Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2024

Trabajo Práctico N° 1: Matrices Insumo-Producto.

Introducción

Wassily Leontief (San Petersburgo, 1906) fue una de los primeros economistas en introducir el análisis computacional a la Economía hacia 1949 en la Universidad de Harvard. Gracias a estos avances, gana el Premio Nobel en 1973.

Leontief basó su enfoque en la idea de que una economía se divide básicamente en sectores y cada sector tiene como objetivo generar un producto. Para producirlo, cada sector requiere aportes e insumos que pueden provenir desde todos los sectores de la economía, incluyéndose a sí mismo. En una economía compuesta de diversos sectores, podemos definir la existencia de una demanda interna sobre los otros sectores, y al mismo tiempo una demanda externa que define el total del producto necesario para satisfacer ambas demandas:

$$\textit{Cantidad Total Producida} = \textit{Demanda Interna} + \textit{Demanda Externa}$$

Para observar esto más claramente veamos un ejemplo básico donde suponemos que existen tres sectores produciendo unidades de su producto. Para que cada sector produzca, precisa de su propio producto y de los productos de los otros sectores:

- Sector 1: para producir 1 unidad del Producto 1, utiliza 0.10 unidades de Producto 1, 0.20 unidades de Producto 2 y 0.25 unidades de Producto 3.
- Sector 2: para producir 1 unidad del Producto 2, utiliza 0.15 unidades de Producto 1, 0 unidades de Producto 2 y 0.40 unidades de Producto 3.
- Sector 3: para producir 1 unidad del Producto 3, utiliza 0.12 unidades de Producto 1, 0.30 unidades de Producto 2 y 0.20 unidades de Producto 3.

Por otro lado, cuando el objetivo es determinar las cantidades que deben producir los tres sectores dependen entonces tanto de la demanda interna, como de la externa. Concentrándonos solo en la demanda interna, tres variables p_1, p_2 y p_3 que definen las unidades que producen los tres sectores del ejemplo, cuál sería el requerimiento total interno? En este sentido se define la cantidad de Producto 1 que precisa en total:

- Para producir p_1 unidades de Producto 1 se requiere $0{,}10p_1$ unidades de Producto 1.
- Para producir p_2 unidades de Producto 2 se requiere $0{,}15p_2$ unidades de Producto 1.
- Para producir p_3 unidades de Producto 3 se requiere $0{,}12p_3$ unidades de Producto 1.

Esto significa que la demanda interna de Producto 1 es $0{,}10p_1 + 0{,}15p_2 + 0{,}12p_3$. Podemos extender estas ecuaciones para los otros Productos como:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0{,}10p_1 + 0{,}15p_2 + 0{,}12p_3 \\ p_2 &= 0{,}20p_1 + 0p_2 + 0{,}30p_3 \\ p_3 &= 0{,}25p_1 + 0{,}40p_2 + 0{,}20p_3 \end{aligned}$$

De forma matricial, el sistema se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}20 & 0 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}40 & 0{,}20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, si consideramos la demanda externa, lo total producido se convierte en:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{TotalProducido} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}20 & 0 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}40 & 0{,}20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{DemandaInterna} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}_{DemandaExterna}$$

El modelo de Insumo-Producto de Leontief se formaliza entonces como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{d} \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de consumo. La matriz $\mathbf{A}$ se forma de los vectores de insumos, significando que la columna j representa los insumos requeridos a cada Sector por el Sector j para producir una unidad de salida de su Producto.

Una economía se dice abierta si $\mathbf{d} \neq \bar{0}$, y cerrada si $\mathbf{d} = \bar{0}$. En este último caso, todas las salidas producidas por los Sectores sirven como insumos de estos sectores, sin demanda externa.

El problema que resuelve el modelo de Leontief es calcular la producción $\mathbf{p}$ necesaria de cada sector para satisfacer la demanda interna y externa, conociendo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{d}$.

Matemáticamente, y a partir de la ecuación 1

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{d} = \mathbf{L}\mathbf{d} \tag{2}$$

donde la inversa de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ también se conoce como $\mathbf{L}$ y se llama matriz de Leontief.

Consigna 1. Analizar qué sucede con la solución del sistema 2 en cada uno de los siguiente casos:

a) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es inversible Sistema compatible determinado -> solución única

b) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es inversible y $\mathbf{d} = 0$ Sistema homogéneo compatible determinado -> Solución única perteneciente al núcleo de la matriz

c) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ no es inversible Sistema compatible indeterminado o incompatible -> No hay solución o son infinitas

d) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ no es inversible y $\mathbf{d} = 0$ Sistema homogéneo compatible indeterminado -> Hay infinitas soluciones, el núcleo tiene dimensión mayor a 0

Para inversaLU considerar LUX=I, con X=inv(LU).
Usar primero solve_triangular para LY=I y después para UX=Y

Para testear inversaLU(L,U) podemos ver que lo devuelto multiplicado por LU de la identidad I.
Para testear que nuestra implementación de calcularLU sea correcta para una matriz A podemos testear que se satisfaga A = L @ U (obs: en la función lu de scipy consideran una matriz de permutación ¿De qué manera influye esto?)

