Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»
Специальность «Системное программирование»

Лабораторная работа №5
тема "Многомерная минимизация с ограничениями"
дисциплина "Методы оптимизации"

Выполнили студенты гр. 5030102/00201 Гвоздев С.Ю., Золин И.М., Хламкин Е.В.

Преподаватель: Родионова Е.А.

Санкт-Петербург

2023

Содержание

1 Постановка задачи 3

2 Исследование применимости методов 3

3 Описание алгоритмов 4

3.1 Метод всевозможных направлений Зойтендейка 4

4 Результаты 5

5 Обоснование достоверности полученного решения 8

5.1 Графики 8

5.2 Анализ графиков 8

5.3 Теоретическая оценка алгоритмов 9

6 Выводы 10

7 Приложения 10

8 Библиографический список 13

1 Постановка задачи

Дана задача трехмерной минимизации

$$\varphi_0(x) = x_0 + x_1 + 0.5x_2 + 3\sqrt{1 + 3x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}.$$

Необходимо выполнение трех нелинейных условий - неравенств и одного линейного условия - равенства. Даны два блока условий: в первом блоке решение задачи находится внутри допустимой области; во втором блоке - на её границе.
Блок 1:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - 1 \leq 0 \\ x_0^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ x_1 - \frac{0.35426}{0.121334}x_0 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Блок 2:

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + (x_1 - 1)^2 - 1 \leq 0 \\ (x_0 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ x_1 - \frac{0.35426}{0.121334}x_0 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Необходимо решить задачу условной минимизации методом всевозможных направлений Зойтендейка

2 Исследование применимости методов

Условия построения метода:

1. $\varphi_i(x)$ - выпуклая $i = 1..4$
2. $\varphi_i(x) \in C^1$
3. $|| \bigtriangledown \varphi_i(x)|| \leq K$, $i = 1..4$
4. $|| \bigtriangledown \varphi_i(x) - \bigtriangledown\varphi_i(y)|| \leq R||x - y|| \; \forall x, y$
5. S - компакт
6. Существует $\hat{x} : \varphi_i(x) < 0$, $A\hat{x} = b$, $i = 1..4$

Проверка:

1. см. приложения
2. Целевая функция непрерывна, так как под корнем стоит неотрицательное выражение. Целевая функция дифференцируема, так как каждая из компонент градиента имеет в знаменателе корень, всегда больший или равный 1. Функции-ограничения очевидно непрерывно-дифференцируемы.
3. Нахождение константы K производилось следующим образом:
    (a) Как в исходной задаче, так и в задаче поиска начального приближения, само начальное приближение известно. Определеним параллелелепипед P с гранями по каждой из координат, заключающими в себе предположительный ход этой компоненты. Например если 1-я координата вектора x в начальном приближении равна нулю, сделаем первую грань параллелепипеда равной $[-1, 1]$ $(0 \in [-1, 1])$

(b) На каждой из граней параллелепипеда P выберем по $n = 6$ точек. Составим всевозможные вектора из получившихся точек. Таким образом мы заполним параллелепипед P

(c) Для каждой получившейся точки считаем значение $|| \bigtriangledown \varphi_i(x)||$ и выбираем наибольшее. Оно будет определять K_i.

(d) Выберем $K = max(K_i)$, $i = 1..4$

(e) ЗАМЕЧАНИЕ: очевидно, что эвристический подход к выбору длин ребер параллелепипеда P не гарантирует, что точка оптимума будет находиться в нем. Поэтому если в какой-то момент алгоритма текущее приближение x перестанет удовлетворять условиям на $\varphi_i(x)$, необходимо вернуться в начало и пересчитать P с более длинными ребрами.

(f) $K = 3.08621$

4. Нахождение константы R производилось следующим образом:

(a) Лемма о липшицевости: из существования непрерывной производной непрерывной функции по некоторой переменной следует, что эта функция удовлетворяет условию Липшица по этой переменной.

(b) $\bigtriangledown\varphi_i(x)$ в нашей задаче является непрерывно-дифференцируемой функцией (т.к. каждый элемент матриц вторых производных всех φ_i является непрерывно-дифференцируемой функцией x).

(c) Проведем построение параллелепипеда P аналогично предыдущему пункту.

