浙江大学2012—2013学年春夏学期

《数学建模（H）》课程期末考试试卷

课程号：061R0200，开课学院：理学院

考试试卷：√A卷、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期：2013年6月30日,考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：__________

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、（15分）现有n个物资储备仓库需分别建于n个地点。已知在地点j建造仓库i所需费用为c_{ij}，从地点j到地点l的单位运输费用为b_{jl}，从仓库i到仓库k的运输量为$a_{ik}, i,j,k,l=1,\cdots,n$。现欲给出一建设方案，使得总费用最少。试写出该问题的数学规划。

二、（25 分）城市某处公共设施发生损坏，n 位市民同时发现了这一情况。每位市民有两种策略，参与维修和视而不见。由于损坏程度较轻，只要有一人参与维修设施即可复原。设施复原对每位市民带来的收益均为 v，而参与维修的市民均付出代价 c。设 $v > c > 0$。

（1）试建立该问题的博弈模型，并求出所有纯策略意义下的 Nash 均衡。

（2）用 (p,q) 表示如下的混合策略：以概率 p 参与维修，以概率 $q = 1 - p$ 视而不见。试分别求出第 $1,2,\mathrm{L}\ ,n-1$ 位市民均采用策略 (p,q)，第 n 位市民采用纯策略“参与维修”和纯策略“视而不见”时他的期望收益。

（3）称一 Nash 均衡为**对称**的，若在该 Nash 均衡中，所有参与者采用的策略（纯策略或混合策略）均相同。求该博弈所有混合策略意义下的对称 Nash 均衡，并说明其结果反映了什么样的社会现象。

三、（30 分+10 分）中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题。现有n件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸。两件不同的物品之间可能存在排斥性，即它们不能同时位于河的一侧，除非此时船也在河的这一侧。用图$G=(V,E)$表示物品之间的排斥性。V中每个顶点表示一件物品，两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的。所有物品和船的一种状态可用三元组(V_L,V_R,b)表示，其中V_L,V_R分别代表位于河左岸和右岸的物品集，且有$V_L\cup V_R=V, V_L\cap V_R=\emptyset$，$b\in\{$左右$\}$表示船所在的位置。船从左岸到达右岸，或从右岸到达左岸的过程称为一次运输。每次运输时船至多装载k件物品，k称为船的容量。现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案，将所有物品从左岸运到右岸。

（1）请用图论语言表示一次允许的运输过程导致的状态变化，进而完整描述上述问题。

（2）记$\beta(G)$为G的最小顶点覆盖所包含顶点的数目，k^*为G的 **Alcuin 数**，即存在可行运输方案时船容量的最小值，证明$\beta(G)\le k^*\le\beta(G)+1$。

（3）设X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2为V的子集，$X=X_1\cup X_2\cup X_3$，$Y=V\setminus X$，这些子集满足以下条件：

（ⅰ）X_1,X_2,X_3两两不交，X为G的独立集；

（ⅱ）$|Y|\le k$，Y_1,Y_2为Y的非空子集；

（ⅲ）$X_1\cup Y_1$和$X_2\cup Y_2$为G的独立集；

（ⅳ）$|Y_1|+|Y_2|\ge|X_3|$

试设计一可行运输方案，（以下为附加题）并证明其运输次数不超过$2|V|+1$。

四、（30 分+10 分）人口和种群数量是数学生物学的重要课题。除著名的 Malthus 模型和 Logistics 模型外，学者从不同角度，运用不同数学工具给出了众多研究成果。试回答以下问题:

（1）记**人口分布函数** $F(r,t)$ 为 t 时刻年龄小于 r 的人口数，**人口密度函数** $p(r,t)=\frac{\partial F}{\partial r}$， $\mu(r,t)$ 为 t 时刻年龄为 r 的人的死亡率。试写出反映年龄在 $[r,r+dr)$ 内的人口数自 t 时刻到 $t+dt$ 时刻变化情况的等式，进而给出 $p(r,t)$ 所满足的微分方程。

（2）某生物生长经过幼年、成年两个阶段。幼年个体（不论雌雄）经过一个时段进入成年，存活的概率为 p_j。成年个体经过一个时段仍存活的概率为 p_a。该种生物实行一雌一雄单配偶制，一个时段一对成年个体组成的配偶可产生幼年个体数量为 b，其中雌雄个体各占一半。记时段 k 某群落中该种生物幼年雄性、幼年雌性、成年雄性、成年雌性的个体数量分别为 $n_{jm}(k), n_{jf}(k), n_{am}(k),\ n_{af}(k)$ 试给出从时段 k 到时段 $k+1$ 该生物各类型个体数量应满足的关系，并将上述关系用矩阵表示。

（3）设某生物单个个体繁衍 l 个后代的概率为 $p_l, l=0,1,\cdots,N$，$\sum_{l=0}^{N} p_l=1$。定义多项式函数 $f(x)=\sum_{l=0}^{N} p_l x^l$。设某群落中该生物第 0 代仅有 1 个个体，历经 n 代繁衍，第 n 代有 k 个个体的概率为 $a_{k,n}$，记 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}x^k$。试写出 $a_{k,n}$ 满足的递推关系，（以下为附加题）并证明 $f_n(x)=f_{n-1}(f(x))$。