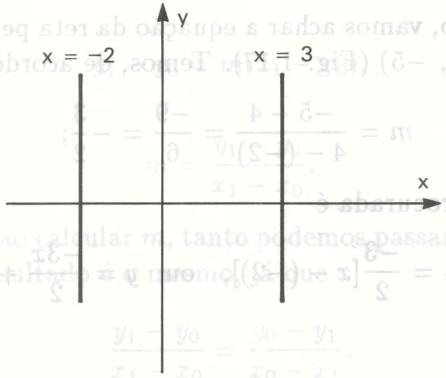

Fig. 1.19

Exercícios

Nos Exercs. 1 a 10, construa os gráficos das retas de equações dadas, locando, em cada caso, as interseções dessas retas com os eixos das coordenadas.

1. $y = x + 2$.
2. $y = 2x - 1$.
3. $y = -x - 1$.
4. $y = -x + 1$.
5. $y = -x/2 - 2$.
6. $y = 2x/3 - 4$.
7. $y = 3x/2 + 1$.
8. $y = -3x/5$.
9. $y = -5x/3 + 2$.
10. $y = -3x/5 - 3/2$.

Nos Exercs. 11 a 20, determine as equações das retas que passam pelos pontos dados e faça os respectivos gráficos.

11. $(0, 0)$ e $(1, 2)$.
12. $(1, 1)$ e $(2, 3)$.
13. $(-1, 2)$ e $(2, -1)$.
14. $(1/2, -3)$ e $(-4, 2)$.
15. $(3, 5/2)$ e $(3, 1)$.
16. $(-2, 1)$ e $(3, 1)$.
17. $(2, 1)$ e $(2, -2)$.
18. $(3/2, 1/3)$ e $(-7/8, 1/3)$.
19. $(-5/3, 2)$ e $(-5/3, 5)$.
20. $(5, -1)$ e $(-2, -3)$.

Respostas e soluções

Nos Exercs. 1 a 10, os gráficos são as retas pelos pontos dados em cada caso.

1. $(-2, 0)$ e $(0, 2)$.
2. $(1/2, 0)$ e $(0, -1)$.
3. $(-1, 0)$ e $(0, -1)$.
4. $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
5. $(-4, 0)$ e $(0, -2)$.
6. $(6, 0)$ e $(0, -4)$.
7. $(-2/3, 0)$ e $(0, 1)$.
8. $(0, 0)$ e $(5, -3)$.
9. $(6/5, 0)$ e $(0, 2)$.
10. $(-5/2, 0)$ e $(0, -3/2)$.
11. $y = 2x$.
12. $y = 2x - 1$.
13. $\dfrac{y-2}{x-(-1)} = \dfrac{-1-2}{2-(-1)} \quad \therefore \; y = -x + 1$.
14. $\dfrac{y-2}{x-(-4)} = \dfrac{2-(-3)}{-4-1/2} \quad \therefore \; y = -\dfrac{10x}{9} - \dfrac{22}{9}$.
15. Reta paralela a Oy, de equação $x = 3$.
16. Reta paralela a Ox, de equação $y = 1$.
17. $x = 2$.
18. $y = \dfrac{1}{3}$.
19. $x = -\dfrac{5}{3}$.
20. $\dfrac{y-(-3)}{x-(-2)} = \dfrac{-3-(-1)}{-2-5} \quad \therefore \; 2x - 7y - 17 = 0 \quad \therefore \; y = \dfrac{2x}{7} - \dfrac{17}{7}$.

Primeiras idéias sobre funções

O conceito de função surge, de maneira natural e espontânea, toda vez que consideramos duas grandezas que estejam relacionadas entre si de maneira que a cada valor de uma delas corresponde um onde D é o domínio da função f considerada. A representação de todos esses pares $(x, f(x))$ num plano cartesiano permite uma visualização do gráfico por meio de uma figura geométrica que é, em geral, uma curva. Essa curva é o *gráfico* da equação $y = f(x)$, que é chamada a *equação* da curva.

Podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir funções de maneira óbvia, desde que seus domínios sejam convenientemente restritos a um domínio comum. Por exemplo, $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{1-x}$ têm domínios $x \geq 0$ e $x \leq 1$, respectivamente; logo, o produto,

$$y = \sqrt{x}\sqrt{1-x} = \sqrt{x(1-x)},$$

tem por domínio o intervalo fechado $[0, 1]$.

