XXI Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2007 - Problema 3
Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $a+b+c=1$, muestra que

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq 2$$

Solución.
Por la desigualdad $MA-MG$ y por ser $a+b+c=1$:

$$a=1-b-c \Rightarrow a+bc=1-b-c+bc=(1-b)(1-c)$$

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{(1-b)(1-c)} \leq \frac{(1-b)+(1-c)}{2}=\frac{2-b-c}{2}$$

$$b=1-c-a \Rightarrow b+ca=1-c-a+ca=(1-c)(1-a)$$

$$\sqrt{b+ca}=\sqrt{(1-c)(1-a)} \leq \frac{(1-c)+(1-a)}{2}=\frac{2-c-a}{2}$$

$$c=1-a-b \Rightarrow c+ab=1-a-b+ab=(1-a)(1-b)$$

$$\sqrt{c+ab}=\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq \frac{(1-a)+(1-b)}{2}=\frac{2-a-b}{2}$$

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq \frac{2-b-c}{2}+\frac{2-c-a}{2}+\frac{2-a-b}{2}=\frac{6-2(a+b+c)}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq \frac{6-2(1)}{2}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$\therefore$ Queda demostrado que $\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq 2$ con $a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$ y $a+b+c=1$.

$\blacksquare$