Consigna 2. Implementar el cálculo de la inversa de la matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ aplicando LU. Para ello completar el código de la función calcularLU que se encuentra en el archivo funciones.py de template del TP. Esta función debe devolver las matrices L y U. Luego, completar el código de la otra función inversaLU(L,U) que devuelve la inversa final a través de las matrices L y U devueltas por la anterior función. Para resolver sistemas, únicamente podrá utilizarse la función `scipy.linalg.solve_triangular` de la biblioteca `scipy.linalg` que resuelve sistemas triangulares. solve_triangular(a, b, trans=0, lower=False, unit_diagonal=False, overwrite_b=False, check_finite=True)

Para L: lower=True, unit_diagonal=True

Para U: lower=False, unit_diagonal=False

Consigna 3. Resolver el sistema 2 utilizando inversaLU para los siguientes valores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}0 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 1{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

respondiendo lo siguiente:

- ¿Hay una justificación económica de los valores encontrados para $\mathbf{p}$?
- ¿Cuál es la característica de la matriz que lleva a esta solución?

Es una pregunta amplia, quizá sea más claro qué responder cuando se haya hecho el correspondiente análisis.

Consigna 4. Analizar analíticamente qué sucede con la producción total cuando a partir de una demanda externa $\mathbf{d}$, la demanda externa para el producto 3 cambia en un $\Delta\mathbf{d}$. La demanda externa se convierte en

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtener la expresión del vector $\Delta\mathbf{p}$ correspondiente a este ejemplo.

Considerar la condicionalidad de la matriz de Leontief, en caso de estar bien condicionada la pequeña perturbación a d no debería producir una gran perturbación en p. Idea de análisis: normas matriciales.

Coeficientes técnicos

Quizá está relacionado con la pregunta de la consigna 3

Las matrices $\mathbf{A}$ con las que estuvimos trabajando tienen la característica de que son coeficientes técnicos que muestran la relación del flujo de los insumos y los productos. En la práctica, los valores de producción, insumos y los flujos relacionados, compras y ventas pensados en un período de tiempo (por ejemplo un año), están dados en unidades monetarias. Por ejemplo, un Sector 4 que produce un total de producto equivalente a \$15.000, emplea \$300 de bienes del Sector 1: $z_{14} = 300$ y $p_4 = 15{,}000$. En este caso $a_{14} = z_{14}/p_4 = 300/15{,}000 = 0{,}02$. Estos coeficientes técnicos se consideran fijos en el sentido de ser una medida de interrelación entre las salidas del sector y las entradas.

De forma matricial, teniendo n Sectores, podemos definir $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

P matriz diagonal de total de producción de cierto producto i en unidad monetaria

Z matriz de conectividad entre sectores: zij es lo que emplea el sector j en bienes del sector 1

Luego, la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\mathbf{P}^{-1}$

Cada sector representa un producto (bienes).

Consigna 5. Encontrar los coeficientes técnicos $\mathbf{A}$ y la matriz de Leontief para la siguiente economía.

	Demanda Interna			Total Producido
	S_1	S_2	S_3	
S_1	350	0	0	1000
S_1	50	250	150	500
S_1	200	150	550	1000

Matrices regionales

Si bien el modelo de Leontief trabaja a nivel nacional, la particularidad de disgregar las economías en regiones permite estudiar las distintas particularidades de una economía en su conjunto.

Desde un punto de vista formal, el cambio al análisis regional consiste en identificar aquellas matrices de intercambio de flujos de capital entre sectores que establecen relaciones inter-regional y intra-regional.

En las variables que trabajamos se utiliza un superíndice indicando la región a la que refiere la variable. Por ejemplo, el flujo monetario z_{ij}^{rr} denota los montos del sector i de la región r hacia el sector j en la región r. De la misma manera, se puede derivar el coeficiente técnico:

$$a_{ij}^{rr} = \frac{z_{ij}^{rr}}{p_j^r} \tag{3}$$

y sea $\mathbf{Z}^{rr} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{P}^r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz diagonal que puede entonces calcular:

$$\mathbf{A}^{rr} = \mathbf{Z}^{rr}(\mathbf{P}^r)^{-1}$$

El cálculo del total producto en la región r se obtiene nuevamente por la matriz de Leontief:

$$\mathbf{p}^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})^{-1}\mathbf{d}^r$$

Cuando integramos una segunda región s en la economía, la matriz de flujo de capitales $\mathbf{Z}$ total se puede escribir como:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{rr} & \mathbf{Z}^{rs} \\ \mathbf{Z}^{sr} & \mathbf{Z}^{ss} \end{pmatrix}$$

donde tanto $\mathbf{Z}^{rr}$ y $\mathbf{Z}^{ss}$ son matrices cuadradas, pero $\mathbf{Z}^{sr}$ y $\mathbf{Z}^{rs}$ no lo precisan.

