

Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»
Специальность «Системное программирование»

Курсовая работа
тема "Поиск максимальной площади плота заданной формы при повороте
реки на 90° "
дисциплина "Методы оптимизации"

Выполнили студенты гр. 5030102/00201

Гвоздев С.Ю.,
Золин И.М.
Хламкин Е.В.

Преподаватель:

Родионова Е.А.

Санкт-Петербург

2023

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Обозначения	3
3	Описание алгоритмов	4
3.1	Общая идея решения	4
3.1.1	Идея движения:	4
3.2	Идея stage-й	4
3.3	Идея алгоритма одномерной минимизации	4
3.4	Идея алгоритма многомерной минимизации	5
3.5	Замечания	5
3.6	Stage 1	6
3.7	Stage 2a	7
3.8	Stage 2b	8
3.9	Stage 3	8
4	Исследование применимости методов	9
4.1	Исследование применимости одномерной минимизации	9
4.2	Исследование применимости многомерной минимизации	9
5	Результаты	10
5.1	Решение одномерной минимизацией	11
5.2	Решение многомерной минимизацией	11
5.3	Компьютерная визуализация	11
6	Выводы	12

1 Постановка задачи

Решается задача поиска максимальной площади плота заданной формы, при которой возможно прохождение им поворота реки в 90° .

Форма плота: прямоугольник с двумя одинаковыми равнобедренными треугольниками с двух противоположных сторон.

В качестве начала координат $(0,0)$ выберем левый верхний угол поворота реки.

2 Обозначения

Плот задается 4 параметрами:

1. w : ширина плота
2. h : высота плота
3. a : ширина оснований треугольников
4. q : высота треугольников

Целевая функция площади:

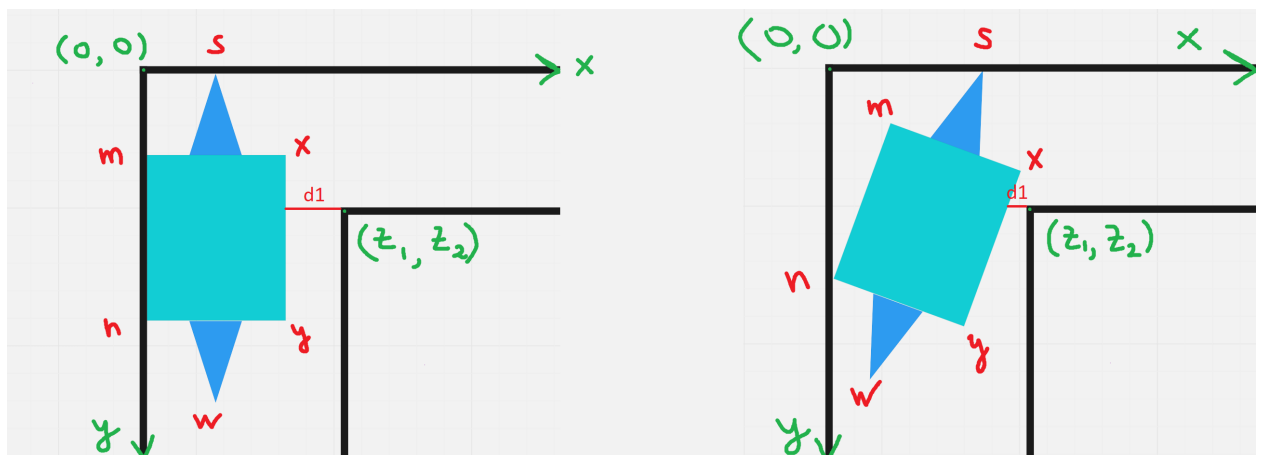
$$\phi_0 = w * h + a * q \rightarrow \max$$

Река задается двумя параметрами:

1. z_1 : координата x правого нижнего угла реки
2. z_2 : координата y правого нижнего угла реки

В решении часто будут фигурировать:

1. s, n, m, x, y, w - вершины плота
2. $\cos(\hat{abc}), \sin(\hat{abc})$ косинус и синус угла \hat{abc} , где a, b, c - любые вершины плота
3. ab - длина вектора \overline{ab} , где a, b - любые вершины плота
4. $d_1(w, h, a, q, t)$ - расстояние от угла (z_1, z_2) до отрезка xy вдоль оси x в момент времени t



3 Описание алгоритмов

3.1 Общая идея решения

Критерием прохождения плотом поворота является положительное значение d_1 во время всего движения. Причем плот прошел поворот, если это выполнено хотя бы до тех пор, пока

$$y_2 \geq z_2 \quad (1)$$

- далее это условие будем называть - "критерий прохождения поворота".

