**Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Bizerte**
**Département de génie électrique**

# Cours et travaux dirigés de Traitement de signal

Proposé par :

**Mme Hela Boulehmi Chtara**



**A.U. : 2014/2015**

# PRESENTATION DU MODULE

**Unité d'enseignement :**

Automatique et traitement de signal (ATS)

**Module :**

Traitement de signal

**Objectifs :**

- Connaître les principaux outils de traitement de signaux analogiques et numériques
- Maîtriser les différentes étapes de numérisation des signaux (échantillonnage, quantification et codage).
- Connaître les propriétés des différents filtres analogiques et numériques.

**Pré-requis :**

Signaux et systèmes linéaires (L1-S2)

# Table des matières

**Chapitre I.**

# GENERALITES SUR LES SIGNAUX

## I.1. DEFINITIONS

### I.1.1. Signal

Un signal est souvent défini comme étant le support physique d’information comme par exemple, les signaux sonores transportant un message à l’oreille ou les signaux visuels apportant une information à l’œil…

Mathématiquement, les signaux sont représentés par des fonctions d’une ou plusieurs variables, mais la grande majorité des signaux sont fonction d’une variable qui est généralement le temps. L’information transportée par un signal se manifeste alors par une variation au cours du temps.

### I.1.2. Bruit

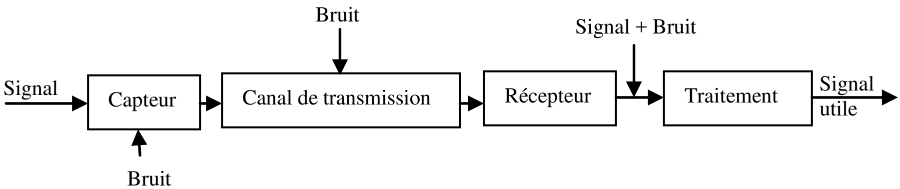
Un bruit correspond à tout phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal. Cependant, les notions de signal et bruit sont très relatives : Pour un technicien des télécommunications qui écoute un émetteur lointain relayé par un satellite, le signal provenant d’une source astrophysique (soleil ou autre) placée malencontreusement dans la même direction est un bruit. Mais pour l’astronome qui s’intéresse à la source astrophysique, c’est le signal du satellite qui est un bruit. Ainsi, le bruit est ce qui se superpose au signal que l'on voudrait étudier.

### I.1.3. Traitement de signal

C'est la discipline visant l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Cette discipline s'appuie sur des techniques comme :

- la théorie du signal et de l'information (les mathématiques pour la représentation et le calcul de signaux, les probabilités pour la théorie des processus aléatoires…)
- les ressources de l'électronique (transmission, codage…)
- les ressources de l'informatique (algorithmes de calcul, identification…)
- les ressources de la physique appliquée (électricité, lignes de transmission de données…)

Un système de traitement de signal a la structure suivante :




Le traitement de signal trouve son application dans différents domaines. Nous en citons :

- Télécommunication
- Techniques de mesure

- Etude de vibrations en mécanique
- Surveillance de processus industriels
- Reconnaissance de formes
- Traitement d'images
- Analyses biomédicales
- Géographie
- Séismologie
- Astronomie
- Radar
- Acoustique (son)

### I.1.4. Rapport signal / bruit

Le rapport signal sur bruit (ou SNR pour Signal Noise Ratio) mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal ($P_S$) et du bruit ($P_N$). Il est souvent donné en décibels (dB) comme suit :

$$\boxed{(\frac{S}{N})_{dB} = 10log\ \frac{P_S}{P_N}}$$

- Si PS > PN, $\frac{P_S}{P_N} > 1$ donc SNR > 0
- Si PS = PN, $\frac{P_S}{P_N} = 1$ donc SNR = 0
- Si PS < PN, $\frac{P_S}{P_N} < 1$ donc SNR < 0 : signal dégradé

### I.1.5. Système

Un système est un dispositif représenté par un modèle mathématique de type Entrée/Sortie qui apporte une déformation au signal

- Linéarité : La linéarité d'un système est définie par le théorème de superposition. Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont les réponses respectives du système aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ alors le système est linéaire si :

$$s[a\,x_1(t) + b\,x_2(t)] = a\,s[x_1(t)] + b\,s[x_2(t)] = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$$

- Invariance dans le temps : Soit un système transformant l'entrée x(t) en une sortie y(t). le système est invariant dans le temps si tout décalage sur l'entrée provoque le même décalage sur la sortie. Autrement dit :

$$s[x(t-t_0)] = y\,(t-t_0)$$

- Causalité : Un système est causal si le signal de sortie ne dépend que des valeurs antérieures ou passées du signal d'entrée (le système dépend du présent et du passé de l'entrée).
  Un système est anti-causal si sa sortie dépend des valeurs présentes et futures de l'entrée.
  Un système est non causal si sa sortie dépend des valeurs présentes, passées et futures de l'entrée.

## I.2. CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Il existe plusieurs modes de classification de signaux, selon le critère considéré.

### I.2.1. Classification phénoménologique:

Elle concerne la nature de l'évolution du signal qui peut être prédéterminé ou non prévisible. Pour cela, on parle de deux types de signaux :

a. Signal déterministe ou certain ou non aléatoire : C'est un signal dont l'évolution en fonction du temps est parfaitement prédite et peut être représentée par un modèle mathématique approprié.

b. Signal aléatoire : C'est un signal dont le comportement temporel est imprévisible et sa description s'appuie sur l'étude de ses propriétés statistiques (modèle probabilistique).

### I.2.2. Classification énergétique :

Elle considère comme critères les notions d'énergie et de puissance moyenne d'un signal. Pour un signal x(t) on définit :

| | |
|---|---|
| Energie de x(t) | $W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$ |
| Puissance moyenne de x(t) | $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$ |

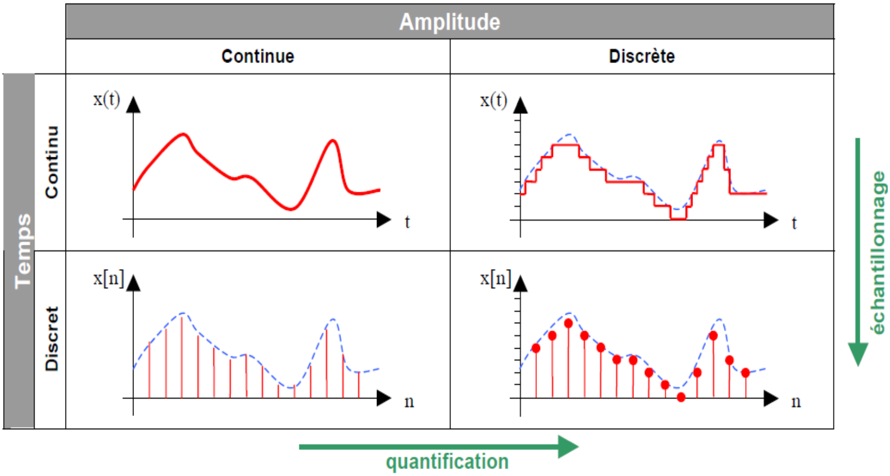
On distingue donc les signaux à :

- ❖ Energie finie (donc puissance moyenne nulle) : $W < \infty$ et $P = 0$
- ❖ Puissance moyenne finie (et énergie infinie) : $P < \infty$

### I.2.3. Classification morphologique :

Elle considère la nature du temps et de l'amplitude d'un signal, qui peuvent être continus ou discrets. On définit alors quatre classes de signaux :

- ❖ Les signaux analogiques dont l'amplitude et le temps sont continus
- ❖ Les signaux quantifiés dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- ❖ Les signaux échantillonnés dont l'amplitude est continue et le temps discret
- ❖ Les signaux numériques dont l'amplitude et le temps sont discrets



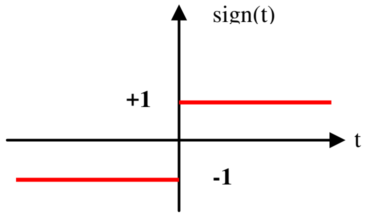
## I.3. SIGNAUX PARTICULIERS

Il existe certains signaux particuliers fréquemment utilisés en traitement de signal et qui possèdent une modélisation propre.

### I.3.1. Fonction signe :

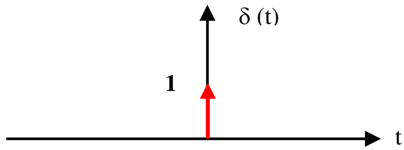
$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

On admet que sign(0) = 0




### I.3.2. Impulsion de Dirac :

$$\delta\,(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

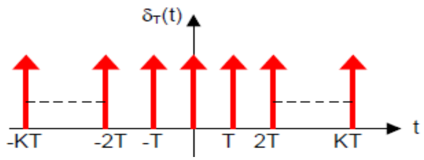



### I.3.3. Train d'impulsions ou peigne de Dirac :

On appelle peigne de Dirac une succession périodique d'impulsions de Dirac.

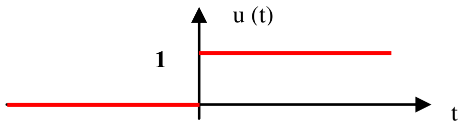
$$\delta_T\,(t) = \sum_{k\to -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

T est la période du peigne.
Cette suite est parfois appelée fonction d'échantillonnage.



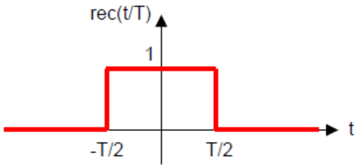

### I.3.4. Echelon :

$$u\,(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$



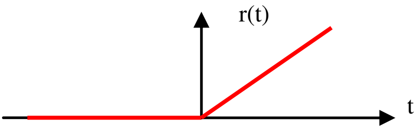
### I.3.5. Fenêtre/Porte rectangulaire :

$$rect(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \end{cases}$$




### I.3.6. Rampe :

$$r(t) = t\,u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t \text{ si } t > 0 \end{cases}$$




### I.3.7. Sinus cardinal :

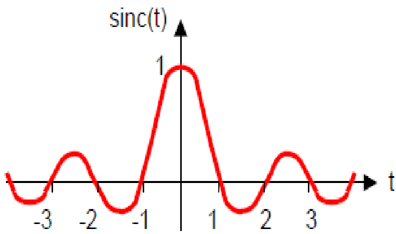
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Cette fonction joue un rôle très important en traitement du signal.

*__Propriétés :__*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t)dt = 1$$




## I.4. REPRESENTATION DES SIGNAUX

D'habitude, notre perception des phénomènes physiques nous incite à décrire les signaux en fonction de la variable <u>temps</u> *t* (représentation temporelle). Mais en électronique, la connaissance des propriétés spectrales d'un signal est primordiale. C’est pourquoi on utilise souvent une représentation en fonction de la fréquence (représentation fréquentielle) pour caractériser un signal ou un système.

*Exemple :* le support de transmission du téléphone présente une bande passante de 3kHz alors que la bande passante des signaux audibles est de 20kHz. Ceci explique pourquoi un signal audio de haute qualité transmis par voie téléphonique sera perçu comme de mauvaise qualité par le récepteur.

## I.5. EXERCICES

### Exercice I.1

1. Ecrire la fonction f(t) définie ci-dessous en fonction de l'échelon u(t)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Ecrire la fonction g(t) définie ci-dessous en fonction de la rampe r(t)

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t \le t_0 \\ 2t_0 - t & \text{si } t_0 \le t \le 2t_0 \end{cases}$$

### Exercice I.2

Considérer la fonction x(t) définie par :

$x(t) = A\,(u(t-t_0) - u(t-t_1))$ où A est une constante positive

1. Tracer cette fonction
2. Donner la classe énergétique de x(t)
   Déduire la puissance moyenne de ce signal sans la calculer

# Chapitre II.

# TRAITEMENT DU SIGNAL ANALOGIQUE

## II.1. SERIE DE FOURRIER

### II.1.1. Définition

La décomposition d'un signal en série de Fourier consiste à le mettre sous forme de somme de sinusoïdes, facilitant ainsi le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel. Les séries de Fourier sont principalement utilisées dans le cas de signaux périodiques. Selon Dirichlet, pour qu'un signal puisse être décomposable, il doit être à variations bornées.

