

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

**Математическая статистика**  
**Отчёт по лабораторным работам №10**

Выполнил:

Студент: Золин Иван

Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>12</b>
3.1	Описание . . . . .	12
3.2	Ссылка на репозиторий . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>13</b>
4.1	Данные выборки . . . . .	13
4.2	Варьирование неопределённости измерений . . . . .	13
4.3	Варьирование неопределённости измерений с расширением и сужением интервалов . . . . .	14
4.4	Анализ регрессионных остатков . . . . .	15
4.5	Информационное множество задачи . . . . .	16
4.6	Коридор совместных зависимостей . . . . .	17
4.7	Построение прогноза внутри и вне области данных . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>18</b>
5.1	Варьирование неопределённости измерений . . . . .	18
5.2	Варьирование неопределённости измерений с расширением и сужением интервалов . . . . .	18
5.3	Анализ регрессионных остатков . . . . .	18
5.4	Информационное множество задачи . . . . .	18
5.5	Коридор совместных зависимостей . . . . .	18
5.6	Построение прогноза внутри и вне области данных . . . . .	19
	<b>Литература</b>	<b>20</b>

## Список иллюстраций

1	Диаграмма рассеяния выборки $X_1$ с уравновешенным интервалом погрешности . . . . .	4
2	Диаграмма рассеяния выборки $X_1$ и регрессионная прямая по модели (4) и (5) . . . . .	5
3	Диаграмма рассеяния выборки $X_1$ и регрессионная прямая по модели (10) и (11) . . . . .	6
4	Векторы $\omega_1$ и $\omega_0$ . . . . .	7
5	Диаграмма рассеяния по модели (4) и (5) . . . . .	8
6	Диаграмма рассеяния по модели (10) и (11) . . . . .	8
7	Частоты элементарных подинтервалов регрессионных остатков выборки $X_1$ по модели (4) и (5) — красный график, и (10) и (11) — синий график . . . . .	9
8	Информационное множество по модели (10) и (11), интервальная оболочка — красный брус . .	10
9	Коридор совместных зависимостей (23) . . . . .	11
10	Коридор совместных зависимостей (23). Построение прогноза . . . . .	11
11	Кусочно-линейная регрессионная зависимость . . . . .	12
12	Диаграмма рассеяния выборки $X_1$ с уравновешенным интервалом погрешности . . . . .	13
13	Диаграмма рассеяния выборки $X_1$ и регрессионная прямая по модели (4) и (5) . . . . .	13
14	Диаграмма рассеяния выборки $X_1$ и регрессионная прямая по модели (10) и (11) . . . . .	14
15	Векторы $\omega_0$ и $\omega_1$ . . . . .	14
16	Диаграмма рассеяния выборки $X_1$ и регрессионная прямая по модели (10) и (11) . . . . .	15
17	Диаграмма рассеяния регрессионных остатков выборки $X_1$ по (10) и (11) . . . . .	15
18	Частоты элементарных подинтервалов регрессионных остатков выборки $X_1$ по модели (4) и (5) — синий график, и (10) и (11) — оранжевый график. . . . .	16
19	Информационное множество по модели (10) и (11), интервальная оболочка — красный брус . .	16
20	Коридор совместных зависимостей (23) . . . . .	17
21	Коридор совместных зависимостей (23). Построение прогноза . . . . .	18

# 1 Постановка задачи

Дадим общую формулировку задачи восстановления функциональной зависимости. Пусть некоторая величина  $y$  является функцией от независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ :

$$y = f(\beta, x) \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  является вектором независимых переменных,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$  — вектор параметров функции. Заметим, что переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$  также называются входными, а переменные  $y_1$  — выходной.

Задача восстановления функциональной зависимости заключается в том, чтобы, располагая набором значений  $x$  и  $y$ , найти такие  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  в выражении (1), которые соответствуют конкретной функции  $f$  из параметрического семейства.

Если функция  $f$  является линейной, то можно записать

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m \quad (2)$$

В общем случае результаты измерений величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и  $y$  являются интервальнозначными

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, y^{(k)}.$$

Индекс  $k$  пробегает значения от 1 до  $n$ , равного полному числу измерений.

**Определение 2.2.1** Брусом неопределенности  $k$ -го измерения функциональной зависимости будем называть интервальный вектор-брус, образованный интервальными результатами измерений с одинаковыми значениями индекса  $k$  [1]:

$$(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}, y_k) \subset \mathbb{R}^{m+1}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Брус неопределенности измерения является прямым декартовым произведением интервалов неопределенности независимых переменных и зависимой переменной.

## 2 Теория

**Данные выборки.** Имеется выборка данных  $\mathbf{X}_1$  с интервальной неопределённостью. Число отсчётов в выборке равно 200.

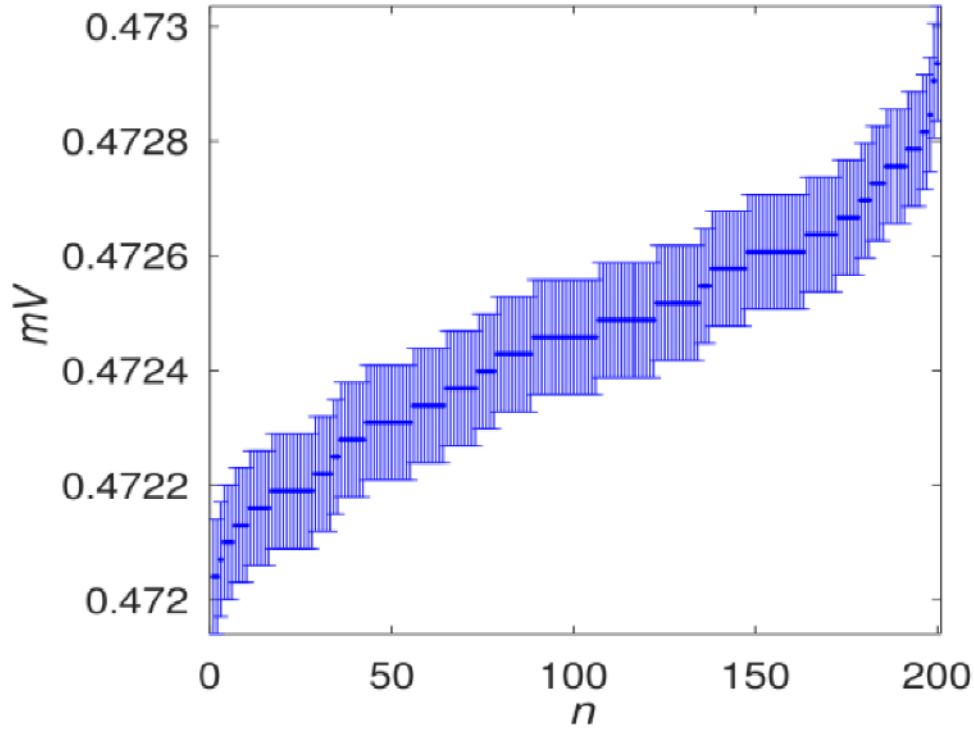


Рис. 1: Диаграмма рассеяния выборки  $X_1$  с уравновешенным интервалом погрешности

На Рис. 1 представлены данные с прибора [23] с учётом погрешности измерительного прибора.

Построим линейную модель данных и посмотрим, насколько удачно она описывает линейный тренд.

**Варьирование неопределённости измерений.** Если величину коррекции каждого интервального наблюдения выборки выразить коэффициентом его уширения  $\omega_i \geq 1$ , а общее изменение выборки характеризовать суммой этих коэффициентов, то минимальная коррекция выборки в виде вектора коэффициентов  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , необходимая для совместности задачи построения зависимости  $x = \beta_0 + \beta_1 * i$  может быть найдена решением задачи условной оптимизации

$$\min_{\omega, \beta} \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (4)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \text{mid } x_i - \omega_i \epsilon_i \leq \beta_0 + \beta_1 * i \leq \text{mid } x_i + \omega_i \epsilon_i, \\ \omega_i \geq 1, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Результирующие значения коэффициентов  $\omega_i$ , строго превосходящие единицу, указывают на наблюдения, которые требуют уширения интервалов неопределённости для обеспечения совместности данных и модели.

