Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 7
тема "Решение краевой задачи для ОДУ 2-ого порядка"
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001 Золин И.М.
Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2022

1 Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формулировка задания

1. Найти численное решение краевой задачи на равномерной сетке методом конечных разностей 2 порядка.
2. Построить графики точного, полученных решений и ошибки на отрезке.
3. Построить график зависимости бесконечной нормы фактической точности от величины шага.
4. Построить график заивисимости нормы ошибки от величины возмущения начального условия при фиксированном шаге.

1.2 Формализация задания

Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка $F(x, y, y', y'') = 0$,
$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), x \in [a, b]$, где y - неизвестная функция.
Поставлена краевая задача:
$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = S, a_1 = 0 \Rightarrow y(a) = \frac{S}{a_0} = A$
$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = T, b_1 = 0 \Rightarrow y(b) = \frac{T}{b_0} = B$
Необходимо найти приближенное решение этой задачи

2 Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Алгоритм

Входные данные: $a, b, h, p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$ - коэф-ты ОДУ 2 порядка, $i = \overline{1, n-1}$; $(h = \frac{b-a}{n-1}, y_i = y(x_i))$

1. Представим y' и y" в дискретном виде.
   $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$
   $y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$
   $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i$
   $y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{p_i h}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) + q_i h^2 y_i = f_i h^2$
   $(1 - \frac{hp_i}{2})y_{i-1} + (q_i h^2 - 2)y_i + (1 + \frac{hp_i}{2})y_{i+1} = f_i h^2$

   Обозначим:

$$\begin{cases} a_i = 1 - \frac{hp_i}{2}, \\ c_i = q_i h^2 - 2, \\ b_i = 1 + \frac{hp_i}{2}. \end{cases}$$

   $i = \overline{1, n-1}$

   $a_i y_{i-1} + c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i h^2$ (*)

   МКР приводит к трёхдиаганольной матрице. Нулвые и n-ые ур-я получим из краевых условий. $y_0 = y(a) = A, y_n = y(b) = B$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & c_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-1} \\ y(b) \end{pmatrix} (**)$$

Переобозначим: $z_i - diag$, r_i - столбец свободных членов, $i = \overline{0, n}$ - столбец свободных членов, s_i - поддиагональные эл-ты,$i = \overline{1, n}$ t_i - наддиагональные эл-ты,$i = \overline{0, n-1}$

3. Для получившейся СЛАУ применим метод прогонки

   Уравнение под номером i содержит только 3 неизвестных y_{i-1}, y_i, y_{i+1}:

   $s_i y_{i-1} + z_i y_i + t_i y_{i+1} = r_i, i = \overline{1, n}$

   (a) Прямой ход:
   $i = 0, s_0 = 0, \delta_0 = -\frac{t_0}{z_0}, \lambda_0 = \frac{r_0}{z_0}$
   $i = \overline{1, n-1}, \delta_i = -\frac{t_i}{s_i \delta_{i-1} + z_i}, \lambda_i = \frac{r_i - s_i \lambda_{i-1}}{s_i \delta_{i-1} + z_i}$
   $i = n, t_0 = 0, \delta_n = 0, \lambda_n = \frac{r_n - s_n \lambda_{n-1}}{s_n \delta_{n-1} + z_n}$

   (b) Обратный ход:
   $i = n, y_n = \lambda_n$
   $i = \overline{1, n-1}, y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i$

Результат: столбец $y_i, i = \overline{0, n}$ - искомое решение ОДУ

2.2 Условия применимости метода

Критерий существования и единственности решения СЛАУ (**) в ычислительной погрешностью $O(h^2)$

$\forall x \in [a, b]$

$$\begin{cases} p(x) \geq 0, \\ p(x) \geq \frac{h}{2}|q(x)|, \\ r(x) \leq 0. \end{cases}$$

3 Предварительный анализ задачи

$y'' - tg(x)y' + 3y = \sin(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$p(x) = -tg(x), q(x) = 3, f(x) = \sin(x)$
Точное решение: $y = \sin(x)$,$y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$
Создаётся равномерная сетка на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

$y'' - tg(x)y' + 3y = \sin(x)$. Точное решение $y_{exact} = \sin(x)$
$x \in [a, b] = [0, \frac{\pi}{2}] : \{0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\}$ - сетка. $h = \frac{\pi}{8}$
$y(a) = 0, y(b) = 1$

