Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»
Специальность «Системное программирование»

Лабораторная работа №5
тема "Многомерная минимизация с ограничениями"
дисциплина "Методы оптимизации"

Выполнили студенты гр. 5030102/00201 Гвоздев С.Ю., Золин И.М., Хламкин Е.В.

Преподаватель: Родионова Е.А.

Санкт-Петербург

2023

Содержание

1 Постановка задачи

1. Необходимо минимизировать функцию двух переменных:

$$\varphi(x) = (x_0 - 8)^2 + (x_1 + 2)^2 \text{ -> } min$$

2. При условии, что выполнены линейные равенства:

$$\begin{gathered} -0.5x_0 - x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ -1.5x_0 - x_1 + x_3 + 3 = 0 \\ -x_i \leq 0,\ i = 0..3 \end{gathered}$$

3. Задачу решать методом Вульфа (методом приведенного градиента)

4. Сравнить на заданном примере метод Вульфа и метод Зойтендейка (метод возможных направлений)

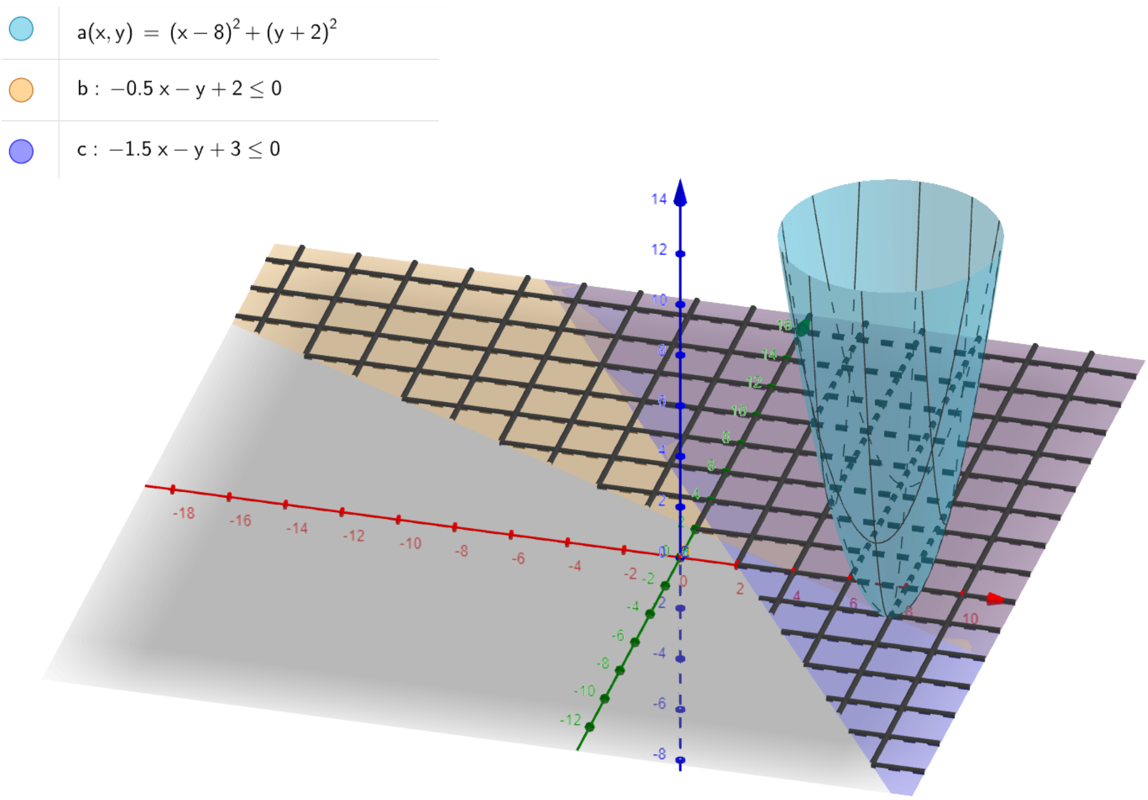

Рис. 0: График целевой функции и линейных ограничений.

