Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 3
**тема "Численные методы решение СЛАУ.Итерационные методы"**
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001 Золин И.М.
Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

**2021**

# 1 Формулировка задачи и её формализация

## 1.1 Формулировка задания

Решить систему линейных уравнений методом Зейделя и исследовать зависимость нормы фактической ошибки, нормы невязки и числа итераций от заданной точности.

## 1.2 Постановка задания

В матричной форме $Ax = b$, где $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ матрица коэффициентов, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$вектор правой части и $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ вектор неизвестных. Требуется найти x, используя итерационный численный метод решения СЛАУ.

# 2 Алгоритм метода и условия его применимости

Канонический вид линейных одношаговых итерационных методов: $B_k \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\alpha_k} + Ax^{(k)} = b$,

при $\alpha = \frac{1}{\|A\|}$ и $B_k = E$ получаем:

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{\|A\|}(Ax^{(k)} - b)$

## 2.1 Алгоритм

1. Действия до цикла:

   $g = \alpha_k \cdot b$, при $\alpha_k = \frac{1}{\|A\|}$

   $C = E - \alpha \cdot A$

2. Цикл: Повторяй:

   $x_i^{(k)} = g_i^{(k)}$, при $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, .., n$

   $t = i$

   Если $t > 0$, то

   $x_i^{(k)} = x_i^{(k)} + C_{ij} \cdot x_j^{(k)}$

   $t = t - 1$

   Иначе

$x_i^{(k)} = x_i^{(k)} + C_{ij} \cdot x_j^{(k-1)}$

Пока: $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \geq \epsilon \frac{1-\|C\|_\infty}{\|C\|_\infty}$

### 2.2 Условия применимости метода

Чтобы метод сходился необходимо:

1. $\|C\|_{1,2,\infty} < 1$, при $\sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|, \|x_j\| = \max_i |x_i|$
2. Все с.ч. $|\lambda_B| < 1$, где $B = (E - \bar{C})^{-1} \cdot \bar{\bar{C}}$

## 3 Предварительный анализ задачи

Для анализа зависимости погрешности решения от числа обусловленности нужно создать симметричные, положительно определённые матрицы 10x10. Для этого:

1. Находим ортогональную матрицу $Q = E - 2\frac{WW^T}{W^TW}$, где E - единичная матрица, $W \in M_{10\times1}$
2. Находим матрицу $A = Q \cdot D \cdot Q'$

В качестве решения берём столбец $x = (1, 2, ..., 10)$, получаем столбец $b = Ax$, для которого мы знаем точное решение.

## 4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

$a_{11} = 4 > 1 + 1$
$a_{22} = 3 > 1 + 1$
$a_{33} = 4 > 1 + 1$ $C = E - \alpha A, \alpha = \frac{1}{||A||}$

$||C|| = \frac{37}{39} < 1$ Диагональное преобладание выполнено, значит можно использовать метод Зейделя. Начальное приближение: $x^{(0)} = (1; \frac{1}{3}; 1)$ $x_1 = \frac{1}{4}(4 + \frac{1}{3} - 1) = 0.833$

$x_2 = \frac{1}{3}(1 + 0.833 + 1) = 0.944$
$x_3 = \frac{1}{4}(4 - 0.833 + 0.944) = 1.028$
$x^{(1)} = (0.8330.9441.028)^T$
$x_1 = \frac{1}{4}(4 + 0.944 - 1.028) = 0.979$
$x_2 = \frac{1}{4}(1 + 0.979 + 1.028) = 1.002$
$x_3 = \frac{1}{4}(4 - 0.979 + 1.002) = 1.0063$
$x^{(2)} = (0.9791.0021.006)^T$
$x_1 = \frac{1}{4}(4 + 1.002 - 1.006) = 0.999$
$x_2 = \frac{1}{4}(4 + 0.999 + 1.006) = 1.002$
$x_3 = \frac{1}{4}(1 - 0.999 + 1.002) = 1.001$
$x^{(3)} = (0.999; 1.002; 1.001)^T$
$x_1 = \frac{1}{4}(4 + 1.002 - 1.001) = 1$
$x_2 = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1.001) = 1$
$x_3 = \frac{1}{4}(4 - 1 + 1) = 1$
$x^{(4)} = (1; 1; 1)^T$

## 5 Подготовка контрольных тестов

Создаётся положительно определенная матрица $A_{10\times10}$ для нахождения решения СЛАУ методом Зейделя с заданной точностью $\epsilon = 10^{-i}$, где $i \in [3, 7], i \in \mathbb{N}$.

## 6 Модульная структура программы

SeidelMethod(вх: $A, b, \epsilon$, вых: $x$,n) Находит вектор решений x СЛАУ методом Зейделя с точностью $\epsilon$ за n итераций. A - матрица коэф-тов, b - столбец свободных коэф-тов.

InfNorm(вх: $matrix$, вых: $norm$) Находит бесконечную норму матрицы $matrix$

Norm(вх:$matrix$, вых:$norm$) Находит вторую норму матрицы $matrix$

GetFinalMatrix(вх:$size$, вых:$A$) Создаёт матрицу $A$

## 7 Анализ результатов

1. График зависимости нормы фактической точности и нормы невязки от заданной точности показывает, что с увеличением

точности монотонно уменьшаются нормы.

2. График зависимости числа итераций от заданной точности показывает, что с увеличением точности возрастает количество необходимых итераций для её достижения.

## 8 Выводы

Метод Зейделя решения СЛАУ довольно прост в реализации, гарантированно находит решение с заданной точностью и не требует больших вычислительных затрат. Однако он накладывает большие условия применимости на матрицу коэффициентов,которая должна быть симметричной и положительно определенной.