Calculo Vectorial Taller #1 Corte 3 Andrés Felipe Bernal Ureña 9003748

① Calcular la integral

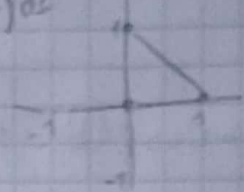
$\int_C (x+y)\,ds$ donde σ es el borde del triangulo con vertices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$

Parametrice las rectas

$\int_C (x+y)\,ds = \int_{C_1} (x+y)\,ds + \int_{C_2} (x+y)\,ds + \int_{C_3} (x+y)\,ds$

$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 \sqrt{2}\,dt + \int_0^1 (1-t)\,dt$

$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + (\sqrt{2} - 0) - \left(1 - \frac{1}{2} - 1\right) = \boxed{\sqrt{2}}$



$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$

$C_2: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$

$C_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1-t \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$

$\sigma_1'(t) = (t,0)' = (1,0) = 1$

$\sigma_2'(t) = (1-t,1)' = (-1,1) = \sqrt{2}$

$\sigma_3'(t) = (0,1-t)' = (0,-1) = 1$

② Hallar las coordenadas del centro de gravedad del contorno del triangulo esferico $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Parametrice las rectas

$\int_0^{\pi/2} a\,dt + \int_0^{\pi/2} a\,dt + \int_0^{\pi/2} a\,dt = 3\left(\frac{a\pi}{2}\right)$

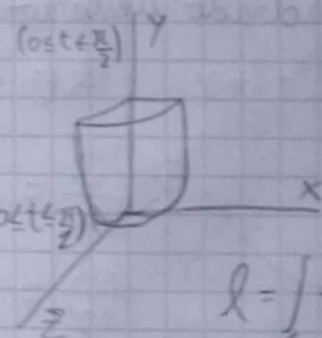
$\int_C x\,ds = \int_{C_1} x\,ds + \int_{C_2} x\,ds + \int_{C_3} x\,ds$

$\int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot a \cdot dt + \int_0^{\pi/2} a\cos t\, a\,dt = 2a^2$

$C_1: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\text{sen}\,t \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

$C_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = a\cos t \\ z = a\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

$C_3: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = 0 \\ z = \text{sen}\,t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$



$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$

$\bar{x} = \frac{1}{l}\int_C x\,ds$

$l = \int_C 1\,ds$

$\boxed{\frac{4a}{3\pi}}$

$\left(\frac{1}{\frac{3a\pi}{2}}\right) 2a^2 = \frac{2}{3a\pi}(2a^2) = \boxed{\frac{4a}{3\pi}}$

③ Hallar la integral de línea $\int_\sigma y\,dx + z\,dy + x\,dz$ donde σ es la curva $x = \cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = bt \; (0 \le t \le 2\pi)$

$dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt$

$dy = a\cos t\,dt$

$dz = b\,dt$

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^2\text{sen}^2 t + ab\,t\cos t + ab\cos t)\,dt$$

$$= \frac{-a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt + ab\left[t\,\text{sen}\,t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen}\,t\,dt \right]$$

$$= \frac{-a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a^2\pi$$

④ Sea $F(x,y,z) = (z^3 + 3xy,\ x^2,\ 3x^2z^2)$. Probar que $\int_\sigma \vec{F} = 0$ si σ es el perímetro de cualquier cuadrado unitario (es decir, con un vértice en el origen y lado 1).

$P(x,y,z) = z^3 + 2xy \qquad Q(x,y,z) = x^2 \qquad R(x,y,z) = 3xz^2$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = 3z^2 = \frac{\partial P}{\partial z}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = 6xz$

Indica que $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ y el campo vectorial $\bar{F}$ es conservativo

$\int_\sigma \vec{F}$ es independiente de la trayectoria

① Hallar el Trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y) = (3y^2 + 2,\ 16x)$ al mover una partícula desde $(-1,0)$ hasta $(1,0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. ¿Qué elipse hace mínimo el trabajo?

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_C (3y^2 + 2)\,dx + 16x\,dy$$

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$C_1: \begin{cases} x = \cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

$$W = \int_\pi^0 -(3b^2\,\mathrm{sen}^2 t + 2)\,\mathrm{sen}\,t\,dt + \int_\pi^0 16\cos t\, b\cos t\,dt$$

$$= 3b^2\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_\pi^0 + 2\cos t\Big|_\pi^0 + \frac{16b}{2}\left(t + \frac{\mathrm{sen}\,2t}{2}\right)\Big|_\pi^0$$

$$W = 4b^2 - 8\pi b + 4$$

$$W' = 8b - 8\pi = 0$$
$$\downarrow$$
$$\pi$$

$\boxed{b = \pi \text{ hace mínimo el trabajo}}$