שאלון 35581 – כולל פתרונות
קיץ 2021

א.מ. ספרי מתמטיקה

# מבחן מס' 1

**משך הבחינה: שלוש וחצי שעות**

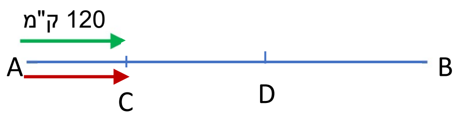

**1.** אופיר יצא בשעה 8:00 מיישוב A ונסע במכוניתו לעבר יישוב B. הוא עצר למשך שעה בתחנת דלק הנמצאת בנקודה C במרחק של 120 ק"מ מיישוב A . אחר-כך , אופיר המשיך לנסוע לעבר הנקודה B במהירות גבוהה מן המהירות בה נסע עד תחנת הדלק.
שלי יצאה מיישוב A בשעה 8:30 ונסעה גם היא במכוניתה לעבר יישוב B במהירות קבועה לאורך כל הדרך. שלי הגיעה לנקודה C , 40 דקות אחרי אופיר. מהירות הנסיעה של שלי הייתה קטנה ב- 10 קמ"ש מן המהירות בה החל אופיר את נסיעתו.

א. באיזו שעה עזב אופיר את תחנת הדלק ?

ב. אופיר חלף על פני המכונית של שלי בנקודה D בשעה 11:40 והגיע לנקודה B בשעה 13:28.

1) מצא את המהירות בה נסע אופיר אחר צאתו מתחנת הדלק .

2) מצא את המרחק בין היישובים A ו- B .




פתרון:

.1

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (שעות) | דרך (ק"מ) |
|---|---|---|---|
| אופיר | x | $\frac{120}{x}$ | 120 |
| שלי | x - 10 | $\frac{120}{x-10}$ | 120 |

א. שלי יצאה חצי שעה אחרי אופיר והגיעה ל- C , 40 דקות אחריו.

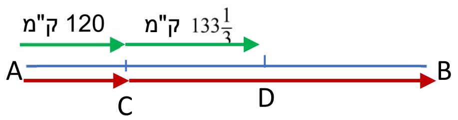
מקבלים : $\frac{120}{\text{x}}+\frac{2}{3}=\frac{120}{\text{x}-10}+\frac{1}{2}$ .

$$\frac{120}{\text{x}}+\frac{1}{6}=\frac{120}{\text{x}-10}\Rightarrow 720(x-10)+x(x-10)=720x\Rightarrow$$

$$x^2-10x-7200=0\Rightarrow x=90\ ,\ x=-80\Rightarrow$$

מהירות הנסיעה של אופיר בקטע AC היא 90 קמ"ש וזו של שלי היא 80 קמ"ש .

זמן הנסיעה של אופיר עד תחנת הדלק הוא $\frac{120}{x}=\frac{120}{90}=1\frac{1}{3}$ שעות . לכן , הוא הגיע לתחנת הדלק בשעה 9:20 ועזב (כעבור שעה) **בשעה 10:20** .




ב. 1) זמן הנסיעה של שלי עד תחנת הדלק היה $\frac{120}{x-10}=\frac{120}{80}=1.5$ שעות . היא יצאה מנקודה C בשעה 10:00 במהירות של 80 קמ"ש והגיעה לנקודה D בשעה 11:40, כלומר, כעבור $1\frac{2}{3}$ שעות. לכן , המרחק בין C ל- D הוא : $1\frac{2}{3}\cdot 80=133\frac{1}{3}$ ק"מ.

נסמן ב- v את מהירות הנסיעה של אופיר מנקודה C לנקודה B . לפי הנתונים , זמן הנסיעה שלו

בקטע CD היה : שעות $11:40 - 10:20 = 11\frac{2}{3} - 10\frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$

מקבלים: $\frac{133\frac{1}{3}}{v} = 1\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4v}{3} = \frac{400}{3} \Rightarrow v =$ **100 קמ"ש**

2) זמן הנסיעה של אופיר מנקודה D לנקודה B הוא:

שעות $13:28 - 11:40 = 13\frac{28}{60} - 11\frac{40}{60} = 1\frac{4}{5} = 1.8$

המרחק בין D ל- B הוא : ק"מ $100 \cdot 1.8 = 180$.

לכן , המרחק AB הוא **ק"מ** $120 + 133\frac{1}{3} + 180 = \mathbf{433\frac{1}{3}}$

**2.** הסדרה $a_1, a_2, a_3, .....$ היא סדרה חשבונית. נתון : סכום n האיברים הראשונים של הסדרה $S_n$ מקיים <u>לכל n טבעי</u> , את הנוסחה $S_n = t \cdot n^2 + p \cdot n + k$ .

א. 1) בטא באמצעות $t$ , $p$ ו- $k$ את $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ ואת הפרש הסדרה.

2) מצא את k .

ב. נתון גם : $a_1 = 16a_7$ .

1) האם ניתן לקבוע שהסדרה יורדת ? נמק.

2) הבע את האיבר הראשון של הסדרה באמצעות t .

3) הראה כי: $a_{13} + 4a_6 = 0$ .

ג. נתון כי הסדרה היא סדרה עולה. האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה הוא 3.
בסדרה ישנם 17 איברים

1) מצא את t ו- p .

2) חשב את סכום 9 האיברים האחרונים בסדרה.

<u>פתרון:</u>

א. 1) $a_1, a_2, a_3, .....$ סדרה חשבונית , $S_n$ סכום n האיברים הראשונים לכל n טבעי , לכן:

$$S_1 = a_1 = t \cdot 1^2 + p \cdot 1 + k \Rightarrow \mathbf{a_1 = t + p + k}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = t \cdot 2^2 + p \cdot 2 + k \Rightarrow a_1 + a_2 = 4t + 2p + k \Rightarrow$$

$$a_2 = 4t + 2p + k - (t + p + k) \Rightarrow \mathbf{a_2 = 3t + p}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = t \cdot 3^2 + p \cdot 3 + k \Rightarrow S_2 + a_3 = 9t + 3p + k \Rightarrow$$

$$4t + 2p + k + a_3 = 9t + 3p + k \Rightarrow \mathbf{a_3 = 5t + p}$$

$$d = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 5t + p - (3t + p) \Rightarrow \mathbf{d = 2t}$$

2) $a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 - a_1 = 2t \Rightarrow 3t + p - (t + p + k) = 2t \Rightarrow 2t - k = 2t \Rightarrow \mathbf{k = 0}$

ב. נתון: $a_1 = 16a_7$ .

1) **לא** ניתן לקבוע כי :

$$a_1 = 16a_7 \Rightarrow a_1 = 16(a_1 + 6d) \Rightarrow 15a_1 = -96d \Rightarrow a_1 = -6.4d \Rightarrow d = -\frac{a_1}{6.4} \Rightarrow$$

אם $a_1 < 0$ אז $d > 0$ והסדרה עולה.

2) $a_1 = -6.4d\ ,\ d = 2t\ \Rightarrow \mathbf{a_1 = -12.8t}$

3) $a_{13} + 4a_6 = a_1 + 12d + 4(a_1 + 5d) = 5a_1 + 32d = 5\cdot(-6.4d) + 32d = -32d + 32d = 0$

ג. 1) הסדרה עולה, לכן $d > 0 \Leftarrow a_1 < 0$.

$$a_n > 0 \Rightarrow a_1 + (n-1)d > 0 \Rightarrow -6.4d + (n-1)d > 0 \Rightarrow -7.4d + nd > 0$$

$d > 0$ לכן מקבלים: $-7.4 + n > 0 \Leftarrow n > 7.4 \Leftarrow n$ טבעי הקטן ביותר המקיים את אי-השוויון הוא $n = 8$. מקבלים:

$$a_8 = 3 \Rightarrow a_1 + 7d = 3 \Rightarrow -6.4d + 7d = 3 \Rightarrow 0.6d = 3 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow \mathbf{t = 2.5}$$

$$a_1 = -6.4d \Rightarrow a_1 = -6.4\cdot 5 = -32 \Rightarrow t + p + k = -32 \Rightarrow$$

$$2.5 + p + 0 = -32 \Rightarrow \mathbf{p = -34.5}$$

2) סכום 9 האיברים האחרונים בסדרה: $S_{17} - S_8$. $S_n = t\cdot n^2 + p\cdot n + k = 2.5n^2 - 34.5n$

$$\Rightarrow S_{17} - S_8 = 2.5\cdot 17^2 - 34.5\cdot 17 - \left(2.5\cdot 8^2 - 34.5\cdot 8\right) = \mathbf{252}$$

**3.** סקר בדק את אופן קניית מוצרי הביגוד בעיר גדולה כלשהי בשנת 2020. הסקר נערך רק בקרב אנשי העיר שרכשו בגדים במהלך השנה. חלק מן הנבדקים קנו בגדים רק בחנויות רחוב, חלקם רק בקניונים והשאר קנו רק בהזמנה באינטרנט. מספר הנבדקים שקנו בגדים באינטרנט היה גדול פי 1.6 ממספר הנבדקים שקנו בקניונים.
בוחרים באקראי שני נבדקים. ההסתברות שלפחות אחד מהם קונה בגדים רק בחנויות רחוב היא 0.5775.

א. מה ההסתברות שנבדק שנבחר באקראי קנה בגדים רק באינטרנט?

ב. בוחרים באקראי 4 נבדקים.
1) מה ההסתברות שלפחות אחד מהם אך לא כולם קנו בגדים באינטרנט?
2) ידוע שלא כל הנבדקים קונים בגדים באינטרנט. מה ההסתברות שלפחות שניים מהם קונים בגדים באינטרנט?