Soit s(t) un signal périodique de période $T_0$. La décomposition en série de Fourier de s(t) permet de l'écrire sous la forme :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)]$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ : pulsation

Avec :

$$\begin{cases} S_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t)dt \\ A_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} s(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt \\ B_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} s(t)\sin(n\omega_0 t)dt \end{cases}$$

❖ Vocabulaire :

- $S_0$ représente la valeur moyenne du signal s(t).
- Le signal de pulsation $\omega_0$ est appelé le fondamental, alors que les signaux de pulsation $n\omega_0$ sont appelés les harmoniques de rang n.

❖ Remarque :

Une simple translation du signal s(t) suivant l'axe du temps fera modifier les coefficients $A_n$ et $B_n$. Cette écriture ne permet donc pas de conserver la puissance du signal après translation. On définit donc une autre écriture permettant de traduire cette translation en déphasage, et parsuite de conserver la puissance du signal.

On pose donc : $A_n = C_n \sin\Phi_n$ et $B_n = C_n \cos\Phi_n$ d'où :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t + \Phi n)$$

où : $\Phi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$ et $C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$

### II.1.2. Développement en termes complexes

Le développement en termes complexes de la série de Fourier est obtenu en introduisant les expressions complexes de $\cos(n\omega_0 t)$ et $\sin(n\omega_0 t)$ :

$$\begin{cases} \cos(n\omega_0 t) = \dfrac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \\ \sin(n\omega_0 t) = \dfrac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n \, e^{jn\omega_0 t} \quad \text{où} \quad S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Pour tout entier n > 0, on définit les relations suivantes :

$$S_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \quad \text{et} \quad S_{-n} = \frac{A_n + jB_n}{2}$$

- ❖ Remarques :
  - Si s(t) est paire : $B_n = 0$ donc $S_n = S_{-n}$
  - Si s(t) est impaire : $A_n = 0$ donc $S_n = -S_{-n}$
- ❖ Théorème de Parceval (ou de la puissance) :
  - Si l'on connait les coefficients Cn (ou également An et Bn), on peut calculer la puissance du signal comme suit :

$$P = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

  - Si l'on connait les termes complexes alors :

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_k|^2$$

## II.2. TRANSFORMEE DE FOURIER

La transformée de Fourier permet d'obtenir une représentation spectrale (répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase et de l'énergie) d'un signal à partir de son expression temporelle.

### II.2.1. Définition

La transformée de Fourier S(f) d'un signal s(t) est définie comme suit :

$$S(f) = TF[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Si cette transformée existe, on définit la transformée de Fourier inverse comme suit :

$$s(t) = TF^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df$$

### II.2.2. Propriétés

- Linéarité : $TF[\alpha\, s_1(t) + \beta\, s_2(t)] = \alpha\, S_1(f) + \beta\, S_2(f)$
- Décalage/translation en temps :

$$TF[s(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} S(f)$$

- Décalage/translation en fréquence :

$$TF[e^{j2\pi f_0 t} s(t)] = S(f - f_0)$$

- Conjugué complexe : $TF[s^*(t)] = S^*(-f)$
- Dilatation : $TF[s(at)] = \frac{1}{|a|} S(\frac{f}{a})$
- Dérivation :
  - Fréquentielle : $TF\,[(-2\pi jt)^n s(t)] = \frac{d^n S(f)}{df^n}$
  - Temporelle : $TF\,(\frac{d^n s(t)}{dt^n}) = (j2\pi f)^n S(f)$

### II.2.3. Exemples :

- $TF\,[\delta(t)] = 1$
- $TF\,[\delta(t-\tau)] = e^{-2j\pi f\tau}$
- $TF(e^{-2j\pi f_0 t}) = \delta\,(f + f_0)$

## II.3. TRANSFORMEE DE LAPLACE

### II.3.1. Définition

La transformée de Laplace d'un signal s(t) est définie par :

$$S(p) = TL[s(t)] = \int_{0}^{+\infty} s(t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{où} \quad p = j\omega = j2\pi f$$

### II.3.2. Propriétés

- Linéarité : $TL[\alpha\, s_1(t) + \beta\, s_2(t)] = \alpha\, S_1(p) + \beta\, S_2(p)$
- $TL[s(t)\, e^{-\alpha t}] = S(p+\alpha)$
- $TL[s(t) \cos(\alpha t)] = \frac{S(p+j\alpha) + S(p-j\alpha)}{2}$
- $TL[s(t) \sin(\alpha t)] = \frac{S(p+j\alpha) - S(p-j\alpha)}{2j}$
- Dilatation : $TL[s(\alpha t)] = \frac{S(\frac{p}{\alpha})}{\alpha}$
- Translation : $TL[s(t-\alpha)] \leftrightarrow e^{-\alpha p} S(p)$
- Dérivation fréquentielle : $TL[(-t)^n\, s(t)] \leftrightarrow \frac{d^n S}{dp^n}$
- Dérivation temporelle : $TL[\frac{d^n s}{dt^n}] = p^n S(p)$
- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to +\infty} pS(p)$$

- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to +\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p)$$

### II.3.3. Exemples

- Impulsion : $TL[\delta(t)] = 1$
- Echelon : $TL[u(t)] = \frac{1}{p}$
- Rampe : $TL[r(t)] = \frac{1}{p^2}$
- Exponentielle : $TL[e^{-\alpha t}\, u(t)] = \frac{1}{p+\alpha}$

## II.4. CONVOLUTION

### II.4.1. Définition

Le produit de convolution d'un signal $s_1(t)$ par un autre $s_2(t)$ est donné par :

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(k) s_2(t-k) dk$$

### II.4.2. Propriétés

- Transformée de Fourier : TF $[s_1(t) * s_2(t)] = S_1S_2$
- Transformée de Laplace : TL $[s_1(t) * s_2(t)] = S_1S_2$
- Elément neutre : $s(t) * \delta(t) = s(t)$

### II.4.3. Exemple

$$\text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right) * e^{at} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{a(t-k)}\, dk = e^{at} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-ak}\, dk$$

$$= \frac{e^{at}}{a}\left(e^{a\frac{T}{2}} - e^{-a\frac{T}{2}}\right)$$

## II.5. CORRELATION

La corrélation est une opération mathématique dont le but est de mesurer le degré de ressemblance de deux signaux donnés en effectuant l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre.

Elle est utilisée dans de nombreuses applications où il serait nécessaire de comparer entre deux fonctions : le signal de référence x(t) et le signal reçu y(t) : les radars, les communications numériques, le GPS (Global Positioning System), etc.

### II.5.1. Inter-corrélation de deux signaux

**a. Signaux à énergie finie**

Considérons deux signaux x(t) et y(t) à énergie finie. On définit leur fonction d'inter-corrélation comme suit :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

**b. Signaux à puissance finie**

Dans ce cas, les signaux sont permanents et possèdent une énergie infiniment grande. On ne peut donc pas utiliser la définition précédente. Pour cette catégorie de signaux, on redéfinit la fonction d'inter-corrélation comme suit :

$$r_{xy}(\tau) = \lim \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t+\tau)dt$$

### II.5.2. Auto-corrélation d'un signal

Si y(t) = x(t), alors on définit la fonction d'auto-corrélation comme suit :

**a. Signal à énergie finie**

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

**b. Signal à puissance finie**

$$r_{xx}(\tau) = \lim \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

### II.5.3. Propriétés de l'inter-corrélation

- Le maximum de la fonction d'inter-corrélation se situe à l'endroit du décalage correspondant au maximum de similitude entre les deux signaux.

- Comme le fait de retarder y(t) par rapport à x(t) d'une valeur τ équivaut à avancer le signal x(t) par rapport à y(t), on aura : $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$.
- Si les deux signaux sont périodiques de même période, la fonction d'inter-corrélation sera également périodique.

### II.5.4. Propriétés de l'auto-corrélation

Pour un décalage nul, on retrouve :

- Pour un signal à énergie finie

$$x(t) : \; r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 = W_x$$

- Pour un signal à puissance moyenne finie :

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt = X_{eff}^2 = P_x$$

### II.5.5. Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $x(t) = \mathrm{Rect}\,(\frac{t}{T})$ et $y(t) = e^{at}$

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{a(t+\tau)}\,dt = e^{a\tau}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{at}\,dt = \frac{e^{a\tau}}{a}\,(e^{a\frac{T}{2}} - e^{-a\frac{T}{2}})$$

## II.6. NOTION DE FILTRAGE

### II.6.1. Définition

Le filtrage est une forme de traitement de signal qui modifie le spectre de fréquence et/ou la phase du signal présent en entrée du filtre et donc par conséquent sa forme temporelle. L'objectif du filtrage est soit :

- d'éliminer ou d'affaiblir des fréquences parasites indésirables
- d'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

On classe généralement les filtres en deux grandes familles :

- ❖ les filtres numériques réalisés à partir de structure intégrée micro-programmable (DSP).
- ❖ les filtres analogiques réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance, condensateur) ou actifs (AOp).

### II.6.2. Fonction de transfert

Le signal de sortie s(t) d'un système linéaire causal invariant dans le temps est donné par le produit de convolution du signal d'entrée e(t) et d'une fonction h(t) appelée réponse impulsionnelle : $s(t) = e(t)*h(t)$ (si $e(t) = \delta(t)$ alors $s(t) = h(t)$)

En appliquant la transformée de Laplace sur cette équation, on aura :

$$TL[s(t)] = TL[e(t) * h(t)] = TL[e(t)].TL[h(t)]$$

Soit $S(p) = TL[s(t)]$ et $E(p) = TL[e(t)]$. On définit alors la fonction de transfert du système comme suit :

$$H(p) = TL[h(t)] = \frac{TL[s(t)]}{TL[e(t)]} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

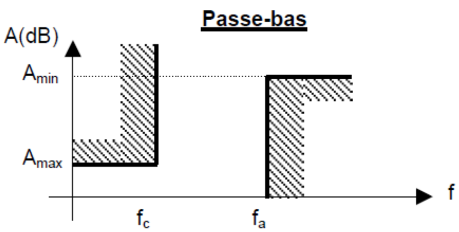
### II.6.3. Filtre réel

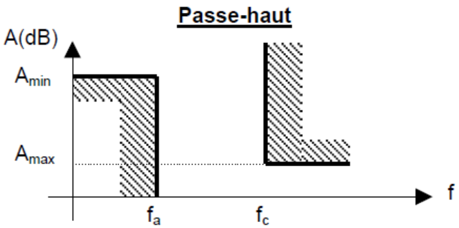
Pour un filtre idéal il faut que l'affaiblissement soit nul dans la bande de fréquence à conserver (Bande passante) mais infini dans la bande à éliminer (Bande atténuée).

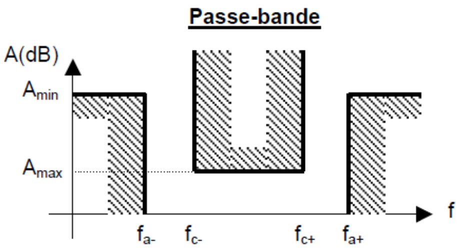
Cependant, de tels filtres sont pratiquement irréalisables mais on essaye d'approcher cette réponse idéale en conservant l'atténuation A inférieure à $A_{max}$

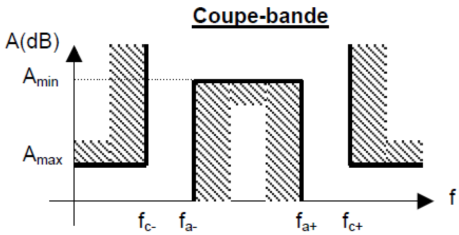
dans la bande passante et supérieure à $A_{min}$ dans la bande atténuée.

On définit ainsi un gabarit avec des zones interdites et des zones dans lesquelles devra impérativement se situer l'atténuation du filtre en fréquence. Suivant le type de réponse que l'on désire obtenir, on définit quatre familles de filtres :




## II.7. NOTION DE MODULATION

### II.7.1. Principe

Avant de transmettre un signal, on doit d'abord l'adapter au canal de transmission. En effet, en radio par exemple, le message transmis par voie hertzienne est un message audio dont le spectre est compris dans la bande [20Hz, 20kHz]. La réception d'un tel signal nécessite des antennes dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde $\lambda$ du signal. Or $\lambda = c/f$ ; où c est la célérité de la lumière (= $3.\ 10^8$ m/s) et f la fréquence du signal.

