Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 1
тема "Решение алгебраических и трансцендентных уравнений"дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/00001 Золин И.М.
Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2021

1 Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формулировка задания

Решить алгебраическое $2x^4 - x^2 - 10 = 0$ и трансцедентное $x + \lg(1+x) - 1.5 = 0$ уравнения методом секущих и методом половинного деления и исследовать зависимость количества итераций от заданной точности.

1.2 Постановка задания

Дано $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, на котором $\exists! x* : f(x*) \equiv 0$. Найти $x \in [a, b] : |x - x*| < \epsilon$, где ϵ - заданная точность.

2 Алгоритм методов и условия их применимости

2.1 Метод половинного деления

2.1.1 Алгоритм

1. Входные данные: функция $f(x)$ на $[a, b]$, абсолютная погрешность ϵ.
2. Цикл:
   (a) Вычислить $x = \frac{a+b}{2}$.
   (b) Если $f(x)f(a) < 0$, то $b = x$, иначе $a = x$.
   (c) Проверка на точность: если $|b - a| > 2\epsilon$, перейти к итерации (a) цикла
3. Результат: Положить $x^* = \frac{a+b}{2}$

2.1.2 Условия применимости метода:

1. $f \in C([a, b])$
2. $f(a)f(b) < 0$

2.2 Метод простых итераций

2.2.1 Алгоритм

1. Входные данные: функция $\varphi(x)$ на $[a, b]$, параметр q, зависящий от $\varphi(x)$, абсолютная погрешность ϵ.
2. Действия до цикла: Построить последовательность $\{x_k\}$ по формуле $x_k = \varphi(x_{k-1})$, где $\varphi(x)$ такая, что $f(x) = 0 \iff x = \varphi(x)$
3. Цикл:
   (a) Положить $x_k = \varphi(x_{k-1})$.
   (b) Проверка на точность: если $|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-q}{q}\epsilon$, перейти к итерации (a) цикла .
4. Результат: Положить $x^* = x_k$, при $|x_{k+1} - x_k| \geq \frac{1-q}{q}\epsilon$

2.2.2 Условия применимости метода

1. $\varphi \in C^1([a, b])$
2. $\varphi(x) \in [a, b]$ для $\forall x \in [a, b]$
3. $\exists q : |\varphi'(x)| \leq q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$

3 Предварительный анализ задачи

3.1 Теорема о верхней границе

Для уравнения $2x^4 - x^2 - 10 = 0$ найдём отрезки, содержащие все корни, применив *Теорему о верхней границе положительных корней* 4 раза: $x^* < \sqrt[m]{(\frac{|a'|}{a_0})}$, где m - номер первого отрицательного коэффициента, a_0 - первый коэффициент, а a' - наибольший по модулю отрицательный коэффициент.

1. $2x^4 - x^2 - 10 = 0 \Rightarrow m = 2, a' = -10, a_0 = 2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow x^* \leq 1 + \sqrt{5} \approx 3.236$
2. $x = (\frac{1}{y}) \Rightarrow 10y^4 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow m = 2, a' = 2, a_0 = 10 \Rightarrow y \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x^* \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4} \approx 0.69$

3. $x = -y \Rightarrow 2y^4 - y^2 - 10 = 0 \Rightarrow m = 2, a' = -10, a_0 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y \leq 1 + \sqrt{5} \Rightarrow x^* \geq -1 - \sqrt{5} \approx -3.236$

4. $x = -1/y \Rightarrow 10y^4 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow m = 2, a' = 2, a_0 = 10 \Rightarrow$
$y \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x^* \geq \frac{\sqrt{5}-5}{4} \approx -0.69$

3.2 Нахождение отрезка с одним корнем и проверка условий применимости методов

3.2.1 Алгебраическое уравнение

С помощью MATLAB устанавливаем, что на отрезке $[1, 2]$ уравнение $2x^4 - x^2 - 10 = 0$ имеет единственный корень и проявеляем *условия применимости.*

Метод половинного деления:

1. Функция непрерывна на всей числовой оси(а значит и на отрезке)
2. $f(1)f(2) = -9 * 18 = -162 < 0$