ג. אחד מעורכי הסקר רוצה להפיץ פרסומת בקרב 60 מן המשתתפים בסקר שנבחרו באקראי. בשלב הראשון הוא בוחר שניים מהם באקראי (ללא החזרה). התברר שהרגלי קניית הבגדים שלהם תואמים את אלה של כלל הנבדקים.
מה ההסתברות שאחד מהם קונה באינטרנט והשני לא קונה באינטרנט?

<u>פתרון:</u>

א. נסמן: $x$ = ההסתברות שנבדק קונה בקניון. נקבל: ההסתברות שנבדק קונה באינטרנט היא $1.6x$,
ההסתברות שנבדק קונה בחנות רחוב היא $1 - 2.6x$.

ההסתברות שלפחות אחד משני נבדקים שנבחרו באקראי קונה רק בחנויות רחוב היא המשלים של המקרה ששניהם אינם קונים בחניות רחוב. ההסתברות שנבדק אינו קונה בחנויות רחוב היא $2.6x$.

מקבלים:

$$1 - \left(2.6x\right)^2 = 0.5775 \Rightarrow \left(2.6x\right)^2 = 0.4225 \Rightarrow 2.6x = 0.65 \Rightarrow x = 0.25 \Rightarrow 1.6x = \mathbf{0.4}$$

ב. 1) ניעזר בנוסחת ברנולי: $k = 1,2,3$ , $n = 4$ , $p = 0.4$. מקבלים את המשלים של $k = 0$ או $k = 4$ .

נקבל: $1-\left(P_4(0)+P_4(4)\right)=1-\left(0.6^4+0.4^4\right)=\mathbf{0.8448}$

2) צריך לחשב את ההסתברות שלפחות שני נבדקים קונים באינטרנט, בתנאי שלא כולם קונים באינטרנט : P(k=2,3)/(k=0,1,2,3). חישוב:

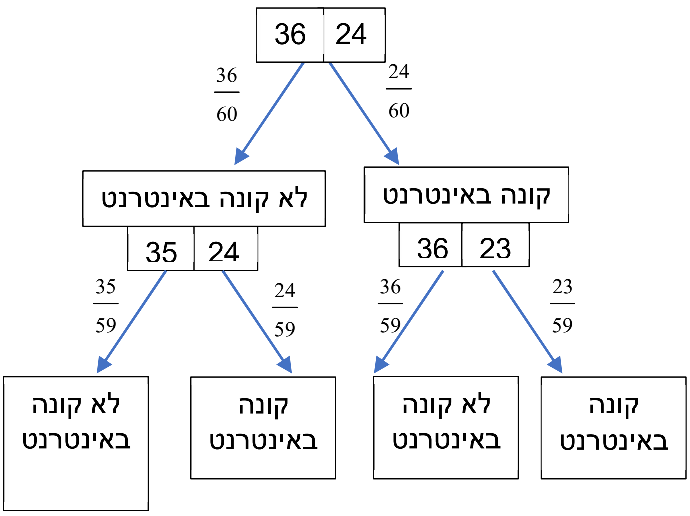
$P(k=0,1,2,3) = 1- P(k=4) = 1- 0.4^4 = 0.9744$

$$P_4(2)+P_4(3)=\binom{4}{2}0.4^2\cdot 0.6^2+\binom{4}{3}\cdot 0.4^3\cdot 0.6=0.3456+0.1536=0.4992$$

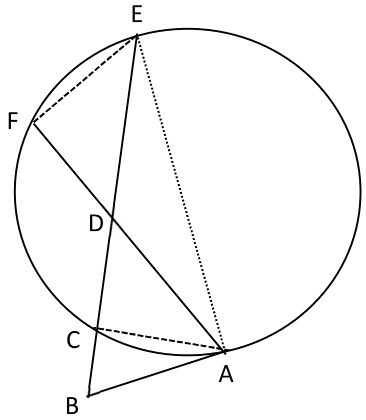
מקבלים: $\frac{0.4992}{0.9744}=\frac{\mathbf{104}}{\mathbf{203}}\approx\mathbf{0.5123}$

ג. 40% ממשתתפי הסקר קונים בגדים באינטרנט , לכן $0.4\cdot 60 = 24$ משתתפים קונים באינטרנט.

מקבלים :




חישוב: $\frac{24}{60}\cdot\frac{36}{59}+\frac{36}{60}\cdot\frac{24}{59}=\frac{2}{5}\cdot\frac{36}{59}+\frac{3}{5}\cdot\frac{24}{59}=\frac{\mathbf{144}}{\mathbf{295}}=\mathbf{0.488}$



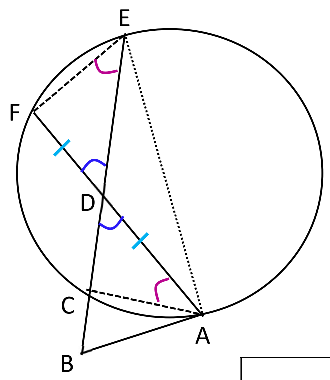

**4.** BA משיק למעגל O בנקודה A . מנקודה B יוצא קטע שחותך את המעגל בנקודות C ו- E.
מנקודה A יוצא מיתר AF שחותך את הקטע BE בנקודה D (ראה ציור). הנקודה D היא אמצע המיתר AF.

א. האם ניתן לקבוע על פי הנתונים שהמשולש DEF חופף למשולש DAC ? נמק.

ב . נתון: $AD = 3a$ , $DC = 2a$ , $BC = 0.77a$ . בטא באמצעות a את אורך הקטע CE .

ג. נתון: $AB = 4.73$.
חשב את a (עגל תשובתך למספר שלם).

ד. נתון: AE קוטר המעגל. חשב את שטח המעגל.



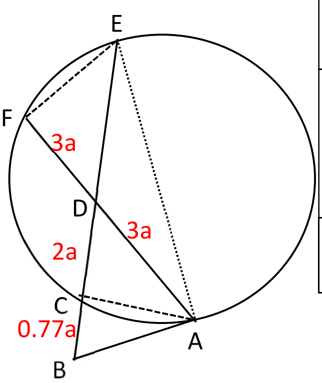

פתרון:

א. המשולשים **לא חופפים** – אמנם יש במשולשים זוג צלעות שווה ושני זוגות של זוויות שווה :

$FD = AD$ , $\sphericalangle FED = \sphericalangle CAD$ , $\sphericalangle FDE = \sphericalangle CDA$

אך לא בהתאמה.

ב.

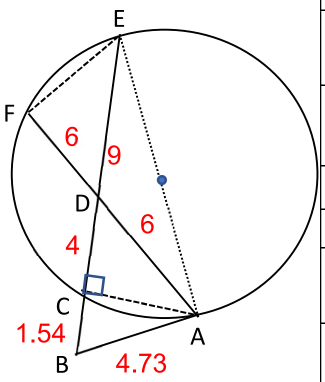



| טענה | נימוק |
|---|---|
| $DC = 2a$ , $BC = 0.77a$ , $AD = FD = 3a$ | נתון |
| $AD \cdot DF = ED \cdot DC$ | שני מיתרים הנחתכים בתוך מעגל מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני |
| $\Leftarrow 3a \cdot 3a = ED \cdot 2a \Leftarrow$ $\mathbf{CE = 6.5a} \Leftarrow ED = 4.5a$ | חישוב |

ג.

| טענה | נימוק |
|---|---|
| $AB = 4.73$ ס"מ. | נתון |
| $AB^2 = BC \cdot BE$ | BA ו- BE הם משיק וחותך מנקודה B למעגל , לכן ריבוע אורך המשיק שווה למכפלת החותך בחלקו החיצוני |
| $\Rightarrow 4.73^2 = 0.77a \cdot 7.27a \Rightarrow$ $22.3729 = 5.5979a^2 \Rightarrow$ $\mathbf{a = 2}$ | |

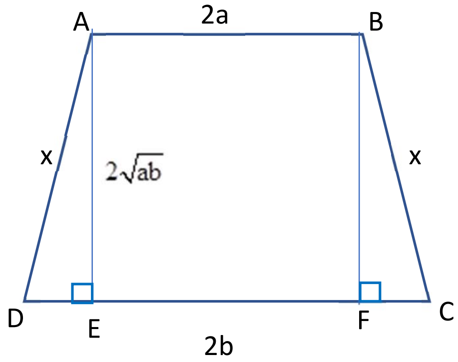
ד.




| טענה | נימוק |
|---|---|
| AE קוטר במעגל | נתון |
| $\Leftarrow \quad \sphericalangle ECA = 90^\circ$ | זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה |
| $\Leftarrow \quad \sphericalangle BCA = 90^\circ$ | זווית צמודה לזווית ישרה |
| $a = 2$ | הוכח בסעיף ג |
| $\Leftarrow BC = 1.54$ , $CE = 13$ | הצבה |
| $AC^2 = AB^2 - BC^2$ או $AC^2 = AD^2 - DC^2$ | משפט פיתגורס במשולש ABC משפט פיתגורס במשולש ADC |
| $\Leftarrow AC = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 4.47$ | |
| $AE^2 = AC^2 + EC^2$ | משפט פיתגורס במשולש AEC |
| $AE = \sqrt{20 + 13^2} = \sqrt{189}$ | |
| $R = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{189}}{2} \Rightarrow$ | $AE = 2R$ |
| $R^2 = \frac{189}{4} = 47.25$ | |
| $S = \mathbf{47.25\pi}$ | נוסחת חישוב שטח $S = \pi R^2$ העיגול |

