Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 3
тема "Решение интегралов с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса"
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001 Золин И.М.
Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2022

1 Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формулировка задания

Пусть требуется найти значение интеграла Римана $\int_a^b f(x)dx$ которой заданной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$. Известно, что для функций, допускающих на этом промежутке конечное число точек разрыва первого рода, такое значение существует, единственно и может быть формально получено по определению:

$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

где $[x_i]_{i=0}^{n}$ произвольная упорядоченная система точек отрезка $[a, b]$ такая, что $max[x_0 - a; x_i - x_{i-1}; b - x_n] \to 0$ при $n \to \infty$, а ξ_i, такая точка $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. В математическом анализе обосновывается аналитический способ нахождения значения определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница $I = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ есть некоторая первообразная функции $f(x)$. Но, не всегда можно воспользоваться этим подходом. Во-первых, первообразная среди элементарных функций не существует для большинства элементарных функций. Во-вторых, вычисление $F(b) - F(a)$ может быть значительно сложнее, чем вычисление существенно большего числа $f(x)$. В этой лабораторной работе используется формула Симпсона. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2N$ интервалов длиной $h = \frac{b-a}{2N}$.

$x_k = a + kh, k = 0, ..., 2N$

Тогда формула правых Симпсона примет вид:

$S_{3,N}(f) = \frac{h}{3}(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{N} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_{2k}))$

Для оценки погрешности вычисления определенного интеграла воспользуемся правилом Рунге: $\Delta_{2n} \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{2^m - 1}$ для формулы Симпсона m = 4

1.2 Формализация задания

Требуется найти значение интеграла Римана $\int_a^b f(x)dx$ функции $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$ на отрезке [-3.3, 0.9] с помощью формулы Симпсона исследовать:

- зависимость погрешности от измельчения шага;
- сравнение теоретической и фактической погрешностей;
- влияние заданной точности на количество вычислений.

2 Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Построение интерполяционного полинома в форме Лангранжа:

2.1.1 Алгоритм

1. Входные данные: пусть x – аргумент интерполяционного полинома; xk,yk – сетка и сеточная функция;
2. Цикл:
k = 0, i = 0, $basics = 0, res = 0$
для i от 0 до size:
mul = 1.0;
для k от 0 до size:
если k не равно i:
домножить basics на величину $frac(x - xk[k])(xk[i] - xk[k])$;
конец «если»
конец цикла
прибавить к res величину yk[i] * basics
конец цикла
вернуть res;
Конец
3. Результат: res

Построение чебышевской сетки на выбранном интервале:
$x^{(0)} \in R^n, y^{(1)} = A * x^{(1)} x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\mu_1}, \mu_1 = ||x^{(1)}||$

2.1.2 Условия применимости метода

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа, исследуемой матрицы A, причём $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq ... \geq |\lambda_n|$, матрица A - матрица простой структуры и симметричная. Тогда метод скалярных произведений сходится.

3 Предварительный анализ задачи

Согласно теореме: если матрица вещественная и симметричная, то она является матрицей простой структуры. Будем задавать матрицы, удовлетворяющие данному критерию.

Такие матрицы будем искать с помощью QR-разложения из пакета Matlab, где матрица Q – ортогональная, R - верхнетреугольная.(Генерируются матрица, полученную матрицу представляем в виде QR-разложения, т.е. умножения 2 матриц Q и R). С помощью QR-разложения находим матрицу Q.

Задается диагональная матрица D, у нее на диагонали – собственные числа.

Нужная симметричная матрица получается следующим образом: $A = Q \cdot D \cdot Q^T$

4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

Пусть дана функция $f(x) = 2xsinx$. Требуется найти значение определённого интеграла $I = \int_0^{\pi} f(x)dx$

Точное значение интеграла $I = \int_0^{\pi} f(x)dx$ можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница. $I_e = 2\pi = 6.28318$

1. $h = \frac{\pi-0}{2}$
   $I_1 = \frac{h}{3}(f(0) + f(\pi) + 4f(\frac{\pi}{2})) = 6.57974$
   $error = |6.28318 - 6.57974| = 0.29656$ $runge = 0.46324$
2. $h = \frac{\pi-0}{4}$
   $I_2 = \frac{h}{3}(f(0) + f(\pi) + 4(f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{4})) + 2f(\frac{\pi}{2})) = 6.29751$
   $error = |6.28318 - 6.29751| = 0.01433$ $runge = 0,01881$
3. $h = \frac{\pi-0}{8}$
   $I_3 = \frac{h}{3}(f(0)+f(\pi)+4(f(\frac{\pi}{8})+f(\frac{3\pi}{8})+f(\frac{5\pi}{8})+f(\frac{7\pi}{8}))+2(f(\frac{\pi}{4})+ f(\frac{\pi}{2})) + f(\frac{\pi}{2})) = 6.57974$
   $error = |6.28318 - 6.57974| = 0.00085$ $runge = 0,00089$

5 Подготовка контрольных тестов

Создаётся симметричная матрица $A_{10\times10}$ для нахождения собственных чисел с помощью метода скалярных произведений с точностью $\epsilon = 10^{-i}$, где $i \in [0, 14], i \in \mathbb{N}$. Собственные числа:[-10, 10, 1, 8, 2, 7, 6, 5, 3, 4]

6 Модульная структура программы

SimpsonMethod(вх: a, b, f, ϵ, вых: $I, iter$) - считает интеграл с помощью метода Симпсона. Входные аргументы: $[a, b]$ - отрезок, на котором считается интеграл, f - интегрируемая функция, ϵ - заданная точность. Возвращаемое значение: $iter$ - количество разбиений при котором достигается заданная точность, I - вычисленный интеграл с заданной точностью ϵ.

7 Анализ результатов

1.

1.По графику зависимости количества итераций метода скалярных произведений от заданной точности видно, что количество итераций увеличивается линейно [4 5 7 9 11 14 16 19 24 29 34 39 44 50]. При изменении ϵ на порядок количество итераций изменяется примерно на 20.

2. Графики заивисимости с.в. и невязок от заданной точности линейны.

8 Выводы

1. С увеличением числа шагов метода Симпсона величины теоретической и практической ошибок уменьшаются.
2. Для достижения большей точности требуется выполнить большее число операций.
3. Метод Симпсона достаточно прост в реализации и сможет обеспечить высокую точность вычислений.