

מבחן מס' 1

משך הבחינה: שלוש וחצי שעות

פרק ראשון – אלגברה והסתברות



1. אופיר יצא בשעה 8:00 מיישוב A ונסע במכוניתו

לעבר יישוב B. הוא עצר למשך שעה בתחנת

דלק הנמצאת בנקודה C במרחק של 120 ק"מ מיישוב A. אחר-כך, אופיר המשיך לנסוע לעבר הנקודה B במהירות גבוהה מן המהירות בה נסע עד תחנת הדלק.

שלי יצאה מיישוב A בשעה 8:30 ונסעה גם היא במכוניתה לעבר יישוב B במהירות קבועה לאורך כל הדרך. שלי הגיעה לנקודה C, 40 דקות אחרי אופיר. מהירות הנסיעה של שלי הייתה קטנה ב-10 קמ"ש מן המהירות בה החל אופיר את נסיעתו.

א. באיזו שעה עזב אופיר את תחנת הדלק?

ב. אופיר חלף על פני המכונית של שלי בנקודה D בשעה 11:40 והגיע לנקודה B בשעה 13:28.

(1) מצא את המהירות בה נסע אופיר אחר צאתו מתחנת הדלק.

(2) מצא את המרחק בין היישובים A ו-B.

2. הסדרה a_1, a_2, a_3, \dots היא סדרה חשבונית. נתון: סכום n האיברים הראשונים של הסדרה S_n מקיים לכל n טבעי, את הנוסחה $S_n = t \cdot n^2 + p \cdot n + k$.א. (1) בטא באמצעות t, p ו- k את a_1, a_2, a_3 ואת הפרש הסדרה.(2) מצא את k .ב. נתון גם: $a_1 = 16a_7$.

(1) האם ניתן לקבוע שהסדרה יורדת? נמק.

(2) הבע את האיבר הראשון של הסדרה באמצעות t .(3) הראה כי: $a_{13} + 4a_6 = 0$.

ג. נתון כי הסדרה היא סדרה עולה. האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה הוא 3.

בסדרה ישנם 17 איברים

(1) מצא את t ו- p .

(2) חשב את סכום 9 האיברים האחרונים בסדרה.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6. הפונקציה $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x-1)^2}$ היא הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות באותו תחום. הישר $y = -1$ הנו אסימפטוטה לגרף הפונקציה $f(x)$.

א. (1) מצא את הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות לגרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה, את תחומי והירידה ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) הוסף את אחד הסימנים $<$, $>$, $=$ במקום המסומן ונמק:

$$\int_2^4 f(x) dx \quad \text{_____} \quad \int_2^5 f(x) dx$$

ג. (1) מצא לפונקציה $f'(x)$ אסימפטוטות מאונכות לצירים.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

(4) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f'(x)$, גרף הפונקציה $|f'(x)|$,

הישר $x = 3$ והישר $x = 5$.

7. א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמק.

(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{\sin 2x}{2}$.

(1) עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) = g(x)$?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

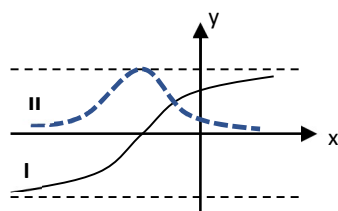
(2) מצא אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x .

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

(4) הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $g(x)$ את גרף הפונקציה $h(x)$.

(5) הפונקציה $k(x)$ מוגדרת בתחום בו מוגדרת הפונקציה $h(x)$ ומקיימת: $k(x) = |h(x)| + k$.

א.מ. ספרי מתמטיקה

מצא את ערכי k עבורם גרף הפונקציה $k(x)$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.8. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה לכל ערך של x .בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.הגרפים המתוארים בציור נחתכים בנקודה שבה $x = -2.318$.

א. התאם לכל אחד מן הגרפים I ו-II את הפונקציה המתאימה.

נמק קביעתך על סמך הסרטוט.

ב. נתון: $f(x) = \frac{ax + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + c}}$. וקבע נכון / לא נכון לגבי הטענות הבאות ונמק.(1) $a < 0$ (2) $c > 9$ (3) $f'(x) \leq a$ לכל ערך של x (4) $f''(x) > 0$ לכל ערך של x ג. הישר $y = x + 3$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x והנו המשיק

בעל השיפוע הגדול ביותר מבין המשיקים לגרף הפונקציה.