(d) Сведем нашу задачу к теореме: $|| \bigtriangledown \varphi_i(x) - \bigtriangledown\varphi_i(y)||$ - это норма вектора. Возьмем бесконечную норму. Тогда $|| \bigtriangledown \varphi_i(x) - \bigtriangledown\varphi_i(y)||_{\inf} = sup$ по компонентам $\bigtriangledown_j\varphi_i(x) - \bigtriangledown_j\varphi_i(y)$, то есть по j-м частным производным. Из теоремы: $|\bigtriangledown_j \varphi_i(x) - \bigtriangledown_j\varphi_i(y)| \leq R_j||x-y||$, $R_j = max[max(\bigtriangledown_k \bigtriangledown_j \varphi_i(x)), x \in P], k$ берется по компонентам $\bigtriangledown_j\varphi_i(x)$

(e) $R = max(R_j)$

(f) ЗАМЕЧАНИЕ: при вычислении R использовалась бесконечная норма. Необходимо согласовать её с вычислением остальных норм в алгоритме.

(g) $R = 9.94987$

5. Неравенства $x_i^2 + x_j^2 - 1 \leq 0$ задают множество допустимых точек, определяемое как внутренность трех цилиндров. Данное множество ограничено и замкнуто (неравенства нестрогие), и поэтому по т. Гейне - Бореля оно является компактом.

6. Точка $(0, 0, 0)$ удовлетворяет первому блоку условий, точка $(0.21207, 0.61918, 0.61918)$ удовлетворяет второму блоку условий

3 Описание алгоритмов

3.1 Метод всевозможных направлений Зойтендейка

1. **Input**:

- $\{\xi_i\}_0^m : \xi_i > 0$ - совокупность параметров, использующихся для улучшения свойств сходимости задачи (рекомендовано взять $\xi_i = 1$ для $\forall i = \overline{0, m}$);
- $0 < \lambda < 1$ - параметр дробления(рекомендовано взять для решения задачи $\lambda = \frac{1}{2}$);

- x_0 - начальное приближение, $x_0 \in S = \{x | \varphi_i(x) \leq 0,\ \forall i = \overline{1,m}\}$, η_0 - параметр;
- $\delta_0 = -\eta_0,\ \delta_0 > 0$ - критерий близости к почти активным ограничениям, $J_{\delta_k}(x_k) = \{i \in M | -\delta_k \leq \phi_i(x_k) \leq 0\}$ - множество номеров почти активных ограничений для $M = \overline{1,m}$;

2. Поиск начального приближения

   (a) Найти $\min \eta < 0$ при условии $\varphi_i(x) \leq \eta$, где $i = \overline{1,m}$

   (b) Если $x_0 : \varphi_i(x_0) \leq 0$, то эта точка является допустимой точкой для исходной задачи и $\eta_0 = \min \eta$

   (c) Иначе итерации проводятся до тех пор, пока точка не окажется в области рассмотрения задачи

3. Основной этап

   (a) Известны $x_k \in S$ и $\delta_k > 0$

   (b) Решить вспомогательную задачу линейного программирования симплекс-методом для определения направления спуска $s : \min \eta$ при условиях

$$\begin{cases} \nabla^T \varphi_0(x_k) * s \leq \eta \xi_0 \\ \nabla^T \varphi_i(x_k) * s \leq \eta \xi_i \end{cases} \tag{3}$$

   для $i \in J_{\delta_k}(x_k)$
   Обозначить найденные $s_{\delta_k}(x_k) = s_k$ и $\eta_{\delta_k}(x_k) = \eta_k$

   (c) Выбор величины шага по принципу дробления

      i. Положить $\alpha_k = \alpha_0 * \lambda^{ik}$, где $\alpha_0 = 1$

      ii. Выбрать α_k, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} \varphi_0(x_k + \alpha_k * s_k) - \varphi_0(x_k) \leq \xi_0 \eta_k \alpha_k \\ \varphi_i(x_k + \alpha_k * s_k) \leq 0, i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{4}$$

   (d) Если $\eta_k < -\delta_k$:

      - Делаем шаг α_k по выбранному направлению $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$ и $\delta_{k+1} = \delta_k$
      - Иначе шаг не делается, то есть $x_{k+1} = x_k$ и $\delta_{k+1} = \lambda \delta_k$

   (e) Закончить работу алгоритма при выполнении одного из условий:

      i. $\delta_k < \delta_{0k}$, где $-\delta_{0k} = \max \varphi_i(x_k)$ для $i \notin J_0(x_k)$ - не для активных ограничений, и $\eta_k = 0$. При этом $\delta_k < \varepsilon$

      ii. То же самое, только $\eta_k < \varepsilon$. Данное разграничение на два случая необходимо, чтобы понимать, когда решение находится точно на границе области, а когда оно предположительно внутри области.

