

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №2

Выполнил:

Студент: Золин Иван

Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Распознающий функционал	2
2.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части	2
2.3	Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы	3
2.4	Оценки варибельности решения	3
3	Реализация	3
3.1	Описание	3
3.2	Ссылка на репозиторий	3
4	Результат	3
4.1	Максимум распознающего функционала	3
4.2	Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части	4
4.2.1	Равномерное уширение	4
4.2.2	Неравномерное уширение	4
4.3	Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части	5
5	Выводы	6
	Литература	7

1 Постановка задачи

Имеем ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [2, 4] * x_1 + [4, 6] * x_2 = [5, 9] \\ 3 * x_1 + [-6, -4] * x_2 = [-1, 1] \\ [0.5, 1.5] * x_1 = [1, 3] \\ [0.5, 1.5] * x_2 = [0, 2] \end{cases}$$

Необходимо найти решения ЛЗД. Для этого нужно

- исследовать разрешимость ЛЗД (найти максимум распознающего функционала)
- коррекция ЛЗД
 - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части (равномерное/неравномерное)
 - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим функционалом называется функция

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (1)$$

Пусть

$$T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad (2)$$

и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T \geq 0$, то $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ совместна и точка τ лежит в допусковом множестве решений.
- если $T > 0$ то $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность τ допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных - матрицы и правой части.
- если $T < 0$ то $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ несовместна.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части

Равномерное уширение правой части ИСЛАУ

Расширение вектора \mathbf{b} происходит путем его замены на вектор:

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^T \quad (3)$$

Тогда

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = T + K \quad (4)$$

Но Arg max Tol - не изменится (положение точки T)

Неравномерное уширение правой части ИСЛАУ

Если линейная задача о допусках с матрицей \mathbf{A} и вектором правой части \mathbf{b} первоначально не имела решений, то новая задача с той же матрицей \mathbf{A} и уширенным вектором

$$(\mathbf{b}_i + K \cdot v_i \cdot [-1, 1])_{i=1}^m \quad (5)$$

в правой части становится разрешимой при $K \geq |T_v|$, где

$$T_v = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left(\text{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\} \quad (6)$$

Значение Arg max Tol - изменится

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы

Общая схема равномерного метода заключается в том, что необходимо модифицировать матрицу \mathbf{A} за счет ее замены на $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, где \mathbf{E} состоит из $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$.
Причем значения точечных величин \mathbf{e}_{ij} удовлетворяют двум условиям:

$$0 \leq \mathbf{e}_{ij} \leq \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \tau = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad K > 0 \quad (8)$$

Если $K \geq |T|$, то тогда линейная задача о допусках с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = ([\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{e}_{ij}, \bar{\mathbf{a}}_{ij} + \bar{\mathbf{e}}_{ij}])$ и правой частью \mathbf{b} становится разрешимой.

2.4 Оценки вариабельности решения

Абсолютной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{A} \in \mathbf{A}} \text{cond } A \cdot \|\arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x)\| \frac{\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x)}{\|\mathbf{b}\|} \quad (9)$$

Относительной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{rve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{A} \in \mathbf{A}} \text{cond } A \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x) \quad (10)$$

3 Реализация

3.1 Описание

Данная лабораторная работа была выполнена с использованием языка программирования Python 3.10 в среде разработки Visual Studio Code. Используются библиотеки: numpy, intervalpy, matplotlib. Отчёт подготовлен с помощью языка LaTeX в редакторе TexStudio.

3.2 Ссылка на репозиторий

<https://github.com/IMZolin/Interval-analysis> - GitHub репозиторий

4 Результат

4.1 Максимум распознающего функционала

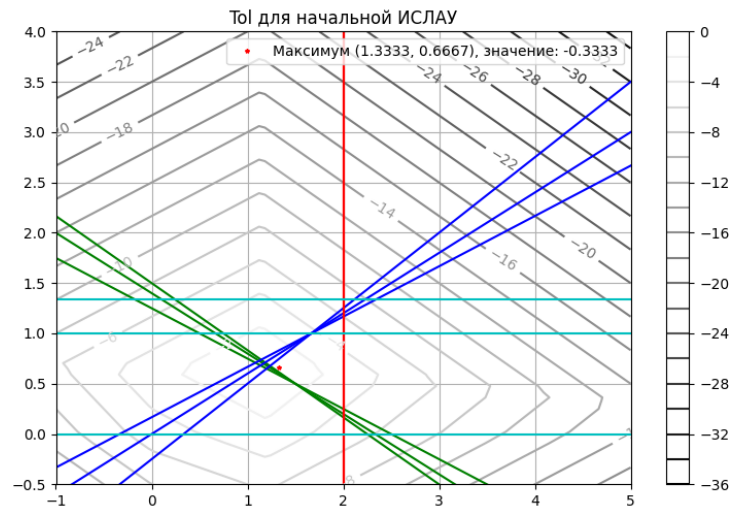


Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

Максимум со значением $T = -0.333$ расположен в точке $\tau = (1.333, 0.6667)$.

