Chapitre 0 :

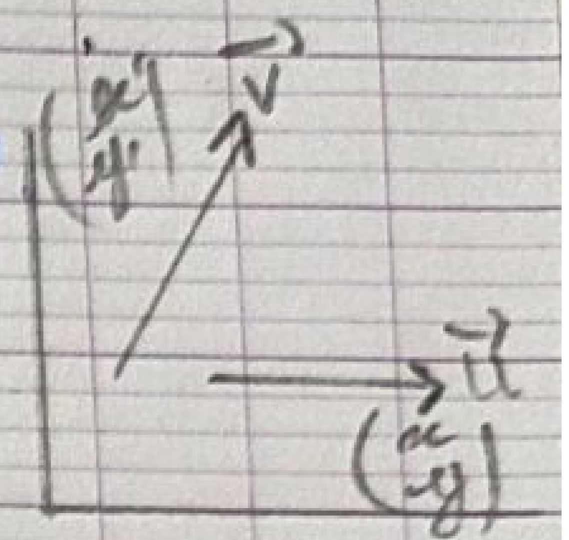
Rappel : Algèbre et Analyse.

1/ Les matrices : $\vec{u}$ $\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + y \cdot y'$

$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$



$L_2 C_2$ ⚠ il faut être les même nombre que les lignes et les colonnes.

Exercice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

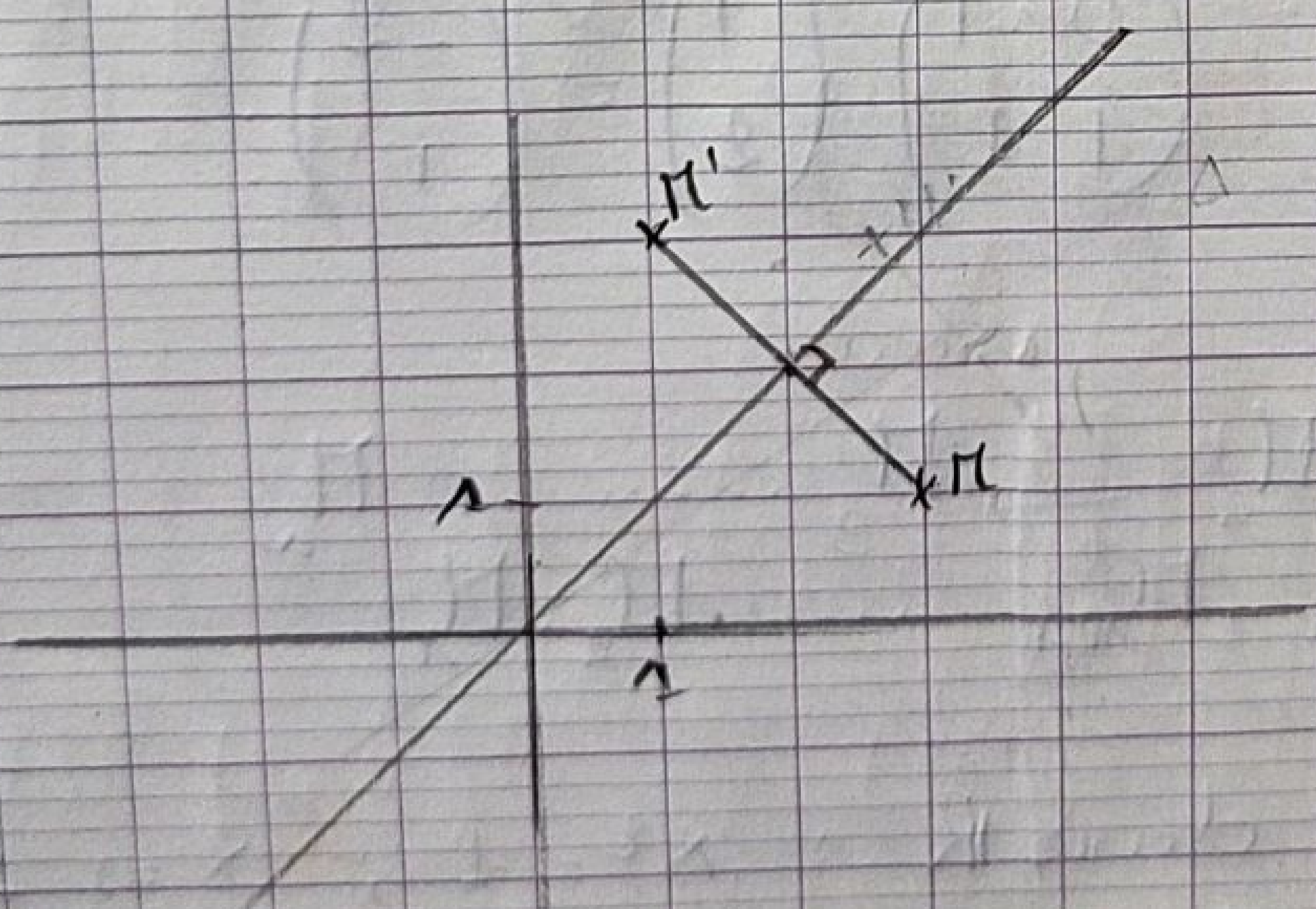
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

* $(AB)C = A(BC) = A.BC$
* $I_1 = (1)$
* $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{M}_n$ = l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Matrice et mouvement :



Δ : x = y premier barycentre

Système hortogonale

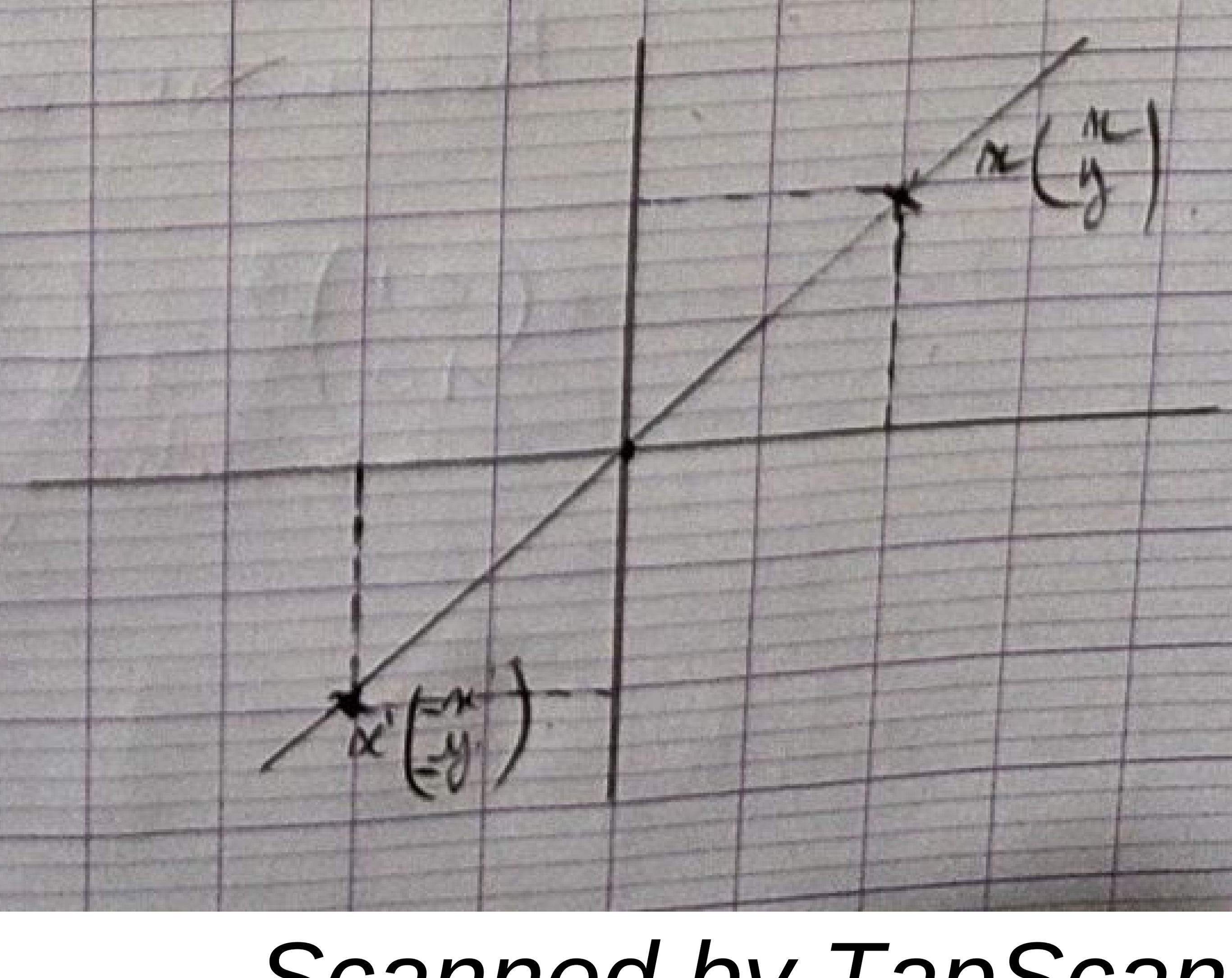
$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S_\Delta}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

: la matrice associée avec la système orthogonale d'axe Δ.

