摄动理论 & 渐进方法 (2012 春) 作业解答
复习材料

授课老师: 周显初, 李家春

周吕文
zhou.lv.wen@gmail.com

中国科学院力学研究所
2012 年 06 月 05 日

说明: 本文档是由本人的摄动理论 & 渐进方法作业整理而成. 目录中标题为蓝色的个人以为比较重要. 时间有限, 难免有误, 发现问题, 请电邮我. 祝各位考试顺利.

目 录

第一章 渐进级数

习题 1.1 试用初等函数 (如幂函数, 指数函数, 对数函数) 求下述表达式当 $\varepsilon \to 0$ 时的量阶.

(1) $\dfrac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}$ (2) $\dfrac{\varepsilon^{1/2}}{1-\cos\varepsilon}$

(3) $\ln\left[1+\dfrac{\ln(1+2\varepsilon)}{1-2\varepsilon}\right]$ (4) $\ln\left[1+\dfrac{\ln\left((1+2\varepsilon)/\varepsilon\right)}{1-2\varepsilon}\right]$

(5) $e^{-\cosh(1/\varepsilon)}$ (6) $\displaystyle\int_0^\varepsilon e^{-s^2}ds$

1. $\dfrac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon} = \dfrac{1-[1-\varepsilon^2/2+o(x^3)]}{1+[1-\varepsilon^2/2+o(x^3)]} = \dfrac{\varepsilon^2/2+o(x^3)}{2-\varepsilon^2/2+o(x^3)} = \dfrac{\varepsilon^2}{4}+o(\varepsilon^3) = O(\varepsilon^2)$

2. $\dfrac{\varepsilon^{1/2}}{1-\cos\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon^{1/2}}{1-[1-\varepsilon^2/2+o(x^3)]} = \dfrac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^2/2+o(x^3)} = O(\varepsilon^{-3/2})$

3. $\ln\left[1+\dfrac{\ln(1+2\varepsilon)}{1-2\varepsilon}\right] = \dfrac{\ln(1+2\varepsilon)}{1-2\varepsilon} + o\left(\dfrac{\ln(1+2\varepsilon)}{1-2\varepsilon}\right) = \dfrac{2\varepsilon+o(\varepsilon^2)}{1-2\varepsilon} = O(\varepsilon)$

4. $\ln\left[1+\dfrac{\ln\left((1+2\varepsilon)/\varepsilon\right)}{1-2\varepsilon}\right] = \ln\left[1+\dfrac{\ln\left(1/\varepsilon+2\right)}{1-2\varepsilon}\right] = \ln[1+O(\ln\varepsilon^{-1})] = O(\ln\ln\varepsilon^{-1})$

5. $e^{-\cosh(1/\varepsilon)} = \exp(-\dfrac{e^{1/\varepsilon}+e^{-1/\varepsilon}}{2}) = \exp(-\dfrac{e^{1/|\varepsilon|}+e^{-1/|\varepsilon|}}{2}) = O\Big(\exp\big(-\dfrac{e^{1/|\varepsilon|}}{2})\Big)$

6. $\dfrac{\int_0^\varepsilon e^{-s^2}ds}{\varepsilon} = \dfrac{e^{-\varepsilon^2}}{1} = 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^\varepsilon e^{-s^2}ds = O(\varepsilon)$

■

习题 1.2 求下列函数的量阶 ($\varepsilon \to 0$):

(1) $\tanh^{-1}(1-\varepsilon)$ (2) $\cos^{-1}(1-\varepsilon)$

1. 设 $x=\tanh^{-1}(1-\varepsilon)$, 则有 $1-\varepsilon=\tanh x$, 即

$$\begin{aligned}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1-\varepsilon \quad &\Longrightarrow \quad e^y-e^{-x} = (1-\varepsilon)(e^x+e^{-x})\\ &\Longrightarrow \quad 2e^{-x} = \varepsilon e^x+\varepsilon e^{-x}\\ &\Longrightarrow \quad 2 = \varepsilon e^{2x}+\varepsilon\end{aligned}$$

整理得

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} = O(\ln\varepsilon^{-1})$$

故有

$$\tanh^{-1}(1-\varepsilon) = O(\ln\varepsilon^{-1})$$

2. 设 $x = \cos^{-1}(1-\varepsilon)$, 则有 $1-\varepsilon = \cos x$, 即

$$1-\varepsilon = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \Longrightarrow \varepsilon = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

因此有

$$\cos^{-1}(1-\varepsilon) = x = O(\varepsilon^{1/2})$$

■

习题 1.3 对于小 ε, 请按量阶次序排列:

$$e^{-1/\varepsilon},\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^2\ln\varepsilon^{-1},\ \varepsilon^{3/2},\ \varepsilon,\ \varepsilon^{1/2},\ \varepsilon^{1/2}\ln\varepsilon^{-1},\ 1,\ \ln\ln\varepsilon^{-1},\ \ln\varepsilon^{-1}$$

解: 由于

$$e^{-1/\varepsilon} < O(x^m) < O(\varepsilon^{-n}) < \ln\varepsilon^{-1}$$

其中 m 任意大, n 任意小. 因此量阶次序排列如下:

$$\begin{aligned} O(\ln\varepsilon^{-1}) > O(\ln\ln\varepsilon^{-1}) &> O(1) > O(\varepsilon^{1/2}\ln\varepsilon^{-1}) > O(\varepsilon^{1/2}) \\ &> O(\varepsilon) > O(\varepsilon^{3/2}) > O(\varepsilon^2\ln\varepsilon^{-1}) > O(\varepsilon^2) > O(e^{-1/\varepsilon}) \end{aligned}$$

■

习题 1.4 试用量阶符号的定义, 证明量阶运算的性质:

1. $O(\psi) + O(\psi) = O(\psi)$
2. $O(\psi)\cdot o(\varphi) = o(\psi\varphi)$

1. 根据量阶符号的定义, $\exists A, B$ 常数使得

$$|O(\psi)+O(\psi)| \le |O(\psi)| + |O(\psi)| \le A|\psi| + B|\psi| = (A+B)|\psi|$$

其中 $A+B$ 为常数. 因此有 $O(\psi)+O(\psi) = O(\psi)$.

2. 根据量阶符号的定义, $\exists A$ 常数及任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$|O(\psi)\cdot o(\varphi)| = |O(\psi)|\cdot|o(\varphi)| \le A|\psi|\cdot\varepsilon|\varphi| = \varepsilon A|\psi\varphi|$$

其中 εA 为任意小的正数. 因此有 $O(\psi)\cdot o(\varphi) = o(\psi\varphi)$.

■

习题 1.5 用渐近级数的定义, 证明两个渐近幂级数乘除运算之定理.

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $x \to 0$ 时可展开成渐近幂级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{x^n}, \qquad x \to 0$$

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{x^n}, \qquad x \to 0$$

下面分别证明两个渐近幂级数乘除运算之定理.

- **乘运算:** 则两个渐近幂级数乘积为

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &\sim \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{x^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{x^n}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{f_j}{x^j}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g_i}{x^i}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g_i f_j}{x^{i+j}}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{n=j}^{\infty}\frac{g_{n-j}f_j}{x^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}\left(\sum_{j=0}^{n}g_{n-j}f_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^n}
\end{aligned}
$$

  其中 $c_n = \sum_{j=0}^{n} g_{n-j}f_j$.

- **除运算:** 设 $f(x)/g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n/x^n$, 则由上面已证的乘法运算可知

$$
f(x) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{x^n}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{x^n}
$$

  其中 $f_n = \sum_{j=0}^{n} d_j g_{n-j}$

■

习题 1.9　求下述超越方程根的近似值:

$$
x = \tan x
$$

解: 设 $x=\tan x$ 的解为 x_n, $x_n \in (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$, $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. 显然上式可写为 $x_n = \tan(x_n - n\pi)$. 当 $x_n \to 0$ 时, $x_n - n\pi \to \frac{\pi}{2}$, 令 $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + z$, 以及 $w = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$, 于是

$$
\begin{aligned}
w &= f(z) = \frac{1}{x_n - z} = \frac{1}{\tan x_n - z}\\
&= \frac{1}{\tan(n\pi + \pi/2 + z) - z} = \frac{1}{-\cot z - z}\\
&= -\frac{\sin z}{\cos z + z\sin z}
\end{aligned}
$$

由定理一推论

$$
\begin{aligned}
z &= \varphi(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\frac{\zeta - z_0}{f(\zeta) - w_0}\right)^n\Big|_{\zeta=z_0}(w - w_0)^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\frac{\zeta^n}{f(\zeta)^n}\Big|_{\zeta=z_0}w^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\frac{(-1)^n\zeta^n(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta)^n)}{\sin^n\zeta}\Big|_{\zeta=0}w^n\\
&= -w + o(w)
\end{aligned}
$$

因此有

$$
x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + z = n\pi + \frac{\pi}{2} - w + o(w) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi + \pi/2} + \cdots
$$

■

习题 1.10 已知零阶 Bessel 函数的渐近展开为

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[u(x)\cos\big(x-\frac{1}{4}\pi\big)+v(x)\sin\big(x-\frac{1}{4}\pi\big)\Big]$$

其中

$$u(x) = 1-\frac{(3!!)^2}{2!(8x)^2}+\frac{(7!!)^2}{4!(8x)^4}-\frac{(11!!)^2}{6!(8x)^6}+\cdots$$

$$v(x) = \frac{1}{8x}-\frac{(5!!)^2}{3!(8x)^3}+\frac{(9!!)^2}{5!(8x)^5}-\frac{(13!!)^2}{7!(8x)^7}+\cdots$$

求它的近似根.

