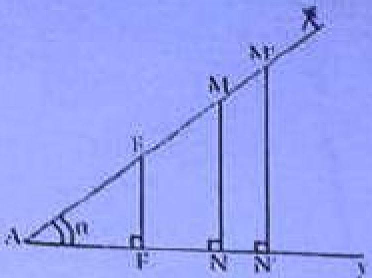
موضوع في ديداكتيك مادة الرياضيات:(10 نقط)

الجزء الأول:

معتمدا على فحوى الوثيقة التالية:

أنشطة تمهيدية

نشاط 1



لتكن $\widehat{xAy}$ زاوية حادة.

لتكن E نقطة من $[Ax)$ و F مسقطها العمودي على المستقيم (Ay)

نضع: $\frac{EF}{AE}=a$ و $\frac{EF}{AF}=b$

لتكن M و M' نقطتين من $[Ax)$ تختلفان عن A و E.

لتكن N و N' مسقطيهما العموديين على (Ay) .

1) بين أن : $\frac{MN}{AM}=\frac{M'N'}{AM'}=a$ ،

العدد a غير مرتبط بوضع E على $[Ax)$ ومسقطها F على $[Ay)$ ، a يسمى جيب α ويرمز له بـ $a=\sin\alpha$

2) بين أن : $\frac{MN}{AN}=\frac{M'N'}{AN'}=b$. العدد b غير مرتبط بوضع E على $[Ax)$ ومسقطها F على $[Ay)$ ، b يسمى ظل α ويرمز له بـ $b=\tan\alpha$

نشاط 2

لتحديد قياس x لزاوية حادة حيث : $\sin x=0.456$ وذلك باستعمال المحسبة،

نتبع الخطوات التالية : $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{0.456}$ $\boxed{=}$

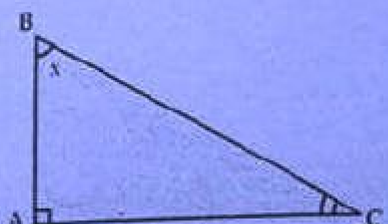
$\boxed{27.12929416}$

النتيجة التي تظهر على شاشة المحسبة هي قيمة مقربة لقياس الزاوية x.

باستعمال المحسبة حدد قيمة مقربة لكل من a و b و c علما أن :

$\boxed{\sin a=\frac{1}{4}}$ $\boxed{\tan b=\frac{2}{3}}$ $\boxed{\tan c=2}$

نشاط 3



ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $\widehat{ABC}=x$

1) بين أن : $0<\sin x<1$

2) احسب : $(\cos x)^2+(\sin x)^2$

3) بين أن : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

نشاط 4

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $AB=3, AC=4, BC=5$

1) احسب : $\cos\widehat{ABC}$ و $\sin\widehat{ABC}$ و $\tan\widehat{ABC}$ 2) احسب : $\cos\widehat{ACB}$ و $\sin\widehat{ACB}$ و $\tan\widehat{ACB}$

3) ماذا تلاحظ ؟

1- حدد المستوى الدراسي المستهدف من هذه الأنشطة و عنوان الدرس.
2- حدد المفاهيم الأساسية التي تهدف إليها الأنشطة التمهيدية المعتمدة في هذه الوثيقة
3- أعط معالجة ديداكتيكية لكل نشاط من الأنشطة الأربعة مع تحديد القدرات المستهدفة منه.

الجزء الثاني :

تتمحور الأنشطة المعتمدة بالوثيقة على مفهوم الزاوية الذي يعتبر من المفاهيم الأساسية في الهندسة حيث تتجسد هذه الأهمية من خلال عدد الدروس الواردة في البرامج والمقررات الرسمية بالتعليم الثانوي الإعدادي و التأهيلي التي تتناول هذا المفهوم.