(1) מצא את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקציה.

(2) מצא את a ו- c .ד. הצב $a = 1$ ו- $c = 10$ וענה על הסעיפים הבאים:(1) מצא את האסימפטוטות לגרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.(2) מצא פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x - 3)$.(3) הראה שהפונקציה $g(x)$ אי-זוגית.(4) חשב את השטח המוגבל בין גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$ ו- $x = -1$.**בהצלחה!**

תשובות

1. א. בשעה 10:20 ב. 100 קמ"ש $\frac{1}{3}$ 433 ק"מ

2. א. 1 $k = 0$ 2 $d = 2t$, $a_3 = 5t + p$, $a_2 = 3t + p$, $a_1 = t + p + k$

ב. 1 לא 2 $a_1 = -12.8t$ ג. 1 $p = -34.5$, $t = 2.5$ 252

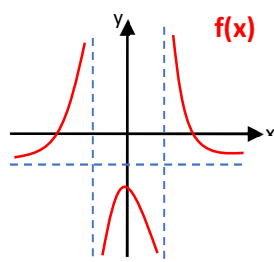
3. א. 0.4 ב. 1 0.8448 2 $\frac{104}{203} \approx 0.5123$ ג. $\frac{144}{295} = 0.488$

4. א. לא ב. $6.5a$ ג. $a = 2$ ד. 47.25π

5. ב. 1 $\frac{13}{12}$ 2 $\angle A = \angle B = 112.62^\circ$, $\angle C = \angle D = 67.38^\circ$ 3 0.626

6. א. 1 $f(x) = -\frac{4}{x+1} + \frac{4}{x-1} - 1$ 2 $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$ 3 $(-3;0)$, $(3;0)$, $(0;-9)$

4 תחומי העלייה: $-1 < x < 0$, $x < -1$; תחומי הירידה: $0 < x < 1$, $x > 1$



ב. 1

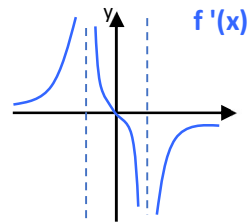
נקודות מקסימום $(0;-9)$

2 $\int_2^4 f(x) d(x) > \int_2^5 f(x) d(x)$

ג. 1 $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$

2 $(0;0)$

4 $\frac{4}{3}$

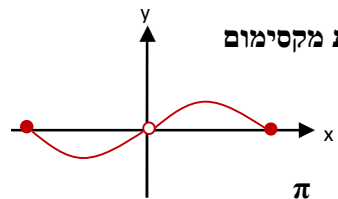


3

7. א. 1 $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 2 לא 3 $(-\frac{\pi}{2};0)$, $(\frac{\pi}{2};0)$

4 $(\frac{\pi}{2};0)$ נקודת מינימום, $(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2})$ נקודת מקסימום,

$(-\frac{\pi}{4};-\frac{1}{2})$ נקודת מינימום, $(\frac{\pi}{2};0)$ נקודת מקסימום

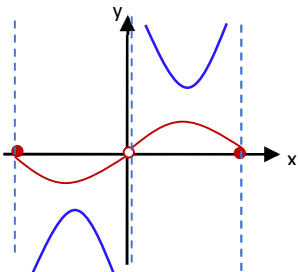


ב. 1 בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 2

ג. 1 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 2 $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

3 $(\frac{\pi}{4};2)$ נקודת מינימום, $(-\frac{\pi}{4};-2)$ נקודת מקסימום

5 $k = -1.5$ או $k = -2.5$



4

8. א. גרף I – מתאים לפונקציה $f(x)$, גרף II – מתאים לפונקציה $f'(x)$

ב. 1 לא נכון 2 נכון 3 נכון 4 לא נכון ג. 1 $(-3;0)$ 2 $a = 1$, $c = 10$

ד. 1 $y = -1$ ו- $y = 1$ 2 $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 4 $\sqrt{2}$

מבחן מס' 2

משך הבחינה: שלוש וחצי שעות

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. שני רוכבי קטנוע יצאו בשעה 9:00 מנקודה A ורכבו באותו כיוון במהירויות קבועות לאורך מסלול מעגלי. רוכב א' עובר בכל שעה 7 ק"מ יותר מרוכב ב'. כאשר רוכב א' עבר מרחק של 24 ק"מ מרגע יציאתו מנקודה A, היה המרחק בין שני הרוכבים 4 ק"מ.
- א. מצא את מהירות הנסיעה של כל אחד מרוכבי הקטנוע.
- ב. כמה סיבובים השלים רוכב ב' כאשר רוכב א' השלים 6 סיבובים?
- ג. שני הרוכבים נפגשו לראשונה כעבור 3 שעות. מצא את אורך המסלול המעגלי.
- ד. רוכב ב' עצר בדרך לחצי שעה והמשיך לרכב באותה מהירות בה רכב קודם. שני הרוכבים סיימו את הרכיבה באותו זמן בנקודה A. בסיום הרכיבה התברר שרוכב א' השלים שני סיבובים יותר מרוכב ב'.

