Le modèle géométrique direct.

1- Introduction :

si nous désirons utiliser le modèle géométrique, nous devons faire deux catégories d'hypothèses

① l'hypothèse dite "statique"

$\underline{\theta}$, $\underline{C}$ et $\underline{C}_m$ sont liés par des équations statique en particulier indépendantes du temps

② Les segments de robot : sont considérés rigides (indéformables) et les articulations mécaniquement parfaites (pas d'élasticité, pas de frottement etc).

ceci se traduit par $\underline{x} = f(\underline{\theta})$

qui correspond au modèle géométrique direct (modèle de connaissance : calcul de position et d'orientation)

$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3 - - - - x_n)^T$ => vecteurs des variables operationnelles

$\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2 - - - - - \theta_m)^T$ => " " " articulaires

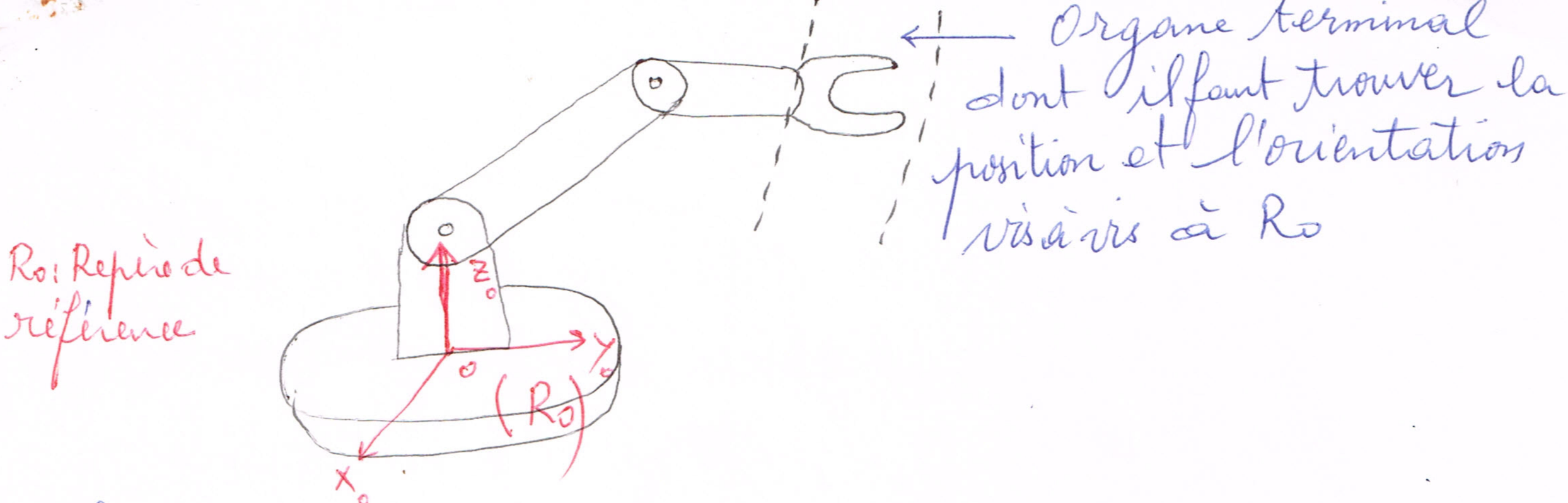
m : nbre de ddl. et n : nbre de $\vec{T}$

f décrit la rélation entre $\underline{x}$ et $\underline{\theta}$ avec $n \leq m$

Rq si $n < m$: le robot est dit redondant => il effectue la $\vec{T}$ par ≠ manière

2- Hypothèse de base pour le calcul du modèle géométrique direct - GMD :

le problème du modèle géométrique direct peut s'exprimer par la question suivante : comment connaître la position et l'orientation de l'organe terminal dans le repère R_0 en fonction des valeurs des variables articulaires ?



A fin de simplifier le calcul, nous allons supposer les conditions suivantes remplies:

① la base du robot est fixe (C'est le cas de robots industriels poste fixe).