A representação de funções por gráficos no plano é um recurso visual muito valioso em seu estudo. Nas seções seguintes veremos exemplos importantes de funções, cujos gráficos são retas ou outros tipos de curvas.

Exercícios

Determine o domínio de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 12.

1. $y = \sqrt{x+3}$.
2. $y = \sqrt{5-x}$.
3. $y = \sqrt{2x-1}$.
4. $y = \sqrt{4-3x}$.
5. $y = \sqrt{x(x+1)}$.
6. $y = \sqrt{x(5-x)}$.
7. $y = \sqrt{x(3-2x)}$.
8. $y = \dfrac{1}{x-2}$.
9. $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.
10. $y = \dfrac{x}{2x-5}$.
11. $y = \dfrac{x^2+1}{3x+2}$.
12. $y = \dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$.

Nos Exercs. 13 a 15, calcule os valores das funções dadas nos valores indicados de seu argumento.

13. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ em $x = 0,\ 1,\ -1,\ 3/2,\ -3/2,\ 1+h,\ -2+h$.

14. $f(x) = \sqrt{2-3x}$ em $x = 0,\ 2/3,\ -1,\ 1/3,\ -7/3,\ -1+h$.

15. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ em $x = 0,\ 1,\ 2,\ 1/2,\ -2,\ -1/2,\ 2/3,\ -2/3,\ 1+h,\ -2+h$. Calcule $f(x+2)$.

16. Dada a função $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, calcule
$$f(\frac{1}{1+x}),\ f(\frac{1}{1-x}),\ f(-x),\ f(\frac{1}{x}).$$
Mostre que $f(1/x) = -f(x)$ e $f(f(x)) = -1/x$.

17. Define-se *valor absoluto* de um número x, indicado com o símbolo $|x|$, como sendo o próprio x se $x \geq 0$; e $-x$ se $x < 0$. Assim,
$$|5| = 5, \quad |-3| = -(-3) = 3.$$
Mostre que a função definida por $f(x) = |x|/x$ é igual a 1 se $x > 0$ e igual a -1 se $x < 0$. Faça seu gráfico.

18. Dada a função $f(x) = |x| - 2x$, calcule $f(-1)$ e $f(-3/2)$. Mostre que $f(|a|) = -|a|$.

Respostas

1. $x \geq -3$.
2. $x \leq 5$.
3. $x \geq 1/2$.
4. $x \leq 4/3$.
5. $x \geq 0$ e $x \leq -1$.
6. $0 \leq x \leq 5$.
7. $0 \leq x \leq 3/2$.
8. $x \neq 2$.
9. $x \neq -3$.
10. $x \neq 5/2$.
11. $x \neq -2/3$.
12. $x \neq 1,\ 2$.
13. $f(0) = 1,\quad f(1) = 3,\quad f(-1) = -3,\quad f(3/2) = 13/4,$
$$f(-3/2) = -23/4,$$
$$f(1+h) = -(1+h)^2 + 3(1+h) + 1$$
$$= -(1+2h+h^2) + 3 + 3h + 1 = -h^2 + h + 3,$$
$$f(-2+h) = -(-2+h)^2 + 3(-2+h) + 1$$

onde D é o domínio da função f considerada. A representação de todos esses pares $(x, f(x))$ num plano cartesiano permite uma visualização do gráfico por meio de uma figura geométrica que é, em geral, uma curva. Essa curva é o *gráfico* da equação $y = f(x)$, que é chamada a *equação* da curva.

Podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir funções de maneira óbvia, desde que seus domínios sejam convenientemente restritos a um domínio comum. Por exemplo, $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{1-x}$ têm domínios $x \geq 0$ e $x \leq 1$, respectivamente; logo, o produto,

$$y = \sqrt{x}\sqrt{1-x} = \sqrt{x(1-x)},$$

tem por domínio o intervalo fechado $[0, 1]$.

A representação de funções por gráficos no plano é um recurso visual muito valioso em seu estudo. Nas seções seguintes veremos exemplos importantes de funções, cujos gráficos são retas ou outros tipos de curvas.

Exercícios

Determine o domínio de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 12.

1. $y = \sqrt{x+3}$. 2. $y = \sqrt{5-x}$. 3. $y = \sqrt{2x-1}$.

4. $y = \sqrt{4-3x}$. 5. $y = \sqrt{x(x+1)}$. 6. $y = \sqrt{x(5-x)}$.