4 Результаты

Решение на границе, eps = 0.01

```
N: 0
x [0.21207, 0.61919, 0.61919]
f0 5.27793
way [0.0, 0.0, 0.0]
lmd nan
dlt 0.25
eta -0.0
I_d [0, 1, 2]

N: 1
x [0.21207, 0.61919, 0.61919]
f0 5.27793
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.027835080700028356
dlt 0.125
eta -5.01056032
I_d []

N: 2
x [0.20254, 0.59135, 0.59135]
f0 5.13952
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.027835080700028356
dlt 0.125
eta -4.93322705
I_d []

N: 3
x [0.193, 0.56352, 0.56352]
f0 5.00334
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.027835080700028356
dlt 0.125
eta -4.850806309999999
I_d []

N: 4
x [0.18347, 0.53568, 0.53568]
f0 4.86953
way [0.0, 0.0, 0.0]
lmd nan
dlt 0.125
eta -0.0
I_d [0, 1]

N: 5
x [0.18347, 0.53568, 0.53568]
f0 4.86953
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.013917540350014178
dlt 0.0625
eta -4.76299623
I_d []

N: 6
x [0.1787, 0.52176, 0.52176]
f0 4.80355
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.013917540350014178
dlt 0.0625
eta -4.71697582
I_d []

N: 7
x [0.17394, 0.50785, 0.50785]
f0 4.73823
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.013917540350014178
dlt 0.0625
eta -4.66949533
I_d []
```

```
N: 8
x [0.16917, 0.49393, 0.49393]
f0 4.67359
way [0.0, 0.0, 0.0]
lmd nan
dlt 0.0625
eta -0.0
I_d [0, 1]

N: 9
x [0.16917, 0.49393, 0.49393]
f0 4.67359
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.006958770175007089
dlt 0.03125
eta -4.62051802
I_d []

N: 10
x [0.16679, 0.48697, 0.48697]
f0 4.64152
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.006958770175007089
dlt 0.03125
eta -4.59545677
I_d []

N: 11
x [0.1644, 0.48001, 0.48001]
f0 4.60963
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.006958770175007089
dlt 0.03125
eta -4.5700079
I_d []

N: 12
x [0.16202, 0.47305, 0.47305]
f0 4.57792
way [0.0, 0.0, 0.0]
lmd nan
dlt 0.03125
eta -0.0
I_d [0, 1]

N: 13
x [0.16202, 0.47305, 0.47305]
f0 4.57792
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.0034793850875035445
dlt 0.015625
eta -4.5441670599999995
I_d []

N: 14
x [0.16083, 0.46957, 0.46957]
f0 4.56213
way [0.0, 0.0, 0.0]
lmd nan
dlt 0.015625
eta -0.0
I_d [0, 1]

THE END by ETA = 0
```

Решение внутри области, eps = 0.01

```
N 0
x [-0.01498, -0.04373, -0.04373]
f0 2.92617
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.04372967109660759
dlt 0.25
eta -1.84249986
I_d []

N 1
x [-0.02745, -0.08015, -0.08015]
f0 2.8749
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.03642309280945379
dlt 0.25
eta -1.53464551
I_d []

N 2
x [-0.03787, -0.11056, -0.11056]
f0 2.83911
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.030407523212330912
dlt 0.25
eta -1.2811863399999999
I_d []

N 3
x [-0.04659, -0.13604, -0.13604]
f0 2.81394
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.02547572589479815
dlt 0.25
eta -1.07339068
I_d []

...

N 59
x [-0.12372, -0.36124, -0.18321]
f0 2.72341
way [-0.3425, -1.0, 1.0]
lmd 0.00028549460857184636
dlt 0.0078125
eta -0.01202899
I_d []

N 60
x [-0.12381, -0.3615, -0.18347]
f0 2.72341
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.0002587911451891055
dlt 0.0078125
eta -0.01090387
I_d []

N 61
x [-0.1239, -0.36174, -0.18323]
f0 2.7234
way [-0.3425, -1.0, 1.0]
lmd 0.00024039264119459766
dlt 0.0078125
eta -0.010128670000000001
I_d []

N 62
x [-0.12397, -0.36196, -0.18345]
f0 2.7234
way [-0.3425, -1.0, -1.0]
lmd 0.0002228091586489693
dlt 0.0078125
eta -0.00938781
I_d []

THE END by POINT INSIDE SUSPECT
```