设解为 $x_n = n\pi+\frac{3}{4}\pi+\varepsilon$, 则有

$$\begin{aligned} & u(x_n)\cos(n\pi+\frac{1}{2}\pi+\varepsilon)+v(x_n)\sin(n\pi+\frac{1}{2}\pi+\varepsilon)=0 \\ \Longrightarrow \quad & -u(x_n)\cos(n\pi+\varepsilon)+v(x_n)\sin(n\pi+\varepsilon)=0 \end{aligned}$$

由上式可得

$$\tan(n\pi+\varepsilon)=\frac{u(x_n)}{v(x_n)}=\tan\varepsilon=\frac{1}{8x_n}$$

因此有 $\varepsilon=\tan\varepsilon=\frac{1}{8n\pi+6\pi}$. 因此 Bessel 函数的渐近展开的根的近似值为

$$x_n = n\pi+\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{8n\pi+6\pi}$$

∎

第二章 积分的渐近展开

习题 2.2 试求

$$\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^n} dt$$

的渐近展开式, 并证明余项确比保留的项要小.

令

$$F(x,n) = \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^n} dt$$

由分步积分得递推公式

$$F(x,n) = -t^{-n}\mathrm{e}^{-t}\Big|_x^\infty - n\int_x^\infty t^{-(n+1)}\mathrm{e}^{-t}dt = x^{-n}\mathrm{e}^{-x} - nF(x,n+1)$$

由 Γ 函数的性质 $\Gamma(-n+1) = -n\Gamma(-(n+1)+1) = n(n+1)\Gamma(-(n+2)+1) = \cdots$ 及以上递推关系得

$$F(x,n) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-(n+i)+1)} x^{-(n+i)} + \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-(n+N)+1)} F(x,n+N)$$

最后一项余项 R_N, 对所有 N

$$\begin{aligned} |R_N| &\le \left|\frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-(n+N)+1)}\right| |F(x,n+N)| \\ &\le \left|\frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-(n+N)+1)}\right| \left|x^{-n-N}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}dt\right| = O(\mathrm{e}^{-x}x^{-n-N}) \end{aligned}$$

所以渐近展开

$$F(x,n) \sim \mathrm{e}^{-x}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-(n+i)+1)} x^{-(n+i)}$$

可见 $F(x,n)$ 是 $O\big(\mathrm{e}^{-x}x^{-(n+i)}\big)$ 量阶, 显然余项比保留项要小. ■

习题 2.4 证明 (以下四题任选两题)

1. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\ln(2+t)dt \sim \frac{\ln 2}{x}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\ln(1+t)dt \sim \frac{1}{x^2}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\sin t dt \sim \frac{1}{x^2}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(x/t)+t+xt}dt \sim \frac{\mathrm{e}}{2x}$

1. 由分步积分有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\ln(2+t)dt &= -\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-xt}\ln(2+t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(2+t)}dt\right]\\ &= -\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-x}\ln 3 - \ln 2 - \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(2+t)}dt\right]\\ &= \frac{\ln 2}{x} - \underbrace{\frac{\ln 3}{x\mathrm{e}^x}}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(2+t)}dt}_{(b)}\end{aligned}$$

其中 (a) 项 $\ln 3/(x\mathrm{e}^x) = o(1/x)$. 其中 (b) 项

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(2+t)}dt\right| \le \left|\frac{1}{2x}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}dt\right| = \left|\frac{1}{2x^2}(\mathrm{e}^{-x}-1)\right| = o(1/x)$$

因此

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\ln(2+t)dt = \frac{\ln 2}{x} + o(1/x) \sim \frac{\ln 2}{x}$$

2. 由分步积分

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\ln(1+t)dt &= -\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-xt}\ln(1+t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(1+t)}dt\right]\\ &= -\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-x}\ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(1+t)}dt\right]\\ &= -\frac{\ln 2}{x\mathrm{e}^x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(1+t)}dt\\ &= -\frac{\ln 2}{x\mathrm{e}^x} - \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^{xt}(1+t)}\Big|_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\frac{1}{(1+t)^2}dt\right]\\ &= -\frac{\ln 2}{x\mathrm{e}^x} - \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{2\mathrm{e}^x} - 1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\frac{1}{(1+t)^2}dt\right]\\ &= \frac{1}{x^2} - \underbrace{\frac{\ln 2}{x\mathrm{e}^x}}_{(a)} - \underbrace{\frac{1}{2x^2\mathrm{e}^x}}_{(b)} - \underbrace{\frac{1}{x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\frac{1}{(1+t)^2}dt}_{(c)}\end{aligned}$$

其中 (a) 和 (b) 项都是 $o(1/x^2)$. 其中 (c) 项

$$\left|\frac{1}{x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\frac{1}{(1+t)^2}dt\right| \le \frac{1}{4x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}dt = o(1/x^2)$$

因此

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\ln(1+t)dt = \frac{1}{x^2} + o(1/x^2) \sim \frac{1}{x^2}$$

3. 由分步积分

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\sin t dt &= -\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-xt}\sin t\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\cos t dt\right] \\
&= -\frac{1}{x}\left\{\mathrm{e}^{-x}\sin 1 + \frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-xt}\cos t\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\sin t dt\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{x}\left\{\mathrm{e}^{-x}\sin 1 + \frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-x}\cos 1 - 1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\sin t dt\right]\right\} \\
&= \frac{1}{x^2}\underbrace{-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x}\sin 1 - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\cos 1}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\sin t dt}_{(b)}
\end{aligned}
$$

其中 (a) 项为 $o(1/x^2)$. (b) 项

$$
\left|\frac{1}{x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\sin t dt\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt} dt\right| = \left|\frac{1}{x^3}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\right| = o(1/x^2)
$$

因此

$$
\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\sin t dt = \frac{1}{x^2} + o(1/x^2) \sim \frac{1}{x^2}
$$

■

习题 2.5 试求

$$
I(x) = \int_1^2 \exp\Big[-x(t + 1/t)\Big]
$$

之渐近表示.

令 $h(t) = -(t + 1/t)$, 则有

$$
h'(t) = \frac{1}{t^2} - 1, \quad t \in [1, 2]
$$

当 $t = 1$ 时 $h'(t) = 0$, $h(t) = -2$ 取得最大值. 因此当 $x \to \infty$ 时, 积分的主要贡献主要来自 1 附近区域. 将 $h(t)$ 在 $t = 1$ 展开

$$
h(t) = h(1) + h'(1)(t-1) + \frac{1}{2}h''(1)(t-1)^2 + \cdots = -2 + 0 - (t-1)^2 + \cdots
$$

因此

$$
\begin{aligned}
I(x) \sim \int_1^\infty \mathrm{e}^{-2x - x(t-1)^2} dt &= \mathrm{e}^{-2x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt^2} dt \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{x}}\mathrm{e}^{-2x}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\sqrt{x/2}t)^2/2} d\sqrt{x/2}t \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{x}}\mathrm{e}^{-2x}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2} dt \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}
$$

■

习题 2.6 求积分
$$I(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega x^2}x^{5/2}\ln(1+x)dx$$
完全的渐近展开 $(\omega\to+\infty)$

显然 $-x^2$ 在 0 处取最大值, 该积分的主要贡献来自 $x=0$ 的邻域.

$$\begin{aligned}
I(x)&\sim\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\omega x^2}x^{5/2}\ln(1+x)dx\sim\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\omega x^2}x^{5/2}\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\Big)dx\\
&\sim\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\omega x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+5/2}}{n}dx\\
&\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\omega x^2}x^{n+5/2}dx\\
&\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n\omega^{n/2+7/4}}\int_0^\delta \mathrm{e}^{-\omega x^2}\omega^{n/2+3/4}x^{n+3/2}d\omega x^2
\end{aligned}$$