7. $y = \sqrt{x(3-2x)}$. 8. $y = \dfrac{1}{x-2}$. 9. $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

10. $y = \dfrac{x}{2x-5}$. 11. $y = \dfrac{x^2+1}{3x+2}$. 12. $y = \dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$.

Nos Exercs. 13 a 15, calcule os valores das funções dadas nos valores indicados de seu argumento.

13. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ em $x = 0,\ 1,\ -1,\ 3/2,\ -3/2,\ 1+h,\ -2+h$.

14. $f(x) = \sqrt{2-3x}$ em $x = 0,\ 2/3,\ -1,\ 1/3,\ -7/3,\ -1+h$.

15. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ em $x = 0,\ 1,\ 2,\ 1/2,\ -2,\ -1/2,\ 2/3,\ -2/3,\ 1+h,\ -2+h$. Calcule $f(x+2)$.

16. Dada a função $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, calcule

$$f(\frac{1}{1+x}),\ f(\frac{1}{1-x}),\ f(-x),\ f(\frac{1}{x}).$$

Mostre que $f(1/x) = -f(x)$ e $f(f(x)) = -1/x$.

17. Define-se *valor absoluto* de um número x, indicado com o símbolo $|x|$, como sendo o próprio x se $x \geq 0$; e $-x$ se $x < 0$. Assim,

$$|5| = 5, \quad |-3| = -(-3) = 3.$$

Mostre que a função definida por $f(x) = |x|/x$ é igual a 1 se $x > 0$ e igual a -1 se $x < 0$. Faça seu gráfico.

18. Dada a função $f(x) = |x| - 2x$, calcule $f(-1)$ *e* $f(-3/2)$. Mostre que $f(|a|) = -|a|$.

Respostas

1. $x \geq -3$. 2. $x \leq 5$. 3. $x \geq 1/2$.

4. $x \leq 4/3$. 5. $x \geq 0$ e $x \leq -1$. 6. $0 \leq x \leq 5$.

7. $0 \leq x \leq 3/2$. 8. $x \neq 2$. 9. $x \neq -3$.

10. $x \neq 5/2$. 11. $x \neq -2/3$. 12. $x \neq 1, 2$.

13. $f(0) = 1,\quad f(1) = 3,\quad f(-1) = -3,\quad f(3/2) = 13/4,$

$$f(-3/2) = -23/4,$$

$$f(1+h) = -(1+h)^2 + 3(1+h) + 1$$
$$= -(1 + 2h + h^2) + 3 + 3h + 1 = -h^2 + h + 3,$$
$$f(-2+h) = -(-2+h)^2 + 3(-2+h) + 1$$

$$= -(4-4h+h^2) - 6 + 3h + 1 = -h^2 + 7h - 9.$$

14. $f(0) = \sqrt{2}$, $f(2/3) = 0$, $f(-1) = \sqrt{5}$, $f(1/3) = 1$,

$$f(-7/3) = 3, \quad f(-1+h) = \sqrt{5-3h}.$$

15. $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1/3$, $f(1/2) = -1/3$, $f(-2) = 3$,

$$f(-1/2) = -3, \quad f(2/3) = -1/5, \quad f(-2/3) = -5,$$

$$f(1+h) = \frac{h}{2+h}, \quad f(-2+h) = \frac{h-3}{h-1}, \quad f(x+2) = \frac{x+1}{x+3}.$$

16. $f(\frac{1}{1+x}) = (1 + \frac{1}{1+x})(1 - \frac{1}{1+x})^{-1} = \frac{2+x}{x} = 1 + \frac{2}{x},$

$$f(\frac{1}{1-x}) = 1 - \frac{2}{x},$$

$$f(-x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{f(x)}, \quad f(\frac{1}{x}) = \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{x+1}{x-1} = -f(x),$$

$$f(f(x)) = (1 + \frac{1+x}{1-x})(1 - \frac{1+x}{1-x})^{-1} = \frac{2}{1-x}(\frac{-2x}{1-x})^{-1}$$

$$= \frac{2}{1-x} \times \frac{1-x}{-2x} = \frac{-1}{x}.$$

17. Se $x > 0$, $f(x) = |x|/x = x/x = 1$;
e se $x < 0$, $f(x) = |x|/x = -x/x = -1$.

18. $f(-1) = |-1| - 2(-1) = 1 + 2 = 3$,

$$f(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, \quad f(|a|) = |a| - 2|a| = -|a|.$$

Função linear e função afim

Chama-se *função afim* à função dada pela equação

$$\boxed{y = mx + n,}$$

onde m e n são constantes, $n \neq 0$. No caso em que $n = 0$ essa equação se reduz a $y = mx$ e define a chamada *função linear*.

