

שאלות קצרות לתרגול וחידוד ההבנה 5 יחידות שאלון ראשון

פעילות לתלמידים
5 יח"ל



משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים



אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך



מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية



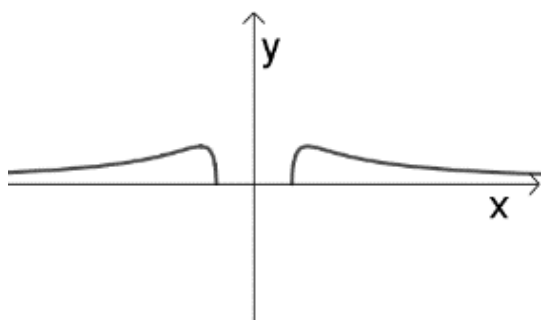
מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

שאלות קצרות לתרגול וחידוד ההבנה

5 יחידות -שאלון ראשון

אנליזה
שאלה 1

נתונות ארבע פונקציות וגרף של אחת מהן.



$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2 - 1}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$p(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$$

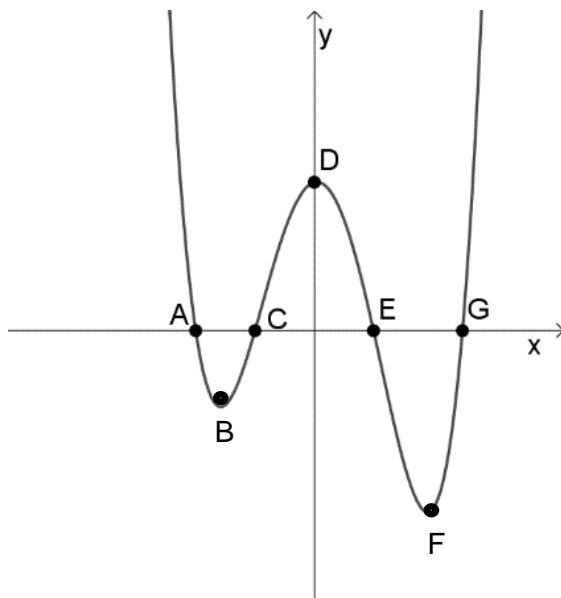
מצא לאיזו מבין הפונקציות מתאים הגרף הנתון. נמק, עבור כל אחת מהפונקציות האחרות מדוע אינה מתאימה לגרף.

שאלה 2

בסרטוט נתון גרף הפונקציה $f(x)$.

עבור איזו נקודה P , $x_A \leq x_P \leq x_G$ יהיה הערך של $\int_{x_A}^{x_P} f(x)dx$ מקסימלי?

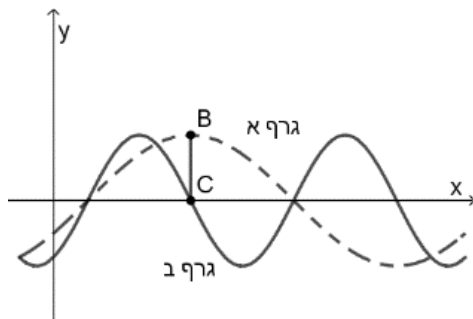
נמק תשובתך.



שאלה 3

נתונות שתי הפונקציות:

$$g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \quad f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$



באיור שלפניכם שני גרפים:

גרף א – מתואר בקו מקווקו

גרף ב – מתואר בקו רציף

הנקודה B נמצאת מימין לציר ה-y על גרף א, והיא הנקודה הקרובה ביותר לציר זה **בה**

הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי.

הנקודה C נמצאת על גרף ב, והיא נקודת החיתוך שלו עם ציר ה-x, כמתואר בסרטוט.

מהו אורך הקטע BC? נמק היטב קביעתך.

שאלה 4

דני ודנה מצאו את הפונקציה הקדומה $F(x) = \int \sin x \cdot \cos x dx$ בדרכים שונות:

פתרונו של דני:

דני זיהה את הפונקציה $\sin x$ ואת הנגזרת שלה $\cos x$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C \text{ כִּי}$$

פתרונה של דנה:

דנה השתמשה בזהות הטריגונומטרית

$$2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

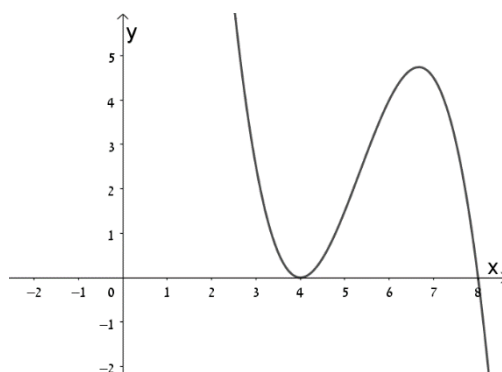
והראתה כִּי:

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \int \frac{\sin 2x}{2} dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C$$

$$\text{אבל: } -\frac{\cos 2x}{4} \neq \frac{\sin^2 x}{2}$$

כיצד תסביר את התוצאות השונות?

שאלה 5



הגרף המצורף מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של

הפונקציה $f(x)$ בתחום: $3 < x < 9$

בחר מבין הטענות הבאות את הטענה הנכונה.

נמק בחירתך.

I. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות

קיצון ונקודת פיתול אחת.

II. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון

אחת

ושתי נקודות פיתול.

III. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת

ונקודת פיתול אחת.