5 Обоснование достоверности полученного решения

5.1 Графики

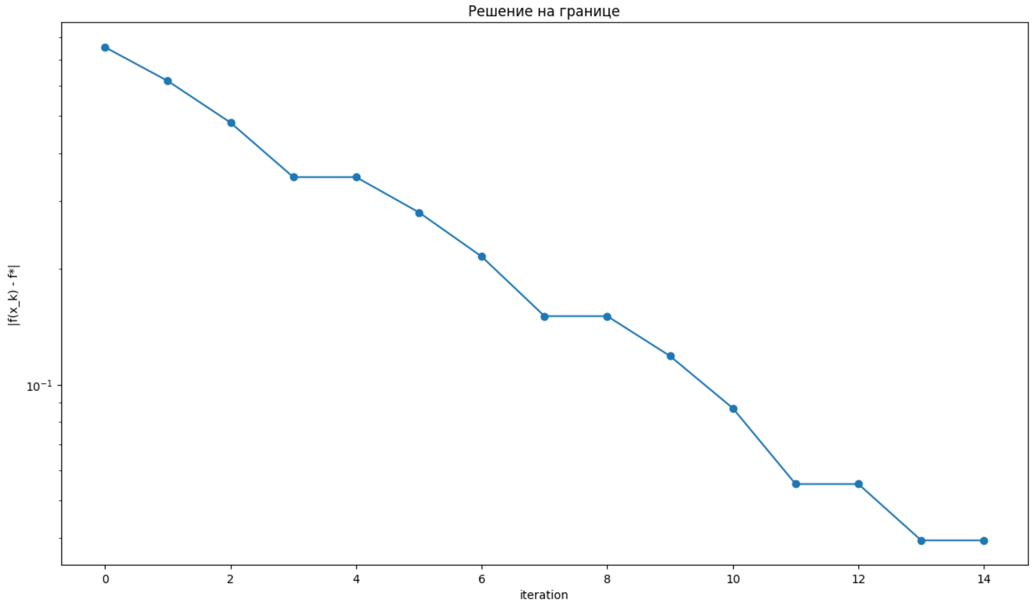

Рис. 1: Разность значений функции на k-м шаге алгоритма и значением функции, принятым как истинное. Решение на границе. $\epsilon = 0.01$

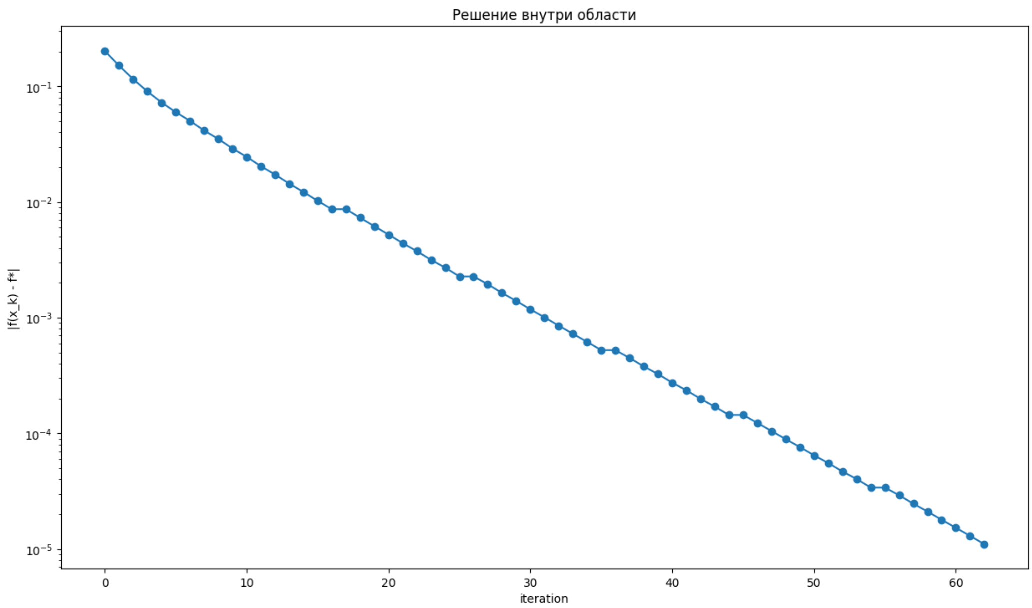

Рис. 2: Разность значений функции на k-м шаге алгоритма и значением функции, принятым как истинное. Решение внутри области.$\epsilon = 0.01$