Como tivemos oportunidade de ver, o gráfico desses dois tipos de funções são retas, que passam pela origem se $n = 0$.

Embora haja razão para distinguir "função afim" de "função linear", os matemáticos profissionais costumam usar a mesma designação de "função linear" em ambos os casos; um abuso de linguagem, por assim dizer, justificado pelo fato de que, tanto num caso como no outro, o gráfico dessas funções é sempre uma reta; e é freqüente e cômodo falar em "aproximação linear" àquela que é dada por uma função afim que aproxima uma curva num certo ponto. Seguiremos esse costume já consagrado entre os matemáticos profissionais.

A função quadrática e a parábola

Chama-se *função quadrática* aquela que é dada por um trinômio do 2º grau, isto é, $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$.

Vamos começar com a função quadrática mais simples, dada pela equação

$$y = f(x) = x^2,$$

que está definida para todo número real x. Vamos calcular os valores dessa função para diferentes valores de x:

$$f(0) = 0^2 = 0, \quad f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4,$$

$$f(1) = 1^2 = 1, \quad f(3/2) = (3/2)^2 = 9/4,$$

$$f(2) = 2^2 = 4, \quad f(5/2) = (5/2)^2 = 25/4.$$

Notemos também que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Isso facilita o cálculo de valores da função para valores negativos de x. Observe:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1),$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2) \text{ etc.}$$

$$= -(4 - 4h + h^2) - 6 + 3h + 1 = -h^2 + 7h - 9.$$

14. $f(0) = \sqrt{2}$, $f(2/3) = 0$, $f(-1) = \sqrt{5}$, $f(1/3) = 1$,

$$f(-7/3) = 3, \quad f(-1+h) = \sqrt{5 - 3h}.$$

15. $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1/3$, $f(1/2) = -1/3$, $f(-2) = 3$,

$$f(-1/2) = -3, \quad f(2/3) = -1/5, \quad f(-2/3) = -5,$$

$$f(1+h) = \frac{h}{2+h}, \quad f(-2+h) = \frac{h-3}{h-1}, \quad f(x+2) = \frac{x+1}{x+3}.$$

16. $f(\frac{1}{1+x}) = (1 + \frac{1}{1+x})(1 - \frac{1}{1+x})^{-1} = \frac{2+x}{x} = 1 + \frac{2}{x}$,

$$f(\frac{1}{1-x}) = 1 - \frac{2}{x},$$

$$f(-x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{f(x)}, \quad f(\frac{1}{x}) = \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{x+1}{x-1} = -f(x),$$

$$f(f(x)) = (1 + \frac{1+x}{1-x})(1 - \frac{1+x}{1-x})^{-1} = \frac{2}{1-x}(\frac{-2x}{1-x})^{-1}$$

$$= \frac{2}{1-x} \times \frac{1-x}{-2x} = \frac{-1}{x}.$$

17. Se $x > 0$, $f(x) = |x|/x = x/x = 1$;
e se $x < 0$, $f(x) = |x|/x = -x/x = -1$.

18. $f(-1) = |-1| - 2(-1) = 1 + 2 = 3$,

$$f(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, \quad f(|a|) = |a| - 2|a| = -|a|.$$

Função linear e função afim

Chama-se *função afim* à função dada pela equação

$$\boxed{y = mx + n,}$$

onde m e n são constantes, $n \neq 0$. No caso em que $n = 0$ essa equação se reduz a $y = mx$ e define a chamada *função linear*.

Como tivemos oportunidade de ver, o gráfico desses dois tipos de funções são retas, que passam pela origem se $n = 0$.

Embora haja razão para distinguir "função afim" de "função linear", os matemáticos profissionais costumam usar a mesma designação de "função linear" em ambos os casos; um abuso de linguagem, por assim dizer, justificado pelo fato de que, tanto num caso como no outro, o gráfico dessas funções é sempre uma reta; e é freqüente e cômodo falar em "aproximação linear" àquela que é dada por uma função afim que aproxima uma curva num certo ponto. Seguiremos esse costume já consagrado entre os matemáticos profissionais.

A função quadrática e a parábola

Chama-se *função quadrática* aquela que é dada por um trinômio do 2º grau, isto é, $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$.