שאלה 6

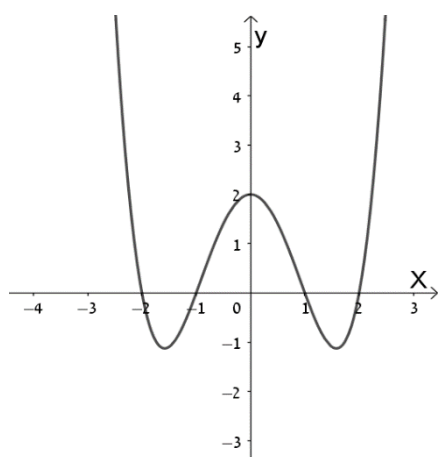
I. לפניך רשימה של ארבע פונקציות. בחר ביניהן את המתאימה לגרף א ואת המתאימה לגרף ב. נמק בחירתך.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

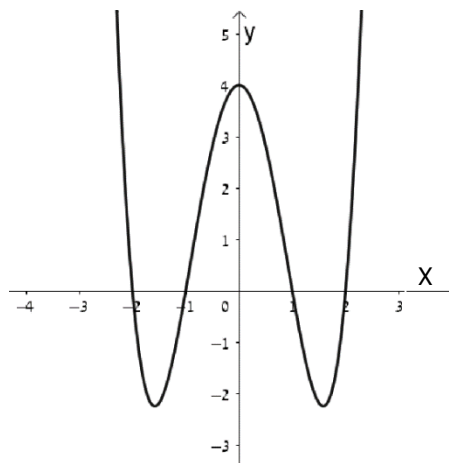
$$g(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 4)$$

$$m(x) = (x^2 - 1) + 4$$

$$h(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$



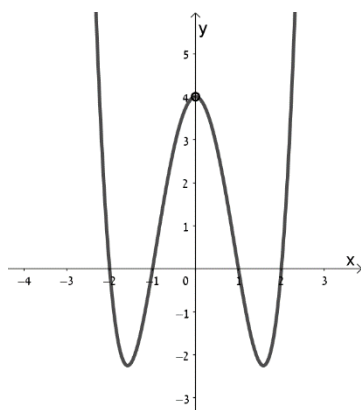
גרף ב



גרף א

II. הפונקציה המתוארת בגרף ג אינה מוגדרת ב- $x = 0$ רשום ביטוי לפונקציה המתאימה לגרף.

גרף ג



שאלה 7

לפניך שתי טענות: קבע עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או אינה נכונה. נמק תשובתך.

ניתן לנמק באמצעות סרטוט גרפים.

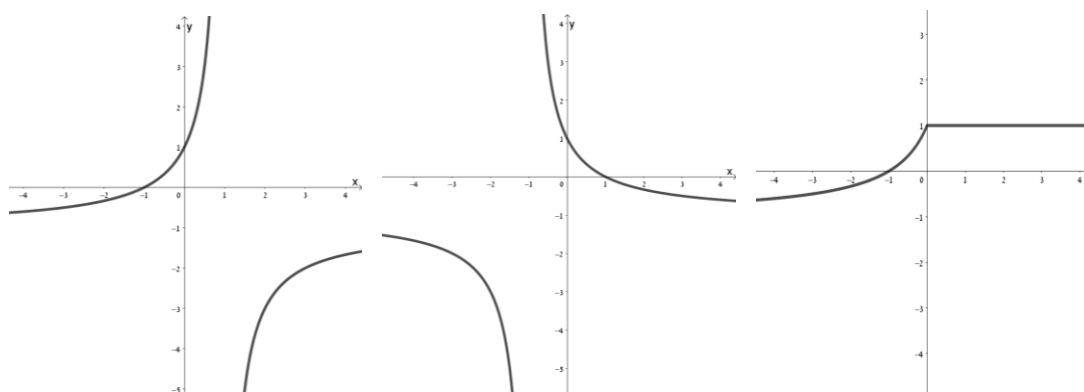
I. **אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x = 5$ אז $f'(5) = 0$**

II. **אם $f'(x_0) = 0$ אז ב- x_0 יש לפונקציה נקודת מינימום או מקסימום.**

שאלה 8

לפניך חמישה גרפים ורשימה של ארבע פונקציות. התאם בין הגרפים לפונקציות, נמק בחירתך.

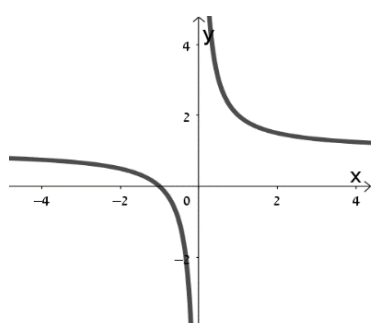
$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} ; \quad g(x) = \frac{1-x}{1+x} ; \quad h(x) = \frac{1-|x|}{1-x} \quad m(x) = \frac{1-x}{1+|x|}$$



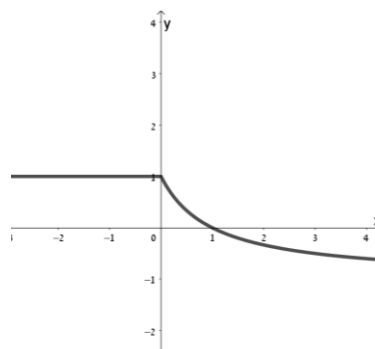
גרף ג

גרף ב

גרף א



גרף ה



גרף ד

שאלה 9

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה. נמק.
ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

אם $f'(x) > 0$ לכל מספר x , אז כאשר $x \rightarrow \infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- ∞ .

שאלה 10

נתונה פונקציה $f(x)$.

