浙江大学《数学建模（H）》课程期末考试参考答案

一．令 $x_{ij}=\begin{cases}1 & 若仓库建于地点j \\ 0 & 其他\end{cases}$，数学规划为：

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ik}b_{jl}x_{ij}x_{kl}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

s.t. $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=1,\ldots\ldots,n$

$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,\ldots\ldots,n$

$x_{ij}=0或1$

二.

(1) 参与人：n 位市民，$c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n$

（纯）策略集：{参与维修（Y），视而不见（N）}

c_i 采用 Y，$c_j\ j\neq i$ 采用 N 是 Nash 均衡。c_i 由 Y 改为 N，其收益由 v-c 减为 0，$c_j\ j\neq i$ 由 N 改为 Y，其收益由 v 减为 v-c；

所有人均采用 N 不是 Nash 均衡，此时任一人改为 Y，其收益由 o 增加为 v-c；

所有人均采用 Y 不是 Nash 均衡，此时任一人改为 N，其收益由 v-c 增加为 v。

$k,k\geq 2$ 个人采用 Y，n-k 个人采用 N 不是 Nash 均衡，此时其中一人由 Y 改为 N，其收益由 v-c 增加为 v。

(2) c_n 采用 Y，期望收益为 v-c；c_n 采用 N，期望收益为

0·P{其余 n-1 人采用 N}+v·P{其余 n-1 人中至少有一人采用 Y}

$=v\cdot(1-q^{n-1}))=v(1-(1-p^{n-1}))$

(3) 在对称混合策略 Nash 均衡中，所有市民的混合策略均相同，则 c_{n-1} 的期望收益为 $p\cdot(v-c)+(1-p)(v\cdot(1-(1-p)^{n-1}))$。此时有 $v-c=v(1-(1-p)^{n-1})$，即 $p=1-(\frac{c}{v})^{\frac{1}{n-1}}$。当 n 增加时，p 减少，$\lim_{n\to\infty}p(n)=0$。

三.

(1) 一次允许的运输过程

左→右：$(V_L,V_R,左)\to(V_L',V_R',右)$。其中 $V_R\subseteq V_R'$，$|V_R|-|V_R'|\le k$，且 V_R 与 V_L' 均为图的独立集

右→左：$(V_L',V_R',右)\to(V_L'',V_R'',左)$。其中 $V_R''\subseteq V_R'$，$|V_R'|-|V_R''|\le k$，且 V_R'' 与 V_L'' 均为图的独立集。

上述问题要求给出从初始状态(V，Φ，左)到结束状态(Φ，V，右)的状态变化过程，且在这一变化过程中“左→右”与“右→左”的状态变化交替出现。

(2)设 V_{vc} 是 G 的最小顶点覆盖，$|V_{vc}|=\beta(G)$，$V\setminus V_{vc}$ 为图的独立集。

船容量为 $\beta(G)+1$ 时的可行运输方案如下，将 V_{vc} 中的顶点始终置于船上，将 $V\setminus V_{vc}$ 中的顶点逐个置于船上从左岸移至右岸。最后将 V_{vc} 中的顶点置于右岸。因此 $k^*\le\beta(G)+1$

若 $k^*<\beta(G)$，则船首次离开左岸时左岸的物品数至少为 $n-k^*>n-\beta(G)$，因此左岸物品不构成一独立集，矛盾。故 $k^*\ge\beta(G)$

(3) 由(iv)，存在 x_3 的划分 $x_3=x_{31}\cup x_{32}$，使得 $|x_{31}|\le|Y_1|$，$|x_{32}|\le|Y_2|$

由于 $|Y|\le k$，Y_1，Y_2 非空，故 $|Y\setminus Y_1|<k$，$|Y\setminus Y_2|<k$

（阶段 1，将 Y 置于船上，Y_1 留于右岸）

（V，Φ，左）→（X，Y，右）→（$X\cup(Y\setminus Y_1)$，Y_1，左） 2次

（阶段2，将X_1逐个运至右岸）（记$X_1=\{x_1\ldots\ldots x_l\}$）

（$X\cup(Y\setminus Y_1)$，Y_1，左）→（$X\setminus\{x_1\}$，$Y_1\cup(Y\setminus Y_1)\cup\{x_1\}$，右）→（$X\setminus\{x_1\}\cup(Y\setminus Y_1)$，$Y_1\cup\{x_1\}$，左）→⋯→（$X\setminus X_1$，$Y_1\cup X_1\cup(Y\setminus Y_1)$，右）→（$X\setminus X_1\cup Y\setminus Y_1$，$Y_1\cup X_1$，左） $2|X_1|$次

（阶段3，将X_3分两次运至右岸）

（$X\setminus X_1\cup Y\setminus Y_1$，$Y_1\cup X_1$，左）$\xrightarrow{(Y\setminus Y_1\cup X_{31})}$（$X\setminus X_1\setminus X_{31}$，$Y_1\cup X_1\cup(Y\setminus Y_1\cup X_{31})$，右）$\xrightarrow{Y}$（$X\setminus X_1\setminus X_{31}\cup Y$，$X_1\cup X_{31}$，左）$\xrightarrow{(Y\setminus Y_2\cup X_{32})}$（$X\setminus X_1\setminus X_{31}\setminus X_{32}\cup Y_2$，$X_1\cup X_{31}\cup Y\setminus Y_2\cup X_{32}$，右）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2}$（$X\setminus(X_1\cup X_3)\setminus Y$，$X_1\cup X_3$，左） 至多4次