Vamos começar com a função quadrática mais simples, dada pela equação

$$y = f(x) = x^2,$$

que está definida para todo número real x. Vamos calcular os valores dessa função para diferentes valores de x:

$$f(0) = 0^2 = 0, \quad f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4,$$

$$f(1) = 1^2 = 1, \quad f(3/2) = (3/2)^2 = 9/4,$$

$$f(2) = 2^2 = 4, \quad f(5/2) = (5/2)^2 = 25/4.$$

Notemos também que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Isso facilita o cálculo de valores da função para valores negativos de x. Observe:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1),$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2) \text{ etc.}$$

relativamente à reta $y = x$, como revela um argumento geométrico elementar. Isso mostra que os gráficos das duas funções consideradas são obtidos um do outro por reflexão na reta $y = x$ (Fig. 1.35).

As funções consideradas, $y = \sqrt{x}$ e $x = y^2$, $y \geq 0$, são cada uma a *inversa* da outra. No próximo capítulo (pág. 80 e seguintes), estudaremos a noção de função inversa mais detidamente.

Exercícios

1. Dada a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$, calcule $f(-2/3)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $f(a-1)$, $f(1-a)$, $f(2+h)$, $f(a+h)$.
2. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostre que $f(1/a) = f(a)/a^2$.

Faça os gráficos das funções dadas nos Exercs. 3 a 28. Observe que os gráficos de funções do tipo $y = ax^2 + bx$ passam pela origem.

3. $y = (x-2)^2$.
4. $y = (x+3)^2$.
5. $y = -x^2 + 4/7$.
6. $y = -5x^2/3 + 3$.
7. $y = -x^2/5 - 2$.
8. $y = x(x-2)$.
9. $y = x(x+2)$.
10. $y = x^2 - 3x + 2$.
11. $y = x^2 + 3x + 2$.
12. $y = 2x(x/3 - 1)$.
13. $y = x(4 - 3x)/2$.
14. $y = x^2 + 8x + 14$.
15. $y = -x^2 + 4x - 1$.
16. $y = -2x^2/3 + 4x - 6$.
17. $y = -\sqrt{x}$.
18. $y = 2\sqrt{x}$.
19. $y = -\sqrt{x}/2$.
20. $y = \sqrt{x-2}$.
21. $y = \sqrt{x+1}$.
22. $y = 2 + \sqrt{x}$.
23. $y = -1 + \sqrt{x}$.
24. $y = 3 + \sqrt{x-2}$.
25. $y = \sqrt{-x}$.
26. $y = -\sqrt{-x}$.
27. $y = -\sqrt{2-x}$.
28. $y = -\sqrt{-x-3}$.

29. Dada uma função qualquer f, definida em toda a reta [ou num intervalo $(-a, a)$], mostre que a função $g(x) = f(x) + f(-x)$ é par.

Respostas, sugestões e soluções

1. $f(-2/3) = (-2/3)^2 - 3(-2/3) + 1 = 4/9 + 2 + 1 = 31/9$;

$f(a) = a^2 - 3a + 1$; $f(-a) = a^2 + 3a + 1$;

$f(a+1) = (a+1)^2 - 3(a+1) + 1 = a^2 - a - 1$;

$f(a-1) = (a-1)^2 - 3(a-1) + 1 = a^2 - 5a + 5$;

$f(1-a) = (1-a)^2 - 3(1-a) + 1 = a^2 + a - 1$;

$f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) + 1 = h^2 + h - 1$;

$f(a+h) = (a+h)^2 - 3(a+h) + 1 = a^2 - 3a + 1 + (2a-3)h + h^2$.

2. $f(1/a) = (1/a)^2 + 1 = (1 + a^2)/a^2 = f(a)/a^2$.
3. Gráfico de $y = x^2$, transladado duas unidades para a direita.
4. Gráfico de $y = x^2$, transladado três unidades para a esquerda.
5. Gráfico de $y = -x^2$, transladado de 4/7 para cima.
6. Gráfico de $y = -5x^2/3$, transladado três unidades para cima.
7. Gráfico de $y = -x^2/5$, transladado duas unidades para baixo.
8. $y = (x-1)^2 - 1$. Gráfico de $y = x^2$, transladado uma unidade para a direita e uma para baixo.
9. $y = (x+1)^2 - 1$. Gráfico de $y = x^2$, transladado uma unidade para a esquerda e uma para baixo.
10. $y = (x - 3/2)^2 - 1/4$. Gráfico de $y = x^2$, transladado de 3/2 para a direita e de 1/4 para cima baixo.
11. $y = (x + 3/2)^2 - 1/4$. Gráfico de $y = x^2$, transladado de 3/2 para a esquerda e de 1/4 para baixo.