Метод простых итераций: По *Теореме 2 (о сходимости метода простых итераций)*, проверим условие: $\exists q : |\varphi'(x)| \leq q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$

$x = \varphi(x)$, $x = x - \alpha * f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \alpha * f(x)$

Проверка условия:

1. $f(x) = 2x^4 - x^2 - 10 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 - 2x \Rightarrow f''(x) = 24x^2 - 2.$
2. Корни второй производной $f''(x)$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}$ не пренадлежат отрезку$[1, 2] \Rightarrow f'(x)$ монотонна на отрезке $[1, 2]$.
3. $f'(1) = 6; f'(2) = 60 \Rightarrow \max_{x\in[1,2]} |f'(x)| = f'(2) = 60 \Rightarrow M_1 = 60.$
4. $|\alpha| < \frac{2}{M_1} = \frac{1}{30}$
5. $\varphi(x) = x - \alpha * f(x) = x - \frac{1}{30} * f(x) = x - \frac{1}{30} * (2x^4 - x^2 - 10)$

6. $|\varphi'(x)| \le q < 1 \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-4}{15} * x^3 + \frac{1}{15} * x + 1$
   $\varphi'(1) = \frac{12}{15} = 0.8 \Rightarrow$ условие $|\varphi'(1)| \le q < 1$ выполняется, значит $\exists q : |\varphi'(x)| \le q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$.

3.2.2 Трансцендентное уравнение

С помощью MATLAB устанавливаем, что на отрезке $[0.7, 1.7]$ уравнение $x + \lg(1 + x) - 1.5 = 0$ имеет единственный корень и проверяем *условия применимости.*

Метод половинного деления:

1. Функция непрерывна на всей числовой оси(а значит и на отрезке)
2. $f(0.7)f(1.7) \approx -0.359594 < 0$

Метод простых итераций: По *Теореме 2 (о сходимости метода простых итераций)*, проверим условие: $\exists q : |\varphi'(x)| \le q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$

$x = \varphi(x)$, $x = x - \alpha * f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \alpha * f(x)$
$|\alpha| < \frac{2}{M_1}$, где $M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

Проверка условия:

1. $f(x) = x + \lg(1 + x) - 1.5 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(10)(1+x)} + 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{\ln(10)(1+x)^2}$.
2. Корней второй производной $f''(x)$ не существует $\Rightarrow$ $f'(x)$ монотонна на отрезке $[0.7, 1.7]$.
3. $f'(0.7) = \frac{1}{\ln(10)(1.7)} \approx 1.255467; f'(1.7) = \frac{1}{\ln(10)(2.7)} \Rightarrow \max_{x \in [0.7,1.7]} |f'(x)| = f'(0.7) \approx 1.255467 \Rightarrow M_1 = 1.255467.$
4. $|\alpha| < \frac{2}{M_1} = \frac{2}{1.255467} = 1.6$
5. $\varphi(x) = x - \alpha * f(x) = x - 1.6 * f(x) = x - 1.6 * (x + \lg(1 + x) - 1.5) = -0.6 * x - 1.6 * \lg(1 + x) + 2.4$
6. $|\varphi'(x)| \le q < 1 \Rightarrow \varphi'(x) = -0.6 + \frac{-1.6}{\ln(10)(x+1)}$
   $\varphi'(1.7) = -0.6 + \frac{-1.6}{\ln(10)(2.7)} = -0.85 \Rightarrow$ условие $|\varphi'(1)| \le q < 1$ выполняется, значит $\exists q : |\varphi'(x)| \le q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$.

4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

$$f(x) = x^2 + 10x$$

Очеивдно, что существует два корня $x = 0$ и $x = -10$. Найдем на отрезке $[-2, 1]$ корень этого уравнения, используя численный метод половинного деления.
На этом отрезке функция непрерывна, а также $f(-1) * f(2) = -176 < 0$.