令 $\omega x^2=u$, 则上式化为

$$\begin{aligned}
I(x)&\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n\omega^{n/2+7/4}}\int_0^{\omega\delta^2}\mathrm{e}^{-u}u^{n/2+7/4-1}du\\
&\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n\omega^{n/2+7/4}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{n/2+7/4-1}du\\
&\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n\omega^{n/2+7/4}}\Gamma\Big(\frac{n}{2}+\frac{7}{4}\Big)du
\end{aligned}$$

■

习题 2.7 求下述积分的渐近表示:
$$I(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(t^3/3+t)}dt,\quad x\to\infty$$

由驻相法: $f(t)=1$, $f'(t)=0$, $h(t)=(t^3/3+t)$, $h'(t)=(t^2+1)\neq0$, $h''(t)=2t$ 存在. $(f/h')'=[1/(t^2+1)]'$ 绝对可积. $f(0)\cdot f(\infty)=1\neq0$. 因此有

$$\begin{aligned}
I(x)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(t^3/3+t)}dt=f(\infty)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xh(\infty)}}{\mathrm{i}xh'(\infty)}-f(0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xh(0)}}{\mathrm{i}xh'(0)}+O\Big(\frac{1}{x}\Big)\\
&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\infty}}{\mathrm{i}x\infty}+\frac{\mathrm{i}}{x}+O(1/x)\sim\frac{\mathrm{i}}{x}
\end{aligned}$$

因此当 $x\to\infty$, $I(x)\sim\mathrm{i}/x$. ■

第三章 波动问题与渐近积分

习题 3.1 求证有限水深二维重力波的色散关系为 $\omega^2 = gk\tanh kh$ 如果考虑表面张力, 导出类似的表达式, 并计算其相速度, 群速度.

设水波表面方程式为 $F(x,z,t) = z - \zeta(x,t) = 0$, 速度势 $\varphi = \varphi^*(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$, 速度势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \implies \frac{d^2\varphi^*}{dz^2} - k^2\varphi^*(z) = 0 \implies \varphi^* = C_1\mathrm{e}^{kz} + C_2\mathrm{e}^{-kz}$$

又由边界条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-h} = 0 \implies \frac{\partial\varphi^*(z)}{\partial z}\Big|_{z=-h} = 0 \implies C_1\mathrm{e}^{-kh} - C_2\mathrm{e}^{kh} = 0$$

得速度势为

$$\begin{aligned}\varphi &= C_1\left(\mathrm{e}^{kz} + \mathrm{e}^{-2kh}e^{-kz}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = 2C_1\mathrm{e}^{-kh}\frac{\mathrm{e}^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ &= 2C_1\cosh\left(k(z+h)\right)\cos(kx-\omega t)\end{aligned}$$

将上式及表面张力 $p = -T\partial^2\zeta/\partial x^2$ 代入以下动力学, 动力学边界条件

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{\partial\zeta}{\partial t} \qquad z = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta &= -\frac{p}{\rho} \qquad z = 0\end{aligned}$$

得

$$\omega^2 = k(g + Tk^2/\rho)\tanh(kh)$$

在 $T = 0$ 时有 $\omega^2 = kg\tanh(kh)$. 因此有

- 不考虑表面张力时 ω^2, 相速度 $c = \omega/k$ 及群速度 $c_g = \partial\omega/\partial k$ 分别为

$$\omega^2 = kg\tanh(kh),\ c = \sqrt{g\tanh(kh)/k},\ c_g = \frac{g\tanh(hk) - ghk\left(\tanh^2(hk) - 1\right)}{2\sqrt{gk\tanh(hk)}}$$

- 考虑表面张力时 ω^2, 相速度 $c = \omega/k$ 及群速度 $c_g = \partial\omega/\partial k$ 分别为

$$\omega^2 = k(g + Tk^2/\rho)\tanh(kh),\ c = \sqrt{(g + Tk^2/\rho)\tanh(kh)/k}$$

$$c_g = \frac{\tanh(hk)\left(\rho g + Tk^2\right) - hk\left(g\rho + Tk\right)\left(\tanh^2(hk) - 1\right) + 2Tk^2\tanh(hk)}{2\sqrt{k\tanh(hk)\,\rho\,(g\rho + Tk^2)}}$$

■

习题 3.2　有二种液体, 轻液体置于重液体之上, 由外界扰动可以产生界面波, 在无界, 有界情况下, 请导出色散关系, 并计算其相速度与群速度.

由 3.1 可知, 两种液体的速度势形式分别如下

$$\varphi_1 = C_1 \cosh\big(k(z-h_1)\big)\cos(kx-\omega t)$$

$$\varphi_2 = C_2 \cosh\big(k(z+h_2)\big)\cos(kx-\omega t)$$

将以上两式代入以下动力学, 动力学边界条件

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} & \qquad z=0 \\
\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \rho_1 g\zeta + p = \rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \rho_1 g\zeta + p = 0 & \qquad z=0
\end{aligned}$$

可得

$$\omega^2 = \frac{(\rho_2-\rho_1)kg}{\rho_1/\tanh(kh_1) + \rho_2/\tanh(kh_2)}$$

因此有

- 在无界时 $h_1\to\infty$, $h_2\to\infty$, 则 ω^2, 相速度 $c=\omega/k$ 及群速度 $c_g=\partial\omega/\partial k$ 分别为

$$\omega^2 = \frac{(\rho_2-\rho_1)kg}{\rho_1+\rho_2},\ c=\sqrt{\frac{(\rho_2-\rho_1)g}{k(\rho_1+\rho_2)}},\ c_g = \frac{g(\rho_2-\rho_1)}{2\sqrt{gk(\rho_2^2-\rho_1^2)}}$$

- 有界时, 则 ω^2, 相速度 $c=\omega/k$ 及群速度 $c_g=\partial\omega/\partial k$ 分别为

$$\omega^2 = (\rho_2-\rho_1)kg/\Omega,\ c=\sqrt{(\rho_2-\rho_1)g/(k\Omega)},\ c_g = \frac{g(\rho_2-\rho_1)\Omega - gk(\rho_2-\rho_1)\Theta}{2\Omega\sqrt{gk(\rho_2-\rho_1)\Omega}}$$

基中 $\Omega = \rho_1/\tanh(kh_1)+\rho_2/\tanh(kh_2)$, $\Theta = \mathrm{h}_1\rho_1[1-\tanh^{-2}(\mathrm{h}_1 k)] + \mathrm{h}_2\rho_2[1-\tanh^{-2}(\mathrm{h}_2 k)]$

■

习题 3.4　已知其物理量 $\varphi(x,t)$ 由不同成分的谐波叠加而成, 若已知 $\varphi(x,0)=\mathrm{e}^{-ax^2}$, $a>0$, $\omega=k^2$, 试求 $\varphi(x,t)$ 的表达式及其渐近行为.

设解的形式

$$\varphi(x,t) = \int_0^\infty F(k)e^{\mathrm{i}[kx-\omega(k)t]}dk = \int_0^\infty F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(k)t}$$

其中 $\psi(k)=kx/t-\omega(k)$,$F(k)$ 由初始条件确定

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\varphi(x,0)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx-ax^2}dx$$

令 $y = x + \mathrm{i}k/2a$, 则上式可化为

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y-\mathrm{i}k/2a)-a(y-\mathrm{i}k/2a)^2}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{i}k/2a}^\infty \mathrm{e}^{-k^2/4a-ay^2}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-k^2/4a}\int_{\mathrm{i}k/2a}^\infty \mathrm{e}^{-ay^2}dy = \frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-k^2/4a}\Gamma\left(\frac{1}{2}, -\frac{k^2}{4a^2}\right)
\end{aligned}
$$

用驻相法来计算

$$
\psi'(k) = x/t - \omega'(k) = 0
$$

在驻相点处设 $k = k_g$, 那么

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,t) &\sim F(k_g)\exp\left[\mathrm{i}\left\{k_g x - \omega(k_g)t - \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\omega''(k_g)\right\}\right]\sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''(k_g)|}} \\
&\sim \frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-k_g^2/4a}\Gamma\left(\frac{1}{2}, -\frac{k_g^2}{4a^2}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left\{k_g x - \omega(k_g)t - \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\omega''(k_g)\right\}\right]\sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''(k_g)|}}
\end{aligned}
$$

■

第四章 微分方程的渐近解

习题 4.1 试求下列微分方程的所有奇点分类:

1. $xy'' + (b-x)y' - ay = 0$
2. $y'' + (\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)y = 0$
3. $(1-x^2)y'' - 2xy + [\lambda + 4\theta(1-x^2) - \mu^2(1-x^2)^{-1}]y = 0$

1. 将原式转化为
$$y'' + \frac{(b-x)}{x}y' - \frac{a}{x}y = 0$$
当 $x = 0$ 时: A. $b = 0$, $a = 0$ 时, 为正常点; B. $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ 时, 为正则奇点.
当 $x = \infty$ 时为非正则奇点.

