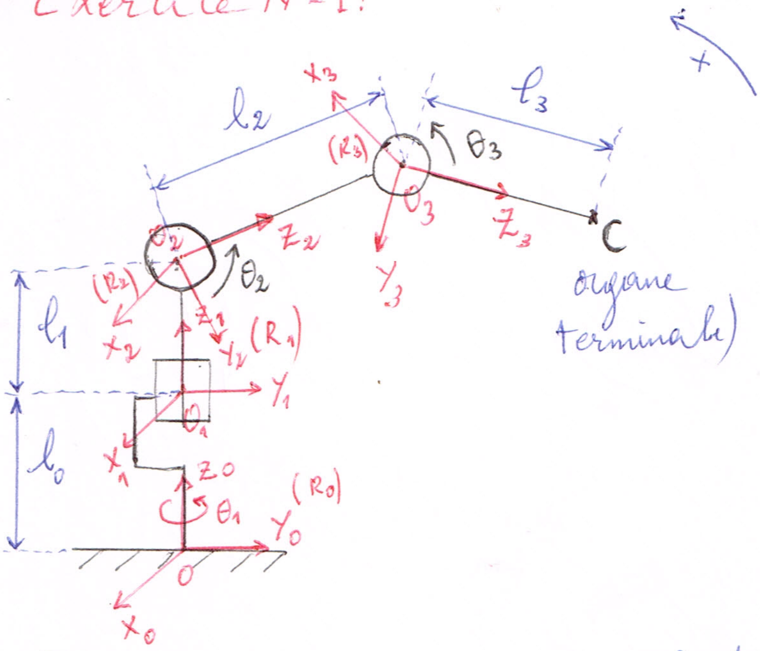
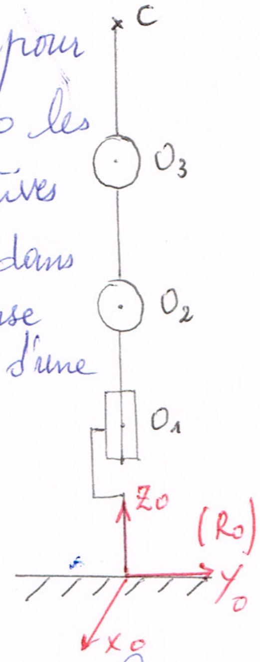
Exercice N° 1 :



Configuration pour $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ les rotations positives sont comptées dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Le robot possède 3 degrés de libertés en rotation $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

1- Achever l'installation des repères

2- Déterminer l'orientation de l'organe terminale par rapport à (R_0)

* On obtient le repère R_1 par une rotation d'un angle θ_1 autour de Z_0 :

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Le repère R_2 correspond à une rotation θ_2 autour de X_1 :

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & S_2 \\ 0 & -S_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

* Le repère R_3 est obtenu par rotation autour de x_2 d'un angle θ

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & S_3 \\ 0 & -S_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

* L'orientation de R_3 lié à O_3C par rapport à R_0 est donc :

$$A_0^3 = A_2^3 \cdot A_1^2 \cdot A_0^1 = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 C(2+3) & C_1 C(2+3) & S(2+3) \\ S_1 S(2+3) & -C_1 S(2+3) & C(2+3) \end{pmatrix}.$$

* La position de C dans R_0 s'obtient en écrivant :

$$\underline{OC}(R_0) = \underline{OO_1}(R_0) + (A_0^1)^T \underline{O_1O_2}(R_1) + (A_0^2)^T \underline{O_2O_3}(R_2) + (A_0^3)^T \underline{O_3C}(R_3).$$

$$\begin{pmatrix} OC_{x_0} \\ OC_{y_0} \\ OC_{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 C_2 & S_1 S_2 \\ S_1 & C_1 C_2 & -C_1 S_2 \\ 0 & S_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 C(2+3) & S_1 S(2+3) \\ S_1 & C_1 C(2+3) & -C_1 S(2+3) \\ 0 & S(2+3) & C(2+3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 S_2 l_2 + S_1 S(2+3) l_3 \\ -C_1 S_2 l_2 - C_1 S(2+3) l_3 \\ l_0 + l_1 + C_2 l_2 + C(2+3) l_3 \end{pmatrix}$$