5.2 Анализ графиков

1. В обоих случаях скорость сходимости линейная

2. В обоих случаях наблюдаются "плато". Это обусловлено тем, что $\eta < \delta$ на определенной итерации, что приводит к изменению δ (x остается таким же). В случае с решением на границе области это связано с тем, что направление градиента целевой функции и направления градиентов ограничений из I_δ сметорят в разные стороны, так что двигаться никуда не имеет смысла, что дает нулевое направление спуска и, соответственно, $\eta = 0$. В случае с решением внутри области наша точка просто приближается к оптимуму, и направление спуска становится все более и более ортогональным градиенту (получается, что уменьшается η, и в какой-то момент становится не нулем, но меньше $-\delta$).

3. Примечательно, что в случае решения на границе точность не достигается. Однако в случае решения внутри области решение находится со слишком большой точностью. Данный эффект может быть вызван не слишком удачным подбором параметров δ_0, η_0.

5.3 Теоретическая оценка алгоритмов

При построении алгоритма производилась исключительно линейная аппроксимация. Поэтому рассчитывать на сверхлинейную скорость сходимости не нужно.
Попробуем описать временные затраты на одну итерацию алгоритма.

1. Обновление $I_\delta : O(m)$

2. Поиск направления спуска: решается задача линейного программирования. Применяется Симплекс-метод. Размерность матрицы (матрица с неравенствами), передаваемой в Симплекс-метод: $(n+1) \times (|I_\delta| + 1 + 2n)$. После перевода матрицы неравенств в матрицу с равенствами (и создавая новые переменные, большие или равные нуля) получим

   $$[2 * (n+1) + (|I_\delta| + 1 + 2n)] \times (|I_\delta| + 1 + 2n).$$

   Как мы помним, потенциально дольше всего Симплекс будет работать с матрицей, у которой длина в два раза больше ширины. Поэтому оценим сверху (или почти сверху) предыдущее выражение:

   $$5n \times 3n.$$

   Тогда худшее время работы Симплекса не более чем $O(2^{5n})$. Однако практически получается сильно меньше: $O(3 * 5n)$. Выберем эту оценку. Коль скоро мы имеем $O(3 * 5n)$ шагов Симплекс-метода, на один шаг исходного алгоритма поребуется $O(n^2) * O(3 * 5n) \approx O(n^3)$ времени.

3. Выбор шага. Пересчет трех простых арифметических выражений для шага. $O(1)$.

4. Обновление x: $O(1)$

5. Итого: у алгоритма получается кубическое время работы на одном шаге. Число же шагов алгоритма зависит от точности и от того, на границе или в области находится точка.

6. Замечание: поиск начального приближения по методу Зойтендейка сопоставим по затратам (а иногда может и превосходить их) на само решение.

6 Выводы

Метод Зойтендейка имеет ряд преимуществ.
Во-первых, он гарантирует сходимость к оптимальной точке при выполнении основных условий применимости метода. К тому же решение вспомогательной задачи линейного программирования может производиться любым наиболее подходящим под условия методом. Также учитывается при построении направления следующего шага только ограничения, близкие к активным, а на остальных ограничениях можно рассматривать задачу безусловной минимизации.

Недостатками данного метода могут являться достаточно жесткие условия применимости метода, налагаемые на функцию и область ее исследования, и сложность аналитического определения параметра дробления исходя из обстоятельств подбора шага и необходимости отодвигаться поближе к границе.

Зачастую в задачах на выбор начального приближения из рассматриваемого множества сложно подобрать такую точку, чтобы учесть все наборы ограничений. Для этого может использоваться метод всевозможных направлений Зойтендейка, позволяющий найти допустимую точку и выбрать ее в качестве начального приближения.

7 Приложения

Реализация программы находится в репозитории GitHub по ссылке:
`https://github.com/IMZolin/multi-dimension-minimization-restrictions`

Проверка условий применимости.