Ainsi, pour f = 20kHz : $\lambda$ = 15km. On devrait donc utiliser un signal de fréquence beaucoup plus élevée pour réduire à des dimensions acceptables la taille de l'antenne : c'est le principe de la modulation qui consiste à utiliser un signal HF (porteuse) pour transporter le message (modulant).

A la réception, on applique l'opération inverse (démodulation) pour récupérer le modulant à partir du signal modulé. La modulation est d'autant plus efficace qu'il est facile de récupérer le message d'origine.

Si la porteuse est sinusoïdale de la forme : $s_p(t) = U_p \cos(\omega_p t + \varphi)$, alors on peut agir soit sur l'amplitude $U_p$ (modulation d'amplitude), soit sur la phase $\varphi$ (modulation angulaire).

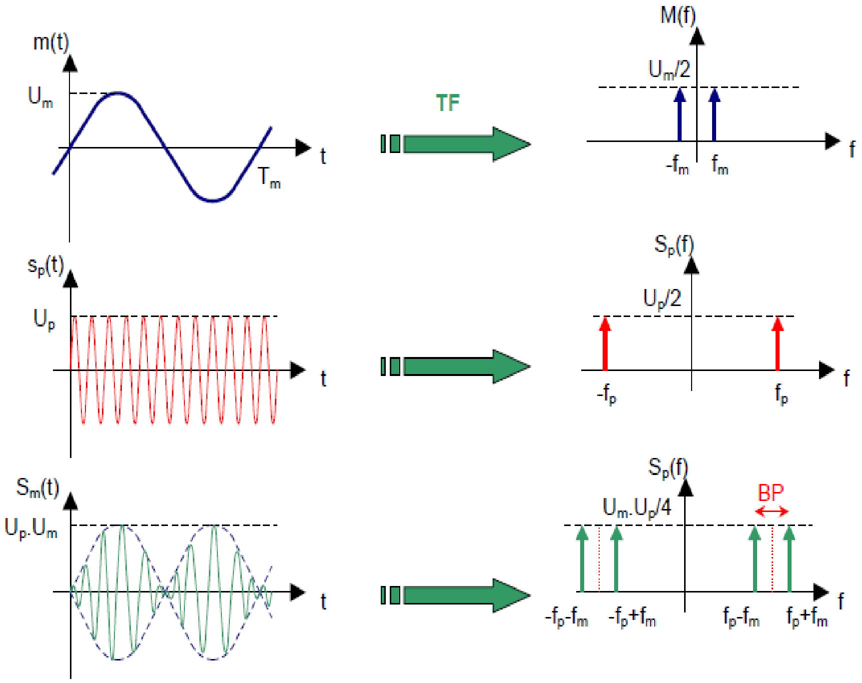
### II.7.2. Modulation d'amplitude

Moduler une porteuse sinusoïdale $s_p(t) = U_p \cos(\omega_p t)$ par un signal modulant sinusoïdale $m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$ revient à multiplier $s_p(t)$ par $m(t)$. Le signal modulé aura donc comme expression :

$$s_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)\, U_p \cos(\omega_p t) = \frac{U_m U_p}{2} \{\cos[(\omega_m - \omega_p)\, t] + \cos[(\omega_m + \omega_p)\, t]\}$$

Le spectre de ce signal aura l'expression suivante :

$$S_m(f) = \frac{U_m U_p}{4} [\delta(f-f_m+f_p) + \delta(f-f_m-f_p) + \delta(f+f_m-f_p) + \delta(f+f_m+f_p)]$$




## II.8. EXERCICES

**Exercice II.1**

Considérons trois signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ et $s_3(t)$ définie par leurs coefficients de décomposition en série de Fourier comme suit :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$s_1(t)$** | **n** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| | **$A_n$** | +2 | +5 | -2 | +1 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$B_n$** | - | +4 | +3 | -1 | 0 |
| $s_2(t)$ | **n** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| | **$C_n$** | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 |
| | **$\Phi_n$** | 0 | $-\pi/3$ | 0 | $+\pi/2$ | 0 |
| $s_3(t)$ | **n** | **0** | **±1** | **±2** | **±3** | **±4** |
| | **$S_n$** | 5 | $4\pm3j$ | 0 | $-2\pm j$ | 0 |

**1.** Donner l'expression temporelle <u>simplifiée</u> de chacun de ces trois signaux.
**2.** Calculer les puissances $P_1$, $P_2$ et $P_3$ des signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ et $s_3(t)$ respectivement.

**Exercice II.2**
On se propose de décomposer le signal s(t) = k sin(t) (où k est une constante positive) en séries de Fourier.

1. Déterminer les expressions de $S_0$, $A_n$ et $B_n$ en fonction de n et $T_0$
2. En déduire celle de s(t)
3. Pour k = 1 et T0 = π, simplifier l'expression de s(t)

**Exercice II.3**
Soit le signal $s(t) = A \,.\, \mathrm{rect}(2t/T_0)$

1. Tracer s(t)
2. Décomposer s(t) en série de Fourier.
3. Pour A=2V, calculer la puissance moyenne totale de ce signal.

**Exercice II.4**

Déterminer la transformée de Fourier (TF) de la fonction : V(t) = A r (t) où A est une constante positive et r(t) est la fonction rampe

**Exercice II.5**

Déterminer la transformée de Fourier inverse ($TF^{-1}$) de la fonction : $H(f) = A \text{ rect } (\frac{f}{2B})$ où A et B son des constantes positives.

**Exercice II.6**

Montrer que : si v(t) admet V(f) comme TF alors :

$$TF[v(t-T)] = V(f)\, e^{-j2\pi fT}$$

**Exercice II.7**

Soient les fonctions suivantes :

$f(t) = \text{rect}(t) + 2\text{rect}(\frac{t-1}{2})$ et $g(t) = f(t/A)$ avec A est une constante positive

1. Tracer f(t)
2. Calculer la TF de la fonction rect(t)
3. En déduire la TF de f(t) et celle de g(t) en utilisant les propriétés de la TF

**Exercice II.8**

Calculer la transformée de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

1. $S_1(t) = \delta(t)$
2. $S_2(t) = u(t)$
3. $S_3(t) = r(t)$
4. $S_4(t) = \text{Rect}(t)$

**Exercice II.9**

Calculer les produits de convolution des fonctions suivantes :

1. $x(t) = \delta(t-t_0) + \delta(t-t_1)$ et $y(t) = e^{-at}$
2. $x(t) = u(t-t_0) - u(t-t_1)$ et $y(t) = e^{-at}$
3. $x(t) = rect(t/T)$ et $y(t) = e^{-at}$

**Exercice II.10**

Reprendre les exemples de l'exercice 2 et déterminer pour chacun la fonction d'inter-corrélation $r_{xy}$ des signaux x(t) et y(t).

**Exercice II.11**

On considère les trois signaux suivants :

$s_1(t) = rect(\frac{t}{T})$ , $s_2(t) = e^{j\pi t}\, rect(\frac{2t}{T})$ et $s_3(t) = \frac{d^2 s_1(t)}{dt^2}$

1. Calculer $S_1(f) = TF[s_1(t)]$
2. En déduire $S_2(f) = TF[s_2(t)]$ et $S_3(f) = TF[s_3(t)]$ en indiquant les propriétés de la TF utilisées (voir annexe à la page suivante)

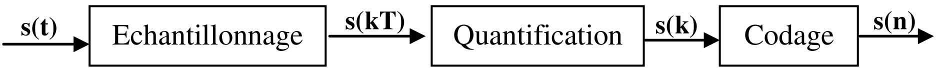
# Chapitre III.

# NUMERISATION DE SIGNAUX

## III.1. INTERET DE LA NUMERISATION

La numérisation d'un signal a pour but de le préparer au codage puis à la transmission. Elle se fait généralement en trois étapes essentielles : l'échantillonnage, la quantification et le codage.

La chaine de numérisation est décrite par la figure suivante :




La numérisation des signaux offre de nombreux avantages, dont on peut citer :

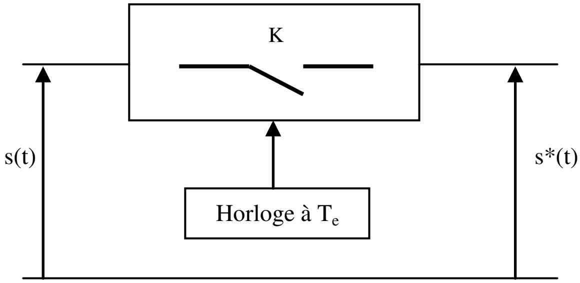
- La capacité de stockage
- La facilité de traitement et de transfert
- L'immunité contre les bruits

## III.2. ECHANTILLONNAGE

### III.2.1. Définition

L'échantillonnage revient à un prélèvement ponctuel et périodique (période d'échantillonnage $T_e$) des amplitudes d'un signal analogique s(t). Ainsi, les valeurs du signal échantillonné résultant $s_e(t)$ ne sont connues qu'aux instants d'échantillonnage.

Ceci est schématisé par un interrupteur piloté par une horloge de période $T_e$.




### III.2.2. Echantillonnage idéal

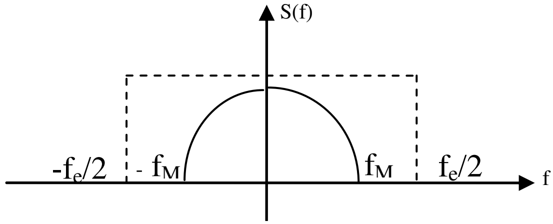
Supposons que l'échantillonnage est idéal, c'est-à-dire que le découpage se fait instantanément. Ceci est modélisé mathématiquement par une multiplication du signal par un peigne de Dirac de période $T_e$. Le signal échantillonné peut s'écrire :

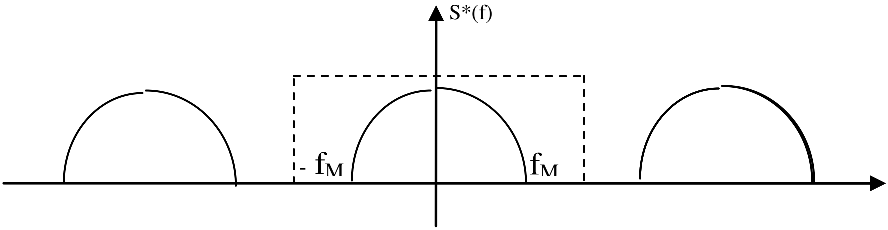
$$s^*(t) = s(t)\delta_{T_e}(t)$$
$$= s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_e)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t-nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e)$$

Le spectre du signal échantillonné est donc le suivant :

$$S^*(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f-nf_e)$$

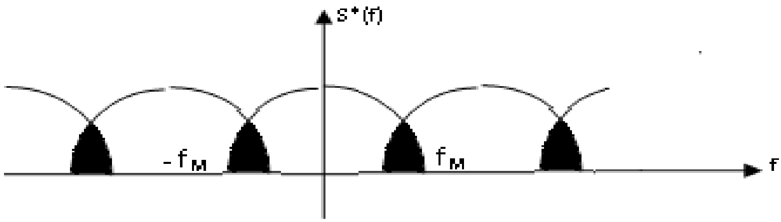
Dans certaines représentations, le signal échantillonné est noté $s(kT_e)$ ou simplement $s(k)$ qui représente la suite des valeurs discrètes.




Remarques :

❖ ***Théorème de Shannon*** : Si la fréquence maximale $f_M$ du spectre du signal à échantillonner est supérieure à $f_e/2$, la restitution du signal original sera impossible à cause du recouvrement spectral qui aura lieu. On dit qu'on est en sous-échantillonnage.



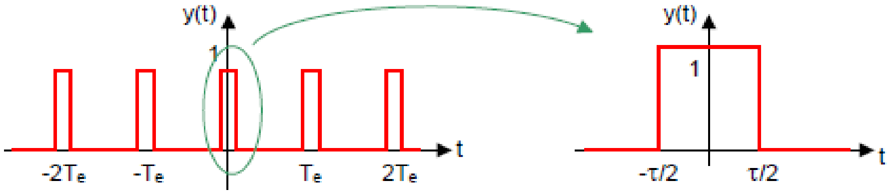
Pour éviter ce problème, on devrait choisir une fréquence d'échantillonnage qui soit au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale du spectre du signal (théorème de Shannon ) : $f_e > 2\ f_M$

- ***Filtre antirepliement :*** l'opération d'acquisition induit souvent un bruit qui s'ajoute à celui que contient le signal, ce qui prolonge le spectre vers les fréquences élevées et supérieures à fe/2. Il convient donc, avant la numérisation du signal et pour éviter d'avoir un recouvrement spectral, d'affaiblir suffisamment les amplitudes de ce dernier au-delà de $f_e/2$ par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_e/2$, appelé filtre de garde ou filtre anti-repliement.