2. 当 $x = \infty$ 时为非正则奇点.

3. 将原式转化为
$$y'' + \frac{[4\theta(1-x^2) + (\lambda - 2x)](1-x^2) - \mu^2}{(1-x^2)^2}y = 0$$
当 $x = -1$ 时:A.$\mu = 0$, $\lambda = -2$ 时正常点; B.$\lambda \neq -2$ 为正则奇点.
当 $x = 1$ 时: A.$\mu = 0$, $\lambda = 2$ 时正常点; B.$\lambda \neq 2$ 为正则奇点.
当 $x = \infty$ 时为非正则奇点.

■

习题 4.2 试求初值问题
$$(x-1)(x-2)y'' + (4x-6)y' + 2y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$$
的 Taylor 展开, 并估计其收敛范围.

点 $x = 0$ 为原方程的正常点, 则方程解可展开成如下形式的 Taylor 级数
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
代入原方程
$$(x^2 - 3x + 2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (4x-6)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
由各项系数为零得
$$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0 \implies a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{2^n}(a_1 - a_0)$$

由 $y(0)=2$ 及 $y'(0)=1$ 得 $a_0=2$, $a_1=1$, 代入上式得

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2^n} \implies a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$$

因此解为

$$y(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(x/2)^n$$

■

习题 4.3 求下述方程

$$x^2y'''+3xy''+(1-x)y'-y=0$$

的 Frobenius 级数解.

点 $x=0$ 是方程的正点则奇点, 至少存在一个 Frobenius 级数解, 设解的形式为

$$y(x)=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}$$

代入原方程得

$$a_0\alpha^3x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n+1)\Big[(\alpha+n+1)^2a_{n+1}-a_n\Big]x^{\alpha+n}=0$$

因此有

$$a_0\alpha^3=0, \qquad a_{n+1}=a_n/(\alpha+n+1)^2$$

因为是重根, 故另外两解不再是 Frobenius 级数解. ■

习题 4.4 在原点附近求下述方程

$$x^3y''+x(1-x)y'-2y=0$$

的渐近解.

将原方程式化为如下形式

$$y''+x^{-2}\Big(1-x\Big)y'-2x^{-3}y=0 \tag{1}$$

该方程在 $x=0$ 有非正则奇点. 因此在 $x=0$ 处可能存在正则解. 由主项平均法可设

$$y\sim e^{s(x)}, \qquad s(x)\sim x^{-b}\,(b\geq 0)$$

代入式 (1) 得

$$\underset{O(x^{-b-2})}{s''(x)}+\underset{O(x^{-2b-2})}{s'^2(x)}+\underset{O(x^{-b-3})}{p(x)s'(x)}+\underset{O(x^{-3})}{q(x)}=0$$

下面分情况讨论

- 若 $b=0$, 则三, 四项平衡, 此时 $s'(x)=-q(x)/p(x)=\frac{2}{x(1-x)}$. 因此可得

$$s(x)=2\ln\frac{x}{1-x}\implies y_1\approx\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

- 若 $0<b<1$, 则第三项为主项, 此时 $s'(x)=0$. 因此可得

$$s(x)=\text{const}\not\Leftrightarrow s(x)\sim x^{-b}\,(b\geq 0)$$

- 若 $b=1$, 则二, 三项平衡, 此时 $s'(x)=-p(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. 因此可得

$$s(x)\sim\frac{1}{x}+\ln x\implies y_1\approx x\mathrm{e}^{1/x}$$

- 若 $b>1$, 则第二项为主项, 此时 $s'(x)=0$, 同第 e 二种情况.

综上所述, 只有在 $b=0$ 和 $b=1$ 两种情况存在渐近解

$$y\approx\begin{cases}x^2/(1-x)^2, & b=0\\ x\exp(1/x), & b=1\end{cases}$$

■

习题 4.5 在原点附近求下述方程

$$x^4y''+2x^3y'-y=0$$

的渐近解.

将上式转化为

$$y''+2x^{-1}y'-x^{-4}y=0 \tag{2}$$

该方程在 $x=0$ 有非正则奇点. 由主项平均法设

$$y\sim e^{s(x)},\qquad s(x)\sim x^{-b}\,(b\geq 0)$$

代入式2得

$$\underset{O(x^{-b-2})}{s''(x)}+\underset{O(x^{-2b-2})}{s'^2(x)}+\underset{O(x^{-b-2})}{p(x)s'(x)}+\underset{O(x^{-4})}{q(x)}=0$$

下面分情况讨论

- 若 $0\leq b<1$, 则第四项为主项, 矛盾.
- 若 $b=1$, 则二四项平衡, 此时 $s'(x)=\pm\sqrt{p(x)}=\pm x^{-2}$, 因此可得

$$s(x)=\pm 1/x\implies y_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm 1/x}$$

- 若 $b>1$, 此时第二项为主项, 此时 $s'(x)=0$, 因此可得

$$s(x)=\text{const}\not\Leftrightarrow s(x)\sim x^{-b}\,(b\geq 0)$$

综上所述, 只有在 $b=1$ 情况存在渐近解

$$y_{1,2}=\mathrm{e}^{\pm 1/x}$$

■

第七章 奇异摄动方法

习题 7.2 单摆的运动方程及初始条件为

$$\ddot{\theta} + (g/l)\sin\theta = 0,\ \ \theta(0) = \varepsilon,\ \ \ddot{\theta}(0) = 0$$

试对小而有限的 θ 值, 求两项一致有效展开式.

解: 将 $\sin\theta$ 展开: $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + O(\theta^5) + \cdots$, 并令 $g/l = w_0^2$, 则原方程式化为:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{w_0^2 dt^2} + (\theta - \theta^3/6) = 0 \\ \theta(0)/\varepsilon = 1,\ \ \ddot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

令 $y = \theta/\varepsilon$, $w_0 t = t'$, 则上式化为:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{d^2y}{dt'^2} + \left(\varepsilon y - \dfrac{\varepsilon^3}{6}y^3\right) = 0 \\ y(0) = 1,\ \ \dfrac{dy}{dt'}\Big|_{t'=0} = 0 \end{cases} \xrightarrow{-\varepsilon^2/6 = \varepsilon'} \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt'^2} + y + \varepsilon' y^3 = 0 \\ y(0) = 1,\ \ \dfrac{dy}{dt'}\Big|_{t'=0} = 0 \end{cases}$$

则方程转化为 Duffing 方程, 将频率作展开 $\omega(\varepsilon') = \omega_0 + \varepsilon'\omega_1 + \varepsilon'^2\omega_2 + \cdots$, 相当于对时间作了线性变换: $\tau = (\omega_0 + \varepsilon'\omega_1 + \varepsilon'^2\omega_2 + \cdots)t'$. 其中 $\omega_0 = 1$ 是退化问题的频率, 于是方程及初始条件变为

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon'\omega_1 + \varepsilon'^2\omega_2 + \cdots)^2\dfrac{d^2y}{d\tau^2} + y + \varepsilon' y^3 = 0 \\ y(0) = 1,\ \ \dfrac{dy}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \end{cases}$$

将函数 y 作渐近展开 $y = \sum_{n=0}\varepsilon'^n y_n$ 代入上式, 并按 ε' 的幂次排列, 可得到递推方程及各阶初始条件

$$\begin{aligned} L(y_0) &\equiv \frac{d^2y_0}{d\tau^2} + y_0 = 0 && ,\ y_0(0) = 1\ \ ,\ \frac{dy_0}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \\ L(y_1) &= -y_0^3 - 2\omega_1\frac{d^2y_0}{d\tau} && ,\ y_1(0) = 0\ \ ,\ \frac{dy_1}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \\ L(y_2) &= -3y_0^2y_1 - 2\omega_1\frac{d^2y_1}{d\tau^2} - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\frac{d^2y_0}{d\tau^2} && ,\ y_2(0) = 0\ \ ,\ \frac{dy_2}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \end{aligned}$$

零阶量的解为

$$y_0 = \cos\tau \tag{3}$$

将式 (3) 代入式一阶式得

$$L(y_1) = (2\omega_1 - \frac{3}{4})\cos\tau - \frac{1}{4}\cos 3\tau$$

对应于上式右端第一项的特解是长期项, 必须消去. 故有 $\omega_1 = 3/8$. 因此, 一阶量的解为

$$y_1 = \frac{1}{32}(\cos 3\tau - \cos\tau) \tag{4}$$

将式 (3) 和式 (4) 代入式二阶式得

$$y_2 = \Big(\frac{21}{128} + 2\omega_2\Big)\cos\tau + \frac{3}{16}\cos 3\tau - \frac{3}{128}\cos 5\tau$$

