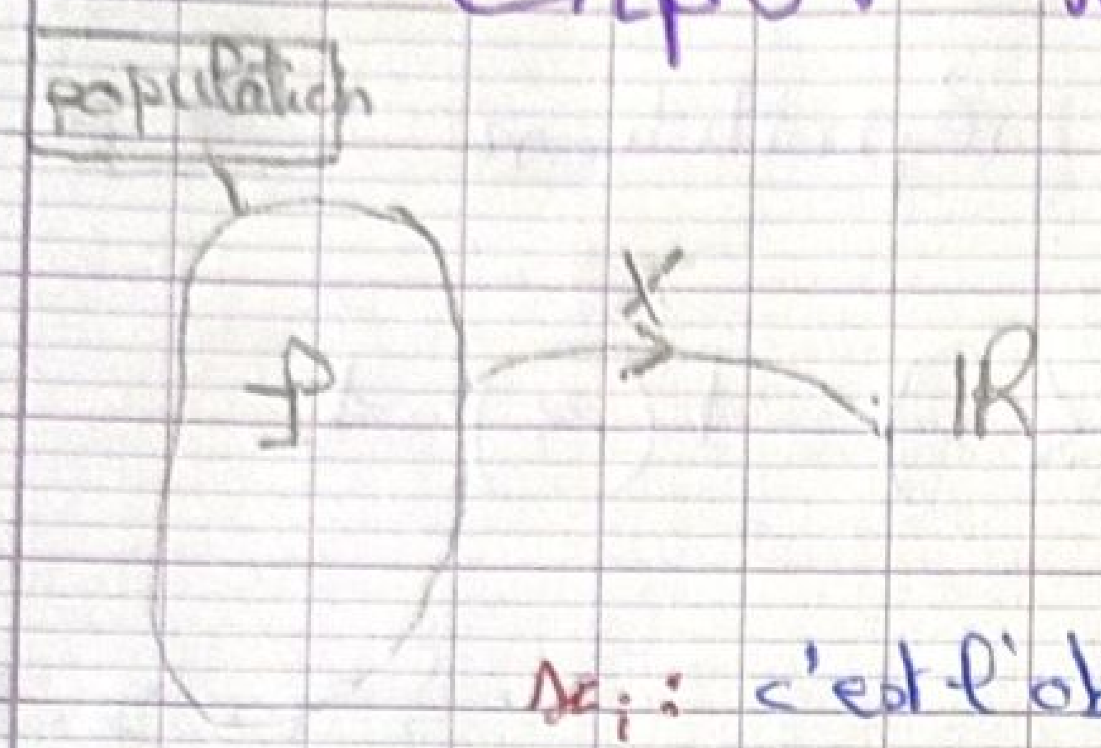
Statistique :

Chp 0 : Rappels.



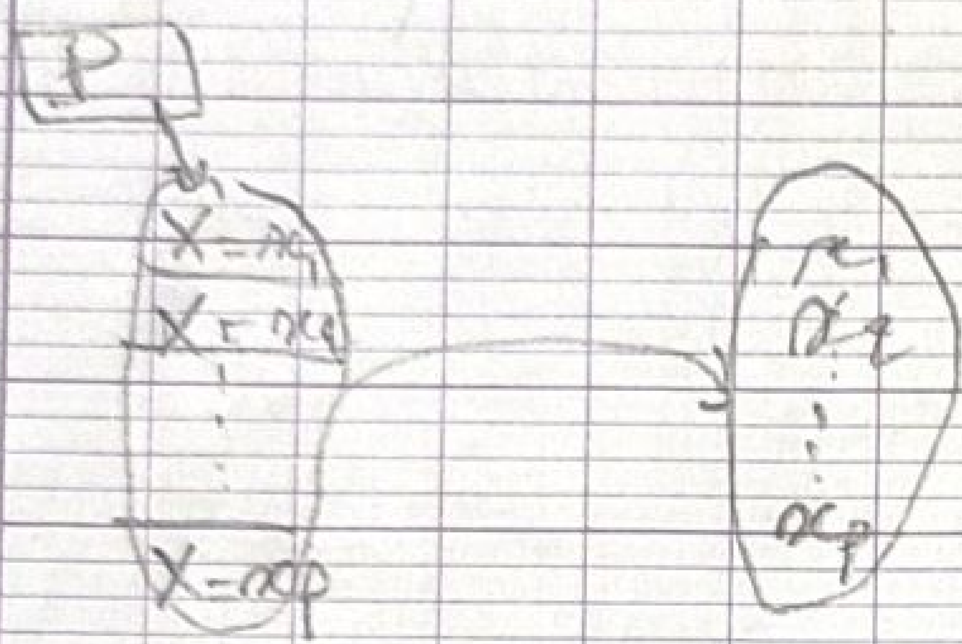
$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_p\}$ — p : nb des modalité

$x_i \neq x_j$

x_i s'appelle une modalité de X.

X : une variable aléatoire = une série statistique

x_i : c'est l'objet qui présente la répétition des valeurs.



$(x_i = X) = \{$ la partie de la population tel que les individus dont la modalité est $x_i \}$

$(X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_p) = P$.

$(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$ Si $i \neq j$

card$(P) = n \geq p$.

$(X = x_i)$ telque $1 \leq i \leq p$: c'est une partition de P.

Définition :

n_i est l'effectif de la modalité x_i

f_i est la fréquence de la modalité x_i

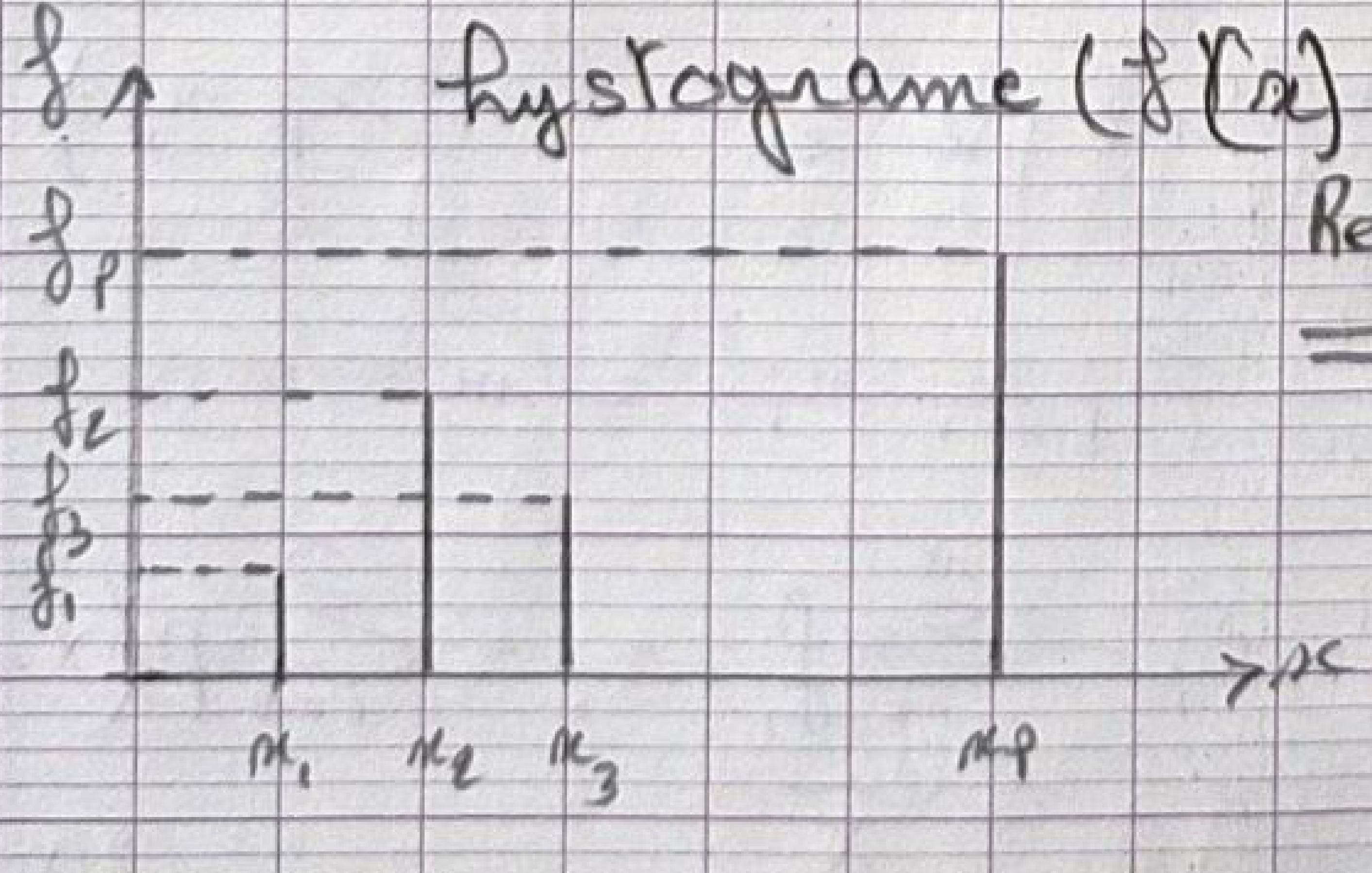
telque $\quad f_i = \frac{n_i}{n}$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p = \sum_{k=1}^{p} n_k$$

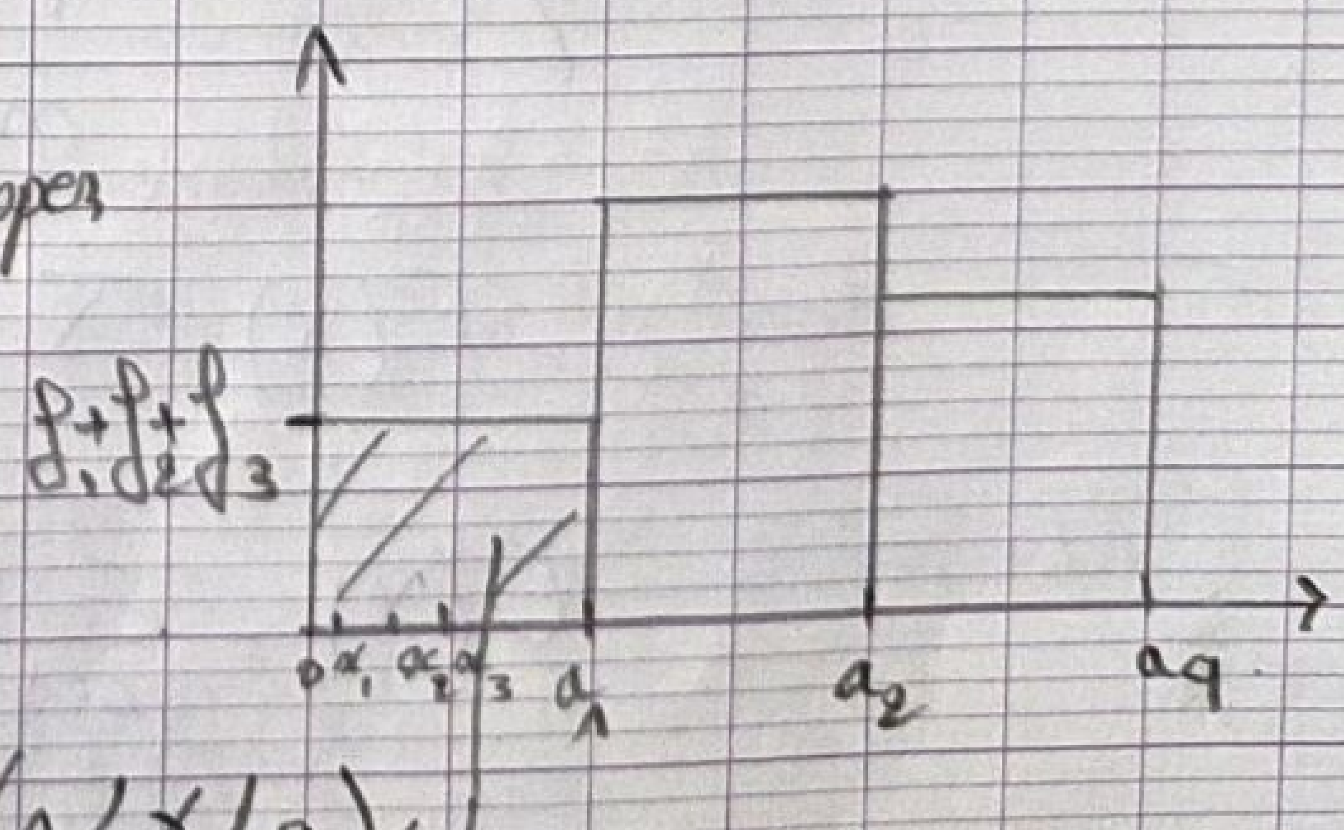
$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p = 1$$

$$f_i = \frac{n_i}{n} = p(X = x_i)$$

hystograme $(f(x))$



Regroupper ⟹



$P(a_0 < X < a_1)$

$$P(a_0 < X < a_1) = p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3) = f_1 + f_2 + f_3$$

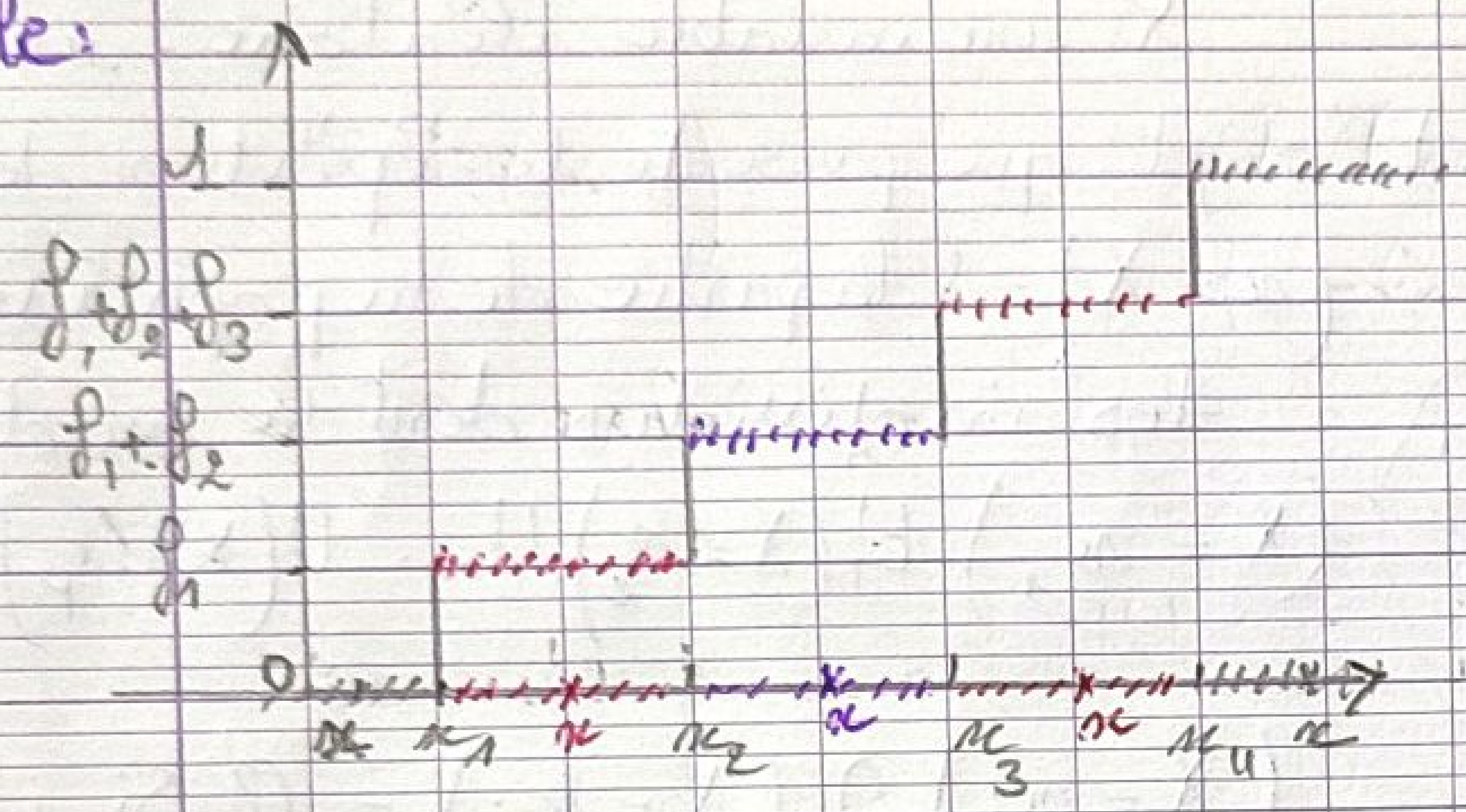
distribution
X variable aléatoire
série statistique

Remarque:

Déf: la fonction de répartition

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto P(X \leq x) = F(x)$$

Exemple:



$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Si $x < x_1$: $F(x) = P(X \leq x) = 0$.

