Campos Electromagneticos

Teorema de Stokes

De la ley circuital de Ampère se deriva una de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

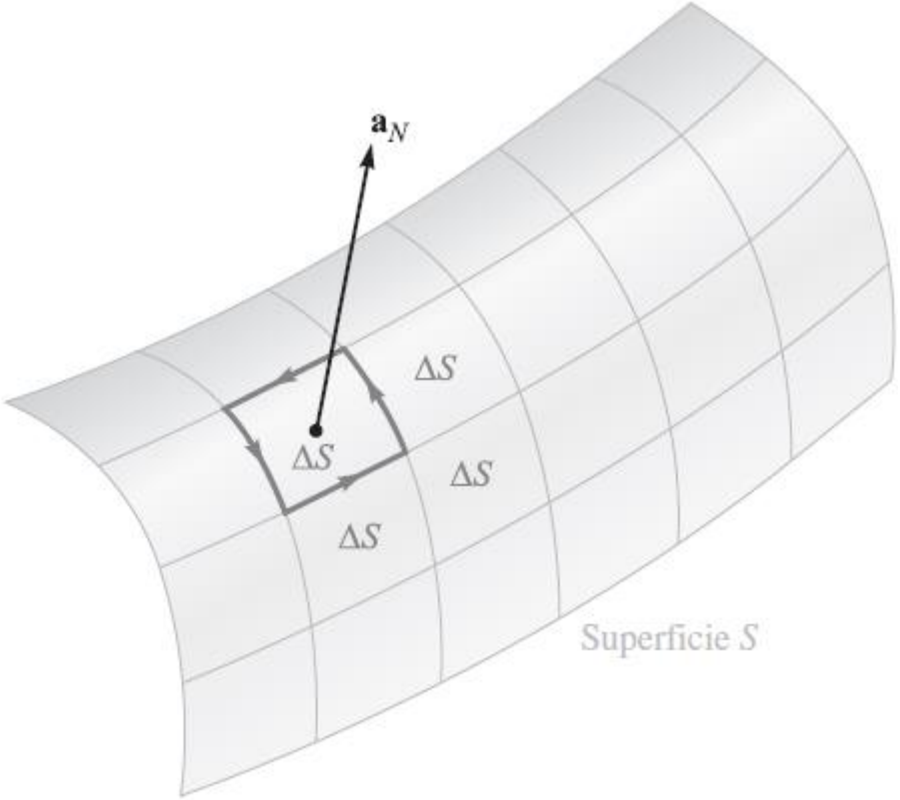
La presente sección se dedicará de nuevo en gran parte al teorema matemático conocido como teorema de Stokes, y en el proceso se mostrará que la ley circuital de Ampère se puede obtener de

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

En otras palabras, se estará preparado para obtener la forma integral a partir de la forma puntual, o de la forma puntual a partir de la forma integral.

Considérese la superficie S de la figura 1 que está dividida en pequeños incrementos de superficie de área ΔS. Si se aplica la definición de rotacional a uno de esos incrementos de superficie, entonces

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H})_N$$



*donde el subíndice **N** indica de nuevo la dirección normal a la superficie, con la regla de la mano derecha.*

El subíndice sobre $\mathbf{dL}_{\Delta S}$ indica que la trayectoria cerrada es el perímetro de un incremento de área ΔS. Este resultado también puede escribirse

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta \mathbf{S}$$

$$\boxed{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \equiv \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}}$$

La ecuación es una identidad válida para cualquier campo vectorial y se conoce como teorema de Stokes.

Un ejemplo numérico ayuda a ilustrar la geometría involucrada en el teorema de Stokes. Considérese la porción de esfera mostrada en la figura 2.