要使 y_2 不含长期项, 必须令上式右端第一项系数为零, 于是有 $\omega_2 = -21/256$. 因此, 二阶量的解为

$$y_2 = \frac{1}{1024}(\cos 5\tau - 24\cos 3\tau + 23\cos\tau) \tag{5}$$

综上所述, 有

$$y = \cos\tau + \frac{\varepsilon'}{32}(\cos 3\tau - \cos\tau) + \frac{\varepsilon'^2}{1024}(\cos 5\tau - 24\cos 3\tau + 23\cos\tau) + O(\varepsilon'^3)$$

代入 $y = \theta/\varepsilon$ 及 $\varepsilon' = -\varepsilon^2/6$ 得方程的渐近解为

$$\theta = \varepsilon\cos\tau - \frac{\varepsilon^3}{192}(\cos 3\tau - \cos\tau) + \frac{\varepsilon^5}{36864}(\cos 5\tau - 24\cos 3\tau + 23\cos\tau) + O(\varepsilon^7)$$

其中 (注意到:$\tau = \omega t'$, $w_0 t = t'$):

$$\begin{aligned}
\tau &= \Big(\omega_0 + \varepsilon'\omega_1 + \varepsilon'^2\omega_2 + O(\varepsilon'^3)\Big)t' \\
&= \Big(1 + \frac{3}{8}\varepsilon' - \frac{21}{256}\varepsilon'^2 + O(\varepsilon'^3)\Big)w_0 t \\
&= \Big(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 - \frac{7}{3072}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)\Big)\sqrt{\frac{g}{l}}t
\end{aligned}$$

■

习题 7.3　利用多重尺度法和平均化方法求

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu\dot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

的解 u 的一阶的一致有效展开式.

- **多重尺度法**

  应用两变量方法, 设

  $$u = u_0(\xi,\eta) + \varepsilon u_1(\xi,\eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi,\eta) + \cdots$$

  其中 $\xi = \varepsilon t$, $\eta = (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \cdots + \varepsilon^M\omega_M)t$. 将上式代入原方程可得递推方程如下:

  $$\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} + u_0 = 0 \tag{6}$$

  $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2} + u_1 = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta} - 2\mu\frac{\partial u_0}{\partial\eta} - u_0^3 \tag{7}$$

  $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial\eta^2} + u_1 = -\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi^2} - 2\omega_2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\eta} - 2\mu\Big(\frac{\partial u_0}{\partial\xi} + \frac{\partial u_1}{\partial\eta}\Big) - 3u_0^2 u_1 \tag{8}$$

方程 (6) 的通解为

$$u_0 = A_0(\xi)\cos\eta + B_0(\xi)\sin\eta$$

将上式代入 (7) 式得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + u_1 &= (+2A_0' + 2\mu A_0 - \frac{3}{4}B^3 - \frac{3}{4}A_0^2 B_0)\sin\xi + (+\frac{1}{4}B_0^3 - \frac{3}{4}A_0^2 B_0)\sin 3\xi \\ &+ (-2B_0' - 2\mu B_0 - \frac{3}{4}A_0^3 - \frac{3}{4}A_0 B_0^2)\cos\xi + (-\frac{1}{4}A_0^3 + \frac{3}{4}A_0 B_0^2)\cos 3\xi\end{aligned}$$

为消去常期项, 需令

$$+2A_0' + 2\mu A_0 - \frac{3}{4}B^3 - \frac{3}{4}A_0^2 B_0 = 0 \tag{9}$$

$$-2B_0' - 2\mu B_0 - \frac{3}{4}A_0^3 - \frac{3}{4}A_0 B_0^2 = 0 \tag{10}$$

式 (9)$\times A_0$ - 式 (10)$\times B_0$ 得

$$(A_0^2 + B_0^2)' + 2\mu(A_0^2 + B_0^2) = 0$$

令 $a = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$ 为所需阶解的振幅

$$a = a_0 \exp(-\mu\xi)$$

若用振幅 a 和相位 ϕ 表示 A_0, B_0 有

$$A_0 = a\cos\phi,\ B_0 = -a\sin\phi$$

代入式 (9) 或 (10) 得

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{3}{8}a^2 = \frac{3}{8}a_0^2\exp(-2\mu\xi) \ \Rightarrow\ \phi = -\frac{3}{16}\frac{a_0^2}{\mu}\exp(-2\mu\xi) + \phi_0$$

因此 u 的的一阶的一致有效展开式为

$$u = acos(\eta - \frac{3}{8}a^2\xi + \phi_0) = a_0\exp(-\mu\varepsilon t)\cos\left(t - \frac{3}{16}\frac{a_0^2}{\mu}\exp(-2\mu\varepsilon t) + \phi_0\right)$$

- **平均化方法**

  原方程化为

$$\ddot{u} + u = \varepsilon(-2\mu\dot{u} - u^3) = \varepsilon f(u, \dot{u})$$

  其退化解为

$$u = \cos(t + \theta)$$

  平均法中 $f(u, \dot{u}) = -2\mu\dot{u} - u^3$, 故有

$$f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) = -a^3\cos^3\varphi + 2\mu a\omega_0\sin\varphi$$

由平均法

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{-\varepsilon}{\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi f(a\cos\varphi,-a\omega_0\sin\varphi)d\varphi \\ &= -\mu a\varepsilon \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{-\varepsilon}{a\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi f(a\cos\varphi,-a\omega_0\sin\varphi)d\varphi \\ &= \frac{3}{8}a^2\varepsilon \end{aligned} \tag{11}$$

由以上两式可求得 a 和 θ

$$a = a_0\exp(-\mu\varepsilon t),\quad \theta = -\frac{3}{16}\frac{a_0^2}{\mu}\exp(-2\mu\varepsilon t)+\theta_0$$

综上所述

$$u = a_0\exp(-\mu\varepsilon t)\cos\left(t-\frac{3}{16}\frac{a_0^2}{\mu}\exp(-2\mu\varepsilon t)+\theta_0\right)$$

■

习题 7.4 对于方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u+\varepsilon\dot{u}^3=0$$

试求 u 的一阶的一致有效展开式.

解: 当 $\varepsilon=0$ 时, 原方程的退化方程的通解为

$$u = a\cos(\omega_0 t+\theta) \tag{12}$$

其中 a 和 θ 是常数, 分别是振幅和初始位相. 由**平均法**, 当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时, 可认为解的形式仍为式 (12). 但 a 和 θ 不是常数, 而是 t 的缓变函数. 原式中

$$\ddot{u}+\omega_0^2u = -\varepsilon\dot{u}^3 = \varepsilon f(u,du/dt)$$

故 $f(u,\dot{u})$ 的形式为 $-\dot{u}^3$, 故有

$$f(a\cos\varphi,-a\omega_0\sin\varphi) = -(-a\omega_0\sin\varphi)^3$$

因此由平均法有

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi(-a\omega_0\sin\varphi)^3d\varphi = -\frac{3}{8}a^3\omega_0^2\varepsilon \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\varepsilon}{a\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi(-a\omega_0\sin\varphi)^3d\varphi = 0\end{aligned}$$

因此可解出 a 和 θ:

$$a = \left(\frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2t+\frac{1}{a_0^2}\right)^{-1/2},\quad \theta=\theta_0$$

将 a 和 θ 代入式 (12), 可得方程的一致有效展开式为

$$u = \left(\frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2t+\frac{1}{a_0^2}\right)^{-1/2}\cos(\omega_0t+\theta_0)$$

其中 a_0 和 θ_0 是常数.

