Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»
Специальность «Системное программирование»

Лабораторная работа №3
тема "Решение задач одномерной минимизации"
дисциплина "Методы оптимизации"

Выполнили студенты гр. 5030102/00201 Гвоздев С.Ю.,
Золин И.М.
Хламкин Е.В.

Преподаватель: Родионова Е.А.

Санкт-Петербург

2023

Содержание

1 Постановка задачи

Даны функция и отрезок:

$$f(x) = \frac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$$

$$x \in [a, b] = [0.1, 1.5]$$

Задачи:

1. Найти $min f(x)$ на заданном отрезке с точностью $0.1, 0.01, 0.001$ с помощью трех методов: метода равномерного поиска (us), метода пробных точек (tpm) и метода золотого сечения $(gold)$
2. Сравнить методы. В качестве критерия использовать число обращений к вычислению функции
3. Сравнить методы с теоретическими оценками

2 Исследование применимости методов

Все три метода применимы только при условии унимодальности целевой функции. Данное условие действительно выполняется. Продемонстрируем этот факт с помощью графика:

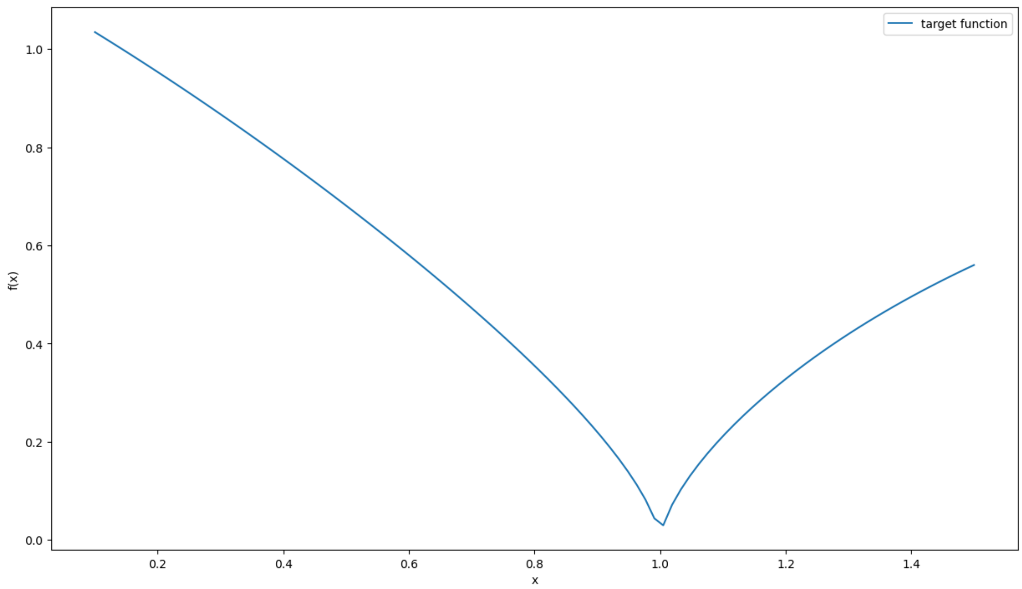

Рис. 1: график целевой функции на заданном отрезке

3 Алгоритмы методов решения задач одномерной минимизации

В первую очередь авторы хотели бы обратить внимание на следующий немаловажный факт: решение задачи одномерной минимизации ищется с наперед заданной точностью. Как только длина интервала на конкретной итерации меньше заданной точности, алгоритмы прекращают свое действие и выдают в качестве ответа **середину этого**

интервала. Однако и любая другая точка последнего интервала по праву может считаться решением. Середина здесь берется исключительно из соображений конкретики (какую-то точку все равно надо брать).

3.1 Метод равномерного поиска

1. **Input**:
   n - число разбиений, $\left[a, b\right]$ - отрезок, на котором определена функция, ε - требуемая точность

2. Построение точек:
   $x_i = a + ih$, где $h = \frac{b-a}{n}, i = \overline{1, n}$

3. Вычисляем значение функции в этих точках и находим минимальное их них. Пусть индекс соотвествующий этому элементу: j.

