,2,2,2),(1,2,2,3),(2,1,3,3)\}$.

Вариант 8. $V=\{(a,a,c,d),(a,c,c,a),(a,b,b,b)\}$.

Вариант 9. $V=\{(2,2,1,2),(1,2,2,1),(3,1,3,3)\}$.

Вариант 10. $V = \{(a,b,b,d),(b,b,c,a),(a,b,a,a)\}$.

Вариант 11. $V = \{(1,2,3,3),(1,2,1,3),(2,2,1,3)\}$.

Вариант 12. $V = \{(a,b,a,d),(c,b,c,d),(d,b,a,b)\}$.

Вариант 13. $V = \{(1,3,3,2),(3,2,3,3),(2,2,1,1)\}$.

Вариант 14. $V = \{(d,b,c,d),(d,b,c,a),(c,b,a,b)\}$.

Вариант 15. $V = \{(1,1,3,2),(1,2,1,3),(2,1,3,3)\}$.

3. Индивидуальные задания по теме «Комбинаторика»

Вариант 1

1. В аквариуме 13 рыбок, из них 5 красных. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок была ровно 1 красная?
2. Сколько имеется способов выбрать из 10 человек команды 3 человека для бега на дистанцию 1000 м?

Вариант 2

1. На прилавке 11 банок рыбных консервов. Из них – одна испорчена. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок попалась испорченная?
2. Сколько имеется способов составить слово БАРБАРА из карточек разрезной азбуки слова АБРАКОДАБРА, выбирая их случайным образом?

Вариант 3

1. В темном погребе 10 банок с огурцами. Из них 3 – помутнели. Наугад выбирают 3 банки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок была ровно 1 помутневшая?
2. Сколько имеется способов составить слово СПОРТ из карточек разрезной азбуки слова ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ, выбирая их случайным образом?

Вариант 4

1. В корзинке 13 опенков, из них 4 ложных. Наугад выбирают 7 опят. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных грибов было ровно 2 ложных?
2. Сколько существует способов выбрать 3 человека для участия в эстафете на 200, 300 и 400 м из 10 человек команды?

Вариант 5

1. В ведерке 10 зернышек, из них 3 не взойдут. Наугад выбирают 5 для посадки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных зернышек были ровно 2, которые взойдут?
2. Сколько способов составить слово БРАК из карточек разрезной азбуки слова АБРАКОДАБРА, выбирая их случайным образом?

Вариант 6

1. В коробке 12 карандашей, 10 цветных и 2 простых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных карандашей было ровно 2 цветных?
2. Сколько существует способов выбрать из 6 шаров 2 – один для Маши, а другой для Вити?

Вариант 7

1. В колхозном гараже 4 трактора и 3 сеялки. Наугад выбирают 4 машины. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных было ровно 3 трактора?
2. Сколькими способами можно набрать последние 3 цифры телефонного номера?

Вариант 8

1. В курятнике 11 куриц, из них 7 рябок, остальные белые. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных куриц было ровно 3 белых?
2. Сколько существует способов составить слово АБРАКОДАБРА из карточек разрезной азбуки, переставляя их случайным образом?

Вариант 9

1. В хлеву 9 коров, из них 6 доятся. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных коров было ровно 2 доящихся коровы?
2. Сколько существует способов составить из букв слова «МИШЕНЬ» различные слова?

Вариант 10

1. Сколькими способами можно из 6 стандартных и 5 нестандартных болтов выбрать 3, так чтобы среди них было 1 стандартный и 2 нестандартных?
2. Сколькими способами можно посадить 6 различных цветов в 6 разных цветочных горшков?

Вариант 11

1. Сколькими способами можно из 4 стандартных и 5 нестандартных деталей выбрать 4, так чтобы среди них было 2 стандартные и 2 нестандартные?
2. Сколькими способами можно расставить на 6 путях 4 состава?

