浙江大学 2015 – 2016 学年秋冬学期

《 数学建模 》课程期末考试试卷

课程号：06186290，开课学院：数学系

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期： 2016 年 1 月 10 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：_________

题序	**一**	**二**	**三**	**四**	**总 分**
得分					
评卷人					

一、（20 分）天花是一种严重传染病，数学家 Daniel Bernoulli 对此作过以下研究。假设感染天花后死亡率为 p，且会在感染后极短时间内死亡，但治愈后终身不会再受到感染。记某区域年龄为 $x(x\,□\,16)$ 的总人数为 $P(x)$，其中未感染天花的人数和曾感染天花但已治愈的人数分别为 $S(x)$ 和 $R(x)$。设每人在年龄 x 到 $x+dx$ 之间感染天花的概率为 qdx，因天花以外的其它原因死亡的概率为 $m(x)dx$。

（1）试建立 $S(x)$ 和 $R(x)$ 所满足的微分方程模型；

（2）试推导出 $f(x)=\dfrac{S(x)}{P(x)}$ 所满足的微分方程，该方程为 Bernoulli 方程，以 Daniel Bernoulli 之叔 Jokob Bernoulli 命名。

二、（20 分）一单行道上有n个车位，按车行方向分别记为$1,2,\cdots,n$。每个车位有空闲和占用两种状态，车位i空闲的概率为$\alpha_i>0$，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位i上停车的效用为$U_i>0$，未在n个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

（1）记$V_i,i=1,\cdots,n+1$为驶过车位$i-1$后（车位 0 为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出V_i所满足的递推关系；

（2）令$x_i=V_i-V_{i+1}$，$i=1,\cdots,n$，试写出求解该问题的以x_i为决策变量的数学规划。

三、（30+10 分）现有一种棋类游戏。每局比赛在两人之间进行，其中先行一方可以概率 p 获胜，以概率 $1-p$ 守和，而不会失败。p 称为先行概率。

（1）若 A,B 两人的先行概率分别为 p,q。两人轮流先行，进行多局比赛，直至其中有一人失败为止。若首局比赛由 A 先行，他最终获胜的概率是多少？

现有 A,B,C 三人参与该游戏。每一局比赛三人中的一人拥有主动权，他可选择另一个对手进行比赛并在比赛中先行。假设三人按 C,B,A 的顺序轮流获得主动权，进行多局比赛，在任一局比赛中失败者即退出以后的所有比赛。两人退出比赛后，另一人获得最终胜利。设 A,B,C 三人的先行概率分别为 $1,b,c$，且 $1>b>c>0$。每人均以最终胜利为目标，获得主动权时按最优策略选择比赛对手。

（2）若在某一时刻 A,B,C 三人均未退出比赛，A 拥有主动权，则 A 应选择谁为对手？若此时 B 拥有主动权，B 应选择谁为对手？为什么？

（3）若 C 在第一局比赛中选择 B 为对手并获得胜利，他最终胜利的概率是多少？若 C 在第一局比赛中选择 A 为对手并获得胜利，他最终胜利的概率是多少？

（4）（附加题）若 $b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{3}$，C 在第一局中消极比赛以确保结果为和局，为什么？

四、（30+10 分）n 支球队进行比赛，每场比赛在两支球队之间进行，任意两支球队之间至多进行一场比赛，每支球队参与比赛的场数相同。记队 i 与队 j 比赛中，队 i 的得分为 p_{ij}，队 j 的得分为 p_{ji}，队 i 的分差为 $q_{ij}=p_{ij}-p_{ji}$。与队 i 进行过比赛的球队集合记为 T_i。约定 $i\notin T_i$，且 $q_{ii}=0$。记 $|T_1|=|T_2|=\cdots=|T_n|=l$。

A-B	5-10
A-D	57-45
B-C	10-7
C-D	3-10

（1）记 s_i 为队 i 在各场比赛中分差之和，即 $s_i=\sum\limits_{j\in T_i} q_{ij}$，$\mathbf{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 称为分差向量，可用来衡量各球队的实力。若四支球队之间的比赛结果如表所示，求向量 $\mathbf{S}$；

（2）对任意 $j\in T_i$，若 $k\in T_j$，则称队 i 与队 k 之间进行了一场“二级比赛”，且在该场比赛中队 i 的分差为 $q_{ij}+q_{jk}$。（队 i 可与自身进行二级比赛，队 i 与队 j 之间可以进行多场二级比赛）。记 $s_i^{(2)}$ 为队 i 在所有可能的 l^2 场二级比赛中的分差之和，$\mathbf{S}^{(2)}=(s_1^{(2)},s_2^{(2)},\cdots,s_n^{(2)})^T$ 称为二级分差向量。对表中所示的比赛结果，求向量 $\mathbf{S}^{(2)}$；

（3）定义矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$，其中 $m_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ j\in T_i\\ 0, & 其他\end{cases}$，试给出由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(2)}$ 的公式，并说明 $\mathbf{M}^2$ 中各元素的含义。

（4）（附加题）类似地，对任意整数 r，可定义 r 级比赛和 r 级分差向量 $\mathbf{S}^{(r)}$，试给出由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的公式。