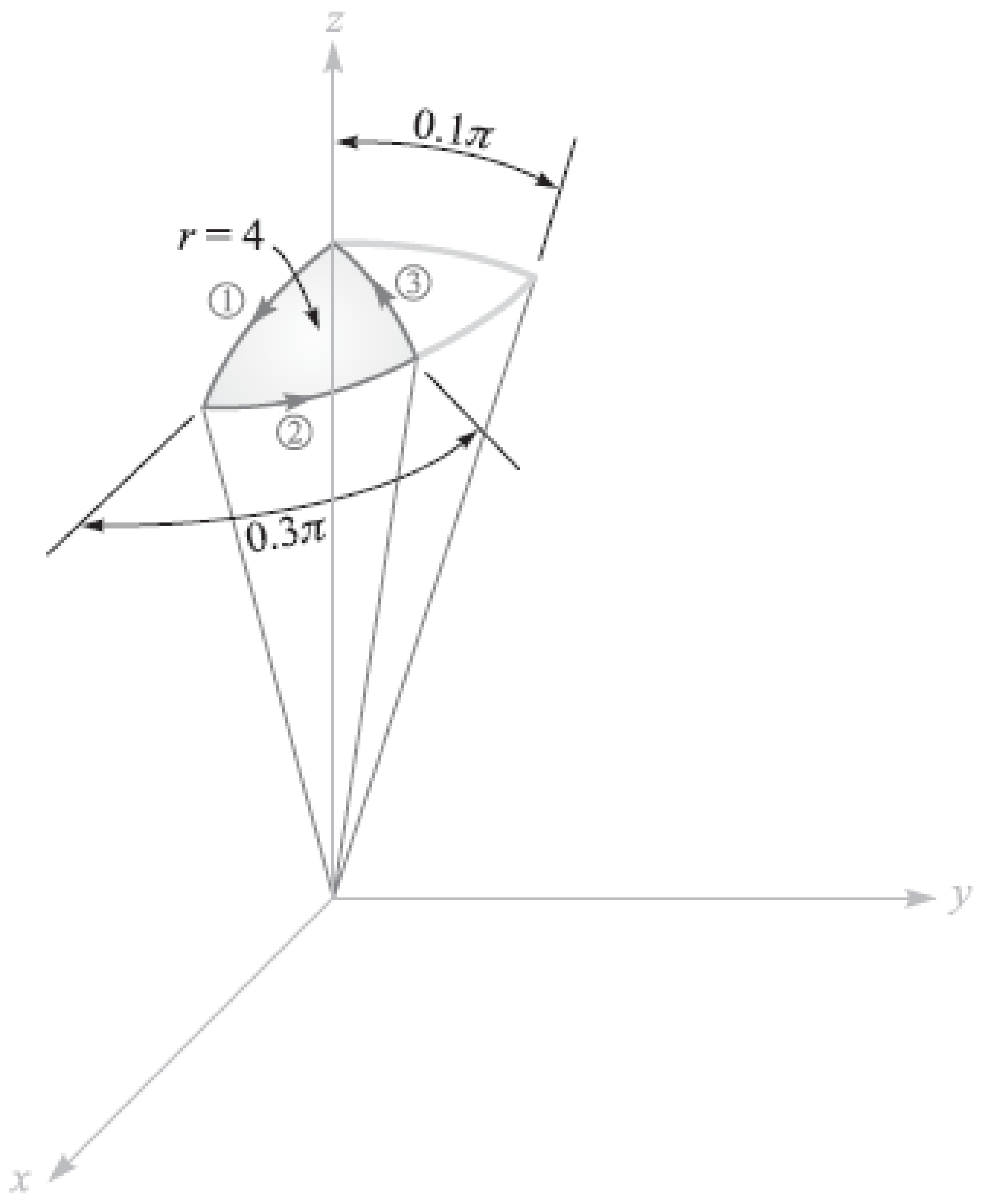
La superficie está especificada por

$r = 4$, $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$, $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$, y la trayectoria cerrada que forma su perímetro está compuesta de tres arcos circulares.

Dado el campo:

$$\mathbf{H} = 6r\,sen(\phi)\overline{a}_r + 18r\,sen(\theta)\cos(\phi)\overline{a}_\phi$$

Evaluar cada lado de la identidad del teorema de Stokes.



Solución.