Si $x_1 \leq x < x_2$ $F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) = f_1$

Si $x_2 \leq x < x_3$ $F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = f_1 + f_2$

Si $x_3 \leq x < x_4$ $F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) = f_1 + f_2 + f_3$

Si $x_4 \leq x$ = $F(x) = 1$.

Définition:

l'espérance : la moyenne d'une variable aléatoire

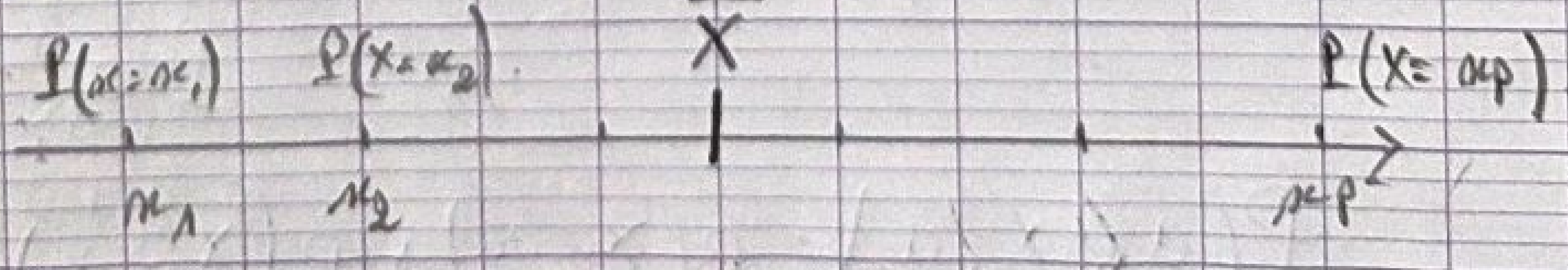
$$\underbrace{x_1, x_1, x_1 \dots x_1}_{n_1} \quad \underbrace{x_2, x_2, x_2 \dots x_2}_{n_2} \quad \underbrace{x_p, x_p, x_p \dots x_p}_{n_p}$$

$$Y = m = \frac{1}{n}\left(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_p n_p\right).$$

Espérance

Ecartype $\rightarrow E(X) = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot n_i = m \leftarrow m$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot x_i.$$



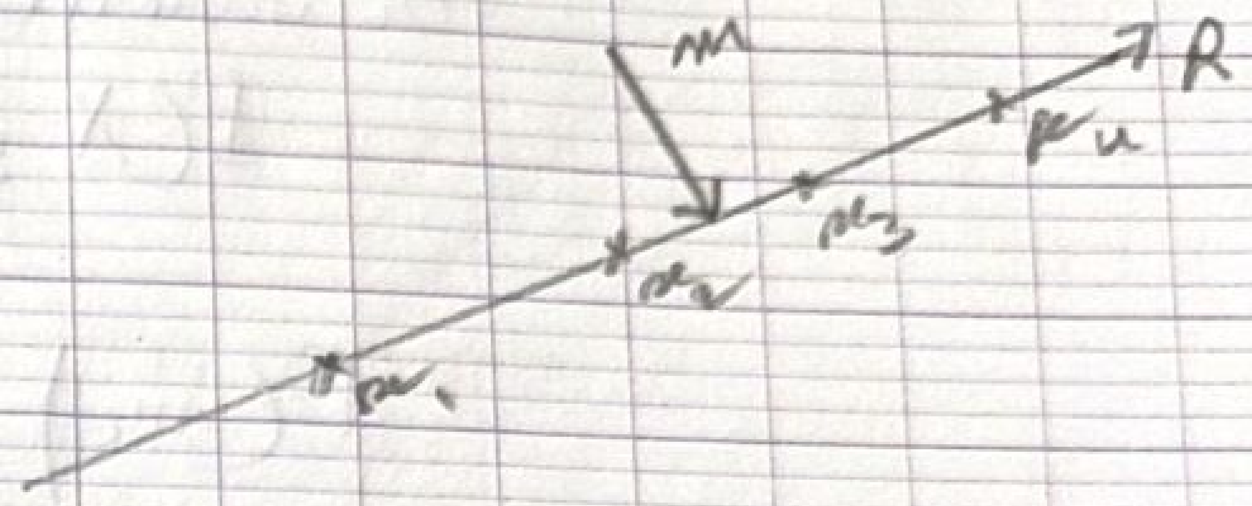
$\overline{X}$: barycentre de sys pondéré $\{(P(X=x_1), x_1) ; (P(X=x_2), x_2) \dots (P(X=x_p), x_p)\}$

La variance :

Déf : $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j \left(x_j - E(X)\right)^2 = Var(X)$.

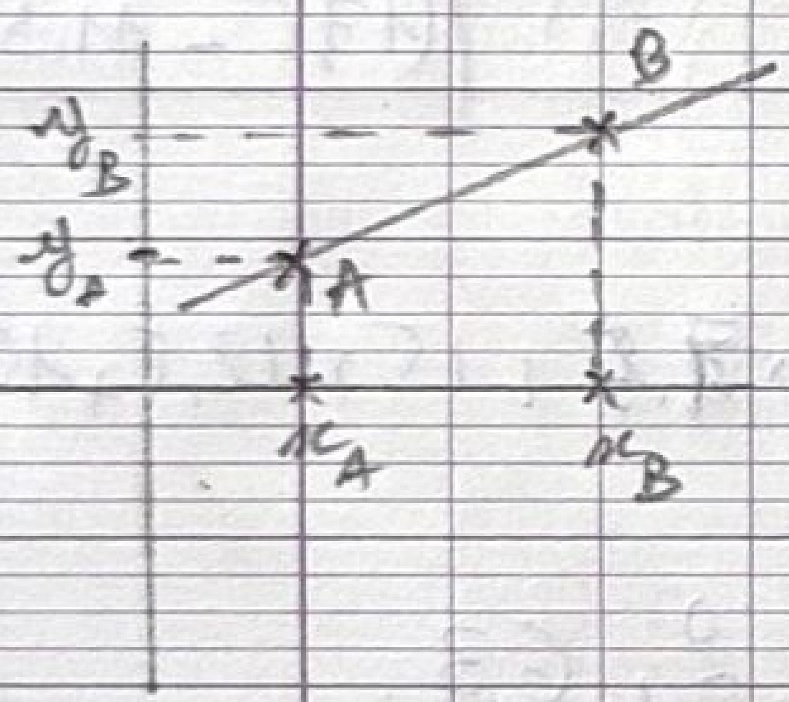
L'écartype :

$\sigma = \sqrt{V(X)}$.



X : distribution.

n_1	x_1		$x_1 - E(X)$	$(x_1 - E(X))^2$
n_2	x_2	centralisation	$x_2 - E(X)$	$(x_2 - E(X))^2$
n_3	x_3	$\Longrightarrow$	$x_3 - E(X)$ $\Longrightarrow$	$(x_3 - E(X))^2$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n_p	x_p		$x_p - E(X)$.	$(x_p - E(X))^2$.



$d^2(A,B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Qq Propriétés :

X, Y : deux variables.

* $E(X,Y) = E(X) + E(Y)$.
* $E(a.X) = a.E(X)$.

n'a pas de relation

X, Y est indépendant * $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ SSI X, Y sont indépendantes.

si l'angle $= \frac{\pi}{2}$

cos $= 0$.

⚠ l'indépendance se décrit selon un angle (qui s'appelle degré d'indépendance).

* $Var(a.X) = a^2 Var(X)$.
* $Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1} n_j \left(x_j - \bar{X}\right)^2$ E

$$= E\left((X - \bar{X})^2\right) = E\left(X^2 - 2X\bar{X} + (\bar{X})^2\right).$$
$$= E(X^2) - 2\bar{X}E(X) + \bar{X}^2 . \underbrace{E(1)}_{1}$$
$$= E(X^2) - 2\bar{X}.\bar{X} + \bar{X}^2$$
$$= E(X^2) - \bar{X}^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

La médiane :

La médiane d'une série statistique est la valeur m_e tq

$$P(X \leq m_e) = 0,5 = 50\%$$

$$F(m_e) = \frac{1}{2}$$; F : la fonction de répartition de la variable X.

Exemple :

N = 50

x_i	n_i ($\frac{n_i}{50}$)	f_i	F_i	x_i ($\frac{5-0}{2}$)	$(x_i - \bar{x})^2$
[0, 5[	07	0,14	0,14	2,5	$(2,5 - 11,3)^2$
[5, 10[	13	0,26	0,40 = 40%	7,5	$(7,5 - 11,3)^2$
[10, 15[	15	0,30	0,70	12,5	$(12,5 - 11,3)^2$
[15, 20[	15	0,30	1	17,5	$(17,5 - 11,3)^2$

$$m = E(X) = \frac{1}{50}\left[7 \times 2,5 + 13 \times 7,5 + 15 \times 12,5 + 15 \times 17,5\right] = 11,3.$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{50} \sum (x_i - \bar{x}_i)^2 = 2,63.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2,63} = 1,62.$$

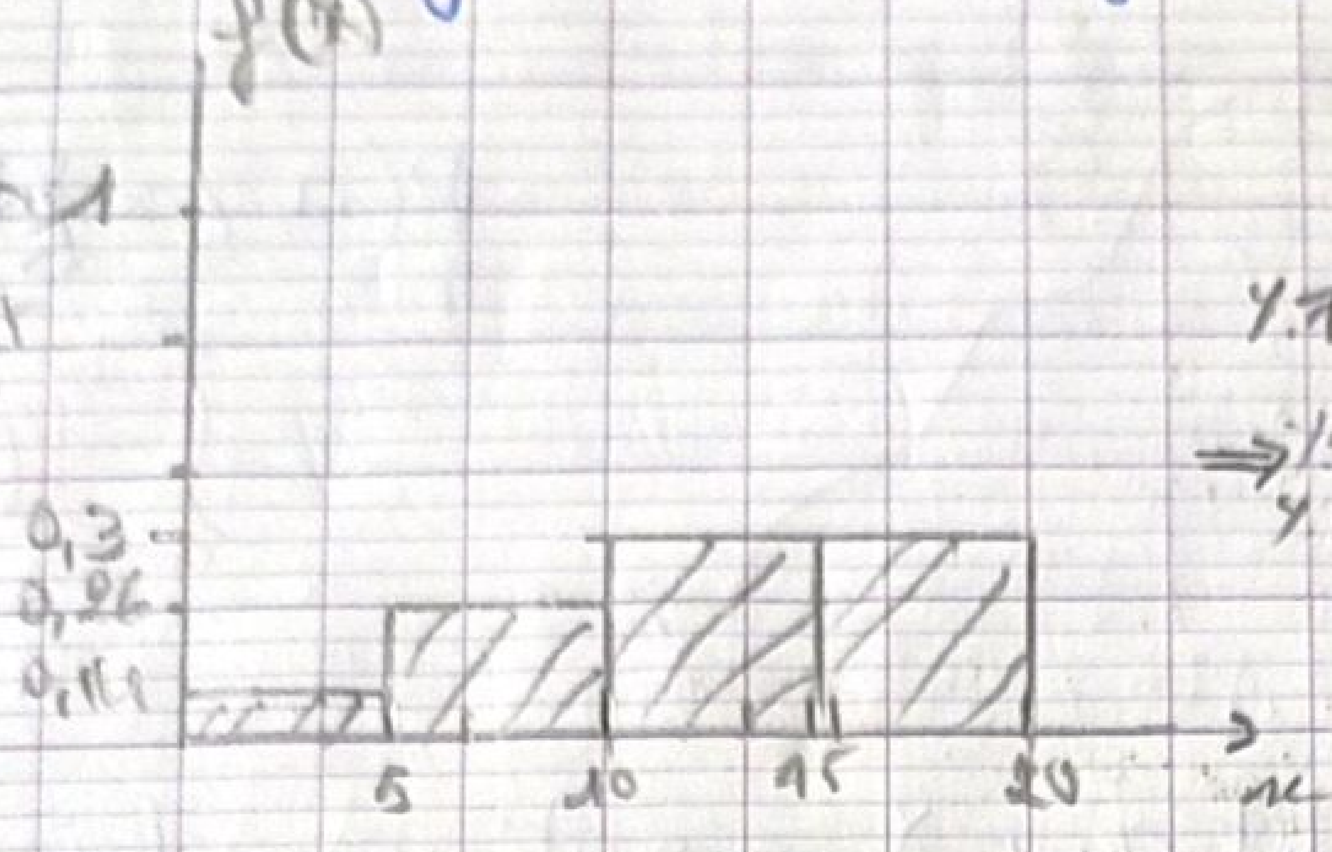
coefficient de variation : $C = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}} \times 100 = \frac{1,62}{11,3} \times 100 = 14,33\%.$

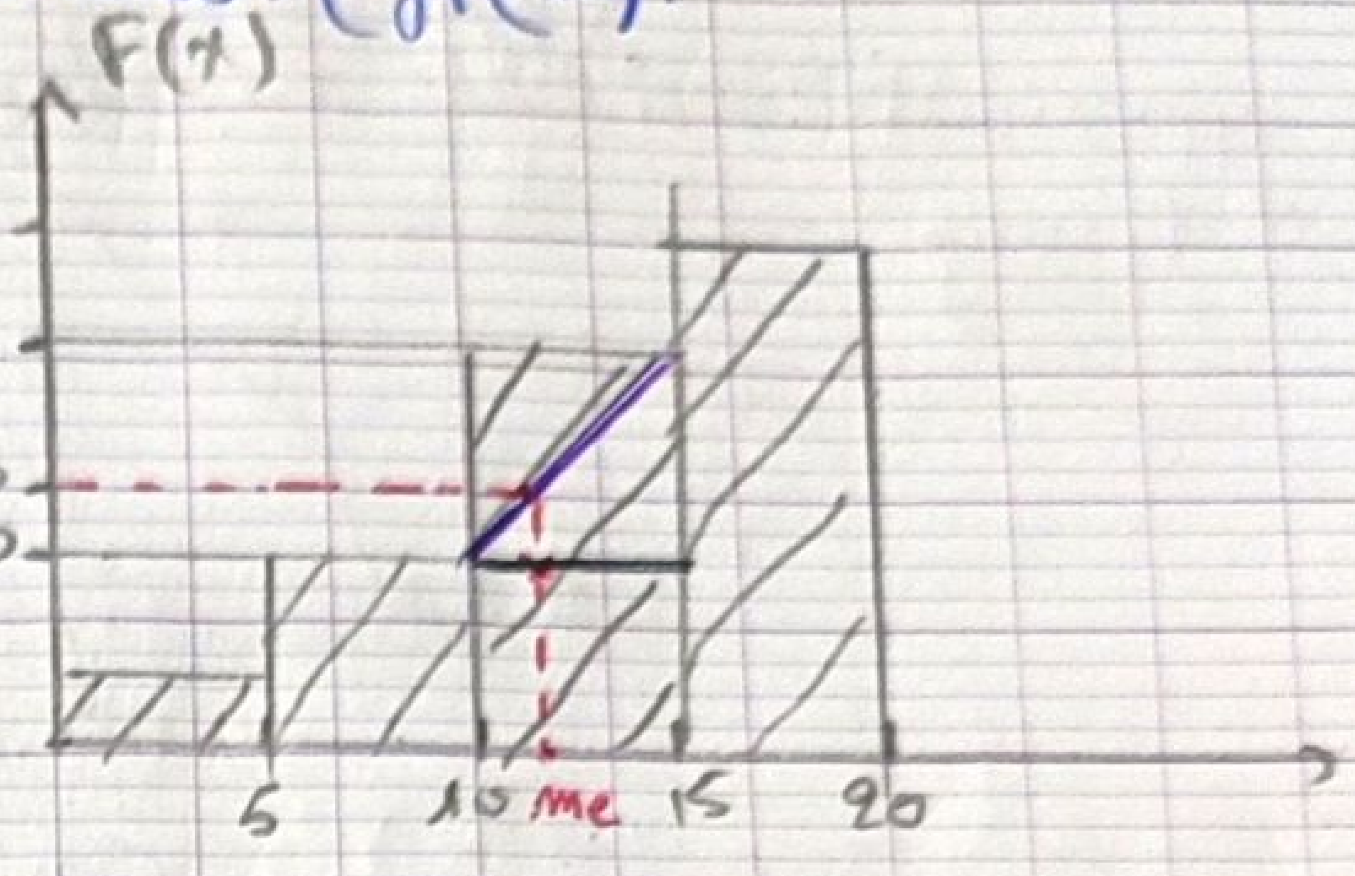
$C < 15\%$: La population est homogène.