3.1.1 Идея движения:

Пройдём весь путь начиная от спуска на реку, заканчивая выходом из её русла вместе с нашим судном. В начале движения плот прижимается к одному из берегов и так продолжает своё плавание до момента, пока еще одна его точка не коснется суши. Далее плот начинает поворачивать "скользя" двумя своими углами по соответствующим берегам, в процессе манёвра опорные точки меняются. После выполнения критерия прохождения поворота 1, движение суда можно считать произвольным. Стоит отметить, что при предложенной авторами работы траектории движения расстояние от угловой точки реки до рассматриваемого судна максимально, для всех возможных положений плота при фиксированных координатах его центра. Иными словами, если плот не пройдет поворот при представленном в работе способе движения, то он не пройдет его и при совершении маневра по любой другой возможной траектории.

3.2 Идея stage-й

В процессе поворота плот касается берегов разными точками. Назовем движение, при котором плот не изменяет точек касания с берегами "этапом" или "stage-м". Всего возможно 4 варианта касания плотом берегов, причем для конкретной конфигурации реализуются ровно три из них: $stage_1$ и $stage_3$ реализуются для всех конфигураций; $stage_{2a}$ реализуется между первым и третьим stage-м, если точка m коснется верхнего берега до того, как точка w коснется левого берега; $stage_{2b}$ реализуется между первым и третьим stage-м, если точка w коснется левого берега до того, как точка m коснется верхнего берега. Для каждого stage-а расстояние до угла высчитывается по-своему. Данные расчеты приведены далее.

3.3 Идея алгоритма одномерной минимизации

При этом подходе будем оптимизировать только один параметр. Его нижняя граница выбирается исходя из логических соображений. Также, нетрудно подобрать оценку сверху, ведь конфигурация реки нам известна. В работе используется метод дихотомии. В качестве начального приближения x_0 выбирается середина отрезка, где границами $[left, right]$ выступают взятые нами оценки. Для полученной конфигурации плота рассчитывается его возможность пройти поворот. Для каждого stage решается задача одномерной минимизации методом золотого сечения, результатом которой мы получаем значение параметра t_0 , такое что $d_i(x_0, t_0) < d_i(x_0, t)$. Если манёвр удастся, т.е $d_i(x_0, t_0) > 0$ для всех i , то в качестве следующего приближения выбирается середина нового отрезка $[x_0, right]$. Если же при данном значении оптимизируемого параметра судно терпит крушение, то следующим приближением будет выбрана середина отрезка $[left, x_0]$.

Алгоритм останавливается, когда значение функции $0 < d(x_0, t_0) < eps$, где eps - наперед заданная точность, $d = \min(d_i)$

3.4 Идея алгоритма многомерной минимизации

Вектор параметров плота имеет размерность 4: $[w, h, a, q]$. Целевая функция, принимающая на вход этот вектор известна. Ограничения, накладываемые на этот вектор описываются ограничением каждого из этапов. Тогда получим:

$$\begin{cases} -\varphi_0(w, h, a, q) \rightarrow \min \\ -\varphi_1(w, h, a, q) \leq 0 \\ -\varphi_{2a}(w, h, a, q) \leq 0, \text{ if } 2a \\ -\varphi_{2b}(w, h, a, q) \leq 0, \text{ if } 2b \\ -\varphi_3(w, h, a, q) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что для вычисления значений ограничений необходимо решать задачу одномерной минимизации.