■

习题 7.10 当 $\Omega=\omega_0+\varepsilon\sigma$ 时, 试证明方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=\varepsilon\Big(\dot{u}-\frac{1}{3}\dot{u}^3\Big)+\varepsilon k\cos\Omega t$$

的解 $u=a\cos(\omega_0t+\beta)+\cdots$, 而 a 和 β 由下式决定

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{2}\varepsilon\Big(1-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2\Big)a+\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)\\ a\dot{\beta} &= -\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\cos(\varepsilon\sigma t-\beta)\end{aligned}$$

由平均法, 对比弱非线性二阶方程

$$f(u,\dot{u})=\Big(\dot{u}-\frac{1}{3}\dot{u}^3\Big)+k\cos\Omega t$$

令 $\varphi=\omega_0t+\beta$, 则有

$$f(a\cos\varphi,-a\omega_0\sin\varphi)=(-a\omega_0\sin\varphi+\frac{1}{3}a^3\omega_0^3\sin^3\varphi)+k\cos(\varphi+\varepsilon\sigma t-\beta)$$

由平均法

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{-\varepsilon}{\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi f(a\cos\varphi,-a\omega_0\sin\varphi)d\varphi\\ &= \frac{-\varepsilon}{\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-a\omega_0\sin^2\varphi+\frac{1}{3}a^3\omega_0^3\sin^4\varphi)+k\sin\varphi\cos(\varphi+\varepsilon\sigma t-\beta)d\varphi\\ &= -\frac{1}{8}\varepsilon\omega_0^2a^3+\frac{1}{2}\varepsilon a+\frac{k\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\cos(\varepsilon\sigma t-\beta)-\sin^2\varphi\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)d\varphi\\ &= -\frac{1}{8}\varepsilon\omega_0^2a^3+\frac{1}{2}\varepsilon a+\frac{k\varepsilon}{2\pi\omega_0}\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\\ &= -\frac{1}{8}\varepsilon\omega_0^2a^3+\frac{1}{2}\varepsilon a+\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\Big(1-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2\Big)a+\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} &= \frac{-\varepsilon}{a\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi f(a\cos\varphi,-a\omega_0\sin\varphi)d\varphi\\ &= \frac{-\varepsilon}{a\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{-a\omega_0}{2}\sin2\varphi+\frac{1}{3}a^3\omega_0^3\sin^3\varphi\cos\varphi)+k\cos\varphi\cos(\varphi+\varepsilon\sigma t-\beta)d\varphi\\ &= -\frac{k\varepsilon}{2a\omega_0}\cos(\varepsilon\sigma t-\beta)\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{2}\varepsilon\Big(1-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2\Big)a+\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)\\ a\dot{\beta} &= -\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\cos(\varepsilon\sigma t-\beta)\end{aligned}$$

■

习题 7.15 试求下列两个问题的可解性条件:

1. $\varphi'' + \dfrac{n^2\pi^2}{d^2}\varphi = f(x)$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(d) = \beta$
2. $\varphi'' + r_n^2\varphi = f(x)$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(1) - \alpha\varphi(1) = \beta$, 其中 $r_n \tan r_n = -\alpha$.

1. 原方程的伴随方程为
$$u'' + \frac{n^2\pi^2}{a^2}u = 0$$
伴随方程的解的一般形式为
$$u = A\sin\left(\frac{n\pi}{d}x\right) + B\cos\left(\frac{n\pi}{d}x\right)$$
又由边界条件 $u'(0) = 0$ 得 $A = 0$. 因此伴随方程的解为
$$u = B\cos\left(\frac{n\pi}{d}x\right)$$
因此方程的可解性条件为
$$\delta_2 p_2(d)u(d) - \delta_1 p_1(0)u(0) = \int_0^d f(x)u(x)dx$$
即
$$\beta\cos n\pi = \int_0^d f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{d}x\right)dx$$

2. 原方程的伴随方程为
$$u'' + r_n^2 u = 0$$
伴随方程的解的一般形式为
$$u = A\sin(r_n x) + B\cos(r_n x)$$
又由边界条件 $u'(0) = 0$, $u'(1) = \alpha u(1) = -r_n \tan r_n u(1)$ 得 $A = 0$. 因此伴随方程的解为
$$u = B\cos(r_n x)$$
因此方程的可解性条件为
$$\delta_2 p_2(1)u(1) - \delta_1 p_1(0)u(0) = \int_0^d f(x)u(x)dx$$
即
$$\beta\cos r_n = \int_0^1 f(x)\cos(r_n x)dx$$

■

习题 7.19 考虑边值问题

$$\varepsilon y'' + b(x)y' + C(x)y = 0, \quad y(0) = A, \quad y(1) = B$$

试证: $b(x) > 0$ 时边界层位置在 $x = 0$ 处, $b(x) < 0$ 时, 边界层位置在 $x = 1$ 处.

首先求解边界层区域外部的解, 设外解为 $y^{(o)} = y_0^{(o)} + O(\varepsilon)$. 其首项 $y_0^{(o)}$ 是原方程的退化解, 即

$$b(x)y_0'^{(o)} + C(x)y_0^{(o)} = 0 \Longrightarrow y_0^{(o)} = \exp\left(-\int \frac{C(x)}{b(x)}dx\right)$$

再求边界层内部的解. 引入放大变量

$$\xi = (x - x_0)/\varepsilon^{\lambda}, \quad \text{其中 } x_0 = 0 \text{ 或 } 1$$

代入原方程得

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\frac{d^2y}{d\xi^2} + b(\xi,\varepsilon)\varepsilon^{-\lambda}\frac{dy}{d\xi} + C(\xi,\varepsilon)y = 0$$

对 $b(\xi,\varepsilon)$ 和 $C(\xi,\varepsilon)$ 展开并代入上式得

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\frac{d^2y}{d\xi^2} + \big(b_0 + O(\varepsilon^{\lambda})\big)\varepsilon^{-\lambda}\frac{dy}{d\xi} + \big(C_0 + O(\varepsilon^{\lambda})\big)y = 0 \tag{13}$$

下面对 λ 的三种情况分别作讨论, 如下:

- 当 $\lambda > 1$ 时, 式 (13) 第一项在 $\varepsilon \to 0$ 时远大于其它项, 所以首项内解 $y_0^{(i)}$ 满足

  $$\frac{d^2y_0^{(i)}}{d\xi^2} = 0 \Longrightarrow y_0^{(i)} = C_1\xi + C_2$$

  显然 $\lim_{x\to x_0} y_0^{(o)}$ 有限, 而 $\lim_{\xi\to\infty} y_0^{(i)} = \infty$, 无法匹配.

- 当 $0 < \lambda < 1$ 时, 式 (13) 第二项在 $\varepsilon \to 0$ 时远大于其它项, 所以首项内解 $y_0^{(i)}$ 满足

  $$\frac{dy_0^{(i)}}{d\xi} = 0 \Longrightarrow y_0^{(i)} = C(\text{常数})$$

  显然也无法与外解匹配.

- 当 $\lambda = 1$ 时, 式 (13) 第三项可忽略, 所以首项内解 $y_0^{(i)}$ 满足

  $$\frac{d^2y_0^{(i)}}{d\xi^2} + b_0\frac{dy_0^{(i)}}{d\xi} = 0 \Longrightarrow y_0^{(i)} = C_1e^{-b_0\xi} + C_2$$

  下面分别讨论 $b_0 > 0$ 和 $b_0 < 0$ 的两种情况:

  1. 当 $b_0 > 0$ 时, 若边界层位置为 $x = 1$, 则有 $(x - x_0) < 0$. 故在边界层外缘 $\xi = (x - x_0)/\varepsilon^{\lambda} \to -\infty$, 因而 $y_0^{(i)} = C_1e^{-b_0\xi} + C_2 \to C_1e^{+\infty} + C_2$ 无法与外解匹配. 此时 $x = 1$ 不是边界层位置. **因此, 当 $b_0 > 0$ 时, 边界层位置为 $x = 0$.**

2. 当 $b_0 < 0$ 时, 若边界层位置为 $x = 0$, 则有 $(x - x_0) > 0$. 故在边界层外缘 $\xi = (x - x_0)/\varepsilon^\lambda \to +\infty$, 因而 $y_0^{(i)} = C_1 e^{-b_0 \xi} + C_2 \to C_1 e^{+\infty} + C_2$ 无法与外解匹配. 此时 $x = 0$ 不是边界层位置. **因此, 当 $b_0 < 0$ 时, 边界层位置为 $x = 1$.**

∎

习题 7.22 试求边值问题

$$\varepsilon y'' + (2x^2 + x + 1)y' = 4x + 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

一阶的一致有效展开式.

