

ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

2do Cuatrimestre 2024

Práctica N° 3: Sistemas lineales.

Ejercicio 1. Sean \mathbf{A} y $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$. Probar que:

- (a) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son triangulares superiores, \mathbf{AB} es triangular superior.
- (b) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son diagonales, \mathbf{AB} es diagonal.
- (c) Si \mathbf{A} es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $\mathbf{A}^n = 0$.

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

- (a) Escalonar la matriz \mathbf{A} multiplicándola a izquierda por matrices elementales $\mathbf{T}^{ij}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq 4$, con $i \neq j$.

Recordar que $\mathbf{T}^{ij}(a) \in K^{n \times n}$ se define como:

$$\mathbf{T}^{ij}(a) = \mathbf{I}_n + a\mathbf{E}^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \quad a \in K,$$

siendo \mathbf{E}^{ij} las matrices canónicas de $K^{n \times n}$.

- (b) Hallar la descomposición \mathbf{LU} de \mathbf{A} .
- (c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,
para $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Escribir funciones de `Python` que calculen la solución de un sistema:

- (a) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, siendo \mathbf{L} triangular inferior.
- (b) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, siendo \mathbf{U} triangular superior.

Ejercicio 4. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes tareas:

- (a) Calcular la descomposición \mathbf{LU} de una matriz dada \mathbf{A} , asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.
- (b) Resolver un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem c. del ejercicio 2

Ejercicio 5. Considerar la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Probar que \mathbf{A} no admite descomposición LU .
- (b) Hallar la descomposición LU de \mathbf{PA} para alguna matriz de permutación \mathbf{P} adecuada.

Ejercicio 6. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible tal que $\mathbf{A} = \mathbf{TS}$ donde $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular inferior y $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular superior. Probar:

- (a) \mathbf{T} y \mathbf{S} son inversibles.
- (b) \mathbf{A} tiene factorización LU (con unos en la diagonal de \mathbf{L}).
- (c) La matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t & d \end{pmatrix}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de \mathbf{L}), para cualquier $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Hallarla explícitamente en función de $\mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y d .

Ejercicio 7. Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

- a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.
- b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 8. Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Ejercicio 9. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Probar que \mathbf{A} es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \mathbf{x}_i^t \mathbf{x}_j$.

Ejercicio 10. Sean las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que \mathbf{A} es simétrica definida positiva y \mathbf{B} es no singular si y sólo si \mathbf{BAB}^t es simétrica definida positiva.

Ejercicio 11. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|\mathbf{A}\|_2 < 1$, siendo $\|\cdot\|_2$ la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

- (a) Probar que $\mathbf{I} - \mathbf{A}^t \mathbf{A}$ es simétrica definida positiva.
- (b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^t & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

Ejercicio 12. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}).

(a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$\mathbf{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\mathbf{v}_1^*}{\|\mathbf{v}_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{\mathbf{v}_2^*}{\|\mathbf{v}_2\|_2^2} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \frac{\mathbf{v}_n^*}{\|\mathbf{v}_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si B es ortonormal, entonces $\mathbf{C}_{EB} = \mathbf{C}_{BE}^*$.

(c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector \mathbf{v} en base B son:

$$(\mathbf{v})_B = (\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}, \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}).$$

(d) Calcular $(\mathbf{v})_B$ siendo $\mathbf{v} = (1, -i, 3)$, $B = \{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, i)\}$.

Ejercicio 13. Aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt para calcular bases ortonormales de los subespacios generados por las siguientes bases:

(a) $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

(b) $B = \{(i, 1 - i, 0), (i, 1, 0)\}$

(c) $B = \{(1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1)\}$.

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

ii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

Ejercicio 15.

(a) Sea $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ base de \mathbb{R}^3 y sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 1, -1) \quad \text{y} \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ e $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

Ejercicio 16. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz $\mathbf{v}\mathbf{v}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \mathbf{v} \rangle$.

- (b) Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S , entonces: $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S .
- (c) Si \mathbf{A} es como en el ítem anterior, $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es la proyección ortogonal sobre S^\perp .
- (d) Eligiendo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $R = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$.

Ejercicio 17. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\text{Im}(\mathbf{A})$.

Ejercicio 18. Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

- (a) $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^t$.
- (b) Las columnas de \mathbf{Q} forman un conjunto ortonormal.
- (c) Las filas de \mathbf{Q} forman un conjunto ortonormal.
- (d) $\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geoméricamente.

Sugerencia: para demostrar la implicación (d \Rightarrow b) usar que $\mathbf{x}^t \mathbf{y} = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2)$.

Ejercicio 19. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 20. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector tal que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ y sea $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^t$ un reflector ortogonal de Householder.

- (a) Siendo $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, calcular explícitamente \mathbf{H} e interpretar geoméricamente $\mathbf{H}\mathbf{x}$ para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Sea \mathbf{x} tal que $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ con \mathbf{w} ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} múltiplo de \mathbf{u} . Mostrar que $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ e interpretar geoméricamente en \mathbb{R}^n .

Ejercicio 21. Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

- (a) Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
- (b) Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programa con las dadas por el comando `np.linalg.qr`. ¿Qué se observa?

Ejercicio 22. Implementar un programa que resuelva un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a partir de la descomposición QR de \mathbf{A} .

Ejercicio 23. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ con $n \geq p$ y $\text{rango}(\mathbf{A}) = p$, la proyección ortogonal $P_{\mathbf{A}}$ se define como la proyección ortogonal sobre el espacio generado por las columnas de \mathbf{A} .

- (a) Usar el ejercicio 16 (b) para concluir que si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es una base ortonormal de las columnas de \mathbf{A} entonces $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^*\mathbf{y}$ donde $\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_p)$.
- (b) Si \mathbf{Q} es la que se obtiene por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt y \mathbf{R} es tal que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$. Concluir que \mathbf{R} es inversible y que entonces la matriz de la proyección ortogonal resulta ser $\mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$.
- (c) Repetir el ejercicio 17 usando usando esta última expresión.

Temas:

- Factorización LU y Cholesky: Kincaid Capítulo 4.
- Matrices ortogonales, ortonormalización: Kincaid 5.3 y Capítulo 7 Banerjee.
- Proyectores: Capítulo 7 Banerjee.
- Factorización QR: Kincaid, 5.5.

Todos estos temas están incluidos en el Capítulo 3.5, y Capítulo 4 del apunte Acosta-Laplagne.

Bibliografía:

1. Numerical Analysis. D.R. Kincaid, E.W. Cheney. Brooks/Cole Publishing Company. 1991.
2. Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics. Banerjee, Sudipto; Roy, Anindya, Texts in Statistical Science (1st edición), Chapman and Hall/CRC. 2014.