Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 1
**тема "Интерполяция табличных функций"**
Дисциплина "Численные методы"

`Выполнил студент гр. 5030102/00001    Золин И.М.`
`Преподаватель:                        Добрецова С.Б.`

Санкт-Петербург

**202**

# 1 Формулировка задачи и её формализация

## 1.1 Формулировка задания

Задача интерполирования табличной функции – весьма важная задача, которую необходимо решать численными методами. Во-первых, нам может быть необходимо вычислить значения функции в промежуточных точках. Также для упрощения сложных вычислений мы должны заменять сложную функцию на функцию полинома для более простого численного интегрирования и дифференцирования функции. Более того, нужно обеспечить «близость» интерполяционного полинома к исходной сложной функции.

## 1.2 Постановка задания

Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Если выполнено условие $A \cdot X = \lambda \cdot X$,где X - ненулевой вектор, $\lambda$ - это число, то X – это собственный вектор (СВ) матрицы A. $\lambda$ - это собственное число (СЧ) матрицы A, соответсвующее СВ X.

$A \cdot X = \lambda \cdot X \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow p_0\lambda^n + p_1\lambda^{(n-1)} + ... + p_n$

Из основной теоремы алгебры следует, что матрица A имеет ровно n СЧ.

Требуется решить частичную алгебраическую проблему собственных значений: найти два максимальных по модулю, но разных по знаку собственных числа, используя метод скалярных произведений.

# 2 Алгоритм метода и условия его применимости

## 2.1 Построение интерполяционного полинома в форме Лангранжа:

### 2.1.1 Алгоритм

1. Входные данные: пусть x – аргумент интерполяционного полинома; xk,yk – сетка и сеточная функция;

2. Цикл:

k = 0, i = 0, $basics = 0, res = 0$

для i от 0 до size:
mul = 1.0;
для k от 0 до size:
если k не равно i:
домножить basics на величину $frac(x - xk[k])(xk[i] - xk[k])$;
конец «если»
конец цикла
прибавить к res величину yk[i] * basics
конец цикла
вернуть res;
Конец
3. Результат: $res$

Метод скалярных произведений с нормировкой:
$x^{(0)} \in R^n, y^{(1)} = A * x^{(1)} x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\mu_1}, \mu_1 = ||x^{(1)}||$
Итерационная последовательность строится по формулам:
$y^{(k)} = Ax^{(k-1)}, x^{(k-1)} = \frac{y^{(k-1)}}{\mu_{k-1}}, \mu_{k-1} = ||x^{(k-1)}||$
$y^{(k)} = \frac{1}{\mu_{k-1}} \cdots \frac{1}{\mu_0} A^k x^{(0)}$
$x^{(k-2)} = \frac{1}{\mu_{k-2}} \cdots \frac{1}{\mu_0} A^{k-2} x^{(0)}$
$(y^{(k)}, x^{(k-2)}) = \lambda^2 \cdot \frac{1}{\mu_{k-1}}$
$\lambda = \sqrt{(y^{(k)}, x^{(k-2)}) \cdot \mu_{k-1}}$
Собственные векторы:
Определение с.в.: $\frac{x^{(k)}}{(\lambda_1^{(k)})^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha w_1$
С нормировкой: $y^{(k)} = Ax^{(k-1)}, \mu_k = y^{(k)}, x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\mu_k}$
$x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha w_1^{(k)}$
С.в., соответствующие двум максимальным по модулю, но разным по знаку, с.ч.:
$x^{(k-1)} = \lambda_1^{k-1}(\alpha_1 w_1^{(k)} + \alpha_2 w_2^{(k)})$
$x^{(k)} = \lambda_1^k(\alpha_1 w_1^{(k)} - \alpha_2 w_2^{(k)})$
С нормировкой:
$x^{(k-1)} = \alpha_1 w_1^{(k)} + \alpha_2 w_2^{(k)}$
$x^{(k)} = \alpha_1 w_1^{(k)} - \alpha_2 w_2^{(k)}$
$x^{(k)} + x^{(k-1)} = 2\alpha_1 w_1^{(k)}$
$x^{(k)} - x^{(k-1)} = -2\alpha_2 w_2^{(k)}$

### 2.1.2 Условия применимости метода

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа, исследуемой матрицы A, причём $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq ... \geq |\lambda_n|$, матрица A - матрица простой структуры и симметричная. Тогда метод скалярных произведений сходится.

# 3 Предварительный анализ задачи

Согласно теореме: если матрица вещественная и симметричная, то она является матрицей простой структуры. Будем задавать матрицы, удовлетворяющие данному критерию.

Такие матрицы будем искать с помощью QR-разложения из пакета Matlab, где матрица Q – ортогональная, R - верхнетреугольная.(Генерируются матрица, полученную матрицу представляем в виде QR-разложения, т.е. умножения 2 матриц Q и R). С помощью QR-разложения находим матрицу Q.

Задается диагональная матрица D, у нее на диагонали – собственные числа.