⚠ pour savoir le médiane c'est de comparer la fonction de répartition (F(X)) ou il se trouve le 50% d'après le Tableau on trouve que le médiane se trouve $\in [10, 15[$.

histogramme de fréquences : (fi(x).

on a pesé que l'évolution des notes sont distribués sur une figure continue

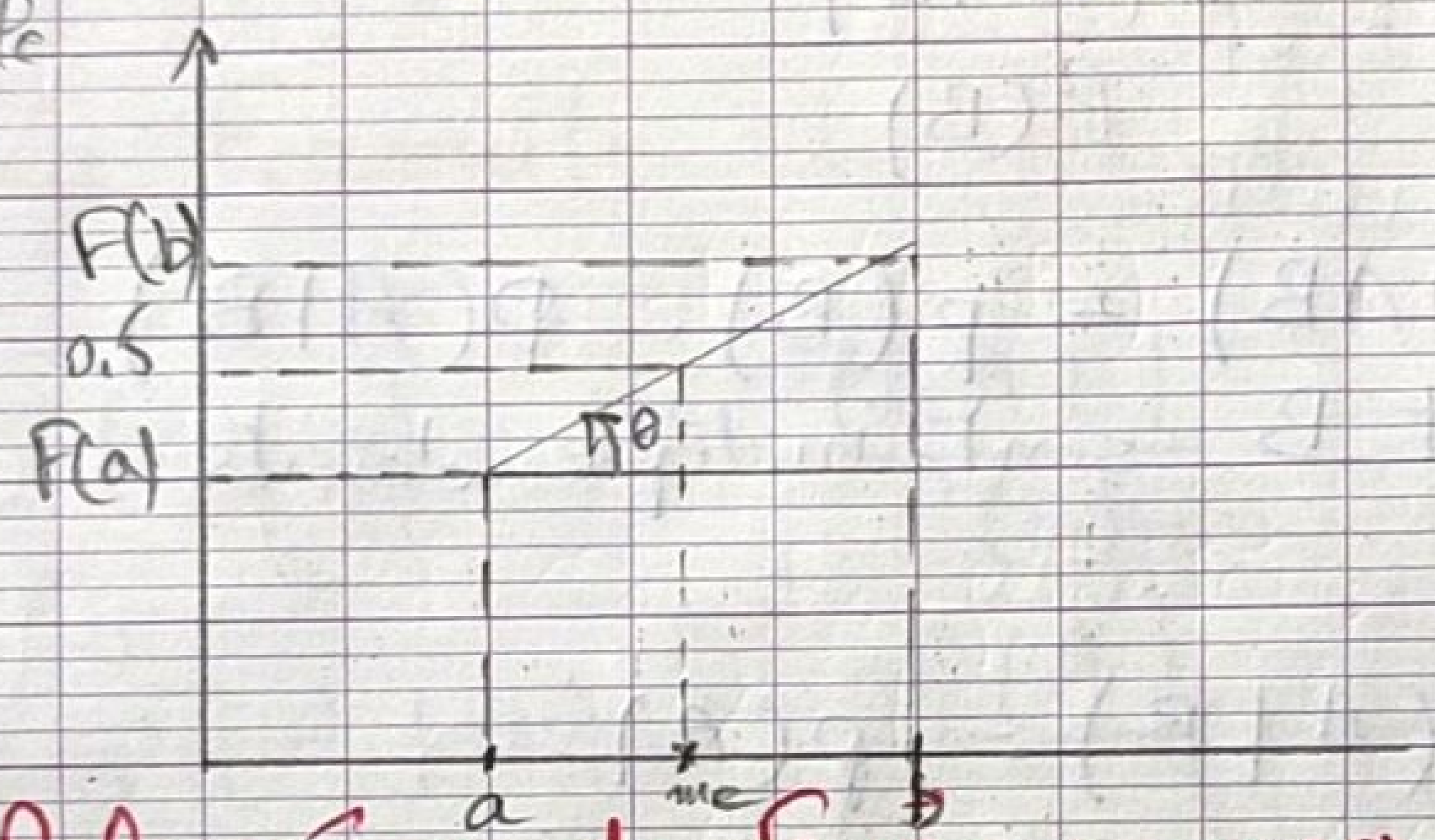




$$\frac{0,7-0,4}{15-10} = \frac{0,5-0,4}{me-10}$$

$$\frac{m_e - 10}{0,1} = \frac{5}{0,3} \quad \text{Sig } me = \frac{0,5}{0,3} + 10 = 11,6$$

En générale



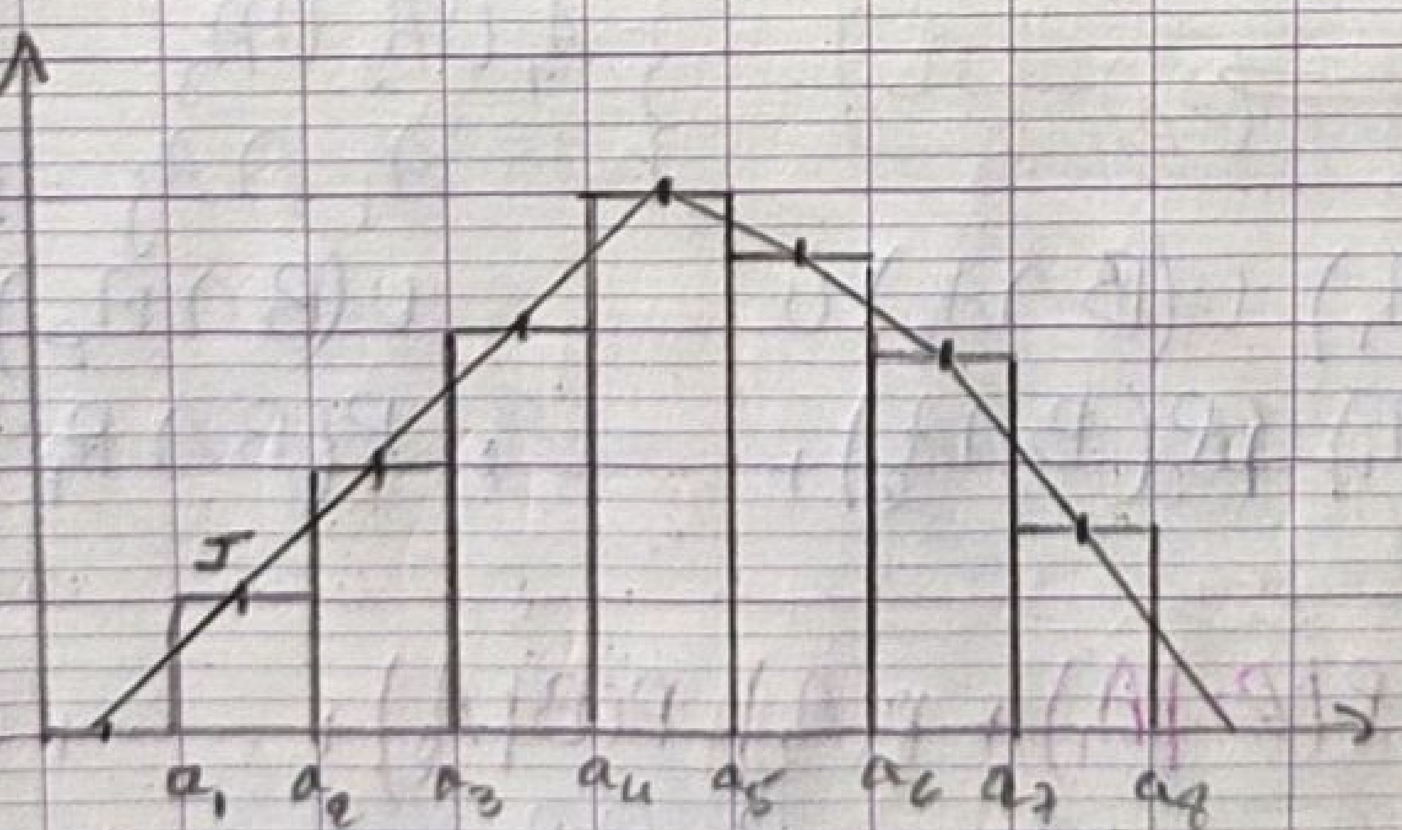
$[a, b]$ = la classe médiane

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{0,5 - F(a)}{me - a}$$

$= tg\alpha$

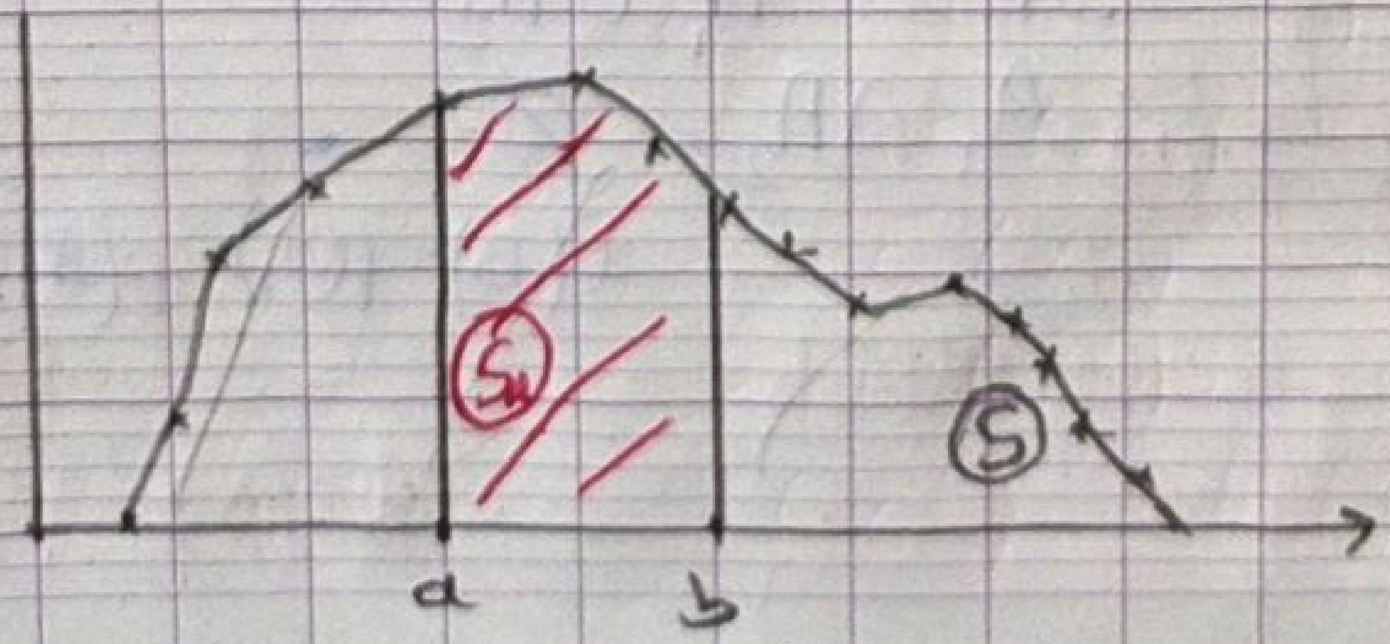
Polygône de fréquances:

X ⇒ série statistique, les modalités sont divisées en classes.



⇒ l'aire de la surface limitée par le polygône de fréquances et l'axe des x est égale à 1.

lorsque n = nb de classe est grand,

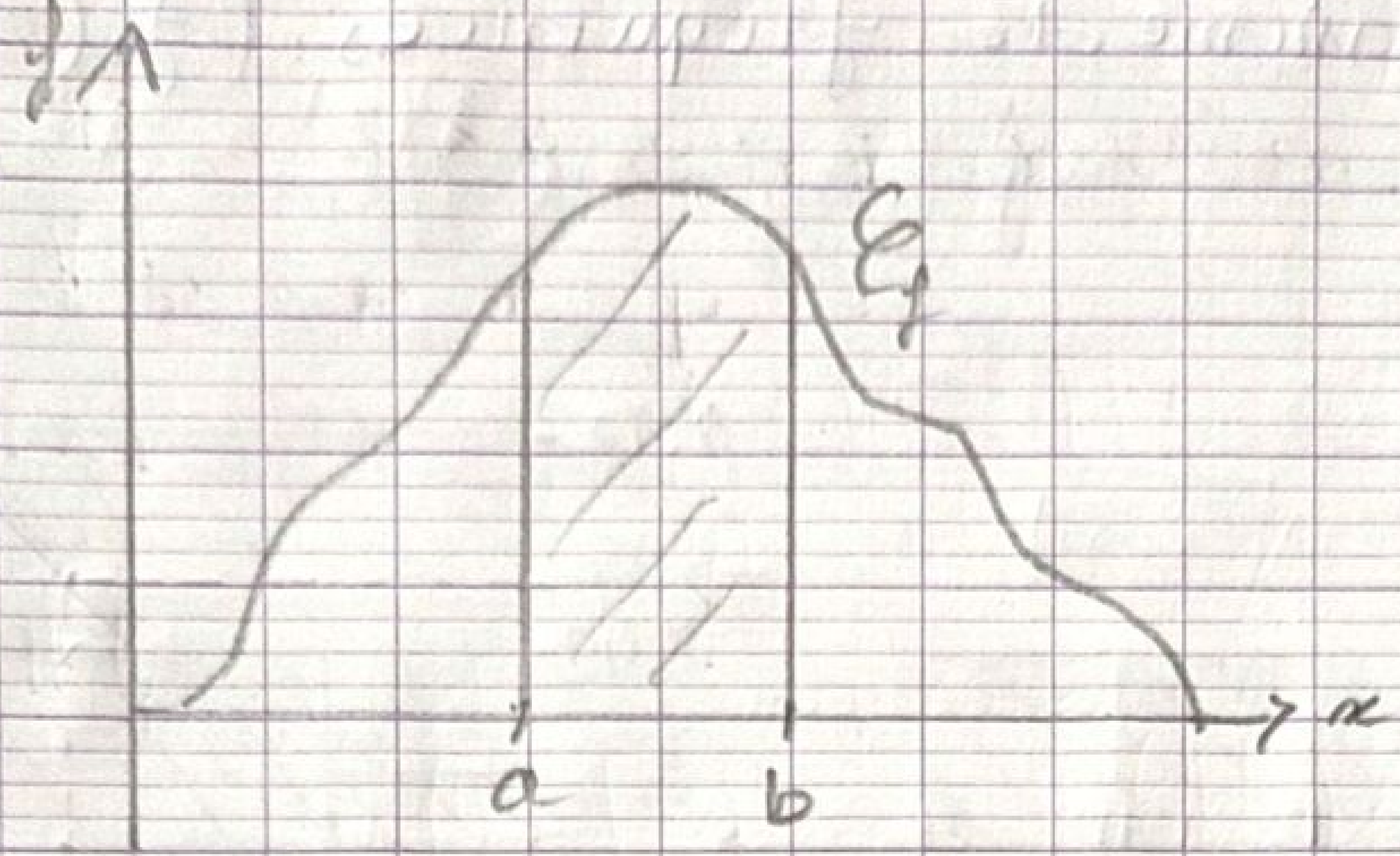


Air(S) = 1

$P(a \leq X \leq b) = $ l'air(S_1)

Si n est très très grand : (infinité)

approximité
~ lissage



$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

On dit que X s'écrit une loi de densité f.

