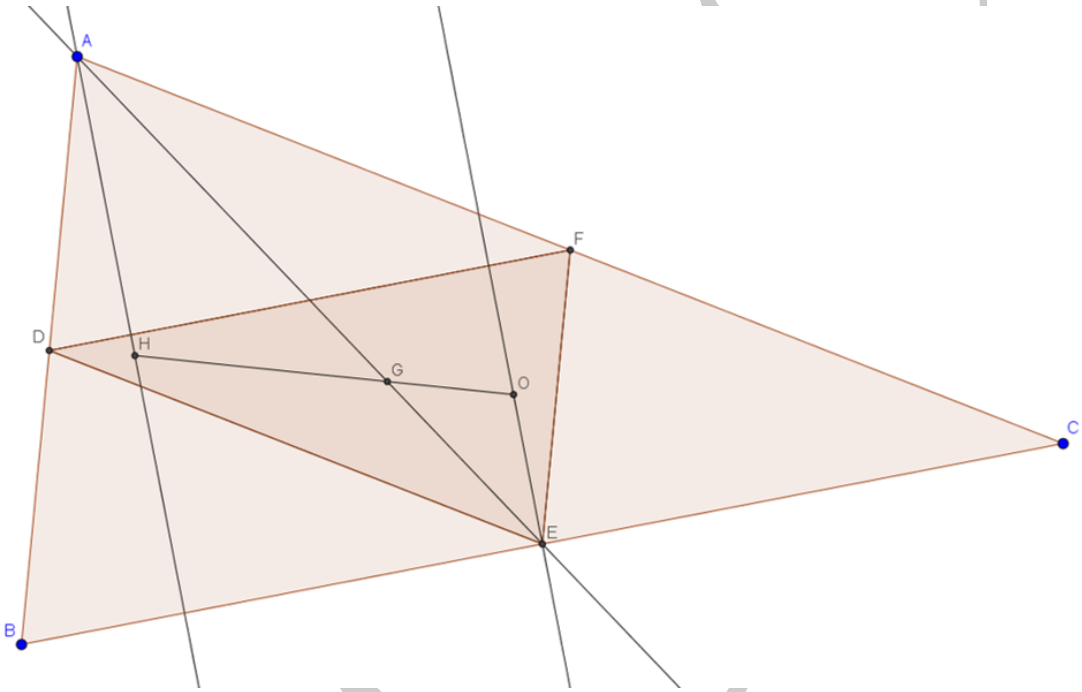
Recta de Euler

La recta de Euler de un triángulo es aquella recta en la que están situados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo. Euler demostró que en cualquier triángulo el ortocentro, el circuncentro y el baricentro están alineados.

En los triángulos equiláteros, estos cuatro puntos coinciden, pero en cualquier otro triángulo no lo hacen, y la recta de Euler está determinado por dos cualesquiera de ellos.

Demostración.



Sea $\triangle ABC$ cualquiera y sean H, G, O su ortocentro, su baricentro y su circuncentro, respectivamente. Sean D, E, F los puntos medios de los lados AB, BC, CA, respectivamente.

Como la recta AH es altura y la recta EO es mediatriz del $\triangle ABC \Rightarrow BC \perp EO$ y $BC \perp AH \Rightarrow EO \| AH$, por lo que con la recta AE se cumple que $\angle AEO = \angle EAH$ por ser alternos internos ...(1).

Como AE es una mediana en el $\triangle ABC \Rightarrow AG = 2GE$ ...(2).

El $\triangle EFD$ es el triángulo medial del $\triangle ABC$, por lo que sus longitudes se encuentran en razón $1:2$. Como cada mediatriz del $\triangle ABC$ es una altura del $\triangle EFD \Rightarrow O$ es el ortocentro del $\triangle EFD$, por lo que, entre los triángulos, EO es la longitud correspondiente a $AH \Rightarrow AH = 2EO$ ...(3). Con un razonamiento análogo se demuestra que $BH = 2FO$ y $CH = 2DO$.

Por el criterio de semejanza LAL (Por $(2), (1)$ y (3)) se tiene que $\triangle EOG \sim \triangle AHG$, por lo que $\angle OGE = \angle HGA$ y por consecuencia, H, G, O son colineales.

$\therefore$ Queda demostrado que el ortocentro, circuncentro y baricentro de un triángulo son colineales.

$\blacksquare$