（阶段4，将X_2逐个运至右岸）（记$X_2=\{x_1'\ldots\ldots x_l'\}$）

（$X\setminus(X_1\cup X_3)\cup Y$，$X_1\cup X_3$，左）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}}$（$X\setminus(X_1\cup X_3)\cup Y_2\setminus\{x_1'\}$，$X_1\cup X_3\cup Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}$，右）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2}$（$X_2\cup Y_2\setminus\{x_1'\}\cup Y\setminus Y_2$，$X_1\cup X_3\cup\{x_1'\}$，左）→⋯→（$Y_2$，$X_1\cup X_2\cup X_3\cup Y\setminus Y_2$，右）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2}$（$Y_2\cup(Y_1\setminus Y_2)$，$X$，左） $2|X_2|$次

（阶段5，将Y运至右岸）

（Y，X，左）→（Φ，V，右） 1次

由于$|V|=|X|+|Y|\ge|X_1|+|X_2|+|X_3|+1$，总运输次数为:

$$2+2|X_1|+4+2|X_2|+1\le 2(|V|-|X_3|)+5$$

若$|X_3|\ge 2$，则次数不超过$2|V|+1$次。若$|X_3|=0$，则阶段2最后一次运输和阶段4的第一次运输为（$X\setminus X_1$，$Y_1\cup X_1\cup(Y\setminus Y_1)$，右）$\xrightarrow{Y}$（$X\setminus X_1\cup Y$，$X_1$，左）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}}$（$X\setminus X_1\cup Y_2\setminus\{x_1'\}$，$X_1\cup Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}$，右）

由此阶段 3 的 4 次运输均可删去。若$|X_3|=1$，则阶段 2 最后一次运输和阶段 3 的运输为（$X\setminus X_1$，$Y_1 \cup X_1 \cup (Y\setminus Y_1)$，右）$\xrightarrow{Y}$（$X\setminus X_1 \cup Y$，$X_1$，左）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2 \cup X_3}$（$X_2 \cup Y_2$，$X_1 \cup Y\setminus Y_2 \cup X_3$，右）$\longrightarrow$（$X_2 \cup Y$，$X_1 \cup X_3$，左）

由此阶段 3 只需 2 次运输，对以上两种情形，仍有次数不超过$2|V|+1$次。

四.

(1)时刻 t 年龄在$[r, r+dr)$内的人数为$p(r,t)dr$，至时刻$t+dt$，这部分人年龄在$[r+dt, r+dr+dt)$之间，期间死亡人数为$\mu(r,t)p(r,t)drdt$。

故$p(r,t)dr - p(r+dt,t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$

$(p(r+dt,t+dt)-p(r,t+dt))dr + (p(r,t+dt)-p(r,t))dr = -\mu(r,t)p(r,t)drdt$

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t)$$

(2) $n_{jm}(k+1) = \min\{n_{am}(k), n_{af}(k)\} \cdot \frac{b}{2}$

$n_{jf}(k+1) = \min\{n_{am}(k), n_{af}(k)\} \cdot \frac{b}{2}$

$n_{am}(k+1) = p_j n_{jm}(k) + p_a n_{am}(k)$

$n_{af}(k+1) = p_j n_{jf}(k) + p_a n_{af}(k)$

记$N_k = (n_{jm}(k), n_{jf}(k), n_{am}(k), n_{af}(k))^T$，则

当$n_{am} \le n_{af}$时，$N_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ p_j & 0 & p_a & 0 \\ 0 & p_j & 0 & p_a \end{pmatrix} N_k$，

当 $n_{am} > n_{af}$ 时， $N_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ p_j & 0 & p_a & 0 \\ 0 & p_j & 0 & p_a \end{pmatrix} N_k$

(3) $a_{k,n} = \sum_{s\geq 0} a_{s,n-1} \cdot \sum_{t_1+t_2+\dots\dots+t_s= k} p_{t_1} p_{t_2} \dots\dots p_{t_s}$

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k\geq 0} a_{k,n} x^k = \sum_{k\geq 0}\sum_{s\geq 0} a_{s,n-1} \sum_{t_1+t_2+\dots\dots+t_s=k} p_{t_1} p_{t_2} \dots\dots p_{t_s} x^k \\
&= \sum_{s\geq 0} a_{s,n-1} \sum_{k\geq 0} \sum_{t_1+t_2+\dots\dots+t_s=k} p_{t_1} x^{t_1} \cdot p_{t_2} x^{t_2} \dots\dots p_{t_s} x^{t_s} \\
&= \sum_{s\geq 0} a_{s,n-1} (p_0 x^0 + p_1 x + \dots\dots + p_N x^N + \quad)^s \\
&= \sum_{s\geq 0} a_{s,n-1} (f(x))^s = f_{n-1}(f(x))
\end{aligned}
$$