Вариант 12

1. В клетке 8 мышей, из них 4 белых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных мышей было ровно 2 белых?
2. Сколькими способами можно из 15 человек класса выбрать культорга, физорга и профорга?

Вариант 13

1. В аквариуме 7 рыбок, из них 5 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?
2. Сколько имеется способов выбрать из 6 шаров 2 без учета порядка?

Вариант 14

1. В ящике 7 деталей, из них 3 стандартных. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных деталей было ровно 2 стандартных?
2. Сколькими способами можно составить слово из 5 букв используя буквы a, b, c, d ?

Вариант 15

1. В аквариуме 9 рыбок, из них 4 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?
2. Сколькими способами можно в кинотеатре рассадить 6 человек на ряд из 18 мест?

4. Индивидуальные задания по теме «Соответствия»

Соответствие G является подмножеством прямого произведения множеств A и B. Определить свойства соответствия. Является ли оно функцией? Отображением? Почему? Если G – отображение, то оно является отображением A в B или A на B. Является ли оно взаимно однозначным?

Вариант 1. $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2,3\}, G=\{(a,1),(b,1),(c,2)\}$.

Вариант 2. $A=\{2,3,5\}, B=\{1,2,3\}, G=\{(2,1),(2,3),(3,3)\}$.

Вариант 3. $A=\{7,8,9\}, B=\{1,2,3\}, G=\{(7,2),(8,3),(9,2)\}$.

Вариант4. $A=\{a,b,c\}, B=\{f,g,h\}, G=\{(a,g),(b,g),(a,h)\}$.

Вариант 5. $A=\{a,g,k\}, B=\{4,7,11\}, G=\{(a,7),(g,4),(g,11)\}$.

Вариант 6. $A=\{1,3,8\}, B=\{4,7,11\}, G=\{(3,7),(3,4),(3,11)\}$.

Вариант 7 . $A=\{1,3,8\}, B=\{t,x,w\}, G=\{(1,w),(3,w),(8,w)\}$.

Вариант 8 . $A=\{2,4,6\}, B=\{t,x,w\}, G=\{(2,t),(4,w),(6,x)\}$.

Вариант 9. $A=\{2,4,6\}, B=\{1,3,7\}, G=\{(2,3),(4,3),(6,1)\}$.

Вариант 10. $A=\{a,b,c\}, B=\{1,3,7\}, G=\{(a,3),(b,3),(b,1)\}$.

Вариант 11. $A=\{a,b,c\}, B=\{6,7,8\}, G=\{(a,6),(b,7),(c,7)\}$.

Вариант 12 . $A=\{f,s,c\}, B=\{d,g,h\}, G=\{(f,g),(s,d),(s,h)\}$.

Вариант 13. $A=\{2,3,5\}, B=\{1,2,3\}, G=\{(2,1),(2,3),(2,3)\}$.

Вариант 14. $A=\{a,g,k\}, B=\{4,7,11\}, G=\{(a,11),(k,4),(g,11)\}$.

Вариант 15. $A=\{c,x,z\}, B=\{f,g,h\}, G=\{(c,g),(c,g),(z,h)\}$.

5. Индивидуальные задания по теме «Отношения»

Построить матрицу бинарного отношения, определить свойства отношения. Является ли оно отношением эквивалентности? Порядка? Если R – отношение эквивалентности, то указать разбиение на классы эквивалентности и определить индекс разбиения. Если R – отношение порядка, то указать строгий порядок или не строгий, полный или не полный (почему?)

Вариант 1

На множестве чисел $\{5, 7, 9, 14, 18, 37\}$ задано отношение $R = \{(a, b) : a \text{ больше либо равно } b\}$.

Вариант 2

На множестве натуральных чисел задано отношение *R* – «быть меньше». Построить матрицу бинарного отношения на первых шести элементах натурального ряда.