Также добавим условие:

$$\{ a \leq w \quad (3)$$

И определим неотрицательность компонент:

$$\begin{cases} -w \leq 0 \\ -h \leq 0 \\ -a \leq 0 \\ -q \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Итого:

$$\begin{cases} -\varphi_0(w, h, a, q) \rightarrow \min \\ -\varphi_1(w, h, a, q) \leq 0 \\ -\varphi_{2a}(w, h, a, q) \leq 0, \text{ if } (2a) \\ -\varphi_{2b}(w, h, a, q) \leq 0, \text{ if } (2b) \\ -\varphi_3(w, h, a, q) \leq 0 \\ a - w \leq 0 \\ -w \leq 0 \\ -h \leq 0 \\ -a \leq 0 \\ -q \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

При выполнении условий применимости, данную задачу можно решить методом Зойтендейка. Проверка условий применимости произойдет далее.

3.5 Замечания

1. В начале каждого из алгоритмов предлагается рассмотреть крайние случаи и закончить на этом решение, если они реализовались. Имеется в виду, что алгоритмы настроены именно на поворот плота, однако оптимальное решение может достигаться исключительно с помощью поступательного движения.

2. Последовательность *stage*-й определяется следующим образом:

$$2a, \text{ if } \sin(snw) > \frac{s/m - \sin(sny)}{\sqrt{(s/m)^2 - 2(s/m)\sin(sny) + 1}} \\ 2b, \text{ else}$$

3.6 Stage 1

1. Задаем движение плота через параметр t

$$s = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \\ n = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{|sn|^2 - |t|^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Матрица поворота} = \begin{pmatrix} \cos(snx) & -\sin(snx) \\ \sin(snx) & \cos(snx) \end{pmatrix}$$

γ - угол поворота вектора nx , для разных векторов разный.

$$\overline{ns} = \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{|sn|^2 - |t|^2} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$|nx|^2 = t^2 + |sn|^2 - t^2 + t\sqrt{|sn|^2 - t^2} \sin 2snx - t\sqrt{|sn|^2 - t^2} \sin 2snx = |sn|^2 \\ \overline{nx} = \begin{pmatrix} \frac{-t \cos(snx) - \sqrt{|sn|^2 - t^2} \sin(snx)}{|nm|} \\ \frac{-t \sin(snx) + \sqrt{|sn|^2 - t^2} \cos(snx)}{|nm|} \end{pmatrix} \\ \overline{0x} = \begin{pmatrix} \frac{-t \cos(snx) - \sqrt{|sn|^2 - t^2} \sin(snx)}{|nm|} + \sqrt{|sn|^2 - t^2} \\ \frac{-t \sin(snx) + \sqrt{|sn|^2 - t^2} \cos(snx)}{|nm|} \end{pmatrix}$$

2. Определим функцию-ограничение через параметр t

(a) $nx = \sqrt{w^2 + h^2}$ - длина вектора \hat{nx}

(b) $ns = \sqrt{\frac{w^2}{4} + (h+q)^2}$ - длина вектора \hat{ns}

(c) $ny = w$ - длина вектора \hat{ny}

(d) $\cos(snx) = \frac{w^2 + 2h^2 + 2hq}{2\sqrt{w^2 + h^2}}$; $\sin(snx) = \sqrt{1 - \cos^2(snx)}$

(e) $\cos(sny) = \frac{w}{2\sqrt{(h+q)^2 + \frac{w^2}{4}}}$; $\sin(sny) = \sqrt{1 - \cos^2(sny)}$

(f) $\cos(xnw) = \frac{w}{2\sqrt{\frac{w^2}{4} + q^2}}$; $\sin(xnw) = \frac{q}{2\sqrt{\frac{w^2}{4} + q^2}}$

(g) $\sin(snw) = \sin(sny) \cos(xnw) + \cos(sny) \sin(xnw)$
 $\cos(snw) = \cos(sny) \cos(xnw) + \sin(sny) \sin(xnw)$

(h) $x_1 = \frac{nx}{ns} \cdot (t \cdot \cos(snx) + \sqrt{(ns)^2 - t^2} \sin(snx))$

(i) $x_2 = \frac{nx}{ns} \cdot (t \cdot \sin(snx) - \sqrt{(ns)^2 - t^2} \cos(snx)) + \sqrt{(ns)^2 - t^2}$