4.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части

4.2.1 Равномерное уширение

Положим $K = 1$. Получается максимум со значением $T = 0.6667$ расположен в точке $\tau = (1.333, 0.6667)$. При этом видим, что точка максимума осталась прежней.

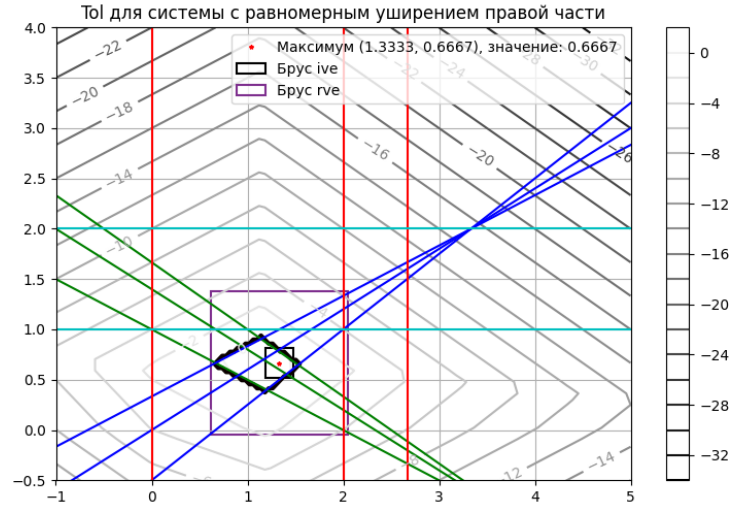


Рис. 2: Допусковое множество решений с равномерным уширением правой части

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \text{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \text{rve}$. Область обведенная черной линией - допустимое множество
 $\text{ive} : 0.1473502$ $\text{rve} : 0.72636348$

4.2.2 Неравномерное уширение

Выберем произвольный вектор $v = [0.5, 0.1, 1, 0.5]$ и постоянную $K = 3$. Получается максимум со значением $T = 0.724$ расположен в точке $\tau = (0.96, 0.576)$. При этом видим, что точка максимума сдвинулась.

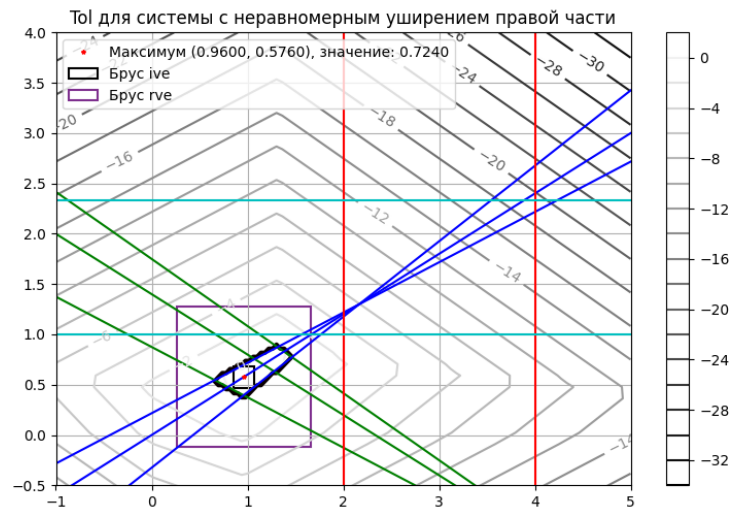


Рис. 3: Допусковое множество решений с неравномерным уширением правой части

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \text{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \text{rve}$. Область обведенная черной линией - допустовое множество
 $\text{ive} : 0.106272696$ $\text{rve} : 0.69755409$

4.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части

Для построения интервальной матрицы \mathbf{E} с уравновешанными интервальными элементами $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ выбираем такие \mathbf{e}_{ij} , что:

$$\begin{cases} 0 \leq \mathbf{e} \leq 1 = \text{rad}(\mathbf{a}_{11}), \text{rad}(\mathbf{a}_{12}), \text{rad}(\mathbf{a}_{22}) \\ 0 \leq \mathbf{e} \leq 0.5 = \text{rad}(\mathbf{a}_{31}), \text{rad}(\mathbf{a}_{42}) \\ 1.333 * \mathbf{e} + 0.666 * \mathbf{e} = K \geq |T| = 0.333 \end{cases} \Rightarrow 0.1666 \leq \mathbf{e} \leq 0.5$$