דני הזיז את גרף הפונקציה הנתונה ב- $\frac{\pi}{2}$ יחידות ימינה,

דנה הזיזה את גרף הפונקציה הנתונה ב- 2.5π יחידות שמאלה.

שניהם קבלו גרפים זהים.

אילו מהפונקציות הבאות יכולה להיות $f(x)$? הקיפו בעיגול ונמקו.

$$y = 3\sin x ; \quad y = \sin 3x ; \quad y = \sin 2x ; \quad y = \sin 6x$$

$$y = \sin x ; \quad y = \tan x$$

שאלה 11

בדוק נכונות/אי נכונות של הטענות הבאות. אם הטענה אינה נכונה, הצג דוגמה נגדית.
ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

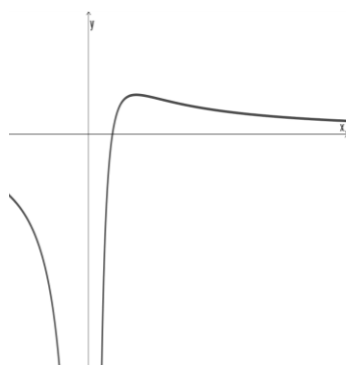
I. אם ב- x_0 יש לפונקציה נקודת פיתול אז $f'(x_0) = 0$.

II. פונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

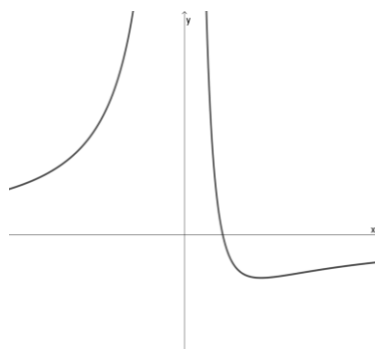
שאלה 12

התאם את הגרף המתאים לכל אחת מהפונקציות הבאות: נמק בחירתך.

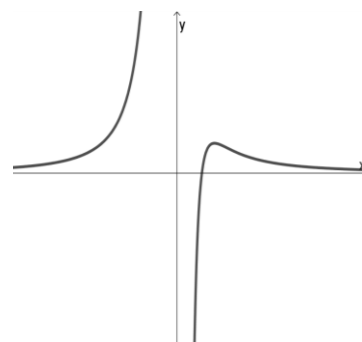
$$g(x) = \frac{8(2-x)}{x^2} \quad ; \quad f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} \quad ; \quad m(x) = \frac{27(x-2)}{x^3}$$



גרף ג



גרף ב



גרף א

שאלה 13

נתונות שלוש פונקציות.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \quad ; \quad h(x) = \frac{x^4}{x(x^2-1)}$$

בחר את הפונקציה המקיימת את התכונה הבאה:
לפונקציה אסימפטוטה אופקית אחת, שתי אסימפטוטות אנכיות, ונקודת השקה אחת
לציר ה- x .

שאלה 14

קבע האם נכונות הטענות הבאות: נמק קביעותיך.

- אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, אז גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ הינה פונקציה אי זוגית.
- אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית, אז בהכרח גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ הינה פונקציה זוגית.

שאלה 15

הראה כי הפונקציה: $f(x) = x - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ חותכת את ציר ה- x בנקודה בה $x = \frac{\pi}{4}$.

- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם קיימים)? הוכח קביעתך.

- הוכח שהנקודה $(\frac{\pi}{4}, 0)$ היא נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה- x .

שאלה 16

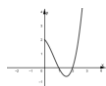
נתונה $f(x)$, פונקציה המוגדרת לכל x .

חלק מגרף הפונקציה מוצג בסרטוט כאשר $x \geq 0$.

א. השלם את הסרטוט אם הפונקציה

היא זוגית.

ב. האם ייתכן שהפונקציה היא אי-זוגית?



שאלה 17

$f(x)$ פונקציה בעלת גרף רציף (שניתן לסרטט במשיכת קולמוס אחת)

המוגדרת לכל x .

$$f(10) = 100 \quad ; \quad f(-10) = -20 \quad \text{ידוע כי:}$$

לפונקציה שתי נקודות קיצון בלבד:

מקסימום בנקודה $(-1, 2 + k)$ ומינימום בנקודה $(1, k - 2)$.

עבור אילו ערכי k , תחתוך הפונקציה את ציר ה- x בשלוש נקודות שונות?

שאלה 18

לפניך שלוש פונקציות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - 1}{(x - 2)(x + 1)}$$

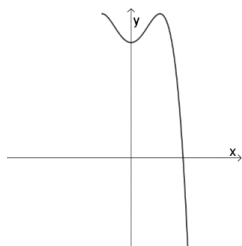
לאיזו מהן התכונה הבאה:

לפונקציה יש שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת.

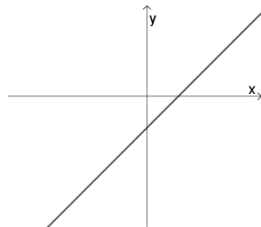
נמק בחירתך גם על ידי הסבר להתאמה וגם על ידי פסילת האחרות.

שאלה 19

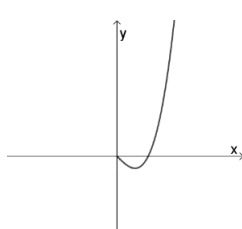
לפניך גרפים חלקיים של פונקציות. רשום אילו גרפים ניתן להשלים לגרף של פונקציה זוגית, אילו לפונקציה אי זוגית ואילו גרפים לא יתארו פונקציה זוגית ולא אי זוגית.