### III.2.3. Echantillonnage réel

Les échantillonneurs réels possèdent généralement un certain temps d'ouverture $\tau$ correspondant au temps de commutation des interrupteurs statiques. La modélisation de l'échantillonnage par un peigne de Dirac est donc erronée.

L'échantillonnage réel peut donc être modélisé par la multiplication du signal par une suite de fonctions rectangles (ou portes) de largeur $\tau$.




La fonction d'échantillonnage est définie par :

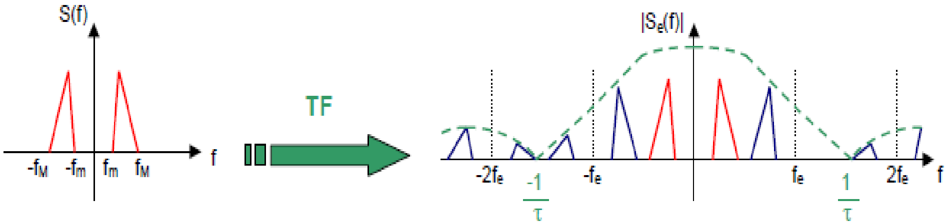
$$y(t) = \sum_{k\to-\infty}^{+\infty} rect(\frac{t-kT_e}{\tau})$$

L'expression du signal échantillonné sera déterminé par : se(t) = s(t) y(t)

Et par suite, le spectre de la fonction échantillonnée est donnée par :

$$S_e(f) = \frac{\tau}{T_e}\ \mathrm{sinc}(\tau f)\ \sum_{k\to-\infty}^{+\infty} S(f-kf_e\ )$$

On retrouve la même allure de spectre modulé en amplitude par une fonction en sinus cardinale.




## III.2.4. Echantillonnage – blocage

L'échantillonnage, utilisé pour prélever le signal à des instants multiples de Te, est suivi d'une conversion des échantillons sous forme d'un code binaire par l'intermédiaire d'un convertisseur analogique-numérique (CAN). Cette conversion n'est pas instantanée. Alors si le signal à convertir varie trop rapidement, il est nécessaire de procéder au blocage du signal pour avoir une conversion sans erreur. On utilise donc un échantillonneur-bloqueur qui mémorise la tension à convertir et la maintient constante pendant toute la durée de conversion.

## III.3. QUANTIFICATION

### III.3.1. Définition

La quantification consiste à remplacer chaque valeur échantillonnée $s_e(k)$ par un multiple entier d'une quantité appelée pas de quantification, et ce suivant une certaine loi : arrondi supérieur, arrondi le plus proche, etc…

Le fait d'arrondir la valeur de départ entraîne forcément une erreur de quantification que l'on appelle le bruit de quantification.

Il existe deux types de quantification :

- Quantification uniforme
- Quantification avec compression de données

### III.3.2. Quantification uniforme

Cette technique de quantification est la plus classique. Elle utilise un pas de quantification Δ constant. La puissance du bruit de quantification est donnée par :

$$P_{n_q} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Or la puissance du signal à quantifier $P_s = (S_{eff})^2$. Donc le rapport signal sur bruit (SNR) dû à la quantification est :

$$(\frac{S}{N})_{dB} = 10\ log\ \frac{P_S}{P_{n_q}} = \ 10\ log[12\left(\frac{S_{eff}}{\Delta}\right)^2]$$

## III.4. CODAGE

Le codage revient à donner une représentation binaire au signal quantifié. Les codes les plus connus sont : code binaire naturel, code binaire décalé, code DCB et code Gray.

Exemples sur 4 bits :

| Nombre décimal | Code binaire naturel | Code binaire décalé | Code DCB | Code Gray |
|---|---|---|---|---|
| -8 | - | 0000 | - | - |
| -3 | - | 0101 | - | - |
| 0 | 0000 | 1000 | 0000 | 0000 |
| 1 | 0001 | 1001 | 0001 | 0001 |
| 5 | 0101 | 1101 | 0101 | 0111 |
| 10 | 1010 | - | 0001 0000 | 1111 |
| 15 | 1111 | - | 0001 0101 | 1000 |

Il est à noter que chaque bit supplémentaire rajouté dans le résultat de la conversion améliore le rapport signal/bruit de 6dB.

## III.5. EXERCICES

### Exercice III.1

On désire numériser une tension sinusoïdale v(t) d'amplitude $V_m$ = 12V, dont le spectre admet comme fréquence maximale $f_M$ = 50Hz.

1. **1.** Quelle est la condition que doit impérativement vérifier la fréquence d'échantillonnage pour garantir une bonne récupération?
2. **2.** Que se passe-t-il si l'on choisit une fréquence d'échantillonnage $f_e = 70Hz$ ?
3. **3.** On voudrait quantifier le signal résultant avec un pas $\Delta = 0,5$. Quelle serait alors la valeur du SNR généré par la quantification ?

Si le signal à numériser varie trop rapidement, l'opération d'échantillonnage risque d'être erronée. Comment peut-on remédier à ce problème ?

# Chapitre IV.

# TRAITEMENT DU SIGNAL NUMERIQUE

## IV.1. INTRODUCTION

Bien que le traitement numérique de l'information ait de nombreux avantages techniques, sa réalisation pratique pose cependant un certain nombre de problèmes. En effet ce traitement nécessite l'utilisation d'un ordinateur qui ne peut traiter que des signaux numériques obtenus après un échantillonnage et une quantification. L'étude de ces signaux devra donc prendre en considération les effets induits sur leur spectre suite à la procédure de numérisation. De plus, le temps et l'espace mémoire nécessaires pour le calcul de la transformée de Fourier, posent d'avantage de contraintes.

## IV.2. TRANSFORMEE DE FOURRIER D'UN SIGNAL DISCRET

### IV.2.1. Définition

La transformée de Fourier d'un signal discret x[n] est définie par :

$$X(f) = \sum_{n \to -\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-2j\pi \frac{nf}{fe}}$$

Si cette série converge, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$x[n] = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} X(f) e^{2j\pi\frac{nf}{fe}} \, df$$

## IV.2.2. Propriétés

La transformée de Fourier d'un signal discret possède les mêmes propriétés que celles de la TF d'un signal continu.

***a. Linéarité :***

TF[α x(n) + β y(n)] = α TF[x(n)] + β TF[y(n)]

= α X(f) + β Y(f)

***b. Translation :***

- Temporelle :

  TF[x(n - k)] = $e^{-2j\pi\frac{kf}{fe}}$TF[x(n)] = $e^{-2j\pi\frac{kf}{fe}} X(f)$

- Fréquentielle :

  TF[$e^{2j\pi n f_0}$x(n)] = X(f – $f_0$)

***c. Convolution :***

- Temporelle :

  TF[x(n)*y(n)] = TF[x(n)]. TF[y(n)] = X(f).Y(f)

- Fréquentielle :

  TF[x(n).y(n)] = TF[x(n)]* TF[y(n)] = X(f)*Y(f)

# IV.3. TRANSFORMEE DE FOURRIER DISCRETE

## IV.3.1. Notion de fenêtrage

Le calcul de la transformée de Fourier d'un signal discret ainsi définie est un calcul d'une somme de termes infinis. Il nécessite donc un temps énorme et une mémoire infinie.

En pratique, on réduit les calculs à un nombre fini de points N, ce qui revient à multiplier le signal discret de départ x(n) par une fenêtre d'analyse (ou de troncature) permettant de limiter à N le nombre d'échantillons.

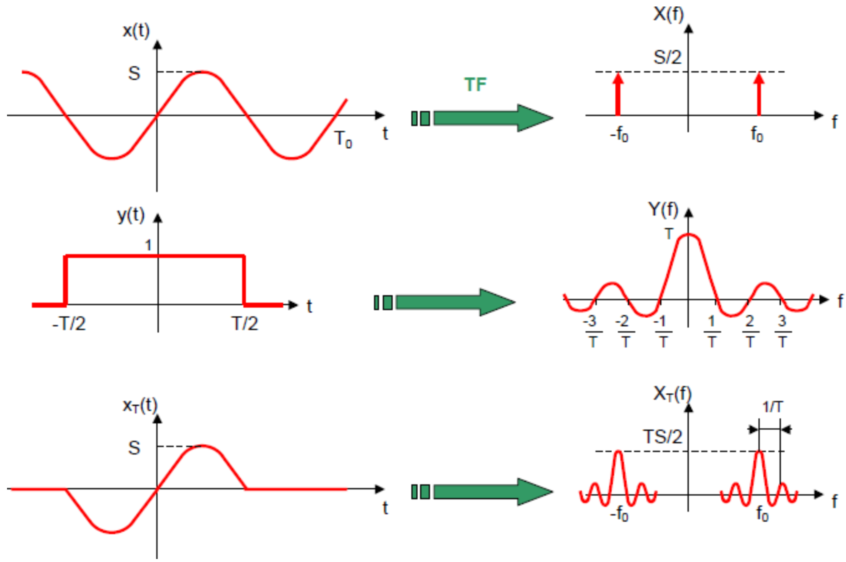
Cette fenêtre est définie par une suite d'échantillons y(n) tels que :

$$\begin{cases} x_T\,[n]=y[n].x[n] & pour\ 0\leq n\leq (N-1) \\ x_T\,[n]=0 & pour\ n<0\ et\ n>(N-1) \end{cases}$$

Ainsi, la transformée de Fourier sera exprimée comme suit :

$$X_T(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n]e^{-2j\pi\frac{nf}{fe}}$$

Cependant, ce fenêtrage peut affecter le spectre du signal étudié : Prenons l'exemple d'une sinusoïde x(t) = $S.\cos(2\pi f_0 t)$ tronquée par une fenêtre rectangulaire y(t) = rect($\frac{t}{T}$). On rappelle que X(f) = $\frac{S}{2}$ [$\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)$] et que Y(f) = T sinc (Tf), d'où les spectres :




## IV.3.2. Echantillonnage en fréquence

Etant donné que f est une variable continue, il faut calculer $X_T(f)$ pour toutes les valeurs de f afin de pouvoir représenter le spectre $X_T(f)$ ce qui est impossible avec un ordinateur ou un DSP qui ne peuvent traiter que des valeurs de f discrètes. Comme $X_T(f)$ est périodique de période $f_e$, on découpe cet intervalle en M parties égales et on ne calcule $X_T(f)$ que pour les multiples de $f_e/M$ : on effectue un échantillonnage fréquentiel de pas $\Delta f = f_e/M$.

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] e^{-2j\pi \frac{nk\Delta f}{fe}} =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] e^{-2j\pi \frac{nk}{M}} \text{ pour } k = [0, 1, \ldots, M\text{-}1]$$

Mais comment choisir le pas d'échantillonnage et donc M ?

La pratique montre que l'idéal est d'avoir $\Delta f = 1/T$. En effet, si $\Delta f > 1/T$, il y aura un recouvrement dans le domaine temporel et si $\Delta f < 1/T$ il y aura des intervalles durant lesquels le signal sera nul.

Or : $T = N.T_e$ et $\Delta f = f_e/M = 1/T$ donc $M = N$

Ainsi, on définit la transformée de Fourier discrète :

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] e^{-2j\pi\frac{nk}{N}} \text{ pour } k = [0, 1, \ldots, N-1]$$

## IV.4. TRANSFORMEE DE FOURRIER RAPIDE

Pour obtenir une valeur particulière de $X_T[k]$, il faut exécuter 2N produits complexes et 2(N – 1) sommes complexes, car :

$$X_T[k] = x_T[0]\cos(0) - x_T[0]\, j \sin(0) + x_T[1]\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - x_T[1]\, j \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \ldots + x_T[N-1]\cos\left(\frac{2\pi (N-1)k}{N}\right) - x_T[N-1]\, j \sin\left(\frac{2\pi (N-1)k}{N}\right)$$

Donc pour obtenir les N valeurs de $X_T(k)$, il faut exécuter $2.N^2$ multiplications et 2.(N-1).N additions : le temps de calcul sera énorme.

