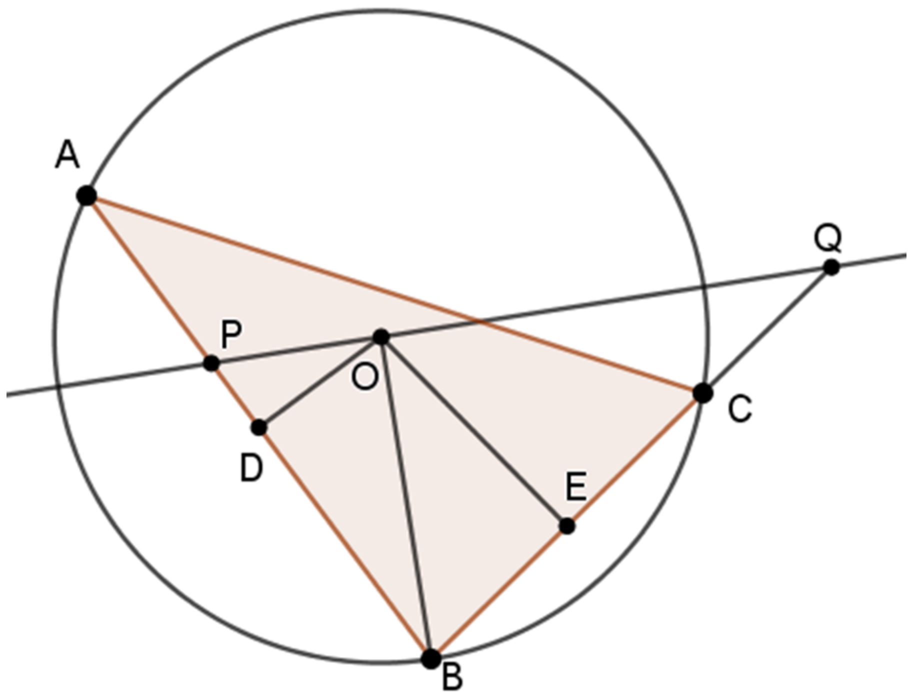
XXIX Concurso Estatal de Veracruz 2015 - Problema B

El circuncírculo de un triángulo acutángulo ABC tiene centro O. La línea que pasa a través del punto O perpendicular a OB interseca a AB y BC en P y Q, respectivamente. Si $AB = 5$, $BC = 4$, $BQ = \frac{9}{2}$ y $BP = \frac{m}{n}$, donde m y n son enteros primos relativos, encontrar $m + n$.

Solución.



Sean D y E los pies de las mediatrices de AB y BC, respectivamente, las cuales se intersecan en O por ser el circuncentro del $\triangle ABC$.

Por compartir el $\angle EBO$ y por ser $\angle OEB = \angle BOQ = 90°$ se tiene que $\triangle OBE \sim \triangle QBO$ usando el criterio de semejanza AA y obtenemos que:

$$\frac{OB}{QB} = \frac{OB}{\frac{9}{2}} = \frac{BE}{BO} = \frac{2}{BO}$$

$$OB^2 = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9$$

$$\Rightarrow OB = 3$$

Por compartir el $\angle OBD$ y por ser $\angle BDO = \angle POB = 90°$ se tiene que $\triangle OBD \sim \triangle PBO$ usando el criterio de semejanza AA y obtenemos que:

$$\frac{OB}{PB} = \frac{3}{PB} = \frac{BD}{BO} = \frac{\frac{5}{2}}{3}$$

$$PB = \frac{(3)(3)}{\frac{5}{2}} = \frac{18}{5} = \frac{m}{n}, \text{ donde 18 y 5 son primos relativos.}$$

$$\Rightarrow m + n = 18 + 5 = 23$$

$\therefore$ Queda demostrado que $m + n = 23$.

■