Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по курсовой работе
тема "Сравнение решения ОДУ 2ого порядка методом Рунге-Кутты 3 порядка и методом конечных разностей 2 порядка"
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001 Золин И.М.
Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2022

1 Задание

Дано ОДУ 2-ого порядка $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 3y = \sin x$ и отрезок $[a; b]$: $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$. Точное решение: $y = \sin x$

Граничные условия задачи Коши: $y(a) = 0, y'(a) = 1$

Граничные условия краевой задачи: $y(a) = 0, y(b) = 1$

Найти решение задачи Коши для этого уравнения методом Рунге-Кутты 3 порядка. Найти решение краевой задачи для этого уравнения методом конечных разностей 2 порядка. Провести сравнение результатов по графикам ошибок на отрезке для двух значений шага. Исследовать зависимость нормы погрешности от возмущения начальных условий при фиксированном шаге.

2 Постановка задачи

Дано ОДУ 2-ого порядка: $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$

Граничные условия задачи Коши: $y(a) = A, y'(a) = V$

Граничные условия краевой задачи: $y(a) = A, y(b) = B$

Задача: найти решения задачи Коши и краевой задачи для данного уравнения на данном отрезке. Необходимо найти сеточную функцию решения этой задачи.

3 Предварительный анализ задачи

Создаётся равномерная сетка на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$: разобьем отрезок n+1 точкой, в каждой из которых будем искать значение функции y_i. Решением поставленных задач будем считать $y_i^1 = y(x_i^1)$ - компоненты каркаса для численного решения задачи Коши и $y_i^2 = y(x_i^2)$ - компоненты каркаса для численного решения краевой задачи. Непрерывную задачу сведем к дискретной. Для задачи Коши граничных условий достаточно, чтобы начать (используя разложение функции в ряд Тейлора до 3-й степени) последовательно находить значения функции в точках x_i, $i = 0..n$. Для краевой задачи аппроксимируем y'' и y', и подставляем полученные аппроксимации в исходное ОДУ, получая тем самым СЛАУ из n + 1 уравнения, где неизвестные - значения $y_i^2, i = 0..n$.

4 Алгоритмы

Для краевой задачи:

а) Условия применимости: Потребуем для функций $p(x), q(x), r(x), f(x)$ непрерывности хотя бы из класса $C^{(0)}$. Гарантировать же применимость метода прогонки будет выполнение условия диагонального преобладания для матрицы коэффициентов: $|c_i| \geq |b_i| + |d_i|$, где c_i, b_i, d_i - диагональные элементы, поддиагональные элементы и наддиагональные элементы соответственно. В частности, для метода конечных разностей и ОДУ это условие сводится к следующему:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0, \\ p(x) \geq \frac{h}{2}|q(x)|, \\ r(x) \leq 0. \end{cases}$$

Первое и второе условиея выполняются. Третье условие не выполняется. $(3 \geq 0)$. Значит не будет наблюдаться диагонального преобладания для метода прогонки. Без него метод не устойчив при малых и больших шагах.

б) Этапы решения: Подставить аппроксимированные значения производных в исходное ОДУ, получив тем самым СЛАУ, первая и последняя строки которой определяются граничными условиями 1 типа. Решить систему методом прогонки.

в) Алгоритм: Формулы аппроксимации:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2),\ y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Полученное дискретное ОДУ:

$$p_i\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + q_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + r_iy_i = f_i$$

Приведем подобные:

$$(p_i - \frac{h}{2}q_i)y_{i-1} + (h^2r_i - 2p_i)y_i + (p_i + \frac{h}{2}q_i)y_{i+1} = h^2f_i$$

Это уравнение заключает в себе строки СЛАУ для $i = 1..n-1$. Первая строка: $y_0 = A$, последняя строка: $y_n = B$. Решаем СЛАУ методом прогонки, т.е делаем прямой и обратный ход.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 - \frac{h}{2}q_1 & h^2r_1 - 2p_1 & p_1 + \frac{h}{2}q_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 - \frac{h}{2}q_2 & h^2r_2 - 2p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h^2r_{n-1} - 2p_{n-1} & p_{n-1} + \frac{h}{2}q_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ h^2f_1 \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{n-1} \\ B \end{pmatrix}$$

Прямой ход: в i-й строке выражаем y_i и для $i = 1..n-1$ последовательно подставляем выраженные значения y_{i-1}.

Переобозначим:

$$\begin{cases} b_i = p_i - \frac{h}{2}q_i, \\ c_i = h^2r_i - 2p_i, \\ d_i = p_i + \frac{h}{2}q_i, \\ e_i = f_ih^2 \end{cases}$$

$$b_iy_{i-1} + c_iy_i + d_iy_{i+1} = e_i$$

$i = 0, b_0 = 0, \delta_0 = -\frac{d_0}{c_0}, \lambda_0 = \frac{e_0}{c_0}$

$i = \overline{1, n-1}, \delta_i = -\frac{d_i}{b_i\delta_{i-1}+c_i}, \lambda_i = \frac{e_i - b_i\lambda_{i-1}}{b_i\delta_{i-1}+c_i}$

$i = n, d_n = 0, \delta_n = 0, \lambda_n = \frac{e_n - b_n\lambda_{n-1}}{b_n\delta_{n-1}+c_n}$

Обратный ход: в i-ю строку подставляем значения y_{i+1} для $i = n-1..1$, получая тем самым искомые значения $y_i, i = 0..n$.