сформируем матрицу

$$E = \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] & [-0.4, 0.4] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & 0 \\ 0 & [-0.3, 0.3] \end{pmatrix} \quad (11)$$

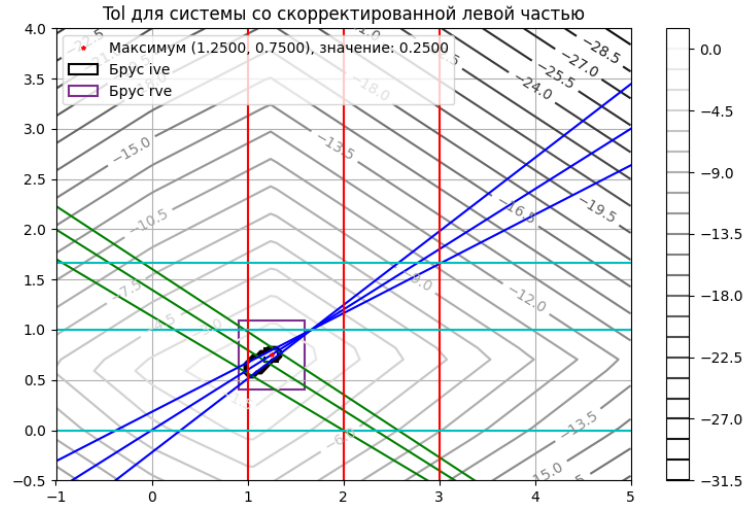


Рис. 4: Допустовое множество решений со скорректированной матрицей

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \text{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \text{rve}$. Область обведенная черной линией - допустовое множество
 $\text{ive} : 0.068321425$ $\text{rve} : 0.3444088$

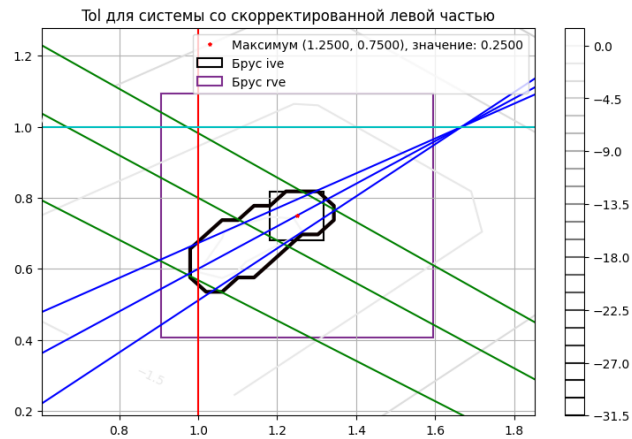


Рис. 5: Допусковое множество решений со скорректированной матрицей

5 Сравнение

Объект преобразования	argmax Tol	max Tol	Способ коррекции
Правая часть	(2.80, 1.40)	0.45	Увеличим правой части с коэффициентом $K=1.35$
Матрица	(3.29, 1.68)	0.10	Сужение матрицы с коэффициентом $K=1.35$
1-ая строка	(2.46, 1.23)	-0.73	Сведение элементов строки в точечные интервалы
2-ая строка	(3.40, 1.07)	-0.77	Сведение элементов строки в точечные интервалы
3-ая строка	(2.80, 1.40)	-0.73	Сведение элементов строки в точечные интервалы
4-ая строка	(2.80, 1.40)	-0.90	Сведение элементов строки в точечные интервалы

6 Выводы

1. После коррекции правой части равномерным уширением вектора \mathbf{b} безусловный максимум распознающего функционала Tol составляет 0.667 и находится в точке (1.333, 0.667). Заметим, что форма поверхности распознающего функционала Tol не претерпела изменений.
2. При неравномерном уширении видно, что форма поверхности и расположение безусловных максимумов распознающего функционала Tol до и после неравномерного уширения вектора \mathbf{b} не совпадают.
3. При сравнении этих коррекций можно утверждать, что неравномерное уширение приводит к меньшим значениям вариабельности по сравнению с равномерным уширением.
4. На нашем примере стоит отметить, что квадрат rve неэффективно аппроксимирует допустовое множество решений. В то время как квадрат ive практически полностью принадлежит Ξ_{tol} . Это обосновано хорошей обусловленностью матрицы ($\text{cond}(\text{mid}, \mathbf{A}) = 1.638$).

Список литературы

- [1] Histogram. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram>
- [2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. // Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.
- [3] Box plot. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot
- [4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.