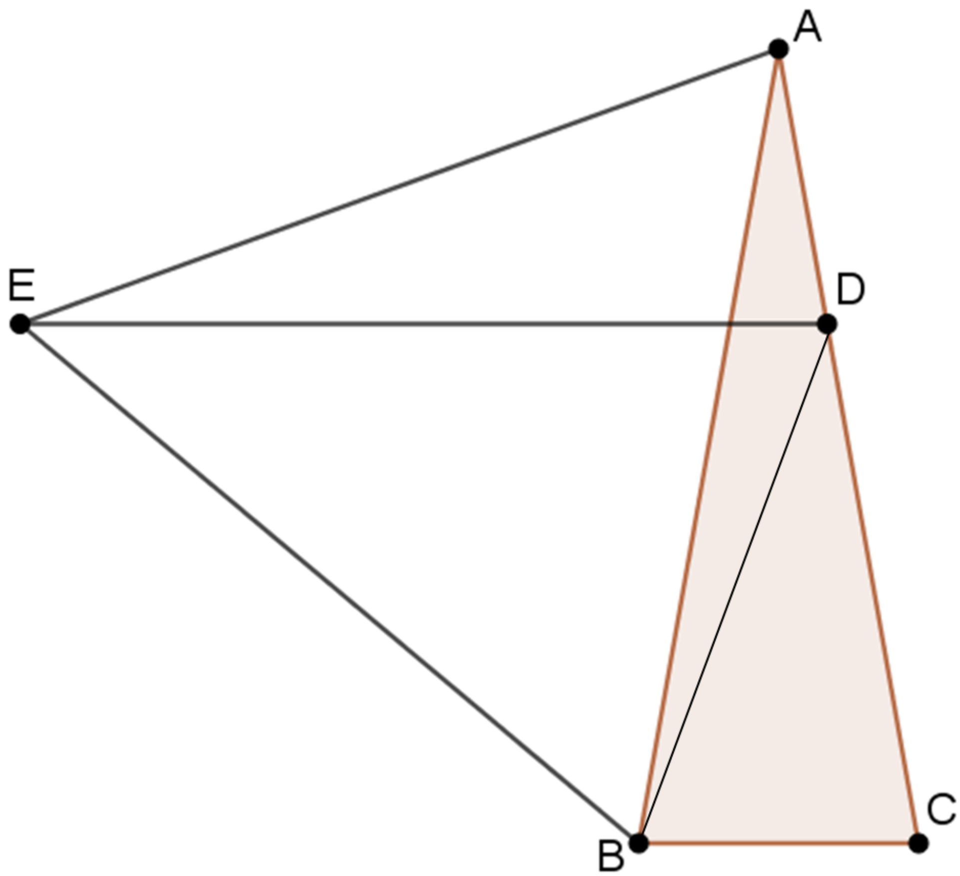
I Olimpiada Femenil de Matemáticas, CARMA 2015 - Etapa Final - Problema 3
Sea el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$ y el $\angle BAC = 20°$. Se toma un punto D sobre AC tal que $AD = BC$. ¿Cuánto mide el $\angle BDC$?

Solución.



Sea E un punto en la paralela a BC que pasa por D tal que $ED = AB$ y ED cruza a AB. Como $ED = AB$, $\angle ADE = \angle ACB = \angle CBA = \frac{180° - \angle BAC}{2} = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$ por ser correspondientes entre las paralelas BC y ED y ser el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$ (lo que hace que el $\angle BAC = 20°$ sea el ángulo desigual), respectivamente y $AD = BC$ se tiene por el criterio de congruencia LAL que $\triangle ABC \cong \triangle EDA$, por lo que el $\angle EAD = 80°$ y $EA = AB$ obteniendo que $\angle EAB = \angle EAD - \angle BAC = 80° - 20° = 60°$ y el $\triangle EAB$ es isósceles con $\angle ABE = \angle BEA = \frac{180° - \angle EAB}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$, concluyendo que el $\triangle EAB$ es equilátero y $EA = AB = BE = ED$.
Como el $\angle BEA = 60°$, $\angle DEA = 20°$ y $ED = BE$ se tiene que $\angle BED = \angle BEA - \angle DEA = 60° - 20° = 40°$ y el $\triangle BED$ es isósceles con $\angle EDB = \angle DBE = \frac{180° - \angle BED}{2} = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$. Finalmente se sabe que $\angle ADC = 180° = \angle ADE + \angle EDB + \angle BDC = 80° + 70° + \angle BDC$ por ser D un punto de AC, obteniendo que $\angle BDC = 180° - 80° - 70° = 30°$

$\therefore$ Queda demostrado que el $\angle BDC = 30°$.

■