4. $f(x)$ - унимодальная функция, следовательно
   $x^* \in \left[x_{j-1}, b\right]$ и $x^* \in \left[a, x_{j+1}\right] \Rightarrow x^* \in \left[x_{j-1}, x_{j+1}\right]$

   (a) Если j = 0, то новый интервал последовательности $\left[a, x_{j+1}\right]$

   (b) Если j = n-2, то новый интервал последовательности $\left[x_{j-1}, b\right]$

   (c) Иначе новый интервал последовательности $\left[x_{j-1}, x_{j+1}\right]$

   Будем повторять шаги 2-4 до тех пор, пока $\left|x_{j+1} - x_{j-1}\right| \geq \varepsilon$

5. **Output**:
   x^* - точка из последнего интервала$\left(x^* = \frac{x_{j-1}+x_{j+1}}{2}\right)$

3.2 Метод пробных точек

1. **Input**:
   $\left[a, b\right]$ - отрезок, на котором определена функция, ε - требуемая точность

2. Если длина отрезка $[a, b]$ меньше ε, то решение найдено. Иначе:

3. Добавляем на отрезок $[a, b]$ три точки:

$$x_i = \frac{b-a}{4}i + a,\ i = 1..3$$

4. Вычисляем $f(x_1)$. Если $f(x_2)$ еще не вычислено, то вычисляем (только на первой итерации такое возможно) и сравниваем с $f(x_1)$

   (a) Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, переходим к п.1 для нового отрезка $[a, b] := [a, x_2]$ и для уже известного нового значения $f(x_2) := f(x_1)$ (значение серидины нового отрезка)

   (b) Если $f(x_1) > f(x_2)$, то вычисляем $f(x_3)$ и сравниваем $f(x_2)$ и $f(x_3)$

      i. Если $f(x_2) \leq f(x_3)$, переходим к п.1 для нового отрезка $[a, b] := [x_1, x_3]$ и для нового известного значения серединного значения $f(x_2) := f(x_2)$

      ii. Если $f(x_2) > f(x_3)$, переходим к п.1 для нового отрезка $[a, b] := [x_2, b]$ и для нового известного значения серединного значения $f(x_2) := f(x_3)$

3.3 Метод золотого сечения

1. Вводятся значения:
   a - левая граница отрезка, b - правая граница отрезка, ε - требуемая точность.

2. Вычисляются $f(x_1)$, $f(x_2)$, где $x_1 = a + 0.382 * (b - a)$, $x_2 = b - 0.382 * (b - a)$

3. Определяется новый интервал (a, x_2) - если $f(x_1) \leq f(x_2)$ или (x_1, b) - если $f(x_1) > f(x_2)$, в котором локализован минимум.

4. Внутри полученного интервала находится новая точка (x_1 в случае 1) или (x_2 в случае 2), отстоящая от его конца на расстоянии, составляющем 0,382 от его длины. В этой точке рассчитывается значение $f(x)$

5. Вычисления повторяются, начиная с пункта (3), до тех пор, пока величина интервала неопределенности не станет меньше или равна ε.

4 Результаты

Решение поставленной задачи (число обращений к функции и координата минимума):

Точность: 0.1
Метод равномерного поиска:
15 1.00 +- 0.05
Метод пробных точек:
8 1.00 +- 0.05
Метод золотого сечения:
8 1.00 +- 0.05

Точность: 0.01
Метод равномерного поиска:
25 0.999 +- 0.005
Метод пробных точек:
14 0.999 +- 0.005
Метод золотого сечения:
13 0.999 +- 0.005

Точность: 0.001
Метод равномерного поиска:
35 1.0000 +- 0.0005
Метод пробных точек:
19 0.9999 +- 0.0005
Метод золотого сечения:
18 1.0000 +- 0.0005

5 Обоснование достоверности полученного решения

5.1 Теоретическая оценка алгоритмов

5.1.1 Метод равномерного поиска

На 1-ом шаге делим отрезок на n частей.
Длинна интервала: $|x_{j+1}^{(1)} - x_{j-1}^{(1)}| = \frac{2}{n}(b-a)$
На 2-ом шаге: $|x_{j+1}^{(2)} - x_{j-1}^{(2)}| = \frac{2^2}{n^2}(b-a)$
На k-ом шаге: $|x_{j+1}^{(k)} - x_{j-1}^{(k)}| = \frac{2^k}{n^k}(b-a)$

Предположим шаг был последним(выполнено условие остановки):
$k < \dfrac{\ln \frac{\varepsilon}{b-a}}{\ln \frac{2}{n}} = \dfrac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln n - \ln 2}$
Т.е. число итераций, необходимых для достижения заданной точности ε ограниченным числом, стоящим в правой части выражения.
На каждом шаге алгоритма функция цели вычисляется n раз.