12. $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{2}{3}(x^2 - 3x)$

$$= \frac{2}{3}\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{2}{3}\frac{9}{4} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}.$$

Gráfico de $y = 2x^2/3$, transladado de $3/2$ para a direita e de $3/2$ para baixo.

13. $y = -\frac{3}{2}\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{2}{3}\right)$

$$= -\frac{3}{2}\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) + \frac{3}{2} \times \frac{4}{9} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$

Gráfico de $y = -3x^2/2$, transladado de $2/3$ para a direita e de $2/3$ para cima.

14. $y(x+4)^2 - 2$. Gráfico de $y = x^2$, transladado quatro unidades para a esquerda e duas para baixo.

15. $y = -(x-2)^2 + 3$. Gráfico de $y = -x^2$, transladado duas unidades para a direita e três para cima.

16. $y = -2(x-3)^2/3$. Gráfico de $y = -2x^2/3$, transladado três unidades para a direita.

Como nos exercícios anteriores, nos Exercs. 17 a 28 o gráfico fica por conta do leitor.

17. $x \geq 0$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, refletido no eixo Ox.

18. $x \geq 0$; o gráfico é obtido do gráfico de $y = \sqrt{x}$, multiplicando cada ordenada por 2.

19. $x \geq 0$; o gráfico é obtido do gráfico do Exerc. 17, dividindo as ordenadas por 2.

20. $x \geq 2$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, transladado duas unidades para a direita ao longo do eixo Ox.

21. $x \geq -1$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, transladado uma unidade para a esquerda ao longo do eixo Ox.

22. $x \geq 0$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, transladado duas unidades para cima ao longo do eixo Oy.

23. $x \geq 0$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, transladado uma unidade para baixo ao longo do eixo Oy.

24. $x \geq 2$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, transladado duas unidades para a direita ao longo do eixo Ox e três unidades para cima ao longo do eixo Oy.

25. $x \leq 0$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, refletido no eixo Oy.

26. $x \leq 0$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{x}$, refletido na origem; ou seja, refletido duas vezes, uma no eixo Oy, outra no eixo Ox.

27. $x \leq 2$; o gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{-x}$, transladado duas unidades para a direita ao longo do eixo Ox, pois $y = \sqrt{2-x} = \sqrt{-(x-2)}$.

28. Observe: $y = \sqrt{-x-3} = \sqrt{-(x+3)}$. Isto exige $x + 3 \leq 0$; logo, o domínio é o semi-eixo $x \leq -3$. O gráfico é idêntico ao de $y = \sqrt{-x}$, transladado três unidades para a esquerda ao longo do eixo Ox.

29. Observe: $g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x)$.

A hipérbole

Vamos considerar agora a função dada por

$$\boxed{y = f(x) = \frac{1}{x},}$$

que está definida para todo $x \neq 0$. É fácil ver que

$$f(1/4) = 4, \quad f(1/2) = 2, \quad f(1) = 1, \quad f(3/2) = 2/3,$$

$$f(2) = 1/2, \quad f(3) = 1/3, \quad f(4) = 1/4 \text{ etc.}$$

Os pontos $(x, f(x))$ assim obtidos estão marcados na Fig. 1.36, dando uma idéia de um dos ramos do gráfico da função no 1º quadrante.

Observemos que à medida que x cresce, $y = f(x)$ decresce, podendo tornar-se tão pequeno quanto quisermos, bastando para isso fazer x suficientemente grande. Analogamente, $y = f(x)$ cresce à medida que x decresce por valores positivos, tornando-se tão grande gráfico de $y = 1/x$, como é fácil ver. Análogos a esse são os gráficos das funções $y = k/x$ com $k < 0$, como ilustra a Fig. 1.37b. Todas essas curvas são hipérboles.

Os gráficos de funções do tipo

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

como

$$y = \frac{x}{x-1}, \quad y = \frac{x-3}{x-5}, \quad y = \frac{-x+2}{2x-1},$$

podem sempre ser obtidos do gráfico de $y = 1/x$ por meio das transformações já indicadas (reflexões nos eixos, multiplicação e divisão das ordenadas por números) e de translações. O procedimento é análogo ao que já descrevemos na seção anterior sobre a parábola. Por exemplo,

$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

por onde se vê que o gráfico da função considerada é o mesmo de $y = 1/x$, transladado uma unidade para a direita e uma unidade para cima.