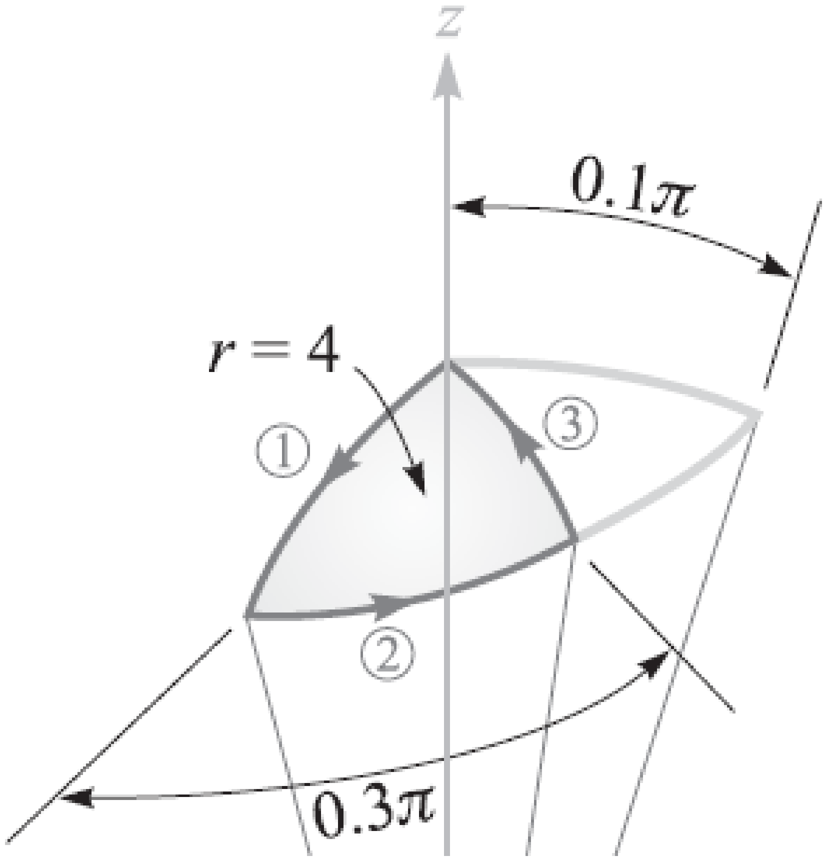
El primer segmento de trayectoria se describe en coordenadas esféricas por

$r = 4, 0 \leq \theta \leq 0.1\pi, \phi = 0;$

el segundo por: $r = 4, \theta = 0.1\pi, \; 0 \leq \phi \leq 0.3\pi;$

y el tercero por: $r = 4, \; 0 \leq \theta \leq 0.1\pi, \; \phi = 0.3\pi.$

El elemento diferencial de trayectoria dL *es la suma vectorial de las tres diferenciales de longitud del sistema de coordenadas esféricas tratadas.*



$$dL = dr$$

$$dL = dr\,\overline{a}_r + r\,d\,\theta\,\overline{a}_\theta + r\,sen\,\theta\,d\,\phi\,\overline{a}_\phi$$

$$H = 6r\,sen(\phi)\overline{a}_r + 18sen(\theta)cos(\phi)\overline{a}_\phi$$

$$dL = dr\overline{a}_r + r\,d\,\theta\overline{a}_\theta + r\,sen\,\theta\,d\,\phi\,\overline{a}_\phi$$

El primer término es cero sobre cada uno de los tres segmentos de la trayectoria, dado que r = 4 y dr = 0,

el segundo es cero sobre el segmento 2, dado que θ es constante,

y el tercer término es cero sobre los segmentos 1 y 3. Así

$$\oint H \cdot dL = \int H_r r d\theta + \int H_\phi r sen\theta d\phi + \int H_\theta r d\theta$$

$$H = 6rsen(\phi)\overline{a}_r + 18rsen(\theta)cos(\phi)\overline{a}_\phi$$

$$dL = dr\overline{a}_r + r\,d\,\theta\overline{a}_\theta + r\,sen\,\theta\,d\,\phi\,\overline{a}_\phi$$

Dado que $H_\theta = 0$*, únicamente se tiene que evaluar la segunda integral,*

$$\oint H \cdot dL = \int H_\phi rsen\theta d\phi = \int_0^{0.3\pi} [18 \cdot 4sen0.1\pi cos\phi] 4sen0.1\pi d\phi$$