Pour pouvoir utiliser la transformée de Fourier discrète en temps réel, on dispose d'algorithmes de calcul permettant d'obtenir les résultats beaucoup plus rapidement sous certaines conditions. Ces algorithmes sont connus sous le nom de Transformée de Fourier

Rapide (TFR) ou Fast Fourier Transform (FFT). L'algorithme le plus connu est celui de Cooley-Tukey dans lequel on pose :

$$w_N = e^{\frac{-2j\pi}{N}} \quad \text{d'où : } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{nk}$$

***Propriétés :***

- ❖ $w_N^{2nk} = w_{N/2}^{nk}$
- ❖ $w_N^{nk+N/2} = -\, w_N^{nk}$

Pour pouvoir utiliser l'algorithme de Cooley-Tukey, il faut que le nombre d'échantillons N = $2^m$. En séparant les indices pairs et impairs :

$$\begin{cases} x_1[n] = x[2N] \\ x_2[n] = x[2N+1] \end{cases}$$

Et en utilisant les propriétés de $w_N$, on obtient alors pour $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$:

$$\begin{cases} X[k] = X_1[k] + w_N^k X_2[k] \\ X[k + \frac{N}{2}] = X_1[k] - w_N^k X_2[k] \end{cases}$$

## IV.5. EXERCICES

## Exercice IV.1

Déterminer la transformée de fourier (TF) du signal suivant :

x(k) = A rect (k+N/2)

# Chapitre V.

# FILTRAGE ANALOGIQUE ET FILTRAGE NUMERIQUE

## V.1. DEFINITION

Le filtrage d'un signal consiste à le faire passer à travers un filtre, afin de le :

- Filtrer en fréquence : passe-bas (préserve les basses fréquences), passe-haut (préserve les hautes fréquences), passe-bande (préserve une bande de fréquences) et coupe-bande (élimine une bande de fréquences)
- Lisser, débruiter…

Un filtre est souvent caractérisé par :

- Sa réponse impulsionnelle : c'est la réponse du filtre à l'entrée particulière $\delta(t)$. On la notera par la suite $h(t)$.
- Sa réponse en fréquence ou gain complexe $H(f)$ : c'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

On classe les filtres en deux grandes familles : ANALOGIQUE et NUMERIQUE

## V.2. PERFORMANCES D'UN FILTRE

Un filtre est un système linéaire, invariant par translation et continu (LITC).

### V.2.1. Linéarité

Un système S est linéaire si la sortie d'une combinaison linéaire $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2$ est la combinaison linéaire des sorties associées $\alpha_1$ $S[x_1]$ + $\alpha_2$ $S[x_2]$. Autrement dit :

- <u>Signaux continus :</u>
  Si $y_1(t) = S[x_1(t)]$ et $y_2(t) = S[x_2(t)]$ alors $S[\alpha_1 x_1(t)] + S[\alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)$
- <u>Signaux discrets :</u>
  Si $y_1(n) = S[x_1(n)]$ et $y_2(n) = S[x_2(n)]$ alors $S[\alpha_1 x_1(n)] + S[\alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1\, y_1(n) + \alpha_2\, y_2(n)$

### V.2.2. Invariance par translation

Un système est invariant par translation si son comportement reste indépendant de l'origine des temps :

- <u>Signaux continus :</u>
  $$y(t) = S[x(t)] \rightarrow y(t-t_0) = S[x(t-t_0)]$$
- <u>Signaux discrets :</u>
  $$y(n) = S[x(n)] \rightarrow y(n-n_0) = S[x(n-n_0)]$$

### V.2.3. Continuité

Un système S est continu si lorsqu'une suite d'entrées $x_k$ converge vers un signal x alors la suite des sorties $y_k = S[x_k]$ converge vers la sortie y de la limite des entrées $y = S[x]$ :

- <u>Signaux continus :</u>
  $$x(t) = \lim_{k\to+\infty} x_k(t) \rightarrow S[x(t)] = \lim_{k\to+\infty} S[x_k(t)]$$
- <u>Signaux discrets :</u>
  $$x(n) = \lim_{k\to+\infty} x_k(n) \rightarrow S[x(n)] = \lim_{k\to+\infty} S[x_k(n)]$$

### V.2.4. Causalité :

Un filtre est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle h est causale. C'est-à-dire si :

$h(t) = 0 \ \forall \ t < 0$ dans le cas continu

et $h(n) = 0 \ \forall \ n < 0$ dans le cas discret

### V.2.5. Stabilité :

Un filtre est stable si par définition à toute entrée bornée correspondra une sortie bornée. Autrement dit, un filtre est stable si et seulement si :

$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |h(t)| < +\infty$ dans le cas continu

et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$ dans le cas discret

## V.3. FILTRAGE ANALOGIQUE

### V.3.1. Classification des filtres analogiques

Classiquement, on distingue deux grandes familles de filtres analogiques :

- les filtres **passifs** qui font appels essentiellement à des inductances de haute qualité et des condensateurs. Jusqu’aux années 70, c’était les seuls filtres conçus. Ils sont actuellement utilisés pour les hautes fréquences (utilisation du quartz).
- les filtres **actifs** sont constitués de condensateurs, de résistances et d’éléments actifs qui sont essentiellement des amplificateurs opérationnels. Ils sont moins encombrants, faciles à concevoir et moins coûteux que les filtres passifs mais restent limités en fréquence (<

1MHz à cause de l'amplificateur). Ils consomment plus et nécessitent une source d'alimentation.

Un filtre (passif ou actif) peut fonctionner en :

- Passe-bas : préserve les basses fréquences
- Passe-haut : préserve les hautes fréquences (bruit)

Les filtres passe-bas sont en général utilisés pour réduire le bruit, mais ont l'inconvénient d'affecter le signal utile ; alors que les filtres passe-haut sont en général utilisé pour estimer des opérateurs différentiels (dérivées, Laplacien).

On distingue les filtres de premier ordre et ceux de second ordre.

### V.3.2. Etude des filtres de premier ordre

La fonction de transfert d'un filtre de premier ordre est de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{H_0\, N(j\omega)}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

Or, on sait que pour un filtre :

- passe-bas : si $\omega \rightarrow 0$ alors $|H(j\omega)| \rightarrow H_0$
  et si $\omega \rightarrow +\infty$ alors $|H(j\omega)| \rightarrow 0$
- passe-haut : si $\omega \rightarrow 0$ alors $|H(j\omega)| \rightarrow 0$
  et si $\omega \rightarrow +\infty$ alors $|H(j\omega)| \rightarrow H_0$

donc :

- si $N(j\omega) = 1$ alors il s'agit d'un filtre passe-bas
- si $N(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0}$ alors il s'agit d'un filtre passe-haut

### V.3.3. Etude des filtres de second ordre

La fonction de transfert d'un filtre de second ordre est de la forme :

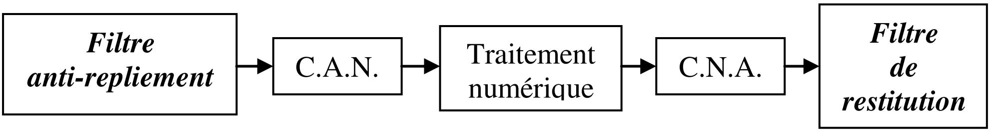
$$H(j\omega) = \frac{H_0\, N(j\omega)}{1 + \frac{2m}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{{\omega_0}^2}}$$

donc :

- si $N(j\omega) = 1$ alors il s'agit d'un filtre passe-bas
- si $N(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$ alors il s'agit d'un filtre passe-haut
- si $N(j\omega) = \frac{2m\, j\omega}{\omega_0}$ alors il s'agit d'un filtre passe-bande

### V.3.4. Exemple d'application des filtres analogiques

Chaine de conversion A/N et N/A :




❖ **filtre antirepliement**

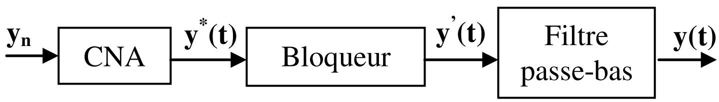
Selon le théorème de Shannon, si x(t) est un signal continu dont la fréquence de Nyquist est $2F_{max}$, Alors un échantillonnage de x à la fréquence $F_e$ permet sa reconstruction complète si $F_e/2 \geq F_{max}$. Le bon choix de $F_e$ nécessite donc de bien connaître la valeur de $F_{max}$, fréquence maximale contenue dans le signal à échantillonner.

La meilleure façon d'assurer la condition de Shannon est de placer un filtre à coupure raide qui atténuera très fortement tous les signaux parasites au-delà de la fréquence limite $F_{max}$ : c'est le filtre anti-repliement. Ce filtre passe-bas doit couper toutes les fréquences supérieures à Fe/2.

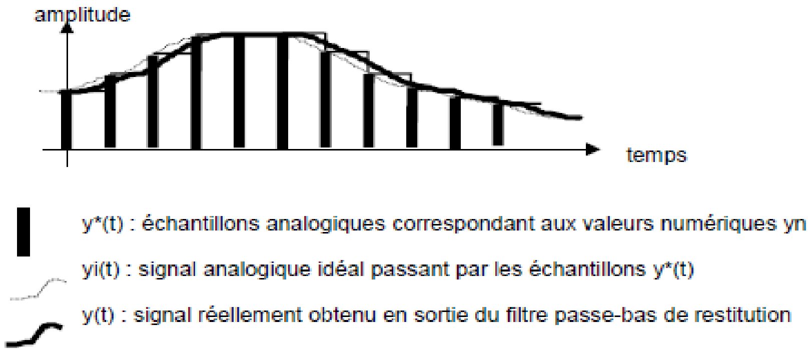
❖ **filtre de restitution**

En sortie du système numérique, il faut transformer la séquence numérique y(n) en signal analogique y(t). Pour cela, la séquence y(n) est appliquée à un convertisseur numérique analogique qui fournit en sortie les échantillons y(nTe).

Ces convertisseurs sont toujours équipés d'un bloqueur qui maintient en sortie la valeur de l'échantillon y(nTe) jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant y((n+1)Te).




Le signal en marches d'escaliers ainsi obtenu est simplement lissé par un filtre passe-bas.




## V.4. FILTRAGE NUMERIQUE

### V.4.1. Transformée en z

***a.*** *Définition :*

Soit x(t) un signal causal, x*(t) le signal échantillonné correspondant, T la période d'échantillonnage. Alors $x^*(t) = (x(0), x(T), x(2\,T), \ldots, x(n\,T), \ldots)$

La transformée de Laplace de x*(t) sera : $X^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\ e^{-n\,T\,p}$.

Si on effectue le changement de variable $z = e^{Tp}$ on obtiendra la transformée en z de x(t) qui sera notée :

$$Z[x^*(t)] = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\ .\ z^{-n}$$

***b.*** *Propriétés :*

- $Z[x(n-1)] = z^{-1}\ X(z) + x(-1)$
- $Z[x(n-N)] = z^{-N}\ X(z)$
- $Z[x(n+1)] = z\ X(z) - z\ x(0)$
- $Z[x(n+N)] = z^{N}\ X(z) - \sum_{k=0}^{N-1}\ z^{(N-k)}\ x(k)$

- Linéarité : $Z[\alpha\, x_1(n) + \beta\, x_2(n)] = \alpha\, X_1(z) + \beta\, X_2(z)$
- $Z[\alpha^n\, x(n)] = X(\frac{z}{\alpha})$
- $Z[n\, x(n)] = -z\, \frac{dX(z)}{dz}$
- $Z[x(n) - x(n-1)] = (1 - z^{-1})\, X(z)$
- $Z[\sum x(k)] = z\, \frac{X(z)}{z-1}$
- Théorème de la valeur initiale : $x(0) = \lim_{z\to+\infty} X(z)$
- Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to1} (z-1)\, X(z)$
- Convolution : $Z[x(n)*y(n)] = X(z)\, Y(z)$

***c.*** *Fonction de transfert en z :*

Prenons l'exemple d'un système défini par l'équation d'entrées / sorties suivante : $y(n) = 2\, x(n) + 3\, x(n-1) + 4\, x(n-2) + 5\, y(n-1) + 6\, y(n-2)$

En appliquant la transformée en z, on obtient :

$$Y(z) = 2\, X(z) + 3\, z^{-1}\, X(z) + 4\, z^{-2}\, X(z) + 5\, z^{-1}\, Y(z) + 6\, z^{-2}\, Y(z)$$

Donc : $Y(z)\,(1 - 5\, z^{-1} - 6\, z^{-2}) = X(z)\,(2 + 3\, z^{-1} + 4\, z^{-2})$

On définit alors la fonction de transfert en z de ce système comme suit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 3\, z^{-1} + 4\, z^{-2}}{1 - 5\, z^{-1} - 6\, z^{-2}}$$

*Remarque* :

On peut passer directement à la fonction de transfert harmonique H(p) en remplaçant z par $e^{Tp}$.

