浙江大学2013—2014学年春夏学期

《 数学建模（H）》课程期末考试试卷

课程号：061R0200，开课学院：数学系

考试试卷：√A卷、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期：2014年6月30日,考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：_________学号：_________所属院系：_________

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、（15分）考虑下面的设施选址问题。现有n个居民小区需提供某项服务，有m处地点可用于开设服务点。在地点i开设服务点所需开设费用为f_i，$i=1,\cdots,m$。设置在地点i的服务点为小区j提供服务所需的运营费用为c_{ij}，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$。现需选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小。试写出该问题的数学规划。

二、（20 分）英国生物学家 Ronald Ross 因发现蚊子是疟疾的传播媒介等贡献而获得 1902 年的诺贝尔生理与医学奖。他曾尝试建立疟疾在人和蚊子之间传播的数学模型。假设某区域在一段时间内人的数量 N 与蚊子的数量 n 保持不变。在时刻 t，感染疟疾的人和蚊子数量分别为 $I(t)$ 和 $i(t)$。在 dt 时间内，有 $aI(t)dt$ 已感染疟疾的人康复，$mi(t)dt$ 已感染疟疾的蚊子死亡。在 dt 时间内，每只蚊子会叮咬 bdt 个人。发生叮咬时，从已感染疟疾的人传染给未感染疟疾的蚊子的概率为 p，从已感染疟疾的蚊子传染给未感染疟疾的人的概率为 p'。

（1）试建立 $I(t)$ 和 $i(t)$ 满足的微分方程；

（2）求上述微分方程的平衡点，并说明其对疟疾防控有何指导意义。

三、（25+10 分）某委员会将就一草案进行表决，委员会组成人员中有k位支持，m位反对。每位委员可以选择到现场按本人意愿投票，也可以选择弃权。若投支持票人数多于投反对票人数，则该草案获得通过；若投反对票人数多于投支持票人数，则该草案被否决；若投支持票人数与投反对票人数相等，则该草案延期再议。对支持该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为2、1、0；对反对该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为0、1、2。到现场投票的委员另需付出的投票成本为$c, 0<c<1$。

（1）试分别求$k=m$和$k<m$时所有的纯策略 Nash 均衡；

（2）设k □ m。考虑下面的局势：反对该草案的委员中有k位到现场投票，$m-k$位弃权；支持该草案的每一位委员均以概率p到现场投票。试分别求该局势下反对该草案的委员中到现场投票者和弃权者的期望收益；以及在其它$k+m-1$位委员策略不变时，其中一位反对该草案的委员由到现场投票改为弃权，或由弃权改为到现场投票时他的期望收益；

（3）（**附加题**）求p的值，使（2）中所述局势为一混合策略 Nash 均衡。

四、（40+10 分）考虑下面的联赛赛程编制问题。现有 n 支球队（$n=2m, m\in\mathbf{N}$）进行主客场单循环赛。比赛共分 $n-1$ 轮，在每一轮中，每支球队均和某支球队进行一场比赛。在所有 $n-1$ 轮中，每支球队和其他 $n-1$ 支球队中的任一支恰好交手一次。**对阵方案**确定了每轮中每场比赛的交手双方。如图 1 给出了 4 支球队的一种对阵方案。在对阵方案基础上安排主客场可得到一张赛程。对每轮中的每场比赛，确定交手两队中其中一队为主场，另一队为客场。若某队在连续两轮中均为主场或均为客场，则称该队在这两轮间出现一次 **break**。球队的 break 数为在所有连续两轮间出现的 break 总次数，赛程的 break 数为所有球队 break 数之和。如图 2 为在图 1 对阵方案基础上给出的赛程，队 1，队 4 的 break 数均为 2，队 2，队 3 的 break 数均为 1。赛程 break 数为 6。

第 1 轮	第 2 轮	第 3 轮
1-2	1-3	1-4
3-4	2-4	2-3

图 1：对阵方案

	1 轮	2 轮	3 轮
队 1	+2	+3	+4
队 2	−1	+4	+3
队 3	+4	−1	−2
队 4	−3	−2	−1

图 2：赛程

（+为主场，－为客场）

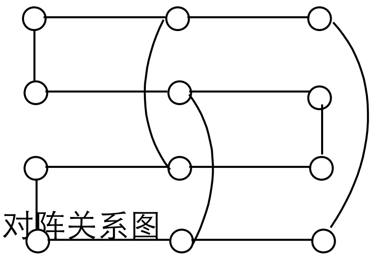

图 3：对阵关系图

（1）可用由 $+,-$ 组成的长度为 $n-1$ 的字符串表示赛程中某支球队的主客场情况，如图 2 所示的赛程中队 1 的字符串为+++。试通过分析字符串的性质证明任意赛程的 break 数至少为 $n-2$；

（2）考虑有 $n-1$ 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 的完全图 K_{n-1}，其中顶点 v_i 代表球队 i，$i=1,\cdots,n-1$。令

$$E_i=\{v_{i-k}v_{i+k} \mid k=1,\cdots,m-1\}, i=1,\cdots,n-1.$$

这里 $+$ 与 $-$ 均为模 $n-1$ 加法。证明：存在一对阵方案，使得 E_i 中每条边的两个端点对应的球队在第 i 轮恰有一场比赛；对任意 $i=1,\cdots,n-2$，可通过对 $E_i \cup E_{i+1}$ 中的边定向，使之成为 K_{n-1} 的一条有向 Hamilton 路；

（3）在给定的对阵方案基础上安排主客场，使赛程的 break 数最少的问题称为 **break 最小化问题**。为此，构造**对阵关系图** $G=(V,E)$，其中 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_i$，$V_i=\{v_{i1}, \ldots, v_{i,n-1}\}$。顶点 v_{ij} 表示球队 i 在第 j 轮的比赛。边集 $E=E_t \cup E_g$，其中 $E_t=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n-2}\{v_{ij}v_{i,j+1}\}$，$v_{i_1 j}v_{i_2 j}\in E_g$ 当且仅当在第 j 轮球队 i_1 与球队 i_2 交手。图 3 为对应于图 1 对阵方案的对阵关系图。证明：对任一对阵方案，总存在一种主客场安排方法，使得对任一给定的 j，任意球队在第 j 轮和第 $j+1$ 轮间均不会出现 break（提示：考虑子图 $G(V_j \cup V_{j+1})$）；

（4）试对对阵关系图中的边赋予适当的权，使得 break 最小化问题等价于对阵关系图的最大割问题；

（5）（**附加题**）给出一 6 支球队 break 数为 4 的赛程（答案填在下一页的表格中）。（提示：利用（2）的结果）

	1 轮	2 轮	3 轮	4 轮	5 轮
队 1					
队 2					
队 3					
队 4					
队 5					
队 6					