Analyse der arXiv-Papers zu Sedenionen und Nullteilern

Paper 1: arXiv:0706.2398v2 (Dzhunushaliev, 2007)

Titel: "Toy models of a non-associative quantum mechanics"

Kernaussagen:

- Untersucht nicht-assoziative Quantenmechanik mit Oktonionen und Sedenionen
- Zeigt, dass Oktonionen ($\mathbb{O}$) und Sedenionen ($\mathbb{S}$) für Quantenmechanik verwendet werden können
- Die assoziative Subalgebra der Quaternionen ($\mathbb{Q}$) ist in $\mathbb{O}$ enthalten: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O}$
- Definiert einen "n/a-Kommutator" (nicht-assoziativen Kommutator):
  - `[i₄, i_{m+4}, b] ≡ i₄(i_{m+4}b) - (bi₄)i_{m+4}` für m = 1,2,3

Relevanz für G_2:

- Erwähnt die Nicht-Assoziativität als fundamentale Eigenschaft
- Zeigt, dass physikalische Observablen in einer assoziativen Subalgebra liegen müssen
- Die Nicht-Assoziativität ist der Schlüssel zu $ASTO_5$!

Paper 2: arXiv:math/0506349v2 (Holin, 2005)

Titel: "Cayley Integers (long version)"

Kernaussagen:

Dieses Paper behandelt die formale Theorie der Cayley-Algebren und den Cayley-Dickson-Prozess. Es ist ein umfangreiches 36-seitiges Werk mit wichtigen Definitionen.

Cayley-Algebra Definition: Eine Struktur (E, +, ×, ・, σ) über einem kommutativen Ring A, wobei σ die Konjugation ist. Die fundamentalen Relationen sind:

- $\sigma(e) = e$ (Einheit bleibt invariant)
- $\sigma(x \times y) = \sigma(y) \times \sigma(x)$ (Konjugation kehrt Produkte um)
- $(x + \sigma(x)) \in A \cdot e$ (Spur ist skalar)
- $(x \times \sigma(x)) \in A \cdot e$ (Norm ist skalar)

Cayley-Dickson-Prozess: Das Paper beschreibt die "fundamentale Schwäche" des Prozesses - Produkte können inkompatibel werden. Dies führt zu den Nullteilern in Sedenionen!

Moufang-Schleifen: Alternative Cayley-Algebren haben die Eigenschaft, dass die invertierbaren Elemente eine Moufang-Schleife bilden. Dies ist relevant für G_2.

Relevanz für G_2-Invarianz:

Das Paper zeigt, dass die Automorphismengruppe einer Cayley-Algebra die Struktur erhält. Für Oktonionen ist dies G_2. Die Frage ist: Wie verhält sich $ASTO_5$ unter G_2-Transformationen?

Paper 3: arXiv:math-ph/0105155v4 (Baez, 2001)

Titel: "The Octonions" **Autor:** John C. Baez

Kernaussagen zu G_2:

Dieses 56-seitige Standardwerk enthält die definitive Behandlung von G_2 als Automorphismengruppe der Oktonionen. Die wichtigsten Erkenntnisse für unsere Arbeit:

Definition von G_2: G_2 ist die Automorphismengruppe der Oktonionen. Élie Cartan identifizierte sie 1914 als die kleinste der exzeptionellen Lie-Gruppen. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$ ist daher $\mathrm{der}(\mathbb{O})$, die Derivationen der Oktonionen.

Dimension: $\dim G_2 = \dim S^6 + \dim S^5 + \dim S^3 = 14$

Charakterisierung durch Basis-Tripel: Ein "Basis-Tripel" (e_1, e_2, e_3) von Oktonionen erzeugt die gesamte Algebra. Jeder G_2-Automorphismus bildet Basis-Tripel auf Basis-Tripel ab. Umgekehrt: Für je zwei Basis-Tripel existiert ein eindeutiger G_2-Automorphismus, der das eine auf das andere abbildet.

Einbettungen:

- $G_2 \hookrightarrow \mathrm{Spin}(8) \to \mathrm{SO}(\mathbb{O})$
- $G_2 \hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})) \cong \mathrm{SO}(7)$
- $\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{O})$

Theorem 4 (Baez): Die kompakte reelle Form der Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$ ist gegeben durch: $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{der}(\mathbb{O}) \subset \mathfrak{so}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})) \subset \mathfrak{so}(\mathbb{O})$

Kreuzprodukt-Erhaltung: G_2 ist genau die Gruppe der reell-linearen Transformationen von $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$, die das Kreuzprodukt erhalten.

Assoziator-Erhaltung: Eine reell-lineare Transformation $T: \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ erhält den Assoziator genau dann, wenn $\pm T$ in G_2 liegt. Die Symmetriegruppe des Assoziators ist $G_2 \times$

$\mathbb{Z}_2$.