Ex :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{-I_2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$-I_2 = S_0$



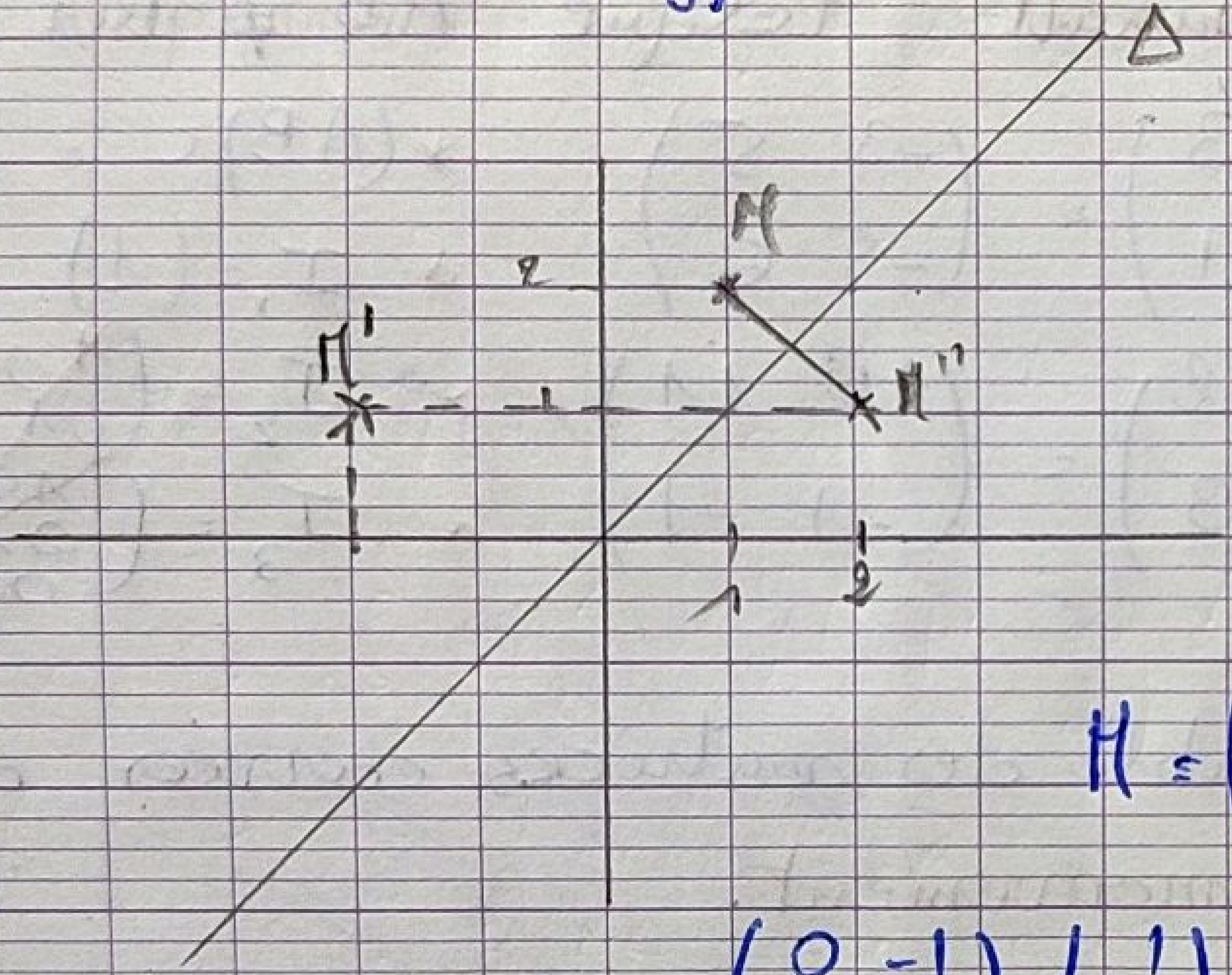
Remarque: Exercice :

composition de mouvement :

$$S_\Delta \longrightarrow S_{(oy)}$$

- Quelle est la matrice associé à ce mouvement.
- Quels sont les coordonnées du point M', image de $M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ par ce mvt.

Sol: $S_{(oy)}\left[S_\Delta(M)\right] = S_{oy} \cdot S_\Delta(M)$.



1/ $S_{(oy)}$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Remarque: associé

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \;\dots\dots\; M_n$$

$$M = M_n \cdot M_{n-1} \;\dots\dots\; M_2 \cdot M_1$$

Ex 3:

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 = 1$; $x \Rightarrow \pm 1$.

Résoudre dans M_2 : $x^2 = 1 \Rightarrow X^2 = I_2$

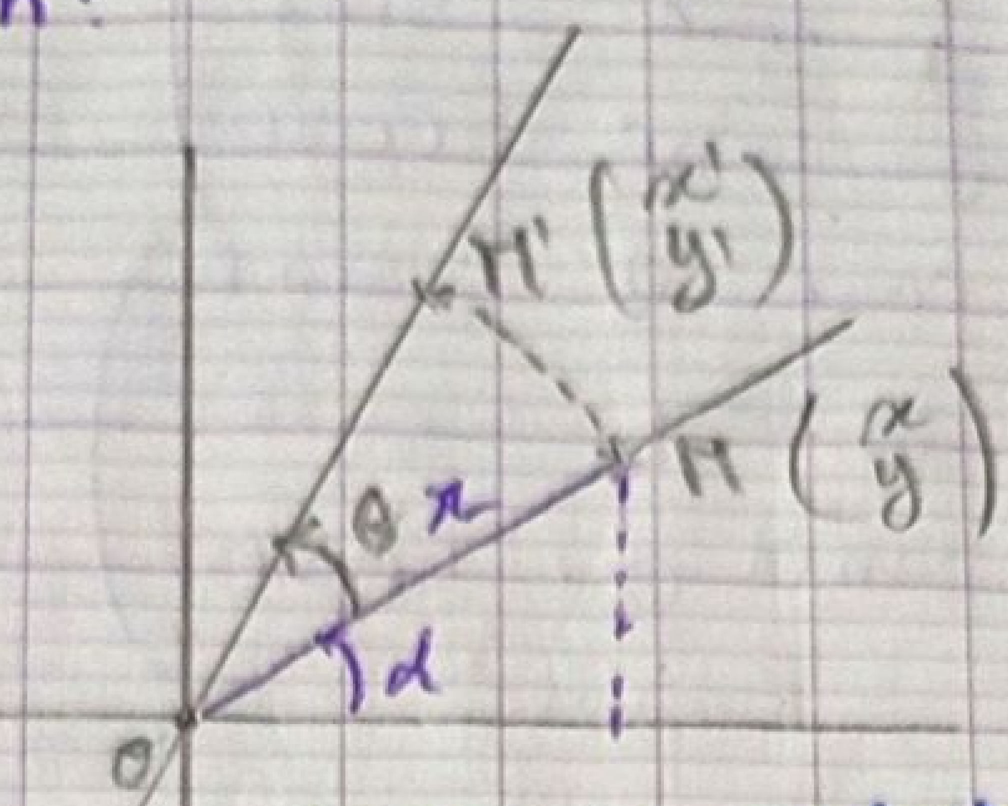
↳ c'est la symétrie orthogonale.

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

→ diagonalisation des matrices.

Rotation:

① $R_{O,\theta}$



$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

formule trigonométrie:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow x' = r\cos(\alpha+\beta) = \underbrace{r\cos(\alpha)}_{x}\cdot\cos(\theta) - \underbrace{r\sin(\alpha)}_{y}\cdot\sin(\theta)$$

$$= x\cdot\cos\theta - y\sin\theta.$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = \underbrace{r\sin\alpha}_{y}\cdot\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\sin\theta$$

$$= y\cos\theta + x\sin\theta.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$: Dans le plan.

② Dans l'espace:

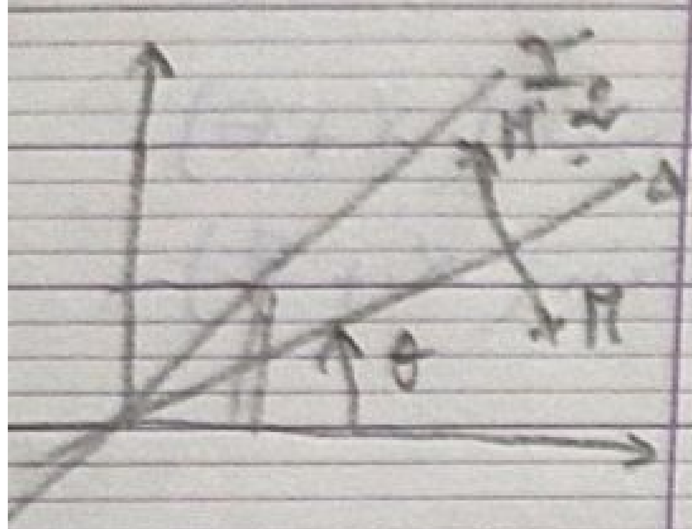
① $R_{3,\theta}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underset{\uparrow\, R_{3,\theta}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} M} \xrightarrow{\ f\ } \underset{\uparrow\, R_{O,\theta}}{H\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow R_{3\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② $R_{x,\theta} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

③ $R_{y,\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$



Remarque.

$\mathbb{R} \longrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \pm 1$ $\qquad X^2 = X(X)$

$M_2 \longrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow X^2 = I_2$ $\qquad$ sig une symétrie hortog d'un axe (Δ, θ)

Le déterminant :

① Dans M_1 ; $A(a) \Rightarrow \det(a) = 1$

② Dans M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow ad - cb$.

③ Dans M_n ; $n \geq 3$

On fixe une colonne ou ligne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A(i,j) \det A_{ij}.$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 3 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} A(i,3) \det A_{i3}$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 1 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3}\, 2 \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -1 - 2 + 2(5) = -1 - 2 + 10 = 7.$$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1$ / $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -4$

Remarque:

Multiplicativité du déterminant. $A, B \in \mathbb{M}_n$.