(1) כמה ק"מ עבר כל אחד מן הרוכבים?

(2) באיזו שעה הסתיימה הרכיבה?

2. בסדרה הנדסית עולה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. סכום $n - 2$ האיברים הראשונים בסדרה

קטן פי 9 מסכום $n - 2$ האיברים האחרונים בסדרה.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. הסדרה b_n מוגדרת כך: $b_n = a_n + a_{n+1}$.

(1) הוכח: $b_n = 4a_n$.

(2) סכום 5 האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $53\frac{7}{9}$. מצא את a_1 .

ג. נתון: בסדרה a_n ישנם 16 איברים.

חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .

3. במרכול כלשהו מתבצע התשלום בקופה על-ידי שלוש קופאיות ושני רובוטים. בבדיקה שנערכה נמצאה טעות ב- 3% מן החשבוניות שבוצעו על-ידי קופאית וב- 2% מן החשבוניות שבוצעו על-ידי רובוט.

א. אדם כלשהו ערך קניות במרכול וניגש באופן מקרי לאחת הקופות. לאחר התשלום, הוא בדק את החשבונית ומצא שאין בה טעות. מה ההסתברות שהחשבונית נערכה על-ידי רובוט?

ב. שני קונים במרכול ניגשו לקופה בה עבד רובוט. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מצא טעות בחשבונית?

ג. בתור לקופה בה עבד רובוט עמדו k קונים.

הבע בעזרת k את ההסתברות שלפחות אחד מהם קיבל חשבונית שגויה.

ד. ביום מסוים הוחלט לבדוק את תקינות החשבוניות הנערכות על-ידי אחד הרובוטים. הוחלט שלאחר שיימצאו 3 חשבוניות שגויות, יוחלף הרובוט.

מה ההסתברות שהרובוט הוחלף לאחר שנבדקו 22 קונים שעברו באותה קופה?

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6. נתונה הנגזרת של הפונקציות $f(x)$: $f'(x) = -4\cos^2 x$.

- א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-0.75\pi \leq x \leq 0.75\pi$.
- ב. מצא את תחומי העלייה, תחומי הירידה, תחומי הקעריות כלפי מעלה ותחומי הקעריות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$, אם יש כאלה.
- ג. נתון: $f(x)$ פונקציה אי-זוגית, $f(-0.75\pi) = 3.8$. סרטט, באותה מערכת צירים, את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.
- ד. 1) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$ בתחום $-0.5\pi < x < 0$.
2) הישר $x = t$, $-0.5\pi < t < 0$, חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ בנקודות A ו-B בהתאמה. הסבר מדוע אורך הקטע AB הוא מקסימלי כאשר הישר $x = t$ עובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- ה. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $-0.75\pi \leq x \leq 0.75\pi$ ומקיימת: $g(x) = f(x) - \pi$.
גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x בתחום $-0.75\pi < x < 0$.
מצא את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-0.75\pi \leq x \leq 0.75\pi$.

7. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת וגזירה

בתחום $x < 0.5$ או $x > 0.5$. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות

פיתול המתקבלות בנקודות בהן $x = -1$ ו- $x = 2$.

גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

א. 1) היעזר בציור ומצא לפונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$:

נקודות החיתוך עם ציר ה- x , תחומי חיוביות ותחומי שליליות.

2) מצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- x של הפונקציה $f'(x)$.

3) נתון: $f'(-1) > 0$. סרטט סקיצה של פונקציית

הנגזרת הראשונה $f'(x)$.

ב. נתון: הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x < 0.5$ או $x > 0.5$

ומקיימת: $f(x) = g'(x)$.