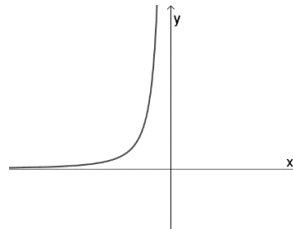
גרף ד



גרף ג



גרף ב



גרף א

שאלה 20

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה. נמק. ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

אם לפונקציה $f(x)$, המוגדרת עבור $x > 0$, יש נקודת קיצון בנקודה $(5, 4)$, $f'(5) = 0$ ואסימפטוטה אופקית $y = 1$ אז לפונקציה יש לפחות נקודת פיתול אחת.

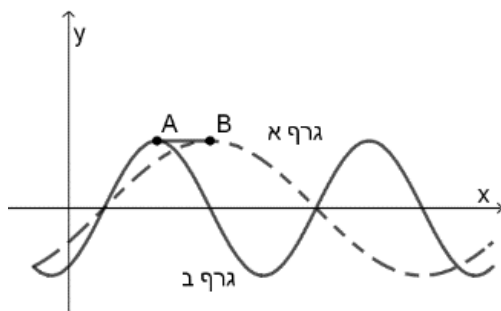
שאלה 21

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה. נמק. ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

אם $f''(x)$ משנה סימן בנקודה $(2, 6)$ אז לא ייתכן שמשוואת המשיק
לפונקציה $f(x)$ בנקודה היא $y = 3x$

שאלה 22

נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$



באיור שלפניכם שני גרפים:

גרף א – מתואר בקו מקווקו

גרף ב – מתואר בקו רציף

הנקודות A ו-B נמצאות מימין לציר ה-y והן

הנקודות הקרובות ביותר לציר זה **בהן**

הפונקציות מקבלות ערכים מקסימליים.

מהו אורך הקטע AB? נמק קביעתך.

שאלה 23

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה.
אם הטענה נכונה – הוכח אותה, אם לא – הצג דוגמה נגדית.

הטענה:

"הפונקציה הקדומה של כל פונקציה זוגית היא פונקציה אי זוגית"

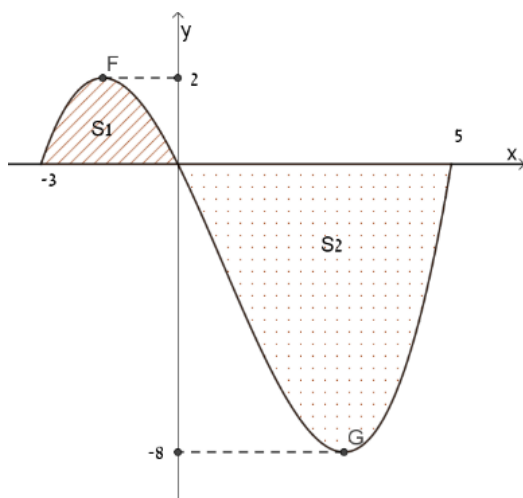
שאלה 24

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף של פונקציה ושני שטחים, S_1 ו- S_2 כלואים בין הגרף

לבין ציר ה- x . ידוע כי הפונקציה קעורה כלפי

מטה משמאל לראשית הצירים וקעורה כלפי

מעלה מימין לראשית הצירים.



הביט בסרטוט ובנתונים הנוספים המסומנים בו

וקבע עבור כל אחת מהטענות בהמשך האם היא

נכונה או לא נכונה. נמק קביעותיך.

$$1. \quad S_1 > 3$$

$$2. \quad 20 < \int_0^5 f(x) dx < 40$$

$$3. \quad \int_{-3}^5 f(x) dx < 0$$

שאלה 25

לאיזו/אילו מהפונקציות הבאות יש שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי אסימפטוטות אופקיות? נמק תשובתך.

$$g(x) = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+x-12}$$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12}$$

$$h(x) = \frac{x\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x^2+x-12}$$

$$m(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12}$$

שאלה 26

קבע אילו מהטענות הבאות נכונות,

הצדק קביעותיך.

- הגרף של הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ הוא הזזה של הגרף של $g(x) = \cos(x)$ ימינה ב- $\frac{\pi}{2}$.
- הגרף של הפונקציה $g(x) = \cos(x)$ הוא הזזה של הגרף של $f(x) = \sin(x)$ ימינה ב- $\frac{\pi}{2}$.
- הגרף של $f(x) = \sin(-x)$ מתלכד עם הגרף של $h(x) = \sin(\pi + x)$.

שאלה 27

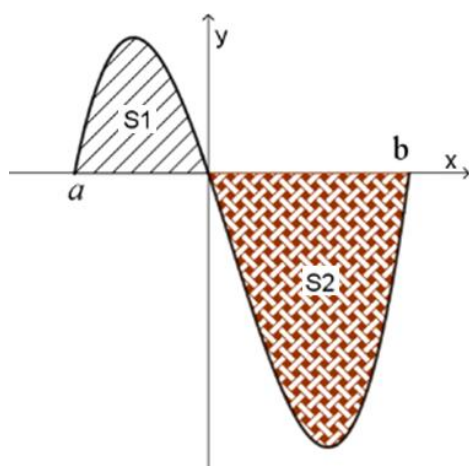
בסרטוט שלפניכם מתואר גרף של פונקציה ושני שטחים, S_1 ו- S_2 כלואים בין הגרף לבין ציר ה- x .