$\frac{\pi}{8}: h^2 \cdot f(x) = \frac{\pi^2}{64}\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\pi^2}{128} \approx 0.0590$
$\frac{\pi}{4}: h^2 \cdot f(x) = \frac{\pi^2}{64}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{128} \approx 0.1090$
$\frac{3\pi}{8}: h^2 \cdot f(x) = \frac{\pi^2}{64}\sin(\frac{3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\pi^2}{128} \approx 0.1425$
$1 - \frac{h}{2}p_1 = 1 + \frac{\pi}{16}tg(\frac{\pi}{8}) = \frac{16+\pi\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{16} \approx 1.0813$
$1 - \frac{h}{2}p_2 = 1 + \frac{\pi}{16}tg(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\pi}{16} \approx 1.1963$
$1 - \frac{h}{2}p_3 = 1 + \frac{\pi}{16}tg(\frac{3\pi}{8}) = \frac{16+\pi\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{16} \approx 1.4740$
$1 + \frac{h}{2}p_1 = 1 - \frac{\pi}{16}tg(\frac{\pi}{8}) = \frac{16-\pi\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{16} \approx 0.9187$
$1 + \frac{h}{2}p_2 = 1 - \frac{\pi}{16}tg(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{16} \approx 0.8037$
$1 + \frac{h}{2}p_3 = 1 - \frac{\pi}{16}tg(\frac{3\pi}{8}) = \frac{16-\pi\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{16} \approx 0.5260$
$h^2q_1 - 2 = h^2q_2 - 2 = h^2q_3 - 2 = 3\frac{\pi^2}{64} - 2 \approx -1.5374$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0813 & -1.5374 & 0.9187 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1963 & -1.5374 & 0.8037 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4740 & -1.5374 & 0.5260 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0590 \\ 0.1090 \\ 0.1425 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ 1.0813y_0 - 1.5374y_1 + 0.9187y_2 = 0.0590, \\ 1.1963y_1 - 1.5374y_2 + 0.8037y_3 = 0.1090, \\ 1.4740y_2 - 1.5374y_3 + 0.5260y_4 = 0.1425, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Прямой ход:
$i = 0, \delta_0 = -\frac{t_0}{z_0} = 0.0000, \lambda_0 = \frac{r_0}{z_0} = 0.0000,$
$i = 1, \delta_1 = -\frac{t_1}{s_1\delta_0 + z_1} = 0.5976, \lambda_1 = \frac{r_1}{z_1} = -0.0384,$
$i = 2, \delta_2 = -\frac{t_2}{s_2\delta_1 + z_2} = 0.9771, \lambda_2 = \frac{r_2 - s_2\lambda_1}{s_2\delta_1 + z_2} = -0.1884,$
$i = 3, \delta_3 = -\frac{t_3}{s_3\delta_2 + z_3} = 5.4190, \lambda_3 = \frac{r_3 - s_3\lambda_3}{s_3\delta_3 + z_3} = -4.3294,$
$i = 4, \delta_3 = 0, \lambda_4 = \frac{r_4 - s_4\lambda_4}{s_4\delta_4 + z_4} = 1.0000$
Обратный ход:
$i = 4, y_4 = \lambda_4 = 1.0000$
$i = 3, y_3 = \delta_3 y_4 + \lambda_3 = 1.0897$
$i = 2, y_2 = \delta_2 y_3 + \lambda_2 = 0.8763$
$i = 1, y_1 = \delta_1 y_2 + \lambda_1 = 0.4853$
$i = 0, y_0 = \delta_0 y_1 + \lambda_0 = 0.0000$

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 0.4853, \\ y_2 = 0.8763, \\ y_3 = 1.0897, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Ошибки вычислений: $error(x) = y_{exact} - y(x)$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$R_n(x)$	0	0.1026	0.1692	0.1657	0

5 Подготовка контрольных тестов

Для анализа зависимостей решается уравнение $y'' - y'tg(x) + 3y = \sin x$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ методом конечных разностей 2 порядка. При количестве точек $[10, 100, 1000, 10000, 20000, 100000]$, а также вносится возмущение в начальное условие от 10^{-1} до 10^{-9}.

6 Модульная структура программы

MKR(вх: h, m, x, y;вых: res) Находит res краевой задачи на отрезке [a, b] с начальными условиями A и B, в n точках.

SolveMatrix(вх:$n, b[\ ], c[\ ], a[\ ], f[\ ]$, вых: $x_i,\ i = \overline{0, n}$) решает трёхдиагональную матрицу методом прогонки, где $b[\ ], c[\ ], a[\ ]$ - массивы коэффициентов лежащие над, на, под диагональю соответственно, $f[\ ]$ - столбец свободных членов, $x_i, i = \overline{0, n}$ - решение СЛАУ.

7 Анализ результатов

1. График ошибки на отрезке показывает, что ошибка нарастает при приближении к середине отрезка.
2. График ошибки на отрезке показывает, что при уменьшении шага в 2 раза, ошибка также уменьшается в 2 раза, что согласуется с теорией.
3. График зависимости максимальной ошибки от длины шага показывает, что ошибка уменьшается при уменьшении шага.
4. График завивисимости нормы ошибки от возмущения начального условия показывает, что ошибка убывает до 10^{-6} при уменьшении возмущения

8 Выводы

Метод конечных разностей прост в реализации и обладает хорошей скоростью сходимости.