(j) $y_1 = \frac{ny}{ns} \cdot (t \cdot \cos(sny) + \sqrt{(ns)^2 - t^2} \sin(sny))$

(k) $y_2 = \frac{ny}{ns} \cdot (t \cdot \sin(sny) - \sqrt{(ns)^2 - t^2} \cos(sny)) + \sqrt{(ns)^2 - t^2}$

$$(l) \quad \varphi_1 = z_1 - \frac{1}{x_2 - y_2} \cdot ((z_2 - y_2)x_1 + (x_2 - z_2)y_1)$$

3. Определить границы на t для d_1
 $m_y = t * \sin(90^\circ - sny) + \sqrt{s_n^2 - t^2} * \cos(90^\circ - sny) = 0$
 $t^2 = |s_n|^2 * \cos^2(90^\circ - sny)$
 $t = |s_n| * \sin(sny)$

$$w_x = -t * \cos(snw) - \sqrt{s_n^2 - t^2} * \sin(snw)$$

$$t^2 * \cos^2(snw) = (s_n^2 - t^2) * \sin^2(snw)$$

$$t^2 = s_n^2 * \sin^2(snw)$$

$$t = s_n * \sin(snw)a$$

ИТОГО:

$$t \in \left(\frac{w}{2}, \min \begin{cases} s_n * \sin(snw) \\ s_n * \cos(sny) \end{cases} \right)$$

Из геометрических соображений данное выражение определяет движение до тех пор, пока не произойдет касания берегов другими точками.

3.7 Stage 2a

1. Задаем движение плота через параметр t

$$m = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{|nm|^2 - |t|^2} \end{pmatrix}$$

Аналогично к Stage1 рассчитываются координаты точек:

- (a) написать матричное представление точек через матрицу поворота и не только
- (b) $px = \sqrt{w^2 + h^2}$ - длина вектора $\hat{n}\hat{x}$
- (c) $py = w$ - длина вектора $\hat{n}\hat{y}$
- (d) $nm = h$ - длина вектора $\hat{n}\hat{m}$
- (e) $\cos(mnx) = \sin \alpha \cdot \cos \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \alpha$; $\sin(mnx) = \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma$
- (f) $x_1 = \frac{nx}{nm} \cdot (t \cdot \cos(mnx) + \sqrt{(nm)^2 - t^2} \sin(mnx))$
- (g) $x_2 = \frac{nx}{nm} \cdot (t \cdot \sin(mnx) - \sqrt{(nm)^2 - t^2} \cos(mnx)) + \sqrt{(nm)^2 - t^2}$
- (h) $y_1 = \frac{ny}{nm} \cdot (\sqrt{(nm)^2 - t^2})$
- (i) $y_2 = \frac{ny}{nm} \cdot t + \sqrt{(nm)^2 - t^2}$
- (j) $\varphi_{2a} = z_1 - \frac{1}{x_2 - y_2} \cdot ((z_2 - y_2)x_1 + (x_2 - z_2)y_1)$

2. Определить границы на t для d_1

$$t0 = ns \frac{ns/nm - \sin(sny)}{\sqrt{(ns/nm)^2 - 2(ns/nm) * \sin(sny) + 1}} - \sqrt{nm^2 + ns^2 - 2 * nm * ns * \sin_a}$$

$$t1 = nm * \sin(mnw)$$

ИТОГО:

$$t \in (t0, t1)$$

Из геометрических соображений данное выражение определяет движение до тех пор, пока не произойдет касания берегов другими точками.

3.8 Stage 2b

1. Задаем движение плота через параметр t

$$s = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{|sw|^2 - |t|^2} \end{pmatrix}$$

Аналогично к Stage1 рассчитываются координаты точек:

