Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и физики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №1

Выполнил:

Студент: Золин Иван
Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть дана вещественная матрица (1.1)

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

и неотрицательное число

$$\Delta \in [0, \min\{a_{ij}, i, j = \overline{1,2}\}] \tag{2}$$

Рассмотрим две матрицы радиусов:

$$\mathrm{rad}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{rad}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \Delta \cdot A_i^{(1,1)}, a_{11} + \Delta \cdot A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \Delta \cdot A_i^{(1,2)}, a_{12} + \Delta \cdot A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \Delta \cdot A_i^{(2,1)}, a_{21} + \Delta \cdot A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \Delta \cdot A_i^{(2,2)}, a_{22} + \Delta \cdot A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \tag{4}$$

$i = \overline{1,2}$ Необходимо найти $\min\{\Delta | 0 \in \det A\}$. В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2 Теория

Укажем основные арифметические операции для интервалов:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \tag{6}$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \tag{7}$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \tag{8}$$

$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = [\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)] \tag{9}$$

$$\mathrm{mid}[a, b] = \frac{1}{2}(a + b) \tag{10}$$

$$\mathrm{wid}[a, b] = (b - a) \tag{11}$$

$$\mathrm{rad}[a, b] = \frac{1}{2}(b - a) \tag{12}$$

Пусть $\mathrm{mid}A = \{a_{ij}\}_{i,j \in N}$ – точечная вещественная матрица середин, $radA = \{r_{ij}\}_{i,j \in N}$ – точечная вещественная матрица радиусов. Операцией midrad назовем следующую функцию:

$$\mathrm{midrad}(\mathrm{mid}A, \mathrm{rad}A) = \{[\mathrm{mid}A_{ij} - \mathrm{rad}A_{ij}], [\mathrm{mid}A_{ij} + \mathrm{rad}A_{ij}]\}_{i,j \in N} \tag{13}$$

Результатом операции является интервальная матрица.

3 Реализация

3.1 Описание

Данная лабораторная работа была выполнена с использованием языка программирования Python 3.10 в среде разработки PyCharm. Дополнительно был реализован класс Interval, описывающий интервальную арифметику для удобства написания кода.

Отчёт подготовлен с помощью языка LaTEX в редакторе TexStudio.

3.2 Описание алгоритма

1. Проверка вхождения нуля в интервал $\det A$ при максимально допустимом значении.
2. Если $0 \notin \det A$, то данная задача не имеет решения. В противном случае переходим к шагу 3.
3. Если $\det A$ представляет собой симметричныq интервал, то минимальное значение Δ устанавливается равным 0, так как $0 = \mathrm{mid}[a, b]$.
4. Рассмотрим весь допустимый интервал возможных значений Δ. С использованием метода половинного деления будем сужать этот интервал до тех пор, пока не достигнем заданной точности $\varepsilon = 10^{-14}$.

3.3 Ссылка на репозиторий

https://github.com/IMZolin/Interval-analysis - GitHub репозиторий

4 Результат

4.1 Первый случай матрицы радиусов

В соответствии с указанным алгоритмом мы получаем начальное значение $\Delta = 0.95$. Затем мы применяем операцию midrad к матрицам mid$A$ и radA_1, что приводит к получению интервальной матрицы midA_1:

$$\mathrm{mid}A_1 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & [0.05, 1.95] \\ [0, 1.9] & [0.05, 1.95] \end{pmatrix} \tag{14}$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_1$:

$$\det A_1 = [-3.7, 3.9] \tag{15}$$

Отсюда видно, что $0 \in \det 1$, а также mid$A_1 \neq 0$ значит, переходим к пункту 4 описанного алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.025$. В таком случае $\det A_1 = [2.22010^{-16}, 0.2]$. Левый конец $\det A_1$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

4.2 Второй случай матрицы радиусов

Теперь применим операцию midrad к матрицам midA_1 и radA_2 и получим:

$$\mathrm{mid}A_2 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & 1 \\ [0, 1.9] & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_2$:

$$\det A_2 = [-1.8, 2] \tag{17}$$

Вновь видим, что $0 \in \det A_2$, а также mid $A_2 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.05$. В таком случае $\det A_2 = [1.110 \cdot 10^{-16}, 0.2]$. Левый конец $\det A_2$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

5 Выводы

Данные матрицы A_1, A_2 являются неособенной при $\Delta < 0.05$ и $\Delta \leq 0.025$. $\Delta_1 > \Delta_2$, так как в 1-й задаче меньше интервальных элементов (2 интервала), чем во второй задаче (4 интервала). При вычислении определителя происходит больше арифметических операций, при этом интервалы сужаться не могут, и поэтому детерминант быстрее начинает содержать ноль.

Список литературы

[1] Histogram. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram

[2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений.//Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.

[3] Box plot. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot

[4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.