**5.** בטרפז שווה שוקיים ABCD אורכי הבסיסים הם: $2a$ ס"מ $= AB$ , $2b$ ס"מ $= CD$ $(b > a)$.
אורך גובה הטרפז הוא $2\sqrt{ab}$ ס"מ.
א. הוכח כי ניתן לחסום מעגל בטרפז ABCD.
ב. נתון גם: $\frac{S_{\Delta BDC}}{S_{\Delta ABD}} = 2.25$.
1) חשב את היחס בין אורך קטע האמצעים של הטרפז ובין קוטר המעגל החסום בו.
2) חשב את זוויות הטרפז.
3) חשב את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז לבין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

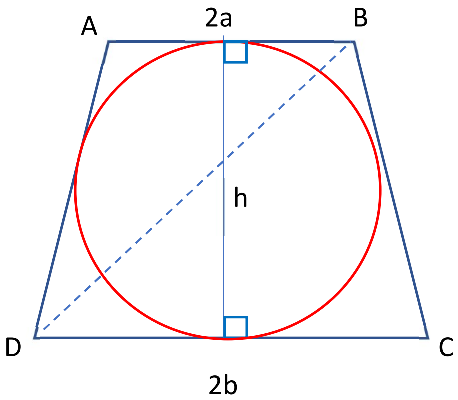
<u>פתרון:</u>
א. צריך להראות כי: $AB + CD = AD + BC$
נסמן: $AD = BC = x$ . נוריד גבהים AE ו- BF
לבסיס הגדול CD . מקבלים: המרובע ABFE הוא
מלבן והמשולשים ADE ו- BCF חופפים.
לכן : $EF = AB = 2a$ , $DE + FC = 2b - 2a$
$\Leftarrow \quad DE = FC = b - a$ . במשולש ADE . נקבל:



$$x^2 = (b-a)^2 + \left(2\sqrt{ab}\right)^2 = b^2 - 2ab + a^2 + 4ab =$$

$$= b^2 + 2ab + a^2 = (a+b)^2 \Rightarrow x = a+b \Rightarrow 2x = 2a+2b = AB + CD$$

מתקיים: $AB + CD = AD + BC$ לכן ניתן לחסום מעגל בטרפז ABCD.




ב. 1) $S_{\Delta ABDC} = \frac{2b\cdot h}{2} = b\cdot h\ ,\ S_{\Delta ABD} = \frac{2a\cdot h}{2} = a\cdot h \Rightarrow$

$$\frac{S_{\Delta BDC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2.25 \Rightarrow b = 2.25a \Rightarrow DC = 2b = 4.5a$$

$$\Rightarrow AB + DC = 2a + 2b = 6.5a \Rightarrow \frac{AB+DC}{2} = 3.25a \Rightarrow$$

אורך קטע האמצעים של הטרפז הוא 3.25a.

גובה הטרפז h הוא קוטר המעגל החסום בטרפז, לכן

$$h = 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{a\cdot 2.25a} = 2\sqrt{2.25a^2} = 2\cdot 1.5a = 3a$$

היחס בין אורך קטע האמצעים לבין קוטר המעגל הוא: $\frac{3.25a}{3a} = \mathbf{\frac{13}{12}}$

2) במשולש ישר הזווית ADE מקבלים:

$$AD = x = a + b = 3.25a\ ,\ DE = b - a = 1.25a \Rightarrow \cos\measuredangle D = \frac{1.25a}{3.25a} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

$$\mathbf{\measuredangle D = \measuredangle C = 67.38^o \Rightarrow \measuredangle A = \measuredangle B = 112.62^o}$$

3) רדיוס המעגל החסום בטרפז: $r = \frac{h}{2} = \frac{3a}{2} = 1.5a$.

המשולש BDC חסום במעגל החוסם את הטרפז. במשולש BDC :

$$BC = x = 3.25a\ ,\ DC = 2b = 4.5a\ ,\ \measuredangle C = 67.38^\circ \Rightarrow$$

$$BD^2 = (3.25a)^2 + (4.5a)\ \text{-}2\cdot 3.25a\cdot 4.5a\cdot\cos 67.38^\circ =$$

$$= 30.8125a^2 - 11.25a^2 = 19.5624a^2 \Rightarrow BD = 4.423a$$

נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC ונקבל:

$$\frac{BD}{\sin 67.38^\circ} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{4.423a}{\sin 67.38^\circ} \Rightarrow R = 2.396a \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1.5a}{2.396a} = \mathbf{0.626}$$

**6.** הפונקציה $f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{4}{(x-1)^2}$ היא הנגזרת של הפונקציה f(x) . הפונקציות f(x)

ו- f '(x) מוגדרות באותו תחום. הישר y = - 1 הנו אסימפטוטה לגרף הפונקציה f(x) .

א. 1) מצא את הפונקציה f(x).

2) מצא את האסימפטוטות לגרף הפונקציה f(x) המאונכות לצירים.

3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם הצירים.

4) מצא את תחומי העלייה , את תחומי והירידה ואת נקודות הקיצון של הפונקציה .

ב. 1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה f(x) .

2) הוסף את אחד הסימנים < , > , = במקום המסומן ונמק:

$$\int_2^4 f(x)\,d(x) \_\_\_\_ \int_2^5 f(x)\,d(x$$

ג. 1) מצא לפונקציה f '(x) אסימפטוטות מאונכות לצירים.

2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f '(x) עם הצירים (אם יש כאלה)

3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה f '(x) .

4) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה f '(x) , גרף הפונקציה $|f'(x)|$ ,

הישר x = 3 והישר x = 5 .

פתרון:

א. 1) $f(x)=\int\left(\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx=\int\left(4(x+1)^{-2}-4(x-1)^{-2}\right)dx=$

$$=\frac{4(x+1)^{-1}}{-1}-\frac{4(x-1)^{-1}}{-1}+c\Rightarrow f(x)=-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x-1}+c$$

$c=-1 \Leftarrow y\to c \Leftarrow x\to\pm\infty$ . מקבלים: $\mathbf{f(x)=-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x-1}-1}$

2) האסימפטוטות הן: **x = 1 , x = - 1 , y = - 1**.

3) **(0;-9)** $\Leftarrow f(0)=-4-4-1$ , $0=-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x-1}-1 \Rightarrow 0=-4(x-1)+4(x+1)-(x^2-1)$

$$\Rightarrow 0=8-x^2+1\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm3$$

מתקבלות הנקודות **(3;0) , (-3;0)**

4) $f'(x)=0\Rightarrow\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{4}{(x-1)^2}=0\Rightarrow 4(x-1)^2-4(x+1)^2=0\Rightarrow$

$(x-1)^2=(x+1)^2\Rightarrow x-1=x+1\Rightarrow$ אין פתרון או $x-1=-x-1\Rightarrow x=0$

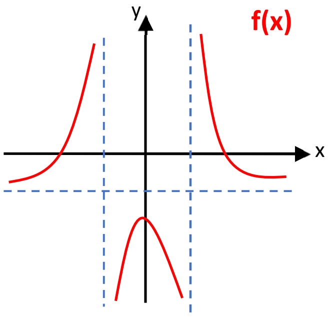
תחום ההגדרה הוא $x\neq\pm1$. מקבלים:

| x | x < | -1 | < x < | 0 | < x < | 1 | < x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | + | | + | 0 | - | | - |
| f(x) | ↗ | | ↗ | Max | ↘ | | ↘ |

**תחומי העלייה: $x < -1\ ,\ -1 < x < 0$ ; תחומי הירידה: $0 < x < 1\ ,\ x > 1$**

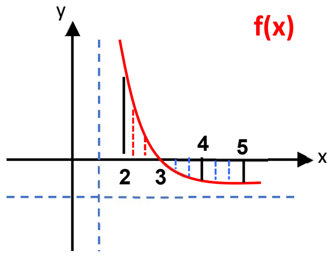
**נקודת קיצון: (0;-9) נקודת מקסימום**

ב. 1)




2) $\int_2^4 f(x)\,d(x) > \int_2^5 f(x)\,d(x)$

הסבר:



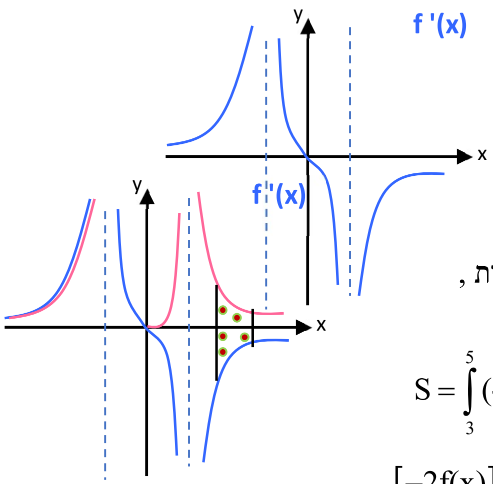

$\int_2^4 f(x)\,d(x)$ צובר את הערכים החיוביים בין $x = 2$ ו- $x = 3$ ואחר-כך ערכים שליליים

בין $x = 3$ ו- $x = 4$ . היות ו- $\int_2^5 f(x)\,d(x)$ צובר בנוסף גם את הערכים השליליים

בין $x = 4$ ו- $x = 5$ , הרי שמתקיים $\int_2^4 f(x)\,d(x) > \int_2^5 f(x)\,d(x)$ .

ג. 1) האסימפטוטות לגרף הפונקציה $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x-1)^2}$ המאונכות לצירים הן:

**$x = 1\ ,\ x = -1\ ,\ y = 0$**




2) $f'(0) = 0 \Leftarrow$ **(0;0)**

3) בעזרת הנתונים שהצטברו :

4) נוסיף את גרף הפונקציה $|f'(x)|$ :

בתחום המבוקש הפונקציה $f'(x)$ שלילית ,

לכן $|f'(x)| = -f'(x)$ . מקבלים:

$$S = \int_3^5 (-f'(x) - f'(x))dx = \int_3^5 -2f'(x)\,dx =$$

$$[-2f(x)]_3^5 = -2f(5) + 2f(3) = 2 \cdot \frac{2}{3} - 0 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

**7.** א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos x-\cos^3 x}{\sin x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות ? נמק.
3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{\sin 2x}{2}$.