Cuando calculamos los coeficientes técnicos de las matrices interregionales, ya a^{rr} estaba calculado en eq. 3, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{ss} &= \frac{z_{ij}^{ss}}{p_j^s} \\ a_{ij}^{rs} &= \frac{z_{ij}^{rs}}{p_j^s} \\ a_{ij}^{sr} &= \frac{z_{ij}^{sr}}{p_j^r} \end{aligned}$$

Volviendo a la eq. 1, podemos reescribir el model de Leontief para dos regiones:

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{rr} & \mathbf{A}^{rs} \\ \mathbf{A}^{sr} & \mathbf{A}^{ss} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{p}^{r} \\ \mathbf{p}^{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{r} \\ \mathbf{d}^{s} \end{pmatrix} \tag{4}$$

En la práctica se busca establecer la producción adicional necesaria de los sectores para cubrir una variación en la demanda $\mathbf{d}$. Supongamos que estamos interesados en establecer sobre la región r la variación $\Delta\mathbf{p}^r$ de producción, dada por un $\Delta\mathbf{d}^r$, como vimos en la Consigna 4, tenemos el modelo de región simple como

$$\Delta\mathbf{p}^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})^{-1}\Delta\mathbf{d}^r \tag{5}$$

Consigna 6. A partir de la fórmula 4, deducir cómo se calcula la variación de la producción en la región r para cubrir una variación de la demanda considerando las relaciones interregionales. Fijando por simplicidad $\Delta\mathbf{d}^s = 0$, deducir la siguiente fórmula:

$$\Delta\mathbf{p}^r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr} - \mathbf{A}^{rs}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})^{-1}\mathbf{A}^{sr})^{-1}\Delta\mathbf{d}^r \tag{6}$$

Consigna 7. Esta última consigna del Trabajo Práctico busca aplicar todo lo visto anteriormente en un caso real. Para ello utilizaremos las Matrices de Insumo-Producto generadas por la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), un organismo de Naciones Unidas.

- Descargar de este link, en la sección Adjuntos, la MIP Latinoamericana 2011 (Preliminar). Este es un archivo de Excel, el cual deben leer con la librería pandas de Python. En la Hoja 'LAT_IOT_2011' se encontrarán los flujos entre 40 sectores de 18 paises, expresados en millones de dólares. La última columna del archivo, con el título 'Output' es el total producido para ese sector.
- Seleccionar los dos países $P1$ y $P2$ que les fue asignado al grupo y generar la matriz de Insumo-Producto de estas dos regiones.
- Calcular los coeficientes técnicos para cada bloque en sus submatrices intra-regionales e inter-regionales de la $\mathbf{A}$ total.
- Simular un shock negativo sobre el sector s05 del 10 % del total del sector, y un shock positivo del 3.3 % del total de cada uno de los siguientes sectores: s06, s07 y s08. Todos estos shocks se producen en el país $P1$
- Analizar cómo se modifica la producción cuando se considera el modelo de región simple (ecuación 5) y cuando se considera la fórmula completa de las 2 regiones (ecuación 6).

Entrega y lineamientos

La entrega se realizará a través del campus virtual de la materia con las siguientes fechas y formato:

- Fecha de entrega: hasta el miércoles **26 de septiembre** a las 23:59 hs.

- Fecha de re-entrega: hasta el **10 de octubre** a las 23:59 hs.
  Es condición obligatoria haber realizado un envío en la primera fecha **de entrega para tener la posibilidad de reentregar.**

- Formato: Jupyter Notebook del template-alumnos y archivo funciones.py.

En este archivo solamente se esperan funciones, no código tipo script. Podemos importarlo al notebook y trabajar todo lo demás en celdas del notebook.

Prestar especial atención a las siguientes indicaciones:

- El TP1 se realizará en grupos de tres personas. Se puede usar el foro 'Foro de Grupos de TP'.

  Importante: es indispensable realizar la inscripción previa del grupo para poder hacer el envío a través del campus. Los grupos o personas no inscriptas en grupos no estarán habilitadas en el formulario de carga del TP. No se aceptarán envíos por email.

- Leer el enunciado completo antes de comenzar a generar código y sacarse todas las dudas de cada ítem antes de implementar. Para obtener un código más legible y organizado, pensar de antemano qué funciones deberán implementarse y cuáles podrían reutilizarse.

- El código debe estar correctamente comentado. Cada función definida debe contener un encabezado donde se explique los parámetros que recibe y qué se espera que retorne. Además las secciones de código dentro de la función deben estar debidamente comentados. Los nombre de las variables deben ser explicativos.

- Las conclusiones y razonamientos que respondan los ejercicios, o cualquier experimentación agregada, debe estar debidamente explicada en bloques de texto de las notebooks (markdown cells), separado de los bloques de código. Aprovechen a utilizar código LaTeX si necesitan incluir fórmulas.

- Gráficos: deben contener título, etiquetas en cada eje y leyendas indicando qué es lo que se muestra.