ידוע כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים, ובנקודות: $(a, 0)$, $(b, 0)$.
כמו כן:

- הגרף קעור מטה משמאל לראשית הצירים וקעור כלפי מעלה מימין לראשית הצירים,

$$|a| \cdot \max(f(x)) < \frac{b \cdot |\min(f(x))|}{2} \quad -$$

קבע עבור כל אחת מהטענות בהמשך האם היא נכונה או לא נכונה. נמק קביעותיך.



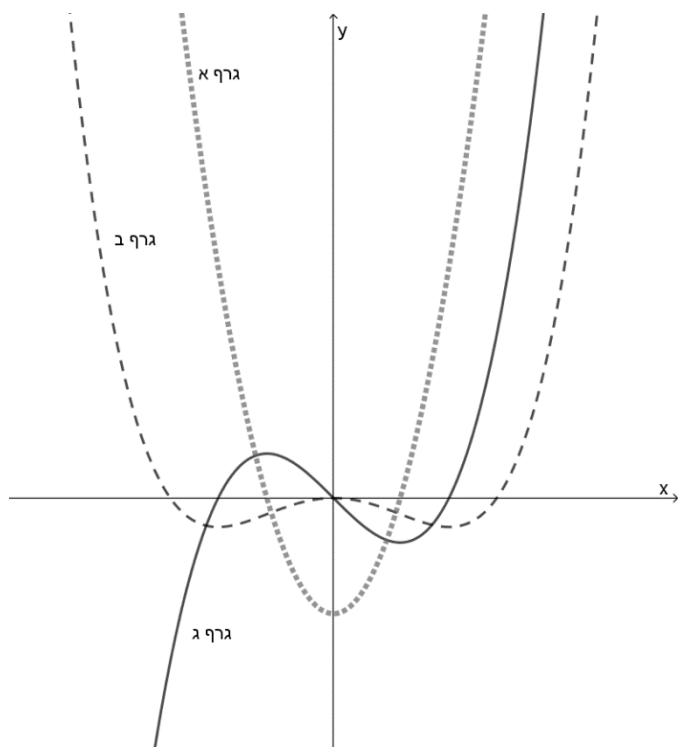
$$1. \int_a^b f(x) dx > 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx < 0$$

$$3. S_1 + S_2 = \int_a^b f(x) dx$$

שאלה 28

לפניך סרטוט של שלושה גרפים, המתאימים לפונקציה $f(x)$ ולשתי נגזרותיה: $f'(x)$ ו- $f''(x)$. התאם בין הגרפים לפונקציות. נמק התאמתך.



שאלה 29

פונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור כל ערך של x .
נתון : $g(x) = f(x + 1) + 8$, היא פונקציה אי זוגית.
חשב:

א. $f(1)$

ב. $f(0) + f(2)$

שאלה 30

נתונות שלוש פונקציות $f(x), k(x), g(x)$ המוגדרות עבור כל ערך של x .

כל אחת מהפונקציות היא זוגית או אי זוגית. נתון:

$$f^2(x) \cdot k(x) \cdot g^2(x) \text{ פונקציה זוגית,}$$

$$g^2(x) \cdot f(x) \cdot k(x) \text{ פונקציה אי זוגית,}$$

$$k^2(x) \cdot f(x) \cdot g(x) \text{ פונקציה אי זוגית.}$$

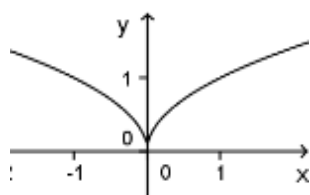
איזו מהאפשרויות הבאות מתאימה לנתונים:

א. $f(x)$ אי זוגית, $k(x)$ אי זוגית, $g(x)$ זוגית.

ב. $f(x)$ אי זוגית, $k(x)$ זוגית, $g(x)$ זוגית.

ג. $f(x)$ זוגית, $k(x)$ זוגית, $g(x)$ אי זוגית.

שאלה 31



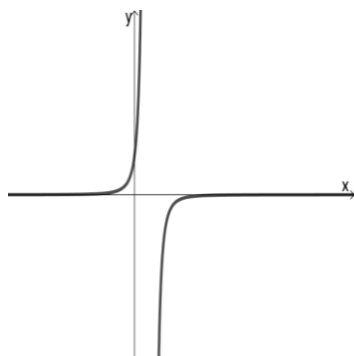
התבונן בגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{|x|}$.

1. האם הנגזרת הראשונה מוגדרת כאשר $x = 0$?
2. האם יש לפונקציה נקודת קיצון כאשר $x = 0$?
- אם כן, קבע את סוג הקיצון, אם לא, הסבר מדוע.
3. האם יש לפונקציה נקודת פיתול כאשר $x = 0$?
4. סרטט את גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{|x+2|}$.

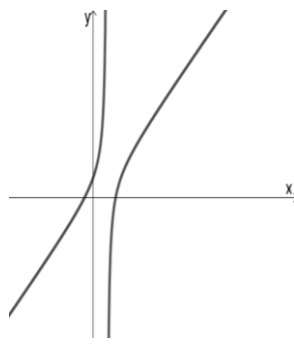
שאלה 32

לפניך מוצגים שלושה גרפים של הפונקציות $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$

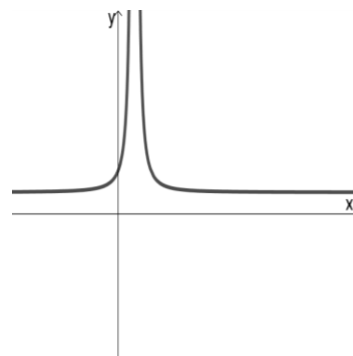
זוהי איזה גרף מתאים לכל פונקציה. נמק.