由习题 (7.19) 及 $2x^2 + x + 1 > 0$ 可知, 该问题的边界层在 $x = 0$ 处. 先求外解, 由原方程可得

$$(2x^2 + x + 1)y_0'^{(o)} = 4x + 1, \quad y_0^{(o)}(1) = \beta$$

由上式及边界条件可求得外解为

$$y_0^{(o)} = \ln(2x^2 + x + 1) + \beta - 2\ln 2$$

设内变量为 $\xi = x/\varepsilon^\lambda$, 代入原方程式

$$\varepsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y^{(i)}}{d\xi^2} + (2\varepsilon^\lambda \xi^2 + \xi + \varepsilon^{-\lambda}) \frac{dy^{(i)}}{d\xi} = 4\varepsilon^\lambda \xi + 1$$

即

$$\frac{d^2 y^{(i)}}{d\xi^2} + (2\varepsilon^{3\lambda-1}\xi^2 + \varepsilon^{2\lambda-1}\xi + \varepsilon^{\lambda-1}) \frac{dy^{(i)}}{d\xi} - (4\varepsilon^{3\lambda-1}\xi + \varepsilon^{2\lambda-1}) = 0$$

由于外解忽略了第一项, 所以在边界层中应该包含第一项, 因此 $\lambda \geq 1$, 当 $\lambda > 1$ 时上式首项为主要项, 其解不能与外解匹配. 因此 $\lambda = 1$, 此时上式化为

$$\frac{d^2 y^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{dy^{(i)}}{d\xi} = 0 \Rightarrow y^{(i)} = C_0 e^{-\xi} + C_1$$

由边界条件 $y^{(i)}(0) = \alpha$ 可得 $C_0 + C_1 = \alpha$. 因此有 $y^{(i)} = C_0 e^{-\xi} + (\alpha - C_0)$.

对内外解应用 Prandtl 匹配原理 ($\lim_{x\to 0} y^{(o)} = \lim_{\xi\to\infty} y^{(i)}$) 得

$$\beta - 2\ln 2 = \alpha - C_0 \Rightarrow C_0 = \alpha - \beta + 2\ln 2$$

综上所述, 最终解为

$$y = y^{(o)} + y^{(i)} - [y^{(o)}]^{(i)} = \ln(2x^2 + x + 1) + (\beta - 2\ln 2) + (\alpha - \beta + 2\ln 2)e^{-x/\varepsilon}$$

∎

习题 7.23 试求方程

$$\varepsilon y'' + xy' - xy = 0, \ \ y(-1) = \alpha, \ \ y(1) = \beta$$

一阶的一致有效展开式.

首先判断边界层位置: 当 $x > 0$, 边界层在 $x = 0$. 当 $x < 0$, 令 $x' = -x$, 则原方程可变换为 y 关于 x' 的方程

$$\varepsilon y(x')'' - x'y(x')' + x'y(x') = 0, \ \ y(x' = 1) = \alpha, \ \ y(x' = -1) = \beta$$

则可知边界层在 $x' = 0$ 即 $x = 0$ 处. 由以上分析可知边界层在 $x = 0$ 处, 两边是外解区域. 先求外解, 由原方程可知

$$y'^{(o)} - y^{(o)} = 0 \Rightarrow y^{(o)} = C_0 e^x$$

外解左区域有边界条件 $y_l^{(o)}(-1) = \alpha$, 得 $y_l^{(o)} = \alpha e^{x+1}$. 外解右区域边界条件 $y_r^{(o)}(1) = \beta$, 得 $y_r^{(o)} = \beta e^{x-1}$. 因此外解为

$$y^{(o)} = \begin{cases} \alpha e^{x+1} & -1 < x < 0 \\ \beta e^{x-1} & +0 < x < 1 \end{cases}$$

设内变量为 $\xi = x/\varepsilon^\lambda$, 代入原方程式

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi\frac{dy}{d\xi} - \varepsilon^\lambda \xi y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{d\xi^2} + \varepsilon^{2\lambda-1}\xi\frac{dy}{d\xi} - \varepsilon^{3\lambda-1}\xi y = 0$$

由于外解忽略了第一项, 所以在边界层中应该包含第一项, 因此有 $\lambda = 1/2$, 此时上式转化为

$$\frac{d^2y^{(i)}}{d\xi^2} + \xi\frac{dy^{(i)}}{d\xi} = 0 \Rightarrow y^{(i)} = C_1\int_0^\xi \exp(-\zeta^2/2)d\zeta + C_2$$

将上式与外解的左右区域分别匹配

$$\lim_{x\to 0^-} y_l^{(0)} = \lim_{\xi\to -\infty} y_l^{(i)} \Rightarrow \alpha e^{+1} = -\sqrt{\pi/2}C_1 + C_2$$

$$\lim_{x\to 0^+} y_r^{(0)} = \lim_{\xi\to +\infty} y_l^{(i)} \Rightarrow \beta e^{-1} = +\sqrt{\pi/2}C_1 + C_2$$

由以上两式可解得 $C_1 = \frac{\beta/e-\alpha e}{\sqrt{2\pi}}$, $C_2 = \frac{\alpha e+\beta/e}{2}$, 因此内解为

$$y^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\beta/e - \alpha e)\int_0^\xi \exp(-\zeta^2/2)d\zeta + \frac{1}{2}(\alpha e + \beta/e)$$

综上所述

$$y_l = y_l^{(i)} + y_l^{(o)} - [y_l^{(o)}]^{(i)} = \frac{\beta/e - \alpha e}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x/\sqrt{\varepsilon}} e^{-\zeta^2/2}d\zeta + \frac{1}{2}(\alpha e + \beta/e) + \alpha e^{x+1} - \alpha e$$

$$y_r = y_r^{(i)} + y_r^{(o)} - [y_r^{(o)}]^{(i)} = \frac{\beta/e - \alpha e}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x/\sqrt{\varepsilon}} e^{-\zeta^2/2}d\zeta + \frac{1}{2}(\alpha e + \beta/e) + \beta e^{x-1} - \beta/e$$

■

习题 7.26 试求边值问题

$$\varepsilon y'' + y' = 2x,\ \ y(0) = \alpha,\ \ y(1) = \beta$$

的一致有效展开式.

由习题 (7.19) 及 y' 前的系数 1 大于 0 可知, 该问题的边界层在 $x = 0$ 处. 先求外解, 设外解形式为 $y^{(o)} = y_0^{(o)} + \delta_1(\varepsilon) y_1^{(o)} + \cdots$, 且 $\delta_1(\varepsilon \to 0) \to 0$. 对于本题取 $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon$. 由原方程得

$$y'^{(o)}_0 = 2x,\ \ y_0^{(o)}(1) = \beta$$

$$y''^{(o)}_0 + y'^{(o)}_1 = 0$$

由上式及边界条件可求得外解为

$$y_0^{(o)} = x^2 + \beta - 1, y_1^{(o)} = -2x + C_1^{(o)}\ \ \rightarrow\ \ y^{(0)} = x^2 + \beta - 1 + \varepsilon\big(-2x + C_1^{(o)}\big)$$

设内变量为 $\xi = x/\varepsilon^\lambda$, 代入原方程式

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\frac{d^2y^{(i)}}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\lambda}\frac{dy^{(i)}}{d\xi} = 2\xi\varepsilon^\lambda\ \ \Rightarrow\ \ \frac{d^2y^{(i)}}{d\xi^2} + \varepsilon^{\lambda-1}\frac{dy^{(i)}}{d\xi} = 2\xi\varepsilon^{3\lambda-1}$$

由于外解忽略了第一项, 所以在边界层中应该包含第一项, 因此 $\lambda = 1$, 此时上式化为

$$\frac{d^2y^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{dy^{(i)}}{d\xi} = 2\xi\varepsilon^2 \tag{14}$$

显然内展开的形式应为

$$y^{(i)} = y_0^{(i)}(\xi) + \varepsilon^2 y_1^{(i)}(\xi) + \cdots$$

代入式 (14), 令 ε 的同次幂的系数相等有

$$\frac{d^2y_0^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{dy_0^{(i)}}{d\xi} = 0,\ \ \frac{d^2y_1^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{dy_1^{(i)}}{d\xi} = 2\xi$$

由 $x = 0$ 处的边界条件 $y_0^{(i)}(0) = \alpha$, $y_1^{(i)}(0) = 0$ 可得零阶和一阶内解为

$$y_0^{(i)} = C_0^{(i)}e^{-\xi} + (\alpha - C_0^{(i)}),\ \ y_1^{(i)} = C_1^{(i)}e^{-\xi} - C_1^{(i)} + \xi^2 - 2\xi$$

现在按 Van Dyke 匹配原理进行匹配 ($m = n = 3$).

- 两项外展开式:　$x^2 + \beta - 1 + \varepsilon(-2x + C_1^{(o)})$,
  改写为内变量:　$\varepsilon^2\xi^2 + \beta - 1 + \varepsilon(-2\varepsilon\xi + C_1^{(o)})$,
  取三项内展开:　$(\beta - 1) + \varepsilon C_1^{(o)} + \varepsilon^2(\xi^2 - 2\xi)$,
  改写为外变量:　$x^2 + \beta - 1 - 2\varepsilon x + \varepsilon C_1^{(o)}$.