Проведём вычисление параметров линейной регрессии по данным интервальной выборки  $\mathbf{X}_1$  с использованием программ С.И.Жилина [8] и оформленных применительно к задаче на [23]. Синтаксис вызова программы

$$[\text{tau}, w, \text{yint}] = \text{DataLinearModel}(\text{input1}, \text{epsilon0}) \quad (6)$$

В (6) входами программы служат значения  $\text{mid}\mathbf{X}_1$  и величин неопределённости  $\epsilon$ , а выходами  $\text{tau}$  — значения параметров регрессии  $\beta_0, \beta_1$   $w$  — вектор весов расширения интервалов.

На Рис. 2 красным цветом приведена регрессионная прямая.

Вычисления с использованием программы (6) дают следующие результаты для регрессионных коэффициентов

$$\beta_0 = \text{tau}(1) = 4.7203e - 01, \quad (7)$$

$$\beta_1 = \text{tau}(2) = 4.0915e - 06. \quad (8)$$

Все компоненты вектора  $\omega$  оказались равны 1, то есть, расширения интервалов измерений не понадобилось. Таким образом, величина (4) равна числу элементов выборки.

$$\min_{\omega, \beta} \sum_{i=1}^n \omega_i = 200 \quad (9)$$

Недостатком полученного решения с единичными значениями  $\omega_i$  является неучёт расстояний точек регрессионной зависимости до данных интервальной выборки. Таким образом, прямая с параметрами

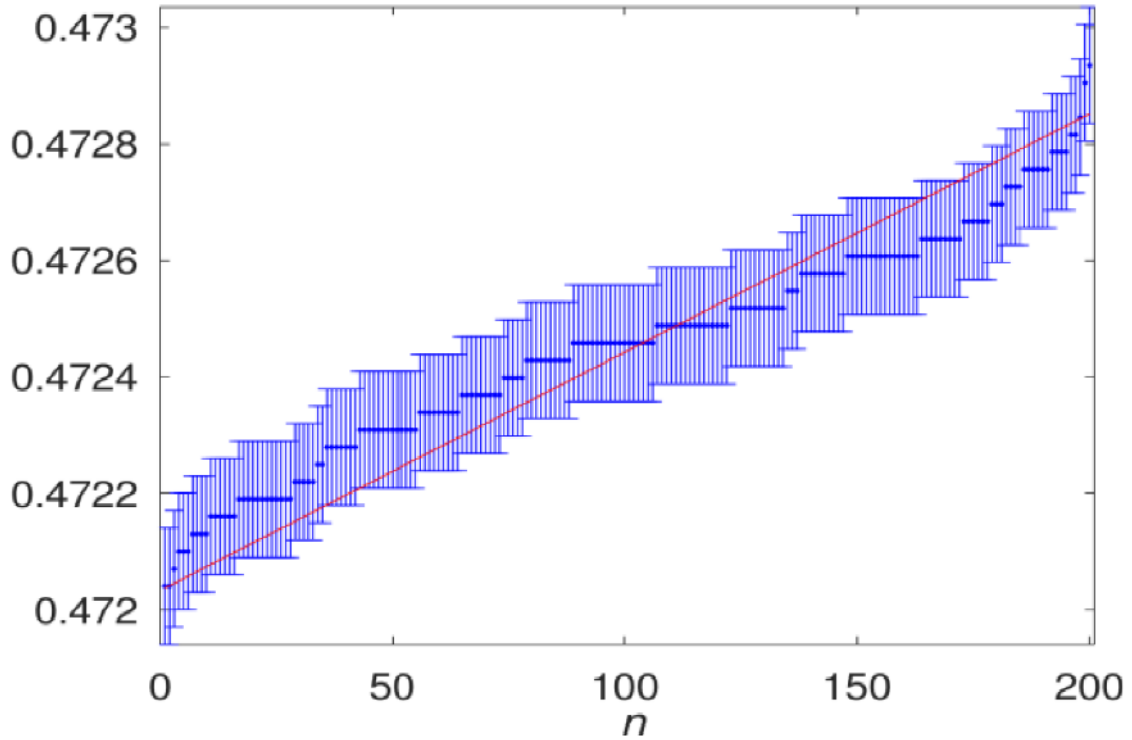


Рис. 2: Диаграмма рассеяния выборки  $X_1$  и регрессионная прямая по модели (4) и (5)

(7) и (8) «не чувствует» отклонений измерений от прямой на концах выборки — неопределённости измерений достаточно велики, чтобы покрыть этот эффект.

**Варьирование неопределённости измерений с расширением и сужением интервалов.** Выясним, что даёт решение задачи оптимизации другим способом, с расширением и сужением интервалов.

Поставим задачу условной оптимизации следующим образом:

$$\min_{\omega, \beta} \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (10)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \text{mid } x_i - \omega_i \epsilon_i \leq \beta_0 + \beta_1 * i \leq \text{mid } x_i + \omega_i \epsilon_i, \\ \omega_i \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Отличие постановки от (4) и (5) состоит в том, что интервалы измерений могут как расширяться в случае  $\omega_i \geq 1$ , так и сужаться при  $0 \leq \omega_i \leq 1$ . Вычисление параметров линейной регрессии по данным интервальной выборки  $\mathbf{X}_1$  производится как и в случае (6) с использованием программ С.И.Жилина [8] и оформленных применительно к задаче на [23]. Синтаксис вызова программы

$$[\text{tau}, w, \text{yint}] = \text{DataLinearModelZ}(\text{input1}, \text{epsilon0}) \quad (12)$$

Входы и выходы функции DataLinearModelZ такие же, как и для DataLinearModelZ (6).

На Рис. 3 красным цветом приведена регрессионная прямая.

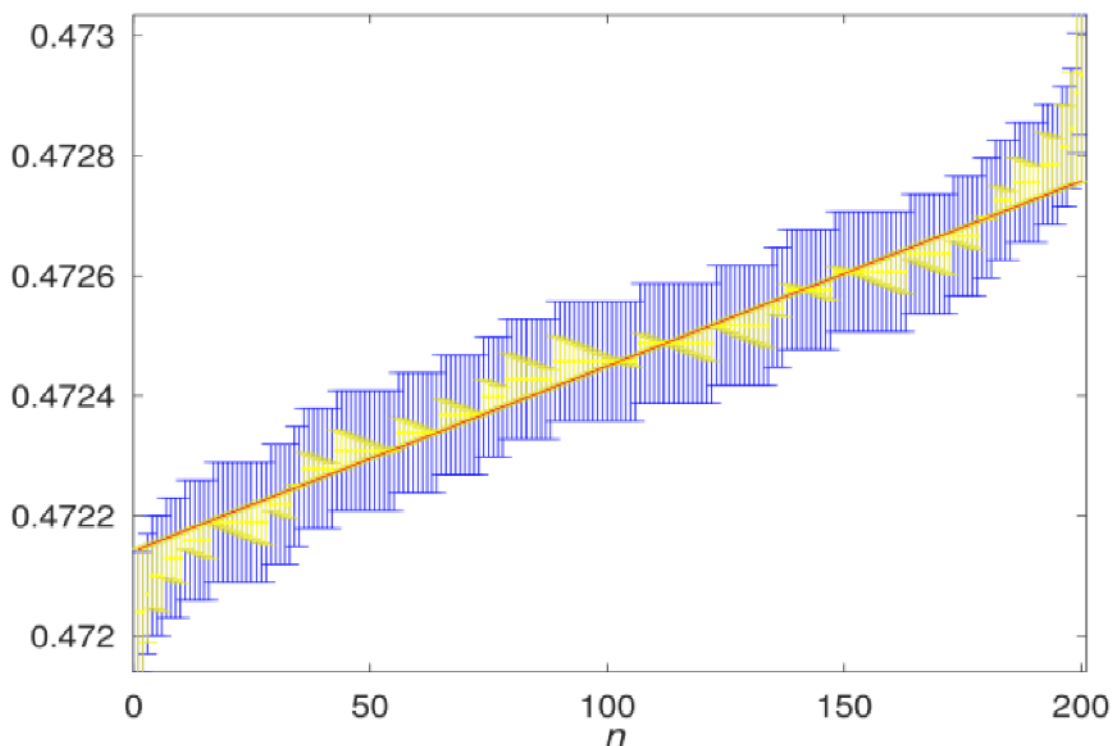


Рис. 3: Диаграмма рассеяния выборки  $X_1$  и регрессионная прямая по модели (10) и (11)

Жёлтым цветом на Рис. 3 показаны скорректированные интервалы выборки  $X_1$ . Небольшая часть интервалов на границах области расширилась, а большинство интервалов в диапазоне замеров примерно от 20 до 180 — сузилось.