1) עבור אילו ערכים של $x$ מתקיים $f(x)=g(x)$ ?
2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ .

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ .
2) מצא אסימפטוטות מאונכות לציר ה- $x$ .
3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ .
4) הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $g(x)$ את גרף הפונקציה $h(x)$ .
5) הפונקציה $k(x)$ מוגדרת בתחום בו מוגדרת הפונקציה $h(x)$ ומקיימת: $k(x)=|h(x)|+k$ .

מצא את ערכי $k$ עבורם גרף הפונקציה $k(x)$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ .

<u>פתרון:</u>

א. $f(x)=\frac{\cos x-\cos^3 x}{\sin x}$ , $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

1) תחום ההגדרה: $\sin x\ne 0\Rightarrow x\ne\pi k\Rightarrow x\ne 0\Rightarrow \mathbf{-\frac{\pi}{2}\le x<0,0<x\le\frac{\pi}{2}}$

2) נפשט את משוואת הפונקציה $x\to 0\Rightarrow f(x)\to\frac{0}{0}\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{\sin x}=\frac{\cos x\cdot\sin^2 x}{\sin x}=\cos x\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow$$

$x\to 0\Rightarrow f(x)\to 0$ . לכן , $(0,0)$ , נקודת אי-רציפות **ואין אסימפטוטה אנכית.**

3) $x\ne 0$ לכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ .

נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ **:** $\frac{1}{2}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=\pi k\Rightarrow x=\frac{\pi k}{2}\Rightarrow$

הפתרונות בתחום ההגדרה של הפונקציה הם $x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ . מתקבלות הנקודות $\left(\mathbf{\frac{\pi}{2};0}\right),\left(\mathbf{-\frac{\pi}{2};0}\right)$

4) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow f'(x)=\cos 2x=0\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

$x=-\frac{\pi}{4},x=\frac{\pi}{4}$ הפתרונות בתחום ההגדרה של הפונקציה. מתקבלות הנקודות

$\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ , $\left(-\frac{\pi}{4};-\frac{1}{2}\right)$ .

$$f''(x)=-2\sin 2x\Rightarrow f''(-\frac{\pi}{4})>0\ ,\ f''(\frac{\pi}{4})<0\Rightarrow$$

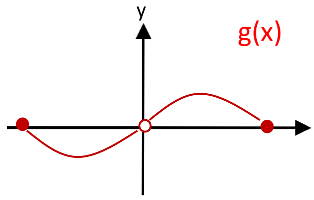
$\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ **נקודת מינימום** , $\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ **נקודת מקסימום** , $\left(-\frac{\pi}{4};-\frac{1}{2}\right)$ **נקודת מינימום** ,

$\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ **נקודת מקסימום**

ב. 1) הפונקציה g(x) מוגדרת לכל ערך של x והפונקציה f(x) מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x<0\ ,\ 0<x\le\frac{\pi}{2}$ , לכן $g(x)=f(x)$ בתחום:

$$\mathbf{-\frac{\pi}{2}\le x<0,0<x\le\frac{\pi}{2}}$$

2)




ג. 1) תחום ההגדרה: $f(x)\neq 0$ לכן $x\neq\frac{\pi}{2}, x\neq-\frac{\pi}{2}$ ומקבלים: $\mathbf{-\frac{\pi}{2}<x<0,0<x<\frac{\pi}{2}}$

2) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x : $x\to\pm\frac{\pi}{2},0\Rightarrow f(x)\to 0\to\frac{1}{f(x)}\to\pm\infty\Rightarrow$

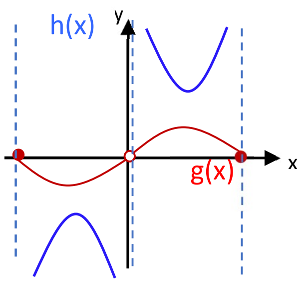
מתקבלות האסימפטוטות: $\mathbf{x=-\frac{\pi}{2}, x=0, x=\frac{\pi}{2}}$

3) $h(x)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow h'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}=0\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}$

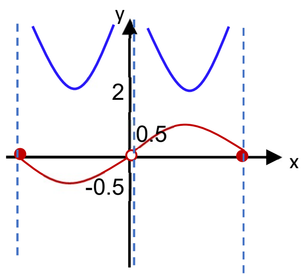
הסימנים של h'(x) הפוכים מסימני f'(x) , לכן נקבל $\left(\frac{\pi}{4};2\right)$ **נקודת מינימום** ,

$\left(-\frac{\pi}{4};-2\right)$ **נקודת מקסימום**

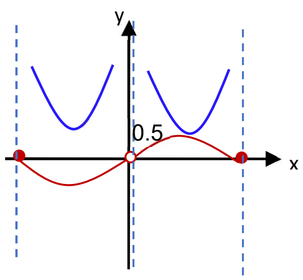
4)

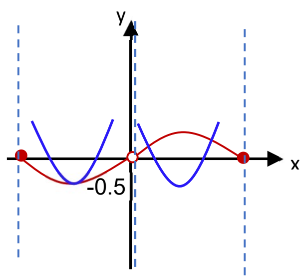



5) נוסיף תחילה את
גרף הפונקציה $|h(x)|$
לגרף של g(x) :



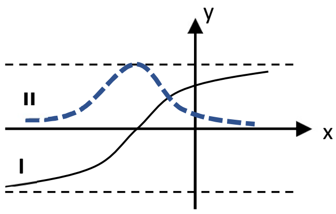

ואת גרף הפונקציות k(x)
המשיקות לגרף הפונקציה g(x) :




מקבלים : עבור **k = - 2.5 או k = - 1.5**

**8.** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה לכל ערך של $x$ .




בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ .
הגרפים המתוארים בציור נחתכים בנקודה שבה $x = -2.318$ .

א. התאם לכל אחד מן הגרפים I ו- II את הפונקציה המתאימה. נמק קביעתך על סמך הסרטוט.

ב. נתון: $f(x) = \dfrac{ax+3}{\sqrt{x^2+6x+c}}$ . וקבע נכון / לא נכון לגבי הטענות הבאות ונמק.

1) $a < 0$ ______

2) $c > 9$ ______

3) $a \le f'(x)$ לכל ערך של $x$ ______

4) $f''(x) > 0$ לכל ערך של $x$ ______

ג. הישר $y = x + 3$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ והנו המשיק בעל השיפוע הגדול ביותר מבין המשיקים לגרף הפונקציה.

1) מצא את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקציה.

2) מצא את $a$ ו- $c$ .

ד. הצב $a = 1$ ו- $c = 10$ וענה על הסעיפים הבאים:

1) מצא את האסימפטוטות לגרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

2) מצא פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x-3)$.

3) הראה שהפונקציה $g(x)$ אי-זוגית.

4) חשב את השטח המוגבל בין גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$ , ציר ה- $x$ והישרים $x = 1$ ו- $x = -1$ .

פתרון:

א. **גרף I – מתאים לפונקציה $f(x)$ , גרף II – מתאים לפונקציה $f'(x)$** . נימוק: פונקציה I עולה לכל ערך של $x$ הפונקציה II (נגזרתה) חיובית לכל ערך של $x$ . הפונקציה II עולה בתחום בו פונקציה I שלילית , לכן גרף I אינו מתאים להיות גרף הנגזרת של פונקציה II .

ב. 1) **לא נכון** – נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ מתקבלת בנקודה שבה $ax + 3 = 0 \Leftarrow x = -\dfrac{3}{a}$ .

אם $a < 0$ , הנקודה תהיה מימין לציר ה- $y$ , בניגוד לסרטוט.

2) **נכון** – הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של $x$ לכן $x^2 + 6x + c > 0$ לכל ערך של $x$ ולכן במשוואה הריבועית $x^2 + 6x + c = 0$ מתקיים $c > 9 \Leftarrow 36 - 4c < 0 \Leftarrow \Delta < 0$ .

3) **נכון** - היות ו- $a > 0$ , הישר $y = a$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה $f(x)$ עבור $x \to \infty$ .

על פי הסרטוט, הערך המקסימלי של $f'(x)$ הוא $a$ לכן $f'(x) \le a$ לכל ערך של $x$ .

4) **לא נכון** – לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת מקסימום ואחריה $f'(x)$ יורדת , לכן , בתחום זה מתקיים $f''(x) < 0$.

ג. 1) נקודת ההשקה של המשיק $y = x + 3$ עם הפונקציה $f(x)$ נמצאת על ציר ה- $x$ , לכן $x + 3 = 0$ והנקודה $(-3;0)$ היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ . היות והמשיק הנו בעל השיפוע המקסימלי מתקיים :

| x | x < | -3 | > x |
|---|---|---|---|
| f '(x) | ↗ | max | ↘ |
| f "(x) | + | 0 | - |
| f (x) | $\cup$ | פיתול | $\cap$ |

לכן, הנקודה **(-3;0)** היא נקודת פיתול של הפונקציה f(x) .

2) $f(x)=\dfrac{ax+3}{\sqrt{x^2+6x+c}}$ , $f(-3)=0$ לכן $-3a+3=0 \Rightarrow \mathbf{a=1}$ .

