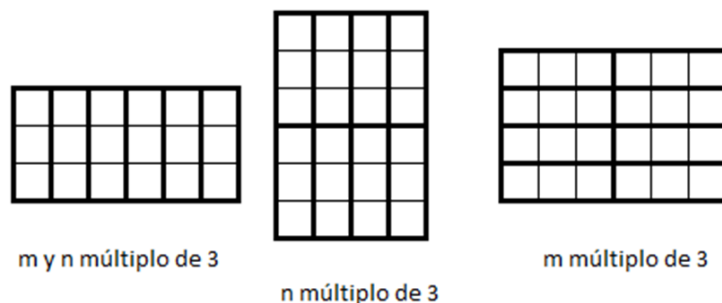


Selectivo Estatal de Baja California Sur 2017 - Etapa Final - Problema 4

Se tiene un tablero de $m \times n$ casillas y en cada casilla hay una lámpara que originalmente se encuentra apagada. En un movimiento se pueden elegir tres casillas consecutivas en una misma fila o en una misma columna y cambiar el estado de las lámparas en estas casillas, pasando de apagado a encendido y viceversa. ¿Para qué parejas de enteros positivos (m, n) se puede llegar a que todas las lámparas estén encendidas?

Solución.

Es fácil ver que cuando m o n es múltiplo de 3 se puede tener al final todas las lámparas encendidas, ya que se puede dividir el tablero en bloques de 3×1 ó 1×3 dependiendo si m o n es múltiplo de 3, por ejemplo:



Ahora veamos los casos en donde m y n no son múltiplos de 3 con la siguiente coloración:

1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	2	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...
1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	2	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...
...

Si a y b son los residuos que dejan m y n al dividirse entre 3, hay tres casos:

- ★ $a = b = 1$: El tablero tendrá la misma cantidad t de 2 y 3 y $t + 1$ unos.
- ★ $a = b = 2$: El tablero tendrá la misma cantidad t de 1 y 3 y $t + 1$ dos.
- ★ $a = 1$ y $b = 2$ o al revés: El tablero tendrá t tres y la misma cantidad $t + 1$ de unos y dos.

En cada movimiento se cambia el estado de una lámpara con 1, una con 2 y una con 3, por lo que después de x movimientos se hicieron x cambios en cada uno de los conjuntos de lámparas 1, 2 y 3 y como se quiere que al final queden todas las lámparas encendidas, se tiene que cumplir que en cada lámpara se realizó una cantidad impar de movimientos. Como una cantidad par de impares es par y una cantidad impar de impares es impar y x debe tener la misma paridad que la cantidad de movimientos en los focos con 1, 2 y 3, se obtiene que no es posible tener al final todas las lámparas encendidas porque en ningún caso tienen los tres la misma paridad inicialmente y ni al realizar una serie de movimientos.

∴. Queda demostrado que únicamente se puede llegar a todas las lámparas encendidas cuando m o n es un múltiplo de 3.