Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 4
тема "Алгебраическая проблема собственных значений"
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001 Золин И.М.
Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2021

1 Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формулировка задания

1. Найти два максимальных по модулю, но разных по знаку собственных числа, используя метод скалярных произведений.

2. С помощью метода обратных итераций со сдвигом уточнить собственные числа и найти собственные векторы матрицы.

3. Исследовать зависимости нормы фактической точности для собственных чисел и собственных векторов, нормы невязки $||Ax - \lambda x||$ и числа итераций от заданной точности.

1.2 Постановка задания

Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Если выполнено условие $A \cdot X = \lambda \cdot X$,где X - ненулевой вектор, λ - это число, то X – это собственный вектор (СВ) матрицы A. λ - это собственное число (СЧ) матрицы A, соответсвующее СВ X.

$A \cdot X = \lambda \cdot X \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow p_0\lambda^n + p_1\lambda^{(n-1)} + ... + p_n$

Из основной теоремы алгебры следует, что матрица A имеет ровно n СЧ.

Требуется решить частичную алгебраическую проблему собственных значений: найти два максимальных по модулю, но разных по знаку собственных числа, используя метод скалярных произведений.

2 Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Метод скалярных произведений

2.1.1 Алгоритм

1. Входные данные: матрица А, заданная точность ϵ
2. Цикл:
k = 1
Повторяй:
$y^{(k)} = Ax^{(k-1)}$
$z^{(k)} = Ay^{(k)}$
$\lambda^{(k)} = \sqrt{\frac{(z^{(k)},x^{(k-1)})}{(x^{(k-1)},x^{(k-1)})}}$
$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{||y^{(k)}||_2}$
$w_1^{(k)} = z^{(k)} + \lambda \cdot y^{(k)}$
$w_2^{(k)} = z^{(k)} - \lambda \cdot y^{(k)}$
$k++$

Пока:$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| > \epsilon$
Конец
3. Результат: $\lambda = \lambda^{(k)}, w_1 = w_1^{(k)}, w_2 = w_2^{(k)}$

2.1.2 Условия применимости метода

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа, исследуемой матрицы А, причём $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq ... \geq |\lambda_n|$, матрица А - матрица простой структуры и симметричная. Тогда метод скалярных произведений сходится.

3 Предварительный анализ задачи

Согласно теореме: если матрица вещественная и симметричная, то она является матрицей простой структуры. Будем задавать матрицы, удовлетворяющие данному критерию.

Такие матрицы будем искать с помощью QR-разложения из пакета Matlab, где матрица Q – ортогональная, R - верхнетреугольная.(Генерируются матрица, полученную матрицу представляем в виде QR-разложения, т.е. умножения 2 матриц Q и R). С помощью QR-разложения находим матрицу Q.

Задается диагональная матрица D, у нее на диагонали – собственные числа.

Нужная симметричная матрица получается следующим образом: $A = Q \cdot D \cdot Q^T$

4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

$$A = \begin{pmatrix} -0.5222 & 0.8527 & -0.0134 \\ 0.8428 & 0.5135 & -0.1613 \\ 0.1306 & 0.0955 & 0.9868 \end{pmatrix}$$

Точные собственные числа: $\lambda_{1,2} = \pm 7, \lambda_3 = 1$

Точные собственные векторы:

$X_1 = \begin{pmatrix} 0.8527 \\ 0.5135 \\ 0.0955 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -0.5222 \\ 0.8428 \\ 0.1306 \end{pmatrix}$,

$X_3 = \begin{pmatrix} -0.0134 \\ -0.1613 \\ 0.9868 \end{pmatrix}$,

Начальное приближение: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

1-ая итерация:

$$y^{(1)} = A \cdot x^{(0)} \begin{pmatrix} 5.9842 \\ 1.4214 \\ 0.7890 \end{pmatrix}$$

$$z^{(1)} = A \cdot y^{(0)} \begin{pmatrix} 28.5948 \\ 31.9222 \\ 6.0812 \end{pmatrix}$$