מקבלים $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+c}}$. שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=-3$ הוא 1 , לכן, $f'(-3)=1$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+6x+c}-\dfrac{(2x+6)(x+3)}{2\sqrt{x^2+6x+c}}}{x^2+6x+c}=\frac{\sqrt{x^2+6x+c}-\dfrac{(x+3)^2}{\sqrt{x^2+6x+c}}}{x^2+6x+c}=$$

$$=\frac{x^2+6x+c-(x+3)^2}{(x^2+6x+c)\sqrt{x^2+6x+c}}\Rightarrow 1=\frac{c-9}{(c-9)\sqrt{c-9}}\Rightarrow (c-9)\sqrt{c-9}=c-9$$

הראינו ש- $c>9$ לכן $c-9\neq 0$ וניתן לחלק את אגפי המשוואה ב- $c-9$ . מקבלים:

$$\sqrt{c-9}=1\Rightarrow \mathbf{c=10}$$

ד. $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ .

1) לפונקציה יש רק אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

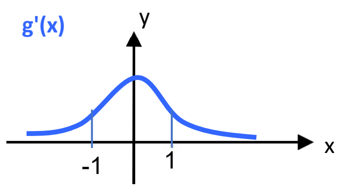
$$x\to-\infty\Rightarrow y\to\frac{x}{\sqrt{x^2}}\to\frac{x}{-x}\to-1 \quad , \quad x\to\infty\Rightarrow y\to\frac{x}{\sqrt{x^2}}\to\frac{x}{x}\to 1$$

הישרים **y = 1** ו- **y = - 1** הם האסימפטוטות לגרף הפונקציה.

2) $$g(x)=f(x-3)=\frac{(x-3)+3}{\sqrt{(x-3)^2+6(x-3)+10}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-6x+9+6x-18+10}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

3) $$g(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-g(x)$$




4) $$S=\int_{-1}^{1}g'(x)dx=\left[g(x)\right]_{-1}^{1}=g(1)-g(-1)=$$

$$=g(1)+g(1)=2g(1)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\mathbf{2}}$$

# מבחן מס' 2

**1.** שני רוכבי קטנוע יצאו בשעה 9:00 מנקודה A ורכבו באותו כיוון במהירויות קבועות לאורך מסלול מעגלי. רוכב א' עובר בכל שעה 7 ק"מ יותר מרוכב ב'. כאשר רוכב א' עבר מרחק של 24 ק"מ מרגע יציאתו מנקודה A , היה המרחק בין שני הרוכבים 4 ק"מ.

א. מצא את מהירות הנסיעה של כל אחד מרוכבי הקטנוע.

ב. כמה סיבובים השלים רוכב ב' כאשר רוכב א' השלים 6 סיבובים ?

ג. שני הרוכבים נפגשו לראשונה כעבור 3 שעות. מצא את אורך המסלול .

ד. רוכב ב' עצר בדרך לחצי שעה והמשיך לרכב באותה מהירות בה רכב קודם. שני הרוכבים סיימו את הרכיבה באותו זמן בנקודה A . בסיום הרכיבה התברר שרוכב א' השלים שני סיבובים יותר מרוכב ב'.

1) כמה ק"מ עבר כל אחד מן הרוכבים ?

2) באיזו שעה הסתיימה הרכיבה ?

פתרון:

א. נסמן ב- x את מהירות הרכיבה של רוכב ב'. הרוכבים יצאו בו-זמנית.
אם רוכב א' , המהיר ביניהם , עבר 24 ק"מ והמרחק בין הרוכבים הוא 4 ק"מ , הרי שהרוכב השני עבר באותו זמן רק 20 ק"מ. נקבל:

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (שעות) | מרחק (ק"מ) |
|---|---|---|---|
| רוכב א' | x + 7 | $\frac{24}{x+7}$ | 24 |
| רוכב ב' | x | $\frac{20}{x}$ | 20 |

מקבלים : $\frac{20}{x}=\frac{24}{x+7} \Leftarrow 24x=20x+140 \Leftarrow 4x=140 \Leftarrow x=35 \Leftarrow$

**מהירות רוכב א' היא 42 קמ"ש , מהירות רוכב ב' היא 35 קמ"ש**

ב. נסמן ב- m את אורך המסלול המעגלי:

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (שעות) | מרחק (ק"מ) |
|---|---|---|---|
| רוכב א' | 42 | $\frac{6m}{42}=\frac{m}{7}$ | 6m |
| רוכב ב' | 35 | $\frac{m}{7}$ | $35\cdot\frac{m}{7}=5m$ |

הרוכב השני השלים בזמן זה **5 סיבובים**
ניתן לענות גם ללא טבלה: היחס בין המהירות של רוכב א' למהירות של רוכב ב' הוא

$6:5 = \frac{42}{35}$ . יחס המרחקים שעוברים הרוכבים באותו זמן שווה ליחס המהירויות , לכן , אם רוכב א' השלים 6 סיבובים הרי שרוכב ב' השלים באותו זמן 5 סיבובים.

ג. שני הרוכבים נפגשים לראשונה כאשר הפער בין המרחק שעבר רוכב א' , המהיר ביניהם , גדול בסיבוב שלם מן המרחק שעבר רוכב ב'. מקבלים:

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (שעות) | מרחק (ק"מ) |
|---|---|---|---|
| רוכב א' | 42 | 3 | 126 |
| רוכב ב' | 35 | 3 | 105 |

מקבלים: $m = 126 - 105 = 21$ **ק"מ**

ד. נסמן ב- a את מספר הסיבובים שהשלים רוכב ב' עד סיום הרכיבה. נקבל:

| | מהירות (קמ"ש) | זמן (שעות) | מרחק (ק"מ) |
|---|---|---|---|
| רוכב א' | 42 | $\frac{21(a+2)}{42} = \frac{a+2}{2}$ | 21(a + 2) |
| רוכב ב' | 35 | $\frac{21a}{35} = \frac{3a}{5}$ | 21a |
| | | 0.5 | |

מקבלים: $\frac{a+2}{2} = \frac{3a}{5} + \frac{1}{2} \Rightarrow 5(a+2) = 6a+5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$

1) **רוכב ב'** השלים 5 סיבובים , כלומר מרחק של **105 ק"מ** $= 5 \cdot 21$

**רוכב א'** השלים 7 סיבובים , כלומר מרחק של **147 ק"מ** $= 7 \cdot 21$

2) זמן הרכיבה של שני הרוכבים הוא $\frac{a+2}{2} = \frac{5+2}{2} = 3.5$ שעות .

הרכיבה החלה בשעה 9:00 ולכן הסתיימה בשעה **12:30**

**2.** בסדרה הנדסית עולה $a_1, a_2, a_3, ......, a_n$. סכום $n - 2$ האיברים הראשונים בסדרה קטן פי 9 מסכום $n - 2$ האיברים האחרונים בסדרה.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. הסדרה $b_n$ מוגדרת כך: $b_n = a_n + a_{n+1}$.

1) הוכח: $b_n = 4a_n$.

2) סכום 5 האיברים הראשונים של הסדרה $b_n$ הוא $53\frac{7}{9}$. מצא את $a_1$.

ג. נתון: בסדרה $a_n$ ישנם 16 איברים.

חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$.

<u>פתרון:</u>

**א. נתון:** $9(a_1 + a_2 + a_3 + ...... + a_{n-2}) = (a_3 + a_4 + a_5 + ...... + a_n)$. **מקבלים:**

$$\frac{9a_1(q^{n-2}-1)}{q-1} = \frac{a_3(q^{n-2}-1)}{q-1} \Rightarrow 9a_1 = a_1q^2 \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow \mathbf{q = 3}$$ **(הסדרה עולה לכן $q \neq -3$)**

**ב. 1) נתון:** $a_{n+1} = 3a_n$ **על פי סעיף א' מקבלים:**

$$b_n = a_n + a_{n+1} \Rightarrow b_n = a_n + 3a_n \Rightarrow \mathbf{b_n = 4a_n}.$$

**2)** $b_n = 4a_n \Rightarrow b_{n+1} = 4a_{n+1} \Rightarrow$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4a_{n+1}}{4a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3a_n}{a_n} = 3 \Rightarrow$$ $b_n$ **סדרה הנדסית שמנתה 3**

$$b_1 = 4a_1,\ S_5 = 53\frac{7}{9} \Rightarrow$$

$$\frac{b_1(3^5-1)}{2} = 53\frac{7}{9} \Rightarrow \frac{4a_1(3^5-1)}{2} = 53\frac{7}{9} \Rightarrow 484a_1 = 53\frac{7}{9} \Rightarrow \mathbf{a_1 = \frac{1}{9}}$$

ג. נתון: הסדרה $a_n$: $a_1 + a_2 + .... + a_{16} \Rightarrow$ הסדרה $b_n$:

$$b_1 + b_2 + b_3 + .... + b_{15} = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) .... + (a_{15} + a_{16}) \Rightarrow$$

סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$ הוא $b_2 + b_4 + ... + b_{14}$, כלומר, סדרה הנדסית בת 7 איברים. המקיימת:

האיבר הראשון בסדרה הוא: $b_2 = 4a_2 = 4 \cdot a_1 \cdot 3 = 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{4}{3}$

מנת הסדרה היא: $q^2 = 9$, מספר האיברים הוא: 7

סכום 7 האיברים הראשונים של הסדרה: $S_7 = \frac{\frac{4}{3}(9^7-1)}{9-1} = \mathbf{797161\frac{1}{3}}$

**3.** במרכול כלשהו מתבצע התשלום בקופה על-ידי שלוש קופאיות ושני רובוטים. בבדיקה שנערכה נמצאה טעות ב- 3% מן החשבוניות שבוצעו על-ידי קופאית וב- 2% מן החשבוניות שבוצעו על-ידי רובוט.

א. אדם כלשהו ערך קניות במרכול וניגש באופן מקרי לאחת הקופות. לאחר התשלום , הוא בדק את החשבונית ומצא שאין בה טעות. מה ההסתברות שהחשבונית נערכה על-ידי רובוט ?