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B).$$

cas particulier:

$$I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(I_3) = 1.$$

$$\det(I_n) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D) = a.b.c.$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D) = d_1.d_2 \cdots d_n.$$

Définition:

Trace d'une matrice carrée d'ordre n.

$$A = \left(A(i,j)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$tr(A) = A(1,1) + A(2,2) + \cdots + A(n,n).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A(i,i)$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$; $tr(A) = a + e + k.$

le polynôme caractéristique:

$A \in \mathbb{M}_n$; le polynomme caractéristique associé avec A en définie par: $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A - XI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix} = (X-1)(X-2)-1$$
$$= X^2-2X-X+2-1$$
$$= X^2-3X+1.$$

Diagonalisation des matrices carrées d'ordre n

① $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D) = a.b$.

$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ 0 & & & \ddots \; a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D) = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n$

$D - XI_2 = \begin{pmatrix} a-x & 0 \\ 0 & b-x \end{pmatrix}$.

$P_D(X) = \det(D - XI_2) = (X-a)(X-b)$.

$D - XI_n = \begin{pmatrix} a_1-X & & & 0 \\ & a_2-X & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n-X \end{pmatrix}$

$P_D(X) = (a_1-X)(a_2-X) \times \ldots \times (a_n-X)$.
$= (-1)^n (X-a_1) \times (X-a_2) \times \ldots (X-a_n)$.

$D^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$.

$D^p = \begin{pmatrix} a^p & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$; $\forall p \in \mathbb{N}$.

$D^p = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ 0 & & \ddots & a_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_1^p & & & 0 \\ & a_2^p & & \\ 0 & & \ddots & a_n^p \end{pmatrix}$.

② Déf :

Matrice equivalentes.

A et B $\in M_n$ sont dites équivalentes SSI il existe P telque $A = PBP^{-1}$

$C.D \neq D.C$ car $A = P B. P^{-1}$
$= \underbrace{P . P^{-1}}_{I_n} . B$
$= B$

⊛ $\det(A) = \det(P) . \det(B) . \det(P^{-1})$.
Rappel:
$\det(CD) = \det(C) . \det(D)$

⊛ $\det(A) = \underbrace{\det(P) . \det(P^{-1})}$. $\det(B)$.

$\det(\underbrace{P . P^{-1}})$
$\det[I_n] = 1$.

D'où:
$\det(A) = \det(B)$.

⊛ $A - XI_n = P. B. P^{-1} - XI_n$
$= P.B.P^{-1} - X . P. P^{-1}$
$= P [B - XI_n] . P^{-1}$

D'où: $\det(A - XI_n) = \det(B - XI_n)$.
$P_A(X) = P_B(X)$.

⊛ $A = P. B. P^{-1}$
$A^2 = P B. \underbrace{P^{-1} \times P}_{I_n} B. P^{-1} = P\, \underbrace{B . I_n . B}_{B^2} . P^{-1}$

$A^p = P . B^p . P^{-1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$.

③ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; on voudrai calculer $A^{100\,000}$.

1/ vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ en déduire A^{100000}.

Sol:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{D} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$D'où \quad A^{100000} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{100000} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1^{100000} & 0 \\ 0 & (-1)^{100000} \end{pmatrix}}_{I_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times I_2 \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

④ Exercice 1.

Soit $A \in \mathbb{M}_4$.

On suppose que A est équivalente à une matrice diagonale (on dit que A est diagonalisable).

Calculer $P_A(x)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\det(A) = ad - b.c = \lambda_1 \times \lambda_2.$$

$$P_A(x) = P_D(x).$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & 0 \\ 0 & \lambda_2 - x \end{pmatrix} = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x).$$

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

⊗

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} 3-x & -2 \\ 4 & -3-x \end{pmatrix} = (3-x)(-3-x) + 8$$

$$= (x-3)(x+3) + 8$$

$$= x^2 - 9 + 8 = x^2 - 1$$

Sig $(x-1)(x+1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

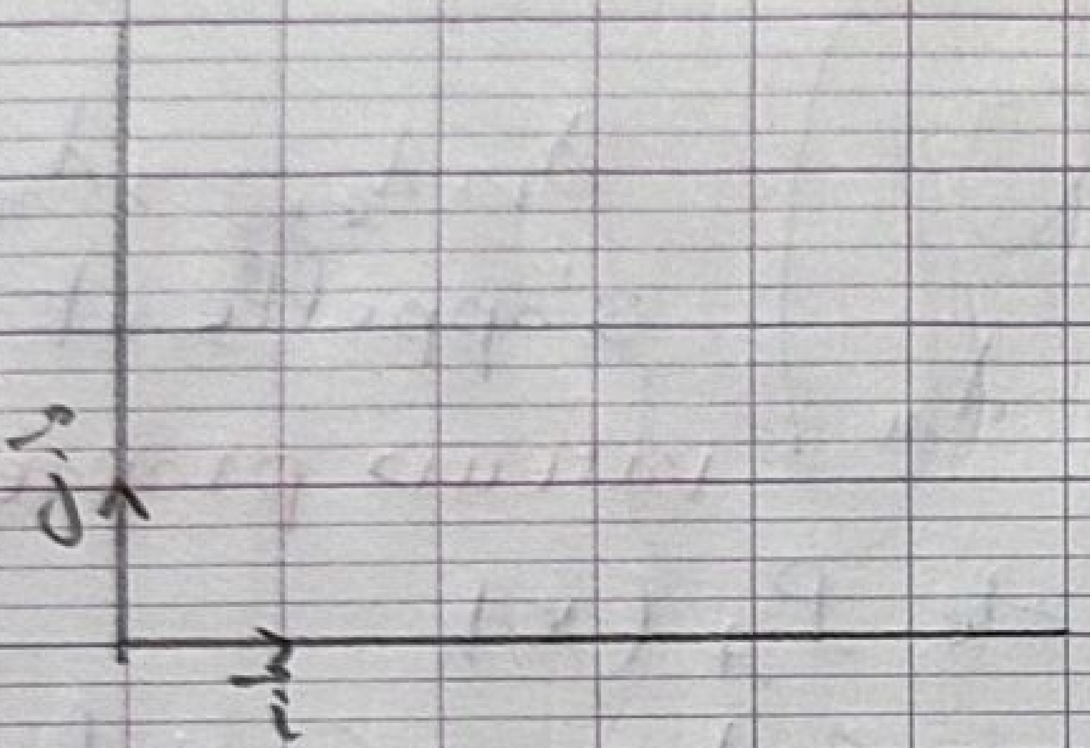
Scanned by TapScanner

~~Exercice 2~~ : **Remarque :** λ_1, λ_2 sont appelées valeurs propre de A.

— Plus généralement : Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Exercice 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



$e_1 = \vec{i}$

$e_2 = \vec{j}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = C_1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = C_2$$

$$A = P D . P^{-1} \Rightarrow A . P = P . D.$$

on sait que (2 colonnes)

$P \; (C_1, C_2)$

$$\begin{cases} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ D . e_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \quad = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \quad = \lambda_1 . e_1 \end{cases}$$

$$A P . e_1 = P D . e_1 .$$

$$A C_1 = P(\lambda . e_1) = \lambda . P . e_1$$

D'où $\quad A C_1 = \lambda_1 . C_1$

$$P = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} ; \quad C_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = x \\ 4x - 3y = y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \text{ D'où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Rappel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P \cdot D \cdot P^{-1}$$

plus généralement:

Soit $A \in M_n$ diagonalisable ; $A = P.D.P^{-1}$ telque:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ s'appellent les valeurs propres de A.

ce sont les racine de $P_A(x)$.

$P = (C_1, C_2, C_3 \ldots C_n)$. Les ~~Kateures~~ C_i s'appellent les vecteurs propres de A.

C_i est le vecteur propre associés avec λ_i.

~~Il~~ est solution de l'équation:

$$AX = \lambda_i X.$$

Exercice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \text{ diagonaliser } A. \quad = P\,D\,P^{-1}$$

① déterminer $P_A(x)$:

① $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 4-x & -1 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}$

$\det(A - xI_2) = (4-x)(1-x) + 2$

$= (x-4)(x-1) + 2$

$= x^2 - 5x + 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 25 - 24$

d'où: $P_A(x) = (x-3)(x-2)$.

② determiner D:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$x_1 = \frac{5+1}{2}$

$x_2 = \frac{5-1}{2}$

③ Résoudre l'équation : $AX = \lambda_i X$.

① $AX = 3X$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x = 2y \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

prenons $x = 1 \Rightarrow C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

② $AX = 2X$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 4x - y = 2x \\ 2x + y = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x.$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

prenon $x = 1 \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déduire P^{-1} :

Donc. $P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

⚠ Tout les rotation sont des matrices orthogonale et symétrie.

Def : Matrice orthogonale.