### V.4.2. Classification des filtres numériques

***a.*** *Equations aux différences :*

Un système numérique de traitement de signal se réalise par des processeurs dédiés appelés DSP pour

« Digital Signal Processor ». Ces processeurs servent au traitement des équations aux différences.
Exemple : y(n) = 2 x(n) + 3 x(n-1) + 4 x(n-2) + 5 y(n-1) + 6 y(n-2)

- Forme générale d'une équation aux différences :

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{M} \beta_m\, x(n-m)\right] - \left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y(n-k)\right]$$

- Remarques importantes :
  Dans l'équation aux différences précédente on remarque bien que le système :
  - est linéaire : pas de termes en $x^2$ par exemple
  - est invariant dans le temps : car les $\alpha_i$ et les $\beta_i$ sont des constantes.

En conclusion, un SLI peut être caractérisé soit par sa réponse impulsionnelle ou par son équation aux différences.
On peut subdiviser les SLI en deux grandes catégories :

- ✓ ***Les systèmes non récursifs :*** pour lesquels tous les $\alpha_k$ ($1 \leq k \leq N$) sont nuls c.à.d. pas de rétroaction. La sortie ne joue plus de rôle. Un système non récursif n'ayant pas de pôles est toujours stable.
- ✓ ***Les systèmes récursifs :*** pour lesquels au moins un $\alpha_k$ est non nul (il y a rétroaction). Un système récursif peut être stable ou non stable.

***b.*** *Systèmes non récursifs (R.I.F.) :*

L'équation aux différences générale d'un filtre R.I.F. est de la forme :

$$y(n) = [\beta_0\, x(n) + \beta_1\, x(n-1) + \beta_2\, x(n-2) + \ldots + \beta_M\, x(n-M)]$$

Pour obtenir la réponse impulsionnelle, on rentre au système une impulsion : $x(n) = \delta(n)$. La réponse du système sera alors :

$$y(n) = h(n) = [\beta_0\, \delta(n) + \beta_1\, \delta(n-1) + \beta_2\, \delta(n-2) + \ldots + \beta_M\, \delta(n-M)]$$

Allons chercher maintenant chaque valeur de la réponse impulsionnelle une à une comme suit :

- $h(0) = [\beta_0\, \underbrace{\delta(n)} + \beta_1\, \underbrace{\delta(n-1)} + \beta_2\, \underbrace{\delta(n-2)} + \ldots + \beta_M\, \underbrace{\delta(n-M)}]$
  $= \beta_0$
- $h(1) = [\beta_0\, \delta(1) + \beta_1\, \delta(0) + \beta_2\, \delta(-1) + \ldots + \beta_M\, \delta(1-M)] = \beta_1$
- $h(2) = \beta_2$
- $h(3) = \beta_3$
- …
- $h(M) = \beta_M$

On déduit que :

- ✓ Les coefficients de la réponse impulsionnelle d'un système non récursif sont les coefficients de l'équation aux différences de ce système.
- ✓ La réponse impulsionnelle d'un système non récursif est toujours finie (RIF)
- ✓ Un système non récursif est toujours stable.

***c.*** *Systèmes récursifs (R.I.I.) :*

Faisons l'étude sur l'exemple suivant : $y(n) = x(n) - \alpha_1\, y(n-1)$

On demande d'obtenir la réponse impulsionnelle de ce système pour n = 0, 1, 2, 3 et 4. Déduire ensuite une expression générale de h(n). Etudier à la fin la stabilité de ce système.

Pour obtenir la réponse impulsionnelle, on applique une impulsion à l'entrée :

$x(n) = \delta(n)$, le système répond alors avec : $y(n) = h(n) = \delta(n) - \alpha_1 h(n-1)$

d'où :

- $h(0) = \underbrace{\delta(0)}_{1} - \alpha_1 \underbrace{h(-1)}_{0} = 1 = (-\alpha_1)^0$
- $h(1) = \delta(1) - \alpha_1 h(0) = -\alpha_1 = (-\alpha_1)^1$
- $h(2) = \delta(2) - \alpha_1 h(1) = (-\alpha_1)(-\alpha_1) = (-\alpha_1)^2$
- $h(3) = (-\alpha_1)^3$
- $h(4) = (-\alpha_1)^4$

On peut déduire donc que : $h(n) = (-\alpha_1)^n$ pour $n>0$ (système causal)

La stabilité de cette réponse dépend de $\alpha_1$. Dans ce cas précis, le système est stable pour $-1 < \alpha_1 < 1$.

On déduit que :

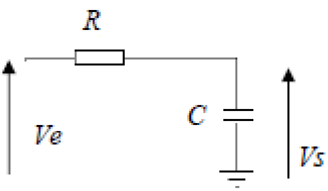
- ✓ La réponse impulsionnelle d'un système récursif est infinie (RII).
- ✓ Un système récursif n'est pas toujours stable.

# V.5. EXERCICES

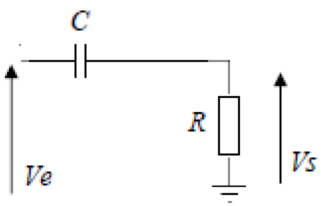
## Exercice V.1

Pour chacun des filtres a, b, c et d, répondre aux questions suivantes :

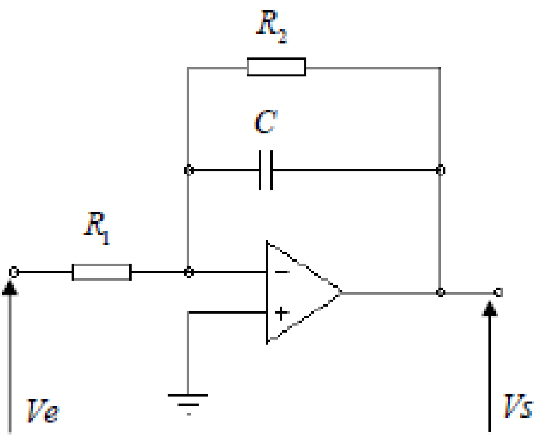
- c'est un filtre actif ou passif ?
- c'est un filtre passe-bas ou passe-haut ?
- quelle est l'expression de la fréquence de coupure $f_0$ en fonction des valeurs des composants du filtre (R et C) ?



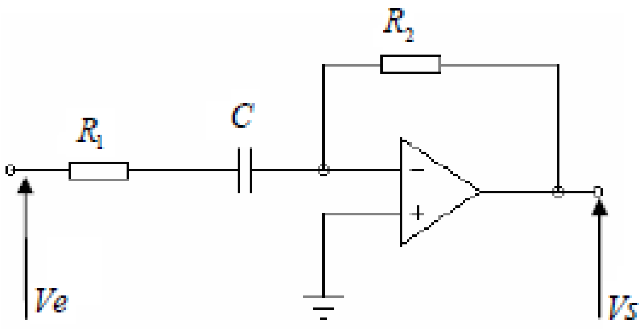

**(a)**




**(b)**




**(c)**

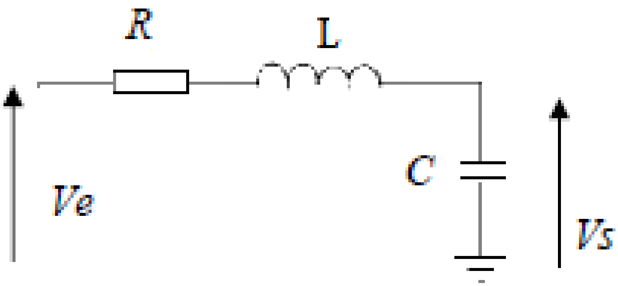



**(d)**

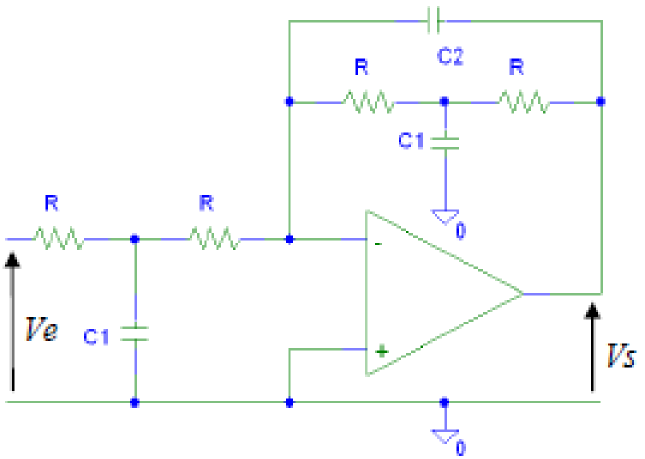
**Exercice V.2**

Pour chacun des filtres a, b et c répondre aux questions suivantes :

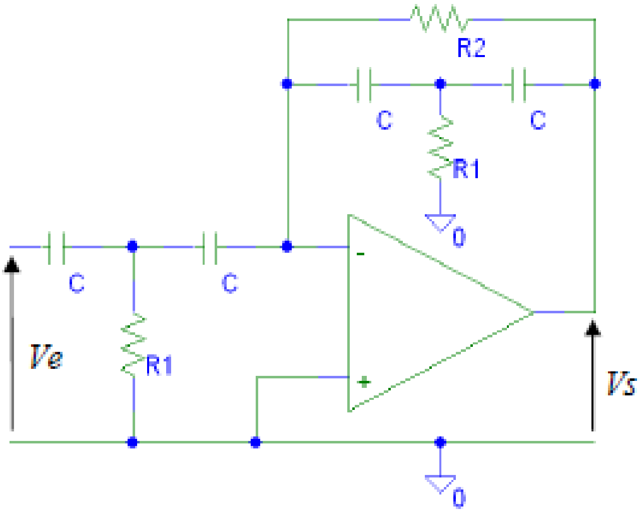
- c'est un filtre actif ou passif ?
- c'est un filtre passe-bas, passe-haut ou passe-bande ?
- quelle est l'expression de la fréquence de coupure $f_0$ en fonction des valeurs des composants du filtre (R, C) ?




**(a)**




**(b)**




**(c)**

**Exercice V.3**

Soit le système d'entrée x(n) tel que sa réponse impulsionnelle est :

$$h(n)=\delta(n) - \delta(n-2).$$

1. Déterminer la sortie y(n) de ce système.
2. Quelle est la fonction de transfert H(z).
3. Le système est-il stable ? Justifier

**Exercice V.4**

On considère le système

$y(n) - 2ay(n-1) + a^2 y(n-2) = x(n) - a.x(n-1).$

Avec $y(-2) = y(-1) = 0$.

1. Donner la fonction de transfert en z de ce système.
2. Donner la réponse impulsionnelle.
3. Pour quelles valeurs de a le système est-il stable ?

**Exercice V.5**

On considère le filtre RIF défini par :

$$H(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}$$

1. **Déterminer** l'équation aux différences de ce filtre
2. En déduire sa réponse impulsionnelle h(n).
3. Etudier sa stabilité

**Exercice V.6**

On considère le système :

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})}$$

1. Déterminer l'équation aux différences de ce filtre
2. En déduire sa réponse impulsionnelle h(n).
3. Etudier sa stabilité

**Exercice V.7**

Soit le système numérique linéaire et invariant (S) défini par :

$$x(k) = y(k) - a.y(k-1)$$

1. S'agit-il d'un système RIF ou RII ? Justifier
2. Déterminer la réponse impulsionnelle h(k) causale du système
3. Exprimer la condition générale que doit vérifier la réponse impulsionnelle pour que le système linéaire et invariant soit stable. Appliquer cette condition sur (S) et déduire la condition sur a pour avoir la stabilité.
4. Déterminer sa fonction de transfert H(z).

**Exercice V.8**

Soit le système défini par $y(k) = x(k) + b\, x(k-1) + c\, x(k-2)$

1. S'agit-il d'un système RIF ou RII ? Justifier
2. Déterminer sa réponse impulsionnelle h(k).
3. Etudier sa stabilité.
4. Déterminer sa fonction de transfert H(z).