- (a) $wx = \sqrt{\frac{w^2}{4} + (h + q^2)}$ - длина вектора $\hat{w}x$
- (b) $wy = \sqrt{q^2 + \frac{w^2}{4}}$ - длина вектора $\hat{w}y$
- (c) $ws = h + 2q$ - длина вектора $\hat{w}s$
- (d) $\cos(xwy) = \frac{-h^2 + (wy)^2 + (wx)^2}{2wx \cdot wy}$; $\sin(xwy) = \sqrt{1 - \cos^2(xwy)}$
- (e) $\cos(swy) = \cos(xwy) \cdot \sin(sny) - \cos(sny) \sin(xwy)$; $\sin(swy) = \sqrt{1 - \cos^2(swy)}$
- (f) $x_1 = \frac{wx}{ws} \cdot (t \cdot \sin(sny) + \sqrt{(ws)^2 - t^2} \cos(sny))$
- (g) $x_2 = \frac{wx}{ws} \cdot (t \cdot \cos(sny) - \sqrt{(ws)^2 - t^2} \sin(sny)) + \sqrt{(ws)^2 - t^2}$
- (h) $y_1 = \frac{wy}{ws} \cdot (t \cdot \cos(swy) + \sqrt{(ws)^2 - t^2} \sin(swy))$
- (i) $y_2 = \frac{wy}{ws} \cdot (t \cdot \sin(swy) - \sqrt{(ws)^2 - t^2} \cos(swy)) + \sqrt{(ws)^2 - t^2}$
- (j) $\varphi_{2b} = z_1 - \frac{1}{x_2 - y_2} \cdot ((z_2 - y_2)x_1 + (x_2 - z_2)y_1)$

2. Определить границы на t для d_1

$$t0 = ns * \sin(snw)$$

$$t1 = ws \frac{ws/wm - \sin(sny)}{\sqrt{((ws/wm)^2 - 2 * (ws/wm) * \sin(sny) + 1)}}$$

ИТОГО:

$$t \in (t0, t1)$$

Из геометрических соображений данное выражение определяет движение до тех пор, пока не произойдет касания берегов другими точками.

3.9 Stage 3

1. Задаем движение плота через параметр t

$$m = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{|mw|^2 - |t|^2} \end{pmatrix}$$

Аналогично к Stage1 рассчитываются координаты точек:

- (a) написать матричное представление точек через матрицу поворота и не только
- (b) $wx = \sqrt{\frac{w^2}{4} + (h + q^2)}$ - длина вектора $\hat{w}x$
- (c) $wy = \sqrt{q^2 + \frac{w^2}{4}}$ - длина вектора $\hat{w}y$
- (d) $wm = wx$ - длина вектора $\hat{w}s$

- (e) $\cos(xwy) = \frac{-h^2 + (wy)^2 + (wx)^2}{2wx \cdot wy}$; $\sin(xwy) = \sqrt{1 - \cos^2(xwy)}$
(f) $\cos(mwx) = 1 - 2\left(\frac{w}{2wx}\right)^2$; $\sin(mwx) = \sqrt{1 - \cos^2(mwx)}$
(g) $x_1 = \frac{wx}{wm} \cdot (t \cdot \cos(mwx) + \sqrt{(wm)^2 - t^2} \sin(mwx))$
(h) $x_2 = \frac{wx}{wm} \cdot (t \cdot \sin(mwx) - \sqrt{(wm)^2 - t^2} \cos(mwx)) + \sqrt{(wm)^2 - t^2}$
(i) $y_1 = \frac{wy}{wm} \cdot (t \cdot \cos(mwx) + \sqrt{(wm)^2 - t^2} \sin(mwx))$
(j) $y_2 = \frac{wy}{wm} \cdot (t \cdot \sin(mwx) - \sqrt{(wm)^2 - t^2} \cos(mwx)) + \sqrt{(wm)^2 - t^2}$
(k) $\varphi_3 = z_1 - \frac{1}{x_2 - y_2} \cdot ((z_2 - y_2)x_1 + (x_2 - z_2)y_1)$

2. Определить границы на t для d_1

$$\begin{cases} A = 1 - (wy/wm) * \cos_m wy \\ R = wy^2/wm^2 * \sin(mwy)^2 + A^2 \\ M = 2 * z_2 * (wy/wm) * \sin(mwy) \\ W = A^2 * wm^2 - z_2^2 \\ D = M^2 + 4 * W * R \\ t_{max} = (M + \sqrt{D}) / (2 * R) \end{cases} \quad (6)$$

$t_0 = nm * \sin(mnw)$, если мы после $stage_{2a}$

$t_0 = ws * (ws/wm - \sin_a) / \sqrt{(ws/wm)^2 - 2 * (ws/wm) * \sin_a + 1} - \sqrt{wm^2 + ws^2 - 2 * wm * ws * \cos(mws)}$, если мы после $stage_{2b}$

$t \in (t_0, t_{max})$

Из геометрических соображений данное выражение определяет движение до тех пор, пока не произойдет касания берегов другими точками.