Rappel : Probabilités conditionnelles.

arrivent au m̂ temps

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

projection de A sur l'axe B.

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

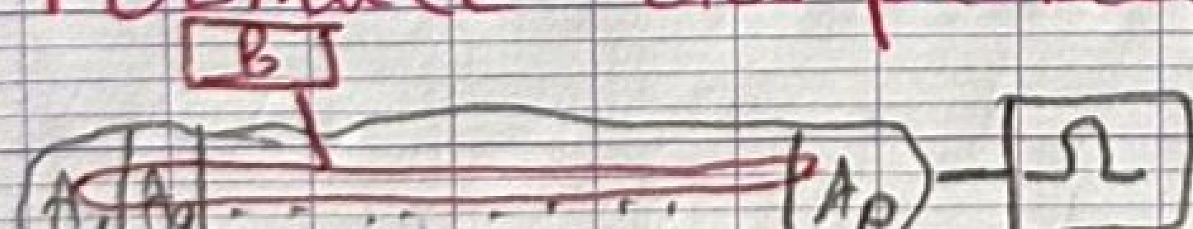
Si A et B sont indépendants :

on a :

$$P(A|B) = P(A).$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Formule des probabilités :



$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_p = \Omega \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$B = (B\cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B\cap A_p)$$

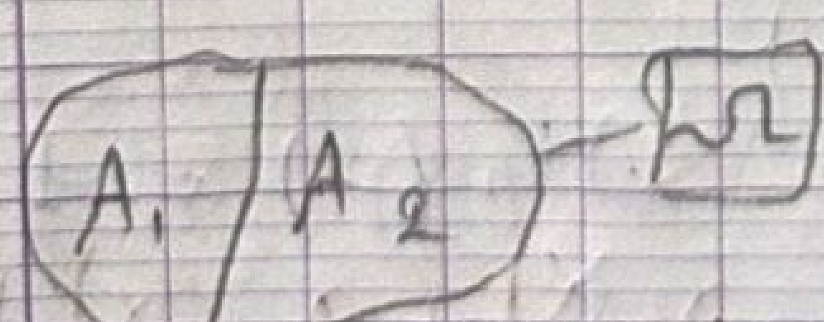
$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \dots + P(B \cap A_p).$$

$A_1 \equiv \vec{i}$
$A_2 \equiv \vec{j}$

$$P(B) = P(A_1) \cdot \underbrace{P(B|A_1)}_{x_1} + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_p) \cdot P(B|A_p)$$

$$\Omega = A_1 \cup A_2$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

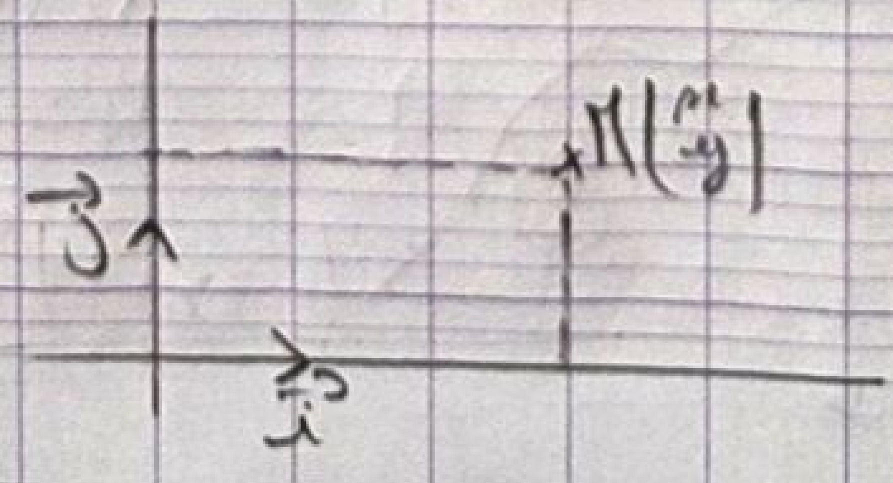


$$P(B) = P(A_1) \cdot \underbrace{P(B|A_1)}_{x} + P(A_2) \cdot \underbrace{P(B|A_2)}_{y}$$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{0}$

$B = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{i} \to A_1$, $\vec{j} \to A_2$



Exemple:

soit un sac, dont on a : 4 boule Rouge et 3 autres Verts

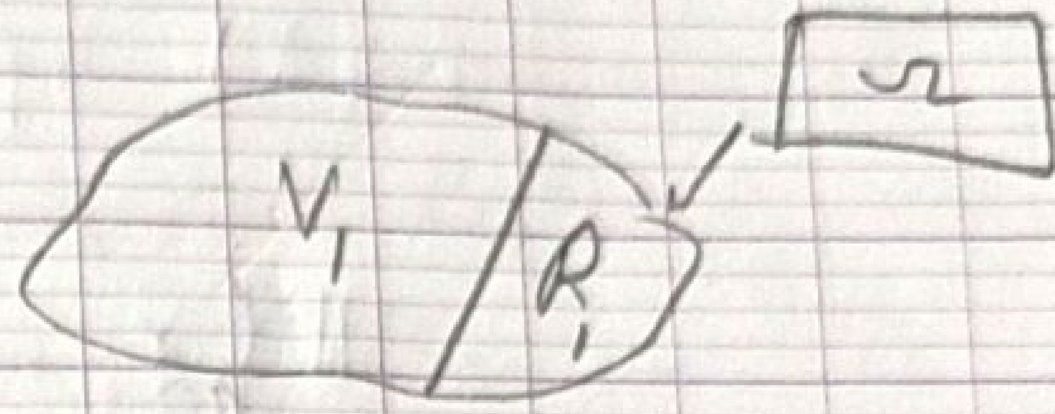
→ on fait un tirage successif sans remise de 2 boule

R_1 = 1ère tirée en rouge

R_2 = 2ème tirée en rouge

V_1 = " " en vert

V_2 = " " en vert



$$R_1 \cup V_1 = \Omega \quad ; \quad R_1 \cap V_1 = \emptyset$$

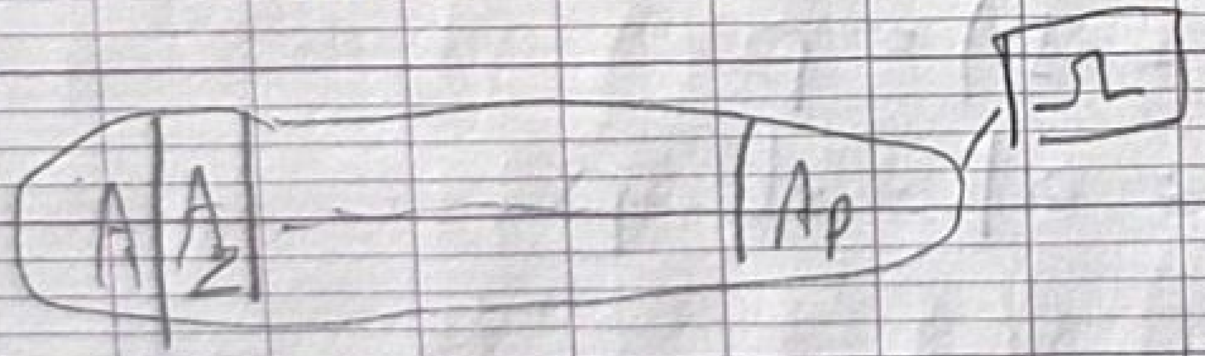
calculer $p(V_2)$

$$P(V_2) = \underbrace{P(R_1)}_{\frac{4}{7}} \cdot \underbrace{P(V_2 | R_1)}_{\frac{3}{6} = \frac{1}{2}} + \underbrace{P(V_1)}_{\frac{3}{7}} \cdot \underbrace{P(V_2 | V_1)}_{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$$

La Formule de Bayes:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)}$$



$A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si $i \neq j$

$\forall\ 1 \leq i \leq p$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = \Omega$

$$P(A_n / B) = \frac{P(A_n) \cdot P(A | A_n)}{P(B)}$$

$$P(A_n | B) = \frac{P(A_n) \cdot P(B | A_n)}{P(A_1) \cdot P(B | A_1) + \dots + P(A_p) \cdot P(B | A_p)}$$

$$P(A_n | B) = \frac{P(A_n) \cdot P(B / A_n)}{\sum_{k=1}^{p} P(A_k) \cdot P(B | A_k)}$$

Exemple

$\mathbb{M}_1$ = La pièce provient de la machine $\mathbb{M}_1$.

$\mathbb{M}_2$ -

⋮

$$\begin{cases} \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3 \ldots \cup \mathbb{M}_{10} = \Omega \\ \mathbb{M}_i \cap \mathbb{M}_j = \phi \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$\mathbb{M}_{10}$ B = la pièces tirée est défectueuse.

$$P(\mathbb{M}_3 | B) = \frac{P(\mathbb{M}_3) \cdot P(B | \mathbb{M}_3)}{\sum_{K=1}^{10} P(\mathbb{M}_K) \cdot P(B | \mathbb{M}_K)}$$

Chapitre II : Les lois de probabilités :

1/ lois discrètes :

① Bernoulli :

$B(p)$; $0 \leq p \leq 1$.

On dit que une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($X \sim B(p)$). SSI X ne prend que deux valeurs binnaires 0 ou 1. Avec $P(X=1) = p$

$P(X=0) = 1-p$.

X	X^2
0	0
1	1

$$E(X) = \sum_{K=1}^{n} P(X=K)\, x_K$$

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + p \times P(X=1) = p$$

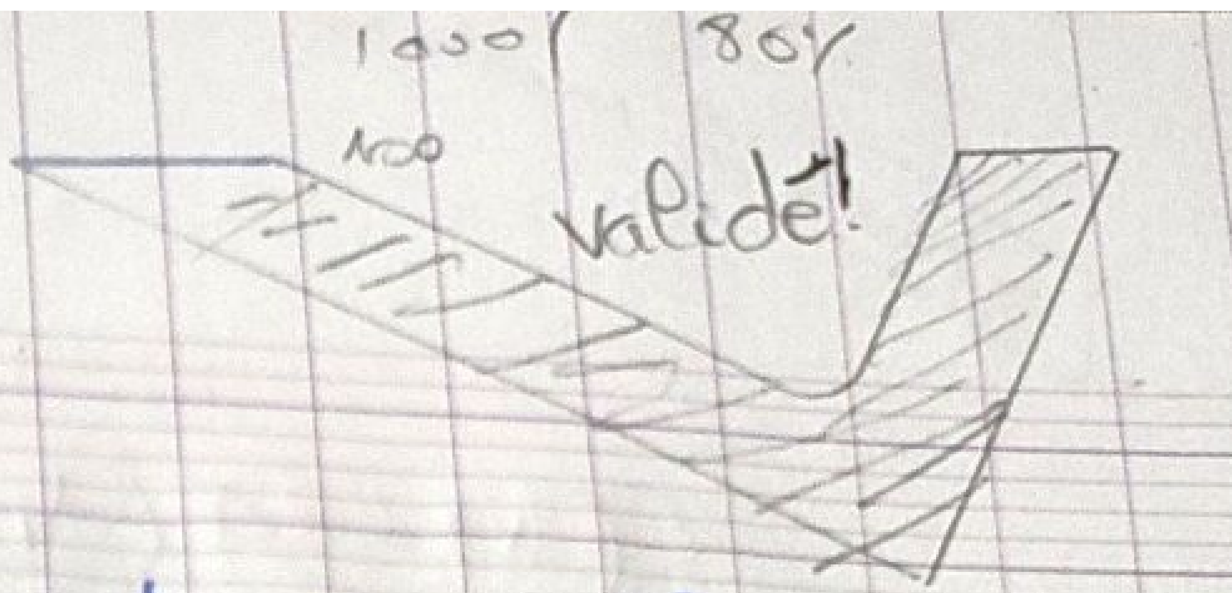
$$\boxed{E(X) = p}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = (1-p) \times 0^2 + p \times 1^2 = p$$

$(E(X))^2 = p^2$; $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$

$$V(X) = p(1-p) \rightarrow \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$



② La loi Binominale

c'est une succesion de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

On dit que X suit une loi Binomiale de paramètre n et p (on écrit $X \sim B(n,p)$) SSI elle consiste en n épreuves de Bernouilli indépendantes.

c-à-d avec remise

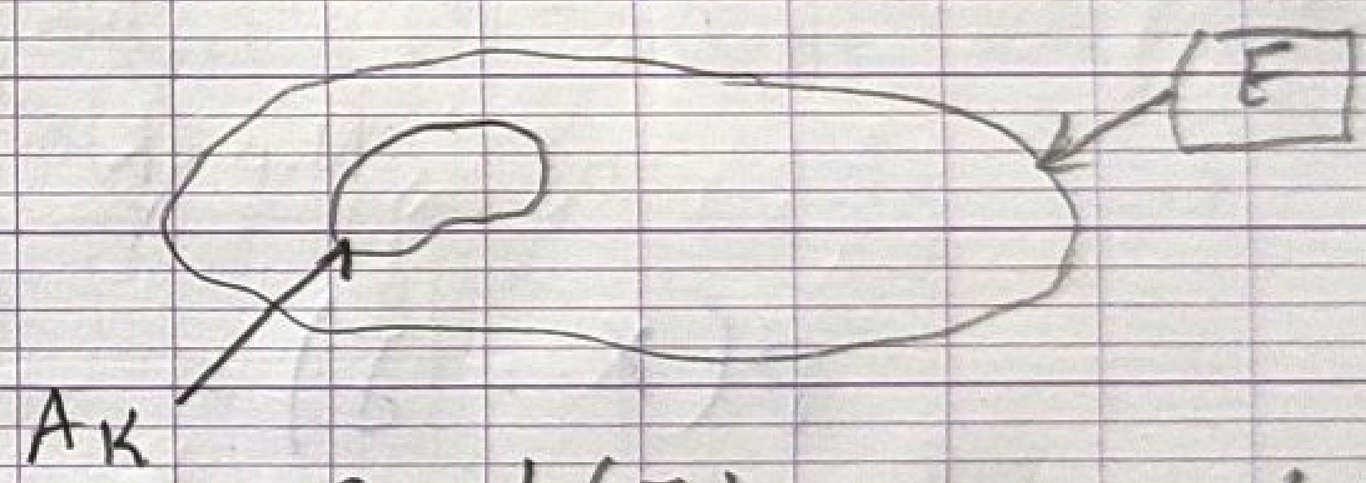
⚠ si la conité que on travaille sur elle est très très grand ça sera comme un tirage sans remise car la probabilité sera $\frac{1}{1000000} \to 0$

⚠ $0 \leq K \leq n$.

$$P(X = K) = C_n^K p^K (1-p)^{n-K}$$

$$C_n^K = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

c'est le nb des parties de K éléments dans un ensemble de n éléments.



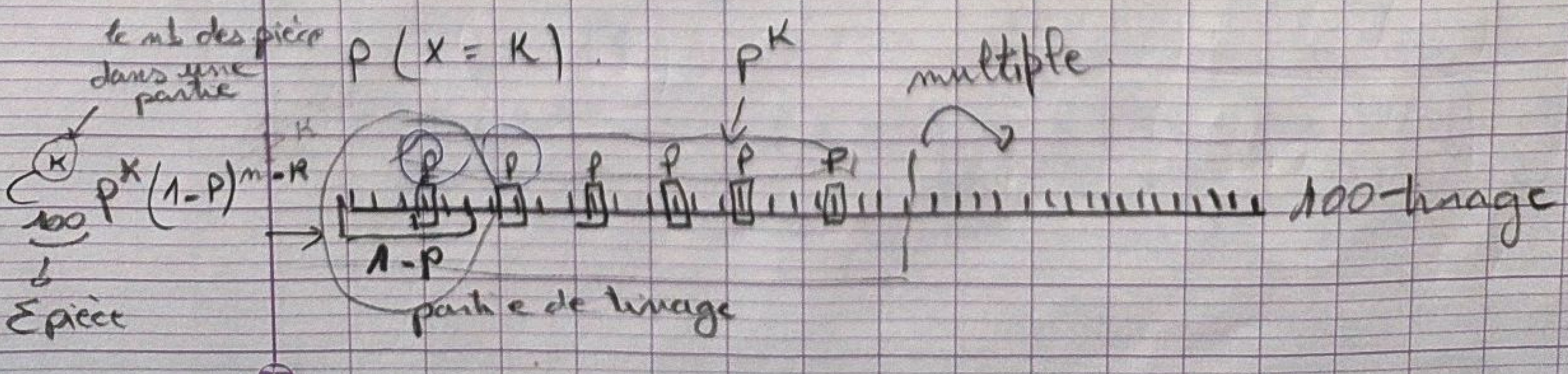
$\text{card}(E) = n$; $0 \leq K$

$\text{card}(A_K) = K$

<u>Ex</u> $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $K = 2$

$$\{\{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}\}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$



octave

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$
$$= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$
$$= p + p + \dots + p$$
$$\boxed{E(X) = np}$$

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$
$$= p(1-p) + p(1-p) + \dots + p(1-p)$$

$$\boxed{V(X) = n \cdot p(1-p)} \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{n\,p(1-p)}$$

série de moment → liaison indirecte

③ La loi Hypergéométrique :

N=10000 pièce
p=7% : pièce diffectueuse
n=100 : tirage au hasard sans remise

$H(N, n, p)$:
- N = la taille de la population
- n = la taille de l'échantillon
- p = la proportion liée à un échantillon donné.