2 Исследование применимости методов

Для применения метода необходимо выполнение следующих условий:

1. $\varphi(x)$ - выпуклая
2. $\varphi(x)$ - непрерывно - дифференцируемая
3. $rang(A) = m,\ A(m, n)$ - матрица линейных ограничений
4. любые m столбцов A линейно независимы

Проверка:

1. $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_0} = 2(x_0 - 8)$
   $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1} = 2(x_1 + 1)$
   $\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_0^2} = 2$
   $\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1^2} = 2$
   $\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_0 \partial x_1} = 0$
   $\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_0 \partial x_1} = 0$
   $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – положительно полуопределённая $\Rightarrow \varphi(x)$ – выпуклая

2. Очевидно, исходя из вида самой функции.

3. $rang(A) = m$
   $-0.5x_0 - x_1 + x_2 + 2 = 0$
   $-1.5x_0 - x_1 + x_3 + 3 = 0$
   $\begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 1 & 0 \\ -1.5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1 < rang(A) \leq m = 2$

4. $-0.5x_0 - x_1 + x_2 + 0x_3 = -2$
   $-1.5x_0 - x_1 + 0x_2 + x_3 = -3$
   $\begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 1 & 0 \\ -1.5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Возьмём все возможные 2x2 матрицы и проверим, что их столбцы линейное независимы
   ($\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$ где v_1, v_2 – столбцы матрицы)
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – выполняется
   $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – выполняется
   $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – выполняется
   $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – выполняется
   $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – выполняется
   $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – выполняется

3 Описание алгоритма

3.1 Метод Вульфа(приведённого градиента)

1. **Input**:

   - x_0 - начальное приближение : $Ax_0 = b,\ x_0 \geq 0;$

2. Поиск начального приближения

(a) Вариант 1. Перебор всевозможных квадратных матриц A до тех пор, пока решение $Ax_0 = b$ не окажется состоящим только из положительных компонент.

(b) Вариант 2. (Предпочтительный) Применение процедуры $Initialize - Simplex$ (по Корману), которая ищет допустимую точку задачи линейного программирования.

3. Основной этап

(a) I_k - множество индексов m наибольших компонент

(b) Нахождение приведённого градиента r:

$$B = \{a_j | j \in I_k\}$$

$$N = \{a_j | j \notin I_k\}$$

$$r^T = \bigtriangledown^T \varphi(x_k) - \bigtriangledown^T \varphi_B(x_k) \cdot B^{-1} A$$

(c) Построение возможного направления спуска d:

$$d^T = (d_B^T | d_N^T)$$

$$d_N^{(j)} = \begin{cases} -r^{(j)},\ j \notin I_k,\ r^{(j)} \leq 0 \\ -x_j, j \notin I_k,\ r^{(j)} > 0 \end{cases}$$

$$d_B = -B^{-1} N d_N$$

(d) Если $d = 0$, то закончить работу

(e) Иначе рассмотрим задачу одномерной минимизации:

$$\min_{0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} \varphi(x + \lambda d)$$

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min\{-\frac{x^{(j}}{d^{(j}}\},\ d_k^{(j)} < 0 \\ \lambda_{\max} - \textit{любое},\ \nexists\ d_k^{(j} < 0 \end{cases}$$

i. Положить $\lambda_k = \lambda_{opt}$

ii. Выбрать $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$

iii. k -> k + 1

4 Результаты

Wolf, eps = 0.01

```
N 0
I [0, 1]
x [1.0, 1.5, 0.0, 0.0]
f 61.25
d [17.5, -8.75, -0.0, 17.5]
lmd 0.16665

N 1
I [0, 3]
x [3.91641, 0.0418, 0.0, 2.91641]
f 20.84466
d [34.37552, -0.85339, 16.33437, 50.70989]
lmd 0.04540

N 2
I [0, 3]
x [5.47718, 0.00305, 0.74164, 5.21882]
f 10.37681
d [20.2685, -0.04298, 10.09127, 30.35976]
lmd 0.06773

N 3
I [0, 3]
x [6.85011, 0.00014, 1.42519, 7.27531]
f 5.32279
d [9.20146, -0.00118, 4.59955, 13.801]
lmd 0.11304

N 4
I [0, 3]
x [7.89026, 0.0, 1.94513, 8.83539]
f 4.01206
d [0.87796, -2e-05, 0.43896, 1.31692]
lmd 0.12279

N 5
I [0, 3]
x [7.99807, 0.0, 1.99904, 8.9971]
f 4.00001
d [0.01546, -1e-05, 0.00773, 0.02319]
lmd 0.1810064703639147

N 6
I [0, 3]
x [8.00087, 0.0, 2.00043, 9.0013]
f 4.0
d [-0.01389, -0.0, -0.00694, -0.02083]
lmd 0.08264

N 7
I [0, 3]
x [7.99972, 0.0, 1.99986, 8.99958]
f 4.0
d [0.00224, -0.0, 0.00112, 0.00336]
lmd 0.24562

STOP: d = 0
```