גרף ג



גרף ב



גרף א

שאלה 33

א. חשב את ערך האינטגרל $\int_0^{2\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$

ב. נמק מדוע מתקיים השוויון: $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

וקבע את הערך של כל אחד מהאינטגרלים. היעזר בתכונות הפונקציות הטריגונומטריות ובסעיף א.

שאלה 34

נתון גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $[a, b]$. הפונקציה עולה וקעורה כלפי מטה.

א. איזה מהביטויים הבאים מייצג את שטח המלבן המתואר בציר:

1. $f(a)(b - a)$

2. $f(b)(b - a)$

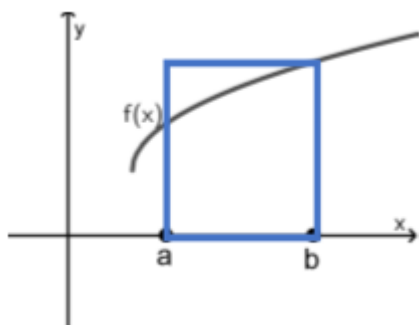
3. $\frac{1}{2}(a + b)(b - a)$

ב. אילו מהטענות הבאות נכונות? נמק. תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה.

1. $\int_a^b f(x) dx < f(b)(b - a)$

2. $\int_a^b f(x) dx > f(a)(b - a)$

3. $\int_a^b f(x) dx < \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b - a)$



שאלה 35

קבע האם נכונה או לא נכונה הטענה הבאה. אם הטענה נכונה – הוכח אותה, אם לא – הצג דוגמה נגדית.

הטענה: "פונקצית הנגזרת של כל פונקציה זוגית היא אי-זוגית".

שאלה 36

נתונות שלוש פונקציות **שונות** שאינן קבועות.

נתון $f(x)$ פונקציה זוגית, $g(x)$ פונקציה אי-זוגית, $k(x)$ פונקציה אי-זוגית.

קבע ונמק לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא זוגית, אי זוגית או לא זוגית ולא אי זוגית.

א. $k(x) \cdot g(-x) \cdot f^2(x)$

ב. $f(x) \cdot [k(x) - g(x)]$

ג. $k(2x)$

שאלה 37

מצא את שיעורי הנקודה בה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ יש משיק בעל שיפוע מקסימלי.

שאלה 38

א. סרטט את גרף הפונקציה: $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 1$

ב. פתור את המשוואה: $|x^2 - 4x + 3| = 3$

ג. פתור את המשוואה: $|x^2 - 4x + 3| = -2$

שאלה 39

- א. מצא פונקציה (ייצוג אלגברי) שיש לה שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ושתי אסימפטוטות אנכיות.
- ב. מצא פונקציה (ביטוי אלגברי) שיש לה שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת.

שאלה 40

$f(x)$ היא פונקציה רציונלית כך ש- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ענו נכון/לא נכון ונמקו את הטענות שאינן נכונות.

1. נקודות האפס של $f(x)$ מתקבלות בהכרח בכל נקודה בה $P(x) = 0$.
2. נקודות האפס של $f(x)$ מתקבלות בהכרח בכל נקודה $Q(x) = 0$.
3. בנקודות בהן $Q(x) = 0$ בהכרח עוברות אסימפטוטות מקבילות לציר y .

שאלה 41

נתונה המשוואה $|x^2 - 4x - 5| = k$ עבור אילו ערכים של הפרמטר k

א. יש למשוואה פתרון יחיד?

ב. אין למשוואה פתרון?

ג. יש למשוואה פתרון השווה ל-0?

שאלה 42

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-1} \text{ : נתונה הפונקציה}$$

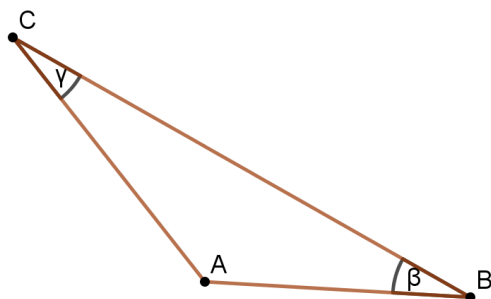
מצא את האסימפטוטות האופקיות והאנכיות שלה, אם ישנן כאלה.

שאלה 43

מצא פונקציה (ביטוי אלגברי) בעלת שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי אסימפטוטות אופקיות שונות זו מזו.

טריגונומטריה/גיאומטריה

שאלה 1



במשולש ABC נתון $\beta = 20^\circ$

$$AB = 3, AC = 5$$

חשב את זווית γ ($\angle ACB$).

דן הגיש את הפתרון הבא.

בדוק פתרונו של דן לשאלה הבאה.

אם יש טעות בפתרון, הסבר מהי.

$$\frac{5}{\sin 20^\circ} = \frac{3}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{3 \sin 20^\circ}{5} = \frac{1.026}{5} = 0.2052$$

↓

$$\gamma_1 = 11.84^\circ, \gamma_2 = 180 - 11.84 = 168.16^\circ$$

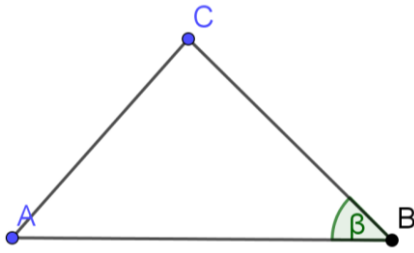
שאלה 2

הראה כי סכום ריבועי האלכסונים במקבילית שווה לסכום ריבועי צלעותיה.