$0 \leq j \leq N.p = K$ (nb totale des pièces)

$$P(X = j) = \frac{C_K^j \cdot C_{N-K}^{n-j}}{C_N^n}$$

j : nb des pièces dans l'échantillon n

N.p = K = le nombre des pièces défectueuses

P(X=j) = La probabilité d'avoir j pièces défectueuses dans un échantillon de taille n.

Exercice : N = 10000 ; n = 100 ; p = 8%

calculer $P(X=9)$?

$Np = 1000 \times 8/100 = 80 = K$

Donc :

$$P(X=9) = \frac{C_{80}^{9} \times C_{920}^{91}}{C_{1000}^{100}}$$

$$C_{80}^{9} = \frac{80!}{9! \times 71!}$$

A Retenir:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique de paramètre N, n, p.

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

$\simeq 1$

Remarque: Les prélèvements se font sans remise. Si N >> grand.

(H) La loi de poisson de paramètre λ

Def:

$P(\lambda)$ telque $(\lambda > 0)$. $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}$

Rappel $e^{\lambda} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$ $\quad E(X) = V(X) = \lambda$ à l'infinie $= 1$

Exercice: vente de voitures de Luxe sur 100 jours.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	38	36	17	6	3

$X = 0, 1, 2, 3, 4$

1) calculer $E(X)$ et $V(X)$
2) calculer $p(X \leq 2)$
3) calculer $(P(X \leq 2)$ en utilisant la loi de poisson.

Solution:

$$E(X) = \frac{1}{100}(38\times0 + 36\times1 + 17\times2 + 6\times3 + 3\times4).$$
$$= 1.$$

$V(x) = \frac{1}{N}\sum n_i(x_i - \bar{x})^2$

$$V(X) = \frac{1}{100}\left(38(0-1)^2 + 36(1-1)^2 + 17(2-1)^2 + 6(3-1)^2 + 3(4-1)^2\right) = 1,06.$$

$E(X) \simeq V(X)$: on supposonne la loi de Poisson.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2).$$
$$= \frac{38}{100} + \frac{36}{100} + \frac{17}{100} = \frac{91}{100} = 0,91.$$

↳ En pratique observé

Suivant loi de poisson

$E(X) = \lambda$
$V(X) = \lambda$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2).$$

Suivant la loi de poisson :

$$P(X=K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}.$$

$$P(X \leq K) = e^{-\lambda}\left(\sum_{j=0}^{K} \frac{\lambda^j}{j!}\right).$$

donc :

$$P(X \leq 2) = e^{-1}\frac{1}{0!} + e^{-1}\frac{1}{1!} + e^{-1}\frac{1}{2!}.$$

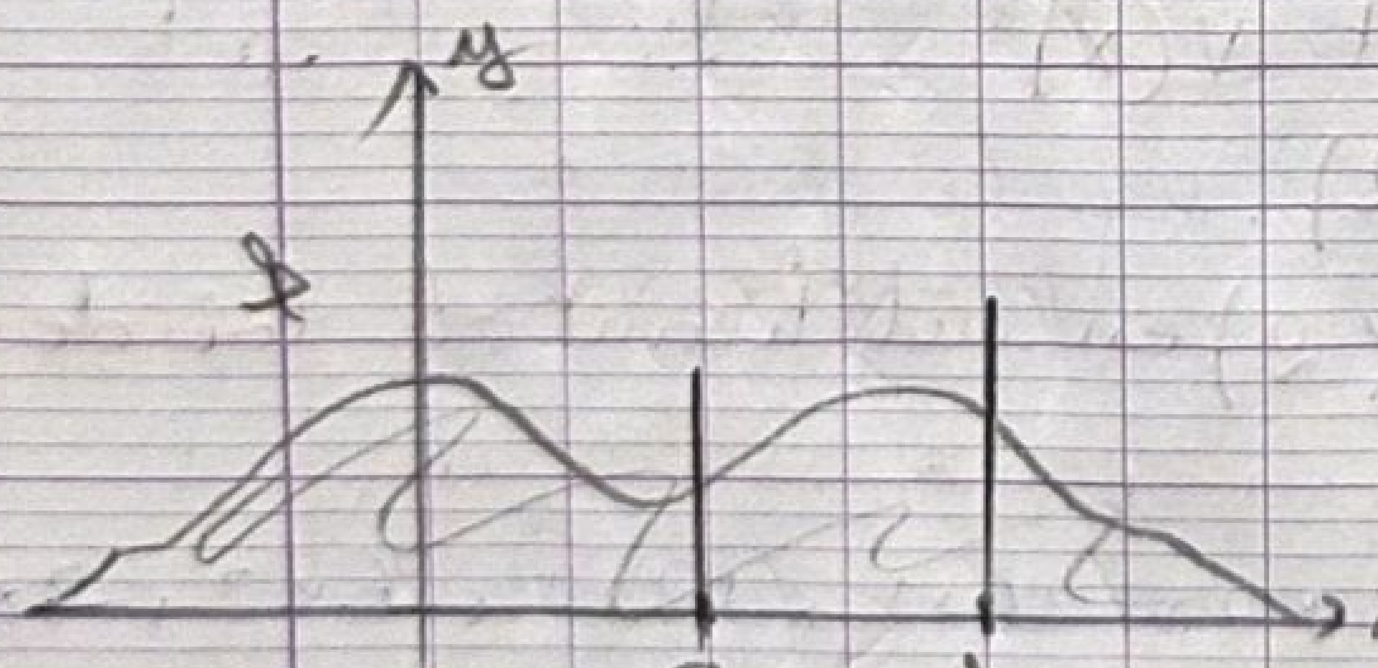
$$= e^{-1}\left[1 + 1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{2.5}{e} = 0{,}9196.$$

La résultat Théorique.

2) Loi Continues :

dans les lois discrètes on travail avec des valeurs exacte ; discrète selon des formule. Mais dans le cas des loi continue on va travailler avec l'aire (l'integrale.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

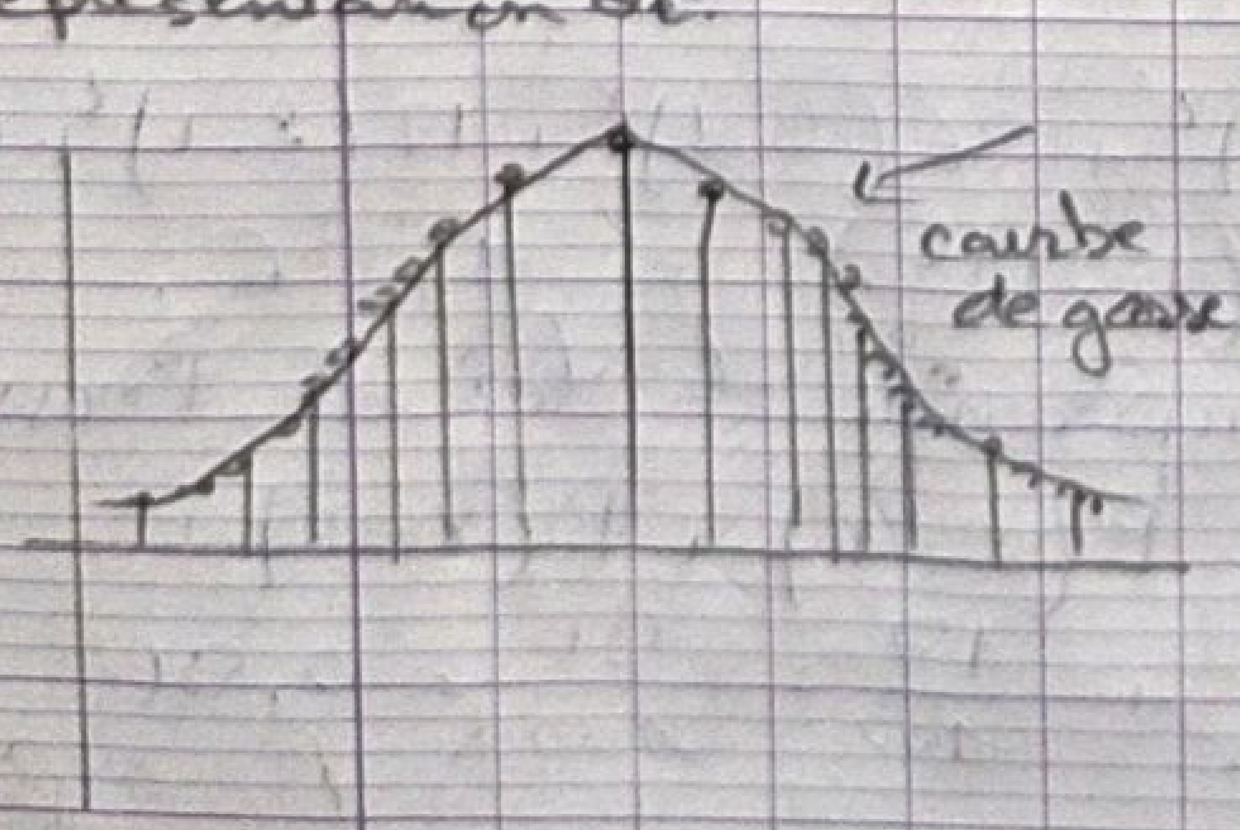


$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

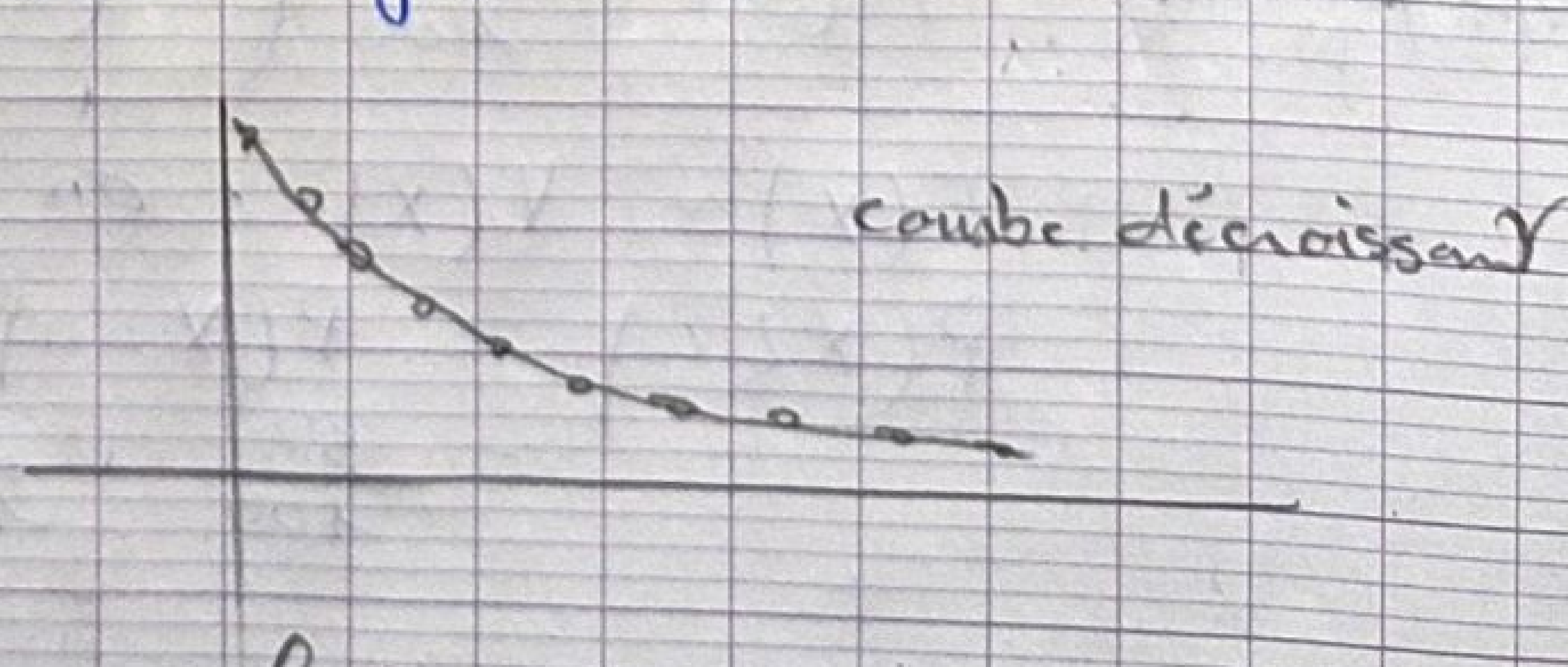
f est dite fonction de densité.

On dit que X suit la loi de densité f.

La représentation de :



loi binomial

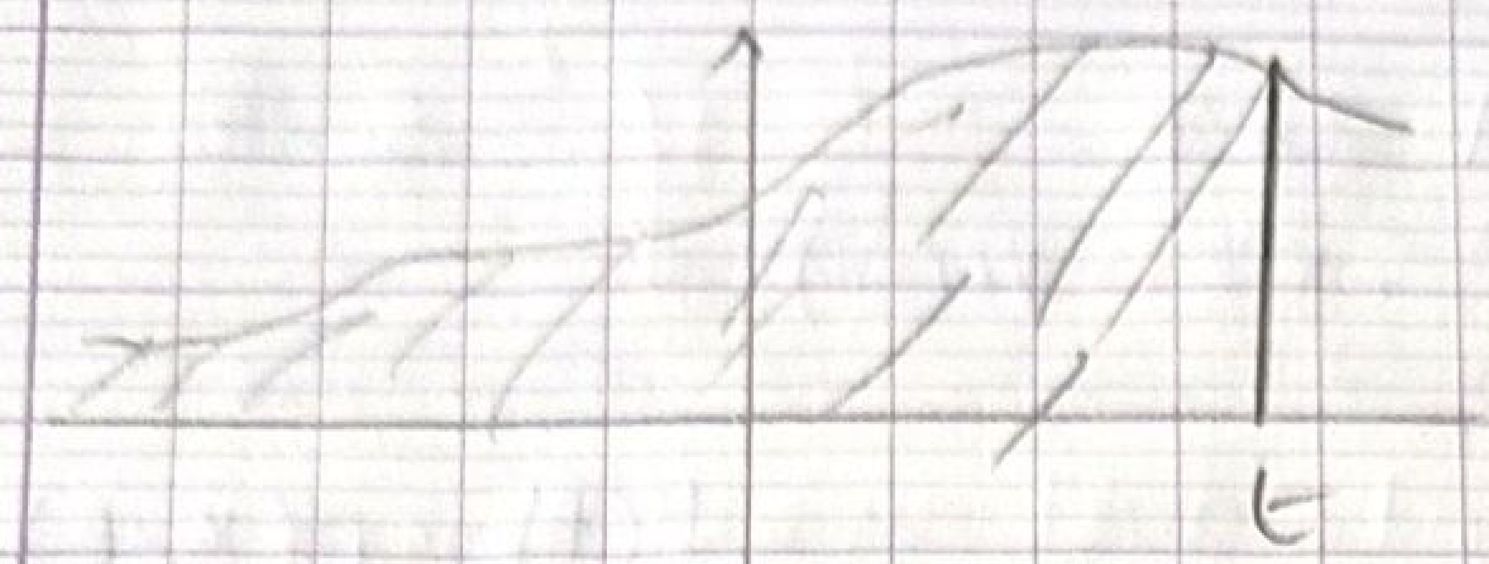


loi de poisson

échelon

$\mathcal{U}(x) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}$

$\mathcal{U} \begin{cases} \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \\ \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$



La fct de répartition :
Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de densité f.