Zoitendeik, eps = 0.01 , K = 1.1, R = 1.1

```
N: 0
x [1.89837, 1.31504]
f0 48.21933
way [1.0, -1.0]
lmd 0.17678
eta -18.83333
dlt 0.25
I_d []

N: 1
x [2.07515, 1.13826]
f0 44.95254
way [1.0, 1.0]
lmd 0.17678
eta -1.5
dlt 0.25
I_d [0]

N: 2
x [2.25193, 1.31504]
f0 44.02983
way [1.0, -1.0]
lmd 0.17678
eta -18.12623
dlt 0.25
I_d []

N: 3
x [2.4287, 1.13826]
f0 40.88804
way [1.0, -1.0]
lmd 0.17678
eta -17.41912
dlt 0.25
I_d []

...

N: 49
x [7.96595, 0.01131]
f0 4.04652
way [1.0, 0.01356]
lmd 0.00678
eta -0.01356
dlt 0.01562
I_d [3]

N: 50
x [7.96595, 0.01131]
f0 4.04652
way [1.0, -1.0]
lmd 0.00552
eta -4.09071
dlt 0.00781
I_d []

N: 51
x [7.97148, 0.00578]
f0 4.02399
way [1.0, 0.01138]
lmd 0.00569
eta -0.01138
dlt 0.00781
I_d [3]

N: 52
x [7.97717, 0.00585]
f0 4.02395
way [1.0, 0.00911]
lmd 0.00456
eta -0.00911
dlt 0.00781
I_d [3]

THE END by POINT INSIDE SUSPECT
```

5 Обоснование достоверности полученного решения

5.1 Графики

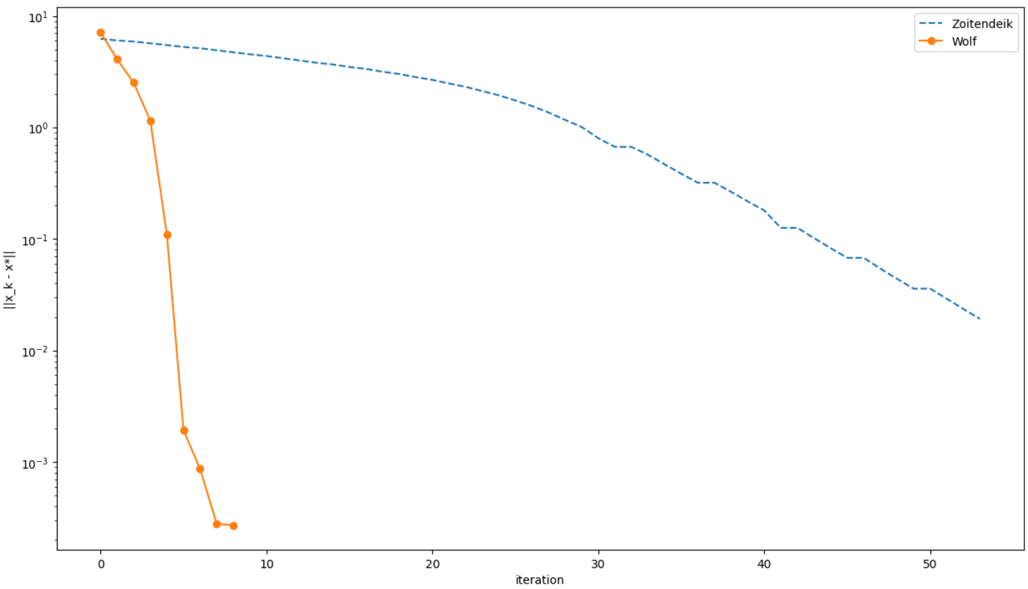

Рис. 1: График нормы разности текущего решения и точного решения для метода Вульфа и метода Зойтендейка в зависимости от номера шага. $\varepsilon = 0.01$

5.2 Анализ графиков

1. Методы принципиально сходятся.
2. Метод Вульфа по количеству итераций очень сильно опережает метод Зойтендейка.
3. Метод Вульфа достигает заданной точности, а потом осуществляет еще несколько итераций. Возникает уверенность в критерии остановки.