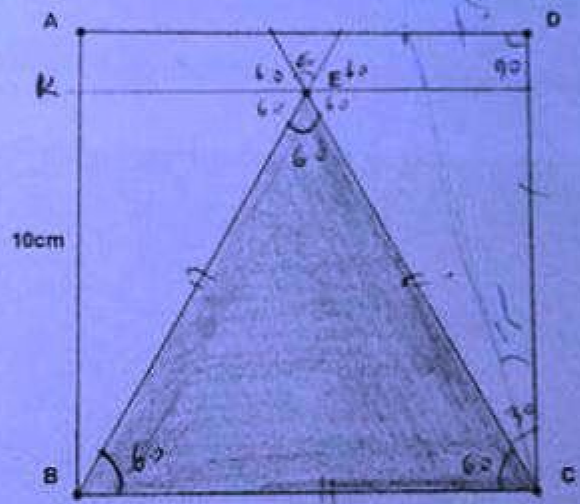
1- أعط جردا لكيفية تطور مفهوم الزوايا في السلك الثانوي الإعدادي مع تحديد المستجدات المحدثة خلال هذا التطور.

2- حدد تعاريف و خاصيات المفاهيم التالية و ربطها بأهميتها في كل مستوى من مستويات التعليم الثانوي الإعدادي.

أ) زاويتان متحاذيتان
ب) زاويتان متقابلتان بالرأس
ج) زاوية محيطية في دائرة
د) زاوية مركزية في دائرة
ه) منصف زاوية
ي) حالة تشابه مثلثات المرتبطة بالزوايا

الجزء الثالث :

تم اقتراح الشكل التالي لمستوى الثالثة إعدادي ضمن فترة الدعم و التقوية.



حيث: $ABCD$ مربع طول ضلعه $10cm$ و BCE مثلث متساوي الأضلاع

1- باستعمال الشكل حدد القيمة المضبوطة للعدد $\tan(15°)$

2- اعط سلسلة من الأسئلة المتدرجة لاستنتاج $\tan(15°)$ حتى تكون موضوع تقويم في الحساب المثلثي بالسنة الثالثة إعدادي.

موضوع في مادة الرياضيات:(10 نقط)

EXERCICE 1

Soient $a \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Question 1 Pour toute valeur de a la suite (u_n) est :
(a) croissante. (b) bornée. (c) convergente. (d) décroissante.

Question 2 Si (u_n) admet une limite (finie ou non), alors il est possible que cette limite vaut :
(a) 1. (b) 0. (c) $\pi/2$. (d) $+\infty$.

Question 3 On pose $\gamma = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, alors :

(a) $\gamma = \dfrac{1}{6}$. (b) $\gamma = \dfrac{1}{3}$. (c) $\gamma = -\dfrac{1}{3}$. (d) $\gamma = -\dfrac{1}{6}$.

Question 4 On suppose $a = \dfrac{\pi}{4}$. On déduit de la question précédente que :

(a) $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{\gamma}{n}$. (b) $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\gamma n}$. (c) $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\gamma}{n}}$. (d) $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{\gamma n}}$.

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application φ_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}, \text{ et l'intégrale } I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

Question 5 Les valeurs de I_0 et I_1 sont données par :
(a) $I_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\dfrac{1}{4}e^{-2} + \dfrac{1}{4}$. (b) $I_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = \dfrac{1}{4}e^{-2} + \dfrac{1}{4}$.
(c) $I_0 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\dfrac{1}{4}e^{-2} + \dfrac{1}{4}$. (d) $I_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\dfrac{1}{4}e^{-2} - \dfrac{1}{4}$.

Question 6 La suite (I_n)
(a) est croissante. (c) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) est décroissante. (d) est convergente.

EXERCICE 3

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Question 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, alors :

(a) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. (c) la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (d) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n > 0$.

Lahcen Oukhdil

Question 8 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t$ de sorte que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$, alors :

(a) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(b) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^{n} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(c) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^{n} \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(d) $S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Question 9 On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) est convergente de limite égale à $\frac{\pi}{4}$.

(c) est convergente de limite égale à $\frac{\pi}{2}$.

(d) est convergente de limite égale à 1.

EXERCICE 4

Soit $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers ($a_i \in \mathbb{Z}$) tel que $a_0a_n \neq 0$.

Question 10 On suppose que P admet une racine $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, alors :

(a) p divise a_0.

(b) a_0 divise q.

(c) q divise a_n.

(d) a_n divise p.

Question 11 On pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, on a :

(a) α est racine du polynôme $8X^3 - 6X + 1$.

(b) α est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$.

(c) α est un irrationnel.

(d) α est racine du polynôme $6X^3 - 8X - 1$.

EXERCICE 5

On considère l'ensemble $\mathbb{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

Question 12 On note $\times$ la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Il existe au moins un élément de $\mathbb{E}$ inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{E}, \times)$.