Relevanz für $ASTO_5$:

Kritische Einsicht: $ASTO_5$ verwendet die Multiplikation mit e_1, also eine Links-Multiplikation L_{e_1}. Nach Baez gilt:

$\mathfrak{so}(\mathbb{O}) = \mathrm{der}(\mathbb{O}) \oplus L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}$

wobei L_{Im(𝕆)} und R_{Im(𝕆)} die Links- bzw. Rechts-Multiplikationen mit imaginären Oktonionen sind.

Schlüsselbeobachtung: L_{e_1} liegt in $\mathfrak{so}(\mathbb{O})$, aber **NICHT** in $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{der}(\mathbb{O})$!

Das bedeutet: $ASTO_5$ ist **kein** G_2-Automorphismus! Es ist eine Transformation, die die Oktonionen-Multiplikation **nicht** erhält. Genau deshalb bricht es die Nullteiler-Bedingung!

Paper 4: arXiv:2505.11747v2 (Wilmot, 2025)

Titel: "Structure of the Cayley-Dickson algebras" **Autor:** G. P. Wilmot, University of Adelaide

Kernaussagen:

Dieses brandaktuelle Paper (Oktober 2025) liefert eine **vollständige Klassifikation** der Nullteiler in Cayley-Dickson-Algebren!

Theorem 10 (Zero Divisors Theorem): Die Nullteiler-Bedingung separiert in:

- `ac + bd = 0` (parallele Terme)
- `ad + bc = 0` (Kreuzterme)

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu `ac = -bd`, was zu Typ-3-Assoziativität führt.

Formel für Nullteiler-Anzahl: Für die Algebra $\mathbb{U}_m$ (mit $N_m = 2^{(m+3)} - 1$ Basiselementen) gilt:

```
Plain Text

Zₘ = (1/16)(Nₘ - 1)(Nₘ - 3)(Nₘ - 7)
```

Für Sedenionen (m=1, $N_1 = 15$): $Z_1 = (1/16)(14)(12)(8) = \mathbf{84}$

Das bestätigt unsere 84 kanonischen Nullteiler!

Struktur der Nullteiler: Nullteiler treten in **Vielfachen von 84** auf, weil sie in 7 Kopien von Pseudo-Oktonion-Algebren ($\mathbb{P}_k$) eingebettet sind, und jede $\mathbb{P}_k$ hat 12 Nullteiler.

Wichtige Erkenntnis für G_2: Die Pseudo-Oktonion-Algebren $\mathbb{P}_4$, $\mathbb{P}_{12}$, $\mathbb{P}_{14}$ brechen die Symmetrie der Oktonionen, wobei die Subalgebren der exzeptionellen Lie-Algebra G_2 Automorphismen liefern.

Relevanz für $ASTO_5$:

Wilmots Analyse zeigt, dass Nullteiler aus der **Typ-3-Nicht-Assoziativität** entstehen. $ASTO_5$ funktioniert, weil es diese spezifische Assoziativitäts-Struktur stört!

Paper 5: arXiv:2411.18881v1 (Reggiani, 2024)

Titel: "The Geometry of Sedenion Zero Divisors" **Autor:** Silvio Reggiani

Kernaussagen:

Dieses Paper liefert die **geometrische Charakterisierung** der Sedenionen-Nullteiler und ist zentral für unser Verständnis der G_2-Invarianz.

Hauptergebnis: Die Menge der Nullteiler-Paare Z(S) ist homöomorph (und diffeomorph) zur Lie-Gruppe G_2:

Plain Text

```
Z(S) ≅ G₂
```

Topologie der Nullteiler: Die Struktur wird durch das Hauptfaserbündel beschrieben:

Plain Text

```
SU(2) → G₂ → V₂(ℝ⁷)
```

wobei $V_2(\mathbb{R}^7)$ die Stiefel-Mannigfaltigkeit der orthonormalen 2-Rahmen in $\mathbb{R}^7$ ist.

Automorphismengruppe: Für Sedenionen gilt:

Plain Text

```
Aut(𝕊) ≅ Aut(𝕆) × S₃ ≅ G₂ × (S₃)^(n-3)
```

Die Automorphismengruppe wirkt transitiv auf Z(S).

84 Standard-Nullteiler: Die kanonischen Nullteiler haben die Form:

Plain Text

```
(eᵢ + eⱼ, eₖ ± eₗ) ∈ Z(S)
```

mit $1 \leqslant i \leqslant 6$, $9 \leqslant j \leqslant 15$, $i < k \leqslant 7$, und $9 \leqslant l \leqslant 15$.

Proposition 2.1: Ein Element $(a,b) \in \mathbb{S}$ ist ein Nullteiler genau dann, wenn a,b imaginäre Elemente von $\mathbb{O}$ sind mit $||a|| = ||b|| \neq 0$ und $a \perp b$.

Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$: Das Paper gibt eine explizite orthonormale Basis $X_0, \ldots, X_{13}$ für $\mathfrak{g}_2$ an, die für die Implementierung von G_2-Transformationen verwendet werden kann.