Soit $A \in M_n$ on dit que A est orthogonale SSI :

$$A^{-1} = {}^tA$$

transposé : 1 colonne → 1 ligne, ligne → colone

Exemple de t :

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array}\begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{- - - -} \\ \text{———} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \\ | & | & \vdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

scalaire

$L_1 \cdot L_1$ $\quad \langle L_1, L_1 \rangle = 1 \Leftrightarrow \|L_1\| = 1$

$\langle L_i ; L_j \rangle = 0 \quad$ si $i \neq j$

Et on Note :

$$\langle L_i, L_j \rangle = \delta_{ij} \quad \begin{cases} \text{si } i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \\ \delta_{ii} = 1 \end{cases}$$

$\vec{u}$

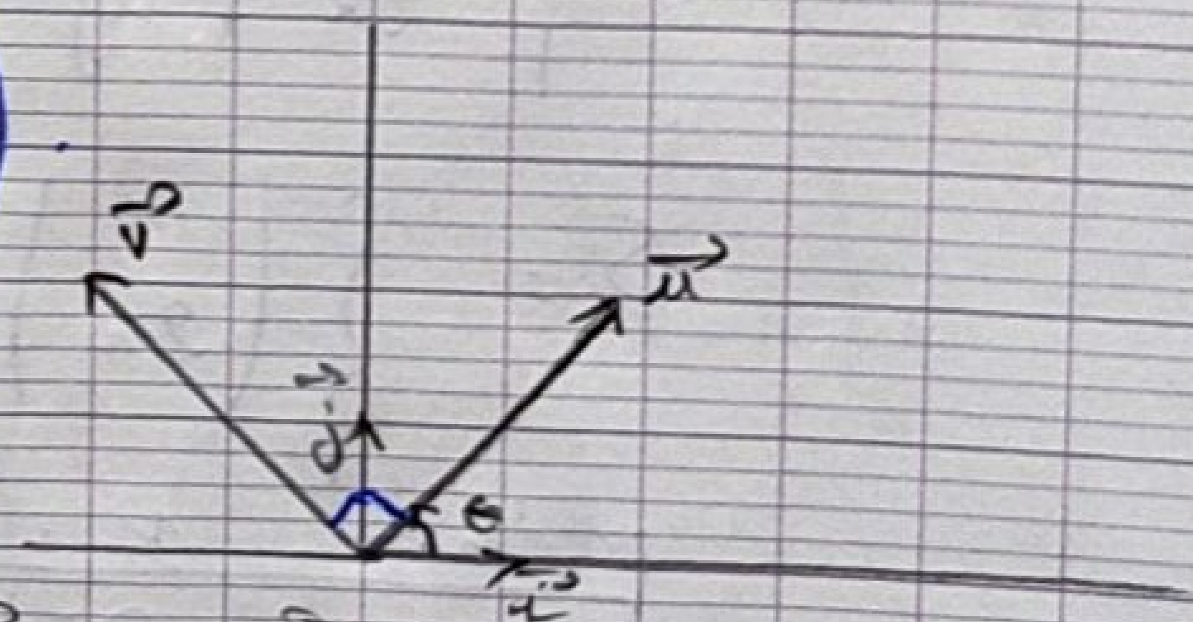
Exemple ①

① $R_\theta = \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{v} \end{array}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Dans le plan

$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{v} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.



$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$.

Remarque :

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$.

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$.

$\vec{v} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$.

$= -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

$$\begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{v} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

= la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$

parceque on a tourner $(\vec{i}, \vec{j})$ pour obtenir $(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b \\ \alpha c + \beta d \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$
$$= \alpha C_1 + \beta C_2.$$

(colonnes C_1, C_2)

matrice de passage

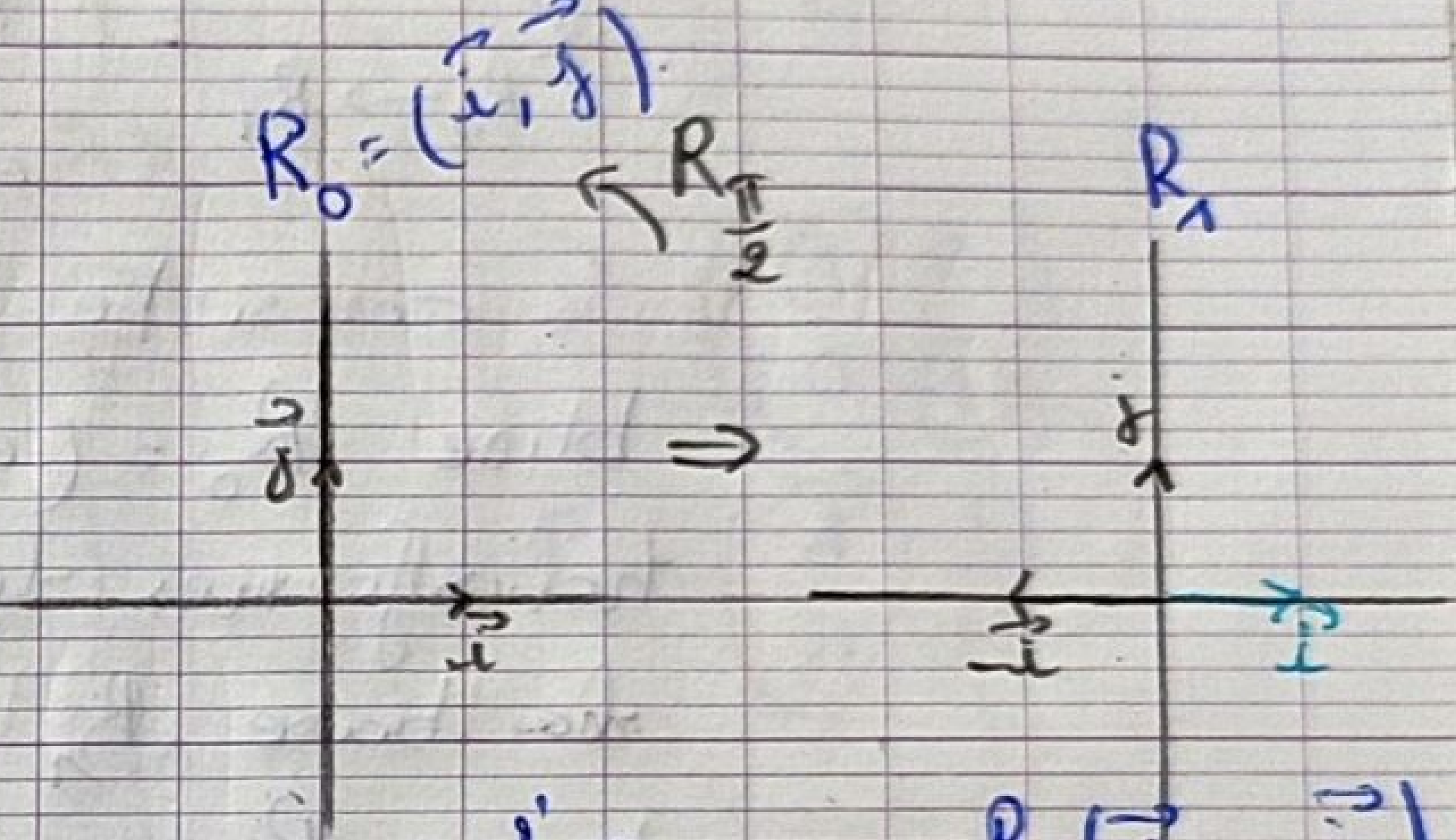
c.à.d : Si on multiplie la matrice par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ => la matrice de cordonnée | cordonne $\vec{i}\vec{j}$.

=> il suffit d'écrire le vecteur de cordonnée sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exemple :

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$



d'où $R_1(\vec{j}; -\vec{i})$

Sig $\vec{i}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{R_1}$

suivant exemple ①

La matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Elle permet de transformer les cordonnées d'un vecteur dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ en ses cordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

$$P_{R_0 \to R_1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}_{R_0}.$$

Exemple :

Dans l'espace

$$R_{3,\theta} = \begin{array}{c|ccc} & \vec{u} & \vec{v} & \vec{w}=\vec{k} \\ \hline \vec{i} & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \vec{j} & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \vec{k} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Rmq

Tous les rotations dans $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \ldots \mathbb{R}^n)$ sont des matrices orthogonaux.

Rmq
géométriquement
A et B sont identiques mais A dans une base et B dans une autre

Def : Matrice de passage :

$$\boxed{A = P\,B\,P^{-1}}$$

On se place dans $\mathbb{R}^n$
$R_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.
$R_1 = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

La matrice de passage de R_0 à R_1.

$$P_{R_0 \to R_1} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} \; & \; & \vdots & \; \end{array}\right) \end{array}$$

consiste à écrire les vecteurs e'_i dans la base $R_0 = (e_1, e_2, \dots e_n)$. cette matrice permet de transformer les cordonnées d'un vecteur dans la base R_1 en ses cordonnées dans la base R_0.

Remarque :

1. Si les bases R_0 et R_1 sont orthonormée directe alors $P_{R_0 \to R_1}$ est une rotation.

SSI : R_1, R_0 sont orthonorm

2. $\boxed{P_{R_1 \to R_0} = \left(P_{R_0 \to R_1}\right)^{-1}}$ qq soit la base $\boxed{= {}^t P_{R_0 \to R_1} = R_{-\theta}}$

(*) $P_{R_0 \to R_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}_{R_0}$ c à d : dans quel dimention

$\Rightarrow$ sy orth d'axe Δ.

vecteur propre : $\neq \vec{0}$
et leur image est un vecteur colinéaire à lui

Remarque géométrique:

