1 тема. Приближение функций

1. Постановка задачи. Дан набор точек $(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n)$. Задача алгебраической интерполяции. Найти такой полином $P(x)$, который проходит через заданную систему точек $P(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$

Условия на точки. Чтобы полином был единственным степень его должна быть на единицу меньше количества точек (n+1 – число точек, n – степень) и все точки должны быть попарно различны

1.2. Постановка для построения полинома Эрмита. Дан набор точек $(x_0, y_0, y_0'), \quad (x_1, y_1, y_1'), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, y_n')$, в который дополнительно входят значения производных в узлах. Задача найти такой полином $P(x)$, который проходит через заданную систему точек $P(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$, и имеет в узлах заданные наклоны $P'(x_i) = y_i', \quad i = \overline{0, n}$

Здесь единственный полином будет степени на единицу меньше количества условий (2n+2 – условия, 2n+1 – степень). Попарное различие так же является необходимым

Важно! Полином единственный, а методов построения может быть несколько

2. Методы построения

2.1. Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

2.2. Формула Ньютона для интерполирования вперед

$$P_n(x) = y(x_0) + (x - x_0) y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) y(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) y(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} y(x_0, x_1, \ldots, x_i) \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

2.3. Формула Ньютона для интерполирования назад

$$P_n(x) = y(x_n) + (x - x_n) y(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) y(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1) y(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} y(x_{n-i}, x_{n-i+1}, \ldots, x_n) \prod_{k=n-i+1}^{n} (x - x_k)$$

Разделенной разностью первого порядка называется величина $y(x_i, x_j) = \dfrac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$. Разделенные разности второго и третьего порядка определяются аналогично

$$y(x_i, x_j, x_k) = \frac{y(x_j, x_k) - y(x_i, x_j)}{x_i - x_k}, \quad y(x_i, x_j, x_k, x_l) = \frac{y(x_j, x_k, x_l) - y(x_i, x_j, x_k)}{x_l - x_i}$$

	1пор	2пор	3пор	4пор	5пор
y_0	$y(x_0,x_1)$	$y(x_0,x_1,x_2)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$
y_1	$y(x_1,x_2)$	$y(x_1,x_2,x_3)$	$y(x_1,x_2,x_3,x_4)$	$y(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$	
y_2	$y(x_2,x_3)$	$y(x_2,x_3,x_4)$	$y(x_2,x_3,x_4,x_5)$		
y_3	$y(x_3,x_4)$	$y(x_3,x_4,x_5)$			
y_4	$y(x_4,x_5)$				
y_5					

Для полинома Ньютона слева-направо необходимо вычислить все разности в первой строке. Для полинома Ньютона справа-налево – все разности на диагонали. Всего для вычисления полинома нужно (n+1) разность (включая значение функции). Разности вычисляются заранее, до использования основной формулы

2.4. Полином Эрмита

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ (x - x_j) y'_j + \left(1 - 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_j - x_k} \right) y_j \right\} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2$$

Степень полинома Эрмита почти в 2 раза выше, чем степень полиномов Лагранжа и Ньютона, если все они построены на сетках с одинаковым числом узлов

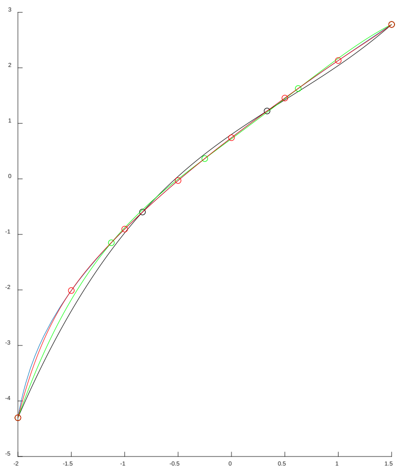
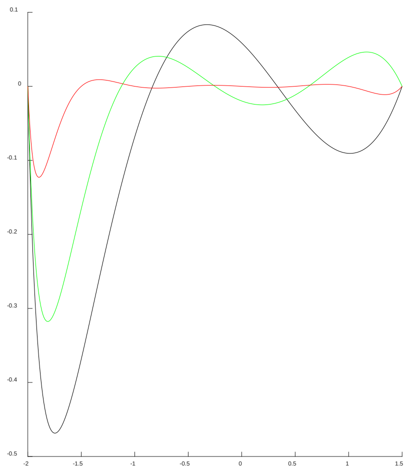
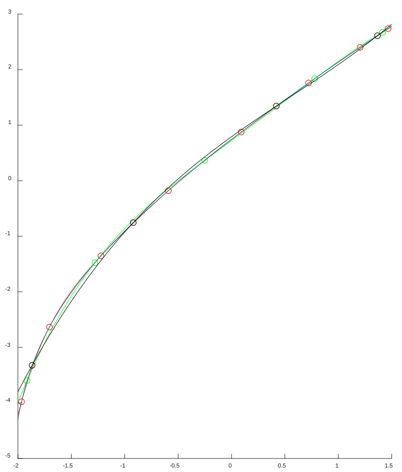
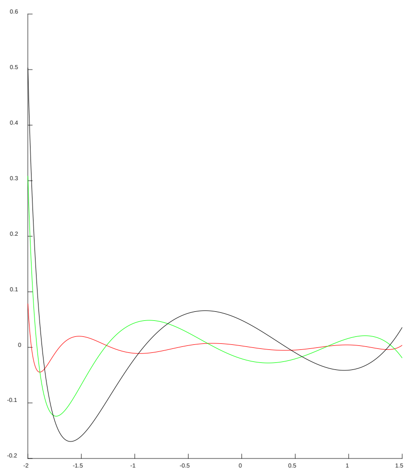
3. Сетки