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

$e^{ax} \to \frac{1}{a} e^{ax}$

$a e^{ax}$

① La loi exponentielle :

suite $\lambda > 0$.

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathcal{U}(x)$.

vérification :

$e^{-\infty} = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} \mathcal{U}(x)\,dx$$

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = -\left[e^{-\lambda(+\infty)} - e^0\right] = 1$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x} \mathcal{U}(x)\,dx \Rightarrow F(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$= -\left[e^{-\lambda t} - 1\right]$$

$$\Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Remarque

- discrète : $E(X) = \sum p(X = x_i)\, x_i$
- Continue : $E(X) = \int x\, f(x)\, x$

discrète : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$

$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathcal{U}(x)}$

$V(X) = E(X - \bar{X})^2$

$= \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$

$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda^2}$

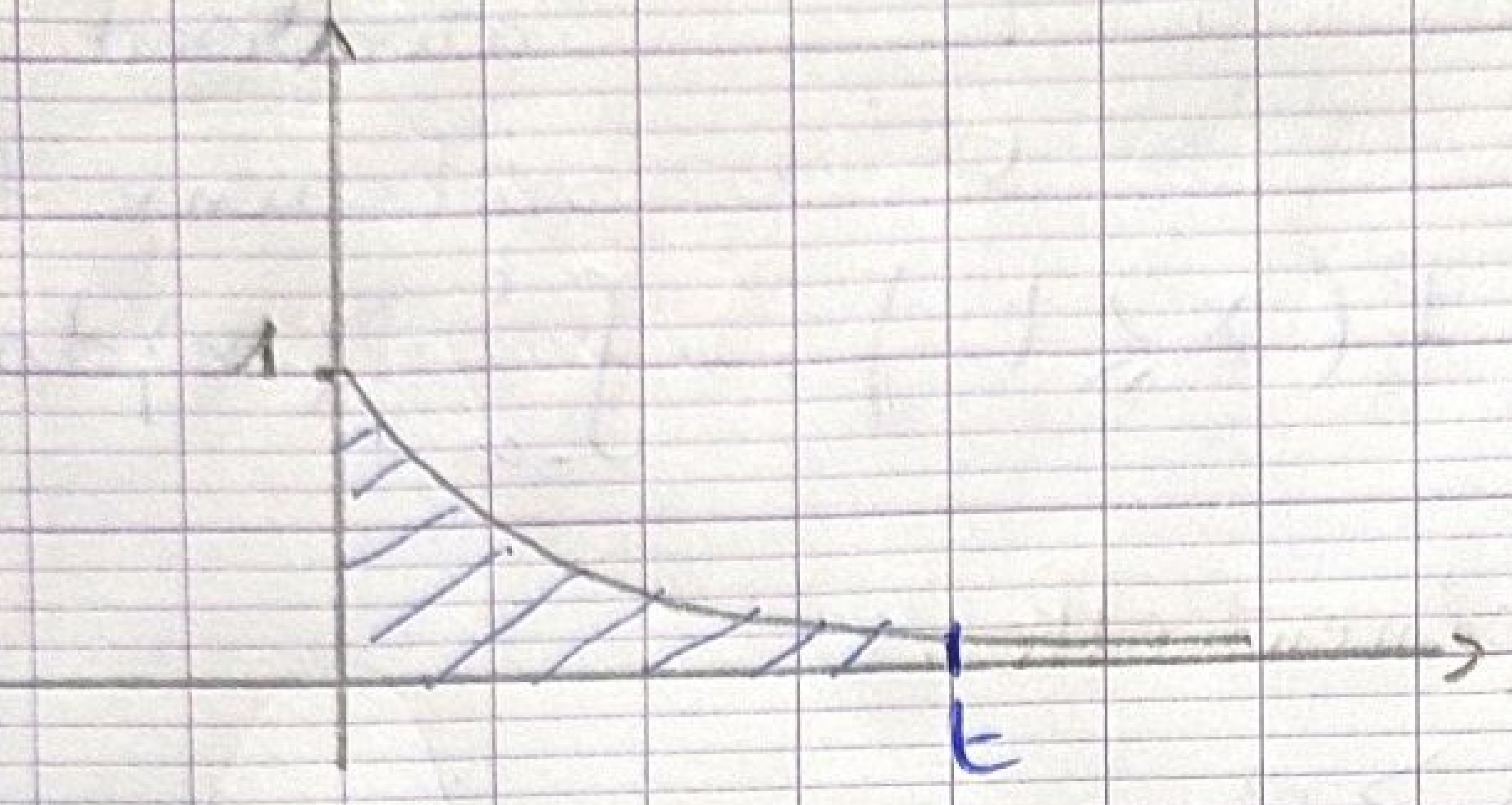
$= \sum \frac{n_i}{N} (x_i - \bar{x})^2$

$= \sum p(X = x_i)(x_i - \bar{x})^2$

x^2

Exemple: $\lambda = 1.$

$$f(x) = e^{-x}\, \mathcal{U}(x).$$



$$F(t) = P(X \leq t)$$
$$= \int_0^t e^{-x}\, dx$$
$$= 1 - e^{-t}.$$

Exemple d'application: - durée de vie des composant électronique.
- durée de vie de noyeau Radioactifs.
(période de désintégration)

$$P(X \geq s+t \mid X \geq t) = P(X \geq s)$$

Exercice: démontré: la $P(X \geq s)$

Rappel:

Loi exponentielle:

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x}\, \mathcal{U}(t)\, dx$$

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

$$P(X \geq t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_t^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_t^{+\infty} = -\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \left[\overset{0}{e^{-\infty}} - e^{-\lambda t} \right]$$
$$= e^{-\lambda t}.$$

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$$
$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Exercice :

On dispose d'un stock d'ordinateurs.
Calculer la durée de vie moyenne dans ce stock sachant que 40% ont dépassé cinq années de vie.

Solution:

X = la durée de vie d'un ordinateur. $P(X \geq 5) = 0,4$

$$e^{-5\lambda} = 0,4 \rightarrow -5\lambda = \ln(0,4).$$

$$\lambda = -\frac{\ln(0,4)}{5}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\ln(2)\right]^2 - \ln(2).\ln(5).$$

$$= -\frac{1}{5}\ln(2)\left[\ln(2) - \ln(5)\right].$$

$$= 0,13.$$

$\frac{1}{\lambda}$: la durée de vie moyenne.

$$= \frac{1}{0,13} = \frac{100}{13} = 7,69.$$

Rappel:

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$; $P(X \geq s+t \mid X \geq t) = P(X \geq s)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, Ex: $P(X \geq 7 \mid X \geq 5) = P(X \geq 2)$

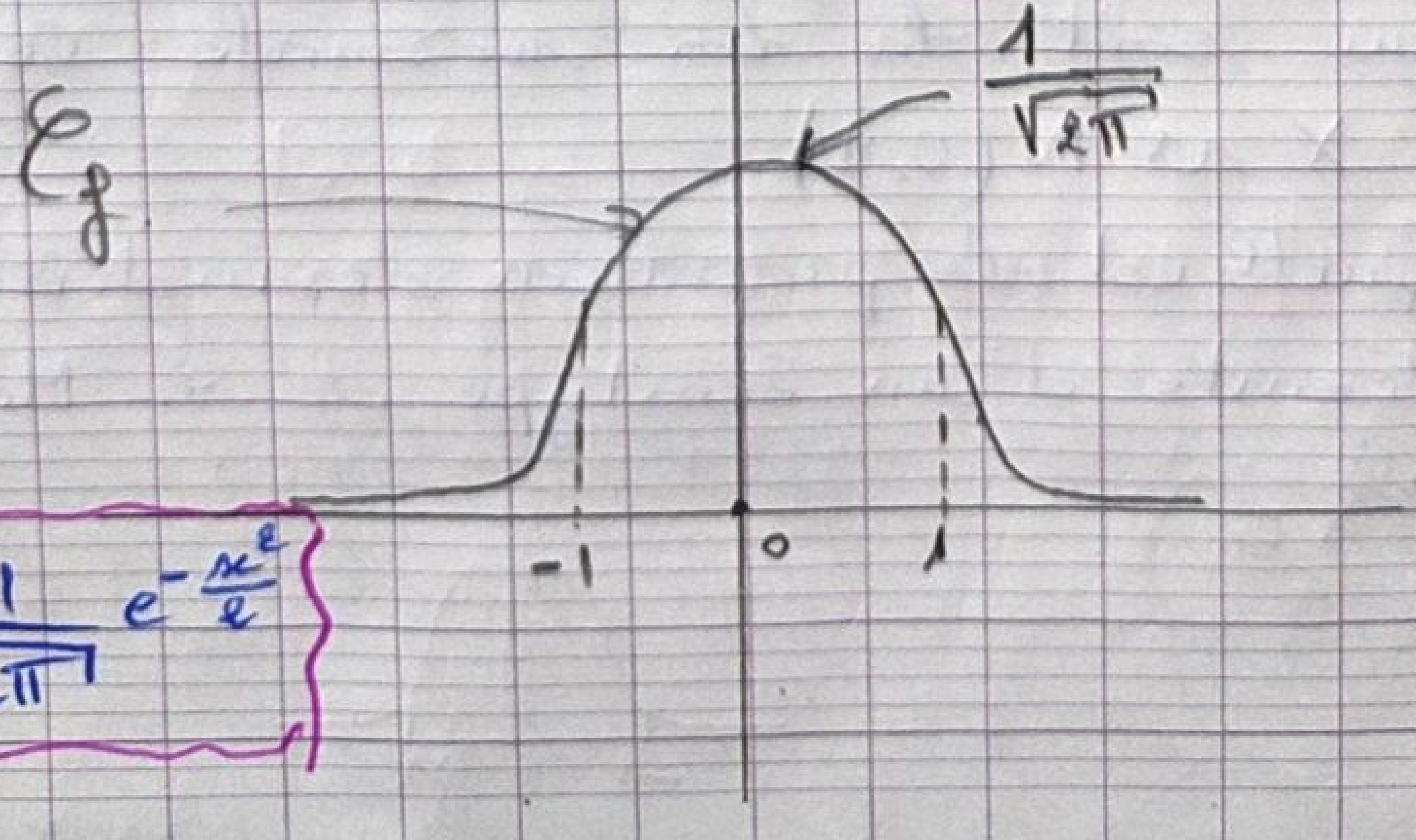
$$\boxed{P(X \geq s+t \mid X \geq t)} = \frac{P\left((X \geq s+t) \cap (X \geq t)\right)}{P(X \geq t)}.$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda s} . \cancel{e^{-\lambda t}}}{\cancel{e^{-\lambda t}}} = e^{-\lambda s} = P(X \geq s).$$

(2) La loi Normale :

1/ Centrée réduite : $(m = 0 ; \sigma = 1)$

$X \sim N(0,1)$



$E(X) = 0$

$\sigma(X) = 1$

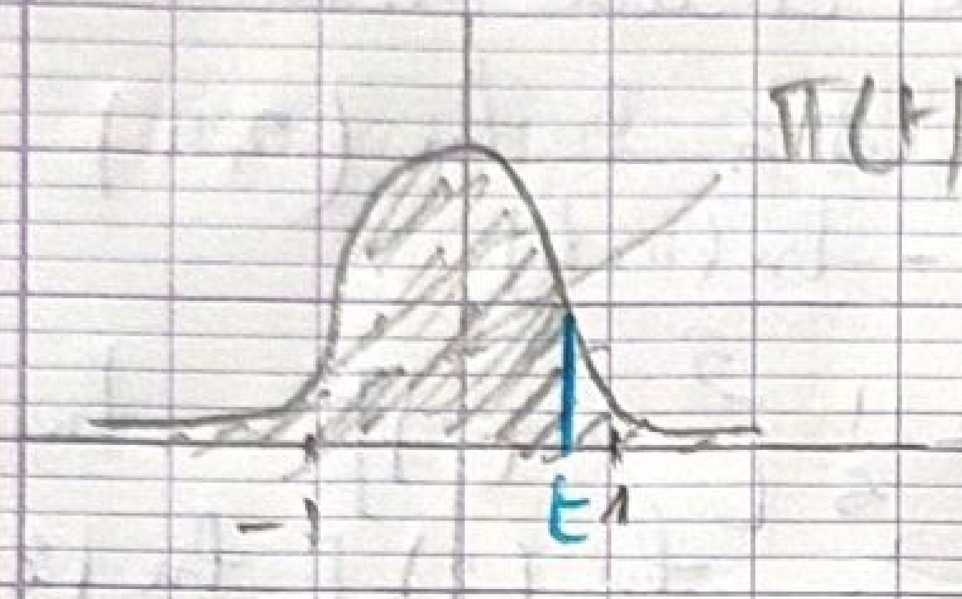
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

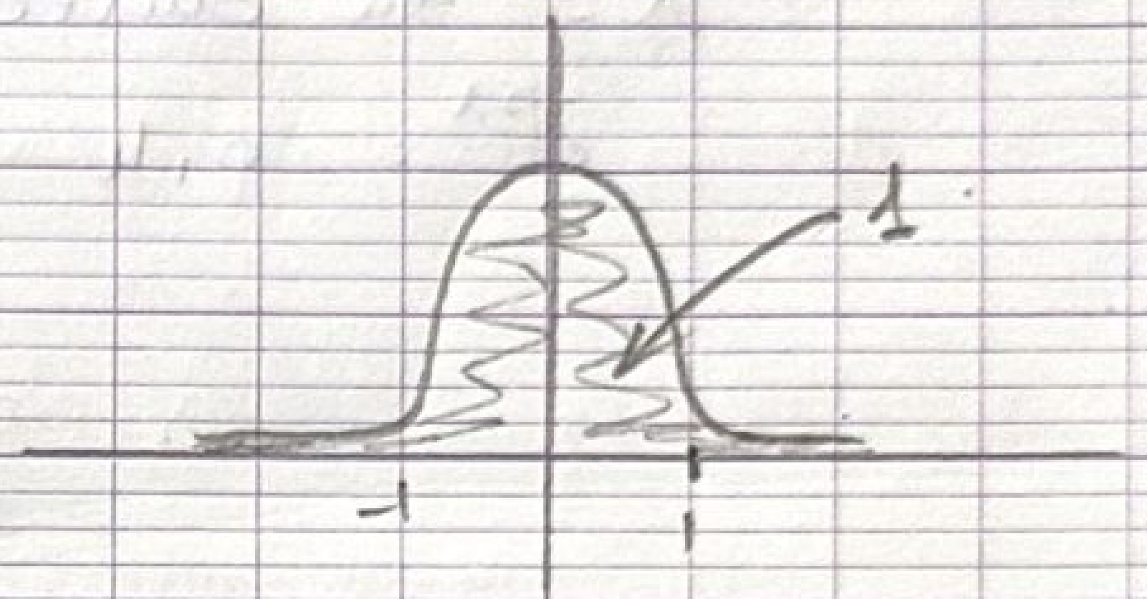
la F(x). fct de répartition en loi normale.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Rmq:

La courbe est symétrique parrapport à l'origine.





calculer $\Pi(100) = P(X \leq 100) = 1$

$\hookrightarrow \gg 1$ => la valeur c'est égal à 1

Utilisation de la Table:

$P(X \leq t) = 0,9236$

① chercher 0,9236 dans la Table.

② lire la projection sur les lignes 1,3

\+ la projection sur les colonnes 0,03

③ => $t = 1,33$.

