Санкт-Петербургский Политехнический университет
Физико-Механический институт

Направление подготовки
“Прикладная математика и информатика”

Отчет по курсовой работе
Сравнение решений ОДУ 2 порядка методом Рунге-Кутты 4 порядка и методом конечных разностей 2 порядка

Выполнил студент группы 5030102/00002:

Хламкин Е.В.

Преподаватель:

Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург
2022

1 Задание

Дано ОДУ 2-ого порядка $y'' + \frac{-1}{x^2(x+1)}y' + \frac{-2}{x^2(x+1)}y = \frac{1}{x^4(x+1)}$ и отрезок $[a;b]$: $a = 0.2, b = 1$. Найти решение задачи Коши для этого уравнения методом Рунге-Кутты 4 порядка. Найти решение краевой задачи для этого уравнения методом конечных разностей 2 порядка. Провести сравнение результатов по графикам ошибок на отрезке для двух значений шага. Исследовать зависимость нормы погрешности и координаты максимального значения погрешности на отрезке от величины шага.

2 Постановка задачи

Дано ОДУ 2-ого порядка: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$p(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}$

$q(x) = \frac{-2}{x^2(x+1)}$

$f(x) = \frac{1}{x^4(x+1)}$

Отрезок $[a;b]$: $a = 0.2, b = 1$

Точное решение: $y = 1 + \frac{1}{x}$

n + 1 - число точек

h - шаг, $h = \frac{b-a}{n}$

Граничные условия задачи Коши: $y(x_0) = 6, y'(x_0) = -25$

Граничные условия краевой задачи: $y(x_0) = 6, y(x_n) = 2$

Задача: найти решения задачи Коши и краевой задачи для данного уравнения на данном отрезке.

3 Предварительный анализ задачи

Решением поставленных задач будем считать $y_i^1 = y(x_i^1)$ - компоненты каркаса для численного решения задачи Коши и $y_i^2 = y(x_i^2)$ - компоненты каркаса для численного решения краевой задачи. Непрерывную задачу сведем к дискретной. Разобьем отрезок $[a; b]$ n+1 точкой, в каждой из которых будем искать значение функции y_i. Для задачи Коши граничных условий достаточно, чтобы начать (используя разложение функции в ряд Тейлора до 4-й степени) последовательно находить значения функции в точках x_i, $i = 0..n$. Для краевой задачи аппроксимируем y'' и y', и подставляем полученные аппроксимации в исходное ОДУ, получая тем самым СЛАУ из n + 1 уравнения, где неизвестные - значения $y_i^2, i = 0..n$.

4 Алгоритмы

Для краевой задачи:

а) Условия применимости: Потребуем для функций $p(x), q(x), f(x)$ непрерывности хотя бы из класса $C^{(0)}$. Гарантировать же применимость метода прогонки будет выполнение условия диагонального преобладания для матрицы коэффициентов: $|d_i| \geq |c_i| + |e_i|$, где d_i, c_i, e_i - диагональные элементы, поддиагональные элементы и наддиагональные элементы соответственно. В частности, для метода конечных разностей и приведенного(!) ОДУ это условие сводится к следующему:

$$\begin{cases} \text{h} \leq \frac{2}{|p(x)|} \\ \text{q(x)} \leq 0 \end{cases}$$

Первое условие для данной задачи приобретает вид: $h \leq 0.16$ (в дальнейшем это соответствует экспериментам)

Второе условие выполняется для всех "x" на отрезке.

б) Этапы решения: Подставить аппроксимированные значения производных в исходное ОДУ, получив тем самым СЛАУ, первая и последняя строки которой определяются граничными условиями 1 типа. Решить систему методом прогонки.

в) Алгоритм: Формулы аппроксимации:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2),\ y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Полученное дискретное ОДУ:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} p_i + q_i y_i = f_i$$

Приведем подобные:

$$(1 - \frac{h}{2} p_i) y_{i-1} - (2 - h^2 q_i) y_i + (1 + \frac{h}{2} p_i) y_{i+1} = h^2 f_i$$

Это уравнение заключает в себе строки СЛАУ для $i = 1..n-1$. Первая строка: $y_0 = A$, последняя строка: $y_n = B$. Решаем СЛАУ методом прогонки, т.е делаем прямой и обратный ход.

Прямой ход: в i-й строке выражаем y_i и для $i = 1..n-1$ последовательно подставляем выраженные значения y_{i-1}.

Обратный ход: в i-ю строку подставляем значения y_{i+1} для $i = n-1..1$, получая тем самым искомые значения $y_i, i = 0..n$.

г) Теоретические расчёты: Метод конечных разностей изначально предполагается первого порядка. Однако порядок метода в данном случае определяется степенью аппроксимации производных при граничных условиях. Коль скоро эти условия 1-ого типа, говорить об аппроксимации не имеет смысла - они выполняются точно и порядок схемы полностью определяется порядком аппроксимации ДУ, и метод приобретает второй порядок, что в теории говорит о том, что при уменьшении величины шага на один порядок, точность должна увеличиваться на два.