Exercícios

1. Dada a função $f(x) = 1/x$, mostre que $f(1+h) - f(1) = -h/(1+h)$. Calcule $f(a+h) - f(a)$.

2. Calcule a função $g(a+h) - g(a)$, onde $g(x) = (x+1)/x$. O resultado coincide com o último resultado do Exerc. 1. Explique por que isso acontece. Mostre que o mesmo é verdade se $g(x) = (kx+1)/x$, onde k é uma constante qualquer.

Construa os gráficos das funções dadas nos Exercs. 3 a 22.

3. $y = 1/(x-2)$.
4. $y = 2/(x+3)$.
5. $y = -3/(x+5)$.
6. $y = 2 + \dfrac{3}{x-1}$.

7. $y = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{3x+7}$.
8. $y = -2 - \dfrac{3}{2x-5}$.
9. $y = 2x/(x+3)$.
10. $y = -3x/(x-4)$.
11. $y = (1+3x)/2x$.
12. $y = (2-5x)/3x$.
13. $y = (2x+3)/(3x+2)$.
14. $y = (x-1)/(x+1)$.
15. $y = (2x+1)/(2-x)$.
16. $y = (x+3)/(2x-1)$.
17. $y = (2-x)/(x+2)$.
18. $y = 1/|x|$.
19. $y = -4/|x|$.
20. $y = 2/|x-1|$.
21. $y = \dfrac{1}{|x+3|} - 1$.
22. $y = 1/|x-a|$, onde $a > 0$.
23. Demostre que, se a função $y = (ax+b)/(cx+d)$ é constante, então $ad = bc$.
24. Dada uma função f qualquer, definida em toda a reta [ou num intervalo $(-a,\ a)$], mostre que a função $h(x) = f(x) - f(-x)$ é ímpar.
25. Demonstre que uma função f, definida em toda a reta [ou num intervalo $(-a,\ a)$], se decompõe, univocamente, na forma

$$f = g + h$$

onde g é função par e h é função ímpar.

Respostas, sugestões e soluções

1. $f(1+h) - f(1) = \dfrac{1}{(1+h)} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{1-(1+h)}{1+h} = \dfrac{-h}{1+h}$;

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}.$$

2. $g(a+h) - g(a) = \dfrac{a+h+1}{a+h} - \dfrac{a+1}{a}$

$$= \frac{a(a+h+1) - (a+1)(a+h)}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}.$$

Esse resultado coincide com o último resultado do exercício anterior porque

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + f(x),$$

onde $f(x) = 1/x$ é a função do exercício anterior. Conseqüentemente,

$$g(a+h) - g(a) = f(a+h) - f(a),$$

pois o termo aditivo 1 é eliminado na diferença $g(a+h) - g(a)$, como é fácil verificar.

No caso em que $g(x) = (kx+1)/x$, teremos ainda $g(x) = k + f(x)$, e sendo k constante, o mesmo acontecerá.

Nos Exercs. 3 a 22, como em todos os demais, a construção dos gráficos fica a cargo do leitor.

3. Gráfico de $y = 1/x$, transladado duas unidades para a direita.
4. Gráfico de $y = 2/x$, transladado três unidades para a esquerda.
5. Gráfico de $y = -3/x$, transladado cinco unidades para a esquerda.
6. Gráfico de $y = 3/x$, transladado uma unidade para a direita e duas unidades para cima.
7. $y = \frac{5}{2} - \frac{1}{3(x+7/3)}$. Gráfico de $y = -1/3x$, transladado de $7/3$ para a esquerda e de $5/2$ para cima.
8. $y = -2 - \frac{3}{2(x-5/2)}$. Gráfico de $y = -3/2x$, transladado de $5/2$ para a direita e duas unidades para baixo.
9. $y = \frac{2(x+3)-6}{x+3} = 2 - \frac{6}{x+3}$. Gráfico de $y = -6/x$, transladado três unidades para a esquerda e duas para cima.
10. $y = \frac{-3(x-4)-12}{x-4} = -3 - \frac{12}{x-4}$. Gráfico de $y = -12/x$, transladado quatro unidades para a direita e três para baixo.
11. $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}$. Gráfico de $y = 1/2x$, transladado de $3/2$ para cima.
12. $y = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3x}$. Gráfico de $y = 2/3x$, transladado de $5/3$ para baixo.