$P(X \leq 1,22)$ → ① chercher dans les lignes

(1,2) → ② chercher dans les colonnes

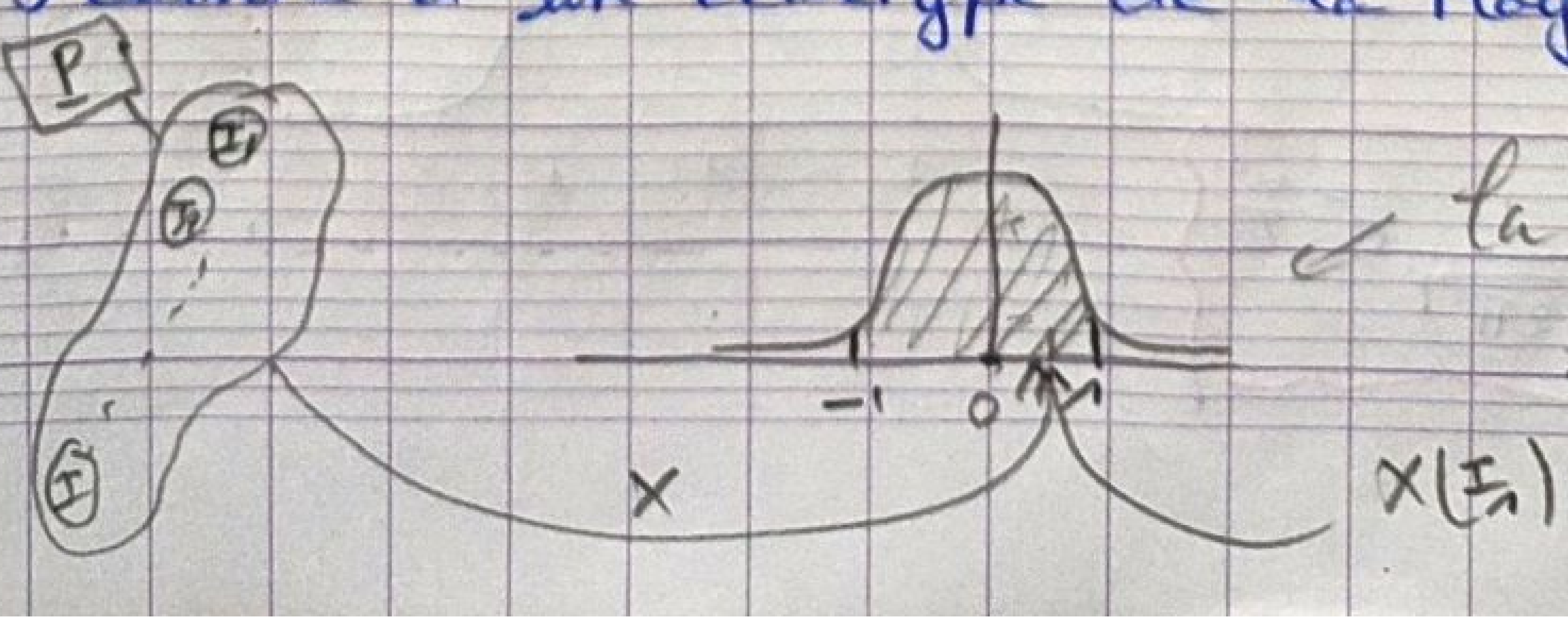
(0,02) ⇒ ③ Résultat: 0,8888.

Exercice:

Soit P une population et X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite:

$X \sim N(0,1)$.

Quelle est la proportion des individus $I \mid X(I)$ s'écarte d'un écart-type de la Moyenne?



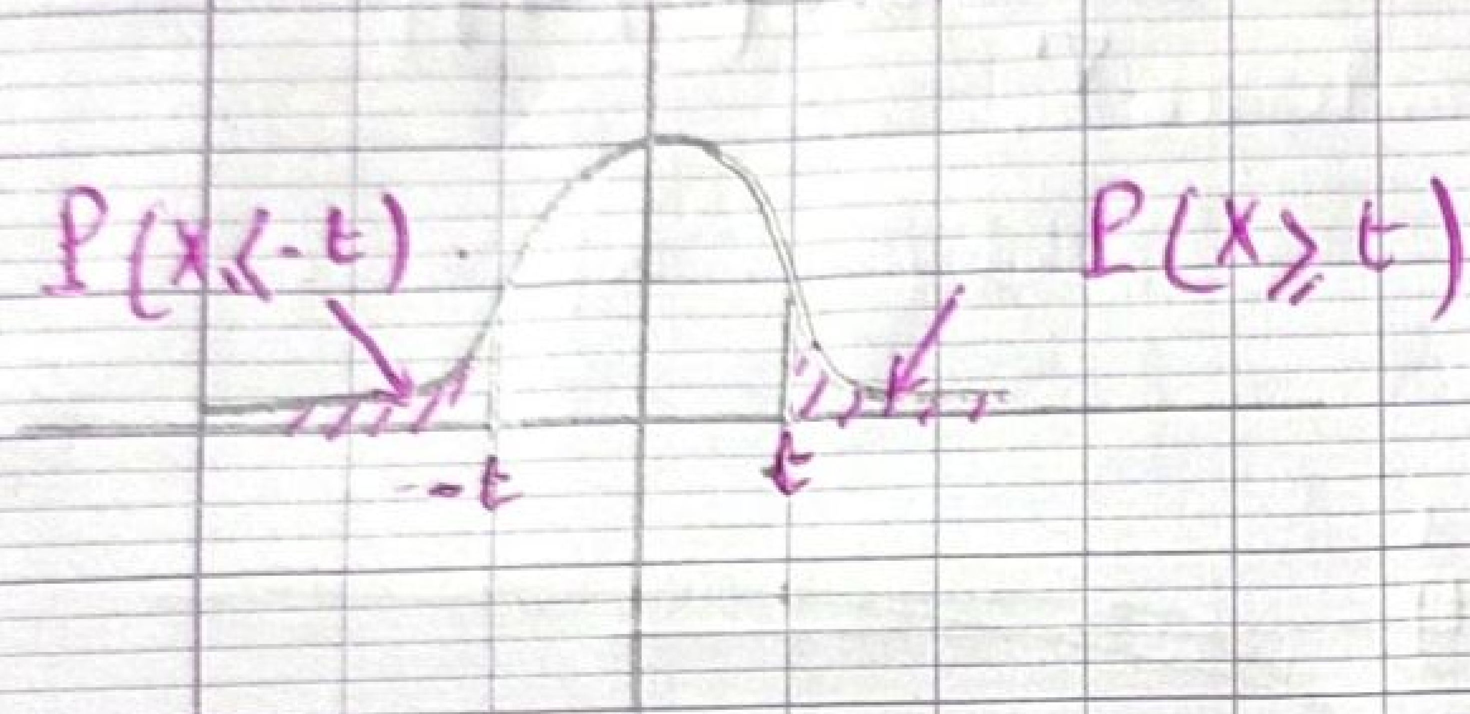
la présentation mathématique de question

Remarque :

Soit $t \geq 0$.

$P(X \leq -t) = P(X \geq t)$: la courbe est symétrique

$= 1 - P(X \leq t)$.



Sol :

$P = 1 - 2p(X \geq 1)$

$= 1 - 2\left[1 - P(X \leq 1)\right]$

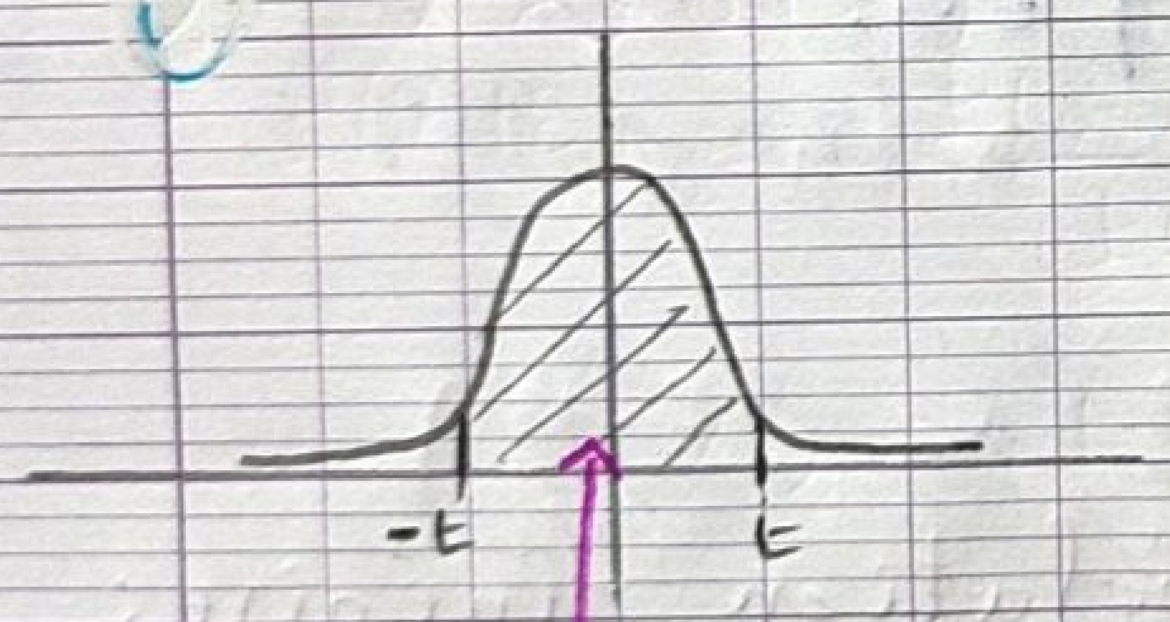
$= 2P(X \leq 1) - 1$

$= 2 \times 0{,}84 - 1 = 0{,}6826\,\%$

$= 68{,}26\,\%$

$\Rightarrow$ 68,26 % de la population se trouve dans l'écartype moyenne de la populatio

$\Rightarrow$ **Remarque générale :**



$X \sim N(0,1)$

$P(-t \leq X \leq t) = 1 - 2p(X \geq t)$

$= 1 - 2(1 - P(X \leq t))$

$P(-t \leq X \leq t) = 2p(X \leq t) - 1$.

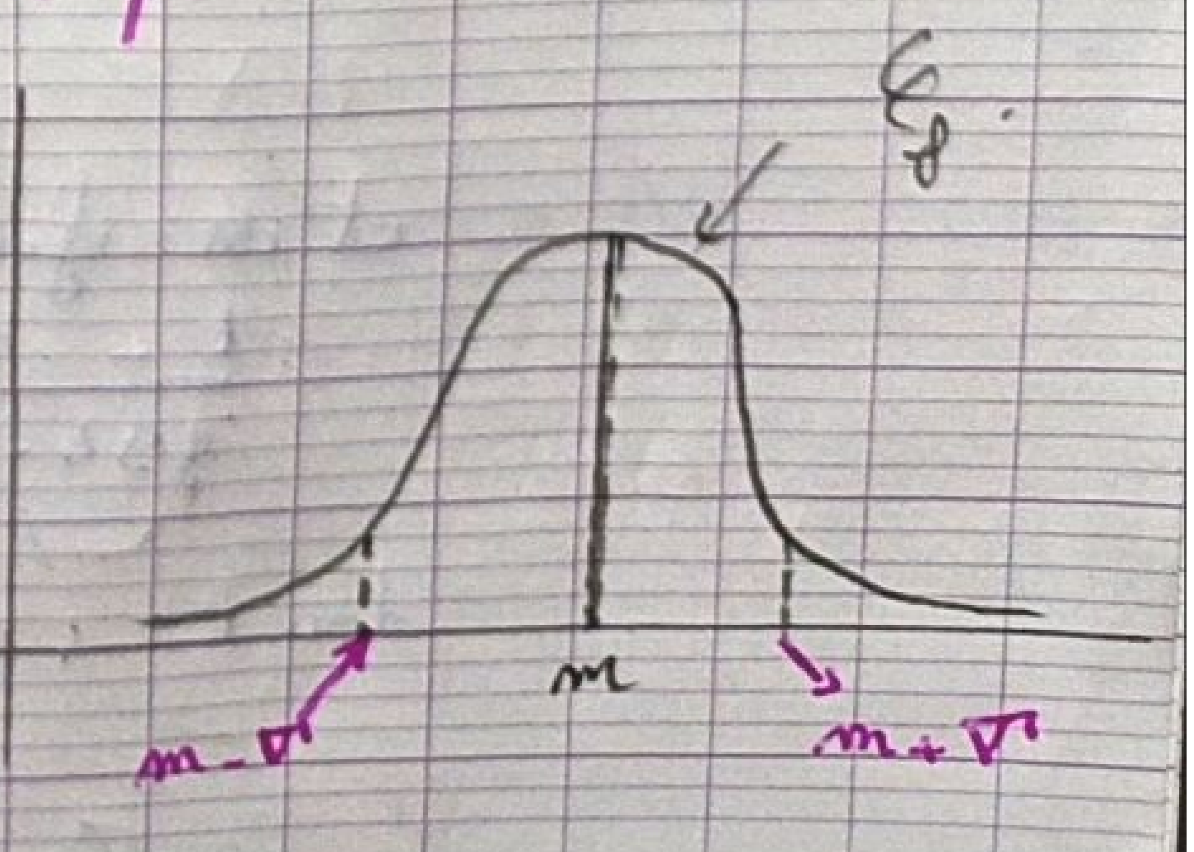
$P(-t \leq X \leq t) = 2p(X \leq t) - 1$

$\uparrow \pi(t)$

1/ La loi normale de la moyenne m et l'écart type σ $\quad X = N(m, \sigma)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(X \leq t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$



Scanned by TapScanner

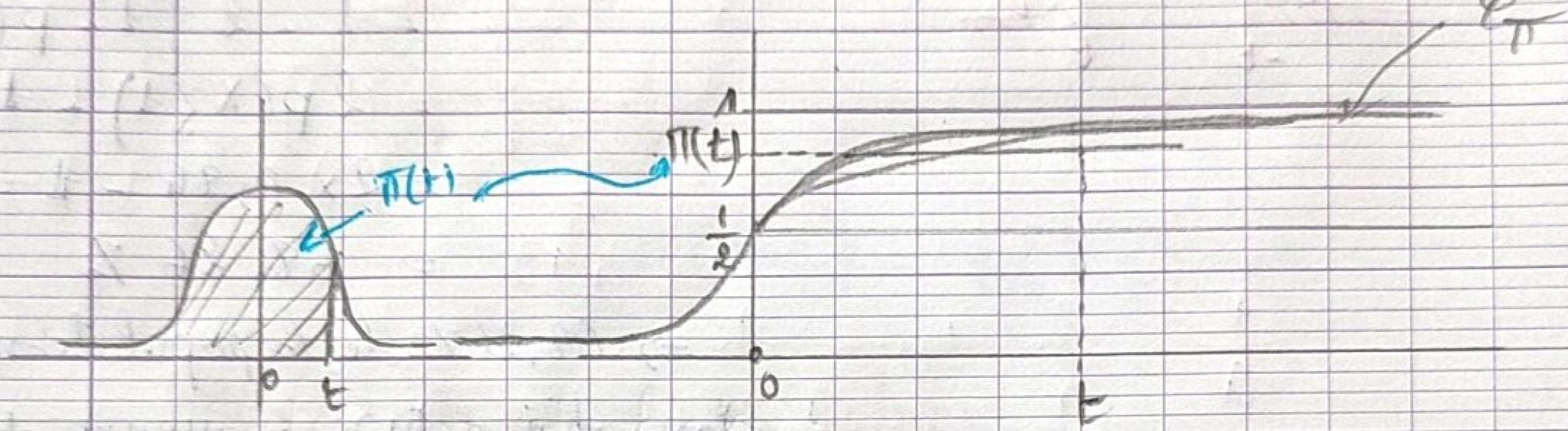
$E(X - m) = E(X) - E(m) = m - m = 0.$

$Var\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X).$

Donc l'objectif c'est de transformer

$X \sim N(m, \sigma) \Longrightarrow \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1).$

Remarque :