$i = n, y_n = \lambda_n$

$i = \overline{n-1, 1}, y_i = \delta_iy_{i+1} + \lambda_i$

г) Теоретические расчёты: Метод конечных разностей изначально предполагается первого порядка. Однако порядок метода в данном случае определяется степенью аппроксимации производных при граничных условиях. Условия 1-ого типа выполняются точно и порядок схемы полностью определяется порядком аппроксимации ДУ, и метод приобретает второй порядок, что в теории говорит о том, что при уменьшении величины шага на один порядок, точность должна увеличиваться на два. Устойчивость работы метод конечных разностей при внесении возмущения в начальные условия: ошибка убывает линейно с уменьшением возмущения до определённого значения(подвеженного условию O(h^2)), далее следует стабилизация ошибки.

Для задачи Коши:

а) Условия применимости: По теореме о существовании и единственности задачи Коши, если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) $F(x, y, z)$ имеет ограниченную по модулю производную по x и F удовлетворяют условию Липшица по y $|F(x, y_1, z) - F(x, y_2, z)| \leq L|y_2 - y_1|$ для любых $(x, y_1, z), (x, y_2, z)$, то существует окрестность (x_0, y_0, z_0), в которой решение будет, и притом единственное. Условия выполняются $\rightarrow$ решение единственно.

б) Этапы решения: идею методов Рунге-Кутты для ОДУ 1 порядка экстраполируем на ОДУ 2 порядка, произведя замену $z = y'$. Получим систему из двух уравнений. На каждом шаге будем вычислять 3 поправки, которые в своей линейной комбинации и будут составлять значение y_i на каждом шаге.

в) Алгоритм: Введем обозначения:

$$\begin{cases} z = y', \\ z' = F(x, y, z) \end{cases}$$

Для каждого x_i будем вычислять следующие выражения:
$k_1 = F(x_i, y_i, z_i);$
$t_1 = z_i;$

$k_2 = F(x_i + \frac{h}{3}, y_i + t_1\frac{h}{3}, z_i + k_1\frac{h}{3});$
$t_2 = z_i + k_1\frac{h}{3};$

$k_3 = F(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + t_2\frac{2h}{3}, z_i + k_2\frac{2h}{3});$
$t_3 = z_i + k_2\frac{2h}{3};$

Причем y_0 и z_0 для x_0 задаются начальными условиями, а для последующих $x_i, i = 1..n$, y_{i+1} и z_{i+1} вычисляются по формулам со значениями k_j и $t_j, j = 1, 2, 3$ предыдущего шага:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3);$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(t_1 + 3t_3);$$

г) Теоретические расчёты: Метод Рунге-Кутты локально имеет 4 порядок, но из-за накопления ошибки порядок снижается до 3-ого. Это означает, что в теории при уменьшении величины шага на один порядок должна прослеживаться тенденция увеличения точности на 3 порядка. При этом надо рассчитывать на то, что для точек, лежащих ближе к правому концу исходного отрезка, 3-ий порядок будет наблюдаться. Устойчивость работы метода Рунге-Кутты при внесении возмущения в начальные условия: ошибка убывает линейно с уменьшением возмущения до определённого значения(подвеженного условию O(h^3)), далее следует стабилизация ошибки.

5 Контрольные тесты

ОДУ 2-ого порядка: $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$
$p(x) = 1, q(x) = -\operatorname{tg} x, r(x) = 3, f(x) = \sin x$

Отрезок $[a; b]$: $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$

Граничные условия задачи Коши: $y(a) = 0, y'(a) = 1$

Граничные условия краевой задачи: $y(a) = 0, y(b) = 1$

а) Построим графики решений краевой задачи и задачи Коши для двух шагов: $h = \frac{\pi}{22}$ и $h = \frac{\pi}{44}$.

б) Измерим нормы погрешности в зависимости от возмущения начальных условий при фиксированном шаге. Будем брать шаг $h = \frac{\pi}{2998}$ и получать бесконечную норму погрешности, также вносится возмущение в н.у.: $\delta = 10^{-1}...10^{-9}$;

без возмущений(было): $y(a) = y_a$, с возмущениями: $\tilde{y_a} = y_a + \delta$,$\tilde{y_a} = \sin(a) + \delta = \delta$

