

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки  
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 7  
тема **"Решение краевой задачи для ОДУ 2-ого порядка"**  
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001  
Преподаватель:

Солин И.М.  
Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

**2022**

# 1 Формулировка задачи и её формализация

## 1.1 Формулировка задания

1. Найти численное решение краевой задачи на равномерной сетке методом конечных разностей 2 порядка.
2. Построить графики точного, полученных решений и ошибки на отрезке.
3. Построить график зависимости бесконечной нормы фактической точности от величины шага.
4. Построить график зависимости нормы ошибки от величины возмущения начального условия при фиксированном шаге.

## 1.2 Формализация задания

Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка  $F(x, y, y', y'') = 0$ ,  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , где  $y$  - неизвестная функция.

Поставлена краевая задача:

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = S, a_1 = 0 \Rightarrow y(a) = \frac{S}{a_0} = A$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = T, b_1 = 0 \Rightarrow y(b) = \frac{T}{b_0} = B$$

Необходимо найти приближенное решение этой задачи

# 2 Алгоритм метода и условия его применимости

## 2.1 Алгоритм

Входные данные:  $a, b, h, p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$  - коэф-ты ОДУ 2 порядка,  $i = \overline{1, n-1}$ ; ( $h = \frac{b-a}{n-1}, y_i = y(x_i)$ )

1. Представим  $y'$  и  $y''$  в дискретном виде.

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{p_i h}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) + q_i h^2 y_i = f_i h^2$$

$$(1 - \frac{hp_i}{2})y_{i-1} + (q_i h^2 - 2)y_i + (1 + \frac{hp_i}{2})y_{i+1} = f_i h^2$$

Обозначим:

$$\begin{cases} a_i = 1 - \frac{hp_i}{2}, \\ c_i = q_i h^2 - 2, \\ b_i = 1 + \frac{hp_i}{2}. \end{cases}$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

$$a_i y_{i-1} + c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i h^2 (*)$$

МКР приводит к трёхдиагональной матрице. Нулевые и n-ые ур-я получим из краевых условий.  $y_0 = y(a) = A, y_n = y(b) = B$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & c_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-1} \\ y(b) \end{pmatrix} (**)$$

Переобозначим:  $z_i - diag$ ,  $r_i$  - столбец свободных членов,  $i = \overline{0, n}$  - столбец свободных членов,  $s_i$  - поддиагональные эл-ты,  $i = \overline{1, n}$   $t_i$  - наддиагональные эл-ты,  $i = \overline{0, n-1}$

3. Для получившейся СЛАУ применим метод прогонки

Уравнение под номером  $i$  содержит только 3 неизвестных  $y_{i-1}, y_i, y_{i+1}$ :

$$s_i y_{i-1} + z_i y_i + t_i y_{i+1} = r_i, i = \overline{1, n}$$

(а) Прямой ход:

$$\begin{aligned} i = 0, s_0 = 0, \delta_0 &= -\frac{t_0}{z_0}, \lambda_0 = \frac{r_0}{z_0} \\ i = \overline{1, n-1}, \delta_i &= -\frac{t_i}{s_i \delta_{i-1} + z_i}, \lambda_i = \frac{r_i - s_i \lambda_{i-1}}{s_i \delta_{i-1} + z_i} \\ i = n, t_n = 0, \delta_n &= 0, \lambda_n = \frac{r_n - s_n \lambda_{n-1}}{s_n \delta_{n-1} + z_n} \end{aligned}$$

(б) Обратный ход:

$$\begin{aligned} i = n, y_n &= \lambda_n \\ i = \overline{1, n-1}, y_i &= \delta_i y_{i+1} + \lambda_i \end{aligned}$$

Результат: столбец  $y_i, i = \overline{0, n}$  - искомое решение ОДУ

## 2.2 Условия применимости метода

Критерий существования и единственности решения СЛАУ (\*\*) в вычислительной погрешностью  $O(h^2)$

$$\forall x \in [a, b]$$

$$\begin{cases} p(x) \geq 0, \\ p(x) \geq \frac{h}{2} |q(x)|, \\ r(x) \leq 0. \end{cases}$$

## 3 Предварительный анализ задачи

$$y'' - tg(x)y' + 3y = \sin(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$p(x) = -tg(x), q(x) = 3, f(x) = \sin(x)$$

$$\text{Точное решение: } y = \sin(x), y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Создаётся равномерная сетка на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