Le robot ne comportant que 3 degrés de liberté, le vecteur $\underline{X}$ à commander ne pourra comporter au plus que 3 grandeurs indépendantes qui pourront être :

- soit la position de C dans Ro

$$X_c = S_1 S_2 l_2 + S_1 S(2+3) l_3$$
$$Y_c = -C_1 S_2 l_2 - C_1 S(2+3) l_3$$
$$Z_c = l_0 + l_1 + C_2 l_2 + C(2+3) l_3$$

- soit l'orientation du repère R_3 définie par l'un des 3 modes : (Cosinus directeurs, angles d'Euler, angle de Bryant)

1) Les cosinus directeurs donnés par la matrice A_0^3

$X_3/X_0 = C_1$ $\quad X_3/Y_0 = S_1$ $\quad X_3/Z_0 = 0$

$Y_3/X_0 = -S_1 C(2+3)$ $\quad Y_3/Y_0 = C_1 C(2+3)$ etc. . .

avec les 6 équations de contraintes il ne reste que 3 grandeurs indépendantes.

2) Les angles d'Euler :

Le calcul des angles α, β et γ se fait par les équations suivantes :

* $\cos\beta = A_{33}$ $\longrightarrow C(2+3)$
* $\sin\beta = \pm(1-\cos^2\beta)^{1/2}$ $\longrightarrow \pm S(2+3)$
* $\cos\alpha = -A_{32}/\sin\beta$
* $\sin\alpha = A_{31}/\sin\beta$
* $\cos\gamma = A_{23}/\sin\beta$
* $\sin\gamma = A_{13}/\sin\beta$.

$\longrightarrow$ Il y a deux possibilités

* $1^{ère}$ cas : $\beta = \theta_2 + \theta_3$

$\cos\alpha = C_1$
$\sin\alpha = S_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \theta_1}$

$\cos\gamma = 1$
$\sin\gamma = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma = 0}$

* $2^{ème}$ cas : $\beta = -(\theta_2 + \theta_3)$

$\cos\alpha = -C_1$
$\sin\alpha = -S_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \theta_1 + \pi}$

$\cos\gamma = -1$
$\sin\gamma = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma = \pi}$

3) Les angles de Bryant :

Le calcul de θ_1, θ_2 et θ_3 se fait par les équations suivantes :

$\sin\theta_2 = A_{31}$ $\longrightarrow$ $S_1 S(2+3)$.

$\cos\theta_2 = \pm(1 - \sin^2\theta_2)^{1/2}$ $\longrightarrow$ $\pm(1 - S_1^2 S^2(2+3))^{1/2}$

$\Downarrow$

$\theta_2 = \pm \arcsin(S_1 S(2+3))$.

$\downarrow$

$\sin\theta_1 = -A_{32}/\cos\theta_2$

$\cos\theta_1 = A_{33}/\cos\theta_2$

$\sin\theta_3 = -A_{21}/\cos\theta_2$ $\longleftarrow$ 2 cas possible

$\cos\theta_3 = A_{11}/\cos\theta_2$

* $1^{ère}$ cas : on choisit le signe "plus"

$\sin\theta_1 = C_1 S(2+3)/C\theta_2$
$\cos\theta_1 = C(2+3)/C\theta_2$ $\Rightarrow$ θ_1

$\sin\theta_3 = S_1 C(2+3) C\theta_2$
$\cos\theta_3 = C_1/C\theta_2$ $\Rightarrow$ θ_3

* $2^{ème}$ cas : on choisit le signe "moins"

même calcul