Вариант 3

На множестве чисел $\{3, 5, 7, 9, 14, 18, 35\}$ задано отношение $R = \{(a, b) : a \text{ делитель } b\}$.

Вариант 4

На множестве чисел $\{3, 5, 7, 9, 14, 18, 35\}$ задано отношение $R = \{(a, b) : a \text{ кратно } b\}$.

Вариант 5

На множестве натуральных чисел задано отношение *R* – «иметь общий делитель, отличный от 1». Построить матрицу бинарного отношения на первых шести элементах натурального ряда.

Вариант 6

На множестве слов $\{abb, ba, ac, ca, bba, bbb\}$ задано отношение
$R = \{(X, Y) : \text{первая буква слова } X \text{ равна последней букве слова } Y\}$

Вариант 7

На множестве слов $\{abb, ba, ac, ca, bba, bbb\}$ задано отношение
$R = \{(X, Y) : последняя\ буква\ слова\ X\ равна\ первой\ букве$
$слова\ Y\}$.

Вариант 8

На множестве натуральных чисел задано отношение R – «быть больше или равно». Построить матрицу бинарного отношения на первых шести элементах натурального ряда.

Вариант 9

На множестве слов $\{abb, ba, ac, ca, bba, bbb\}$ задано отношение $R = \{(X, Y) : первая\ буква\ слова\ X\ равна\ первой\ букве$
$слова\ Y\}$.

Вариант 10

На множестве слов $\{abb, ba, ac, ca, bba, bbb\}$ задано отношение
$R = \{(X, Y) : последняя\ буква\ слова\ X\ равна\ последней\ букве$
$слова\ Y\}$.

Вариант 11

На множестве натуральных чисел задано отношение R – «быть делителем». Построить матрицу бинарного отношения на первых шести элементах натурального ряда.

Вариант 12

На множестве натуральных чисел задано отношение R – «быть меньше». Построить матрицу бинарного отношения на первых шести элементах натурального ряда.

Вариант 13

На множестве слов $\{abb, ba, ac, ca, bba, bbb\}$ задано отношение $R = \{(X, Y) : слова\ X\ и\ Y\ состоят\ из\ равного\ числа\ букв\}$.

Вариант 14

На множестве натуральных чисел задано отношение R – «быть больше». Построить матрицу бинарного отношения на первых шести элементах натурального ряда.

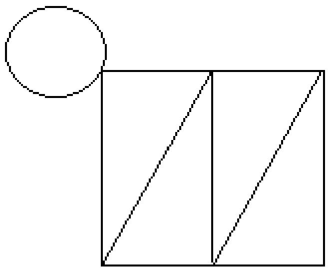
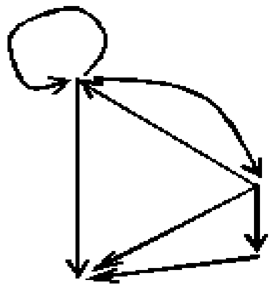
Вариант 15

На множестве чисел $\{2, 5, 7, 14, 35, 64, 105\}$ задано отношение $R = \{(a, b): a \text{ и } b \text{ состоят из одинакового числа разрядов}\}$.

6. Индивидуальные задания по теме «Способы задания графов. Локальные степени вершин»

Для графов, приведенных на рисунках а) и б), найти матрицу инцидентности и матрицу смежности. Определить локальные степени вершин. Записать векторы локальных степеней.