Величина меры (4) уменьшилась более, чем в 4 раза.

$$\min_{\omega, \beta} \sum_{i=1}^n \omega_i = 45.7 \leq 200 \quad (13)$$

Таким образом, постановка задачи с возможностью одновременного увеличения и уменьшения радиусов неопределённости измерений позволяет более гибко подходить к задаче оптимизации.

На Рис. 4 приведены графики векторов  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , полученных при использовании двух рассмотренных подходов.

В конкретном случае график вектора  $\omega_0$  для постановки задачи оптимизации (10) и (11) содержит большое количество информации.

Например, задавшись каким-то порогом  $\alpha$ :  $0 < \alpha \leq 1$ , можно выделить области входного аргумента  $\Psi$ , в которых регрессионная зависимость хуже соответствует исходным данным. Например:

$$\Psi = \arg_i \omega_i \geq \alpha \quad (14)$$

Для конкретного примера имеем две области  $\Psi$  в начале и конце области данных.

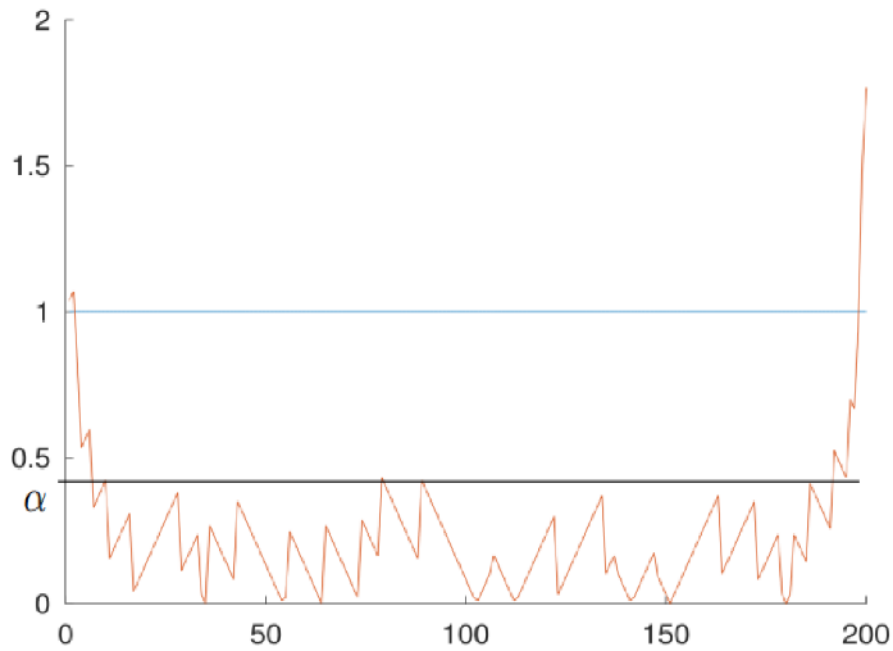


Рис. 4: Векторы  $\omega_1$  и  $\omega_0$

Для объективного использования этого приёма параметр  $\alpha$  можно брать, например, из анализа гистограммы распределения вектора  $\omega$ .

Использование выделения «подозрительных» областей даёт основу для других приёмов. Например, для построения кусочно-линейной регрессионной зависимости.

**Анализ регрессионных остатков.** В теоретико-вероятностной математической статистике анализ регрессионных остатков — один из приёмов оценки качества регрессии.

Приведём пример пояснения этого приёма. «Если выбранная регрессионная модель хорошо описывает истинную зависимость, то остатки должны быть независимыми, нормально распределёнными случайными величинами с нулевым средним, и в их значениях должен отсутствовать тренд. Анализ регрессионных остатков — это процесс проверки выполнения этих условий.» <https://wiki.loginom.ru/articles/discrepancy.html>

В случае интервальных выборок мы не задаёмся вопросом о виде распределения остатков, а будем использовать те возможности которые появляются при описании объектов и результатов вычислений в виде интервалов.

На Рис. 5 приведена диаграмма рассеяния регрессионных остатков выборки  $\mathbf{X}_1$  по модели (4) и (5).



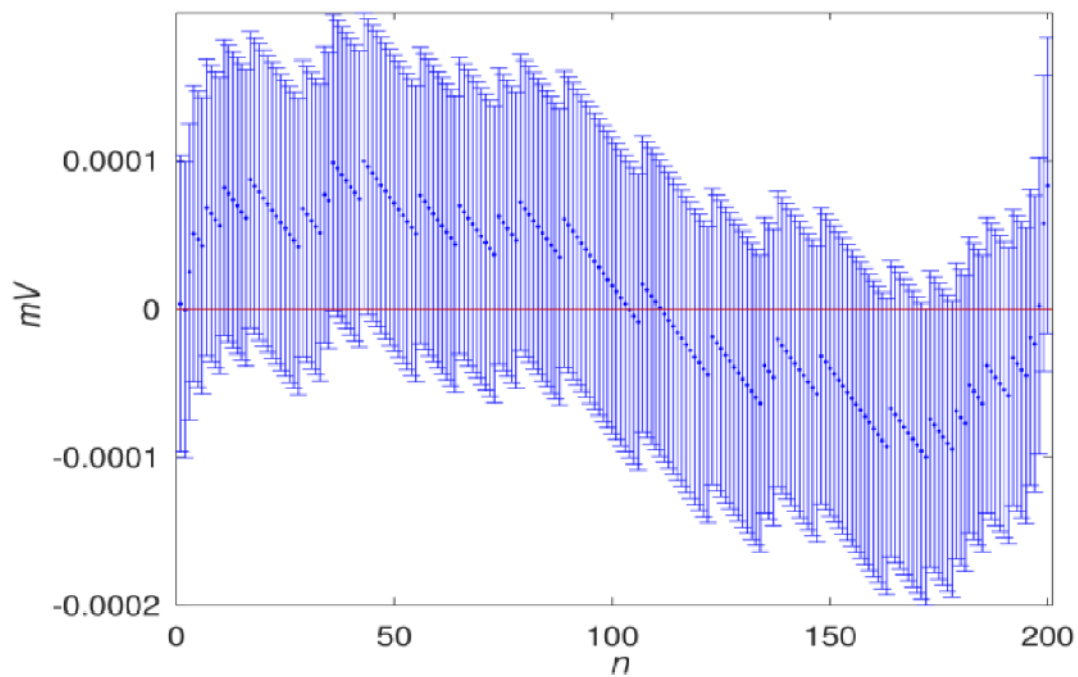


Рис. 5: Диаграмма рассеяния по модели (4) и (5)

На Рис. 6 приведена диаграмма рассеяния регрессионных остатков выборки  $\mathbf{X}_1$  по модели (10) и (11).

