XI Olimpiada Mexicana de Matemáticas 1996 - Problema 6
Pruebe que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

donde $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Solución.
Observemos que:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$$

Cabe destacar que los denominadores de la suma son mayores a n. Llamemos movimiento a sustituir $\frac{1}{n}$ con $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$. Sabemos que $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, hagamos movimiento en el segundo $\frac{1}{2}$:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

Hagamos dos veces movimiento en cada fracción:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{13}+\frac{1}{156}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$$

Finalmente, hagamos movimiento en $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{20}$:

$$1=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{21}+\frac{1}{420}+\frac{1}{13}+\frac{1}{156}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$$

Ahora ordenemos la suma de menor a mayor respecto al denominador:

$$1=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+\frac{1}{56}+\frac{1}{156}+\frac{1}{420}+\frac{1}{1806}$$

Obtuvimos una manera de escribir 1 con las condiciones del problema. Existen una infinidad ya que siempre vas a poder hacer un movimiento en el último sumando y eso generará otra forma de realizar lo que pide el problema con un elemento más y con un a_n mayor.

$\therefore$ Queda demostrado que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma: $\frac{1}{5}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ donde $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

■