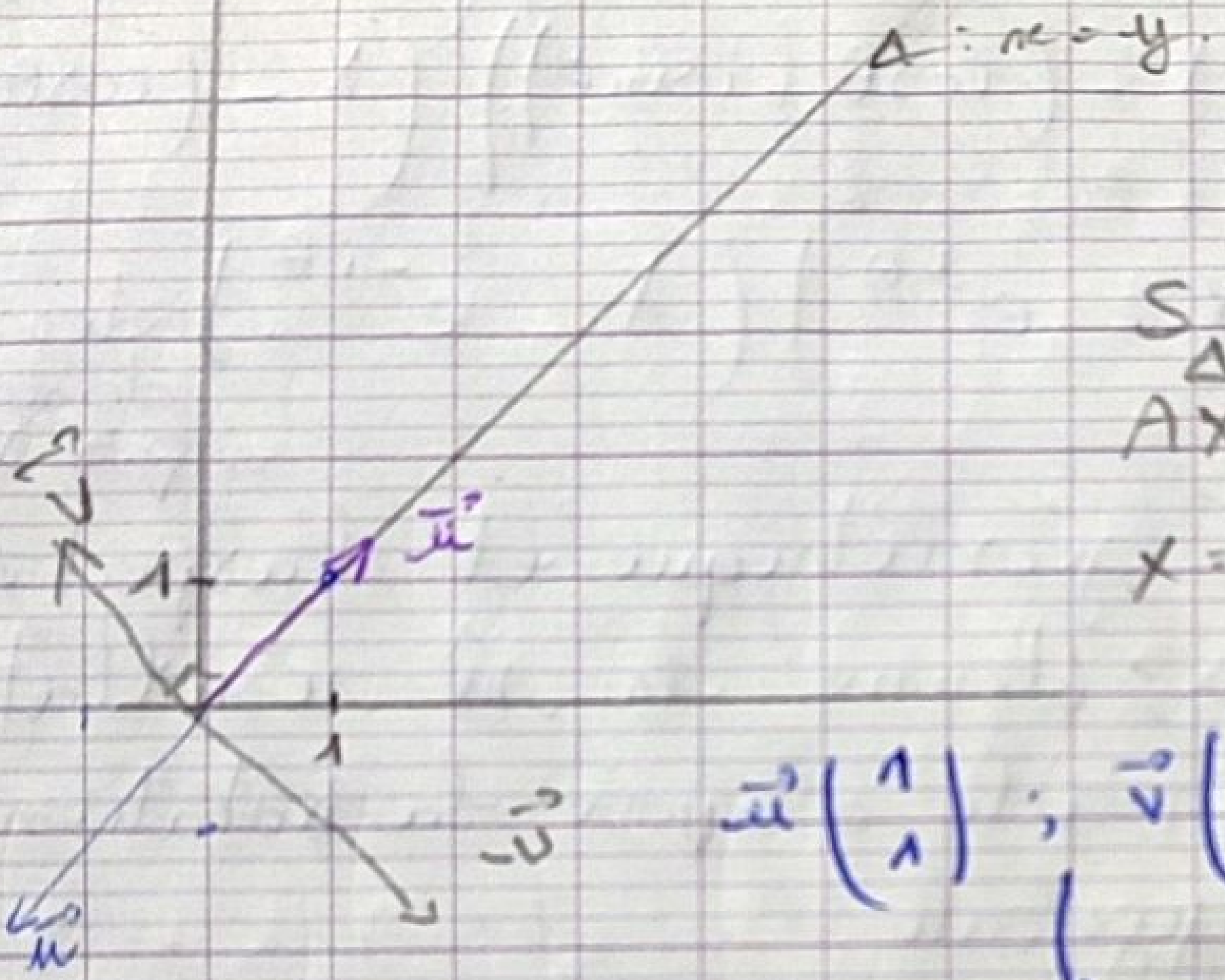
① Quelles sont les vecteurs propres de A ? $(1, -1)$

② " " les valeurs " correspondantes ?

③ Ecrire la matrice A.

$A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$S_\Delta = A$

$AX = \lambda X$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$S_\Delta = A$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ $\vec{v}$

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où : $A = PD.P^{-1}$

sig: $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

Ex 2:

R_θ / $\theta \neq K\pi$. Est-ce que R_θ est diagonisable

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $R_\theta \overset{?}{=} P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$

géométriquement : c'est impossible ;

Algébrement :

$\Rightarrow$ ce n'est pas diagonisable.

$P_{R_\theta} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - x & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - x \end{pmatrix}$

$= (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

$= x^2 - 2\cos\theta\, x + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}$

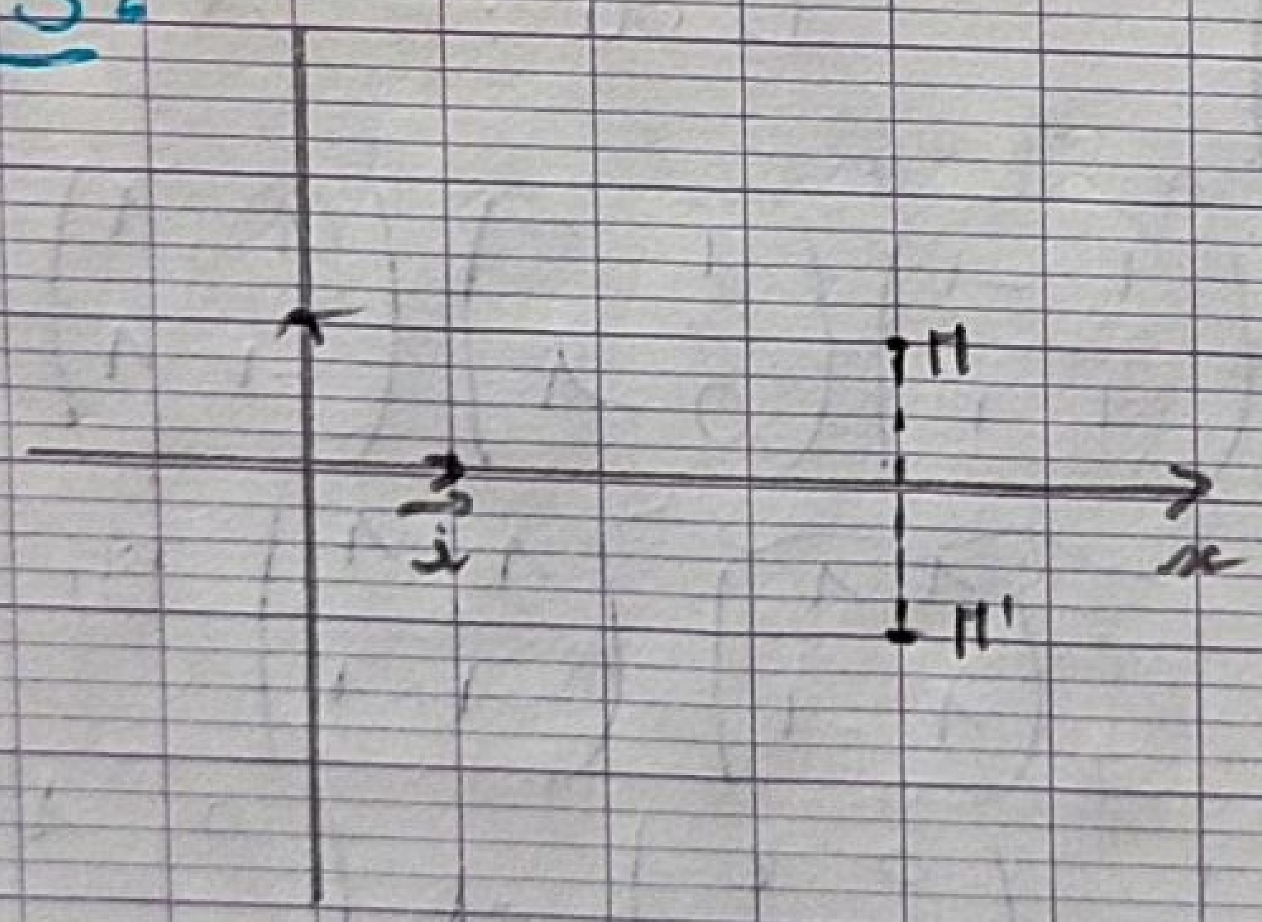
$$\boxed{(X-\cos\theta)^2 = X^2 - 2\cos\theta\, X^2 + \cos^2\theta}$$

$i^2 = -1$

$$P_R(X) = X^2 - 2\cos^2\theta\, X + 1$$
$$= (X-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$$
$$= (X-\cos\theta)^2 - i^2\sin^2\theta$$
$$= (X-\cos\theta)^2 - i^2\sin\theta^2$$
$$= (X-\cos\theta - i\sin\theta)(X-\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (X-(\cos\theta + i\sin\theta))(X-(\cos\theta - i\sin\theta))$$
$$= (X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$$ des solution dans l'$\mathbb{C}$ pas $\mathbb{R}$.

Donc : l'aspect géométrique et l'aspect Algébriques Tout les deux, donne la m̂ résultat. c'est que impossible d'avoir la Rotation deux vecteur matrices diagonisale.

Ex 3 :



$\{Ox\}$; vecteur propres sont

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice :

$$A = \begin{pmatrix}3 & -7 & 3\\2 & -6 & 3\\2 & -8 & 5\end{pmatrix}$$ diagonaliser A :

$$P_A(X) = \det\begin{pmatrix}3-X & -7 & 3\\2 & -6-X & 3\\2 & -8 & 5-X\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + (-L_2) \quad \begin{pmatrix}3-X & -7 & 3\\2 & -6-X & 3\\0 & X-2 & 2-X\end{pmatrix}$$

$$P_A[x] = (3-x)\left[(-6-x)(2-x) - 3(x-2)\right] - 2\left[-7(2-x) - 3(x-2)\right].$$

$$= (x-2)\left[(3-x)[x+6-3] - 2[7-3]\right].$$

$$= (x-2)\left[(3-x)(x-3) - 8\right].$$

$$-(x+3)(x-3).$$

$$= (x-2)\left[-(x^2-9) - 8\right].$$

$$= (x-2)\left[-x^2+9-8\right] = (x-2)(-x^2-1).$$

$$= (x-2)(1-x)(x+1).$$

Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Tel que C_1 ; $AX = X$.

C_2 ; $AX = -X$.

C_3 ; $AX = 2X$.

① donc : $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -6 & 3 \\ 2 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x - 7y + 3z = x \\ 2x - 6y + 3z = y \\ 2x - 8y + 5z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 7y + 3z = 0 \\ 2x - 7y + 3z = 0 \\ 2x - 8y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 7y + 3z = 0 \\ 2x - 8y + 4z = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} &① - ② = y - z = 0 \Rightarrow y = z \\ &2x - 7y + 3y = 0 \\ &\Rightarrow 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\}$.

$\longrightarrow C_1$

②
$$\begin{cases} 3x - 7y + 3z = -x \\ 2x - 6y + 3z = -y \\ 2x - 8y + 5z = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 7y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 2x - 8y + 6z = 0 \end{cases}$$

② - ③ $\Rightarrow$ $3y - 3z = 0 \Rightarrow y = z$.

$L_1 = 4x - 7y + 3y = 0 \Rightarrow 4x - 4y = 0$.