שאלה 3

בדוק פתרונה של דנה לשאלה הבאה. אם יש טעות בפתרון, הסבר מהי.

במשולש ABC נתון $\beta = 30^\circ$, $AB = 5$, $AC = 3$
חשב את זווית γ ($\angle ACB$).



דנה הגישה את הפתרון הבא:

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\sin \gamma}$$

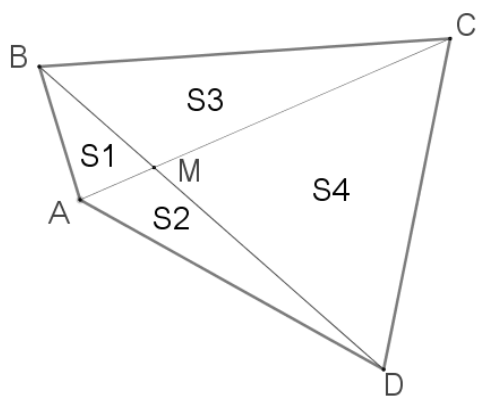
$$\sin \gamma = \frac{5 \sin 30^\circ}{3} = \frac{2.5}{3} = 0.833 \rightarrow \gamma = 56.44$$

שאלה 4

קבע אם הטענות הבאות נכונות או לא. נמק קביעתך.

- **בטרפז החוסם מעגל סכום הבסיסים שווה לסכום השוקיים.**
- **כל טרפז ניתן לחסימה במעגל.**

שאלה 5



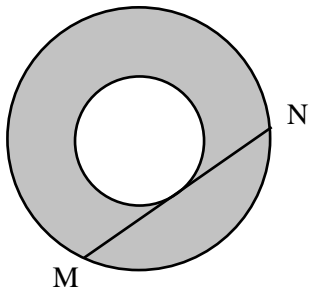
אלכסוני המרובע $ABCD$ מחלקים אותו לארבעה

משולשים ששטחיהם: S_1, S_2, S_3, S_4

השטחים S_1, S_2, S_3 מהווים סדרה הנדסית.

הוכח כי: $\left(\frac{DM}{BM}\right)^2 = \left(\frac{CM}{AM}\right)$

שאלה 6



נתונים שני מעגלים בעלי מרכז נשותף.
המיתר MN משיק למעגל הפנימי,
שטח הטבעת שווה ל- 36π .
חשב את אורך המיתר MN .

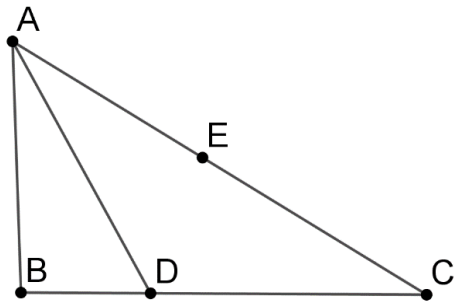
שאלה 7

נתונים משולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle EDF$.

$$EF = AC, ED = AB$$

שני המשולשים הם שווי שטח. האם משולשים אלה בהכרח חופפים? נמק.

שאלה 8



משולש ABC הוא ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$)

הנקודה E היא אמצע הצלע AC .

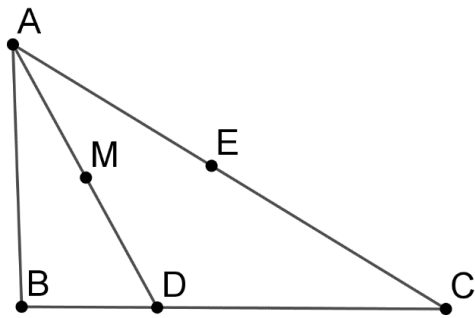
הנקודה D נמצאת על הצלע BC

כך ש- $AD = DC$.

הוכח שהמרובע $ABDE$ הוא בר חסימה

במעגל.

שאלה 9



משולש ABC הוא ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$)
הנקודה E היא אמצע הצלע AC . הנקודה D
נמצאת על הצלע BC כך ש- $AD = DC$

נתון: הנקודה M היא אמצע הקטע AD .

הוכח: $ME = MB$.

סדרות

שאלה 1

נתונה סדרה שסכום n האיברים הראשונים בה הוא $2n^3 - 1$ לכל n טבעי.

מצא את הערכים של a_1, a_4, a_{100} .

שאלה 2

נתונה סדרה חשבונית שאינה קבועה.
הוכח כי כל שלושה איברים עוקבים בסדרה החשבונית אינם יכולים להיות בבת אחת
שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

שאלה 3

נתונה $a_n \dots a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$, סדרה חשבונית שהפרשה d

בטא באמצעות n ו d את הסכום

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1})$$

שאלה 4

נתונה a_n סדרה הנדסית. האם הסדרה $\frac{1}{(a_n)^2}$ סדרה הנדסית?
נמק.

שאלה 5

הוכיח את השוויון $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \dots = \frac{1}{3}$ עבור $x = \frac{\pi}{3}$.

שאלה 6

הוכח כי בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$

$$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2} \quad \text{לכל } n > k > 0, \text{ טבעיים.}$$

שאלה 7

נתונה סדרה חשבונית שהפרשה d . $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots a_i \dots$

נגדיר סדרה נוספת $b_n = a_{n+1} - a_n$.

בטא באמצעות d ו- n את הסכום $b_1 + b_2 + b_3 \dots + b_n$

שאלה 8

נתונה סדרה הנדסית אינסופית, שאיבריה הם: a_1, a_2, a_3, \dots

מגדירים סדרה חדשה בה מתקיים: $b_n = \frac{a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+3}}$ לכל n טבעי.

