I.S.E.T. BIZERTE
Novembre 2022

Département de Génie électrique.
Master R.A.I.A. Algorithmes d'optimisation.

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{M}_2$ et on se propose de résoudre l'équation:

$$(E)\ X^2 = 1$$

Soit Δ_θ la droite du plan qui fait un angle θ avec l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.

Partie A:

1. Montrer que S_θ, la symétrie orthogonale d'axe Δ_θ est une solution de l'équation (E).
2. Montrer S_{Δ_θ} est diagonalisable en indiquant ses valeurs propres.
3. Trouver les vecteurs propres.
4. Ecrire la matrice de S_{Δ_θ} dans une base orthonormale de vecteurs propres.
5. Ecrire les matrices de passage. En déduire la matrice de S_{Δ_θ} dans la base canonique.

Partie B

On se propose maintenant d'étudier la réciproque.

1. Soit A une matrice non nulle de $\mathbb{M}_n$. On suppose qu'il existe une matrice non nulle B telle que:
   $$AB = 0 \text{ (la matrice nulle)}$$
   Montrer que A n'est pas inversible.
2. On rappelle que si A est une matrice qui n'est pas inversible alors il existe des vecteurs X non nuls tels que:
   $$AX = 0$$
3. Soit A une matrice telle que $A^2 = I_2$.
   - Montrer que ses valeurs propres sont 1 et -1.
   - Montrer par un contre-exemple que A n'est pas forcément une symétrie orthogonale.
   - Trouver la forme générale des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{M}_2$.

Exercice 3
Soit A une matrice diagonalisable de $\mathbb{M}_n$

- Quel est le degré de son polynôme caractéristique et que vaut le coefficient de X^n?
- Que vaut le coefficient constant de son polynôme caractéristique?
- Que vaut le coefficient de X^{n-1}?

On retiendra que ces faits sont vérifiés aussi chez les matrices qui ne sont pas diagonalisables.

Exercice 4
On notera par $< .,. >$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

1. On se place d'abord dans $\mathbb{R}^2$. Soient u et v deux vecteurs non colinéaires. On pose $e_1 = \frac{u}{||u||}$, et $w = v - < v, e_1 > e_1$.
   Montrer que (e_1, e_2) forment une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$, où $e_2 = \frac{w}{||w||}$.

2. On se place maintenant dans $\mathbb{R}^3$. Soient u, v et w trois vecteurs non coplanaires. On pose:
   - $e_1 = \frac{u}{||u||}$
   - $e_2 = \frac{\tilde{v}}{||\tilde{v}||}$, où $\tilde{v} = v - < v, e_1 > e_1$.
   - $e_3 = \frac{\tilde{w}}{||\tilde{w}||}$ où $\tilde{w} = w - < w, e_2 > e_2 - < w, e_1 > e_1$.
     Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

   Cette procédure, qui consiste à construire une base orthonormée directe à partir d'une base qui ne l'est pas, est la restriction à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ d'un algorithme plus général, dit algorithme d'orthonormalisation de Gramm-Shmidt.
   Donner la généralisation de cette procédure aux espaces $\mathbb{R}^n$ (version complète de l'algorithme).

Exercice 5
Dans l'espace $\mathbb{M}_3$ on considère la droite dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$ et la rotation d'angle $\theta \neq k\pi$ autour de cet axe.

- Trouver les vecteurs propres.
- En utilisant une procédure d'orthonormalisation, donner une base orthonormale qui contienne ces vecteurs propres.
- Ecrire la matrice de cette rotation dans la base canonique.

Exercice 6
On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Soit Δ une droite passant par l'origine O. On notera par S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ, et par $R_{\Delta,\phi}$ la rotation d'axe Δ et d'angle ϕ. On suppose que $\phi \neq k\pi$.
   - Montrer que S_Δ a une valeur propre double et une valeur propre simple.
   - Ecrire la matrice de S_Δ dans une base orthonormale de vecteurs propres, puis dans la base canonique.
   - Montrer que $R_{\Delta,\phi}$ possède une seule valeur propre réelle.
     - Donner un vecteur propre unitaire correspondant à cette valeur propre.
     - Compléter ce vecteur par une base orthonormée.
     - Ecrire la matrice de $R_{\Delta,\phi}$ dans cette base, puis dans la base canonique.
2. On considère le plan vectoriel d'équation

$$P: \; x + y + z = 0$$

   On notera par S_P la symétrie orthogonale par rapport à P.
   - Ecrire le polynôme caractéristique de S_P.
   - Montrer que S_P est diagonalisable et trouver une base orthonormale de vecteurs propres.
   - Ecrire la matrice de S_P dans la base canonique.

Exercice 7

On pose

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser cette matrice.
2. Vérifier que les vecteurs propres constituent une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.
3. Quelle est l'image du cercle unité par la transformation que représente cette matrice. On donnera une équation cartésienne.
4. Soit $A \in \mathbb{M}_3$ diagonalisable dans une base orthonormale avec des valeurs propres positives.
   Quelle est l'image de la sphère unité par la transformation que cette matrice représente?

Exercice 8

On considère la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$, les points $A(1, 2, -3)$ et $B(2, 3, -5)$.

1. Vérifier que A et B sont deux points de la surface S représentative de la fonction f.
2. On se place au point A et on regarde dans la direction du point B. Quelle est la valeur de la pente de S au point A dans cette direction? Donner le pourcentage.

3. Quelle est la direction de la plus forte pente au point A? Calculer sa valeur.

<u>Exercice 9</u>
Pour une certaine région de l'espace, la température est donnée par

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

où T est en degrés Celsius et x, y, z sont en mètres.

- Donner la température au point $P(2, 1, 2)$.
- Trouver le taux de variation de la température au point $P(2, 1, 2)$ dans la direction du point $Q(3, 3, 3)$. Interpréter.
- Déterminer la direction dans laquelle la température augmente le plus rapidement si on se place au point $P(2, 1, 2)$.