$\|y^{(1)}\| = 6.2011$

$\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{(z^{(1)}, x^{(0)})}{(x^{(0)}, x^{(0)})}} = 6.2006$

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{||y^{(1)}||} = \begin{pmatrix} 0.9650 \\ 0.2292 \\ 0.1272 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{(1)} = z^{(1)} + \lambda y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8415 \\ 0.5217 \\ 0.1405 \end{pmatrix}$$

$$w_2^{(1)} = z^{(1)} - \lambda y^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.3452 \\ 0.9373 \\ 0.0482 \end{pmatrix}$$

2-ая итерация:

$$y^{(2)} = A \cdot x^{(1)} \begin{pmatrix} 4.6112 \\ 5.1478 \\ 0.9807 \end{pmatrix}$$

$$z^{(2)} = A \cdot y^{(1)} \begin{pmatrix} 47.3347 \\ 11.8167 \\ 2.6522 \end{pmatrix}$$

$\|y^{(2)}\| = 6.9803$
$\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{(z^{(2)}, x^{(1)})}{(x^{(1)}, x^{(1)})}} = 6.9803$

$$x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{||y^{(2)}||} = \begin{pmatrix} 0.6606 \\ 0.7375 \\ 0.1405 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{(2)} = z^{(2)} + \lambda y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8529 \\ 0.5121 \\ 0.1019 \end{pmatrix}$$

$$w_2^{(2)} = z^{(2)} - \lambda y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5262 \\ -0.8378 \\ -0.1457 \end{pmatrix}$$

3-ья итерация:

$$y^{(3)} = A \cdot x^{(2)} \begin{pmatrix} 6.7811 \\ 1.6929 \\ 0.3800 \end{pmatrix}$$

$$z^{(3)} = A \cdot y^{(2)} \begin{pmatrix} 32.3763 \\ 36.2199 \\ 6.3708 \end{pmatrix}$$

$\|y^{(3)}\| = 6.9996$
$\lambda^{(3)} = \sqrt{\frac{(z^{(3)},x^{(2)})}{(x^{(2)},x^{(2)})}} = 6.9996$

$$x^{(3)} = \frac{y^{(3)}}{||y^{(3)}||} = \begin{pmatrix} 0.9688 \\ 0.2419 \\ 0.0543 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{(3)} = z^{(3)} + \lambda y^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.8527 \\ 0.5134 \\ 0.0964 \end{pmatrix}$$

$$w_2^{(3)} = z^{(3)} - \lambda y^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.5221 \\ 0.8432 \\ 0.1284 \end{pmatrix}$$

5 Подготовка контрольных тестов

Создаётся симметричная матрица $A_{10\times10}$ для нахождения собственных чисел с помощью метода скалярных произведений с точностью $\epsilon = 10^{-i}$, где $i \in [0, 15], i \in \mathbb{N}$. Собственные числа:[-50, 50, 1, 8, 2, 7, 6, 5, 3, 4]

6 Модульная структура программы

ScalarProductMethod(вх: A, ϵ, вых: $\lambda_{1,2}, w_{1,2}, n$) Находит максимальные собственные числа разные по знаку матрицы A $\lambda_{1,2}$ и соответствующие им собственные вектора $w_{1,2}$ с помощью метода скалярных произведений за n итераций с заданной точностью ϵ.

7 Анализ результатов

1.По графику зависимости количества итераций метода скалярных произведений от заданной точности видно, что количество итераций увеличивается линейно [3 4 4 5 5 6 6 7 8 8 9 9

10 11 13]. При изменении ϵ на порядок количество итераций изменяется примерно на 1.

2. Графики заивисимости с.в. и невязок от заданной точности параллельны. Также все графики достигают минимум точности $\epsilon = 10^{-11}$.

8 Выводы

С помошью метода скалярных произведений достигается заданная точность нахождения собственных чисел, при хорошей отделимости. Также с хорошей отделимостью требуется меньшее количество итераций для нахождения собственных чисел и собственных векторов.