(c) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{E}, \times)$.

(d) $(\mathbb{E}, \times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 6

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on considère la transformation σ qui à chaque point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = -3\bar{z} + 4 - 2i.$$

Question 13 σ est alors la composée :

(a) d'une symétrie axiale et d'une homothétie.

(b) d'une symétrie axiale et d'une rotation.

(c) d'une translation et d'une symétrie axiale.

(d) d'une translation et d'une rotation.

Question 14 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(-1)$ et de rayon 1 et soit $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, alors :

(a) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7-2i)$ et de rayon 3.

(b) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7+4i)$ et de rayon 3.

(c) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7-2i)$ et qui passe par le point $A(7+i)$.

(d) $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $J(7-4i)$ et qui est tangent à l'axe des abscisses.

EXERCICE 7

On donne trois points A, B et M. On considère les points N milieu de $[AM]$ et P milieu de $[BM]$.

Question 15 On a alors :

(a) N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

(b) N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

(c) P est l'image de N par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(d) P est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 8

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, on considère un tétraèdre $ABCD$.

Question 16 L'ensemble des points M tels que

$$\left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right\|.$$

(a) est un singleton. (b) est une droite. (c) est un plan. (d) est une sphère.

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé et on considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x + y + z = 3$,

la droite $(\mathcal{D}_1)$: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et la droite $(\mathcal{D}_2)$: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$.

Question 17 On a alors :

(a) La droite $(\mathcal{D}_2)$ passe par le point de coordonnées $(0,0,1)$ et de vecteur directeur de coordonnées $(1,1,-2)$.

(b) La droite $(\mathcal{D}_2)$ passe par les points de coordonnées $(1,1,-1)$ et $(2,2,3)$.

(c) Les deux droites sont non coplanaires, $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D}_2) \parallel (\mathcal{P})$.

(d) Les deux droites sont non coplanaires, $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D}_2) \perp (\mathcal{P})$.

EXERCICE 9

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ on considère deux événements A et B.

Question 18 On suppose que $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{5}$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$, alors :

(a) Si les deux événements sont incompatibles alors $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{10}$.

(b) Si les deux événements sont indépendants alors $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{8}$.

(c) Si A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé alors $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.

(d) Si B est réalisé alors A est aussi réalisé.

EXERCICE 10

Dans un concours la liste d'attente est constituée de n candidats ($n \geq 4$) ordonnés suivant l'ordre de mérite. Deux amis se trouvent dans cette liste. On considère les deux événements :

A : "Les deux amis soient situés l'un après l'autre "

B : " les deux amis soient séparés par un troisième candidats "

Question 19 La probabilité $\mathrm{P}(A)$ est :

(a) $\frac{1}{n}$. (b) $\frac{2}{n}$. (c) $\frac{2}{n(n-1)}$. (d) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$.

Question 20 La probabilité $\mathrm{P}(B)$ est :

(a) $\frac{2}{n(n-1)}$. (b) $\frac{2}{n-1}$. (c) $\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$. (d) $\frac{2}{n}$.

Exercice 1

Question 1	On a $u_0=a$ et $u_{n+1}=\sin(u_n)$ Donc $u_0=a$ et $\|u_n\|\le 1 \quad \forall n\ge 1$ Donc $\|u_n\|\le \max(\|a\|,1) \quad \forall n\in \mathbb{N}$ Donc (u_n) est bornée	(b)
Question 2	On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ On a $u_{n+1}=\sin(u_n)$ et $x\to\sin(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ Alors $l=\sin(l)$ Donc $l=0$	(b)
Question 3	On a $\gamma=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2}-\frac{1}{x^2}$ $\quad \boxed{\sin(u)=u-\frac{u^3}{6}+o(u^3)}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{36}}-\frac{1}{x^2}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{36}\right)}-1\right)$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(1+\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{36}\right)-1\right)$ $\quad \boxed{\frac{1}{1-u}=1+u+o(u)}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{36}\right)=\boxed{\frac{1}{3}}$	(b)
Question 4	On a $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sin^2(u_n)}-\frac{1}{u_n^2}=\gamma$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}=\gamma$ Donc	