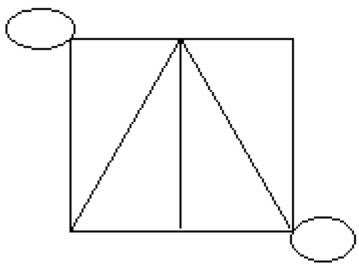
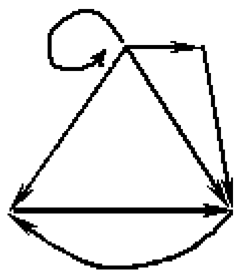
Вариант 1

а) б)

Рис.1

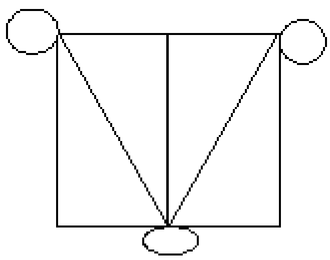
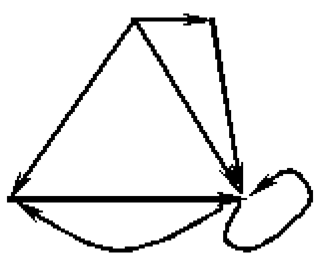
Вариант 2

а) б)

Рис.2

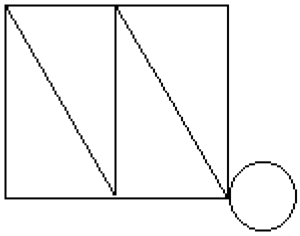
Вариант 3

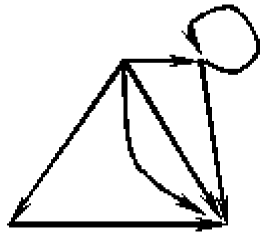
а) б)

Рис.3

Вариант 4



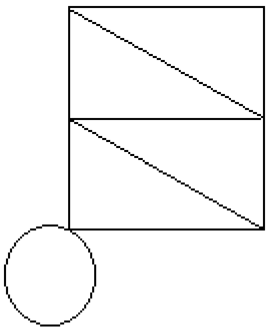
а)



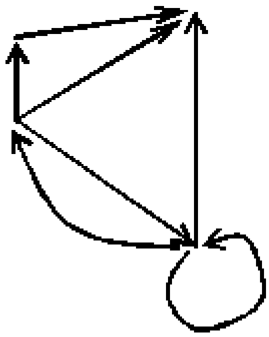
б)

Рис.4

Вариант 5



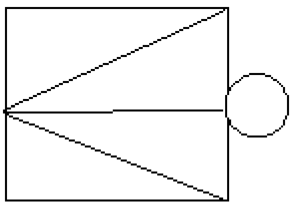
а)



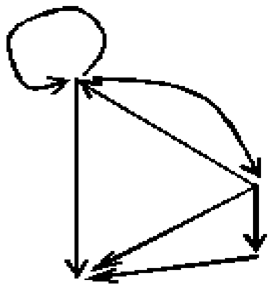
б)

Рис.5

Вариант 6



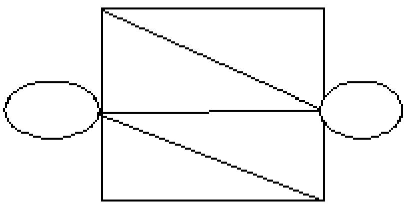
а)



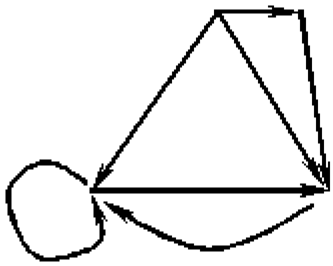
б)

Рис.6

Вариант 7



а)



б)

Рис.7

Вариант 8

а) б)

Рис.8

Вариант 9

а) б)

Рис.9

Вариант 10

а) б)

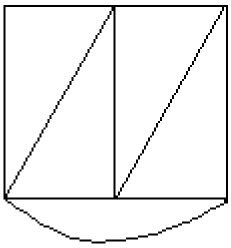
Рис.10

Вариант 11

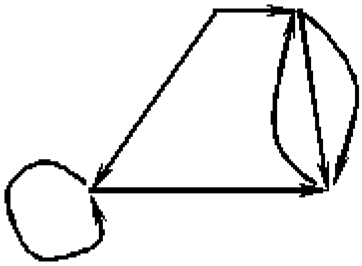
а) б)