② le repère de référence R_0 est lié à la base du robot

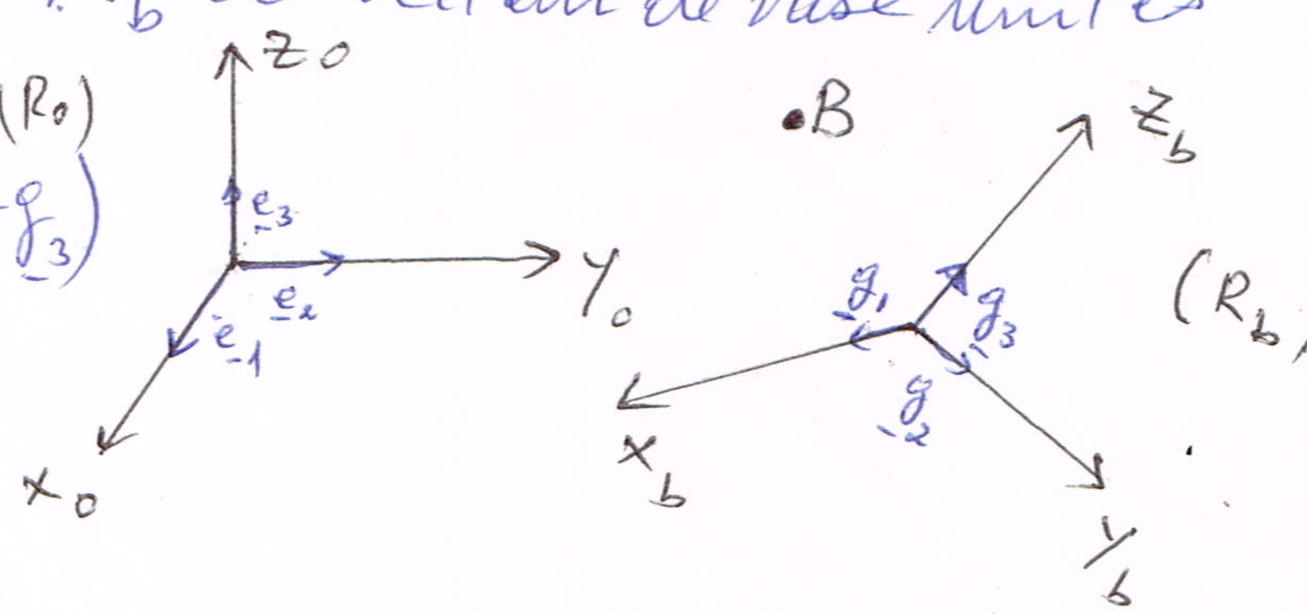
③ il n'existe pas d'obstacle dans le volume atteignable du robot.

④ toute tâche peut être exécutée en contrôlant la position et l'orientation de l'organe terminal (qui vont définir X_0

3- Quelques méthode pour connaître l'orientation d'un corps rigide par rapport à un repère de référence:

a - Les cosinus directeurs:

Soit un repère de référence $\underline{R_0}$ ayant $\underline{E}$ pour vecteur de base et $\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}$ pour vecteurs de base unités. On associe au solide B un autre repère R_b de vecteur de base unités $\underline{g_1}, \underline{g_2}, \underline{g_3}$



On peut écrire que $\underline{g_1}$ (ou $\underline{g_2}$ ou $\underline{g_3}$) peut s'exprimer en fonction de $\underline{e_1}, \underline{e_2}$ et $\underline{e_3}$ sous la forme

$$\underline{g_1} = a_1 \underline{e_1} + a_2 \underline{e_2} + a_3 \underline{e_3}$$

$$\underline{g_2} = \beta_1 \underline{e_1} + \beta_2 \underline{e_2} + \beta_3 \underline{e_3}$$

$$\underline{g_3} = \gamma_1 \underline{e_1} + \gamma_2 \underline{e_2} + \gamma_3 \underline{e_3}$$

Ce qui se traduit sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \\ \underline{g}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{G} = A_e^g \quad \underline{E}$$

A_e^g est la matrice des cosinus directeurs qui donne l'orientation de $G(R_b)$ par rapport à $E(R_0)$.

cette matrice comporte 9 éléments (cosinus directeurs) qui sont reliés par 6 équation de contraintes issues de.