Lahcen Oukhdil

$$\left|\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\gamma\right|<\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}-\gamma\right|<\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\gamma\right|<n\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}-n\gamma\right|<n\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{nu_n^2}-\frac{16}{n\pi^2}-\gamma\right|<\varepsilon$$

d

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{nu_n^2}-\frac{16}{n\pi^2}-\gamma=0$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{nu_n^2}=\gamma$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n\gamma}}}{u_n}\right)^2=1$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n\gamma}}}{u_n}=1$$

Ce qui montre $u_n \sim \sqrt{\frac{1}{n\gamma}}$

Exercice 2

Question 5

On a

$$I_0=\int_0^1(1-x)^0e^{-2x}dx=\int_0^1 e^{-2x}dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}}$$

$$I_1=\int_0^1(1-x)e^{-2x}dx=\left[-\frac{(1-x)e^{-2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{-2x}}{2}dx=\frac{1}{2}+\left[\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2}-\frac{1}{4}$$

$$=\boxed{\frac{1}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}}$$

(b)

Lahcen Oukhdil

Question 6

- Soit $n \in IN$

On a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$$

$$= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx$$

Or $0 \leq x \leq 1$ alors $-x(1-x)^n e^{-2x} \leq 0$ donc $\int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx \leq 0$

Donc $$I_{n+1} \leq I_n$$

Alors (I_n) est décroissante

- Pour tout $n \in IN$ on a

$$(1-x)^n e^{-2x} \geq 0 \text{ donc } \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \geq 0 \text{ donc } I_n \geq 0$$

Alors (I_n) est décroissante et minorée par 0

D'où (I_n) est convergente

(b) et (d)

Exercice 3

Question 7

- Soit $n \in IN$

On a

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$
$$= \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}$$
$$= \frac{-2}{(4n+3)(4n+5)} \prec 0$$

Alors

$$S_{2(n+1)} \prec S_{2n} \qquad \forall n \in IN$$

D'où la suite (S_{2n}) est décroissante

- De plus on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}_{\succ 0} - \underbrace{\frac{1}{7} + \dots}_{\succ 0}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n \succ 0$

(b) Et (d)

Lahcen Oukhdil

Question 8 — (b) Et (d)

- Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{2k}dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times t^{2k}dt$$

$$=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^k dt=\int_0^1\frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1-\left(-t^2\right)}dt$$

$$=\int_0^1\frac{1-(-1)^{n+1}\times\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}\times\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{1-(-1)^{n+1}\times\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-(-1)^{n+1}\times\int_0^1\frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

Donc

$$\boxed{S_n=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-(-1)^{n+1}\times\int_0^1\frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}dt}$$

$$\boxed{S_n=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt+(-1)^{n}\times\int_0^1\frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}dt}$$

Question 9 — (b)

On a

$$S_n=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-(-1)^{n+1}\times\int_0^1\frac{\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

Or

$$0\le t\le 1\Rightarrow 0\le\frac{1}{1+t^2}\le 1\Rightarrow 0\le\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\le t^{2n+2}$$

$$\Rightarrow 0\le\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\le\int_0^1 t^{2n+2}dt\Rightarrow 0\le\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\le\frac{1}{2n+3}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+3}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt=0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\left[\arctan t\right]_0^1=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

Exercice 4

Question 10

- On suppose que $r=\dfrac{p}{q}$ est une racine de p alors

$$P(r)=0 \Rightarrow a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\dots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$$

$$\Rightarrow a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\dots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

$$\Rightarrow a_np^n=-q\left(a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_0q^{n-1}\right) \quad \text{et} \quad a_0q^n=-p\left(a_np^{n-1}+\dots+a_1q^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow q \text{ divise } a_np^n \quad \text{et} \quad p \text{ divise } a_0q^n$$

Or $p\wedge q=1$ alors $p\wedge q^n=1$ et $p^n\wedge q=1$

Donc d'après Théorème de Gauss

$$q \text{ divise } a_n \quad \text{et} \quad p \text{ divise } a_0$$

Réponse : (a) et (c)

Question

Exercice 5

Question 12

- Soit $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\in E$, on a

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\in E$

Alors $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(E,\times)$

-
  - ☑ la loi $\times$ associative
  - ☑ $\times$ admet élément neutre
  - ☑ Tout les élément de E est symétrique
  - ☑ la loi $\times$ est commutative