## 4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

$$y'' - tg(x)y' + 3y = \sin(x). \text{ Точное решение } y_{exact} = \sin(x)$$

$$x \in [a, b] = [0, \frac{\pi}{2}] : \{0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\} - \text{сетка. } h = \frac{\pi}{8}$$

$$y(a) = 0, y(b) = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{8} : h^2 \cdot f(x) &= \frac{\pi^2}{64} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\pi^2}{128} \approx 0.0590 \\
\frac{\pi}{4} : h^2 \cdot f(x) &= \frac{\pi^2}{64} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{128} \approx 0.1090 \\
\frac{3\pi}{8} : h^2 \cdot f(x) &= \frac{\pi^2}{64} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\pi^2}{128} \approx 0.1425 \\
1 - \frac{h}{2}p_1 &= 1 + \frac{\pi}{16}tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{16+\pi\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{16} \approx 1.0813 \\
1 - \frac{h}{2}p_2 &= 1 + \frac{\pi}{16}tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{16} \approx 1.1963 \\
1 - \frac{h}{2}p_3 &= 1 + \frac{\pi}{16}tg\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{16+\pi\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{16} \approx 1.4740 \\
1 + \frac{h}{2}p_1 &= 1 - \frac{\pi}{16}tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{16-\pi\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{16} \approx 0.9187 \\
1 + \frac{h}{2}p_2 &= 1 - \frac{\pi}{16}tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{16} \approx 0.8037 \\
1 + \frac{h}{2}p_3 &= 1 - \frac{\pi}{16}tg\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{16-\pi\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{16} \approx 0.5260 \\
h^2q_1 - 2 &= h^2q_2 - 2 = h^2q_3 - 2 = 3\frac{\pi^2}{64} - 2 \approx -1.5374
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0813 & -1.5374 & 0.9187 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1963 & -1.5374 & 0.8037 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4740 & -1.5374 & 0.5260 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0590 \\ 0.1090 \\ 0.1425 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ 1.0813y_0 - 1.5374y_1 + 0.9187y_2 = 0.0590, \\ 1.1963y_1 - 1.5374y_2 + 0.8037y_3 = 0.1090, \\ 1.4740y_2 - 1.5374y_3 + 0.5260y_4 = 0.1425, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Прямой ход:

$$\begin{aligned}
i = 0, \delta_0 &= -\frac{t_0}{z_0} = 0.0000, \lambda_0 = \frac{r_0}{z_0} = 0.0000, \\
i = 1, \delta_1 &= -\frac{t_1}{s_1\delta_0+z_1} = 0.5976, \lambda_1 = \frac{r_1}{z_1} = -0.0384, \\
i = 2, \delta_2 &= -\frac{t_2}{s_2\delta_1+z_2} = 0.9771, \lambda_2 = \frac{r_2-s_2\lambda_1}{s_2\delta_1+z_2} = -0.1884, \\
i = 3, \delta_3 &= -\frac{t_3}{s_3\delta_2+z_3} = 5.4190, \lambda_3 = \frac{r_3-s_3\lambda_2}{s_3\delta_2+z_3} = -4.3294, \\
i = 4, \delta_4 &= 0, \lambda_4 = \frac{r_4-s_4\lambda_3}{s_4\delta_4+z_4} = 1.0000
\end{aligned}$$

Обратный ход:

$$\begin{aligned}
i = 4, y_4 &= \lambda_4 = 1.0000 \\
i = 3, y_3 &= \delta_3y_4 + \lambda_3 = 1.0897 \\
i = 2, y_2 &= \delta_2y_3 + \lambda_2 = 0.8763 \\
i = 1, y_1 &= \delta_1y_2 + \lambda_1 = 0.4853 \\
i = 0, y_0 &= \delta_0y_1 + \lambda_0 = 0.0000
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 0.4853, \\ y_2 = 0.8763, \\ y_3 = 1.0897, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Ошибки вычислений:  $error(x) = y_{exact} - y(x)$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$R_n(x)$	0	0.1026	0.1692	0.1657	0

## 5 Подготовка контрольных тестов

Для анализа зависимостей решается уравнение  $y'' - y'tg(x) + 3y = \sin x$  при  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  методом конечных разностей 2 порядка. При количестве точек [10, 100, 1000, 10000, 20000, 100000] а также вносится возмущение в начальное условие от  $10^{-1}$  до  $10^{-9}$ .

## 6 Модульная структура программы

MKR(вх: h, m, x, y;вых: res) Находит res краевой задачи на отрезке [a, b] с начальными условиями A и B, в n точках.

SolveMatrix(вх:n, b[ ], c[ ], a[ ], f[ ], вых:  $x_i, i = \overline{0, n}$ ) решает трёхдиагональную матрицу методом прогонки, где b[ ], c[ ], a[ ] - массивы коэффициентов лежащие над, на, под диагональю соответственно, f[ ] - столбец свободных членов,  $x_i, i = \overline{0, n}$  - решение СЛАУ.

## 7 Анализ результатов

1. График ошибки на отрезке показывает, что ошибка нарастает при приближении к середине отрезка.
2. График ошибки на отрезке показывает, что при уменьшении шага в 2 раза, ошибка также уменьшается в 2 раза, что согласуется с теорией.
3. График зависимости максимальной ошибки от длины шага показывает, что ошибка уменьшается при уменьшении шага.
4. График зависимости нормы ошибки от возмущения начального условия показывает, что ошибка убывает до  $10^{-6}$  при уменьшении возмущения

## 8 Выводы

Метод конечных разностей прост в реализации и обладает хорошей скоростью сходимости.