$i = 1,2,3$ $\quad |\underline{g}_i| = |\underline{e}_i| = 1$

$j = 1,2,3$ $\quad \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j = \underline{e}_i \underline{e}_j = 0$ si $i \neq j$

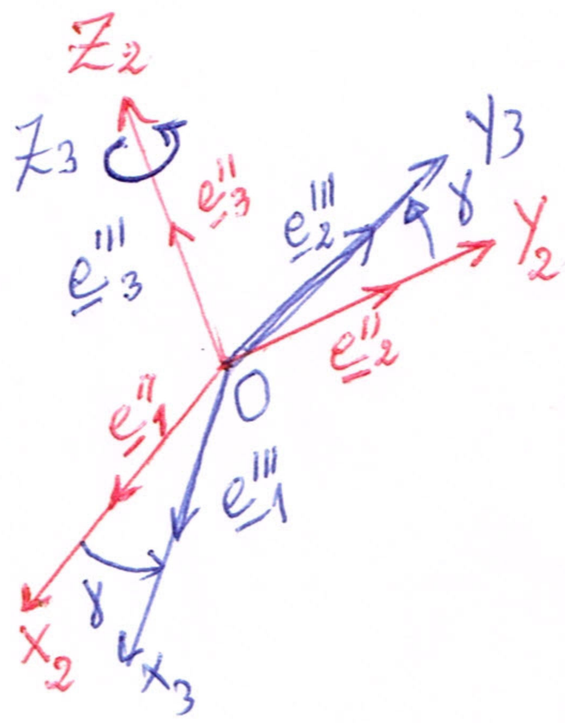
càd :

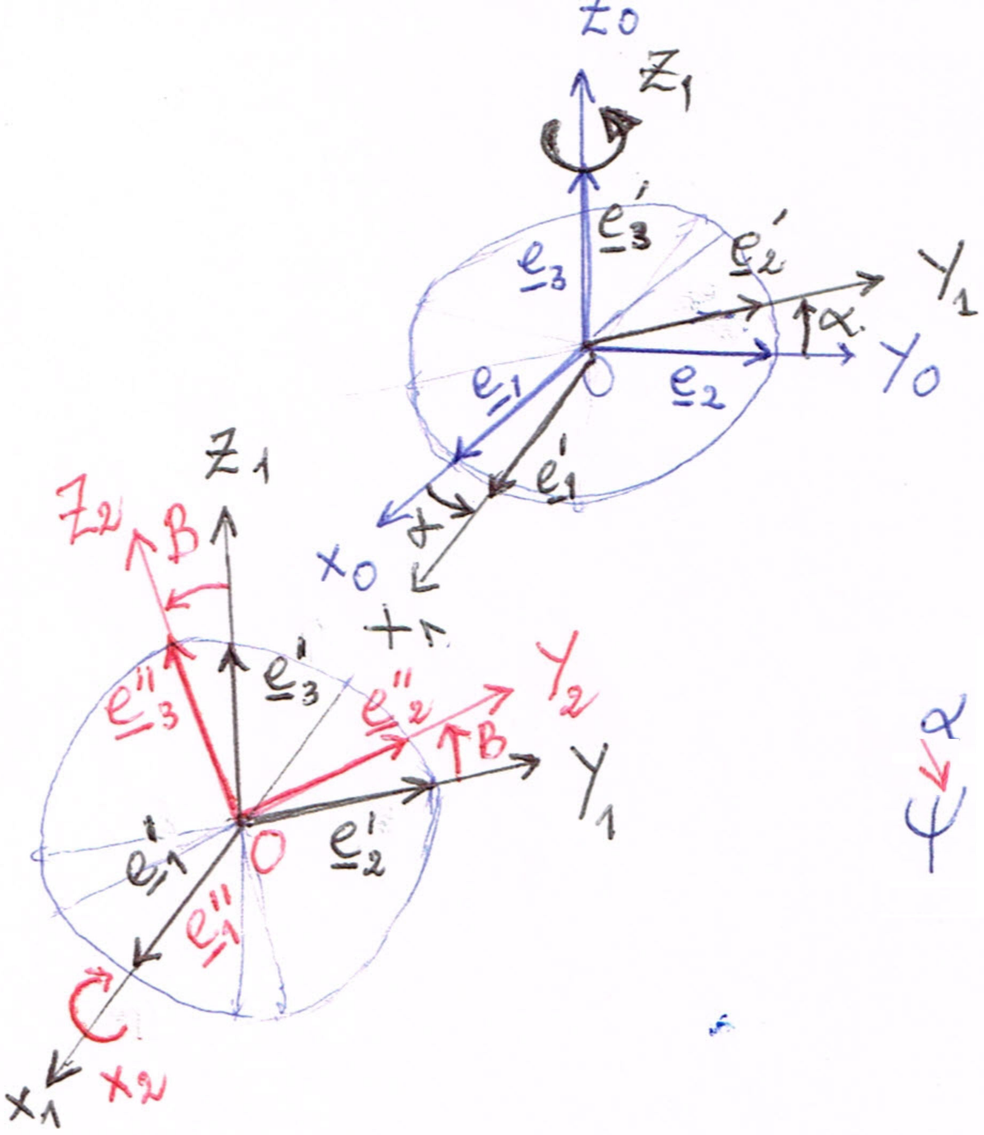
$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0$$
$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 = 0$$
$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0.$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