Для задачи Коши:

а) Условия применимости: По теореме о существовании и единственности задачи Коши, если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) $f(x)$ определена, непрерывна и имеет ограниченную по модулю производную, то существует окрестность (x_0, y_0), в которой решение будет, и притом единственное.

б) Этапы решения: идею методов Рунге-Кутты для ОДУ 1 порядка экстраполируем на ОДУ 2 порядка, произведя замену $z = y'$. Получим систему из двух уравнений. На каждом шаге будем вычислять 4 поправки, которые в своей линейной комбинации и будут составлять значение y_i на каждом шаге.

в) Алгоритм: Введем обозначения: $z = y'$, $z' = y'' = -p(x)y' - q(x)y + f(x) = F(x, y, z)$. Для каждого x_i будем вычислять следующие выражения:

$\sigma_0 = F(x_i, y_i, z_i)$;

$\gamma_0 = z_i$;

$\sigma_1 = F(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \gamma_0 \frac{h}{2}, z_i + \sigma_0 \frac{h}{2})$;

$\gamma_1 = z_0 + \sigma_0 \frac{h}{2}$;

$\sigma_2 = F(x_i + h/2, y_i + \gamma_1 \frac{h}{2}, z_i + \sigma_1 \frac{h}{2})$;

$\gamma_2 = z_i + \sigma_1 \frac{h}{2}$;

$\sigma_3 = F(x_i + h, y_i + h\gamma_2, z_i + h\sigma_2)$;

$\gamma_3 = z_i + h\sigma_2$;

Причем y_0 и z_0 для x_0 задаются начальными условиями, а для последующих $x_i, i = 1..n$, y_{i+1} и z_{i+1} вычисляются по формулам со значениями σ и γ предыдущего шага:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(\sigma_0 + 2\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3);$$
$$\mathrm{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(\gamma_0 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3);$$

г) Теоретические расчёты: Метод Рунге-Кутты локально имеет 5 порядок, но из-за накопления ошибки порядок снижается до 4-ого. Это означает, что в теории при уменьшении величины шага на один порядок должна прослеживаться тенденция увеличения точности на 4 порядка. При этом надо рассчитывать на то, что для точек, лежащих ближе к правому концу исходного отрезка, четвертый порядок наблюдать не придется.

5 Контрольные тесты

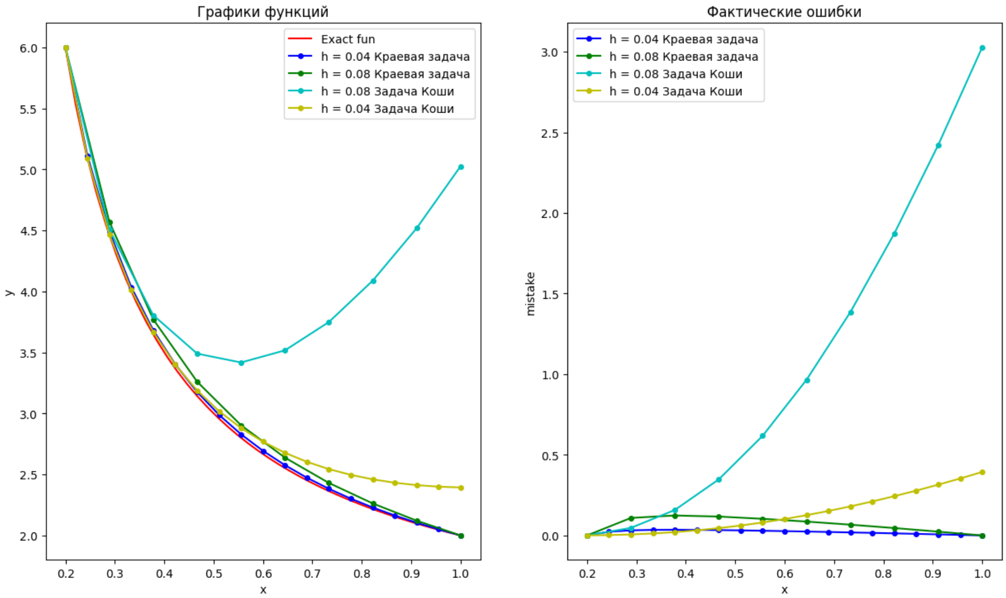
ОДУ 2-ого порядка: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), p(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}, q(x) = \frac{-2}{x^2(x+1)}, f(x) = \frac{1}{x^4(x+1)}$

а) Построим графики решений краевой задачи и задачи Коши для двух шагов: $h = 0.04$ и $h = 0.08$. Исходный отрезок: $[a; b], a = 0.2, b = 1$.