- 两项内展开式:　$C_0^{(i)}e^{-\xi} + (\alpha - C_0^{(i)}) + \varepsilon^2\big(C_1^{(i)}e^{-\xi} - C_1^{(i)} + \xi^2 - 2\xi\big)$,
  改写为外变量:　$C_0^{(i)}e^{-x/\varepsilon} + (\alpha - C_0^{(i)}) + \varepsilon^2 C_1^{(i)}e^{-x/\varepsilon} - \varepsilon^2 C_1^{(i)} + x^2 - 2x\varepsilon$,
  取三项外展开:　$(\alpha - C_0^{(i)}) + x^2 - 2x\varepsilon - \varepsilon^2 C_1^{(i)}$.

应用 Van Dyke 匹配原理可得

$$\beta - 1 = \alpha - C_0^{(i)}, C_1^{(o)} = C_1^{(i)} = 0$$

因此外内解为

$$y^{(o)} = x^2 + \beta - 1 - 2x\varepsilon$$
$$y^{(i)} = (\alpha - \beta + 1)e^{-\xi} + (\beta - 1) + \varepsilon^2\left(\xi^2 - 2\xi\right)$$

综上所述, 最终解为

$$y = y^{(0)} + y^{(i)} - [y^{(i)}]^{(o)} = x^2 - 2x\varepsilon + (\alpha - \beta + 1)e^{-x/\varepsilon} + (\beta - 1)$$

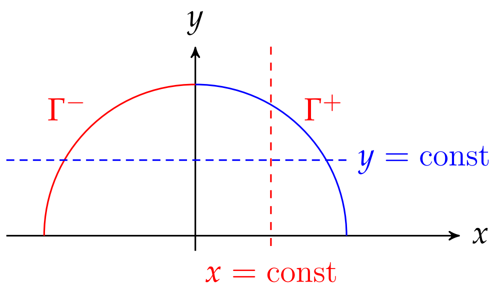
■

习题 7.29 试求下列边值问题的首项解:

$$\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = u_x$$

$u|_\Gamma = f(x)$, Γ 为 $x^2 + y^2 = R^2$ 的上半圆; $u = F(x)$, 当 $y = 0$; $f(-R) = F(-R)$.

原方程序的退化问题为



$$u_{x,0} = 0$$

它的特征线为 $y = \text{const}$, 通解为

$$u_0 = f(x(y))$$

该解在与 x 轴平行的直线 $y = \text{const}$ 上有相同的值, 因此不能满足 Γ^+ 或 Γ^- 上的某一边界条件. 因此另一边界上出现边界层. 把原方程中的 y 看作参数, 并看作 x 为自变量的常微分方程, 由习题 7.19 知在 Γ^+ 附近有边界层. 令

$$\eta = \frac{x - x^+(y)}{\varepsilon}$$

$$u(x, y, \varepsilon) = V(\eta, y, \varepsilon) = V_0(\eta, y) + \cdots$$

代入到原方程, 注意到

$$u_x = \frac{V_\eta}{\varepsilon}, \qquad u_{xx} = \frac{V_{\eta\eta}}{\varepsilon^2}$$
$$u_y = V_\eta \frac{-x'^+(y)}{\varepsilon} + V_y, \quad u_{yy} = V_{\eta\eta}\left[\frac{x'^+(y)}{\varepsilon}\right]^2 - V_\eta \frac{x''^+(y)}{\varepsilon} + 2V_{y\eta}\frac{x'^+(y)}{\varepsilon} + V_{yy}$$

可得

$$(1 + [x'^+(y)]^2)V_{\eta\eta} - V_\eta = 0 \tag{15}$$

其边界条件为

$$V(0, y) = f^+, V(-\infty, y) = f^-$$

令 $1+[x'^{+}(y)]^2 = K$, 则方程 (15) 符合上述边界条件的解为

$$V_0 = (f^+ - f^-)e^{\eta/K} + f^-$$

同样, 在与 y 轴平行的直线 $x = \text{const}$ 上有相同的值, 因此不能满足 Γ 或 F 上的某一边界条件. 因此 F 上也出现边界层, 取内变量

$$\xi = \frac{y}{\varepsilon^\lambda}, \quad u(x,y,\varepsilon) = u(x,\xi,\varepsilon) = W(x,\xi) + \cdots$$

代入到原方程, 注意到

$$u_x = W_x, \quad u_{xx} = W_{xx}$$

$$u_y = \frac{W_\xi}{\varepsilon^\lambda}, \quad u_{yy} = \frac{W_{\xi\xi}}{\varepsilon^{2\lambda}}$$

可得

$$\varepsilon\Big(\frac{W_{\xi\xi}}{\varepsilon^{2\lambda}} + W_{xx}\Big) = W_x$$

为使 $W_{\xi\xi}$ 与 W_x 同阶, $\lambda = 1/2$. 因此上式变为

$$W_{\xi\xi} - W_x = 0$$

其边界条件为

$$W(x,0) = F(x), \quad W(x,+\infty) = f(x), \quad W(-R,0) = F(-R) = f(-R)$$

符合上述边界条件 $y = 0$ 附近的内解为

$$W_0 = f(-R) + \int_0^{x+R} \frac{[F(\zeta) - f(-R)]\xi}{2\sqrt{\pi(x+R-\zeta)^3}} \exp\Big[\frac{-\xi^2}{4(x+R-\zeta)}\Big] d\zeta$$

■

附录

摄动理论 2012 年期末试题[1]

1. 确定下列函数的阶, 并按大小排列 ($\varepsilon \to 0$)

$$\ln\sinh\frac{1}{\varepsilon},\quad \ln\csc\varepsilon,\quad \exp\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\varepsilon}}{-\sin\varepsilon^2}\right),\ \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon^{4/3}},\quad \tan\sqrt{\varepsilon},\quad \ln(2+\sin\varepsilon),$$

$$\varepsilon\sin\varepsilon,\quad \ln\left[1+\frac{\ln(1+1\varepsilon)}{1-\varepsilon}\right],\quad \varepsilon^{1/2}(1-\cos\varepsilon)^{-1/2},\quad \ln(1+\varepsilon)$$

2. 试求下述问题的首项解

$$u''+\varepsilon u'+u+\varepsilon u^3=0$$

3. 试求下述问题的可解性条件.

$$u''+4u=f(x),\ u(0)=a,\ u'(\pi/4)=b$$

4. 试求一致有效展开的首项

$$\varepsilon y''+xy'+xy=0,\ u(0)=\alpha,\ y(1)=\beta$$

[1]**说明:** 本试题是本人考试后立刻回忆出来的, 供后届同学参考.

渐进分析 2011 年期末试题[2]

中国科学院研究生院

课程编号：32173Z

试 题 专 用 纸　（期末考试）

课程名称：数学物理中的渐进方法

任课教师：李家春、周显初

1.（25 分）关于量阶和渐进级数的基本概念

1）（10 分）请按小量 ε 的降阶次序排列以下各表达式：

ε^2， $\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$， $\ln\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$， $e^{-1/\varepsilon}$， $\varepsilon\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$， $\varepsilon^{3/2}$，1， ε^{100}

2）（10 分）试求 $\tanh^{-1}(1-x)$， $x\to 0$ 的量阶。

3）（5 分）给出渐进级数的定义，说明渐进和收敛级数的差别。

2.（20 分）计算下述积分的渐进级数表达式：

$I(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{3/2}\ln(1+t^2)dt$， $\lambda\to\infty$　（注：原题可能有误，可把 $I(x)$改为 $I(\lambda)$）

3.（30 分）关于波动的理论和应用。

1）（10 分）海底下陷造成的海啸先导波的波形如同 Airy 函数的导数，给出先导波前、后远处波形的渐进表达式。

2）比较浅水波，地震波的 P 波，S 波的波速，（注：$c=\sqrt{gH}$， $c_p=\sqrt{\dfrac{\lambda+2G}{\rho}}\sim 6km/s$，

$c_s=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}\sim 4km/s$），$H$ 水深 4km，岩石密度 2600kg/m^3，G 剪切模量，λ 为拉梅系数。若地震站台接收到 P 波，S 波的时差为 100s，探测到两个波后立即发出警报，试问离开海底地震震源距离为 1440km 的沿海城市留有多少时间避险和救生。

3）（10 分）声波的波速为 340m/s，给出人能够听到的声音的波长范围。假定高速列车噪声源为直径 10m 的圆柱表面源，声压级为 97dB，试求离列车 20m 处的噪声声压级。

$Lp=20\log\dfrac{p}{p_0}$， $p_0=20\mu\text{Pa}$

4.（25 分）用 WKB 近似求解下述含大参数方程的渐进解，并得到特征值和特征函数：

$xy''+2y'+\lambda^2x(1+x^3)^4y=0$， $\lambda\gg O(1)$，且 $y(0)$有界，$y(1)=0$

[2]说明：2012 年的试题与 2011 年试题相仿.