**Exercice V.9**

On considère le filtre numérique régi par l'équation aux différences suivante :

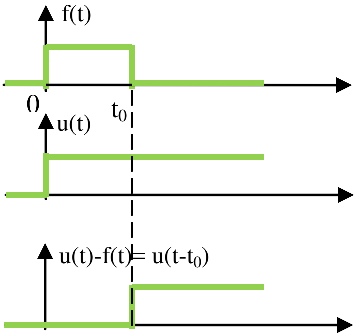
$$y(k) = 0.25\, [x(k) + 2\, x(k-1) + x(k-2)]$$

1. Déterminer la fonction de transfert H(z) du filtre.
2. Déterminer la réponse impulsionnelle h(k).
3. Etudier sa stabilité de ce filtre.

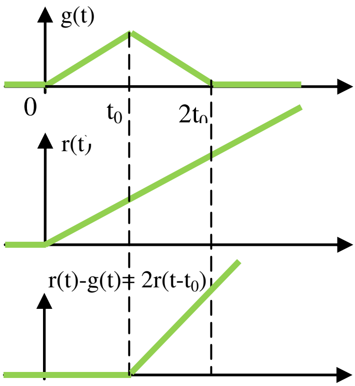
# Eléments de correction des exercices

## Exercice I.1

1. Il faut commencer par tracer f(t) et u(t) afin de pouvoir les comparer. Il est clair que $f(t) = u(t) - u(t-t_0)$



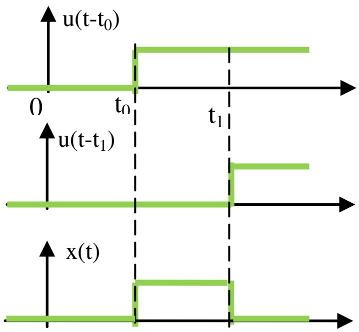

2. Après avoir tracé g(t), r(t) et r(t)-g(t), on peut déduire que $g(t) = r(t)-2\,r(t-t_0)$



## Exercice I.2

$x(t) = A\,(u(t-t_0) - u(t-t_1))$

1. Tracé de x(t)




2. Classe énergétique de x(t) :

   $W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \; dt = \int_{t0}^{t1} |A|^2 \; dt < \infty$ donc x(t) est un signal à énergie finie et par la suite, sa puissance moyenne est nulle.

## Exercice II.1

**1.** Expressions temporelles des trois signaux :

- $s_1(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + \; B_n \sin(n\omega_0 t)]$

  $= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(2\omega_0 t) + B_2 \sin(2\omega_0 t) + A_3 \cos(3\omega_0 t) + B_3 \sin(3\omega_0 t)$

  $= 1 + 5 \cos(\omega_0 t) + 4 \sin(\omega_0 t) - 2 \cos(2\omega_0 t) + 3 \sin(2\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t) - \sin(3\omega_0 t)$

  $= \ldots$

- $s_2(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t + \; \Phi n)$

  $= \frac{C_0}{2} + C_1 \sin(\omega_0 t + \; \Phi 1) + C_3 \sin(3\omega_0 t + \; \Phi 3)$

  $= \frac{1}{2} + 3 \sin(\omega_0 t - \pi/3) + 2 \sin(3\omega_0 t + \; \pi/2)$

  $= \ldots$

- $s_3(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n \, e^{jn\omega_0 t}$

  $= S_0 + S_1 \, e^{jw_0 t} + S_{-1} \, e^{-jw_0 t} + S_3 \, e^{3jw_0 t} + S_{-3} \, e^{-3jw_0 t}$

= 5 + (4+3j) $e^{jw_0t}$ + (4-3j) $e^{-jw_0t}$ + (-2+j) $e^{3jw_0t}$ + (-2-j) $e^{-3jw_0t}$

= …

**2.** Calcul des puissances (application du théorème de Parceval) :

- $P_1 = C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$
  $= A_0^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2 + A_3^2 + B_3^2)$
  = 32 W
- $P_2 = C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$
  $= C_0^2 + \frac{1}{2}(C_1^2 + C_3^2)$
  = 7,5 W
- $P_3 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_k|^2$
  $= |S_0|^2 + |S_1|^2 + |S_{-1}|^2 + |S_3|^2 + |S_{-3}|^2$
  = 85 W

## Exercice II.2

On se propose de décomposer le signal s(t) = k sin(t) (où k est une constante positive) en séries de Fourier.

**1.** $S_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} k\ sin(t)dt$

$$= \frac{k}{T_0}\left[-\cos\left(\frac{T_0}{2}\right) + \cos\left(-\frac{T_0}{2}\right)\right] = 0$$

s(t) est impair, donc An = 0

$B_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} k\ sin(t)\sin(n\omega_0 t)dt$

$= \frac{2k}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{cos((n\omega_0-1)t)-\cos((n\omega_0+1)t)}{2}dt$

$= \frac{k}{T_0}\left[\frac{2}{n\omega_0-1}\sin\left((n\omega_0-1)\frac{T_0}{2}\right) - \frac{2}{n\omega_0+1}\sin\left((n\omega_0+1)\frac{T_0}{2}\right)\right]$

$= \frac{2k}{2n\pi-T_0}\sin\left(n\pi-\frac{T_0}{2}\right) - \frac{2k}{2n\pi+T_0}\sin\left(n\pi+\frac{T_0}{2}\right)$

**2.** $s(t) = S_0 + \sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos(n\omega_0 t) + B_n\sin(n\omega_0 t)]$

$= \sum_{n=0}^{\infty}[B_n\sin(n\omega_0 t)]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2k}{2n\pi - T_0}\sin\left(n\pi - \frac{T_0}{2}\right) - \frac{2k}{2n\pi + T_0}\sin\left(n\pi + \frac{T_0}{2}\right)\right]\sin(n\omega_0 t)$$

**3.** Pour k = 1 et T0 = π

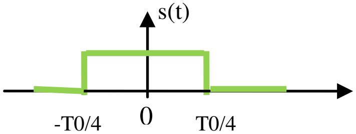
$$B_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{-2}{(2n-1)\pi}\cos(n\pi) - \frac{2}{(2n+1)\pi}\cos(n\pi)$$
$$= \frac{-8n}{(2n-1)(2n+1)\pi}\cos(n\pi)$$

D'où: $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-8n}{(2n-1)(2n+1)\pi}\cos(n\pi)\sin(2nt)$

## Exercice II.3

Soit le signal s(t) = A . rect($\frac{2t}{T_0}$)

1. s(t) = A si $-\frac{1}{2} \leq \frac{2t}{T_0} \leq \frac{1}{2}$ → $-\frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{4}$




2. Décomposition en série de Fourier de s(t) :
   - $S_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} s(t)dt = S_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A\,dt = \frac{A}{T_0}\left(\frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{4}\right) = \frac{A}{2}$
   - s(t) est un signal pair donc $B_n = 0$
   - $A_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} s(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2A}{T_0}\frac{1}{n\omega_0}[\sin(n\omega_0 t)]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}}$

$$= \frac{2A}{2\pi n}\left(\sin\left(n\omega_0\frac{T_0}{4}\right) - \sin\left(-n\omega_0\frac{T_0}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{A}{\pi n}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2A}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

3. Pour A=2V :

$$P_s = \lim_{T_0 \to \propto}\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}}|s(t)|^2 dt = \frac{A^2}{T_0}\frac{T_0}{2} = \frac{A^2}{2} = 2W$$

**Exercice II.4**

v(t) = A r (t) où A est une constante positive

➔ V(f) = TF[v(t)] = $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-j2\pi ft}\ dt = \int_{0}^{+\infty} At\ e^{-j2\pi ft}\ dt$

➔ V(f) = $\left[-\frac{A}{j2\pi f} t\ e^{-j2\pi ft}\right]_0^{+\infty} - \left(-\frac{A}{j2\pi f}\right)\int_{0}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\ dt$

➔ V(f) = $\frac{A}{j2\pi f}\left[-\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f}\right]_0^{+\infty} = -\frac{A}{(j2\pi f)^2}(0-1) = \frac{A}{(j2\pi f)^2}$

**Exercice II.5**

H(f) = A rect $(\frac{f}{2B})$ où A et B son des constantes positives

➔ h(t) = TF$^{-1}$[H(f)] = $\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{j2\pi ft}\ df$

or H(f) = A si $-\frac{1}{2} \leq \frac{f}{2B} \leq \frac{1}{2}$ → $-B \leq f \leq B$

➔ h(t) = $\int_{-B}^{+B} A\ e^{j2\pi ft}\ df = \frac{A}{j2\pi t}(e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt})$

➔ h(t) = $\frac{A}{j2\pi t}$ 2j sin(2πBt) = 2.A.B $\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$ = 2.A.B sinc(2Bt)

**Exercice II.6**

Si v(t) admet V(f) comme TF alors :

TF[v(t-T)] = $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t-T)e^{-j2\pi ft}\ dt$

On pose t'=t-T → t=t'+T et dt'= dt, donc :

TF[v(t-T)] = $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t')e^{-j2\pi f(t'+T)}\ dt'$

$= e^{-j2\pi fT} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t')e^{-j2\pi ft'}\ dt' = e^{-j2\pi fT}$ V(f)

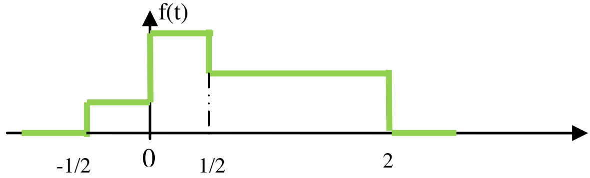
**Exercice II.7**

Soient les fonctions suivantes :

f(t) = rect(t) + 2 rect$(\frac{t-1}{2})$ et g(t) = f(t/A)

1. rect(t) = 1 si $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

   et rect$(\frac{t-1}{2})$ = 1 si $-\frac{1}{2} \leq \frac{t-1}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq t \leq 2$



2. TF[rect(t)] = $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f t}\ dt = \frac{-1}{j2\pi f}\ (-2j\sin(\pi f))$

$\rightarrow$TF[rect(t)] = $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$ = sinc(f)

3. F(f) = TF[f(t)]

= sinc(f) + 4 $e^{-j4\pi f}$ sinc(2f) : linéarité, translation et dilatation

G(f) = TF[g(t)] = A F(Af)

= A [sinc(Af) + 4 $e^{-j4\pi Af}$ sinc(2Af)] : dilatation

## Exercice II.8

1. $S_1(f) = TL[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-pt}\ dt = \delta(0).\ e^0 = 1$
2. $S_2(f) = TL[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt}\ dt = \frac{-1}{p}[e^{-pt}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$
3. $S_3(f) = TL[r(t)] = \int_0^{+\infty} r(t) e^{-pt}\ dt = \int_0^{+\infty} t\ e^{-pt}\ dt$

$= \left[-\frac{1}{p} t\ e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \left(-\frac{1}{p}\right)\int_0^{+\infty} e^{-pt}\ dt = \frac{1}{p^2}$

4. $S_4(f) = TL[rect(t)] = \int_0^{+\frac{1}{2}} e^{-pt}\ dt = \frac{-1}{p}\ (e^{-\frac{p}{2}} - 1)$

## Exercice II.9

1. $x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(k-t_0) + \delta(k-t_1)]\ e^{-a(t-k)}\ dk$

$= \delta(0)e^{-a(t-t_0)} + \delta(0)e^{-a(t-t_1)} = e^{-at}\ (e^{at_0} + e^{at_1})$

2. $x(t)\ )*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}[u(k-t0) - u(k-t1)]\ e^{-a(t-k)}\ dk$

$= \int_{t_0}^{t_1} e^{-a(t-k)}\ dk = e^{-at}\int_{t_0}^{t_1} e^{ak}\ dk = \frac{e^{-at}}{a}\ (e^{at_1} - e^{at_0})$

3. $x(t)\ )*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\frac{k}{T})\ \ e^{-a(t-k)}\ dk$

$= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-a(t-k)}\ dk = e^{-at}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{ak}\ dk = \frac{e^{-at}}{a}\ (e^{a\frac{T}{2}} - e^{-a\frac{T}{2}})$

## Exercice II.10

1. $r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t-t_0) + \delta(t-t_1)]\ e^{-a(t+\tau)}\ dt$

$= \delta(0)e^{-a(t_0+\tau)} + \delta(0)e^{-a(t_1+\tau)} = e^{-a\tau}\ (e^{-at_0} + e^{-at_1})$

2. $r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}[u(t-t0) - u(t-t1)]\ e^{-a(t+\tau)}\ dt$

$= \int_{t_0}^{t_1} e^{-a(t+\tau)}\ dt = e^{-a\tau}\int_{t_0}^{t_1} e^{-at}\ dt = \frac{-e^{-a\tau}}{a}\ (e^{-at_1} - e^{-at_0})$

**3.** $r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\frac{t}{T})\ e^{-a(t+\tau)}\ dt$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-a(t+\tau)}\ dt\ = e^{-a\tau} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-at}\ dt = -\frac{e^{-a\tau}}{a}\ (e^{-a\frac{T}{2}} - e^{a\frac{T}{2}})$$

## Exercice II.11

$s_1(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{T})$ , $s_2(t) = e^{j\pi t}\ \mathrm{rect}(\frac{2t}{T})$ et $s_3(t) = \frac{d^2 s_1(t)}{dt^2}$

1. $S_1(f) = TF[s_1(t)] = TF[\mathrm{rect}(\frac{t}{T})]$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}\ dt = \frac{-1}{j2\pi f}\ (-2j\sin(\pi fT))$$

$$= T\,\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T.\mathrm{sinc}(f.T)$$

2. $S_2(f) = TF[s_2(t)] = \frac{T}{2}\sin(\frac{T}{2}(f-\frac{1}{2}))$ : dilatation et translation

   $S_3(f) = TF[s_3(t)] = T.(j2\pi f)^2\ \mathrm{sinc}(f.T)$ : dérivation

## Exercice III.1

On désire numériser une tension sinusoïdale v(t) d'amplitude $V_m$ = 12V, dont le spectre admet comme fréquence maximale $f_M$ = 50Hz.