Число обращений к целевой функции необходимых для достижения заданной точности:
$f(n) = \dfrac{n}{[\ln \frac{n}{2}]}([\ln \frac{(b-a)}{\varepsilon}])$

(Все округления производятся в большую сторону)

Что выгоднее разбивать отрезок на 5 или на 25 частей?
Функция имеет единственный глобальный минимум. Найдём нуль производной:
$f'(n) = \dfrac{\ln \frac{n}{2} - 1}{\ln^2 \frac{n}{2}}(\ln(b-a) - \ln \varepsilon) = 0 \Rightarrow n = 2\varepsilon \approx 5.44$
т.е. оптимальным числом разбиений является 5 или 6.

5.1.2 Метод пробных точек

На первом шаге алгоритма значение функции всегда вычисляется два раза ($f(x_1)$, $f(x_2)$) или три раза ($f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$) в зависимости от того, в какой части отрезка находится минимум. На каждом из следующих шагов мы уже знаем значение $f(x_2)$, переданное алгоритмом с предыдущего шага. Поэтому теперь необходимое количество вычислений функции - 1 или 2.
Итого:

$$n_{min} = 2 + 1 * [\log_2 \tfrac{b-a}{\varepsilon}]$$
$$n_{max} = 3 + 2 * [\log_2 \tfrac{b-a}{\varepsilon}]$$

(округления всегда производятся в большую сторону)

Заметим, что если минимум находится на левой границе интервала, вычислений бедет меньше. Если же минимум - в середине или справа, то вычислений будет больше

5.1.3 Метод золотого сечения

После каждой итерации метода, интервал неопределенности уменьшается ровно в $(1-\alpha)$ раз, где $\alpha \approx 0.382$. Мы хотим, что бы интервал неопределенности стал $\leq \varepsilon$. Получаем уравнение:

$\varepsilon = (1-\alpha)^n * (b-a)$, где n - необходимое число итераций алгоритма, для достижения требуемой точности.
$n = [log_{(1-\alpha)} \frac{\varepsilon}{(b-a)}] = 20$. (для $\varepsilon = 0.0001$). (Все округления производятся в большую сторону). Число итераций совпадает с числом обращений к функции. Так же, необходимо к полученной оценке прибавить еще две итерации вычисления функции, которые происходят в начале алгоритма.

5.2 Сравнительный анализ

Численный эксперимент поставлен следующим образом:
На отрезке $[a, b] = [-2, 2]$ строится парабола $f(x) = (x - \delta)^2$, где δ - параметр, $\delta \in [-2, 2]$. В цикле 1000 раз генерируется рпоизвольное δ. Для таким образом определенной функции строятся решения тремя методами $(us, tpm, gold)$ с точностями $10^{-15}...10^{-1}$. Строятся графики зависимости чила обращений к вычислению функции от точности для каждого метода. Параллельно вычисляются теоретические оценки и также выводятся на графиках

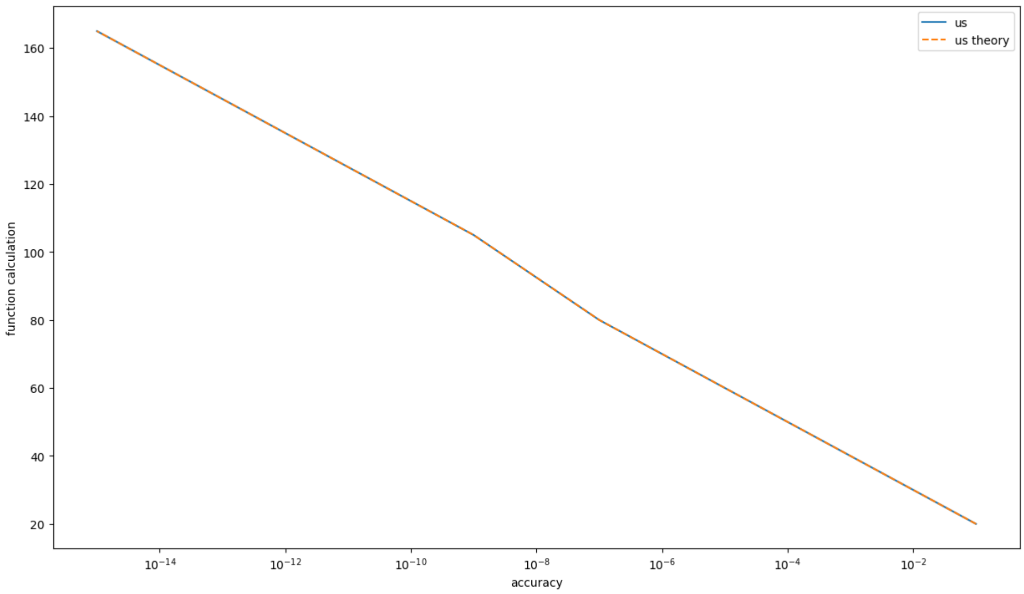

Рис. 2: Метод равномерного поиска (практические + теоретические результаты)