5.3 Теоретическая оценка алгоритма

Оценим время работы одного шага алгоритма:

1. Обновление $I_k : O(m)$
2. Обновление r : необходимо посчитать обратную матрицу к матрице размером $m \times m$. Стандартный алгоритм Жордано - Гаусса проделывает данную операцию за $O(n^3)$.
3. Нахождение d сопровождается матричным умножением: $O(n^2)$.
4. Нахождение шага: решение задачи одномерной минимизации. Число шагов зависит от заданной точности и от применяемого метода.
5. Итого: кубическое время работы одного шага алгоритма.

6 Дополнительные исследования

6.1 Сравнение метода Вульфа и метода Зойтендейка

При многократном запуске алгоритмов на данном примере были получены следующие значения:

ZTD time 0.04725
WLF time 0.00414
ZTD time per iter 0.00085
WLF time per iter 0.00059

Оба алгоритма работают за кубическое время на один шаг. Однако заметим, что:

1. У метода Зойтендейка нет оптимизации, которая бы позволяла приходить к решению, двигаясь по границе допустимого множества. Это множество является выпуклым как пересечение конечного числа полупространств и гиперплоскостей, что вкупе с оптимальным выбором шага дает как бы перемещение по граням этого выпуклого множества при применении метода Вульфа. Метод же Зойтендейка выбирает направление спуска, зачастую сильно не совпадающее с антиградиентом (решение задачи линейного программирования на этом учитывает как направление спуска, так и направления ограничений), что приводит углублению в допустимую область.

2. Размерность пространства, в котором решается задача методом Вульфа на первый взгляд может показаться выше размерности рпостранства, используемой методом Зойтендейка. Однако это ошибочно: метод Зойтендейка использует Симплекс-метод, который так или иначе приводит на каждом шаге задачу линейного к каноническому виду, и поэтому на этом моменте выигрыша методом Зойтендейка также не происходит.

3. Обращаясь к приведенным выше цифрам: на одну итерацию методу Зойтендейка требуется в среднем в два раза больше времени. В итоге же получается, что метод Вульфа для одной и той же задачи работает в ≈ 10 раз быстрее, чем метод Зойтендейка.

4. В пользу метода Зойтендейка действует неоспоримое преимущество: он применим не только с линейными ограничениями. Однако здесь же возникают неудобства по поводу самих условий применимости метода Зойтендейка, которые весьма сложны по сравнению с условиями применимости метода Вульфа.

7 Выводы

1. Благоприятный сценарий: необходимо минимизировать функцию (не линейную) с заданными линейными условиями. Тогда разумным способом решения является метод Вульфа. Он с требует меньше (в смысле условий применимости), а сходится быстрее (примерно в 10 раз), чем метод Зойтендейка.

2. Неблагоприятный сценарий: необходимо минимизировать функцию (не линейную) с заданными нелинейными условиями. Метод Вульфа не применим. Используем метод Зойтендейка.

8 Приложения

Реализация программы находится в репозиьтории GitHub по ссылке:
`https://github.com/IMZolin/multi-dimension-minimization-restrictions`

9 Библиографический список

1. Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн, Клиффорд. "Алгоритмы. Построение и анализ, 2-е издание"Издательский дом “Вильямс”, 2011. – 892–918 с.

   URL: `https://vk.com/doc191450968_561608466?hash=HUwStWS0yzrW9SaXn8POZtaz3gTyMTm` `dl=U9ivclLJBeeYQbs3MMhGtwYZ7Mx4nGJelTv0Hv56E4z` / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 04.03.2023)

2. Родионова Е.А., Петухов Л.В., Серёгин Г.А. "Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования"Издательство Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2014

   URL: `https://elib.spbstu.ru/dl/2/i17-98.pdf/info` / [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 10.03.2023)

3. Моисеев Н.Н. "Методы оптимизации"

   URL: `https://avidreaders.ru/book/metody-optimizacii-1.htmlРк`/ [Электронный ресурс]. Режим доступа: (Дата обращения: 07.03.2023)