б) Измерим погрешность в зависимости от шага. Будем брать шаг $h = \frac{b-a}{2^{i+1}}, i = 0..13$ (14 значений) и получать бесконечную норму погрешности на отрезке $[a; b], a = 0.2, b = 1$. Найдем также координату максимальной погрешности на отрезке.

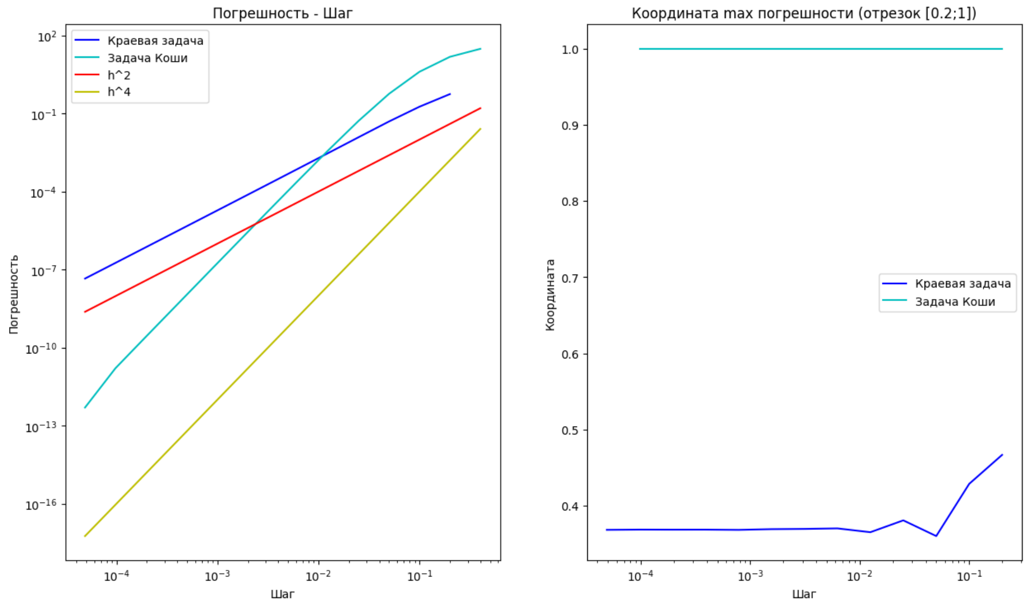
6 Численный анализ

Построим графики полученных в зависимости от шага решений, а также ошибок на отрезке $[a; b]$.



Заметно, что увеличение числа точек положительно сказывается на сходимости обеих задач. Также оба графика явно демонстрируют следующее: в задаче Коши ошибка действительно накапливается и достигает своего максимального значения на правом конце отрезка. В случае же краевой задачи с граничными условиями 1-ого типа ошибки на концах отрезка принимают нулевые значения, в то время как максимальная ошибка находится вблизи левого конца отрезка.

Теперь посмотрим, как ведет себя погрешность численного решения при более существенном уменьшении шага, а также пронаблюдаем за координатой максимальной погрешности на отрезке.



О точности можно сказать следующее: ее порядок в методе Рунге-Кутты не совпадает с теоретическим четвертым, хотя к тому и можно наблюдать некоторое стремление. Такой диссонанс можно объяснить, во-первых, тем, что накопление ошибки может быть достаточно существенным, а, во-вторых, тем, что часть точности теряется при сведении задачи о решении ОДУ 2-ого порядка к решению ОДУ 1-ого порядка. Характер сходимости метода конечных разностей более линейный, и отставание от теоретической точности для каждого из шагов составляет всегда 1 порядок, что объяснимо тем, что есть некоторая константа C, получаемая как $O(h^2) = Ch^2$. Заметим также, что погрешности методов совпадают для шага 10^{-2} Это объяснимо тем, что для больших h метод конечных разностей будет давать лучшую сходимость. Тем не менее, эта сходимость гасится порядком метода Рунге-Кутты, который для более мелкого разбиения стремится к 4-му порядку. Что же касается координаты максимальной погрешности в зависимости от шага, для метода Рунге-Кутты результат ожидаем: это значение есть правый конец отрезка, то есть $x = 1$. Для метода конечных разностей координата максимальной погрешности сходится к одному конкретному значению на отрезке: $x = 0.3681$.

7 Выводы

Проводя сравнение погрешностей и координат максимальных ошибок для метода Рунге-Кутты и метода конечных разностей, можно говорить о следующем: для больших шагов (более чем 10^{-3}) метод конечных разностей дает более точный результат. Тем не менее, для шагов, меньших чем 10^{-3}, метод Рунге-Кутты явно лучше. Полезным может оказаться тот факт, что координаты максимальной ошибки у методов различны, что дает некоторую свободу при выборе метода.