Рис.11

Вариант 12



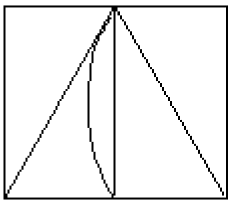
а)



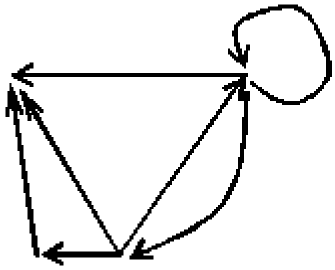
б)

Рис.12

Вариант 13



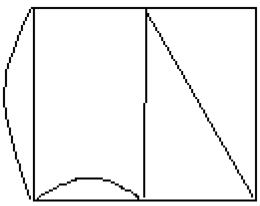
а)



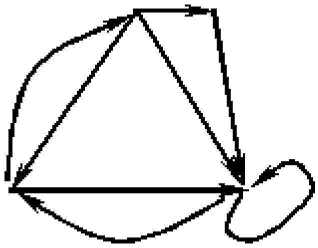
б)

Рис.13

Вариант 14



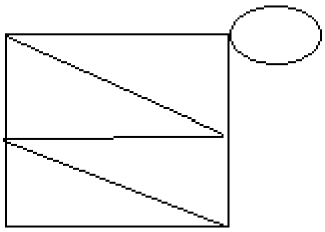
а)



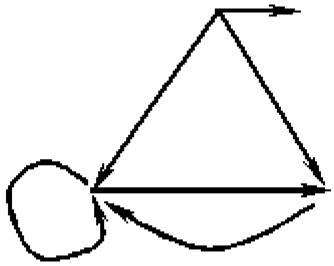
б)

Рис.14

Вариант 15



а)



б)

Рис.15

7. Индивидуальные задания по теме «Маршруты. Расстояние между вершинами графа. Диаметр и центр графа»

Задание 1. Для графа, приведенного на рисунке, записать: 1) маршрут общего вида, 2) не простую цепь, 3) простую цепь, 4) циклический маршрут общего вида,5) не простой цикл, 6) простой цикл.

Задание 2. Построить матрицу расстояний. Найти эксцентриситеты вершин. Определить диаметр и радиус графа. Указать центры графа. Записать диаметральные и радиальные цепи.

