Задача Коши. Методы Рунге –Кутты

Задача Коши в простейшем случае ставится для дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием

$$y' = f(x,y) \quad x \in [a,b] \quad y(a) = y_a$$

Строится сетка ($x_0=a$, $x_n=b$) на отрезке $[a,b]$ (в общем случае она может быть неравномерной). Методы Рунге-Кутты строятся с наперед заданной точностью **s** по схеме

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^{s} \rho_j k_j \quad k_j = f(x_i + \alpha_j h_i, y_i + h_i \sum_{m=1}^{j-1} \beta_{jm} k_m)$$

Все методы Рунге-Кутты являются

- одношаговыми - значение решения в следующей точке находится только по значению решения в предыдущей точке)

- явными – неизвестная величина стоит слева от знака равенства, а все что справа – известно

Простейшим методом Рунге-Кутты является метод 1 порядка точности – метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_0 = y_a - \text{известно}$$

Методы Рунге-Кутты 2 порядка

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \tilde{y}_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i, \tilde{y}_{i+1}) \right], \quad \text{метод Эйлера} - \text{Коши}$$

$$\alpha = 1 \quad \tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i + \frac{h_i}{2}, \tilde{y}_{i+1}), \quad \text{модифицированный метод Эйлера}$$

В литературе существуют другие названия этих методов

Схемы методов Рунге-Кутты 3его и 4ого порядков

Во всех схемах $k_1 = f(x_i, y_i)$

Схемы 3ого порядка		Схемы 4ого порядка	
1/2	1/3	1/2	1/3
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+1}, y_i - hk_1 + 2hk_2)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i + \frac{2hk_2}{3})$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_2}{2})$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i - \frac{hk_1}{3} + hk_2)$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3)$

Метод Эйлера – единственный метод 1ого порядка, а методов 2ого порядка и далее можно создать бесконечно много

Достижение точности в методах Рунге-Кутты

Во всех вышеприведенных формулах величина шага может быть изменена при переходе от одной точке к другой. Один из способов вычислить значение функции с определенной точностью – это применить правило Рунге. Тогда алгоритм действий для получения следующего значения функции будет такой

1. Вычислить y_{i+1} с помощью y_i с шагом $h=x_{i+1}-x_i$
2. Вычислить y_{i+1} с помощью y_i с шагом $h/2$ (от точки x_i необходимо сделать два шага до точки x_{i+1})
3. Вычислить поправку $\frac{y_{i+1}^{h}-y_{i+1}^{h/2}}{2^k-1}$ (здесь k – порядок метода) и сравнить ее с точностью
4. Если точность больше поправки, то повторить действия начиная с п.2., уменьшив шаг в 2 раза.
5. Если поправка меньше точности, то перейти к следующей точке.

В схемах четвертого порядка на каждом шаге можно вычислять величину $\Theta=\left|\frac{k_2-k_3}{k_1-k_2}\right|$. Если это число меньше 0,05 (нескольких сотых), то шаг считается выбранным правильно, иначе шаг следует уменьшить.

Как и в любом итерационном методе, мы будем следить за сходимостью метода по двум зависимостям

- фактическая точность от задаваемой точности. Здесь под фактической точностью понимается норма (лучше бесконечная) разности значений полученной функции и точного решения

- число итераций от задаваемой точности. Итерации – это число разбиений отрезка (степень 2) для достижения заданной точности. Эти числа могут быть не одинаковые для различных точек отрезка, поэтому на график выносится максимальное из них: при таком числе разбиений мы точно достигнем нужной точности

Также можно поступать «наоборот». Менять шаг вычислять фактическую точность. Тогда график строится от величины шага.

Исследовательская часть работы

Понятно, что решение будет зависеть от начальных условий, и, если условия заданы с ошибкой, эти ошибки могут сказаться на решении задачи. Нужно будет внести в начальные условия (по x или/и по y) некоторую ошибку и проследить за «реакцией решения» на эту ошибку. Итог: зависимость фактической погрешности от величины ошибки