

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Курсовая работа

тема "Метод Кравчика - касание параболы и окружности"
дисциплина "Интервальный анализ"

Выполнил:

Студент: Золин Иван

Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Внешнее множество решений	2
2.2	Метод Кравчика	2
3	Результаты	3
3.1	Для первого начально приближения $X^{(0)}$	3
3.2	Для второго начально приближения $X^{(1)}$	4
3.3	Изменение угла пересечения параболы и окружности	5
4	Вывод	6
	Литература	7

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_e)^2 + (x_2 - y_e)^2 - 1 = 0, & x_e = 1.22, y_e = 0 \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{pmatrix}$$

Необходимо найти корни данной системы точечных нелинейных уравнений, используя интервальный метод Кравчика.

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Внешним множеством решений называется объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \quad (1)$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика предназначен для уточнения двухсторонних границ решений систем уравнений, в общем случае нелинейных, заданных на некотором брус $\mathbf{X} \subset \mathbb{IR}$, вида

$$F(x) = 0, \quad \text{где } F(x) = \{F_1(x), \dots, F_n(x)\}^T, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

Также данный метод может быть использован для того, чтобы понять, что решений нет. Отображение $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \bar{x}) := \bar{x} - \Lambda * F(\bar{x}) - (I - \Lambda * \mathbf{L} * (\mathbf{X} - \bar{x})) \quad (3)$$

называется оператором Кравчика на \mathbb{ID} относительно точки \bar{x} .

Итерационная схема данного метода выглядит следующим образом

$$\mathbf{X}^{k+1} \leftarrow \mathbf{X}^k \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^k, \bar{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x^k \in \mathbf{X}^k \quad (4)$$

Сходимость данного метода гарантирована при выполнении условия

$$\rho(I - \Lambda * \mathbf{L}) < 1 - \text{спектральный радиус меньше единицы} \quad (5)$$

Частным случаем данного метода является линейный метод Кравчика, итерационная схема которого выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\Lambda * \mathbf{b} + (I - \Lambda * \mathbf{A}) * \mathbf{x}^k) \cap \mathbf{x}^k \quad (6)$$

\mathbf{A} в данном случае является интервальной матрицей коэффициентов соответствующей ИСЛАУ, а \mathbf{b} - вектором свободных членов.

В случае линейности системы и выполнения условия $\eta = \|I - \Lambda * \mathbf{A}\|_{\infty} \leq 1$ в качестве начального приближения можно взять брус

$$\mathbf{x}^0 = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^T, \quad \text{где } \theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_{\infty}}{1 - \eta} \quad (7)$$