$\Rightarrow x = y$.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\rightarrow c_2$

③

$$\begin{cases} 3x - 7y + 3z = 2x \\ 2x - 6y + 3z = 2y \\ 2x - 8y + 5z = 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 7y + 3z = 0 \\ 2x - 8y + 3z = 0 \\ 2x - 8y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 7y + 3z = 0 \\ 2x - 8y + 3z = 0 \end{cases}$$

① - ② = $x - y = 0$

$\Rightarrow x = y$.

$L_1 \Rightarrow x - 7x + 3z =$

$= -6x + 3z =$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} z \Rightarrow z = 2x$.

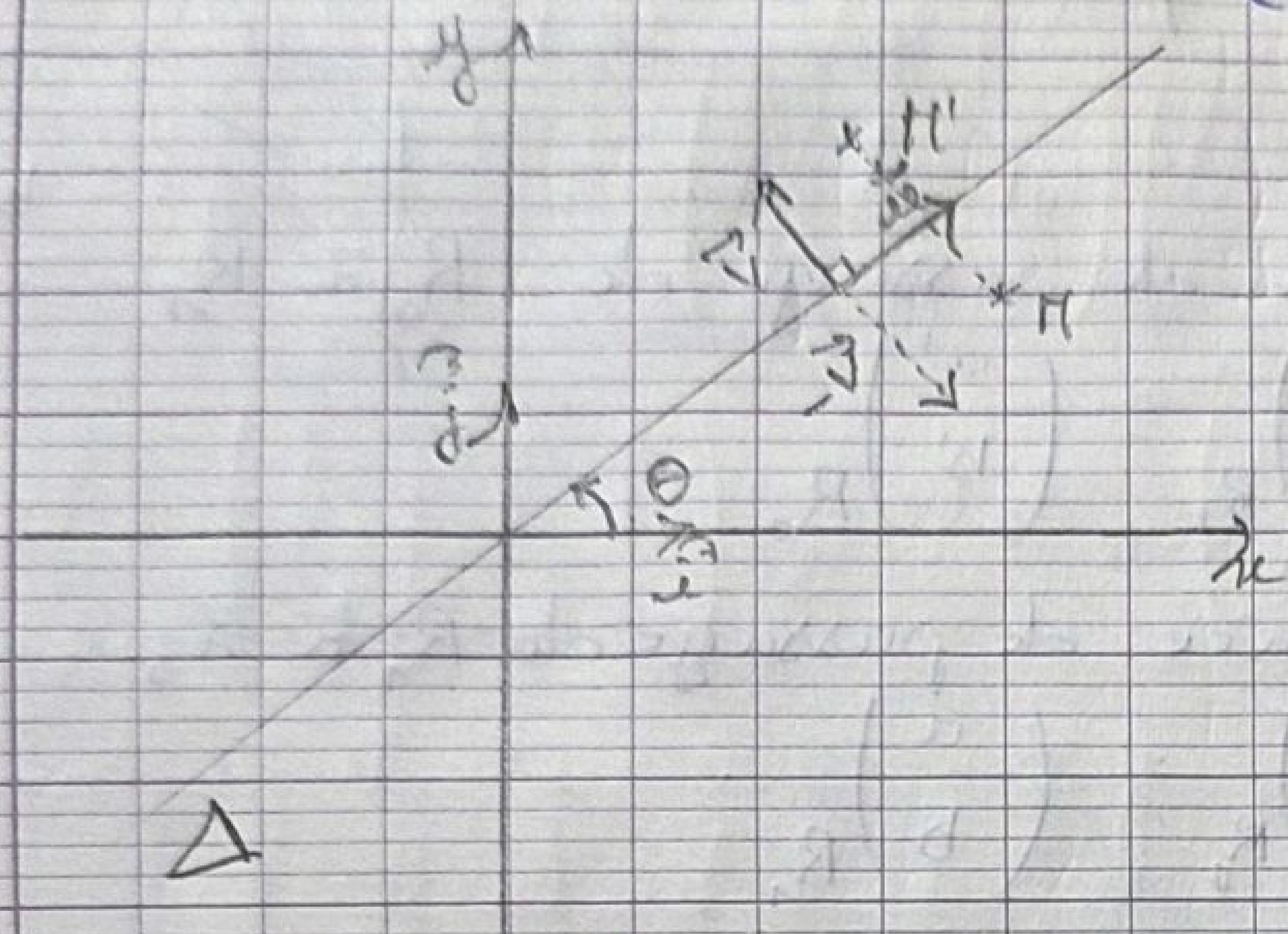
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} ; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\rightarrow c_3$.

Correction de Série N° 1 :

Ex N° 1 :

$(E) : X^2 = 1 \quad : M_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$



$S_\Delta : M \xrightarrow{S_\Delta} M' \xrightarrow{S_\Delta} M$

$S_\Delta^2 = I$

1/ D'après le cours.

2/ $S_{\Delta_\theta}(X) = \lambda X$ (X non nul) $\overset{une}{\Rightarrow}$ base de vecteurs propr

$\Rightarrow$ Soit $S_{\Delta_\theta}(\vec{u}) = \vec{u} \Rightarrow \|\vec{u}\| = 1$.

$S_{\Delta_\theta}(\vec{v}) = -\vec{v}$

$\in \Delta$

telque $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$. $(\lambda = 1)$

$\perp \Delta \quad \vec{v} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{j}$

$= -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. $(\lambda = -1)$

$\Rightarrow$

$$S_{\Delta_\theta} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Rmq: Soit $R_0=(O,\vec{i},\vec{j})$; $R_1=(O,\vec{u},\vec{v})$.

$$\begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\vec{i} & \vec{j}\end{array} \\ \begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \end{array}\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\vec{u} & \vec{v}\end{array} \\ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\end{array}}_{\substack{P \\ \text{retour à la base}}}\begin{array}{c} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\vec{u} & \vec{v}\end{array} \\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{array}}_{\substack{D \\ \text{action}}}\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\vec{i} & \vec{j}\end{array} \\ \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\end{array}}_{\substack{P^{-1} \\ \text{base}}}\begin{array}{c} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}$$

à cause d'une Rotation d'angle θ.

P = la matrice de passage de R_0 à R_1.

$$\Rightarrow P\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{R_1}=\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}_{R_0}.$$

P^{-1} = la matrice de passage de R_1 à R_0.

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}_{R_0}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{R_1}.$$

$D = S_{\Delta_\theta}$: exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v})$

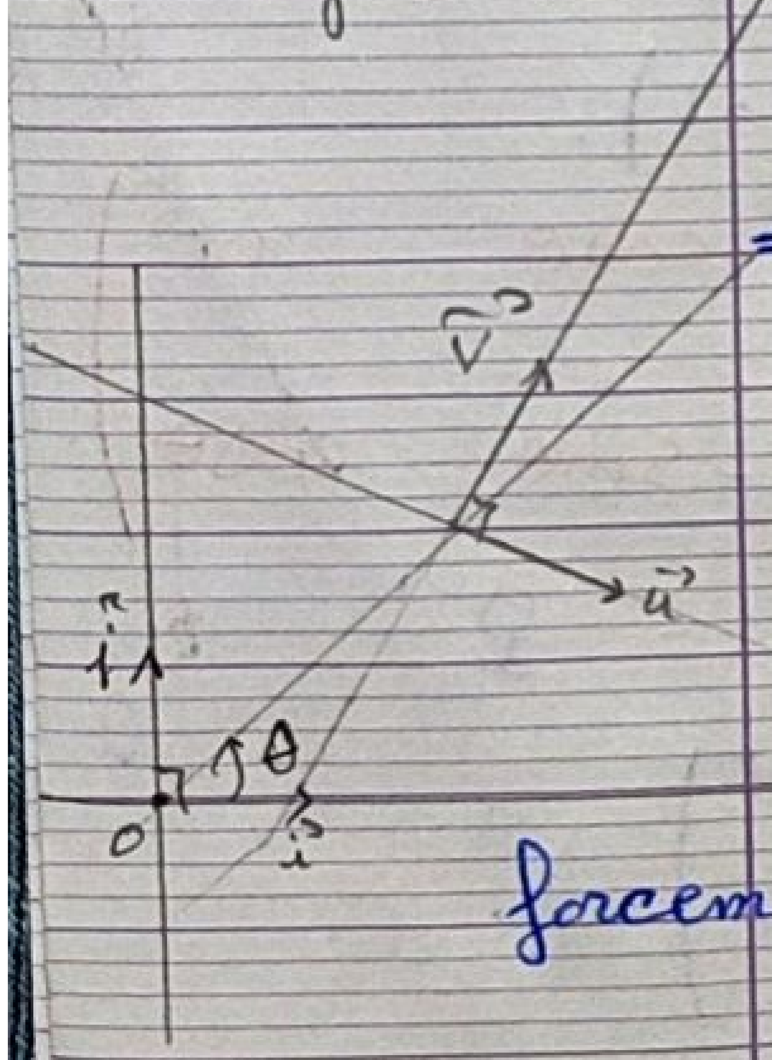
En générale : (On se parle dans $\mathbb{R}^n$ les valeur propre)

R_1 : base diagonale de R_0.

o/ dans la m̂ base on peut que allongé ou réduire

La décomposition diagonale dans une base orthonormée. (Les vecteurs propre constitue une base orthonormé)

$$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}.$$



$\Rightarrow$ le démarche comme suite :

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{R_0}\longrightarrow\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}_{R_1}\xrightarrow[\text{dett}]{\text{l'action}}\begin{pmatrix}a'\lambda_1\\b'\lambda_2\end{pmatrix}_{R_1}\xrightarrow[\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}]{\text{Multiple par}}\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}_{R_0}$$

↳ Toutes des matrices diagonisable ne sont pas forcement dans une base orthonormale.

↳ Les matrices symétriques sont diagonisables dans une base orthonormale avec des valeurs propres réelles.