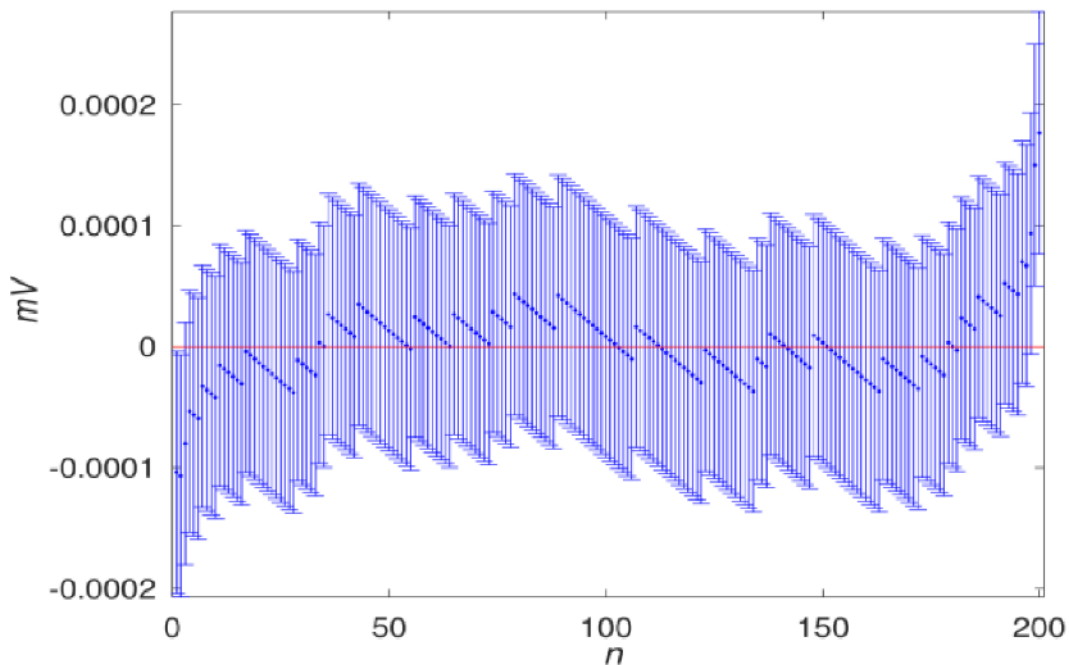


Рис. 6: Диаграмма рассеяния по модели (10) и (11)

Из сравнения Рис. 5 и На Рис. 6 видно, что интервальные выборки остатков получились с весьма разными свойствами. Формально диаграмма рассеяния на первом рисунке ‘уже, то есть внешняя оценка более компактная. В то же время вторая диаграмма рассеяния выглядит более естественно.

На Рис. 7 приведены графики частот элементарных подинтервалов при вычислении интервальной моды для двух моделей.

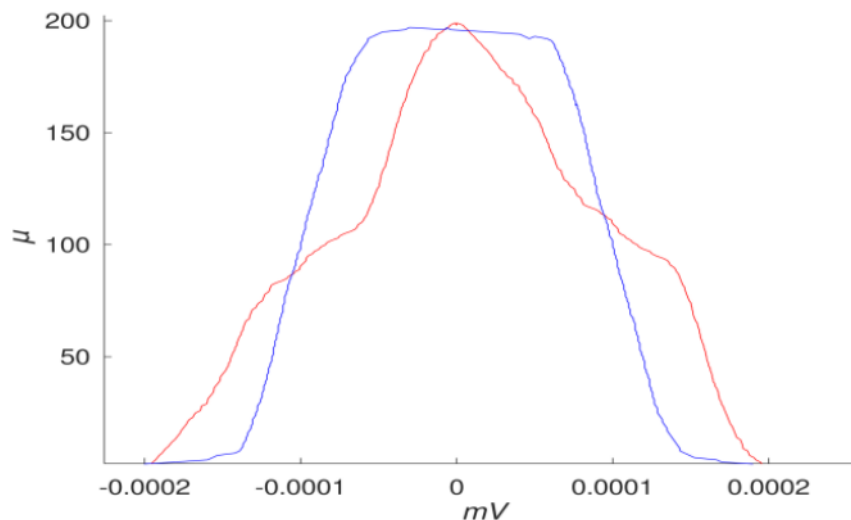


Рис. 7: Частоты элементарных подинтервалов регрессионных остатков выборки  $X_1$  по модели (4) и (5) — красный график, и (10) и (11) — синий график

Как и в случае анализа диаграмм рассеяния, второй график выглядит более естественно. Его внутренняя оценка существенно шире, что соответствует большей устойчивостью к возмущениям данных.

К остаткам можно применить и другие меры совместности оценки постоянной величины, описанные ранее.

$$\text{mode } \mathbf{X}^1 = \dots \quad (15)$$

$$Ji(\mathbf{X})^1 = \dots \quad (16)$$

$$\vdots \quad (17)$$

$$\text{mode } \mathbf{X}^2 = \dots \quad (18)$$

$$Ji(\mathbf{X})^2 = \dots \quad (19)$$

$$\vdots \quad (20)$$

здесь  $\mathbf{X}^{1,2}$  — регрессионные остатки выборки  $\mathbf{X}_1$ , вычисленные с использованием разных условий оптимизации.

**Информационное множество задачи.** Интервальные оценки параметров.

Один из главных вопросов при построении регрессии — оценивание её параметров. В зависимости от прикладных целей характер и назначение искомых оценок могут существенно различаться.

Внешняя интервальная оценка параметра определяется минимальным и максимальным значениями, которых может достигать значение параметра в информационном множестве.

В совокупности интервальные оценки параметров задают брус, описанный вокруг информационного множества и именуемый внешней интервальной оболочкой информационного множества:

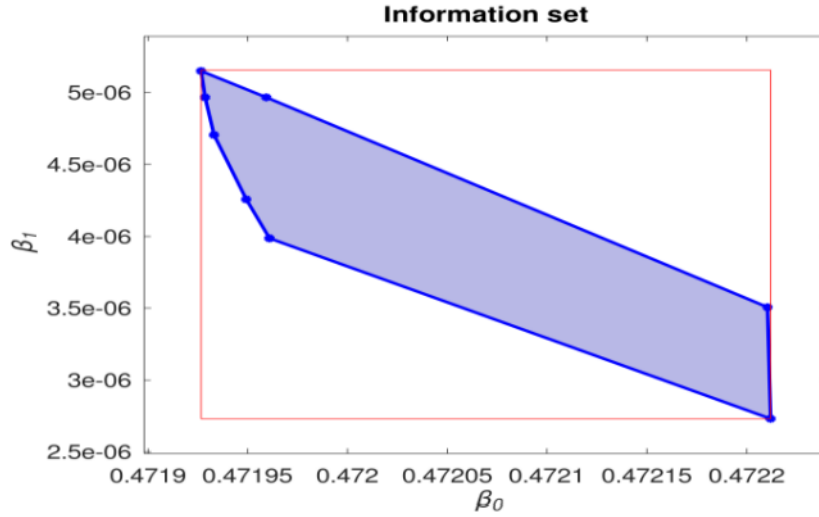


Рис. 8: Информационное множество по модели (10) и (11), интервальная оболочка — красный брус

Проведём вычисление параметров линейной регрессии по данным интервальной выборки  $\mathbf{X}_1$  с использованием программ С.И.Жилина [8].

Синтаксис вызова программ:

Решение задачи линейного программирования

$$SS = ir\_problem(A, x, max(w0) * epsilon, lb);$$

Вершины информационного множества задачи построения интервальной регрессии

$$vertices = ir\_beta2poly(SS);$$

Внешние интервальные оценки параметров модели  $y = \beta_1 + \beta_2 * x$

$$b_{int} = ir\_outer(SS).$$

Входами программы служат значения  $mid \mathbf{X}_1$  и величин неопределённости  $\epsilon$ , умноженные на расчётное уширение по модели (10) и (11), матрица  $A$ , составленная из нулевой и первой степеней номеров замеров, параметры условной оптимизации. Структура  $SS$  содержит значения параметров регрессии.