Вариант 1

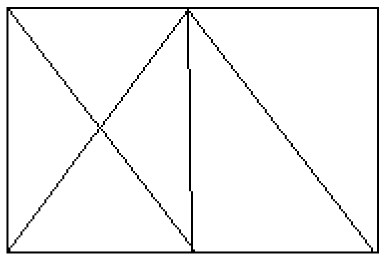


Рис. 16

Вариант 2

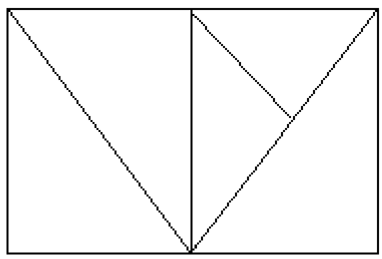


Рис. 17

Вариант 3

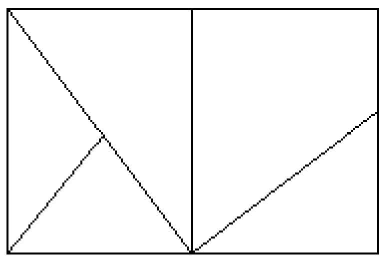


Рис. 18

Вариант 4

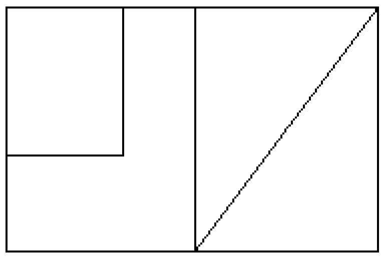


Рис. 19

Вариант 5

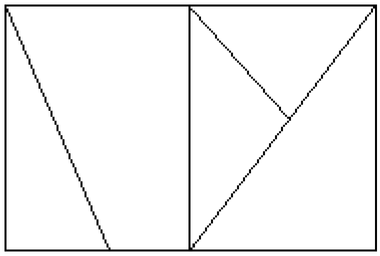


Рис. 20

Вариант 6

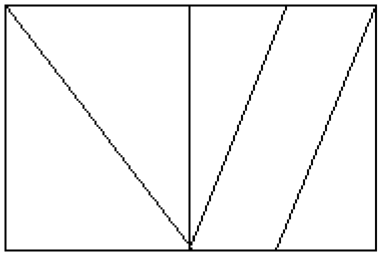


Рис. 21

Вариант 7

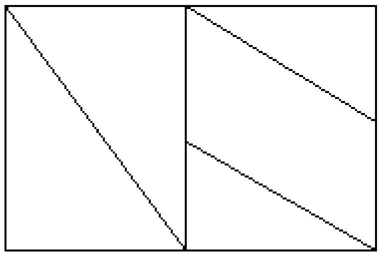


Рис. 22

Вариант 8

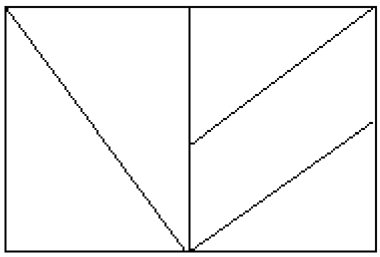


Рис. 23

Вариант 9

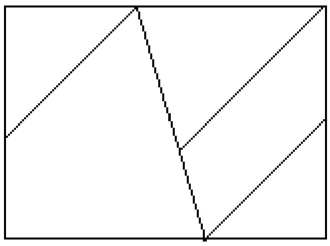


Рис. 24

Вариант 10

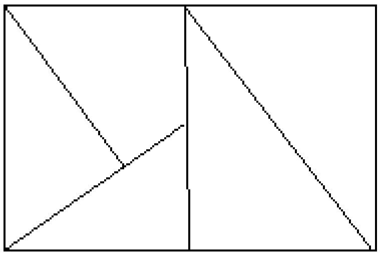


Рис. 25

Вариант 11

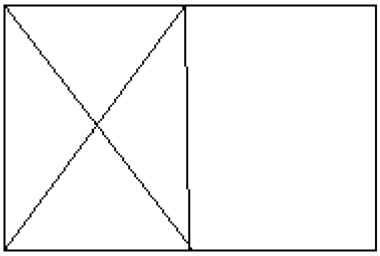


Рис. 26

Вариант 12

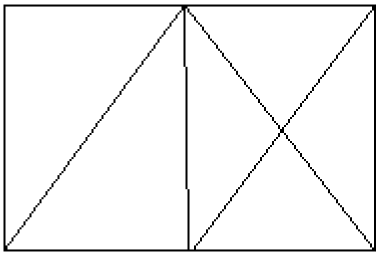


Рис. 27

Вариант 13

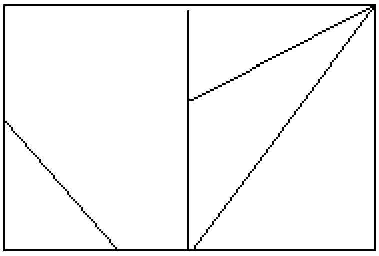


Рис. 28

Вариант 14

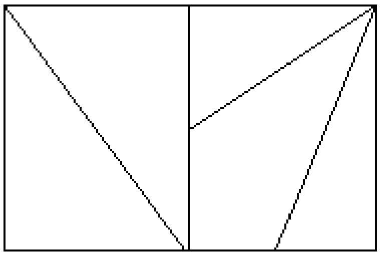


Рис. 29

Вариант 15

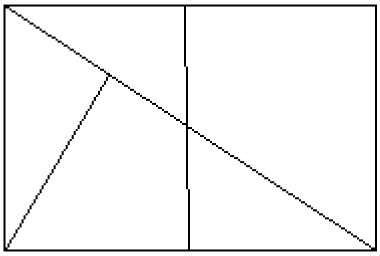


Рис. 30

8. Индивидуальные задания по теме «Характеристические числа графов»