3 Результаты

3.1 Для первого начально приближения $X^{(0)}$

$$X^{(0)} = \begin{cases} [0.8, 1.7] \\ [0.35, 1.05] \end{cases}$$

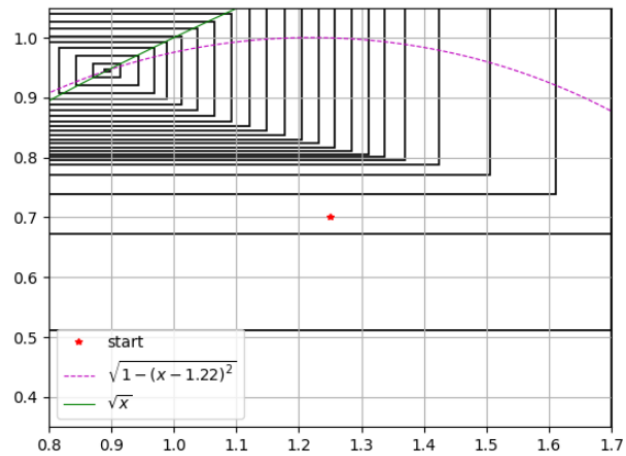


Рис. 1: Метод Кравчика - пересечение параболы и окружности

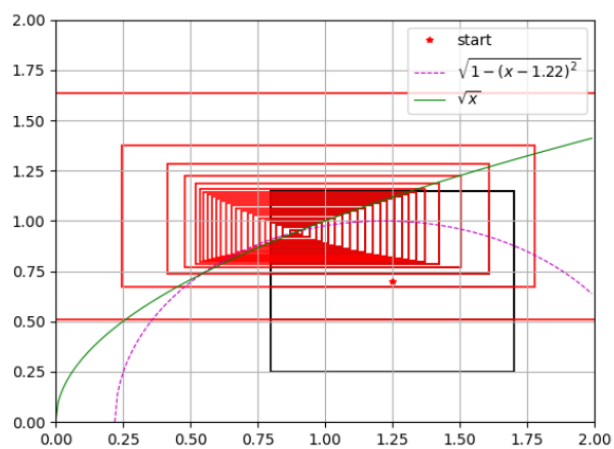


Рис. 2: Оператор Кравчика
Количество итераций: 37

3.2 Для второго начально приближения $X^{(1)}$

$$X^{(1)} = \begin{cases} [0.88, 1.28] \\ [0.75, 1.25] \end{cases}$$

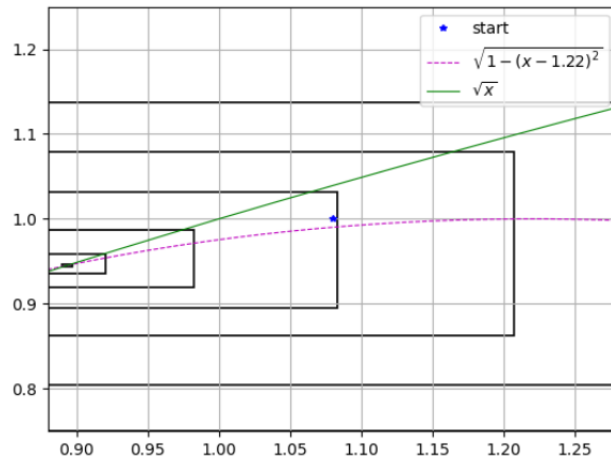
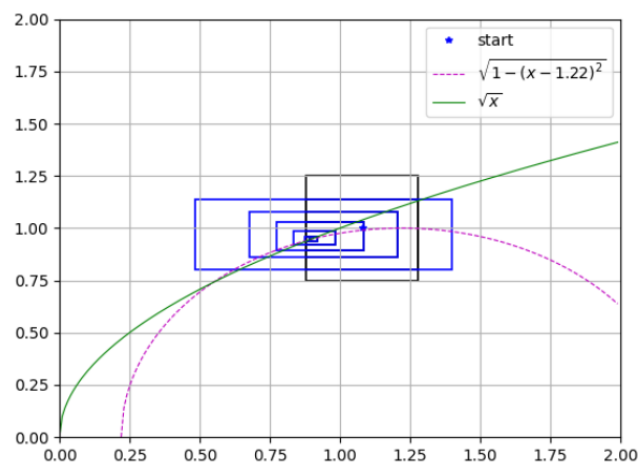


Рис. 3: Метод Кравчика - пересечения параболы и окружности

Рис. 4: Оператор Кравчика
Количество итераций: 9

3.3 Изменение угла пересечения параболы и окружности

Меняем угол пересечения между параболой и окружностью за счёт изменения по x координаты центра окружности.

Начальное приближение:

$$X^{(2)} = \begin{cases} [0.8, 1.4] \\ [0.7, 1.3] \end{cases}$$

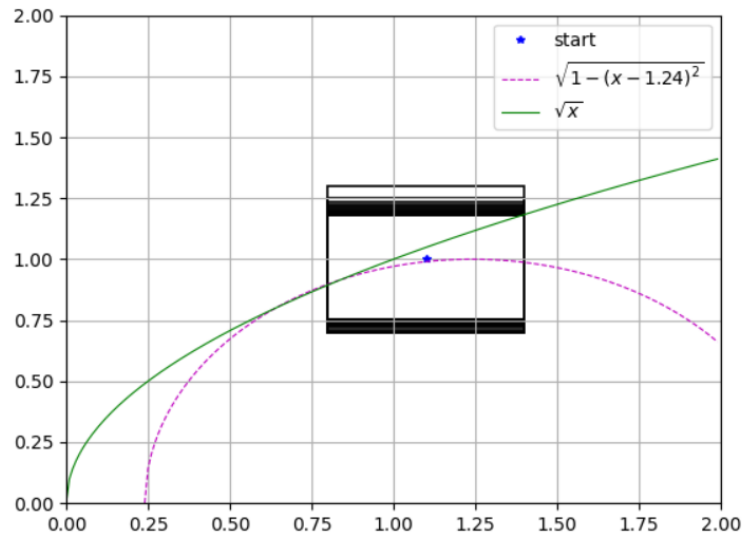


Рис. 5: Оператор Кравчика

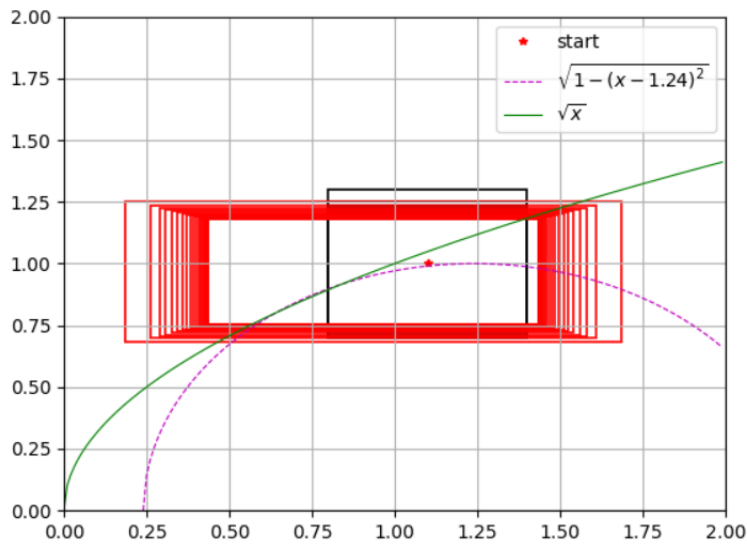


Рис. 6: Оператор Кравчика

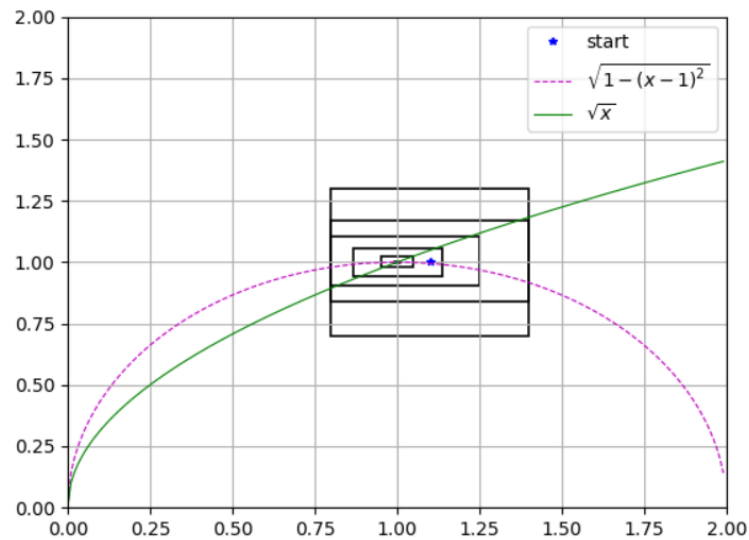


Рис. 7: Метод Кравчика

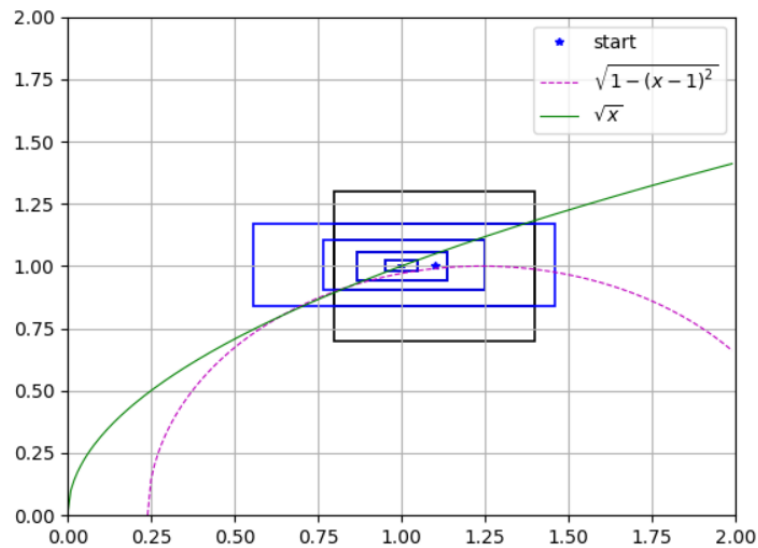


Рис. 8: Оператор Кравчика

4 Вывод

1. Полученные результаты показывают неэффективность интервального метода Кравчика для решения системы нелинейных уравнений, когда графики пересекаются под малым углом. И сходится ли метод к решению системы зависит от начального приближения.
2. Точное решение системы $x = 0.89325, y = 0.94515$ совпадает с полученным результатом с начальным приближением $\mathbf{X}^{(0)}$ и $\mathbf{X}^{(1)}$. Таким образом, метод успешно находит корни системы нелинейных уравнений.
3. Скорость сходимости метода также определяется выбранным начальным приближением.
4. Чем меньше угол пересечения между окружностью и параболой, тем хуже работает метод Кравчика.

Список литературы

- [1] Histogram. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram>
- [2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. // Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.
- [3] Box plot. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot
- [4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.