$$= 288sen^2 0.1sen0.3\pi = 22.2\ A$$

El paso a seguir es evaluar el rotacional del operador ∇ sobre

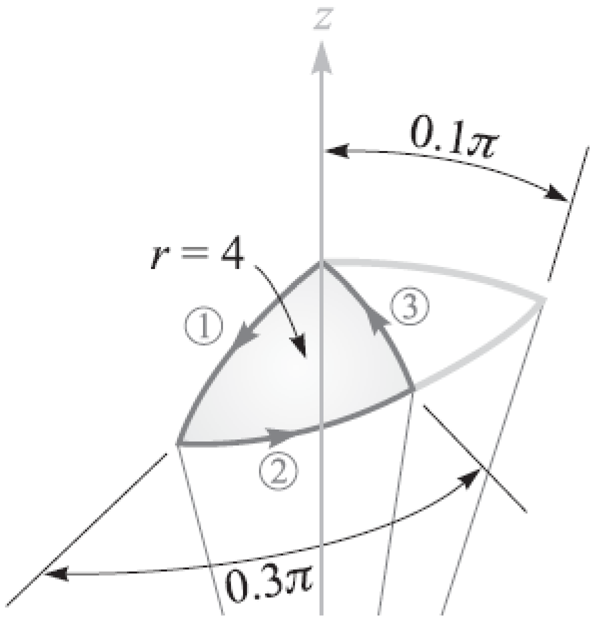
$\boldsymbol{H = 6r\,sen(\phi)\overline{a}_r + 18r\,sen(\theta)cos(\phi)\overline{a}_\phi}$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}(36r \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\phi)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} 6r \cos\phi - 36r \operatorname{sen}\theta \cos\phi\right)\mathbf{a}_\theta$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}(36r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\cos\phi)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}6r\cos\phi - 36r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\right)\mathbf{a}_\theta$$

$$dL = dr\,\overline{a}_r + r\,d\,\theta\,\overline{a}_\theta + r\,sen\,\theta\,d\,\phi\,\overline{a}_\phi$$

Dado que $dS = r^2 sen\theta d\theta d\phi \overline{a}_r$ la integral es



$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{0.3\pi}\int_0^{0.1\pi}(36\cos\theta\cos\phi)16\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^{0.3\pi} 576\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{sen}^2\,\theta\right)\Big|_0^{0.1\pi}\cos\phi\,d\phi$$

$$= 288\,\mathrm{sen}^2\,0.1\pi\,\mathrm{sen}\,0.3\pi = 22.2\ \mathrm{A}$$

Ahora se verá lo fácil que es obtener la ley circuital de Ampère a partir de

$$\nabla \times H = J$$

Sencillamente se tiene que hacer el producto punto de cada lado con dS, integrar cada lado sobre la misma superficie S (abierta), y aplicar el teorema de Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

La integral de la densidad de corriente sobre la superficie S es la corriente total I que pasa a través de la superficie, y por lo tanto

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

Esta breve derivación muestra claramente que la corriente I, descrita como "encerrada por la trayectoria cerrada", también es la corriente que pasa a través de un número infinito de superficies que tienen la trayectoria cerrada como perímetro.
El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie con una integral de línea cerrada.

Debe recordarse que el teorema de la divergencia relaciona una integral de volumen con una integral cerrada de superficie. Ambos teoremas encuentran su mayor utilidad en demostraciones vectoriales generales. Como un ejemplo, se encontrará otra expresión para $\nabla \cdot \nabla \times A$,
donde A representa cualquier campo vectorial.

El resultado debe ser un escalar (¿por qué?), y sea T este escalar, o

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

Al multiplicar por dv e integrar sobre cualquier volumen v,

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A})\, dv = \int_{\text{vol}} T\, dv$$

se aplica primero el teorema de la divergencia al lado izquierdo; se obtiene

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} T\, dv$$

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

El lado izquierdo es la integral de superficie del rotacional de A sobre la superficie cerrada que rodea el volumen v.

El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie del rotacional de A sobre la superficie abierta encerrada por una trayectoria cerrada.

Si se considera la trayectoria como una bolsa abierta y la superficie abierta como su superficie, se observa que conforme se aproxima gradualmente a la superficie cerrada, jalando las agujetas, la trayectoria cerrada se hace más y más pequeña, y finalmente desaparece a la vez que la superficie se hace cerrada.

De aquí que la aplicación del teorema de Stokes a una superficie cerrada produzca un resultado igual a cero, y se tiene

$$\int_{\mathrm{vol}} T\, dv = 0$$

Dado que esto es verdad para cualquier volumen, es cierto para la diferencial de volumen dv,

$$T\,dv = 0$$

y por lo tanto

$$T = 0$$

o

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0}$$

La ecuación es una identidad útil del cálculo vectorial.

Por supuesto, también pueden comprobarse fácilmente mediante un desarrollo directo en coordenadas cartesianas.

Se aplicará la identidad al campo magnético, no variable en el tiempo, para el cual

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Por lo tanto

$$\nabla \cdot J = 0$$

que es el resultado obtenido definido como la ecuación de continuidad.