4 Исследование применимости методов

4.1 Исследование применимости одномерной минимизации

Используется два метода:

- 1) Метод дихотомии
- 2) Метод золотого сечения

Для их применимости нужно потребовать унимодальность и непрерывность соответствующих функций. Унимодальность функций d_i проверяется с помощью численных вычислений в виду сложности её аналитического представления. Непрерывность же, является следствием теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций.

4.2 Исследование применимости многомерной минимизации

Условия построения метода Зойтендейка:

- (a) $\varphi_i(x)$ - выпуклая $i = 1..4$

- (b) $\varphi_i(x) \in C^1$
- (c) $\|\nabla \varphi_i(x)\| \leq K, i = 1..4$
- (d) $\|\nabla \varphi_i(x) - \nabla \varphi_i(y)\| \leq R\|x - y\| \forall x, y$
- (e) S - компакт
- (f) Существует $\hat{x} : \varphi_i(x) < 0, i = 1..4$

Проверка условий:

- (a) Функция является выпуклой тогда и только тогда, когда матрица её вторых производных - положительно полуопределенная. К сожалению, матрица вторых производных у целевой функции $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ уже не полуопределена (среди собственных значений есть отрицательные). Целевая функция не является выпуклой. Поэтому, к сожалению, это условие применимости не выполняются.
- (b) Целевая функция, очевидно, непрерывно-дифференцируема. Каждая из φ_i непрерывно дифференцируема, так как в знаменателе стоит разность $x_2 - y_2$, не обращающаяся в ноль до тех пор, пока плот не совершит полный поворот. Однако последовательность *stage*-й определяется конфигурацией, и поэтому возникает кусочно-заданная функция из *stage*_{2a} и *stage*_{2b}. Она непрерывна, однако в переломной точке потенциально может быть не дифференцируемой. Тем не менее, существуют односторонние производные. При попадании в переломную точку градиент считается (так же, как и в любой другой точке) с помощью конечно-разностных аппроксимаций первого порядка, поэтому доопределим производную переломной точки правосторонней производной именно с помощью этой схемы.
- (c) K подбирается по алгоритму из метода Зойтендейка по начальному приближению для конкретной задачи.
- (d) R подбирается по алгоритму из метода Зойтендейка по начальному приближению для конкретной задачи.
- (e) Каждый из параметров плота ограничен. Условие выполнено. Существует $\hat{x} : \varphi_i(x) < 0$ - любая ненулевая допустимая точка задачи. Условие выполнено.

5 Результаты

Решим конкретную задачу. Найдем наибольшую площадь плота, проходящего через реку:

$$\begin{aligned} z_1 &= 40 \\ z_2 &= 60 \end{aligned}$$

Начальное приближение для плота:

$$\begin{aligned} w &= 20 \\ h &= 70 \\ a &= 5 \\ q &= 5 \end{aligned}$$

5.1 Решение одномерной минимизацией

Точность 0.1

(a) минимизация по w :

плот: 'w': 34.25, 'h': 70, 'a': 5, 'q': 5
площадь: 2422.50

(b) минимизация по h :

плот: 'w': 20, 'h': 99.75, 'a': 5, 'q': 5
площадь: 2020.50

(c) минимизация по q :

