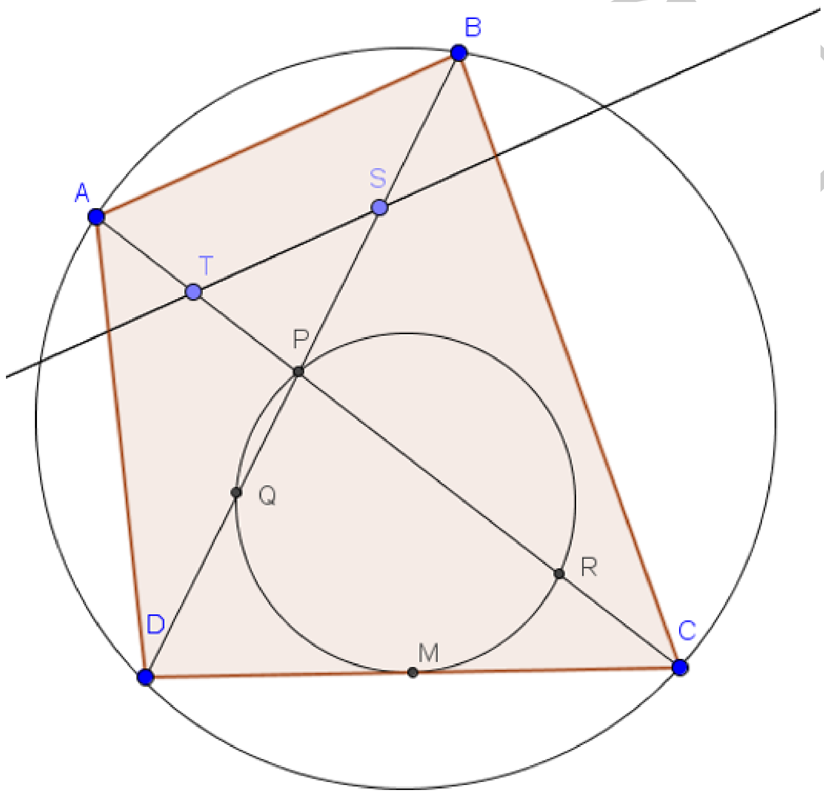
XV Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2001 - Problema 3

En el cuadrilátero $ABCD$, inscrito en una circunferencia, llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Pruebe que $AT = RC$.

Solución.



Por potencia de P se tiene que $(AP)(PC) = (BP)(PD)$.
Por potencia de M y como $CM = MD$ por ser M punto medio de CD tenemos que:

$$MD^2 = (DQ)(PD)$$

$$CM^2 = MD^2 = (RC)(PC)$$

$$\Rightarrow (RC)(PC) = (DQ)(PD)$$

Por el Teorema de Thales en las paralelas AB y TS, por ser $BS = DQ$ y por lo anterior obtenemos que:

$$\frac{AT}{AP} = \frac{BS}{BP} = \frac{DQ}{BP} = \frac{(DQ)(PD)}{(BP)(PD)} = \frac{(RC)(PC)}{(AP)(PC)} = \frac{RC}{AP}$$

$$\Rightarrow \frac{AT}{AP} = \frac{RC}{AP} \Rightarrow AT = RC$$

$\therefore$ Queda demostrado que $AT = RC$.

■