**Коридор совместных зависимостей.** Информационное множество задачи определяется в пространстве параметров. Каждая его точка задаёт зависимость в пространстве переменных. Множество всех таких моделей именуется коридором совместных зависимостей.

Выше мы нашли внешние интервальные оценки параметров модели

$$mid \beta_0 = [4.7193e - 01, 4.7221e - 01], \quad (21)$$

$$mid \beta_1 = [2.7304e - 06, 5.1571e - 06]. \quad (22)$$

Подставляя значения (21) и (22) в уравнение регрессии, получаем

$$x(k) = mid \beta_0 + mid \beta_1 * k, \quad (23)$$

где  $k$  — номер измерения.

На Рис. 9 приведён коридор совместных зависимостей для модели (23). Визуально видно, что внутри коридор совместных зависимостей можно провести множество прямых.

**Построение прогноза внутри и вне области данных.** Одним из способов использования регрессионной модели является предсказание значений выходной переменной для заданных значений входной. С помощью построенной выше модели (23) можно получить прогнозные значения выходной переменной в точках эксперимента.

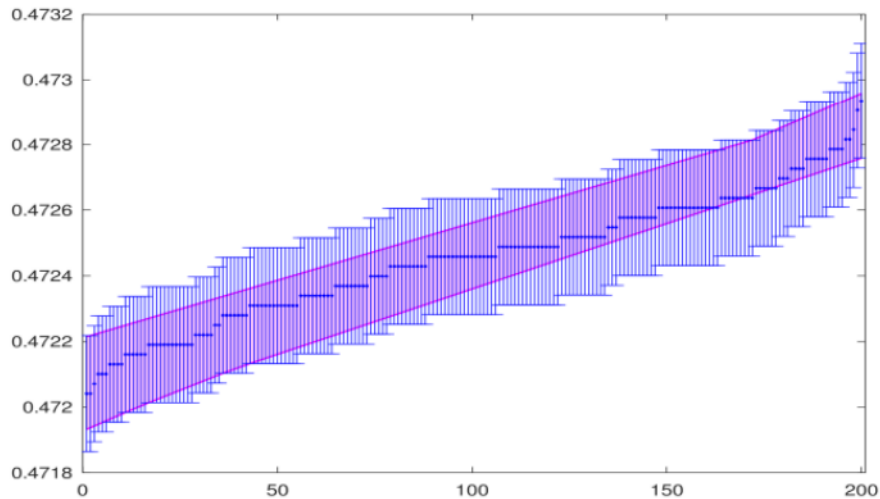


Рис. 9: Коридор совместных зависимостей (23).

Рис. 9: Коридор совместных зависимостей (23)

Ценность модели также заключается в возможности её употребления для предсказания выходной переменной в точках, где измерения не производились.

Расширив область определения аргумента для модели (23), можно получить оценки для значений выходной переменной (экстраполяция). На Рис. 10 сплошной заливкой дан прогноз в том числе за пределами данных интервальной выборки  $\mathbf{X}_1$ .

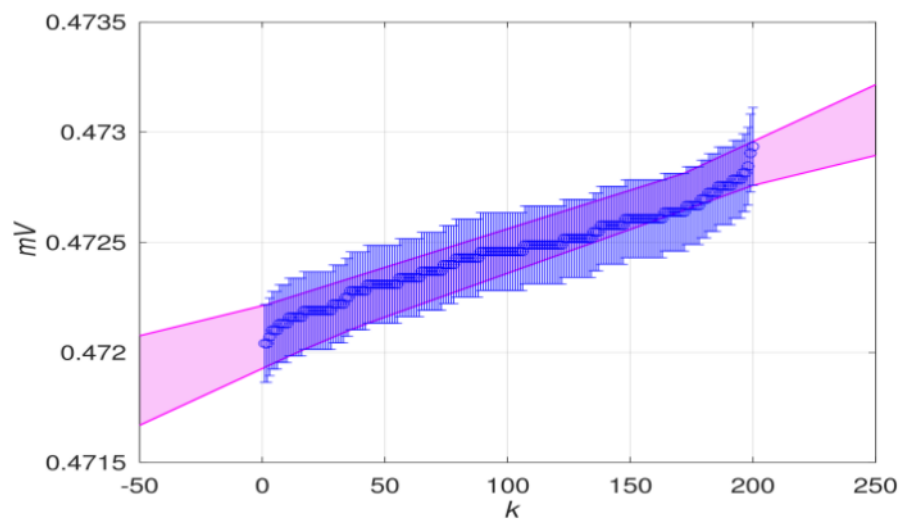


Рис. 10: Коридор совместных зависимостей (23). Построение прогноза

Следует обратить внимание, что величина неопределённости прогнозов растёт по мере удаления от области, в которой производились исходные измерения. Это обусловлено видом коридора зависимостей, расширяющимся за пределами области измерений, и согласуется со здравым смыслом.

**Уточнение структуры модели. Кусочно-линейная регрессионная зависимость.** Рис. 5 и Рис. 6 регрессионных остатков свидетельствуют о том, что линейные регрессионные модели не вполне точно отражают характер зависимости для интервальной выборки  $\mathbf{X}_1$ . Наиболее простым способом учёта этого факта является использование кусочно-линейная регрессионной зависимости.

В разделе «Варьирование неопределённости измерений» были вычислены векторы весов  $\omega$  расширения неопределённости измерений для достижения совместности — см. Рис. 4. Резкое возрастание весов  $\omega$  на границах области определения свидетельствует о несоответствии данных и модели. Эти точки и можно взять как «угловые» для определения линейных участков.

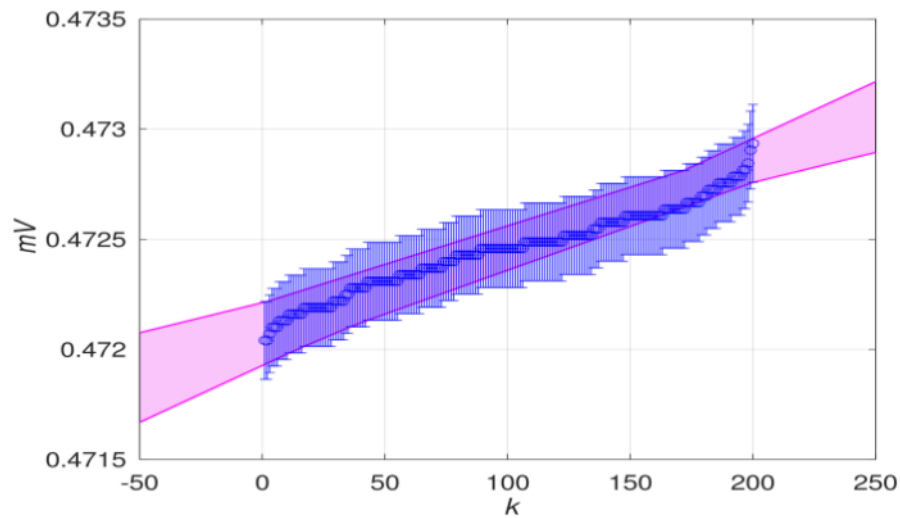


Рис. 11: Кусочно-линейная регрессионная зависимость

На Рис. 11 показан пример построения кусочно-линейной регрессионной зависимости и коридора совместных зависимостей. После вычитания модели, можно переходить к анализу остатков регрессии и другим приёмам анализа.

В более общей постановке ставится задача автоматического определения точек излома [29], [30]. Имеется программное обеспечение С.И.Жилина, реализующее идеи этого подхода..