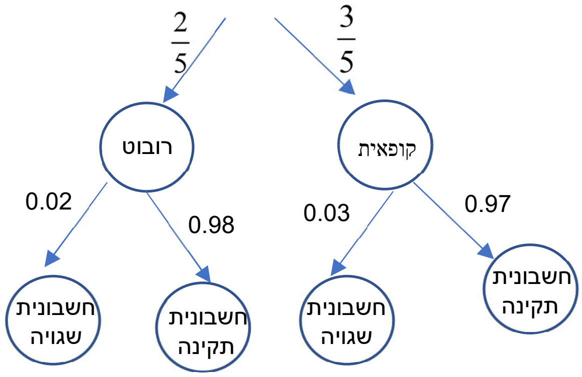
ב. שני קונים במרכול ניגשו לקופה בה עבד רובוט. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מצא טעות בחשבונית ?

ג. בתור לקופה בה עבד רובוט עמדו k קונים.
הבע בעזרת k את ההסתברות שלפחות אחד מהם קיבל חשבונית שגויה .

ד. ביום מסוים הוחלט לבדוק את תקינות החשבוניות הנערכות על-ידי אחד הרובוטים. הוחלט שלאחר שיימצאו 3 חשבוניות שגויות , יוחלף הרובוט .
מה ההסתברות שהרובוט הוחלף לאחר שנבדקו 22 קונים שעברו באותה קופה ?

<u>פתרון:</u>

א.




צריך לחשב את ההסתברות המותנית:
P( החשבונית תקינה/החשבונית נערכה ע"י רובוט)

חישוב ההסתברות שהחשבונית תקינה: $\frac{3}{5}\cdot 0.97+\frac{2}{5}\cdot 0.98=0.974$ .

ההסתברות שהחשבונית תקינה ונערכה על-ידי רובוט היא $\frac{2}{5}\cdot 0.98=0.392$ .

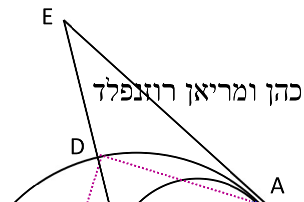
ההסתברות המבוקשת: $\frac{0.392}{0.974}=\mathbf{\frac{196}{487}}$ .

ב. ההסתברות שלפחות אחד משני קונים שעברו בקופה בה עבד רובוט קיבל חשבונית שגויה, היא המשלים של המקרה בו שניהם קיבלו חשבונית תקינה :
$1-0.98\cdot 0.98=\mathbf{0.0396}$

ג. ההסתברות שלפחות אחד מבין k קונים קיבל חשבונית שגויה בקופה בה עבד רובוט היא המשלים של האירוע בו כולם קיבלו חשבונית תקינה: $\mathbf{1-(0.98)^{k}}$.

ד. אם הרובוט הוחלף אחרי 22 קונים , הרי שהחשבונית של הקונה ה- 22 הייתה שגויה והחשבונית של שניים מבין 21 הקונים הקודמים הייתה שגויה. מקבלים , בעזרת נוסחת ברנולי:
$n=21\ ,\ k=2\ ,\ p=0.02$

$$P_2(21)\cdot 0.02=0.02\cdot\binom{21}{2}\cdot 0.02^2\cdot 0.98^{19}=\mathbf{0.001144}$$



**4.** הנקודות $A$, $M$, $N$ ו- $B$ נמצאות על ישר אחד. הקטע $AN$ הוא קוטרו של מעגל שמרכזו $M$ והקטע $AB$ הנו הקוטר של מעגל שמרכזו $N$. בנקודה $A$ מעבירים משיק למעגל $M$ והנקודה $E$ נמצאת על המשיק. הקטע $NE$ חותך את המעגל $M$ בנקודה $C$ ואת המעגל $N$ בנקודות $D$ ו- $F$.

א. הוכח: $AE$ משיק למעגל $N$ בנקודה $A$.

ב. הוכח: $ED \cdot EF = EC \cdot EN$.

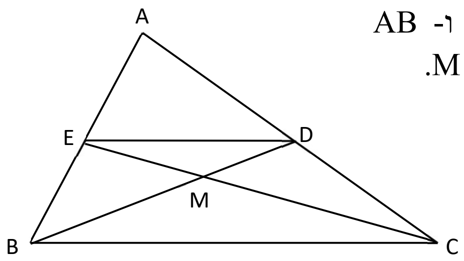
ג. נתון: $\Delta DBA \sim \Delta CAN$. חשב את הזווית $\sphericalangle DNA$.

ד. רדיוס המעגל $M$ הוא $R$.
בטא בעזרת $R$ את אורך הקטע $ED$.

<u>פתרון:</u>

| | |
|---|---|
| א. | |
| **טענה** | **נימוק** |
| $AE$ משיק למעגל $M$ בנקודה $A$ | נתון |
| $AN$ הוא קוטרו של מעגל $M$ | נתון |
| $\Leftarrow \sphericalangle EAN = 90^\circ$ | המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה |
| $AB$ קוטר המעגל $N$ | נתון |
| $\Leftarrow EA$ משיק למעגל $N$ בנקודה $A$ | קטע המאונך לרדיוס המעגל בקצהו, משיק למעגל |
| ב. | |
| $EA^2 = ED \cdot EF$ | משיק וחותך היוצאים מאותה נקודה למעגל $N$ מקיימים: מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק |
| $EA^2 = EC \cdot EN$ | משיק וחותך היוצאים מאותה נקודה למעגל $M$ מקיימים: מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק |
| $\Leftarrow ED \cdot EF = EC \cdot EN$ | כלל המעבר |
| ג. | |
| $\Delta DBA \sim \Delta CAN$ | נתון |
| $\sphericalangle NCA = \sphericalangle BDA = 90^\circ$ | זיית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה |
| $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CAN = \alpha$ | זוויות מתאימות במשולשים דומים שוות זו לזו |
| $\Leftarrow \sphericalangle DNA = 2\alpha$ | זווית מרכזית במעגל $N$ גדולה פי 2 מן הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת $\overset{\frown}{AD}$ |
| $\Leftarrow 3\alpha = 90^\circ$ | סכום זוויות במשולש $ACN$ |
| $\Leftarrow \alpha = 30^\circ \Leftarrow$ $\mathbf{\sphericalangle DNA = 60^o}$ | |

| | |
|---|---|
| ד. | |
| רדיוס המעגל M הוא R. | נתון |
| $\Leftarrow AN = 2R$ | AN הוא קוטר המעגל M ורדיוס המעגל N |
| $\Leftarrow DF = 4R$ | קוטר המעגל N |
| $\sphericalangle CNA = 2\alpha = 60^\circ, \sphericalangle CAN = \alpha = 30^\circ$<br>$\sphericalangle ACN = 90^\circ$ | הוכח בסעיף ג'<br>הוכח |
| $\Leftarrow CN = \frac{1}{2}AN = R$ | במשולש שזוויותיו $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ הניצב שמול הזווית בת $30^\circ$ שווה למחצית היתר |
| $\Leftarrow DC = 2R - R = R$ | |
| $ED \cdot EF = EC \cdot EN$ | הוכח בסעיף ב' |
| $ED = x$ | סימון |
| $\Leftarrow x \cdot (x+4R) = (x+R)(x+2R)$<br>$\Leftarrow x^2 + 4Rx = x^2 + 2Rx + Rx + 2R^2$<br>$\Leftarrow Rx = 2R^2 \Leftarrow x = \mathbf{2R}$ | חישוב |




**5.** נתון משולש ABC. ‏BD ו- CE הם תיכונים לצלעות AC ו- AB בהתאמה (ראה ציור). התיכונים BD ו- CE נפגשים בנקודה M.

נתון: $EC:DB = 1.2$ , $MB = 2a$ , $\measuredangle BMC > 90^\circ$

שטח המשולש BMC הוא $\frac{6\sqrt{3}}{5}\cdot a^2$.

א. חשב את גודל הזווית $\measuredangle BMC$.

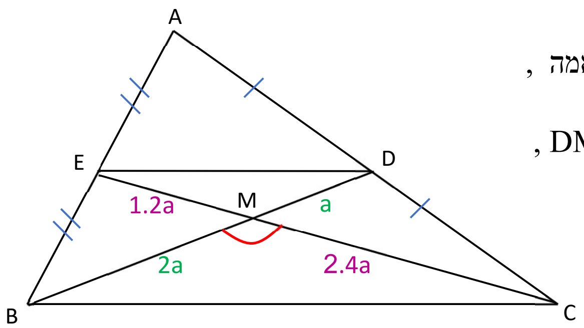
ב. 1) בטא באמצעות a את צלעות המשולש ABC.

2) חשב את גודל הזווית $\measuredangle A$.

ג. נתון: רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 17.85.

חשב את שטח המרובע AEMD.