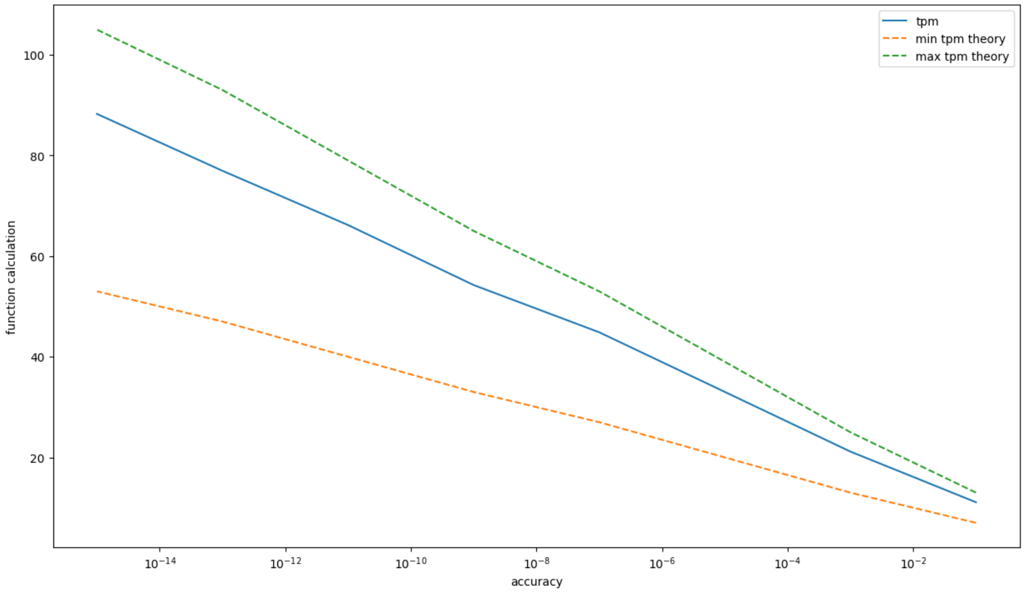

Рис. 3: Метод пробных точек (практические + теоретические результаты)

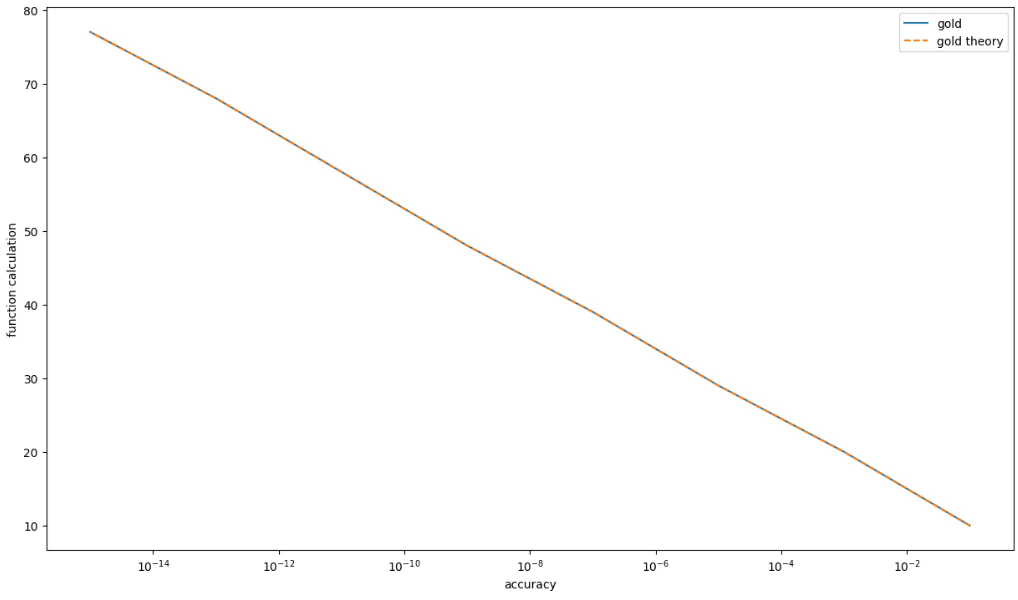

Рис. 4: Метод золотого сечения (практические + теоретические результаты)