## 3 Реализация

### 3.1 Описание

Данная лабораторная работа была выполнена с использованием языка программирования Python 3.10 в среде разработки PyCharm с использованием следующих библиотек:

- math - использование математических функций
- matplotlib версии 3.7.1 - построение графиков
- numpy версии 1.24.2 - использование многомерных массивов
- prettytable версии 3.6.0 - вывод таблиц в консоли
- scipy версии 1.10.1 - статические распределения и функции
- seaborn версии 0.12.2 - построение графиков, визуализация
- statsmodels - дополнение к scipy, использование статистических вычислений, включая описательную статистику, оценку и вывод статистических моделей

Отчёт подготовлен с помощью языка LaTeX в редакторе TexStudio.

### 3.2 Ссылка на репозиторий

<https://github.com/IMZolin/Math-statistics-labs> - GitHub репозиторий

## 4 Результаты

### 4.1 Данные выборки

Данные для выборки взяты из файла *Channel\_1\_400nm\_2mm.csv*,  $\varepsilon = 10^{-4}$

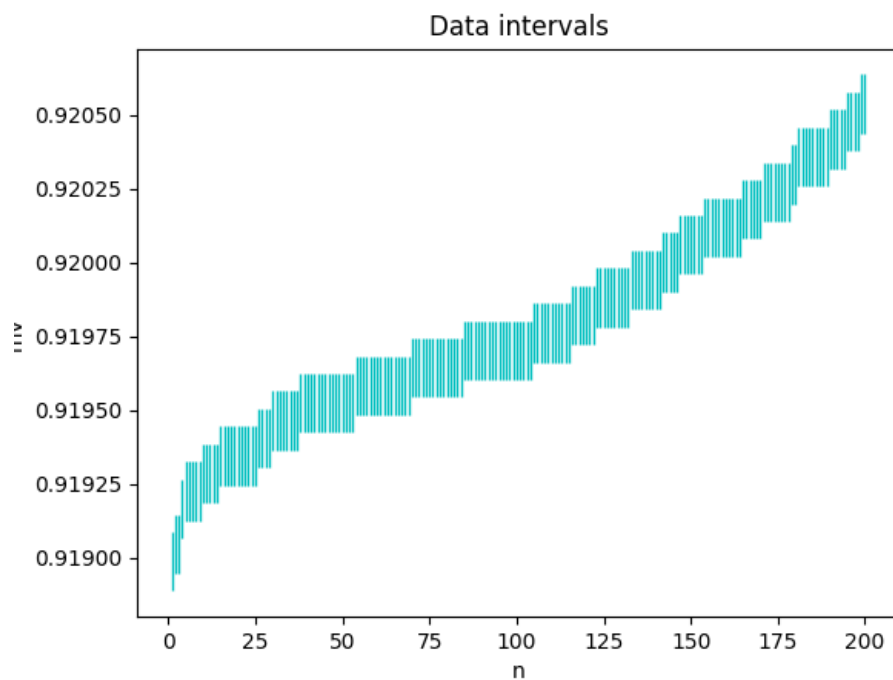


Рис. 12: Диаграмма рассеяния выборки  $X_1$  с уравновешенным интервалом погрешности

### 4.2 Варьирование неопределённости измерений

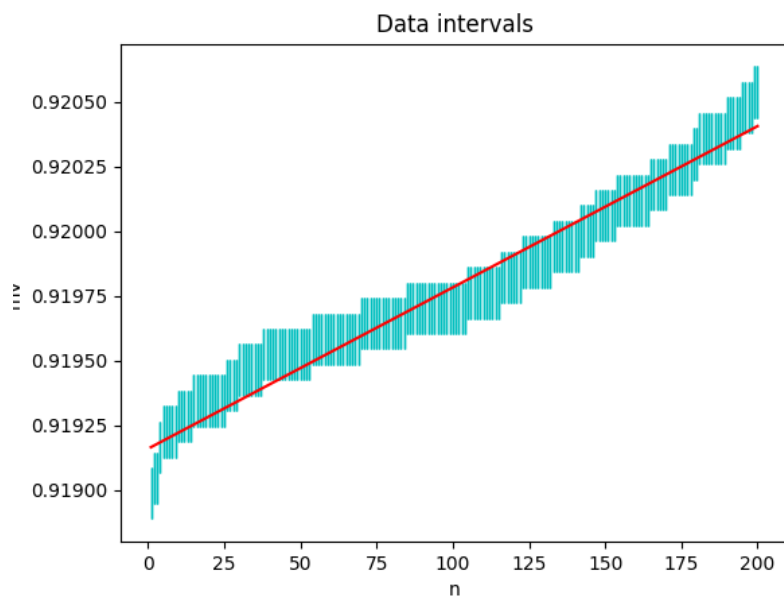


Рис. 13: Диаграмма рассеяния выборки  $X_1$  и регрессионная прямая по модели (4) и (5)

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 200, \beta_0 = 9.1916, \beta_1 = 6.2333 \cdot 10^{-6}$$

### 4.3 Варьирование неопределённости измерений с расширением и сужением интервалов

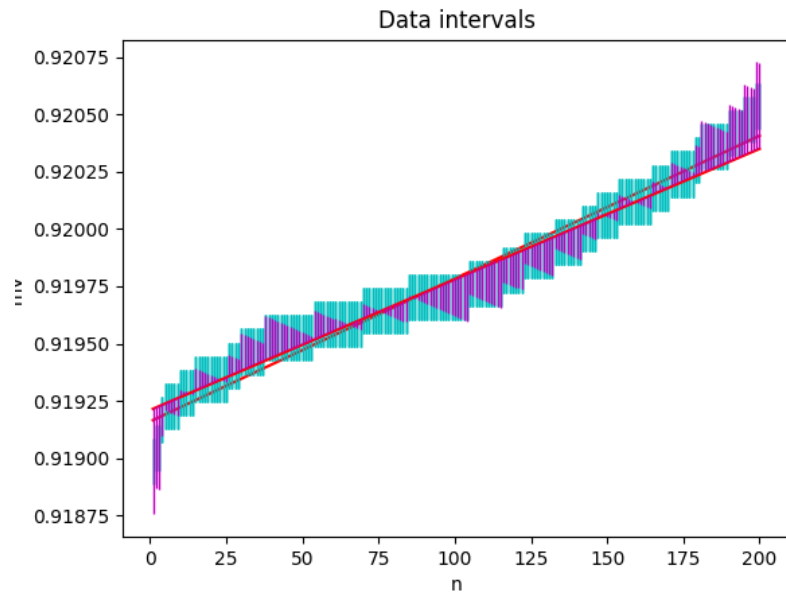


Рис. 14: Диаграмма рассеяния выборки  $X_1$  и регрессионная прямая по модели (10) и (11)

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 98.559, \beta_0 = 0.91921, \beta_1 = 5.6971 \cdot 10^{-6}$$