$p(X \leqslant t) = \Pi(t)$

$\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

$\lim_{t \to +\infty} p(X \leqslant t) = 1.$

$\lim_{t \to -\infty} p(X \leqslant t) = 0.$

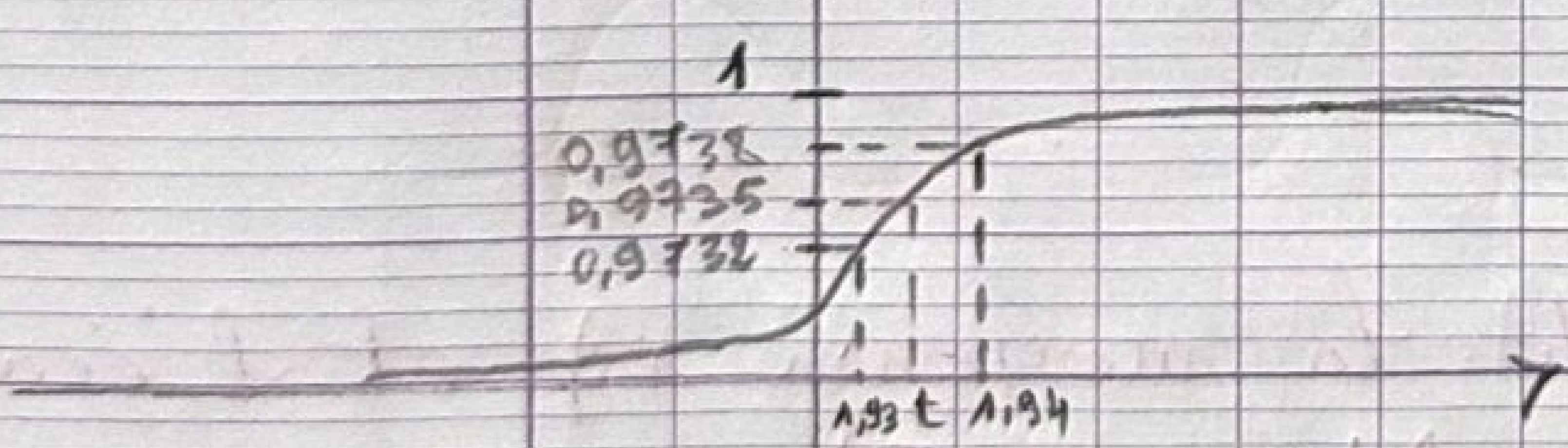
$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$

$\Pi'' = \frac{1}{2\pi} \times \frac{-t}{2} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Exercice : Interpolation linéaire :

Trouver $t \mid \Pi(t) = 0{,}9735$ n'existe pas dans le Tableau

$P(X \leqslant t) = 0{,}9735$



$\Rightarrow$ on fait des proximité

max $(0{,}9738)$; min $(0{,}9732)$

1,94 ; 1,93.

et on fait le calcule grâce au Tales :

$$\frac{t - 1{,}93}{1{,}94 - 1{,}93} = \frac{0{,}9735 - 0{,}9732}{0{,}9738 - 0{,}9732}$$

d'où $t = 1{,}93 + 0{,}01 \cdot \frac{0{,}003}{0{,}006} = 0{,}01 \times 0{,}5 = 1{,}93 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-1}$

$= 1{,}93 + 5 \times 10^{-3} = 1{,}93 + 0{,}005$

$= 1{,}935.$

Exercice N°1 :

1/ $P(0 < Z < z_i) = 0,4901$.

$\hookrightarrow P(Z \leq z_i) - \frac{1}{2} = 0,4901$.

$P(Z \leq z_i) = 0,9901 \longrightarrow z_i = 2,33$ (table)

3/ $P(Z \geq z_i) = 0,1660$.

$1 - P(Z \leq z_i) = 0,1660$

$\Rightarrow P(Z \leq z_i) = 1 - 0,1660 = 0,834$.

$\hookrightarrow z_i = 0,970$ (table

4/ $P(-1 \leq Z \leq z_i) = 0,6380$

$\Pi(z_i) - \Pi(-1) = 0,6380$.

$\Pi(z_i) = \Pi(-1) + 0,6380 = 1 - \Pi(1) + 0,6380$

$= 1 - 0,8413 + 0,6380$

$= 0,7967 \longrightarrow z_i = 0,83$ (table)

Ex N°2 :

$P(X \geq 12) = P(X = 12) + P(X = 3) \ldots + P(X = 100)$.

$C_{100}^{12} (0,18)^{12} \cdot (0,82)^{88} = \sum_{K=12}^{100} \underbrace{C_{100}^{K} (0,18)^{K} \cdot (0,82)^{100-K}}_{P(X=K)}$

$\boxed{P(X = K) = C_n^K p^K (1-p)^{n-K}}$ ce qui est impossible plus tôt difficile à calculer.

Donc on a proposer :

Théorème (La place - De Moivre)

Soit $X \sim B(n, p)$.

Alors pour n assez grand $X \sim N(np ; \sqrt{np(1-p)})$

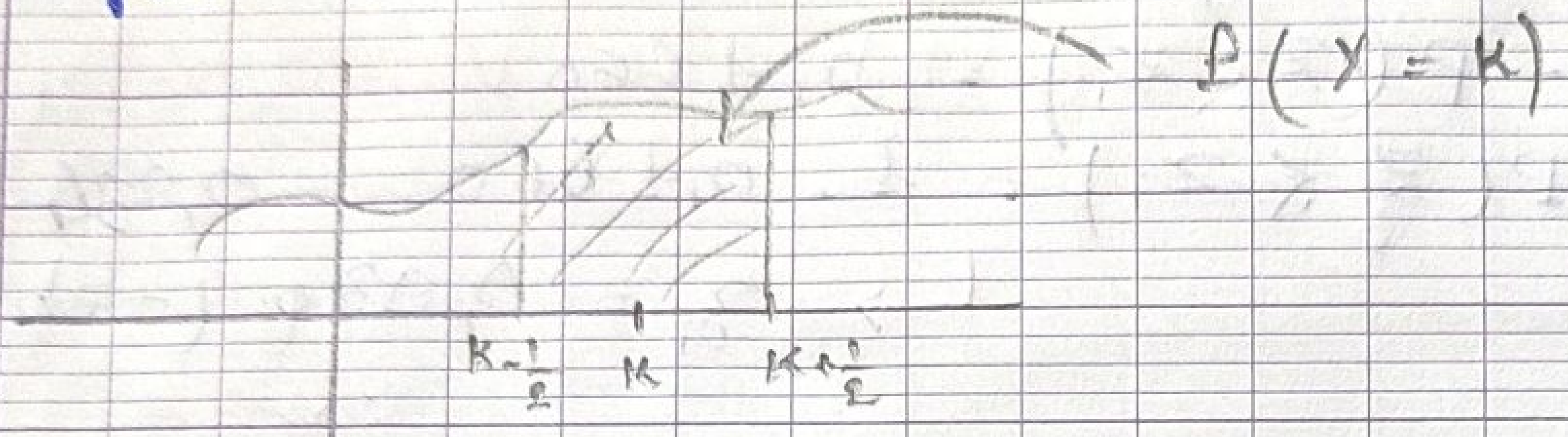
Autrement dit : pour n assez grand :

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1).$$

$\Rightarrow$ On pratique on utilise cette approximation $n \geq 30$ et $np \geq 5$; $nq \geq 5$.

Remarque : correction de continuité :

Soit X une loi discrète approchée par une loi continue.



Solution de l'ex 2 :

$n = 100 > 30$

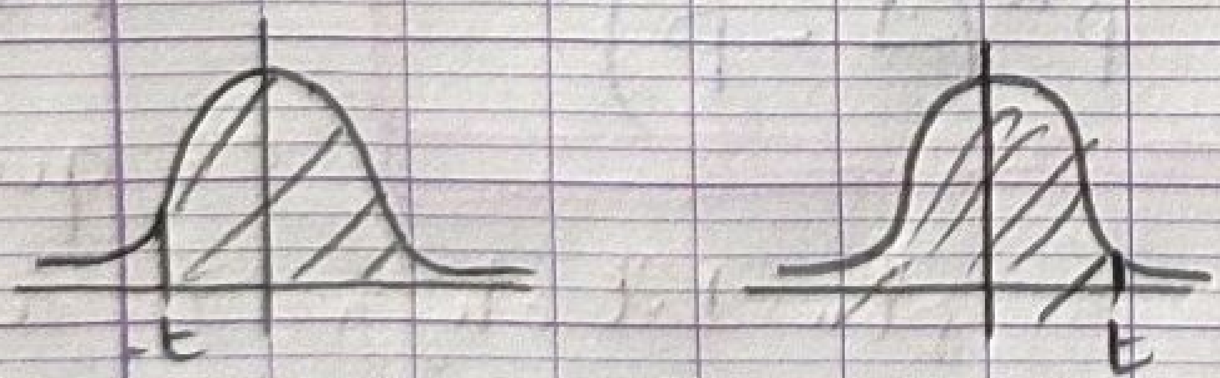
$np = 100 \times 0{,}18 = 18 > 5$

$nq = 100 \times 0{,}82 = 82 > 5$

$\Rightarrow \sqrt{100 \times 0{,}18 \times 0{,}82} = 3{,}84$

$$P(X \geq 12) = P\left(\frac{X-18}{3{,}84} \geq \frac{12-18}{3{,}84}\right).$$

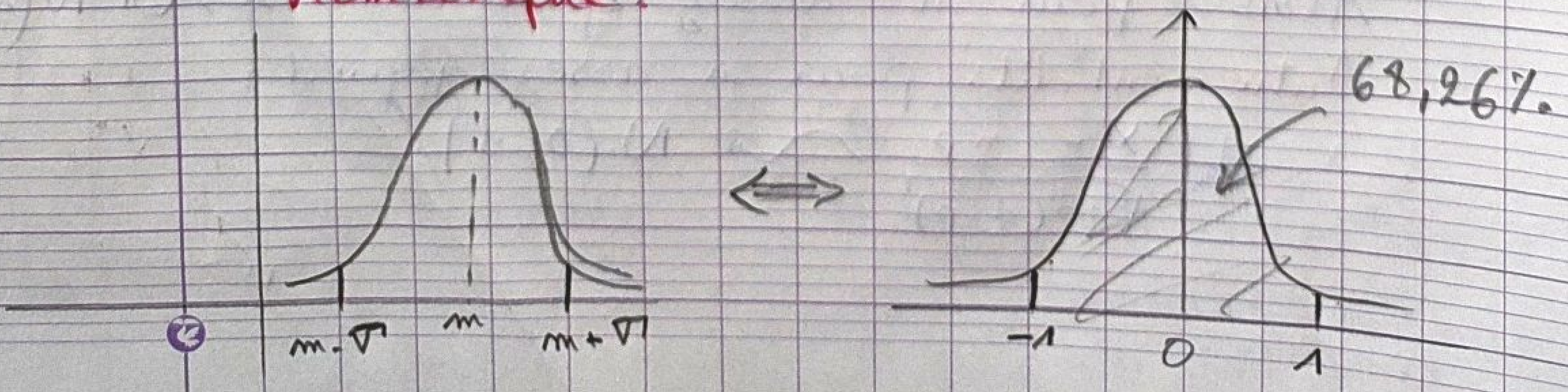
$$Z = \frac{X-18}{3{,}84} \rightsquigarrow N(0,1).$$



$$P(X \geq 12) = P(Z \geq -1{,}56)$$
$$= P(Z \leq 1{,}56) = 0{,}94$$
$$= 94\%$$

EX 3 :

Remarque :



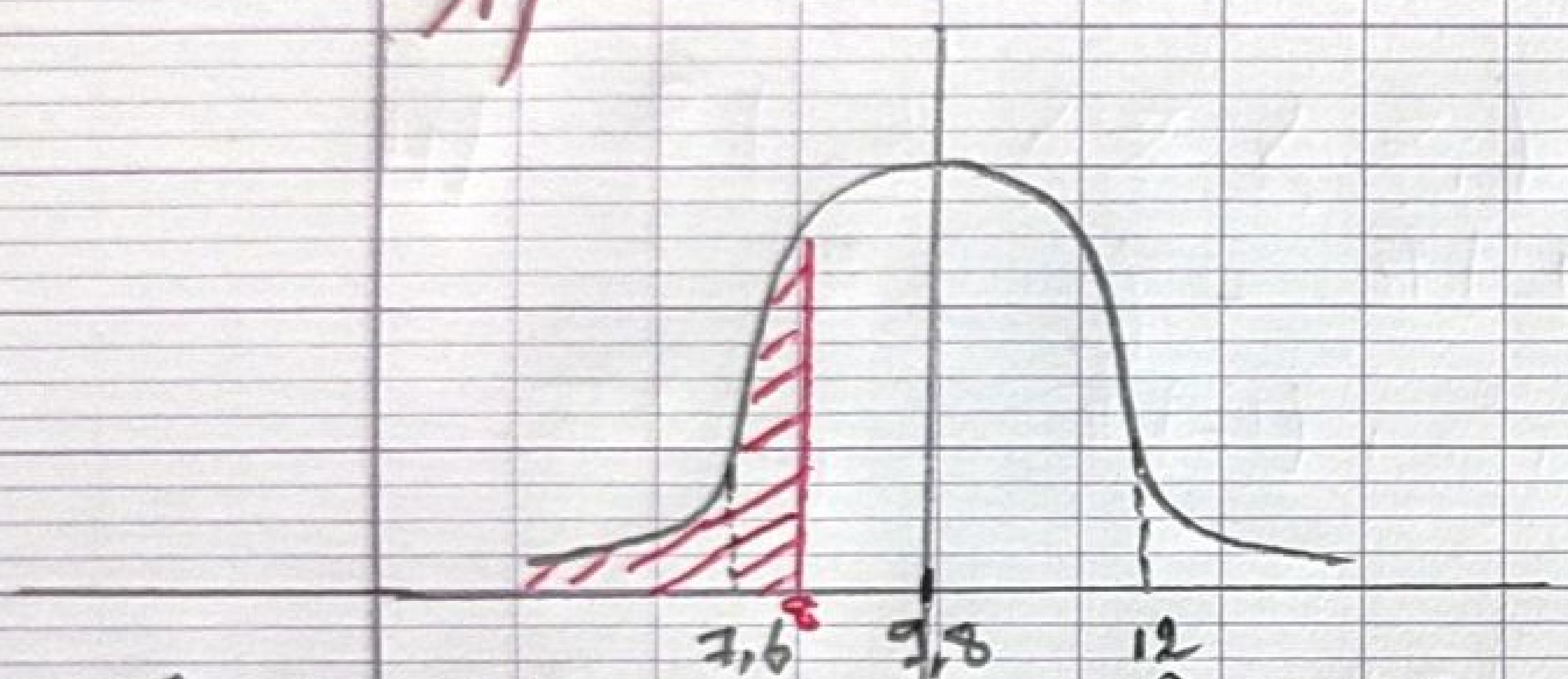
$$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = P(-\sigma \leq X-m \leq \sigma)$$
$$= P\left(-1 \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq 1\right).$$
$$= P(-1 \leq Z \leq 1).$$
$$= 2\Pi(1) - 1.$$
$$= 68{,}26\,\%$$

Plus générale :

$t \geq 0 \Rightarrow P(-t\sigma \leq X \leq t\sigma) = 2\Pi(t) - 1.$

Solution de l'Ex 3 :

1/



$m-\sigma = 9{,}8-2{,}2 \rightarrow$ $\quad$ $\leftarrow 9{,}8+2{,}2 = m+\sigma$

$$P(X \leq 8\,mm) = P\left(\frac{X-9{,}8}{2{,}2} \leq \overbrace{\frac{8-9{,}8}{2{,}2}}^{-1{,}8}\right)$$
$$= P(Z \leq -0{,}81)$$
$$= 1 - P(Z \leq 0{,}81)$$
$$= 1 - 0{,}791 = 0{,}209.$$
$$\simeq 21\,\%.$$

2/ $C_{50}^{15}(0{,}2)^{15} \times (0{,}8)^{35} = P(X=15)$: à n'est pas calculer.

$\rightarrow$ on utilise la loi de la place :

$X \rightsquigarrow B(50,\ 0{,}209).$

$n = 50 > 30$

$np = 50 \times 0{,}209 = 10{,}45 > 5$. $\hat{m}$ $nq > 5$.

$X \sim N\left(10{,}45\ ;\ \sqrt{10{,}45 \times 0{,}79} = 2{,}87\right).$

$$P(X \geq 15) \Rightarrow P(X \geq 14{,}5)$$
$$= P\left(\frac{X-10{,}45}{2{,}87} \geq \frac{14{,}5-10{,}5}{2{,}87}\right).$$
$$= P(Z \geq 1{,}41) = 1 - P(Z \leq 1{,}41)$$
$$= 1 - 0{,}92 = 0{,}08 = 8\,\%.$$