XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2016 - Problema 1
Determine todos los números primos p, q, r, k tales que

$$pq + qr + rp = 12k + 1$$

Solución.
Por la expresión del problema se puede observar que si se tienen 3 primos p, q, r que cumplen con el problema, cualquier permutación de estos tres números también cumple. Además, se sabe que todos los números primos son impares excepto el 2.
Si p, q, r son impares, sean $p = 2a + 1, q = 2b + 1, r = 2c + 1$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $pq + qr + rp = (2a+1)(2b+1)+(2b+1)(2c+1)+(2c+1)(2a+1) = 4(ab+bc+ca+a+b+c)+3 = 12k+1$, pero $12k+1 = 4(3k)+1$!! ya que $pq + qr + rp \equiv 3 \bmod 4$ y $12k + 1 \equiv 1 \bmod 4 \Rightarrow$ Al menos un primo de p, q, r es par, es decir, es igual a 2.
Sin pérdida de generalidad, sea $p = 2$ y se tiene que $2q + qr + 2r = 12k + 1$.
Si q, r son diferentes a 3, es decir, son de la forma $3m + 1$ o $3m + 2$ con $m, n, t \in \mathbb{Z}$:
★ Si $q = 3n + 1$ y $r = 3t + 1 \Rightarrow pq + qr + rp \equiv (2)(1) + (1)(1) + (1)(2) \equiv 5 \equiv 2 \equiv 12k + 1 \equiv 1 \bmod 3$!!.
★ Si $q = 3n + 2$ y $r = 3t + 2 \Rightarrow pq + qr + rp \equiv (2)(2) + (2)(2) + (2)(2) \equiv 12 \equiv 0 \equiv 12k + 1 \equiv 1 \bmod 3$!!.
★ Si $q = 3n + 2$ y $r = 3t + 1 \Rightarrow pq + qr + rp \equiv (2)(2) + (2)(1) + (1)(2) \equiv 8 \equiv 2 \equiv 12k + 1 \equiv 1 \bmod 3$!!.
$\Rightarrow$ Al menos un primo de q, r es 3. Sin pérdida de generalidad, sea $q = 3$ y se tiene que $6 + 3r + 2r = 5r + 6 = 5(r + 1) + 1 = 12k + 1 \Rightarrow 5(r + 1) = 12k$, por lo que $5|12k$ y como $5 \nmid 12 \Rightarrow 5|k$ y como k es primo obtenemos que $k = 5$ y se tiene que $5(r + 1) = 12(5) = 60$, por lo que $r + 1 = 12$ y entonces $r = 11$ el cual es primo.

$$\therefore \text{Las soluciones } (p, q, r, k) \text{ son } (2, 3, 11, 5), (3, 2, 11, 5), (11, 3, 2, 5), (3, 11, 2, 5), (2, 11, 3, 5), (11, 2, 3, 5).$$

■