Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 2
тема "Решение систем линейных алгебраических уравнений.Прямые методы"
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001 Золин И.М.
Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2021

1 Формулировка задачи и её формализация

Дана система из n линейных уравнений с n неизвестными. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, ..., n$, где x_j неизвестные, a_{ij} коэффициенты системы и b_i компоненты вектора правой части.
В матричной форме $Ax = b$, где $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ матрица коэффициентов, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$вектор правой части и $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ вектор неизвестных. Требуется найти x, прямой численный метод Вращения решения СЛАУ.

Задача:

1. Решить СЛАУ, используя метод вращения

2. Построить график зависимости погрешности решения от числа обусловленности матрицы.

2 Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Алгоритм

Алгоритм делится на две подзадачи: прямой ход Методом вращений, с помощью которого приведем матрицу к верхнетреугольному виду и обратный ход Методом Гаусса, с помощью которого последовательно выразим переменные.

1. Прямой ход методом вращений:

   (a) Заменим i-ое уравнение линейной комбинацией i-го и j-го уравнений, умноженных на c_{ij} и s_{ij} соответственно. Новое j-е уравнение - линейная комбинация i-го и j-го уравнений с коэффициентами $-s_{ij}$ и c_{ij}, , при $i = 1, 2, ..., n$; $j = 2, 3, .., n; j > i$,, $k = 2, 3, .., n; k > i$ и $c^2 + s^2 = 1$
   $c = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}$
   $s = \frac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}$
   $a_{ii} = c \cdot a_{ii} + s \cdot a_{ji}$
   $b_i = c \cdot b_i + s \cdot b_j$
   $b_j = -s \cdot b_i + c \cdot b_j$

(b) Проводим действия для i-ых и j-ых столбцов.
$a_{ik} = c \cdot a_{ik} + s \cdot a_{jk}$
$a_{jk} = -s \cdot a_{ik} + c \cdot a_{jk}$
В общем случае преобразования можно описать так в матричном виде: $A^{(1)}X = B^{(1)}$
$A^{(1)}X = T_{1n} \cdots T_{13}T_{12}B^{(1)}$
...
$A^{(n-1)}X = B^{(-1)}$
где $A^{(n-1)} = T_{n-1,n}A^{(n-2)}$, $b^{(n-1)} = T_{n-1,n}b^{(n-2)}$
где

$$T_{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix} c_{ij} & s_{ij} & \dots & 0 \\ -s_{ij} & c_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

матрица поворота, задаваемая номерами исключаемого переменного i из уравнения j и углом поворота φ.

Стоит отметить, что норма любого вектор-столбца расширенной матрицы системы остается такой же, как у соответствующего столбца исходной системы.

2. Обратный ход метода Гаусса:

$x_k = \frac{1}{a_{ii}^{(n-1)}}(b_i^{(n-1)} \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j)$, где x_i - соответственно i-я компонента искомого вектора X.

2.2 Условия применимости метода

1. Требование: матрица коэффициентов СЛАУ не является вырожденной, т.е. $det(A) \neq 0$ Это следует из условий построения матрицы $(A = Q \cdot D \cdot Q')$ Q - ортогональная, а значит невырожденная матрица. D - диагональная, с ненулевыми элементами на диагонали - тоже невырожденная. Значит, их произведение - невырожденная матрица A. Тогда система имеет решение, причём единственное.

3 Предварительный анализ задачи

Для анализа зависимости погрешности решения от числа обусловленности нужно создать симметричные, положительно определённые матрицы 10x10. Для этого:

1. Заполняем диагональные элементы матрицы D от 1 до заданного числа обусловленности.
2. Находим ортогональную матрицу $Q = E - 2\frac{WW^T}{W^TW}$, где E - единичная матрица, $W \in M_{10\times1}$
3. Находим матрицу $A = Q \cdot D \cdot Q'$

В качестве решения берём столбец $x = (1, 2, ..., 10)$, получаем столбец $b = Ax$, для которого мы знаем точное решение.

4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5, \\ -x - y + 2z = -1, \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Запишем в матричном виде, проведем прямой ход:

1. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{array}\right)$$

Теперь проведем обратный ход методом Гаусса:

1. z = 1
2. y = 2
3. x+y+2z=5

Получили столбец-решение

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5 Подготовка контрольных тестов

В качестве проверки полученных результатов строим график зависимости относительной погрешности $\frac{\|x-x^*\|}{\|x^*\|}$ вычислений от выбранного числа обусловленности cond, где x^* - точное решение, сгенерированное в MATLAB, а x - решение, полученное реализованным методом на Си.

6 Модульная структура программы

GetMatrix(вх: conditionNumber, N; вых: matrix) Создаёт симметричную положительно определённую матрицу NxN с заданным числом обусловленности

RotationMethod(вх: A, b; вых: x) Находит решение x системы Ax = b с помощью метода Вращения.

7 Анализ результатов

График зависимости нормы фактической ошибки решения СЛАУ и нормы невязки от числа обусловленности матрицы показывает, что:

1. С увеличением числа обусловленности норма фактической ошибки и норма невязки увеличивается

2. При этом чаще норма фактической точности меньше нормы невязки, но в некоторых случаях норма невязки равна 0.

График зависимости погрешности от ошибки во входных данных

1.График показывает, что с увеличением ошибки во входных данных линейно возрастает относительная погрешность. Это ожидаемый результат, поскольку метод обладает хорошей обусловленностью.

8 Выводы

На основе полученных результатов можно сделать выводы,что с увеличением числа обусловленности входной матрицы растет и погрешность в вычислениях, также из положительных сторон метода вращения следует отметить, что при умножении матрицы поворота на вектор-столбец СЛАУ норма вектор-столбца остается равна исходной. Метод обладает хорошей обусловленностью. Из отрицательных сторон стоит отметить то, что время работы довольно долгое (даже дольше, чем метод Гаусса).