6 Численный анализ

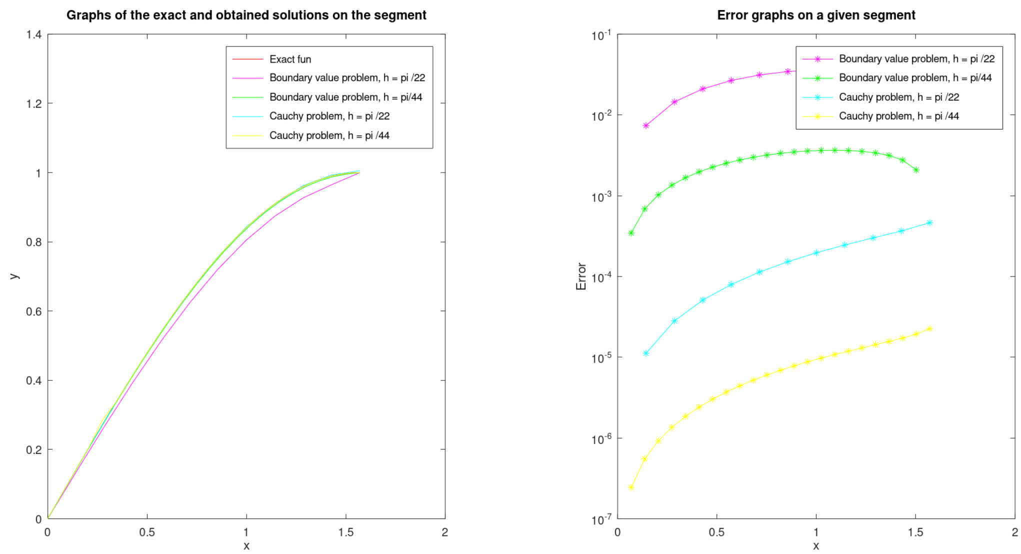

Рис. 1: Сравнение результатов по графикам ошибок на отрезке для двух значений шага

Заметно, что увеличение числа точек положительно сказывается на сходимости обеих задач. Также оба графика явно демонстрируют следующее: в задаче Коши ошибка действительно накапливается и достигает своего максимального значения на правом конце отрезка. В случае же краевой задачи с граничными условиями 1-ого типа ошибки на концах отрезка принимают нулевые значения, в то время как максимальная ошибка находится левее середины отрезка.

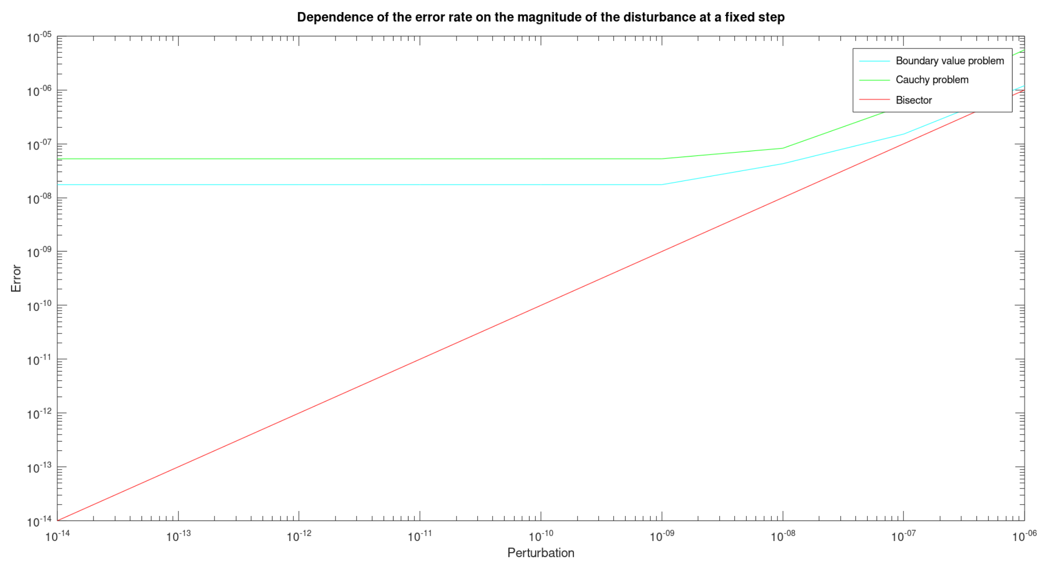

Рис. 2: Зависимость нормы погрешности от возмущения начальных условий при фиксированном шаге

По графику можно заметить, что при шаге $h = \frac{\pi}{2998}$ при малых возмущениях(меньше

10^{-6}, 10^{-7}) ошибка стабилоизировлась, и точность у краевой задачи порядка 10^{-7}, у задачи Коши 10^{-8}. Тем самым подтверждаются теоритические расчёты и порядки методов(точности $O(h^2), O(h^3)$ у МКР и Рунге-Кутты соответсвенно). При больших возмущениях(больше 10^{-6}, 10^{-7}) как и согласно теоретиечским расчётам: ошибка при уменьшении числа возмущения в начальные условия монотонно убывает.

7 Выводы

Проводя сравнение погрешностей для метода Рунге-Кутты и метода конечных разностей, можно говорить о следующем: как показали результаты исследований, задача Коши устойчива к возмущениям начальных данных. Получилось, что метод Рунге-Кутты более предпочтителен для обработки данных, в которых предполагается ошибка.