Alors $(E,\times)$ est un group commutatif

Réponse : (c) et (d)

Exercice 6

Question 13

On a

$$\sigma(z)=-3\bar{z}+4-2i=foh$$

Tel que $f(z)=-3z+4-2i=-3\left(z-1+\dfrac{1}{2}i\right)+1-\dfrac{1}{2}i$ et $g(z)=\bar{z}$

Alors f est une homothétie de centre $\Omega\left(1-\dfrac{1}{2}i\right)$ et de rapport -3

Et est une symétrie axiale (Ox)

D'où σ est la composition d'une symétrie axiale et d'une homothétie

Réponse : (a)

Question 14

- On a $\sigma(I)=J \Rightarrow z_J=-3\overline{z_I}+4-2i=7-2i$

Donc $J(7-2i)$

Soit $M(z)\in(C)$ alors $\sigma(M)=M'\in(C')$ i.e $z'=-3\overline{z}+4-2i$

Donc

$$JM=|z_J-z'|=|7-2i+3\overline{z}-4+2i|=|3+3\overline{z}|=3|1+\overline{z}|=3|\overline{1+z}|=3|1+z|=3$$

Car $|\overline{z}|=|z|$ et $|1+z|=|z-(-1)|=IM=1$

Donc (C') est le cercle de centre $J(7-2i)$ et de rayon 3

- On a $B(-1+i)\in(C)$ alors $A=\sigma(B)\in(C')$

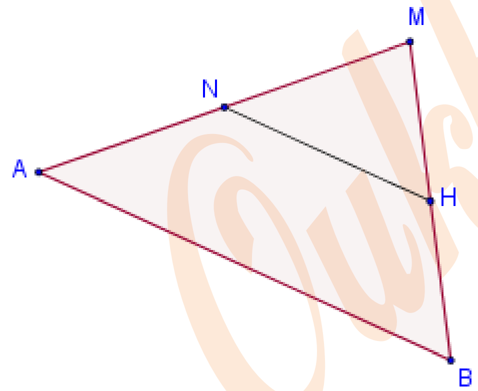
Et on a $z_A=-3\overline{z_B}+4-2i=7+i$

alors $A(7+i)\in(C')$

d'où (C') est le cercle de centre $J(7-2i)$ et qui passe par le point $A(7+i)$

Réponse : (a) et (c)

Question 15



- On a N milieu de $[AM]$ alors $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Alors N est l'image de M homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

- On a

$$\begin{cases} N \text{ milieu de } [AM] \\ P \text{ milieu de } [BM] \end{cases} \Rightarrow (NP)//(AB) \quad et \quad NP=\frac{1}{2}AB$$

Donc $\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Alors P est l'image de N par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Réponse : (a) et (c)

Question 16

On pose $G=bar(A(3),B(2))$ et $G'=bar(C(2),D(3))$

Alors $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=5\overrightarrow{MG'}$

Donc

$\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\| \Rightarrow \|5\overrightarrow{MG}\|=\|5\overrightarrow{MG'}\| \Rightarrow 5MG=5MG' \Rightarrow \boxed{MG=MG'}$ Donc l'ensemble des point M est un plan

Réponse : ©

Lahcen Oukhdil

Question 17	• On a
	$$(D_2):\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$$
	On pose $x=t$ donc
	$$(D_2):\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$$
	Alors la droite (D_2) passe par le point de coordonnées $(0,0,1)$ et de vecteur directeur de coordonnées $(1,1,-2)$
	• $\vec{n}(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan (P)
	$\vec{u_1}(-2,1,1)$ est un vecteur directeur de (D_1)
	$\vec{u}_1(1,1,-2)$ est un vecteur directeur de (D_2)
	Or $\vec{u_1}.\vec{n}=0$ et $\vec{u_2}.\vec{n}=0$ alors $(D_2)//(P)$ et $(D_1)//(P)$
	De plus on a $M(1,1,2)\in(D_1)$ et $M(1,1,2)\notin(P)$
	$N(0,0,1)\in(D_2)$ et $N(0,0,1)\notin(P)$
	Alors les deux droites sont non coplanaire , $(D_2)//(P)$ et $(D_1)//(P)$
		(a) et (c)

Question 19	$$P(A)=\frac{2}{n}$$	(c)
Question 20	$$P(B)=\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$	©