

1. (25 分) 关于量阶和渐进级数的基本概念

1) (10 分) 请按小量 ε 的降阶次序排列以下各表达式:

$$\varepsilon^2, \ln \frac{1}{\varepsilon}, \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}, e^{-1/\varepsilon}, \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon^{3/2}, 1, \varepsilon^{100}$$

2) (10 分) 试求 $\tanh^{-1}(1-x)$, $x \rightarrow 0$ 的量阶。

3) (5 分) 给出渐进级数的定义, 说明渐进和收敛级数的差别。

2. (20 分) 计算下述积分的渐进级数表达式:

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{3/2} \ln(1+t^2) dt, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (\text{注: 原题可能有误, 可把 } I(x) \text{ 改为 } I(\lambda))$$

3. (30 分) 关于波动的理论和应用。

1) (10 分) 海底下陷造成的海啸先导波的波形如同 Airy 函数的导数, 给出先导波前、后远处波形的渐进表达式。

2) 比较浅水波, 地震波的 P 波, S 波的波速, (注: $c = \sqrt{gH}$, $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \sim 6 \text{ km/s}$,

$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sim 4 \text{ km/s}$), H 水深 4km, 岩石密度 2600 kg/m^3 , G 剪切模量, λ 为拉梅系数。若

地震站台接收到 P 波, S 波的时差为 100s, 探测到两个波后立即发出警报, 试问离开海底地震震源距离为 1440km 的沿海城市留有多少时间避险和救生。

3) (10 分) 声波的波速为 340m/s, 给出人能够听到的声音的波长范围。假定高速列车噪声源为直径 10m 的圆柱表面源, 声压级为 97dB, 试求离列车 20m 处的噪声声压级。

$$L_p = 20 \log \frac{p}{p_0}, \quad p_0 = 20 \mu \text{Pa}$$

4. (25 分) 用 WKB 近似求解下述含大参数方程的渐进解, 并得到特征值和特征函数:

$$xy'' + 2y' + \lambda^2 x(1+x^3)^4 y = 0, \quad \lambda \gg O(1), \quad \text{且 } y(0) \text{ 有界, } y(1) = 0$$