א. הוכח כי גם הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית.

ב. האם ייתכן כי סכום אינסוף איברי הסדרה הראשונה וגם סכום אינסוף איברי

הסדרה השנייה הוא מספר סופי? הסבר תשובתך.

שאלה 9

נתונות סדרה חשבונית: a_1, a_2, a_3, \dots , בעלת הפרש d ,

וסדרה הנדסית: b_1, b_2, b_3, \dots , בעלת מנה: q .

בטא באמצעות d , ו- q את ערך הסכום הבא:

$$\frac{b_1(a_1 - a_3)}{b_3} + \frac{b_2(a_2 - a_4)}{b_4} + \frac{b_3(a_3 - a_5)}{b_5} + \dots + \frac{b_{100}(a_{100} - a_{102})}{b_{102}}$$

שאלה 10

בסדרה חשבונית עולה $2n+1$ איברים וידוע כי $a_{n+1} = 0$
נסמן:

A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו- B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.
מצא את היחס: $\frac{|B|}{|A|}$

שאלה 11

- נתונה סדרה חשבונית ובה $2n + 1$ איברים. הפרש הסדרה הוא d .
- א. הוכח כי בסדרה האיברים הראשון, האמצעי והאחרון של סדרה זו מהווים סדרה חשבונית.
- ב. הבע את הפרש הסדרה של שלושת האיברים מסעיף קודם באמצעות n ו- d .

שאלה 12

נתונה סדרה הנדסית שאיברה הכללי $\pi < x < 2\pi$ $a_n = \sin^n x$

א. עבור איזה ערך של x הסדרה אינה מתכנסת?

ב. נתון כי סכום הסדרה הוא $-\frac{1}{3}$. חשב את ערכו של x .

שאלה 13

סכום אברי הסדרה שאיברה הכללי $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} - x\right)$ הוא $\sin x + \cos x$.

בחר את התשובה הנכונה ונמק.

מספר האיברים בסדרה הוא: א. 36 ב. 40 ג. 42 ד. 44

שאלה 14

a, b, c שלושה איברים עוקבים שונים בסדרה חשבונית. אם נשנה את סדר האיברים ל- a, c, b נקבל סדרה הנדסית. חשב את מנת הסדרה ההנדסית.

שאלה 15

בסדרה חשבונית עולה $2n+1$ איברים וידוע כי $a_{n+1} = 0$

נסמן:

A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו- B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.

מצא את $|A| - |B|$

שאלה 16

בסדרה חשבונית עולה $2n + 1$ איברים וידוע כי $a_{n+1} = 5$

נסמן:

A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו- B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.

נתון: $A + B = 990$

מצא את n .

שאלה 17

בסדרה חשבונית עולה יש $2n+1$ איברים וידוע כי $a_{n+1} = 0$

נסמן:

A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו- B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.
בחר את הטענות הנכונות ונמק.

א. $\frac{A}{B} = 1$

ב. $\frac{A}{B} = -1$

ג. $2A = S_{2n+1}$

ד. $S_{2n+1} > A$

שאלה 18

סכום אברי הסדרה שאיברה הכללי $a_n = \cos(\frac{n\pi}{2} - x)$ הוא $\sin x - \cos x$.

בחר את התשובה הנכונה ונמק.

מספר האיברים בסדרה הוא:

א. 32 ב. 48 ג. 52 ד. 62

שאלה 19

סכום אברי הסדרה שאיברה הכללי $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} - x\right)$ הוא 0.

בחר את התשובה הנכונה ונמק.

מספר האיברים בסדרה הוא: א. 37 ב. 43 ג. 40 ד. 45

הסתברות

שאלה 1

מטילים קוביית משחק הוגנת שלוש פעמים. לפניך שתי טענות. קבע עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא ונמק קביעתך.

- (1) ההסתברות לקבלת המספר 6 בדיוק פעמיים, קטנה מההסתברות לקבל בדיוק פעם אחת 3 ובדיוק פעם אחת 4.**
- (2) הסיכוי שבהטלה הראשונה ובשלישית יתקבל 2 אם ידוע שבהטלה השנייה התקבל 2, גדול מהסיכוי לקבל 2 לפחות פעמיים.**

שאלה 2

לפניך טבלת הסתברות דו-ממדית, ובה תאים ריקים.

| סה"כ | \bar{A} | A | |
|------|----------------------------------|--------------|-----------|
| | | | B |
| | $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.12$ | | \bar{B} |
| 1 | | $p(A) = 0.4$ | סה"כ |

מלא את התאים הריקים באופן שיתאר קשר בין שני מאורעות בלתי תלויים זה בזה.
פרט שיקולך.

שאלה 3

בכד 5 כדורים אדומים ו- 3 כדורים לבנים.

- א. מוציאים מהכד שני כדורים עם החזרה. (מוציאים כדור אחד, מחזירים אותו ומוציאים כדור שני).
מה ההסתברות שבהוצאה השנייה יצא כדור אדום אם ידוע שבהוצאה הראשונה הוצא כדור אדום?
- ב. מוציאים מהכד שני כדורים ללא החזרה. (מוציאים כדור אחד, מניחים מחוץ לכד ומוציאים כדור שני).
מה ההסתברות שבהוצאה השנייה יצא כדור אדום אם ידוע שבהוצאה הראשונה הוצא כדור אדום?

שאלה 4

$$P(A) = \binom{6}{4}(0.2)^4(0.8)^2 \quad \text{נתון:}$$

חבר שאלה שזו דרך הפתרון שלה.