

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №1

Выполнил:

Студент: Золин Иван

Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	4
2	Теория	4
3	Реализация	4
3.1	Описание	4
3.2	Описание алгоритма	4
3.3	Ссылка на репозиторий	5
4	Результат	5
4.1	Первый случай матрицы радиусов	5
4.2	Второй случай матрицы радиусов	5
	Литература	6

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Постановка задачи

Пусть дана вещественная матрица (1.1)

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

и неотрицательное число

$$\Delta \in [0, \min\{a_{ij}, i, j = \overline{1, 2}\}] \quad (2)$$

Рассмотрим две матрицы радиусов:

$$\text{rad}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{rad}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \Delta \cdot A_i^{(1,1)}, a_{11} + \Delta \cdot A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \Delta \cdot A_i^{(1,2)}, a_{12} + \Delta \cdot A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \Delta \cdot A_i^{(2,1)}, a_{21} + \Delta \cdot A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \Delta \cdot A_i^{(2,2)}, a_{22} + \Delta \cdot A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \quad (4)$$

$i = \overline{1, 2}$ Необходимо найти $\min\{\Delta | 0 \in \det A\}$. В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

2 Теория

Укажем основные арифметические операции для интервалов:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \quad (6)$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \quad (7)$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \quad (8)$$

$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = [\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)] \quad (9)$$

$$\text{mid}[a, b] = \frac{1}{2}(a + b) \quad (10)$$

$$\text{wid}[a, b] = (b - a) \quad (11)$$

$$\text{rad}[a, b] = \frac{1}{2}(b - a) \quad (12)$$

Пусть $\text{mid}A = \{a_{ij}\}_{i,j \in N}$ – точечная вещественная матрица середин, $\text{rad}A = \{r_{ij}\}_{i,j \in N}$ – точечная вещественная матрица радиусов. Операцией midrad назовем следующую функцию:

$$\text{midrad}(\text{mid}A, \text{rad}A) = [\text{mid}A_{ij} - \text{rad}A_{ij}], [\text{mid}A_{ij} + \text{rad}A_{ij}]_{i,j \in N} \quad (13)$$

Результатом операции является интервальная матрица.

3 Реализация

3.1 Описание

Данная лабораторная работа была выполнена с использованием языка программирования Python 3.10 в среде разработки PyCharm. Дополнительно был реализован класс `Interval`, описывающий интервальную арифметику для удобства написания кода.

Отчёт подготовлен с помощью языка LaTeX в редакторе TexStudio.

3.2 Описание алгоритма

1. Проверим вхождение нуля в интервал $\det A$ при максимально допустимом значении.
2. Если $0 \notin \det A$, то данная задача не имеет решения. Иначе переходим к шагу 3.
3. Если $\det A$ является симметричным интервалом, то минимальное значение Δ равно 0, так как $0 = \text{mid}[a, b]$.
4. Рассмотрим весь допустимый интервал возможных значений Δ . Методом половинного деления будем сужать его до тех пор, пока не достигнем точности $\varepsilon = 10^{-14}$.

3.3 Ссылка на репозиторий

<https://github.com/IMZolin/Interval-analysis> - GitHub репозиторий

4 Результат

4.1 Первый случай матрицы радиусов

Действуя согласно описанному алгоритму, мы получаем начальное приближение $\Delta = 0.95$. Далее применяем операцию `midrad` к матрицам `midA` и `radA1`, получаем интервальную матрицу

$$\text{mid}A_1 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & [0.05, 1.95] \\ [0, 1.9] & [0.05, 1.95] \end{pmatrix} \quad (14)$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_1$:

$$\det A_1 = [-3.7, 3.9] \quad (15)$$

Отсюда видно, что $0 \in \det A_1$, а также $\text{mid}A_1 \neq 0$ значит, переходим к пункту 4 описанного алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.025$. В таком случае $\det A_1 = [2.22010 \cdot 10^{-16}, 0.2]$. Левый конец $\det A_1$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

4.2 Второй случай матрицы радиусов

Применим операцию `midrad` теперь к матрицам `midA1` и `radA2` и получим

$$\text{mid}A_2 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & 1 \\ [0, 1.9] & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_2$:

$$\det A_2 = [-1.8, 2] \quad (17)$$

Вновь видим, что $0 \in \det A_2$, а также $\text{mid} A_2 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.05$. В таком случае $\det A_2 = [1.110 \cdot 10^{-16}, 0.2]$. Левый конец $\det A_2$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.

Список литературы

- [1] Histogram. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram>
- [2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. // Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.
- [3] Box plot. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot
- [4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.