<u>פתרון:</u>




א. BD ו- CE הם תיכונים לצלעות AC ו- AB בהתאמה, M מפגש התיכונים במשולש, לכן מתקיים:

$DM:MB = EM:MC = 1:2$. $MB = 2a$ לכן $DM = a$,

$BD = 3a$. $EC = 1.2BD$, לכן $EC = 3.6a$,

$MC = 2.4a$ , $EM = 1.2a$.

$$S_{\Delta BMC} = \frac{BM\cdot MC\cdot \sin\measuredangle BMC}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{5}\cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2a\cdot 2.4a\cdot \sin\measuredangle BMC}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{5}\cdot a^2 \Rightarrow 12a^2\cdot \sin\measuredangle BMC = 6\sqrt{3}\cdot a^2 \Rightarrow$$

$\sin\measuredangle BMC = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \measuredangle BMC = 60^\circ$ או $120^\circ$. $\measuredangle BMC > 90^\circ \Rightarrow \measuredangle BMC = \mathbf{120^\circ}$

ב. 1) במשולש BMC: $BC^2 = (2a)^2 + (2.4a)^2 - 2\cdot 2a\cdot 2.4a\cdot \cos 120^\circ$

$$\Rightarrow BC^2 = 9.76a^2 + 4.8a^2 \Rightarrow BC^2 = 14.56a^2 \Rightarrow \mathbf{BC = 3.816a}$$

במשולש BME: $BE^2 = (1.2a)^2 + (2a)^2 - 2\cdot 2a\cdot 1.2a\cdot \cos 60^\circ$

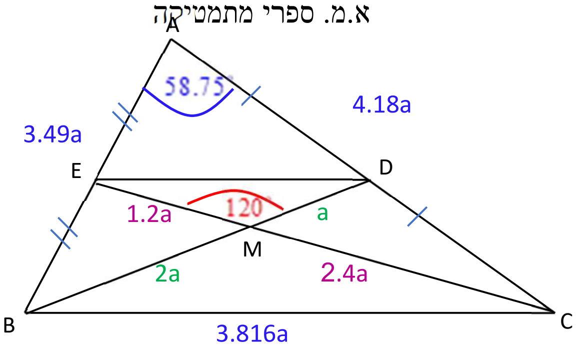
$$\Rightarrow BE^2 = 5.44a^2 - 2.4a^2 = 3.04a^2 \Rightarrow BE = 1.74a \Rightarrow \mathbf{AB = 3.49a}$$

במשולש DMC: $DC^2 = a^2 + (2.4a)^2 - 2\cdot a\cdot 2.4a\cdot \cos 60^\circ$

$$\Rightarrow DC^2 = 6.76a^2 - 2.4a^2 = 4.36a^2 \Rightarrow DC = 2.088a \Rightarrow \mathbf{AC = 4.18a}$$

2) במשולש ABC: $\cos\measuredangle A = \frac{(3.49a)^2 + (4.18a)^2 - (3.816a)^2}{2\cdot 3.49a\cdot 4.18a}$

$$\cos\measuredangle A = 0.5188 \Rightarrow \measuredangle A = \mathbf{58.75^\circ}$$




ג. במשולש ABC : $\dfrac{3.816a}{\sin 58.75^\circ} = 2\cdot 17.85 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow$

$$AE = \frac{1}{2}\cdot 3.49\cdot 8 = 13.96\ ,\ AD = \frac{1}{2}\cdot 4.18\cdot 8 = 16.72$$

$$EM = 1.2\cdot 8 = 9.6\ ,\ MD = 8 \Rightarrow$$

$$S_{\Delta AED} = \frac{13.96\cdot 16.72\cdot \sin 58.75^\circ}{2} = 99.77\ ,\ S_{\Delta EMD} = \frac{9.6\cdot 8\cdot \sin 120^\circ}{2} = 33.255$$

$$\mathbf{S_{\Delta AEMD} = 133.025}$$

**6.** נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ : $f'(x) = -4\cos^2 x$ .

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-0.75\pi \le x \le 0.75\pi$ .

ב. מצא את תחומי העלייה, תחומי הירידה, תחומי הקעירות כלפי מעלה ותחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$, אם יש כאלה.

ג. נתון : $f(x)$ פונקציה אי-זוגית, $f(-0.75\pi) = 3.8$. סרטט, באותה מערכת צירים, את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ .

ד. 1) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$ בתחום $-0.5\pi < x < 0$.

2) הישר $x = t$ , $-0.5\pi < t < 0$, חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ בנקודות A ו- B בהתאמה. הסבר מדוע אורך הקטע AB הוא מקסימלי כאשר הישר $x = t$ עובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ה. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $-0.75\pi \le x \le 0.75\pi$ ומקיימת: $g(x) = f(x) - \pi$.
גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x בתחום $-0.75\pi < x < 0$.
מצא את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-0.75\pi \le x \le 0.75\pi$ .

<u>פתרון:</u>

א. $f'(x) = -4\cos^2 x \Rightarrow f''(x) = -8\cos x\cdot(-\sin x) = 8\sin x\cos x \Rightarrow f''(x) = 4\sin 2x$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4\sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$$

הפתרונות בתחום הנתון: $x = \frac{\pi}{2}$ , $x = 0$ , $x = -\frac{\pi}{2}$ . זיהוי הנקודות:

| x | $-0.75\pi$ | $< x <$ | $-0.5\pi$ | $< x <$ | 0 | $< x <$ | $0.5\pi$ | $< x <$ | $0.75\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f'(x)$ | min | ↗ | max | ↘ | min | ↗ | max | ↘ | min |

$$f'(-0.75\pi) = f'(0.75\pi) = -2\ ,\ f'(-0.5\pi) = f'(0.5\pi) = 0\ ,\ f'(0) = -4 \Rightarrow$$

מתקבלות הנקודות : $(-0.75\pi;-2)$ **מינימום** , **$(-0.5\pi;0)$ מקסימום** , **$(0;-4)$ מינימום** ,
**$(0.5\pi;0)$ מקסימום** , **$(0.75\pi;-2)$ מינימום**

ב. נמצא את נקודות האפס של $f'(x)$ :

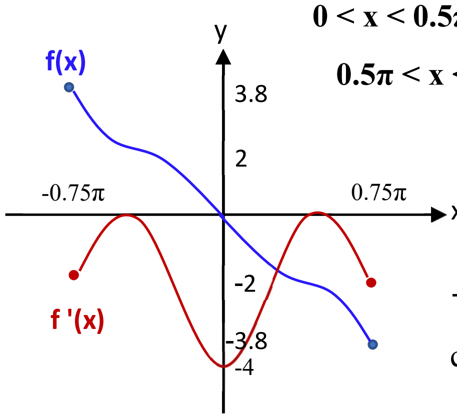
$$f'(x)=-4\cos^2 x=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

הפתרונות בתחום הנתון: $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=-\frac{\pi}{2}$ . זיהוי הנקודות:

| x | $-0.75\pi$ | $< x <$ | $-0.5\pi$ | $< x <$ | $0.5\pi$ | $< x <$ | $0.75\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | - | 0 | - | |
| $f(x)$ | max | ↘ | | ↘ | | ↘ | min |

**הפונקציה $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה**

| x | $-0.75\pi$ | $< x <$ | $-0.5\pi$ | $< x <$ | 0 | $< x <$ | $0.5\pi$ | $< x <$ | $0.75\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | | ∪ | פיתול | ∩ | פיתול | ∪ | פיתול | ∩ | |




**תחומי הקעירות כלפי מעלה ∪ : $-0.75\pi < x < -0.5\pi$ , $0 < x < 0.5\pi$**

**תחומי הקעירות כלפי מטה ∩ : $-0.5\pi < x < 0$ , $0.5\pi < x < 0.75\pi$**

ג. $f(x)$ פונקציה אי-זוגית, $f(-0.75\pi)=3.8$ , לכן :

מקבלים: $f(0.75\pi)=3.8$ , $f(0)=0$.

ד. 1) $f'(x)=f''(x)\ \Rightarrow -4\cos^2 x=4\sin(2x)\Rightarrow$

$$-4\cos^2 x=8\sin x\cos x\Rightarrow 2\sin x\cos x+\cos^2 x=0\Rightarrow$$

$$\cos x(2\sin x+\cos x)=0\Rightarrow \text{I. } \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

אין פתרון בתחום $-0.5\pi < x < 0$ .

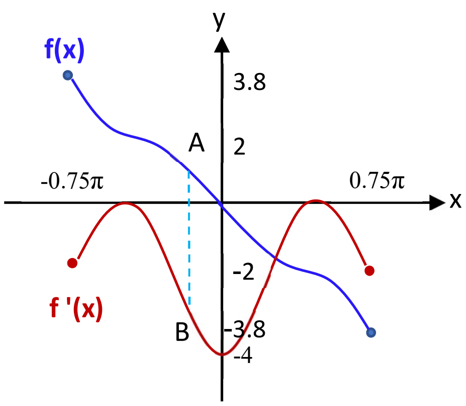
$$\text{II. } 2\sin x+\cos x=0\ \Rightarrow$$

**כי :** $\cos x\neq 0$ אם $\cos x=0$ אז $\sin^2 x=1 \Leftarrow \sin x=\pm 1 \Leftarrow \pm 2\neq 0 \Leftarrow$

נחלק את אגפי המשוואה ב- $\cos x$ ונקבל :

$$2\tan x+1=0\Rightarrow \tan x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=-0.46+\pi k\ .$$

הפתרון היחיד בתחום $-0.5\pi < x < 0$ הוא: $x=-0.46$ . מתקבלת הנקודה **(-0.46;-3.2)**




2) נסמן : $A(t;f(t))$ , $B(t;f'(t))$ . אורך הקטע AB הוא

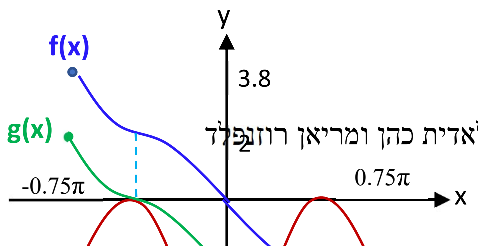
$AB(t)=f(t)-f'(t)$. נמצא את האורך המקסימלי

של הקטע AB : $AB'=f'(t)-f''(t)=0$

$$\Rightarrow -4\cos^2 t-4\sin(2t)=0\Rightarrow t=-0.46$$

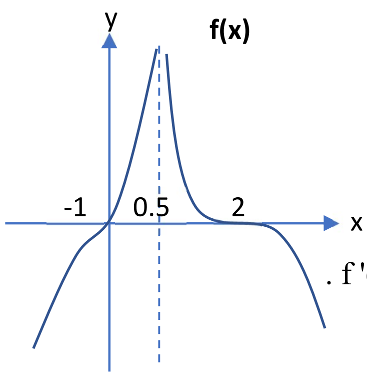
(על פי תוצאת הסעיף הקודם)

| x | $-0.5\pi$ | $< t <$ | -0.46 | $< t <$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| AB' | | + | 0 | - | |
| AB | | ↗ | max | ↘ | |



ה. גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- $x$ בתחום
$-0.75\pi < x < 0$ לכן $g'(x) = 0$ בנקודת ההשקה.
$g(x) = f(x) - \pi \Rightarrow g''(x) = f''(x) = 0 \Rightarrow x = -0.5\pi$
בתחום הנתון. מקבלים:
$g(-0.5\pi) = 0 \Rightarrow f(-0.5\pi) - \pi = 0 \Rightarrow f(-0.5\pi) = \pi$
$f(x)$ פונקציה אי-זוגית, לכן, $f(0) = 0$,
$f(0.5\pi) = -f(-0.5\pi) = -\pi$.
נקודות הפיתול של $f(x)$ הן: **$(-0.5\pi; \pi)$, $(0;0)$, $(0.5\pi; -\pi)$**

**7.** בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת וגזירה
בתחום $x < 0.5$ או $x > 0.5$. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות
פיתול המתקבלות בנקודות בהן $x = -1$ ו- $x = 2$.
גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- $x$.