1. **1.** $f_e > 2\,f_M = 100Hz$
2. **2.** Si $f_e = 70Hz < 100Hz$ → recouvrement spectral
3. **3.** $\Delta = 0{,}5$

$$SNR = 10\,log[12\left(\frac{S_{eff}}{\Delta}\right)^2] = 10\log[12\left(\frac{12.\sqrt{2}}{0.5}\right)^2]$$

➔ SNR = 41,406337251 dB

4. **4.** Si le signal à numériser varie trop rapidement, l'opération d'échantillonnage risque d'être erronée. On fait recours au blocage afin de pouvoir prélever convenablement les échantillons.

## Exercice IV.1

$$x(k) = A\ \mathrm{rect}\ (k+\frac{N}{2}) = \begin{cases} A\ si\ \frac{-1}{2} \le k+\frac{N}{2} \le \frac{1}{2} \\ 0\ sinon \end{cases}$$

donc x(k)=A si $\frac{-1-N}{2} \le k \le \frac{1-N}{2}$

X(f) = $\sum_{k\to-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-2j\pi\frac{kf}{fe}} = \sum_{k=\frac{-1-N}{2}}^{\frac{1-N}{2}} A\, e^{-2j\pi\frac{kf}{fe}}$

→ X(f) = A[$e^{j\pi\frac{(N+1)f}{fe}} + e^{j\pi\frac{(N-1)f}{fe}}$]

## Exercice V.1

(a) C'est un filtre passif

H(jω) = $\frac{V_S(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{1}{1+jRC\omega}$ → Filtre passe-bas et $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$

(b) C'est un filtre passif

H(jω) = $\frac{V_S(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$ → Filtre passe-haut et $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$

(c) C'est un filtre actif

H(jω) = $\frac{V_S(j\omega)}{V_e(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+jR_2C\omega}$ → Filtre passe-bas et $f_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C}$

(d) C'est un filtre actif

H(jω) = $\frac{V_S(j\omega)}{V_e(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{jR_1C\omega}{1+jR_1C\omega}$ → Filtre passe-bas et $f_0 = \frac{1}{2\pi R_1 C}$

## Exercice V.2

(a) C'est un filtre passif

H(jω) = $\frac{V_S(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{1}{1+jRC\omega+LC(j\omega)^2}$ → Filtre passe-bas et $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

(b) C'est un filtre actif

H(jω) = $\frac{V_S(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{-(1+jRC_1\omega)}{1+j2RC_2\omega+R^2C_1C_2(j\omega)^2}$ → Filtre passe-bande et $f_0 = \frac{1}{2\pi R\sqrt{C_1C_2}}$

(c) C'est un filtre actif

H(jω) = $\frac{V_S(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{-(jCR_2\omega+R_1R_2C^2(j\omega)^2)}{1+j(2R_1+R_2)C\omega+R_1R_2C^2(j\omega)^2}$ → Filtre passe-haut et $f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_1R_2}}$

## Exercice V.3

$h(n)=\delta(n) - \delta(n-2)$.

1. $y(n) = x(n) - x(n-2)$
2. $Y(z) = X(z) - z^{-2} X(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-2} = \frac{z^2-1}{z^2}$
3. Le système est stable car il est de type RIF (d'ailleurs il possède un seul pôle double z=0 qui se trouve à l'intérieur du cercle unité)

## Exercice V.4

$y(n) - 2.a.y(n-1) + a^2 y(n-2) = x(n) - a.x(n-1)$ avec $y(-2) = y(-1) = 0$.

1. $Y(z) - 2.a.z^{-1}Y(z) + a^2 z^{-2} Y(z) = X(z) - a z^{-1} X(z)$

   $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-az^{-1}}{1-2az^{-1}+a^2z^{-2}} = \frac{z^2-az}{z^2-2az+a^2}$
2. $h(n) = 2.a.h(n-1) - a^2 h(n-2) + \delta(n) - a.\delta(n-1)$

   $n=0 : h(0) = 2.a.h(-1) - a^2 h(-2) + \delta(0) - a.\delta(-1) = 1$

   $n=1 : h(1) = 2.a.h(0) - a^2 h(-1) + \delta(1) - a.\delta(0) = a$

   $n=2 : h(2) = 2.a.h(1) - a^2 h(0) + \delta(2) - a.\delta(1) = a^2$

   $n=3 : h(3) = 2.a.h(2) - a^2 h(1) + \delta(3) - a.\delta(2) = a^3$

   …

   D'où: $h(n) = a^n$
3. Le système est stable pour $-1< a <1$

## Exercice V.5

On considère le filtre RIF défini par :

$$H(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}$$

1. $S(z) = E(z) +2 z^{-1} E(z) +3 z^{-2} E(z)$

   Donc $s(n) = e(n) + 2 e(n-1) + 3 e(n-2)$
2. $h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$
3. C'est un filtre RIF donc stable.

   Ou bien : $h(0) = \delta(0) + 2\delta(-1) + 3\delta(-2) = 1$

   $h(1) = \delta(1) + 2\delta(0) + 3\delta(-1) = 2$

   $h(2) = \delta(2) + 2\delta(1) + 3\delta(0) = 3$

   et $h(n) = 0$ pour tout $n>2$

   Donc $\sum h(n) = 1 + 2 + 3 = 6 < \infty$ donc le système est stable

## Exercice V.6

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.5\,z^{-1})(1+0.25\,z^{-1})}$$

1. $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.25\,z^{-1}-0.125\,z^{-2}}$
   $S(z) - 0.25\,z^{-1}\,S(z) - 0.125\,z^{-2}\,S(z) = E(z) + z^{-1}\,E(z)$
   $\Rightarrow$ s(n) - 0.25 s(n-1) – 0.125 s(n-2) = e(n) + e(n-1)
2. h(n) = 0.25 h(n-1) + 0.125 h(n-2) + e(n) + e(n-1)
3. h(0) = 0.25 h(-1) + 0.125 h(-2) + δ (0) + δ (-1) = 1
   h(1) = 0.25 h(0) + 0.125 h(-1) + δ (1) + δ (0) = 1.25
   h(2) = 0.25 h(1) + 0.125 h(0) + δ (2) + δ (1) = 0.4375
   h(3) = 0.25 h(2) + 0.125 h(1) + δ (3) + δ (2) = 0.265625
   h(4) = 0.25 h(3) + 0.125 h(2) + δ (4) + δ (3) = 0.12109375
   h(5) = 0.25 h(4) + 0.125 h(3) + δ (5) + δ (4) = 0.06347656
   …………
   h(n) converge vers 0 donc le système est stable

## Exercice V.7

x(k) = y(k) – a.y(k-1)

1. Il s'agit d'un système RII, car y(k) = x(k) + a.y(k-1)
2. h(k) = δ (k) + a.h (k-1)
   k=0 : h(0) = δ (0) + a.h (-1) = 1
   k=1 : h(1) = δ (1) + a.h (0) = a
   k=2 : h(2) = δ (2) + a.h (1) = $a^2$
   k=3 : h(3) = δ (3) + a.h (2) = $a^3$
   ……
   D'où : h(k) = $a^k$
3. Pour que le système soit stable, il faut que :
   $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k < \infty$
   Il faut donc que |a| < 1
4. $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

## Exercice V.8

y(k) = x(k) + b x(k-1) + c x(k-2)

1. Il s'agit d'un système RIF car la sortie dépend uniquement des entrées.
2. h(k) = δ (k) + b δ (k-1) + c δ (k-2)

$h(0) = \delta(0) + b\,\delta(-1) + c\,\delta(-2) = 1$
$h(1) = \delta(1) + b\,\delta(0) + c\,\delta(-1) = b$
$h(2) = \delta(2) + b\,\delta(1) + c\,\delta(0) = c$
$h(k) = 0$ pour tout $k > 2$

3. C'est un système RIF donc stable
4. $H(z) = 1 + b.z^{-1} + c.z^{-2} = \frac{z^2+bz+c}{z^2}$

## Exercice V.9

$y(k) = 0.25\,[x(k) + 2\,x(k-1) + x(k-2)]$

1. $H(z) = 0.25\,[1 + 2.z^{-1} + z^{-2}] = \frac{0.25\,z^2+0.5\,z+0.25}{z^2}$
2. $h(k) = 0.25\,[\delta(k) + 2\,\delta(k-1) + \delta(k-2)]$
   $h(0) = 0.25\,[\delta(0) + 2\,\delta(-1) + \delta(-2)] = 0.25$
   $h(1) = 0.25\,[\delta(1) + 2\,\delta(0) + \delta(-1)] = 0.5$
   $h(2) = 0.25\,[\delta(2) + 2\,\delta(1) + \delta(0)] = 0.25$
   $h(k) = 0$ pour tout $k > 2$
3. Filtre RIF donc stable

# BIBLIOGRAPHIE


**[1]** DUMARTIN T., Rappels Traitement du Signal - Note de cours, Licence Professionnel Optronique, 2004 – 2005

**[2]** AUVRAY J., Traitement du Signal, Cours IST SETI – 3, Université Pierre et Marie Curie, 2001 – 2002

**[3]** AUVRAY J., Electronique des télécommunications, Cours de systèmes électroniques, Université Pierre et Marie Curie, 2000 – 2001

**[4]** AUVRAY J., Les fonctions de l'électronique, Cours de systèmes électroniques, Université Pierre et Marie Curie, 2000 – 2001

**[5]** Prêtre D., Fast Fourier Transform (FFT), 2002

**[6]** Prêtre D., Caractéristiques des signaux continus, 2002

**[7]** Prêtre D., Transformée de Fourier discrète, 2002

**[8]** Quéré R., Filtrage numérique, Licence Professionnelle d' Electronique et d'Optique des Télécommunications, Université de Limoges – Faculté des sciences, 2003

**[9]** Français O., Echantillonneur Bloqueur, cours d'Acquisition de données, ESIEE, 2000

**[10]** Leich H. et Dutoit T., Traitement du Signal - Note de cours, Faculté Polytechnique de Mons, 2001

**[11]** Couturier G., Transformées de Fourier numérique et discrète (Fast Fourier Transform) applications – vol. 4, IUT Bordeaux I, 2003

**[12]** Couturier G., Identification d'un système par utilisation des méthodes temps/fréquence (réponse impulsionnelle, produit de convolution, réponse indicielle) – vol.2, IUT Bordeaux I, 2006

**[13]** Couturier G., Filtrage analogique et numérique – vol.8, IUT Bordeaux I, 2006

**[14]** Renaux A., Cours : Traitement numérique des signaux, Institut de Formation d'Ingénieurs, Université Paris Sud – IFIPS, 2009

**[15]** Charbit M. et Blanchet G., Traitement du signal audio-numérique (TSA), cours de master en sciences et technologies – Université de Pierre et Marie Curie, septembre 2009