浙江大学2014－2015学年秋冬学期

《　数学建模　》课程期末考试试卷

课程号：06186290，开课学院：数学系

考试试卷：√A卷、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期：_2015_年_1_月_26_日,考试时间：_120_分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：_________

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、（20分）记 t 时刻某地区男性人口数和女性人口数分别为 $m(t)$ 和 $f(t)$。设男性和女性死亡率分别为常数 a_m 和 a_f，单位时间男性和女性出生数分别为 $b_m B(m,f)$ 和 $b_f B(m,f)$，其中 b_m，b_f 为常数，$B(m,f)$ 为 m 和 f 的某个函数。

（1）试给出反映男性人口数和女性人口数变化规律的微分方程（组）；

（2）试给出 $a_m = a_f$ 且 $b_m = b_f$ 时，男女人口数之差或比值的发展趋势；

（3）试给出函数 $B(m,f)$ 的某个较为合理的具体形式，并说明你的理由。

二、（20 分）（1）3 位科学家共同研究一保密项目，规定当且仅当半数以上科学家到场时才能打开存有文件的保险柜。为此需要至少为保险柜安装多少把不同的锁，并且给每位科学家配发多少把钥匙才能实现上述要求。若科学家人数为 11，锁和钥匙的数量又为多少？（假设一把钥匙只能开一把锁，所有锁均开启时保险柜才能打开，同一把锁可配发多把钥匙。）

（2）设一保险柜的开启密码为整数 S，规定当且仅当与之相关的 n 个人中有 k 个或以上同意并提供帮助时保险柜方可开启。为此选择素数 $p>S$，随机选择 $k-1$ 个小于 p 的整数 $b_1,\cdots,b_{k-1}$ 和 n 个互不相同的小于 p 的整数 $c_1,\cdots,c_n$。计算

$$P_i \equiv S+b_1c_i+b_2c_i^{2}+\cdots+b_{k-1}c_i^{k-1} \pmod p,\quad i=1,\cdots,n,$$

并将数 c_i 和 P_i 告知第 i 人。试说明上述方案的可行性。

（提示：可应用以下定理：设矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}\in\mathbb{Z}$，整数 $b_i\in\mathbb{Z}$，$i=1,\cdots,n$，p 为素数，则线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \equiv b_i \pmod p,\quad i=1,\cdots,n$$

有模 p 意义下的唯一解当且仅当 $|A|\not\equiv 0 \pmod p$。）

三、（30 分）考虑可应用于编码和计算生物学中的**最近邻字符串问题**（Closest-String Problem）：给定两个由 m 个英文字母组成的字符串 $\Phi=\phi_1\phi_2\cdots\phi_m$ 和 $\Gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m$。定义它们的**距离** $d(\Phi,\Gamma)$ 为两个字符串对应位置字母不相同的位置数量，即 $d(\Phi,\Gamma)=\sum_{i=1}^{m}\delta(\phi_i,\gamma_i)$，其中 $\delta(\phi_i,\gamma_i)=\begin{cases}1, & \phi_i\neq\gamma_i,\\ 0, & \phi_i=\gamma_i.\end{cases}$。字符串 Φ 与 n 个字符串 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$ 的**距离**定义为 Φ 与每个字符串距离的最大值，即 $D(\Phi,\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\})=\max\limits_{1\le j\le n}d(\Phi,\Phi_j)$。给定 n 个字符串 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$，需求字符串 Φ，使得 $D(\Phi,\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\})$ 最小。

（1）定义 $V_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\{\phi_{ji}\}$，$i=1,\cdots,m$，这里 ϕ_{ji} 是字符串 Φ_j 的第 i 个字符。证明必存在一最优解 $\Phi_0=\phi_{01}\phi_{02}\cdots\phi_{0m}$，使得 $\phi_{0i}\in V_i, i=1,\cdots,m$；

（2）定义 $v_{\phi,i}=\begin{cases}1, & \text{若}\Phi_0\text{第}i\text{个字符为}\phi\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$，试利用 $v_{\phi,i}$ 写出 $d(\Phi_0,\Phi_j)$ 的表达式;

（3）试写出求解最近邻字符串问题的整数线性规划。

四、（30+20 分）**基尼系数**（Gini Index）是经济学中度量经济不平等的一个主要指标。假设家庭收入 X 服从离散分布，其分布律为 $P(X=y_i)=\dfrac{1}{n}$，$i=1,\cdots,n$，其中 $a \le y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n \le b$。记 L_i 为收入不超过 y_i 的家庭的总收入占整体家庭总收入的比例。约定 $L_0=0$，在 Oxy 平面上连接点 $\left(\dfrac{i}{n},L_i\right)$，$i=0,1,\cdots,n$ 的分段线性函数 L 称为**洛伦兹曲线**（Lorenz Curve）。L 与线段 $y=x, 0 \le x \le 1$ 围成的区域记为 S。基尼系数 G 定义为 S 的面积 A 的两倍。

（1）试给出 G 的表达式，并简要说明 G 如何反映家庭收入差异程度；

（2）现有 n 个单位，单位 i 的员工数为 v_i，$i=1,\cdots,n$。现要从所有 $V=\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ 个人中选择 S 个组成一委员会，其中来自单位 i 的人数为 s_i，$i=1,\cdots,n$。委员会中各单位人数应尽可能与该单位总人数相适应。试将基尼系数的思想移植到该问题上，给出某个分配方案基尼系数的定义，并分别计算以下实例两种不同分配方案的基尼系数值。

单位		1	2	3	总人数
员工数		45	30	25	100
委员会人数	方案 1	3	1	1	5
	方案 2	2	2	1	5

（3）（**附加题**）记 $q_i = v_i \dfrac{S}{V}$ 为单位 i 的配额，现欲寻找一满足 $\lfloor q_i \rfloor \le s_i \le \lceil q_i \rceil$，$i=1,\cdots,n$，且基尼系数最小的方案。试给出 $n=2$ 时的解。当 n 为一般值时有何求解思路。

（4）（**附加题**）若家庭收入服从 $[a,b]$ 上的连续分布，其分布函数和密度函数分别为 $F(y)$ 和 $f(y)$，试给出洛伦兹曲线和基尼系数的表达式。