Выпуклость

$$\varphi(x) = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 3\sqrt{1+3x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1} = \frac{9x_1}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}} + 1$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_2} = \frac{3x_2}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}} + 1$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_3} = \frac{3x_3}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1^2} = -27\cdot\frac{x_1^2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} + \frac{9}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_2\partial x_1} = -9\frac{x_1x_2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_2^2} = -3\frac{x_2^2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{3\cdot x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_3\partial x_2} = \frac{-3x_2\cdot x_3}{(3\cdot x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_3^2} = -3\frac{x_3^2}{(3\cdot x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}$$

Матрица Гессе.

$$\begin{pmatrix}
\frac{-27x_1^2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} + \frac{9}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}} & \frac{-9x_1x_2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} & \frac{-9x_1x_3}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} \\
\frac{-9x_1x_2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} & \frac{-3x_2^2}{(3\cdot x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{3\cdot x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}} & \frac{-3x_2x_3}{(3\cdot x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} \\
\frac{-9x_1\cdot x_3}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} & \frac{-3x_2x_3}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} & \frac{-3x_3^2}{(3\cdot x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}
\end{pmatrix}$$

$\varphi(x)$ – выпуклая $\Leftrightarrow$ $H(\varphi(x))$ – положительно полуопределена.

① $$\left(\frac{-27x_1^2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}}+\frac{9}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}\right)>0$$

$$<$$

$$\frac{-3x_1^2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} \vee \frac{1}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}$$

$$\frac{3x_1^2}{(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^{3/2}} \wedge \frac{1}{\sqrt{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}}_{>0}\left(\frac{3x_1^2}{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}-1\right)\wedge 0$$

$$\frac{3x_1^2-3x_1^2-x_2^2-x_3^2-1}{\underbrace{3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}_{>0}} \Rightarrow -\underbrace{(x_2^2+x_3^2+1)}_{>0}<0$$

Ниже:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ② $$\xi=(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)$$

$$\frac{81x_1^2x_2^2}{\xi^3}+\frac{27}{\xi}-\frac{81x_1^2}{\xi^2}-\frac{27x_2^2}{\xi^2}-\frac{81x_1^2x_2^2}{\xi^3}>0$$

$$\frac{27}{\xi}\left(1-\frac{3x_1^2}{\xi}-\frac{x_2^2}{\xi}\right)$$

a_{ij} - элементы матрицы Гессе

$$\frac{\xi-(\xi-x_3^2-1)}{\underbrace{\xi}_{>0}} \Rightarrow \frac{x_3^2+1}{\xi}>0$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ③ $$-\frac{81\cdot 3x_1^2x_2^2x_3^2}{\xi^{9/2}}-\frac{81x_3^2}{\xi^{5/2}}+\frac{81\cdot 3x_1^2x_3^2}{\xi^{7/2}}+\frac{81x_2^2x_3^2}{\xi^{7/2}}+$$

$$\frac{81}{\xi^{3/2}}-\frac{81\cdot 3x_1^2}{\xi^{5/2}}-\frac{81x_2^2}{\xi^{5/2}}+\frac{81\cdot 3x_1^2x_2^2}{\xi^{7/2}}+\frac{81\cdot 3x_1^2x_2^2x_3^2}{\xi^{9/2}}-$$

$$\frac{81\cdot 3x_1^2x_3^2}{\xi^{7/2}}+\frac{81\cdot 3x_1^2x_2^2x_3^2}{\xi^{9/2}}-\frac{81x_2^2x_3^2}{\xi^{7/2}}=\frac{81}{\xi^{3/2}}-\frac{81\cdot 3x_1^2}{\xi^{5/2}}-$$

$$-\frac{81x_2^2}{\xi^{5/2}}-\frac{81x_3^2}{\xi^{5/2}}=\frac{81}{\xi^{3/2}}-\frac{81}{\xi^{5/2}}(\xi-1)=\frac{81}{\xi^{5/2}}>0$$

8 Библиографический список

1. Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн, Клиффорд. "Алгоритмы. Построение и анализ, 2-е издание"Издательский дом “Вильямс”, 2011. – 892–918 с.

   URL: https://vk.com/doc191450968_561608466?hash=HUwStWS0yzrW9SaXn8POZtaz3gTyMTm dl=U9ivclLJBeeYQbs3MMhGtwYZ7Mx4nGJelTv0Hv56E4z / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 04.03.2023)

2. Родионова Е.А., Петухов Л.В., Серёгин Г.А. "Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования"Издательство Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2014

   URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/i17-98.pdf/info / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 10.03.2023)

3. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 22—24.