Exemple : $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-X & -1\\ 1 & -X\end{pmatrix}\Rightarrow P_A(X)=X^2+1.$ $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}P^{-1}$

Th de spectra

dans une base orthogonale.

On dit ... matrice symétrique = Si une matrice carré (n ligne = n colone) et $^tA = A$ (la transposé elle m̂) : exemple $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{array}\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1 \; L_2 \; L_3 \; \dots \; L_n \\ \begin{pmatrix} | & | & | & \cdots & | \\ | & | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \end{array} = A$$

$$\langle L_i, L_j \rangle = \delta_{ij} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 \\ \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{array}{c} C_1 \; C_2 \; C_3 \; \dots \; C_n \\ \begin{pmatrix} | & | & | & \cdots & | \\ | & | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{pmatrix}\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{array}$$

$$\langle c_i, c_j \rangle = \delta_{ji}.$$

Ex N°6 :

Ex 4 + algo pour construire une base orthonormé.

1/
$$S_p(\vec{u}) = \vec{u} \Rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$S_p(\vec{v}) = \vec{v} \Rightarrow \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$S_p(\vec{w}) = -\vec{w} \Rightarrow \lambda_3 = -1$$

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$; $= \frac{1}{\|\vec{u}\|}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

les vecteurs normale vérifie
↳ $x + y + z = 0$
donc on choisit : $1 + 0 + (-1) = 0$

m̂ travail

$(\vec{v})$ et on choisie $1 + (-2) + 1 = 0 \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

l'orthogonal $(\vec{w})$ et on choisie $\vec{w}$ qui vérifie $\overset{\vec{u}}{(a \; b \; c)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{X} = 0$ (P)
$(\vec{u}, \vec{v})$.

$\Rightarrow ax + by + cz = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \Rightarrow (a,b,c) \wedge (x,y,z) = 0$.

$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S_p = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt3 & 1 & \sqrt2 \\ 0 & -2 & \sqrt2 \\ -\sqrt3 & 1 & \sqrt2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \sqrt3 & 0 & -\sqrt3 \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt2 & \sqrt2 & \sqrt2 \end{pmatrix}.$$

$\frac{1}{\sqrt6} \times \frac{1}{\sqrt6}$

↳ La matrice de la symétrie Sp dans la base diagonale.

Ex6 : ⟵

le mi juste

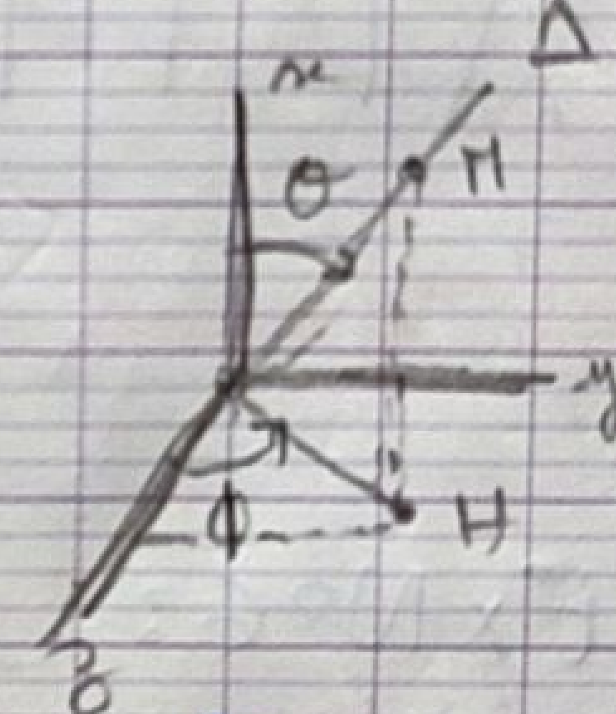
S_p : la matrice de symétrie $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et terminer le calcul.

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt3 & 1 & -\sqrt2 \\ 0 & -2 & -\sqrt2 \\ -\sqrt3 & 1 & -\sqrt2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt3 & 0 & -\sqrt3 \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt2 & \sqrt2 & \sqrt2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+1-2 & -2-2 & -3+1-2 \\ -2-2 & 4-2 & -2-2 \\ -3+1-2 & -2-2 & 3+1-2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ ⟵ La matrice propre de la base canonique

c'est un matrice qui a une image qui lui est colinéaire (=) et (//).

Rautour à l'ex 6



$\exists$ $\vec{w}$ $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ ↲ qui décrit la droite qui fait la symétrique (vecteur directeur)

des coordonné sphérique

$$\|\vec w\| = \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta.$$

$$= \sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + \cos^2\theta = 1.$$

l'angle entre $(\vec w, \vec i)$

$$\vec w = \begin{pmatrix} \sin\theta\cdot\cos\varphi \\ \sin\theta\cdot\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\vec w, \vec i\rangle \\ \langle\vec w, \vec j\rangle \\ \langle\vec w, \vec k\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec w\|\cdot\|\vec i\|\cdot\cos(\varphi_1) \\ \|\vec w\|\cdot\|\vec j\|\cdot\cos(\varphi_2) \\ \|\vec w\|\cdot\|\vec k\|\cdot\cos(\varphi_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Les cosinus directeur de $\vec w$. ↲ ; $\varphi_3 = \theta$.

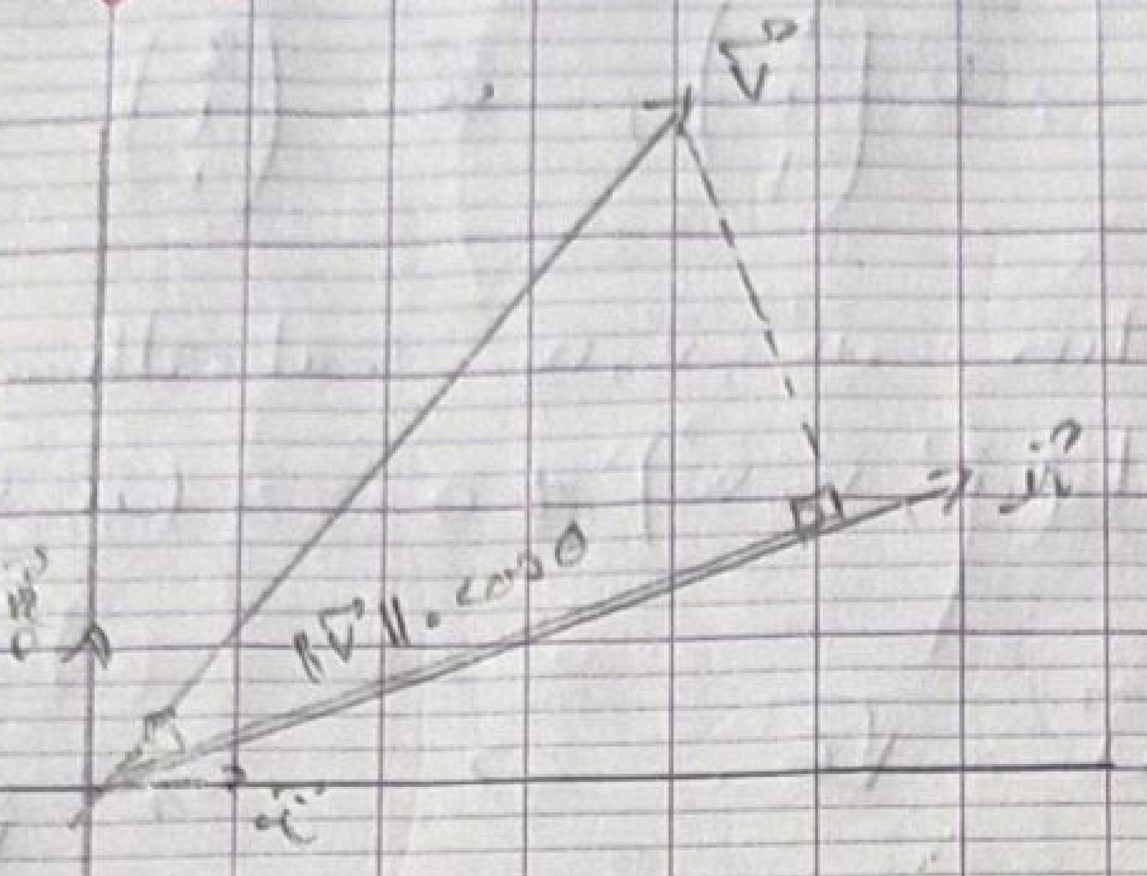
donc : selon Théorie de Gramm Sh.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & \sin\theta\cos\varphi \\ | & | & \sin\theta\sin\varphi \\ | & | & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \text{———} & & \\ \text{———} & & \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}$$

l'objectif c'est de trouver les vecteur C_1, C_2 orthonormé entre eux et orthonormé sur C_3.

Ex 4: La Théorie de Gramm - Shmidt.



$e_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

$\|\vec{e_1}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1$.

utile

$\langle \vec{v}, \vec{e_1} \rangle e_1$

$\tilde{v} = \vec{v} - \langle \vec{v}, e_1 \rangle e_1$

telque $\tilde{v} = \vec{v}$ projeter sur e_1 $(\vec{v}) \Rightarrow proj_{e_1}(\vec{v})$.

d'ou $\langle \tilde{v}, \vec{e_1} \rangle = \langle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle = \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{e_1} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{e_1} \rangle \|\vec{e_1}\|}_{0}$
$= 0$

$\vec{u} \longrightarrow \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = e_1$

$\vec{v} \longrightarrow v - \langle v, e_1 \rangle e_1 = \tilde{v} \longrightarrow e_2 = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$

$\vec{w} \longrightarrow \vec{w} - \underbrace{\langle \vec{w}, \vec{e_2} \rangle e_2 - \langle \vec{w}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1}}_{proj_{(e_1, e_2)}(\vec{w})} = \tilde{w} \longrightarrow e_3 = \frac{\tilde{w}}{\|\tilde{w}\|}$

En générale:

$\vec{u_1} \longrightarrow \frac{u_1}{\|u_1\|} = \vec{e_1}$.