Для графа, приведенного на рисунке, определить цикломатическое число, число внутренней устойчивости, число внешней устойчивости, хроматическое число, хроматический индекс.

Вариант 1

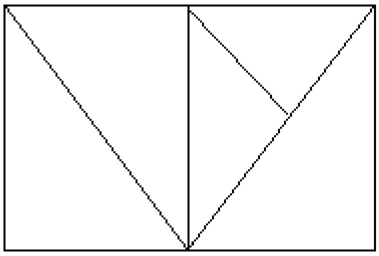


Рис. 31

Вариант 2

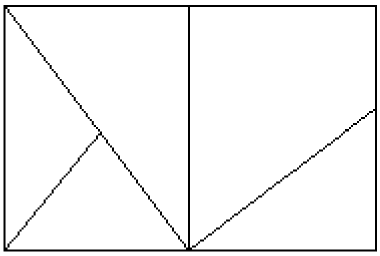


Рис. 32

Вариант 3

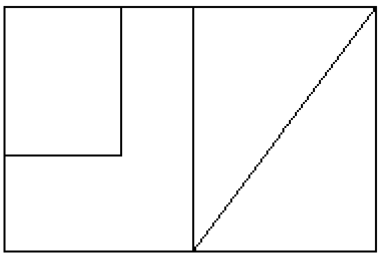


Рис. 33

Вариант 4

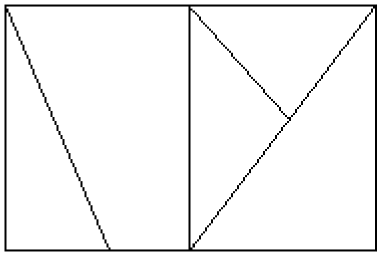


Рис. 34

Вариант 5

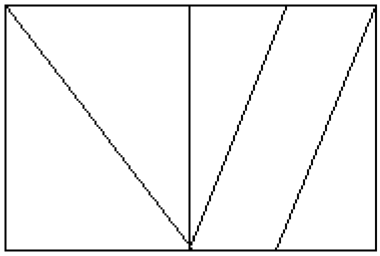


Рис. 35

Вариант 6

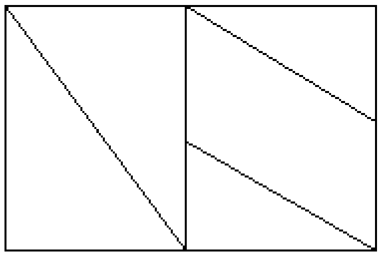


Рис. 36

Вариант 7

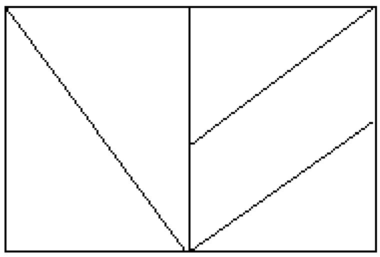


Рис. 37

Вариант 8

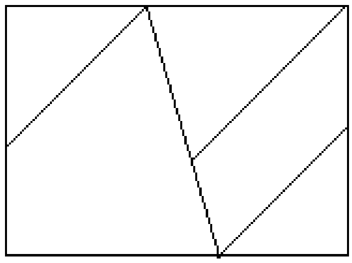


Рис. 38

Вариант 9

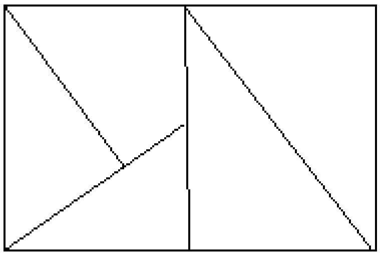


Рис. 39

Вариант 10

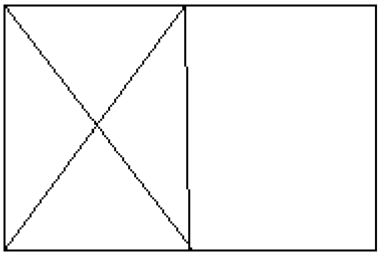


Рис. 40

Вариант 11

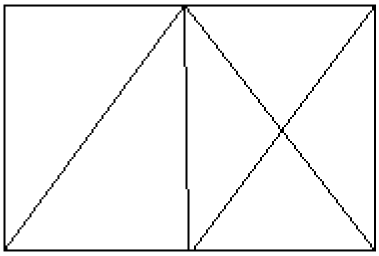


Рис. 41

Вариант 12

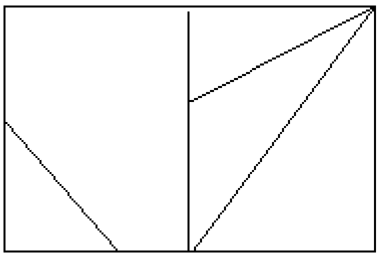


Рис. 42

Вариант 13

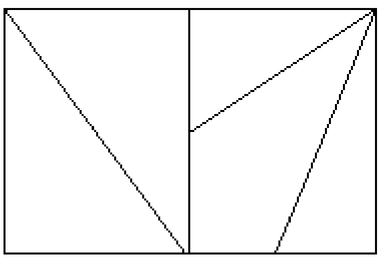


Рис. 43

Вариант 14

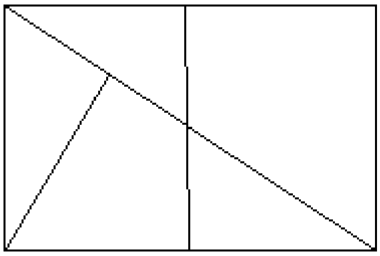


Рис. 44

Вариант 15

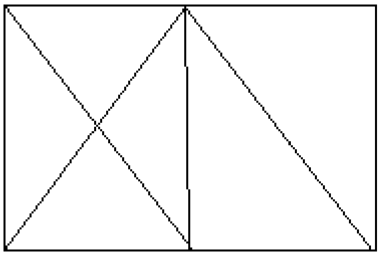


Рис. 45

Литература

1. Дискретная математика: учеб.-метод. пособие [Текст] / ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет»; сост. С. Г. Гутова, Т. А. Невзорова. – Кемерово, 2011. – 128 с.
2. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: практикум / Кемеровский гос. ун-т; сост. С. Г. Гутова. – Кемерово: КемГУ, 2017. – 185 с.: рис., табл.
3. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера [Текст] / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 480 с.
4. Чуешева, О. А. Математическая логика: учеб.-метод. пособие [Текст] / сост. О. А. Чуешева. – Кемерово, 2006. – 48 с.
5. Щекочихина, С. Г. Дискретная математика: вопросы для самостоятельного изучения для студентов 1 курса МФ спец. 01.02 / [Текст] / С. Г. Щекочихина. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2003. – 64 с.

Учебное издание

ГУТОВА Светлана Геннадьевна

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть 1

16 +

Редактор О. С. Григорьева
Технический редактор Т. В. Бледных

Подписано к использованию 28.12.2019. Заказ № 52.
Объем 0,89 Мб.

Кемеровский государственный университет,
650000, г. Кемерово, ул. Красная, 6.