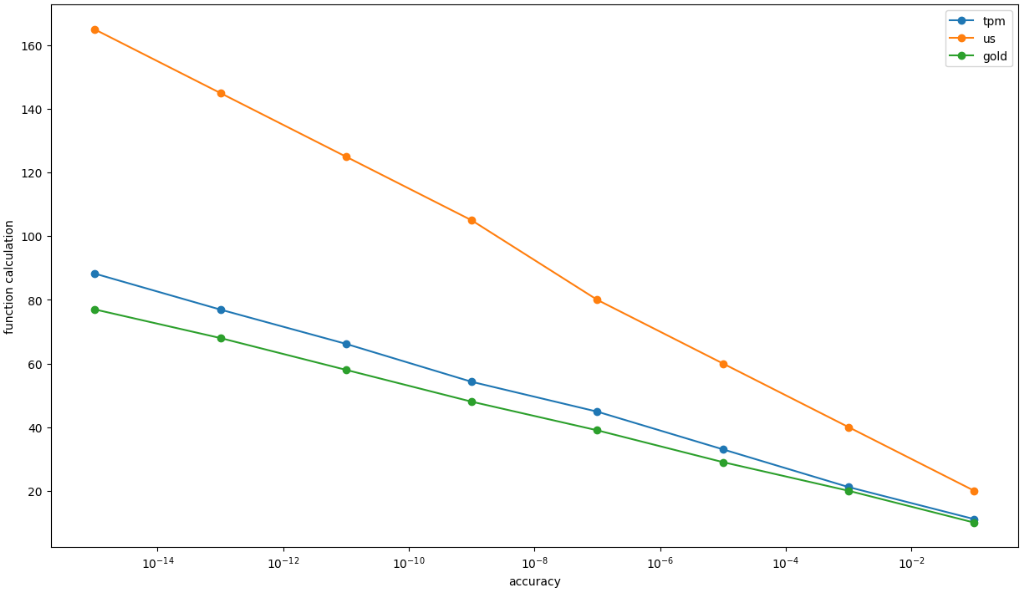

Рис. 5: Сравнение трех методов

Хочется сказать несколько слов о полученных графиках. Во-первых, теоретическая оценка полностью совпала с практическими результатами для методоа равномерного поиска и метода золотого сечения. Этого можно было ожидать, так как на каждом из шагов обращение к функции происходит фиксированное число раз. Того же нельзя сказать о методе пробных точек. Как было выяснено из теоретических оценок, существуют верхняя и нижняя границы, в которые как раз и укладываются практические результаты.
В сравнении друг с другом метод золотого сечения справляется с задачей лучше всего. Немного хуже работает метод пробных точек. Хуже всего удается быстро решить задачу методу равномерного поиска.

6 Выводы

Авторам кажется очевидным вывод о предпочтении метода золотого сечения двум другим рассмотренным методам. Однако можно вспомнить, что в методе равномерного поиска есть параметрическая зависимость от числа разбиений отрезка. Может существовать надеждана то, что вдумчивый подбор этого параметра сможет заставить конкурировать данный метод с меодами золотого сечения и пробных точек. Однако авторы склоняются к тому,что эта надежда скорее обратится химерой, и рекомендуют надежно использовать золотое сечение.

7 Приложения

Реализация программы находится в репозиьтории GitHub по ссылке:
`https://github.com/IMZolin/one-dimension-minimization`

8 Библиографический список

1. Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн, Клиффорд. "Алгоритмы. Построение и анализ, 2-е издание"Издательский дом “Вильямс”, 2011. – 892–918 с.

   URL: https://vk.com/doc191450968_561608466?hash=HUwStWS0yzrW9SaXn8POZtaz3gTyMTm dl=U9ivclLJBeeYQbs3MMhGtwYZ7Mx4nGJelTv0Hv56E4z / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 04.03.2023)

2. Родионова Е.А., Петухов Л.В., Серёгин Г.А. "Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования"Издательство Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2014

   URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/i17-98.pdf/info / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 10.03.2023)

3. Моисеев Н.Н. "Методы оптимизации"

   URL: https://avidreaders.ru/book/metody-optimizacii-1.html/ [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 07.03.2023)