$\vec{u_2} \longrightarrow \tilde{u}_2 = \vec{u_2} - \langle \vec{u_2}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} \longrightarrow e_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}$.

$\vdots$

$\vec{u_n} \longrightarrow \vec{u_n} - proj_P(\vec{u_n}) = \tilde{u}_n$ } P: le plan engendré par $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_{n-1}}$

$\vec{e_n} = \frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|}$.

→ Terminer l'ex:

$\vec{i} - \langle \vec{i}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} = \vec{i} - \sin\theta\cos\varphi\, \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin\theta\cos\varphi \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi \\ 0 - \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\boxed{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi - \cos\theta\sin\theta = \cos\theta\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1) = 0}$

$$S_\Delta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

La Théorie de Gramm ... avec des vecteur 99.

soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

pour que monter $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont orthonormé :

on fait $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}. \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{v} \longrightarrow \tilde{v} = \vec{v} - \langle \vec{v}.\vec{e_1} \rangle \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow = \left[\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Big| e_1 \Big|$

$\Rightarrow e_2 = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|} = \frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{w} \longrightarrow \tilde{w} - \langle \vec{w}, \vec{e_2} \rangle \vec{e_2} - \langle \vec{w}, e_1 \rangle e_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{5}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\|\tilde{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$= \begin{pmatrix}2 - \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\\1 + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\\1 - \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Ex 1 :

partie B :

1/ Il existe $A \neq 0$, $B \neq 0 \Rightarrow AB = 0$.

exemple $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

et aussi :

$A \neq 0$; $A = \begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$A.B = 0$ supposons le contraire.

$\rightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{I}B = A^{-1}.0 \Rightarrow B = 0$ (contradiction).

Rotation peut se décompose en sy orth . mais :
det = (-1)
sy orth n'a jamais peut être un ensemble de Rotation.

2/ $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$.

M_2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; C_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} ; C_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a - \alpha b \\ c - \alpha d \end{pmatrix} = 0.$$

$$\det A \neq 0. \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a\alpha - b \\ c\alpha - d \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$$

$AX = 0 \ (X \neq 0)$
A non inversible

$I_n^2 = I_n.$

$A \in M_2 ; \quad A^2 = I_2 ; \quad A^2 = I_2 \Rightarrow A^2 - I_2 = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(A - I_2)}_{A \neq 0} \underbrace{(A + I_2)}_{B \neq 0} = 0.$$

$X' \neq 0 \rightarrow \quad AB \neq 0$

d'ou il existe $\lambda X \neq 0. \Rightarrow (A - I_2)X = 0.$ $\begin{cases} AX = X \\ AX' = -X' \end{cases}$

$(A + I_2)X = 0$

Σ diagonale.

Trace : $tr(A) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = a + d.$

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \det(A) = -1 \text{ et } tr(A) = 1 + (-1) = 0.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a + d = 0. \\ ad - bc = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -d. \\ -a^2 - bc = -1 \end{cases}$

donc on doit montrer :

d'ou $\begin{cases} d = -a \\ a^2 + bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S_{\Delta\theta}$

$a^2 = 1 - bc$ Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on doit montrer que
Il existe des sol qui ne marche pas avec ça.

Ex N°3 : A est diagonalisable

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix}}_{D} P^{-1}$$

$$P_D(X) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-X & & 0 \\ & a_{22}-X & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn}-X \end{pmatrix} = (a_{11}-X)(a_{22}-X)\cdots(a_{nn}-X)$$
$$= (-1)^n (X-a_{11})(X-a_{22})\cdots(X-a_{nn})$$

∘ $(-1)^n \cdot X^n + \cdots$

∘/ $P_A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0$

pour $P_A(X) = P_D(X)$

→ coeff ⇒ $a_0 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \cdots + a_{nn} = \det(A)$.

⇒ $a_0 = \det(A) = \det(D)$.

∘/ X^{n-1} c'est à dire chaque fois je vais prendre (1) a_{ii} et les autre sont X. alors comme dans le probabilité.

$(-1)^n [-a_{11} - a_{22} - a_{33} \cdots - a_{nn}]$

$= (-1)^{n+1} [a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}]$.

$= (-1)^{n+1} \cdot t_r(A)$.

⚠ $A \in M_n$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

$\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \to \lambda^2 ad - \lambda^2 bc = \lambda^2 \det(A)$.

→ trigonalisation

Ex N°7 :

$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $^tA = A$: matrice symétrique.

Rappel :

d'où A est diagonisable dans une base orthonormé.
puisqu'il est un matrice symétrique.

$$P_A(X) = \det \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \right]$$
$$= \det \left(\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 5-2X & 1 \\ 1 & 5-2X \end{pmatrix} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2X-5)^2 - 1\right] = \frac{1}{4}\left[4X^2 - 20X + 25 - 1\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left(4X^2 - 20X + 24\right]$$

Scanned by TapScanner

$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ $\quad C_1 \quad$ $P = (C_1, C_2)$

$\Rightarrow X^2 - 5X + 6 = (X-3)(X-2) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

① 3

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y = 6x \\ x + 5y = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$

$S_3 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \Rightarrow \boxed{x = y}.$

$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

② ② $\begin{cases} 5x + y = 4x \\ x + 5y = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -y}$

$S_2 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}. \to C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

D'où $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

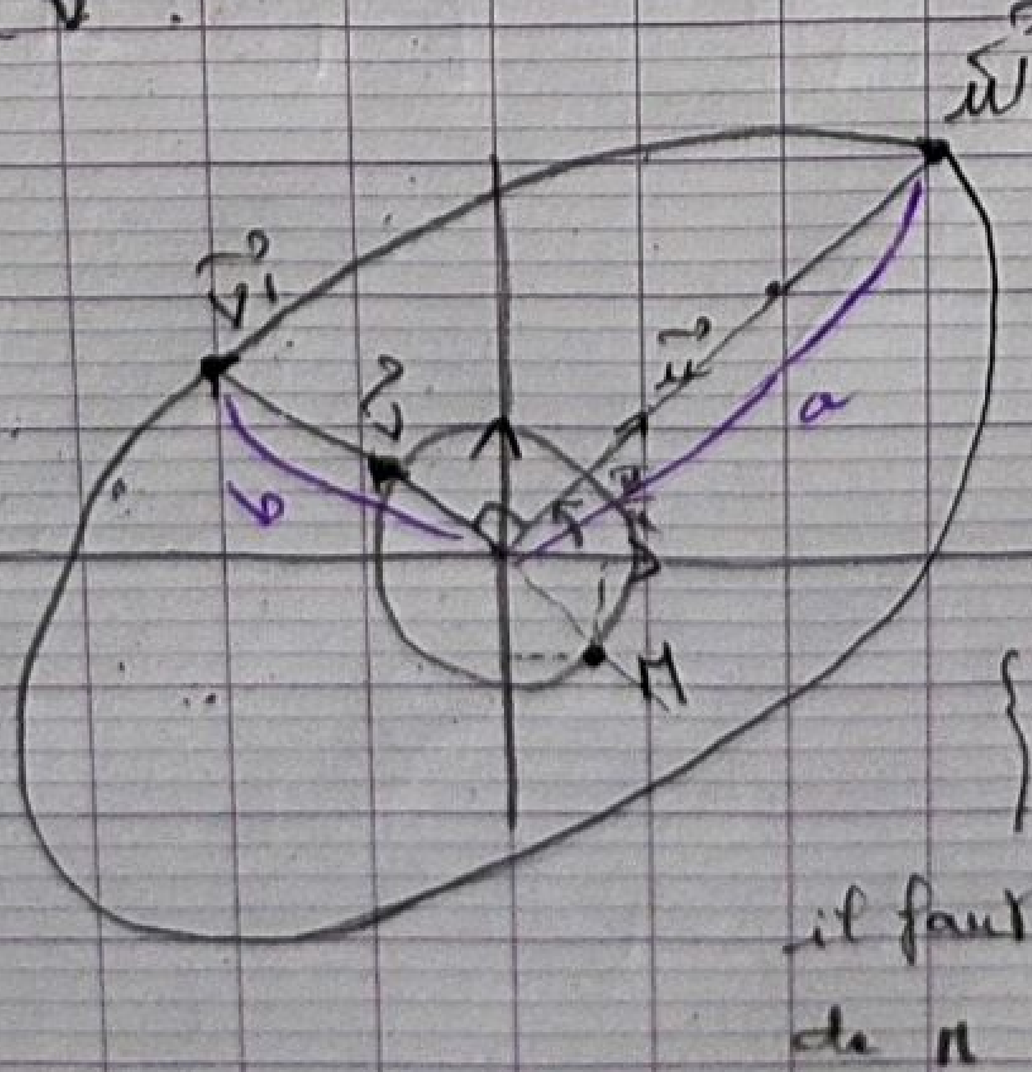
D'où:

$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

→ rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ rotation $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$A\vec{u} = 3\vec{u} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = 2. \end{cases}$

$A\vec{v} = 2\vec{v}.$



$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

$\begin{cases} \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{OM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Rightarrow 3\alpha\vec{u} + 3\beta\vec{v} = \vec{OM'} \end{cases}$

il faut montrer que chaque image de M ∈ ellipse

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \frac{(3\alpha)^2}{9} + \frac{(2\beta)^2}{4}$

$= \frac{9\alpha^2}{9} + \frac{4\beta^2}{4} \Rightarrow \underset{a}{\alpha^2} + \underset{b}{\beta^2} = 1 \Rightarrow M' \in E(3, 2).$

Scanned by TapScanner