1. $\frac{b-a}{2} = 1.5$
   $c = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+1}{2} = -0.5$
   $f(a) * f(c) = 76 > 0 \Rightarrow a = c$
2. $\frac{b-a}{2} = 0.75$
   $c = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.5+1}{2} = 0.25$
   $f(a) * f(c) = -12 < 0 \Rightarrow b = c$
3. $\frac{b-a}{2} = 0.375$
   $c = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.5+0.25}{2} = -0.125$
   $f(a) * f(c) = 6 > 0 \Rightarrow a = c$
4. $\frac{b-a}{2} = 0.1875$
   $c = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.125+0.25}{2} = 0.0625$
   $f(a) * f(c) = -1 < 0 \Rightarrow b = c$
5. $\frac{b-a}{2} = 0.09375$
   $c = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.125+0.0625}{2} = -0.03125$
   $f(a) * f(c) = 0$
   $x \approx -0.03125$

Найдем на том же самом отрезке корень $x \in [-2, 1]$, но с использованием метода простых итераций. По *Теореме 2 (о сходимости метода простых итераций)*, проверим условие:

1. $\exists q : |\varphi'(x)| \leq q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$

$x = \varphi(x)$, $x = x - \alpha * f(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - \alpha * f(x)$

$|\alpha| < \frac{2}{M_1}$, где $M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

Проверка условия $\exists q : |\varphi'(x)| \leq q < 1$ для $\forall x \in [a,b]$: найдём $\varphi(x)$ и q.

1. $f(x) = x^2 + 10x \Rightarrow f'(x) = 2x + 10$ - линейная монотонно возрастающая функция.

2. $f'(1) = 12 \Rightarrow \max_{x\in[-2,1]} |f'(x)| = f'(1) = 12 \Rightarrow M_1 = 12$.

3. $|\alpha| < \frac{2}{M_1} = \frac{1}{6} \approx 0.167$

4. $\varphi(x) = x - \alpha * f(x) = x - \frac{1}{6} * f(x) = x - \frac{1}{6} * (x^2 + 10x)$

5. $|\varphi'(x)| \leq q < 1 \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{1}{3} * x - \frac{1}{3}$
   $\varphi'(1) = \frac{-4}{3} \approx -1.33$; $\varphi'(-2) = \frac{1}{3} \approx 0.33 \Rightarrow$ условие $|\varphi'(-2)| \leq q < 1$ выполняется, значит $\exists q : |\varphi'(x)| \leq q < 1$ для $\forall x \in [a,b]$.

Алогритм для $\epsilon = 0.1$,получается $\frac{1-q}{q}\epsilon = 0.2$:

1. $x_k = a = -2$

2. $x_k = \varphi(x_{k-1}) = \frac{1}{3}$
   $|x_k - x_{k-1}| = \frac{7}{3}$

3. $x_k = \varphi(x_{k-1}) = \frac{-4}{9}$
   $|x_k - x_{k-1}| = \frac{-7}{9}$

4. $x_k = \varphi(x_{k-1}) = \frac{-5}{27}$
   $|x_k - x_{k-1}| = \frac{7}{27}$

5. $x_k = \varphi(x_{k-1}) = \frac{-22}{81}$
   $|x_k - x_{k-1}| = \frac{-7}{81} \approx 0.086$

5 Подготовка контрольных тестов

Методы половинного деления и секущих использовались для нахождения корней алгебраического $2x^4 - 2x^2 - 10 = 0$ уравнения на отрезке $[1,2]$ с найденной функцией$\varphi(x) = \frac{-1}{15} * x^4 + \frac{1}{30} * x^2 + x + \frac{1}{3}$ для метода простых итераций и трансцедентного $x + \lg(1+x) - 1.5 = 0$ уравнения на отрезке $[0.7, 1.7]$ с найденной функцией$\varphi(x) = -0.59303 * x - 1.59303 * \lg(1+x) + 2.3895$ для метода простых итераций с точностью $\epsilon = 10^{-i}$, где $i \in [1, 6], i \in \mathbb{N}$. Также использовалась функция MATLAB fzero с такой же точностью.

6 Модульная структура программы

BisectionMethod(вх: f, a, b, ϵ, вых: x^*,n) Находит корень x^* уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ с помощью метода половинного деления точностью ϵ за n итераций.

FixedPointIterations(вх: φ,x_0, x_1, q, ϵ, вых: x^*,n) Находит корень x^* уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ с помощью функции $\varphi(x)$, указатель на которую подаётся в функцию, и параметр q, заранее вычисленные, с точностью ϵ за n итераций.