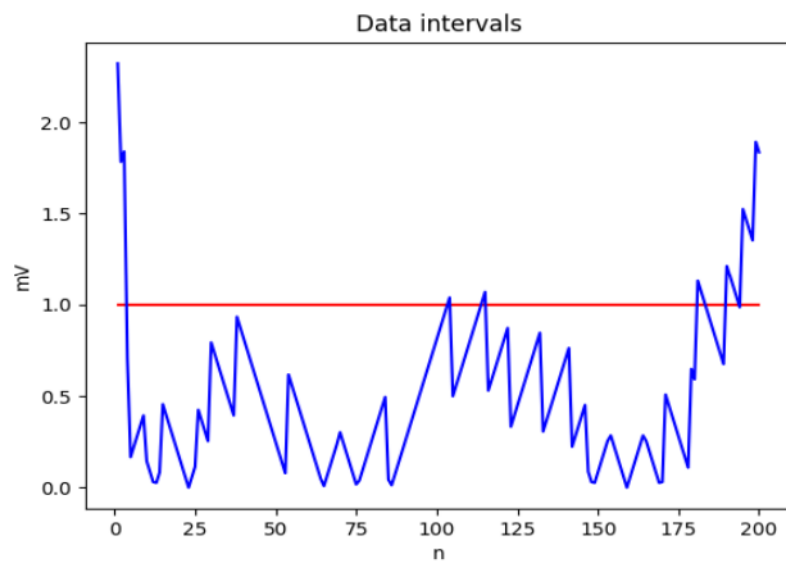


Рис. 15: Векторы  $\omega_0$  и  $\omega_1$

## 4.4 Анализ регрессионных остатков

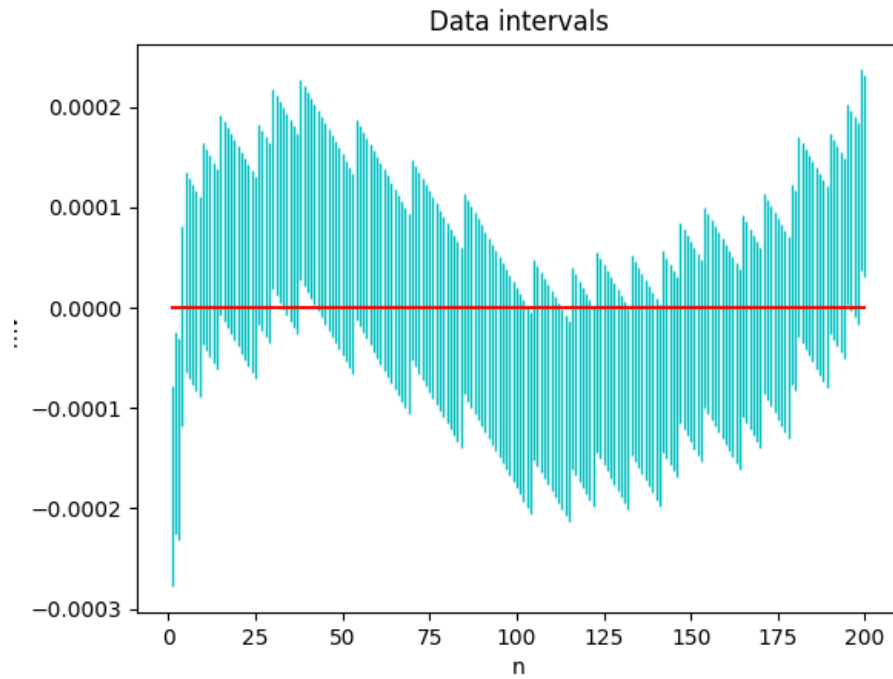


Рис. 16: Диаграмма рассеяния выборки  $X_1$  и регрессионная прямая по модели (10) и (11)

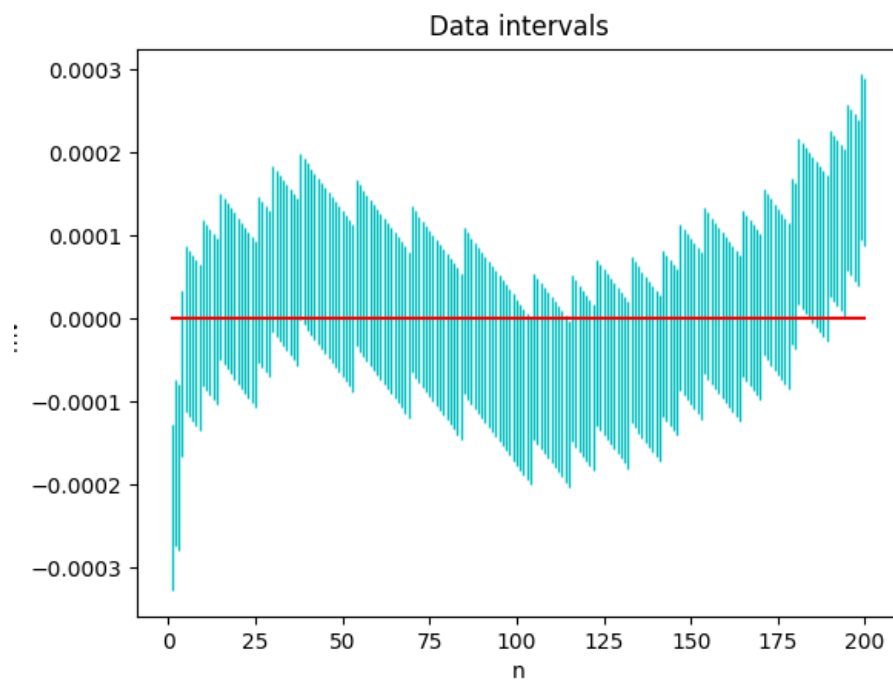


Рис. 17: Диаграмма рассеяния регрессионных остатков выборки  $X_1$  по (10) и (11)



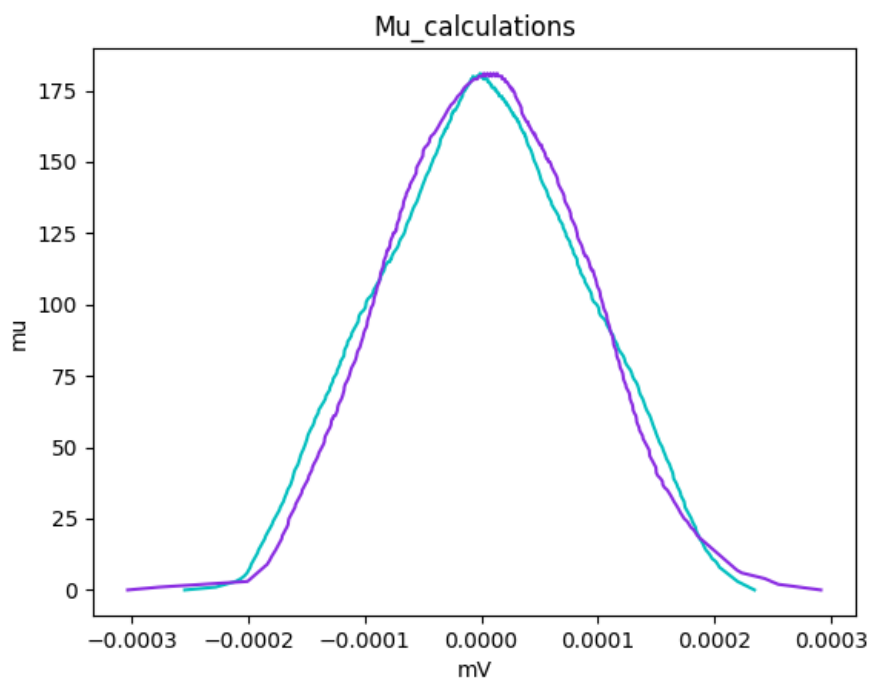


Рис. 18: Частоты элементарных подинтервалов регрессионных остатков выборки  $X_1$  по модели (4) и (5) — синий график, и (10) и (11) — оранжевый график.