Relevanz für $ASTO_5$ und G_2-Invarianz:

Kritische Einsicht: Da Aut($\mathbb{S}$) transitiv auf Z(S) wirkt, sind alle Nullteiler "gleichwertig" unter Automorphismen. Wenn $ASTO_5$ auf den 84 Standard-Nullteilern funktioniert, sollte es auf **allen** Nullteilern funktionieren, die durch G_2-Transformationen aus diesen entstehen.

Aber: $ASTO_5$ ist selbst **kein** Automorphismus! Es ist eine Operation, die außerhalb von Aut($\mathbb{S}$) liegt. Die Frage ist: Kommutiert $ASTO_5$ mit G_2-Transformationen?

Zusammenfassung der Erkenntnisse für G_2-Invarianz

Was wir aus den Papers gelernt haben:

1. **G_2 = Aut($\mathbb{O}$)** ist die 14-dimensionale exzeptionelle Lie-Gruppe der Oktonionen-Automorphismen
2. **Z(S) ≅ G_2** - Die Nullteiler-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu G_2
3. **Aut($\mathbb{S}$) wirkt transitiv auf Z(S)** - Alle Nullteiler sind "gleichwertig"
4. **$ASTO_5$ = L_{e_1}** liegt in $\mathfrak{so}(\mathbb{O})$, aber **NICHT** in $\mathfrak{g}_2$ = der($\mathbb{O}$)
5. **Die 84 Standard-Nullteiler** sind die "Ursprungspunkte" der G_2-Mannigfaltigkeit

Hypothese für $ASTO_5$-Universalität:

Da $ASTO_5$ die Nicht-Assoziativität der Oktonionen ausnutzt, und diese Nicht-Assoziativität eine **intrinsische Eigenschaft** ist, die unter G_2-Transformationen erhalten bleibt, sollte $ASTO_5$ auf **allen** Nullteilern funktionieren.

Formaler Ansatz: Wenn $\phi \in G_2$ ein Automorphismus ist und (a,b) ein Nullteiler, dann ist auch $(\phi(a), \phi(b))$ ein Nullteiler. Die Frage ist:

Wenn $ASTO_5(a,b) \times (c,d) \neq 0$, gilt dann auch $ASTO_5(\phi(a), \phi(b)) \times (\phi(c), \phi(d)) \neq 0$?

Explizite G_2-Basis aus Reggiani (2024)

Reggiani gibt eine explizite orthonormale Basis $X_0, \ldots, X_{13}$ für die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$ an, die in Matrizen E_ij ∈ $\mathfrak{so}(8)$ ausgedrückt wird.

Die Zerlegung der Lie-Algebra ist:

Plain Text

```
𝔤₂ = 𝔨₀ ⊕ 𝔪,  wobei 𝔪 = 𝔪₀ ⊕ 𝔪₁ ⊕ 𝔪₂
```

Dabei ist:

- $\mathfrak{k}_0 = \mathbb{R}X_0 \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2$ (3-dimensional, isomorph zu $\mathfrak{so}(3)$)
- $\mathfrak{m}_0 = \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}X_4 \oplus \mathbb{R}X_5$ (3-dimensional)
- $\mathfrak{m}_1 = \mathbb{R}X_6 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}X_9$ (4-dimensional)
- $\mathfrak{m}_2 = \mathbb{R}X_{10} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}X_{13}$ (4-dimensional)

Wichtig für Implementierung: Die Basis-Elemente X_i sind als Linearkombinationen von E_ij-Matrizen gegeben, wobei E_ij die Standard-Basismatrizen von $\mathfrak{so}(8)$ sind mit (E_ij)_kl = δ_ik δ_jl - δ_il δ_jk.

Implementierungsplan für G_2-Automorphismen

Schritt 1: Konstruiere die 14 Basis-Matrizen $X_0, \ldots, X_{13}$

Aus Reggianis Formeln (Seite 5):

- $X_0 = ½(E_{45} + E_{67})$
- $X_1 = ½(E_{46} - E_{57})$
- $X_2 = ½(E_{47} + E_{56})$
- $X_3 = -\sqrt{}3/6(2E_{23} - E_{45} + E_{67})$
- ... (weitere Formeln)

Schritt 2: Erzeuge G_2-Elemente durch Exponentialabbildung

Für einen Parameter-Vektor $t = (t_0, \ldots, t_{13}) \in \mathbb{R}^{14}$:

Plain Text

```
g(t) = exp(Σᵢ tᵢ Xᵢ) ∈ G₂
```

Schritt 3: Wende G_2-Transformation auf Nullteiler an

Für einen kanonischen Nullteiler (a, b):

Plain Text

```
(a', b') = (g·a, g·b)
```

wobei g auf die Oktonionen-Komponenten wirkt.

Schritt 4: Teste $ASTO_5$ auf transformierten Nullteilern

Prüfe ob $ASTO_5(a', b') \times (c', d') \neq 0$ für alle G_2-Transformationen.