א. 1) היעזר בציור ומצא לפונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$:
נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$, תחומי חיוביות ותחומי שליליות.
2) מצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- $x$ של הפונקציה $f'(x)$.
3) נתון: $f'(-1) > 0$. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$.
ב. נתון: הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x < 0.5$ או $x > 0.5$
ומקיימת: $f(x) = g'(x)$.
1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.
2) גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x = 2$ ואת ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y = 16$. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.
3) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ג. נתון: $g(x) = \dfrac{(x-2)^4}{1-2x}$.
1) הראה כי $g'(x) = \dfrac{-6x(x-2)^3}{(1-2x)^2}$. 2) חשב את $\int_2^4 f'(x)d(x)$.

<u>פתרון:</u>
א. 1)

| x | x < | -1 | < x < | 0.5 | < x < | 2 | < x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ∩ | פיתול | ∪ | | ∪ | פיתול | ∩ |
| $f''(x)$ | - | 0 | + | | + | 0 | - |

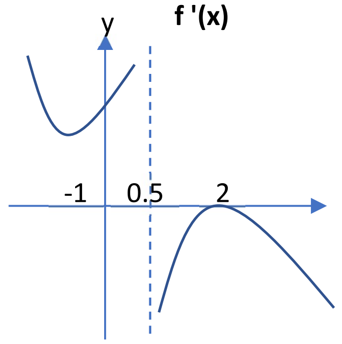
נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f''(x)$ עם ציר ה- $x$: **(-1;0), (2;0)**.
**תחומי החיוביות: $-1 < x < 0.5$, $0.5 < x < 2$**

**תחומי השליליות : $x < -1 \, , \, x > 2$.**

2) ציר ה- x משיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה שבה $x = 2$, לכן , $f'(2) = 0$. הנקודה (2;0) היא נקודת חיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה- x .

3) מקבלים:

| x | x < | -1 | < x < | 0.5 | < x < | 2 | < x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ''(x) | - | 0 | + | | + | 0 | - |
| f '(x) | ↘ | min | ↗ | | ↗ | max | ↘ |




ב. 1)

| x | < x < | 0.5 | < x < | 2 | < x |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) =g''(x) | + | | - | 0 | - |
| g(x) | ∪ | | ∩ | פיתול | ∩ |

**תחום הקעירות כלפי מעלה : $x < 0.5$ ; תחום הקעירות כלפי מטה: $x > 0.5$**

2)

| x | x < | 0 | < x < | 0.5 | < x < | 2 | < x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) = g'(x) | - | 0 | + | | + | 0 | - |
| g(x) | ↘ | min | ↗ | | ↗ | max | ↘ |

מקבלים: **(0;16) מינימום , (2;0) מקסימום**

3) הערך המינימלי של הפונקציה g(x) בתחום $x < 0.5$ הוא 16 , לכן, הפונקציה g(x) **חיובית בתחום $x < 0.5$** . הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום $x > 0.5$ הוא 0 , לכן הפונקציה g(x) **שלילית בתחומים $x > 2 \, , \, 0.5 < x < 2$ .**

ג. 1)
$$g(x) = \frac{(x-2)^4}{1-2x} \Rightarrow g'(x) = \frac{4(x-2)^3(1-2x)+2(x-2)^4}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{2(x-2)^3\left[2(1-2x)+(x-2)\right]}{(1-2x)^2} = \frac{2(x-2)^3\left[2-4x+x-2\right]}{(1-2x)^2} = \frac{2(x-2)^3(-3x)}{(1-2x)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-6x(x-2)^3}{(1-2x)^2}$$

2)
$$\int_2^4 f'(x)d(x) = \left[f(x)dx\right]_2^4 = \left[g'(x)dx\right]_2^4 = g'(4) - g'(2) =$$

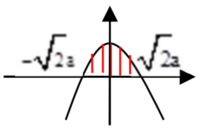
$$\frac{-24(4-2)^3}{(1-8)^2} + \frac{12\cdot 0}{(1-4)^2} = \mathbf{-3\frac{45}{49}}$$

**8.** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{2a^2-x^2}$ , a פרמטר חיובי.

א. הבע בעזרת a את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. הבע בעזרת a את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ .
ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מורידים אנך AB לציר x ואנך AC לציר y כך שנוצר מלבן ABOC (O ראשית הצירים).
סמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A.
1) מצא פונקציה $g(x)$ המתארת את שטח המלבן ABOC ובטא בעזרת a את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2) בטא בעזרת a את נקודת הקיצון , את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.
3) בטא בעזרת a את שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן ABOC מקסימלי.
4) מרחק הנקודה A מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$ . מצא את a .
5) מצא לפונקציית הנגזרת $g'(x)$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x , אם יש כאלה.
6) סרטט , באותה מערכת צירים , סקיצה של הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו- $g'(x)$.

**<u>פתרון:</u>**

א. תחום ההגדרה : $2a^2-x^2\ge 0\Rightarrow 2a^2-x^2=0\Rightarrow x^2=2a^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}a\Rightarrow$




תחום החיוביות של הפונקציה $y=-x^2+2a^2$ הוא:
$$-\sqrt{2}\mathbf{a}\le \mathbf{x}\le \sqrt{2}\mathbf{a}$$

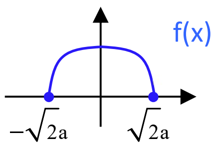
ב. $f(x)=\sqrt{2a^2-x^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{2a^2-x^2}}\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{2a^2-x^2}}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\sqrt{2}a$$

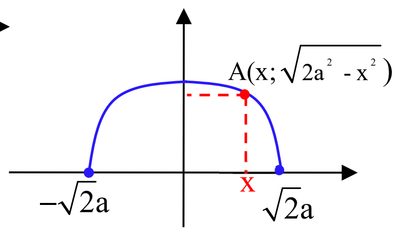
| x | $-\sqrt{2}a$ | $<x<$ | 0 | $<x<$ | $\sqrt{2}a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | min | ↗ | Max | ↘ | min |

מתקבלות הנקודות : **$(\sqrt{2}a;0)$ מינימום , $(0;\sqrt{2}a)$ מקסימום, $(-\sqrt{2}a;0)$ מינימום**

ג.




ד. 1) שטח המלבן שנוצר מתואר על ידי – הפונקציה : $\mathbf{g(x)=x\sqrt{2a^2-x^2}}$
בתחום $\mathbf{0<x<\sqrt{2}a}$




(2 $g(x)=x\sqrt{2a^2-x^2}\Rightarrow$

$$g'(x)=\sqrt{2a^2-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2a^2-x^2}}=\sqrt{2a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{2a^2-x^2}}=$$

$$=\frac{2a^2-x^2-x^2}{\sqrt{2a^2-x^2}}\Rightarrow g'(x)=\frac{2a^2-2x^2}{\sqrt{2a^2-x^2}}=0\Rightarrow 2a^2-2x^2=0\Rightarrow x^2=a^2$$

$x=\pm a$ . הפתרון בתחום $0<x<\sqrt{2}a$ : $x=a$ , $g(a)=a\sqrt{2a^2-a^2}=a\cdot a=a^2$

| x | 0 | $<x<$ | a | $<x<$ | $\sqrt{2}a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g '(x) | | + | 0 | - | |
| g(x) | | ↗ | Max | ↘ | |

מקבלים: $(a;a^2)$ **מקסימום , תחום עלייה: $0<x<a$ , תחום ירידה: $a<x<\sqrt{2}a$**

3) שיעורי הנקודה A שעל גרף הפונקציה f(x) : $A(a;\sqrt{2a^2-a^2})\Rightarrow \mathbf{A(a;a)}$

4) המרחק d של הנקודה A מראשית הצירים: $d=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$ .

$$\sqrt{2}a=\sqrt{18}\Rightarrow 2a^2=18\Rightarrow a^2=9\Rightarrow \mathbf{a=3}$$

5) עבור $a=3$ : $g(x)=x\sqrt{18-x^2}$ , $g'(x)=\dfrac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}$

נקודה ריקה $x\to 0\Rightarrow g'(x)\to\dfrac{18}{\sqrt{18}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\Rightarrow(0;3\sqrt{2})$

$$x\to\sqrt{2}a=3\sqrt{2}\Rightarrow g'(x)\to\frac{-18}{0}\to-\infty\Rightarrow$$

$\mathbf{x=3\sqrt{2}}$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

(6