7 Анализ результатов

Графики зависимости количества итераций методов от точности для алгебраической и трансцедентной функции показывают, что:

1. Метод fzero работает лучше всего для обоих функций.
2. Также зависимости в обоих случиях линейные, что для алгеброической(для fzero: 2, 5, 5, 6, 6, 7; для метода половинного деления: 3, 6, 9, 13, 16, 19; для метода простых итераций: 4, 5, 6, 7, 7, 8), то и для трансцедентной(для fzero: 2, 5, 5, 6, 6, 7; для метода половинного деления: 3, 6, 9, 13, 16, 19; для метода простых итераций: 45, 70, 95, 120, 146, 171), поэтому с увеличением точности ϵ увеличивается количество итераций, потому что алгоритмы этих методов подразумевают, что с увеличением ϵ будет дольше в цикле соблюдаться условие выхода из него.

Графики зависимости количества итераций методов от точности для алгебраической функции показывают, что:

1. После метода fzero по быстроте нахождения корня с заданной точностью идёт метод простых итераций , а затем метод

половинного деления, т.е. требует заметно большего количества итераций. До значения $\epsilon = 10^{-2}$ быстрее метода простых итераций оказывается метод половинного деления.

2. В точке ($\epsilon = 10^{-2}$, 5 итераций) графики методов fzero и метода простых итераций пересекаются. Несложно заметить, что для метода половинного деления с $\epsilon = 10^{-3}$ наблюдается ухудшение работы , из-за увеличения количества итераций. А в $\epsilon = 10^{-6}$ метод fzero имеет 7 итераций, метод простых итераций 9, метод половинного деления 19.

Графики зависимости количества итераций методов от точности для трансцедентнойй функции показывают, что:

После метода fzero по быстроте нахождения корня с заданной точностью идёт метод половинного деления немного, затем метод простых итераций. Метод простых итераций для трансцедентной функции справляется хуже всего.

График зависимости модуля значений алгебраической и трансцедентной функции от заданной точности показывает, что:

1. Значение корня, полученного с помощью метода fzero, с увеличением точности стремиться к нулю монотонно.
2. Значения корня, полученного с помощью метода половинного деления, с увеличением точности стремиться к нулю немонотонно, пересекает линию заданной точности 2 раза.
3. Значение корня, полученного с помощью метода простых итераций,с увеличением точности стремиться к нулю монотонно, находится изначально ниже линии заданной точности, то есть метод простых итераций сразу находит корень с довольно большой точностью.

График зависимости модуля значений алгебраической функции от заданной точности показывает, что:

1. Значение корня, полученного с помощью метода fzero, пересекает линию заданной точности 2 раза при $\epsilon = 10^{-5}$, но находится в итоге чуть выше неё.

2. Значения корня, полученного с помощью метода половинного деления, пересекает линию заданной точности 2 раза при $\epsilon = 10^{-5}$, но находится в итоге чуть выше линии заданной точности.

График зависимости модуля значений трансцедентной функции от заданной точности показывает, что:

1. Значение корня, полученного с помощью метода fzero, не пересекает линию заданной точности, практически совпадает с ней, но находится в итоге чуть ниже неё.
2. Значение корня, полученного с помощью метода половинного деления, дважды пересекает заданную линию точности примерно при $\epsilon = 10^{-2}$. При точности от $\epsilon = 10^{-5}$ до 10^{-6} не меняется, достигнув порядка 10^{-8}, то есть метод половинного находит корень с довольно большой точностью.
3. Значение корня, полученного с помощью метода простых итераций, после точности $\epsilon = 10^{-4}$ не изменяется и один раз пересекает заданную линию точности линию при $\epsilon = 10^{-5}$.

8 Выводы

1. Метод половинного деления более прост и нагляден, при выполнении небольшого количества условий, по сравнению с методом простых итераций, но требует значительно большего количества итераций с увеличением заданной точности.
2. Метод простых итераций обладает большей скоростью сходиомсти. Данный метод зависит от функции φ (т.е. зависит от начальной функции f) и параметра q, в свою очередь зависящего от φ, влияющие на количество итервций.