13. $y = \frac{2(3x+2)+5}{3(3x+2)} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3x+2)} = \frac{2}{3} + \frac{5}{9(x+2/3)}$. Gráfico de $y = 5/9x$, transladado de $2/3$ para a esquerda e para cima.
14. $y = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$. Gráfico de $y = -2/x$, transladado uma unidade para a esquerda e para cima.
15. $y = \frac{2x+1}{2-x} = \frac{2(x-2)+5}{2-x} = -2 - \frac{5}{x-2}$. Gráfico de $y = -5/x$, transladado duas unidades para a direita e para baixo.
16. $y = \frac{x+3}{2(x-1/2)} = \frac{(x-1/2)+7/2}{2(x-1/2)} = \frac{1}{2} + \frac{7}{4(x-1/2)}$. Gráfico de $y = 7/4x$, transladado de $1/2$ para a direita e para cima.
17. $y = \frac{2-x}{x+2} = \frac{-(x+2)+4}{x+2} = -1 + \frac{4}{x+2}$. Gráfico de $y = 4/x$, transladado duas unidades para a esquerda e uma para baixo.
18. $y = f(x) = \frac{1}{|x|}$. $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x > 0$ e $f(-x) = f(x)$. Gráfico de $y = 1/x$ se $x > 0$ e o refletido deste no eixo Oy.
19. Gráfico de $y = -4/x$ se $x > 0$ e o refletido deste no eixo Oy.
20. Gráfico de $y = 2/|x|$, transladado uma unidade para a direita.
21. Gráfico de $y = 1/|x|$, transladado três unidades para a esquerda e uma para baixo.
22. Gráfico de $y = 1/|x|$, transladado de a unidades para a direita.
23. Seja m o valor constante da função. Então,

$$ax + b = m(cx+d),$$

e isto equivale a

$$(a - mc)x + (b - md) = 0 \Leftrightarrow a = mc \quad \text{e} \quad b = md.$$

Daqui obtemos $ad = mcd$ e $bc = mcd$, donde, finalmente, $ad = bc$.

24. $h(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -h(x)$.
25. $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = g(x) + h(x)$.

Translações de funções quaisquer

O leitor deve notar que os procedimentos de translação e reflexão de gráficos usados no estudo da parábola e da hipérbole são de caráter geral, isto é, valem para qualquer função. Assim, se conhecemos o gráfico de uma função $y = f(x)$, obtemos o gráfico de $g(x) = f(x-a)$ (onde $a > 0$) transladando o gráfico original de a unidades para a direita; e obtemos também o gráfico de $h(x) = f(x+a)$ transladando o gráfico original de f de a unidades para a esquerda. Isso tem a mesma justificativa dada no caso do trinômio do 2º grau, na pág. 34 e seguintes.

Exercícios

1. Desenhe, no 1º quadrante, uma curva como gráfico de uma função f. A partir desse gráfico, esboce o gráfico da função $g(x) = f(x+3)$.
2. Desenhe, no 2º quadrante, uma curva como gráfico de uma função f. A partir desse gráfico, esboce o gráfico da função $g(x) = f(x-3)$.
3. Desenhe, no plano xOy, uma curva como gráfico de uma função f, ocupando partes dos 1º e 2º quadrantes. A partir desse gráfico, esboce os gráfico das funções $g(x) = 2 + f(x-3)$ e de $h(x) = f(x+2) - 3$.
4. Desenhe, no plano xOy, uma curva como gráfico de uma função f. A partir desse gráfico, esboce o gráfico das seguintes funções:

$$a)\ g(x) = f(-x), \quad b)\ h(x) = -f(x) \quad c)\ k(x) = -f(-x),$$

5. Dada uma função f e seu gráfico no plano xOy, verifique como estão relacionadas com f as funções g, h, j, k, p, dadas a seguir. Obtenha os gráficos dessas funções a partir do gráfico de f.

$$a)\ g(x) = f(1-x), \quad h(x) = -f(x-2), \quad j(x) = -f(-x-3),$$
$$k(x) = 1 + f(3-x), \quad p(x) = -2 - f(-x-3).$$

6. Desenhe, no plano xOy, uma curva como gráfico de uma função f, ocupando partes dos dois semi-planos determinados pelo eixo Ox. A partir desse gráfico, obtenha os gráficos das função $g(x) = |f(x)|$ e $h(x) = |f(-x)|$.

Sugestões

5. $a)\ g(x) = f(-[x-1]) = u(-x)$, onde $u(x) = f(x-1)$,

$c)\ h(x) = -u(x+3)$, onde $u(x) = f(-x)$.