b - Les angles d'Euler :

Le repère de référence $O x_0 y_0 z_0$ défini par $\underbrace{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3}_{\text{vecteurs de base unités}}$ appelé R_0 et le repère R_b défini par $\underline{g}_1, \underline{g}_2$ et $\underline{g}_3$. L'orientation de ce dernier est le résultat de trois rotations successives [càd autour de z_0, x_1, z_2 (ZXZ)





(Ro)

$\alpha \quad \beta \quad \gamma$

$\psi \quad \theta \quad \varphi$

* 1ère rotation autour de Z_0 : (Projection sur l'axe X_0 et Y_0).
d'un angle α. on obtient $\underline{e}'_1$, $\underline{e}'_2$ et $\underline{e}'_3$

$$\underline{e}'_1 = \cos\alpha \cdot \underline{e}_1 + \sin\alpha \cdot \underline{e}_2$$
$$\underline{e}'_2 = \cos\alpha \cdot \underline{e}_2 - \sin\alpha \cdot \underline{e}_1$$
$$\underline{e}'_3 = e_3$$

$\cos\alpha = c\alpha$.
$\sin\alpha = s\alpha$.

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \underline{e}'_1 \\ \underline{e}'_2 \\ \underline{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E}' = A^{\alpha} \cdot \underline{E} \qquad (1)$$

* 2e rotation autour de X_1 d'un angle β : on obtient $\underline{e}''_1$, $\underline{e}''_2$, $\underline{e}''_3$
(Projection sur Z_1 et Y_1).

$$\underline{e}''_1 = \underline{e}'_1$$
$$\underline{e}''_2 = \cos\beta \cdot \underline{e}'_2 + \sin\beta\, \underline{e}'_3$$
$$\underline{e}''_3 = \cos\beta \cdot \underline{e}'_3 - \sin\beta\, \underline{e}'_2$$

$$\begin{pmatrix} \underline{e}''_1 \\ \underline{e}''_2 \\ \underline{e}''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\beta & s\beta \\ 0 & -s\beta & c\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{e}'_1 \\ \underline{e}'_2 \\ \underline{e}'_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E}'' = A^{\beta} \cdot \underline{E}' \qquad (2)$$

* 3e rotation autour de Z_2 d'un angle γ : On obtient $\underline{e}'''_1, \underline{e}'''_2, \underline{e}'''_3$ qui sont confondus avec $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$. (Projection sur X_2, Y_2)

$$\underline{e}'''_1 = \cos\gamma \cdot \underline{e}''_1 + \sin\gamma \cdot \underline{e}''_2$$

$$\underline{e}'''_2 = -\sin\gamma \cdot \underline{e}''_1 + \cos\gamma \cdot \underline{e}''_2$$

$$\underline{e}'''_3 = \underline{e}''_3$$

$$\begin{pmatrix} \underline{e}'''_1 \\ \underline{e}'''_2 \\ \underline{e}'''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\gamma & S\gamma & 0 \\ -S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{e}''_1 \\ \underline{e}''_2 \\ \underline{e}''_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{G} = \underline{E}''' = A^{\gamma} \cdot \underline{E}'' \qquad (3)$$

A partir de (1), (2) et (3) on peut écrire :

$$\underline{G} = A^{\gamma} \cdot A^{\beta} \cdot A^{\alpha} \cdot \underline{E} = A^{g}_{e} \cdot \underline{E}$$

$$A^{g}_{e} = \Big($$