Нужная симметричная матрица получается следующим образом: $A = Q \cdot D \cdot Q^T$

# 4 Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

$$A = \begin{pmatrix} -1.6693 & 3.5021 & 5.3492 \\ 3.5021 & 3.4792 & 0.9209 \\ 5.3492 & 0.9209 & -0.8099 \end{pmatrix}$$

Точные собственные числа: $\lambda_{1,2} = \pm 7, \lambda_3 = 1$

Точные собственные векторы:

$X_1 = \begin{pmatrix} 0.7004 \\ 0.1444 \\ 0.7045 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0.1500 \\ 0.9414 \\ -0.3020 \end{pmatrix}$,

$X_3 = \begin{pmatrix} 0.1500 \\ 0.3173 \\ 0.6422 \end{pmatrix}$, Начальные приближения: $x^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

1-ая итерация:

$$y^{(1)} = A \cdot x^{(0)} \begin{pmatrix} 4.1469 \\ 4.5627 \\ 3.1527 \end{pmatrix}$$

$\|y^{(1)}\| = 6.9249$
$(y^{(1)}, x^{(-1)}) = 6.8493$
$\lambda^{(1)} = \sqrt{(y^{(1)}, x^{(-1)}) \cdot ||x^{(0)}||} = 2.6172$

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{||y^{(1)}||} = \begin{pmatrix} 0.5988 \\ 0.6589 \\ 0.4553 \end{pmatrix}$$

$$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.7432 \\ 4.8088 \\ 3.4413 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.5673 \\ 1.7245 \\ 1.1915 \end{pmatrix}$$

$$Ax^{(1)} - \lambda^{(1)} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.1759 \\ 3.0844 \\ 2.2498 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{(1)} = x^{(1)} + x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.1762 \\ 1.2363 \\ 1.0327 \end{pmatrix}$$

$$w_2^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.0214 \\ 0.0815 \\ -0.1221 \end{pmatrix}$$

$||Ax^{(1)} - \lambda^{(2)} x^{(1)}|| = 4.3942$, $||w_1^{(1)}|| = 1.9946$
$\frac{||Ax^{(1)} - \lambda^{(1)} x^{(1)}||}{||w_1^{(1)}||} = 2.2031$

2-ая итерация:

$$y^{(2)} = A \cdot x^{(1)} \begin{pmatrix} 3.7432 \\ 4.8088 \\ 3.4413 \end{pmatrix}$$

$||y^{(2)}|| = 6.9985$
$(y^{(2)}, x^{(0)}) = 6.9249$
$\lambda^{(2)} = \sqrt{(y^{(2)}, x^{(0)}) \cdot ||y^{(1)}||} = 6.9249$

$$x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{||y^{(2)}||} = \begin{pmatrix} 0.5349 \\ 0.6871 \\ 0.4917 \end{pmatrix}$$

$$Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.1439 \\ 4.7166 \\ 3.0956 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(2)} x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.7038 \\ 4.7583 \\ 3.4052 \end{pmatrix}$$

$$Ax^{(2)} - \lambda^{(2)} x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.4400 \\ -0.0417 \\ -0.3096 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{(2)} = x^{(2)} + x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.1337 \\ 1.3460 \\ 0.9470 \end{pmatrix}$$

$$w_2^{(2)} = x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.0640 \\ 0.0282 \\ 0.0365 \end{pmatrix}$$

$||Ax^{(2)} - \lambda^{(2)} x^{(2)}|| = 0.5396$, $||w_1^{(2)}|| = 1.9984$
$\frac{||Ax^{(2)} - \lambda^{(2)} x^{(2)}||}{||w_1^{(2)}||} = 0.2700$

3-ья итерация:

$$y^{(3)} = A \cdot x^{(2)} \begin{pmatrix} 4.1439 \\ 4.7166 \\ 3.0956 \end{pmatrix}$$

$||y^{(3)}|| = 7.000$
$(y^{(3)}, x^{(1)}) = 6.9985$
$\lambda^{(3)} = \sqrt{(y^{(3)}, x^{(1)}) \cdot ||y^{(2)}||} = 6.9985$

$$x^{(3)} = \frac{y^{(3)}}{||y^{(3)}||} = \begin{pmatrix} 0.5920 \\ 0.6738 \\ 0.4422 \end{pmatrix}$$

$$Ax^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.7370 \\ 4.8247 \\ 3.4290 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(3)}x^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.1430 \\ 4.7155 \\ 3.0949 \end{pmatrix}$$

$$Ax^{(3)} - \lambda^{(3)}x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.4059 \\ 0.1091 \\ 0.3341 \end{pmatrix}$$

$||Ax^{(3)} - \lambda^{(3)}x^{(3)}|| = 0.5369,$

$$w_1^{(3)} = x^{(3)} + x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.1268 \\ 1.3609 \\ 0.9340 \end{pmatrix}$$

$$w_2^{(3)} = x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0571 \\ -0.0133 \\ -0.0495 \end{pmatrix}$$

$\frac{||Ax^{(3)} - \lambda^{(3)}x^{(3)}||}{||w_1^{(3)}||} = 0.2687$

# 5 Подготовка контрольных тестов

Создаётся симметричная матрица $A_{10\times10}$ для нахождения собственных чисел с помощью метода скалярных произведений с точностью $\epsilon = 10^{-i}$, где $i \in [0, 14], i \in \mathbb{N}$. Собственные числа:[-10, 10, 1, 8, 2, 7, 6, 5, 3, 4]

## 6 Модульная структура программы

ScalarProductMethod(вх: $A, \epsilon$, вых: $\lambda_{1,2}, w_{1,2}, n$) Находит максимальные собственные числа разные по знаку матрицы A $\lambda_{1,2}$ и соответствующие им собственные вектора $w_{1,2}$ с помощью метода скалярных произведений за n итераций с заданной точностью $\epsilon$.

## 7 Анализ результатов

1.По графику зависимости количества итераций метода скалярных произведений от заданной точности видно, что количество итераций увеличивается линейно [4 5 7 9 11 14 16 19 24 29 34 39 44 50]. При изменении $\epsilon$ на порядок количество итераций изменяется примерно на 20.

2. Графики заивисимости с.в. и невязок от заданной точности линейны.

## 8 Выводы

С помошью метода скалярных произведений достигается заданная точность нахождения собственных чисел, при хорошей отделимости.