Равномерная $x_i \in [a,b] \quad x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = \overline{0,n}$

Чебышевская $t_k \in [-1,1] \quad t_k = \cos \frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0,n}$ и $x_k \in [a,b] \quad x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k, \quad k = \overline{0,n}$

Границы отрезка являются узлами равномерной сетки и НЕ принадлежат сетке Чебышева

4. Пример построения полинома на равномерных сетках и сетках Чебышева из 4х, 5ти и 6ти узлов

 	Синяя – исходная ф-я Черная, Зеленая и Красная – соответственно полиномы и разности между полиномом и функцией
 	

5. Исследование зависимости **ошибки от количества узлов**. Ошибка зависит от значений производной исходной функции на отрезке, количества узлов и их расположения

$$\left| f(x) - P(x) \right| = \left| f^{(n+1)}(\eta) \right| \frac{\left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|}{(n+1)!} = \left| f^{(n+1)}(\eta) \right| \frac{\left| \omega_{n+1}(x) \right|}{(n+1)!}$$

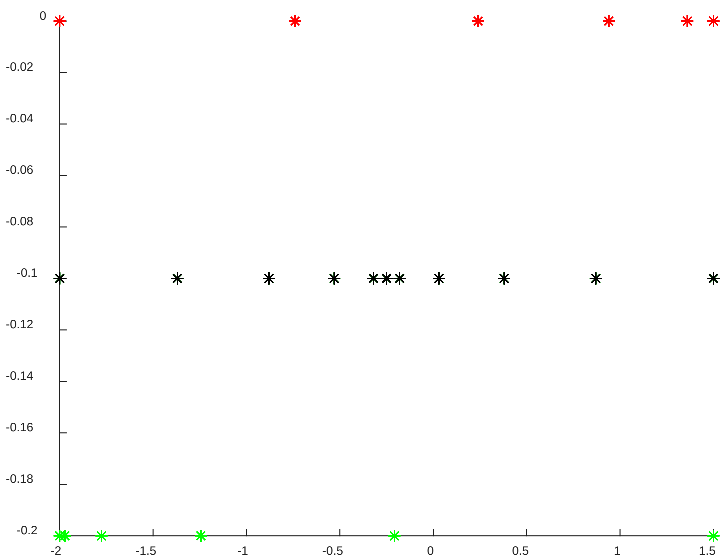
На равномерных сетках при увеличении количества узлов дробь сначала уменьшается, но после некоторого количества узлов начинает увеличиваться.

На сетке Чебышева дробь с увеличением количества узлов уменьшается, поэтому поведение ошибки зависит только от значения производной

По построенному графику должно быть видно поведение ошибки:

- уменьшается до машинной точности и продолжает колебаться около эти значений
- уменьшается до определенных значений, потом с той же скоростью начинает увеличиваться, и в какой-то момент становится больше первоначальной ошибки
- уменьшается до машинной точности, колеблется около этих значений и медленно начинает расти (рост много медленней, чем убывание)

6. Сгущение сетки в некоторой области отрезка позволяет уменьшить ошибку в данном месте, а возможно и на всем отрезке. Пример сгущения узлов сетки около границ и центра

$x_i = b - \frac{[(n-i)h]^3}{(b-a)^2} = b-(b-a)\left(\frac{n-i}{n}\right)^3, \quad i=\overline{0,n}, \quad nh=b-a$ $x_{\pm i} = \frac{a+b}{2} \pm 2\frac{(ih)^2}{(b-a)} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}\left(\frac{i}{n}\right)^2, \quad i=\overline{0,n}, \quad 2nh=b-a$ $x_i = a + \frac{(ih)^2}{(b-a)} = a+(b-a)\left(\frac{i}{n}\right)^2, \quad i=\overline{0,n}, \quad nh=b-a$	Красная – сгущение у правой границы отрезка Черная – симметричное сгущение в середине отрезка Зеленая – сгущение у левой границы отрезка
	

7. Функция с нарушением гладкости

Есть функция $f(x)$. Хотим сделать у нее «угол» в точке t. Опускаем функцию, чтобы в точке t ее значение было 0, отражаем от горизонтали при помощи операции модуль и снова поднимаем на прежнее место

Исходная функция – монотонно возрастающая: на [-2,0] – зеленая, на [0,1.5] – красная Функции с «углом»: Красная $g(x) = \lvert f(x) - f(t) \rvert + f(t)$ Зеленая $g(x) = f(t) - \lvert f(t) - f(x) \rvert$