плот: 'w': 20, 'h': 70, 'a': 5, 'q': 25.0625
площадь: 1525.31

5.2 Решение многомерной минимизацией

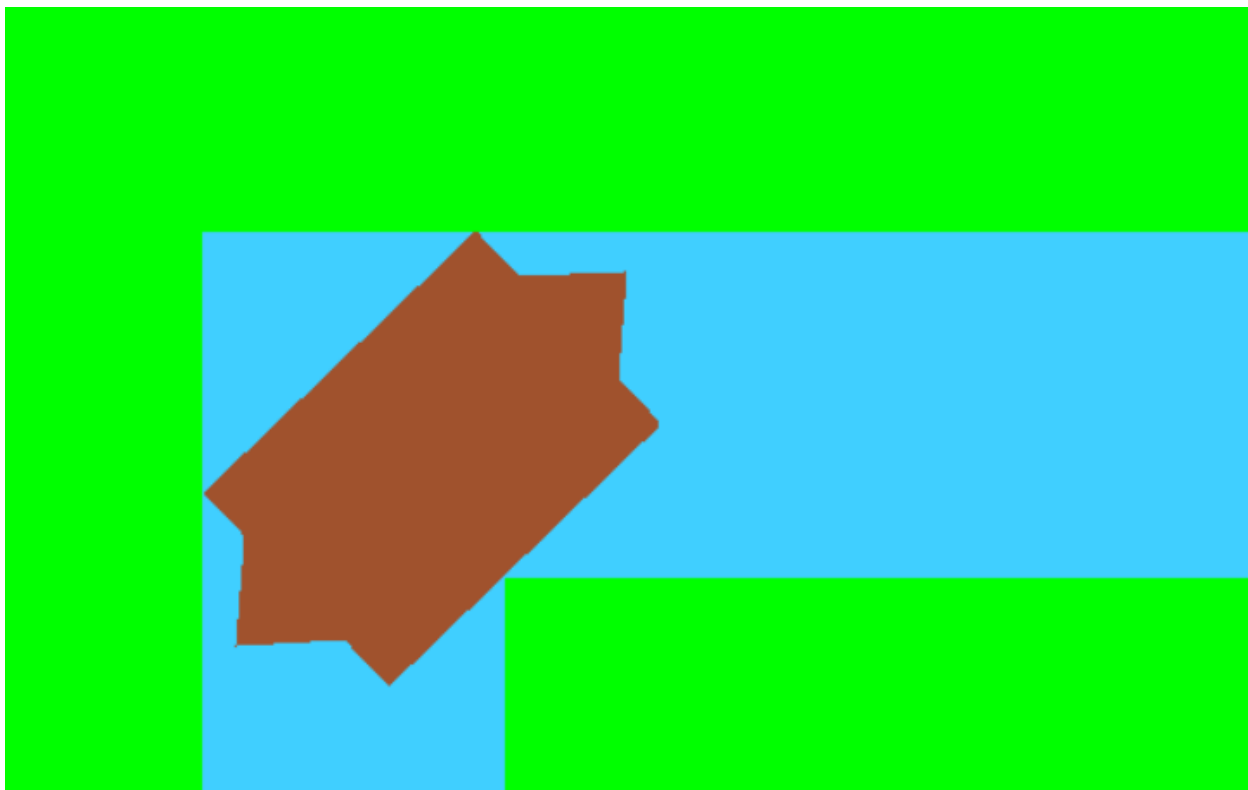
Точность 0.1

(a) Решение, $K = 1.1$, $R = 1.1$:

плот: 'w': 30.30041, 'h': 76.33151, 'a': 16.91848, 'q': 11.33151
площадь: 2504.58854

5.3 Компьютерная визуализация

- Визуализация включает движущийся по заданной траектории плот, динамически изменяющийся при обновлении данных, используемых для оптимизации. См. *github* или презентацию.



6 Выводы

- (a) Использование метода одномерной минимизации для решения поставленной задачи гарантирует оптимальное решение по конкретному параметру при допустимой начальной точке. Использование же метода многомерной минимизации (метода Зойтендейка) подчиняется ряду условностей, и поэтому получаемое решение обладает лишь частью достоверности.
- (b) Как бы плохо не обстояло дело с условиями применимости метода Зойтендейка, он сходится к допустимой точке. Более того, решение, даваемое методом Зойтендейка существенно превосходит решение по любому из параметров при одномерной минимизации.
- (c) Вышеуказанные факты позволяют представить в виде рекомендации следующие соображения: использовать для решения задачи метод многомерной минимизации, однако для более частных случаев постановки задачи может оказаться более выгодным и оправданным использовать метод одномерной минимизации.