1) מצא את תחומי הקעריות כלפי מעלה ואת תחומי הקעריות כלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

2) גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$ ואת ציר ה- y בנקודה שבה

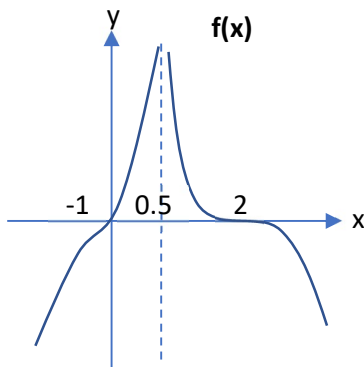
$y = 16$. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

3) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ג. נתון: $g(x) = \frac{(x-2)^4}{1-2x}$.

1) הראה כי $g'(x) = \frac{-6x(x-2)^3}{(1-2x)^2}$.

2) חשב את $\int_2^4 f'(x)dx$.



8. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2a^2 - x^2}$, a פרמטר חיובי.

- א. הבע בעזרת a את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הבע בעזרת a את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מורידים אנך AB לציר x ואנך AC לציר y כך שנוצר מלבן $ABOC$ (O ראשית הצירים).
סמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A .
- (1) מצא פונקציה $g(x)$ המתארת את שטח המלבן $ABOC$ ובטא בעזרת a את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) בטא בעזרת a את נקודת הקיצון, את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.
- (3) בטא בעזרת a את שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן $ABOC$ מקסימלי.
- (4) מרחק הנקודה A מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$. מצא את a .
- (5) מצא לפונקציית הנגזרת $g'(x)$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x , אם יש כאלה.
- (6) סרטט, באותה מערכת צירים, סקיצה של הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו- $g'(x)$.

בהצלחה !

תשובות

1. א. מהירות רוכב א' היא 42 קמ"ש, מהירות רוכב ב' היא 35 קמ"ש

ב. 5 סיבובים ג. 21 ק"מ

ד. (1 רוכב א' - 147 ק"מ, רוכב ב' - 105 ק"מ) 2 12:30

2. א. 3 ב. $a_1 = \frac{1}{9}$ ג. $797161 \frac{1}{3}$

3. א. $\frac{196}{487}$ ב. 0.0396 ג. $1 - (0.98)^k$ ד. 0.001144

4. א. 60° ב. $2R$

5. א. 120° ב. $AC = 4.18a$, $AB = 3.49a$, $BC = 3.816a$ (2 58.75°

ג. $S_{AAEMD} = 133.025$

6. א. $(-0.75\pi; -2)$ מינימום, $(-0.5\pi; 0)$ מקסימום, $(0; -4)$ מינימום, $(0.5\pi; 0)$ מקסימום,

$(0.75\pi; -2)$ מינימום ב. $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה,

תחומי הקעירות כלפי מעלה : $-0.75\pi < x < -0.5\pi$, $0 < x < 0.5\pi$

ג. תחומי הקעירות כלפי מטה : $-0.5\pi < x < 0$, $0.5\pi < x < 0.75\pi$

ד. (1 $(-0.46; -3.2)$ ה. $(-0.5\pi; \pi)$, $(0; 0)$, $(0.5\pi; -\pi)$

7. א. (1 נקודות החיתוך עם ציר ה- x : $(-1; 0)$, $(2; 0)$

תחומי החיוביות : $-1 < x < 0.5$, $0.5 < x < 2$

תחומי השליליות : $x < -1$, $x > 2$ (2 $(2; 0)$ (3

ב. (1 תחום הקעירות כלפי מעלה : $x < 0.5$

תחום הקעירות כלפי מטה : $x > 0.5$

(2 $(0; 16)$ מינימום, $(2; 0)$ מקסימום

(3 חיובית בתחום $x < 0.5$, שלילית בתחומים $0.5 < x < 2$, $x > 2$

ג. $-3 \frac{45}{49}$ (2

8. א. $-\sqrt{2}a \leq x \leq \sqrt{2}a$ ב. $(\sqrt{2}a; 0)$ מינימום,

ג. $(0; \sqrt{2}a)$ מקסימום, $(-\sqrt{2}a; 0)$ מינימום

ד. (1 $0 < x < \sqrt{2}a$, $g(x) = x\sqrt{2a^2 - x^2}$

(2 $(a; a^2)$ מקסימום, תחום עלייה : $0 < x < a$,

תחום ירידה : $a < x < \sqrt{2}a$

(3 $A(a; a)$ (4 $a = 3$ (5 $x = 3\sqrt{2}$ (6

