I Olimpiada Mexicana de Matemáticas 1987 - Problema 6
Demuestre que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.

Solución.
Se sabe que $3804=(2^2)(3)(317)$, por lo que hay que demostrar que $2^2=4$, 3 y 317 son divisores de $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$.
Se tiene que $n^3-n=(n-1)(n)(n+1)$ en donde se sabe que en tres números consecutivos hay un múltiplo de 3 y al menos un múltiplo de 2, entonces $(2)(3)|(n^3-n)$. Además conociendo que la suma de dos números impares es un número par y al elevar un número impar a cualquier potencia da un número impar, se sigue que $2|(5^{8n+4}+3^{4n+2})$, por lo que $(2^2)(3)|(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$, es decir, el $2^2=4$ y el 3 son divisores de $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$.
Por otra parte

$$5^4 \equiv 625 \equiv 2(317)-9 \equiv 0-9 \equiv -9 \equiv -(3^2) \bmod 317$$

$$(5^4)^{2n} \equiv -[(3^2)^{2n}] \bmod 317$$

$$5^{8n} \equiv -(3^{4n}) \bmod 317$$

$$5^{8n}+5^4 \equiv -(3^{4n})-9 \equiv -(3^{4n}+3^2) \bmod 317$$

$$5^{8n+4} \equiv -(3^{4n+2}) \bmod 317$$

$$5^{8n+4}+3^{4n+2} \equiv 0 \bmod 317$$

$$317|(5^{8n+4}+3^{4n+2}) \Rightarrow 317|(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$$

Esto quiere decir que 317 es divisor de $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$, por lo que $(2^2)(3)(317)=3804|(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$

$\therefore$ Queda demostrado que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.

$\blacksquare$