#### 4.5 Информационное множество задачи

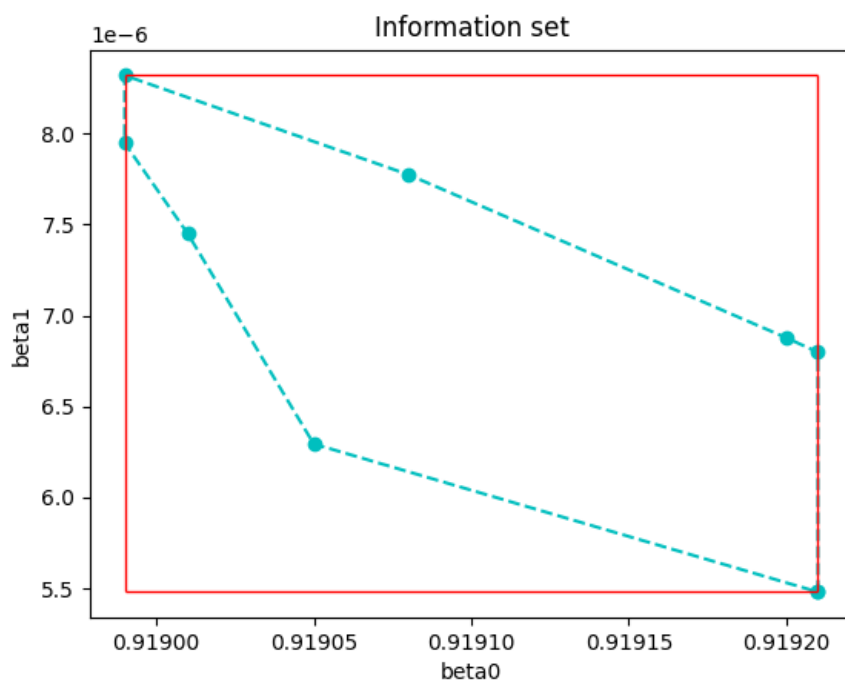


Рис. 19: Информационное множество по модели (10) и (11), интервальная оболочка — красный брус

## 4.6 Коридор совместных зависимостей

$$\text{mid } \beta_0 = [0.91899, 0.91921]$$

$$\text{mid } \beta_1 = [5.4802 \cdot 10^{-6}, 8.3358 \cdot 10^{-6}]$$

Подставляя значения (21) и (22) в уравнение регрессии, получаем

$$\text{mid } x(k) = \text{mid } \beta_0 + \text{mid } \beta_1 \cdot k$$

где  $k$  — номер измерения.

## 4.7 Построение прогноза внутри и вне области данных

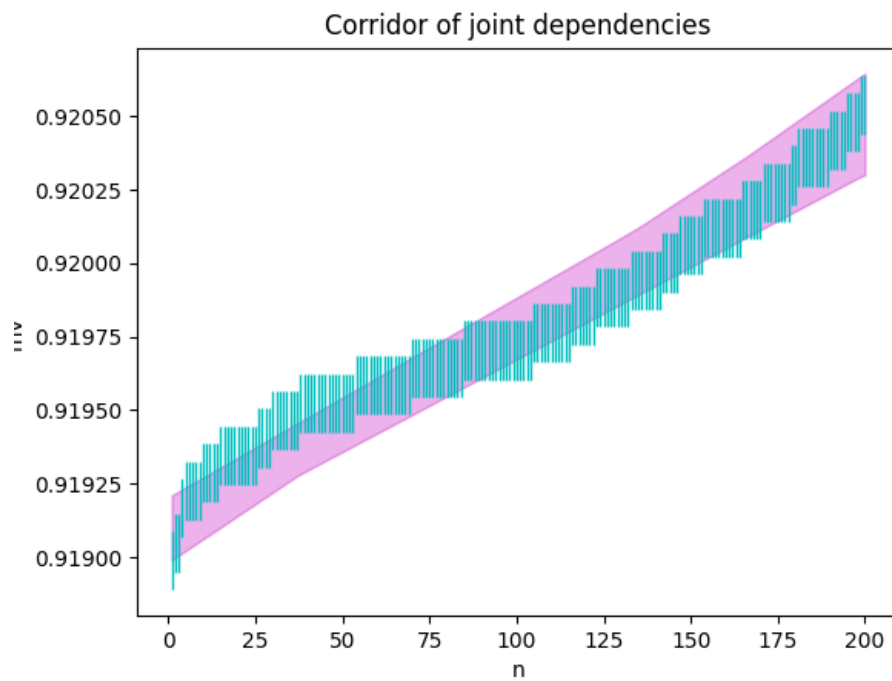


Рис. 20: Коридор совместных зависимостей (23)

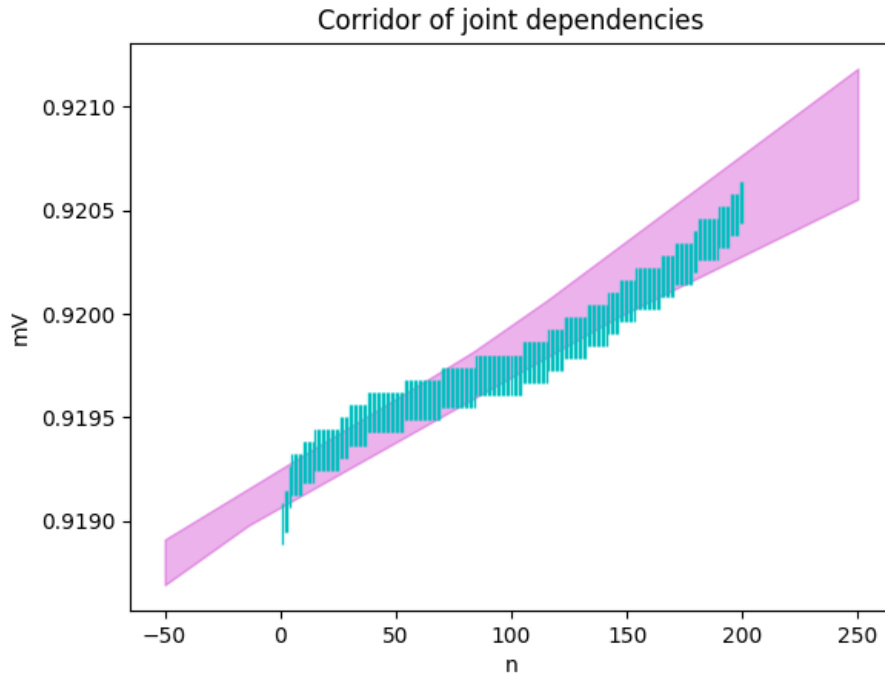


Рис. 21: Коридор совместных зависимостей (23). Построение прогноза

## 5 Обсуждение

### 5.1 Варьирование неопределённости измерений

Все компоненты вектора  $\omega$  оказались равны 1, то есть, расширения интервалов измерений не понадобилось. Таким образом, величина (4) равна числу элементов выборки. Недостатком полученного решения с единичными значениями  $\omega_i$  является неучёт расстояний точек регрессионной зависимости до данных интервальной выборки. Таким образом, прямая с параметрами (7) и (8) «не чувствует» отклонений измерений от прямой на концах выборки — неопределённости измерений достаточно велики, чтобы покрыть этот эффект.

### 5.2 Варьирование неопределённости измерений с расширением и сужением интервалов

Величина меры (4) уменьшилась более, чем в 2 раза. Таким образом, постановка задачи с возможностью одновременного увеличения и уменьшения радиусов неопределённости измерений позволяет более гибко подходить к задаче оптимизации.

### 5.3 Анализ регрессионных остатков

Из сравнения Рис. 16 и На Рис. 17 видно, что интервальные выборки остатков получились с весьма похожими свойствами.

### 5.4 Информационное множество задачи

Внешняя интервальная оценка параметра определяется минимальным и максимальным значениями, которых может достигать значение параметра в информационном множестве. В совокупности интервальные оценки параметров задают брус, описанный вокруг информационного множества и именуемый внешней интервальной оболочкой информационного множества.

### 5.5 Коридор совместных зависимостей

На Рис. 20 приведён коридор совместных зависимостей для модели (2.54). Визуально видно, что внутри коридор совместных зависимостей можно провести множество прямых.

## 5.6 Построение прогноза внутри и вне области данных

Следует обратить внимание, что величина неопределённости прогнозов растёт по мере удаления от области, в которой производились исходные измерения. Это обусловлено видом коридора зависимостей, расширяющимся за пределами области измерений, и согласуется со здравым смыслом.

## Список литературы

- [1] Histogram. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram>
- [2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. //Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.
- [3] Box plot. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Box\\_plot](https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot)
- [4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.
- [5] М.З.Шварц. Данные технологических испытаний оборудования для калибровки фотоприемников солнечного излучения. 2022.