Campos Electromagneticos

Ejemplos de la solución de la ecuación de Poisson

Con el propósito de seleccionar un problema razonablemente simple que ilustre la aplicación de la ecuación de Poisson, será necesario suponer que la densidad de carga volumétrica está especificada.

Sin embargo, éste no es comúnmente el caso; de hecho, a menudo ésta es la cantidad acerca de la cual se está buscando información.

El tipo de problema más real, que podría encontrarse, comenzaría con sólo el conocimiento de los valores de frontera de potencial, de la intensidad del campo eléctrico y de la densidad de corriente.

Por ejemplo una distribución de carga volumétrica usual para un semiconductor tipo "pn" puede aproximarse mediante muchas expresiones diferentes.

Una de las más sencillas es

$$\rho_v = 2\rho_{v0} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

la cual para este ejemplo tiene una densidad de carga máxima $\rho_{v,max} = \rho_{v0}$ *localizada en* $x = 0.881a$*. Se puede ver que la densidad de carga máxima* ρ_{v0} *se relaciona con las concentraciones* N_a *y* N_d *de aceptores y donadores, notando que todos los iones donadores y aceptores en esta región (capa de agotamiento) han sido despojados de un electrón o de un hueco y, por lo tanto,*

$$\rho_{v0} = eN_a = eN_d$$

Al proponer la ecuación de Poisson,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{2\rho_{v0}}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}$$

para este problema en una dimensión en la cual las variaciones con respecto a y y z no están presentes. Si se integra una vez,

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a} - C_1$$

Para evaluar la constante de integración C_1, nótese que no pueden existir densidad neta de carga ni campos lejos de la unión.

Entonces, a medida que $x \to \pm\infty$, E_x debe aproximarse a cero. Por lo tanto se concluye que $C_1 = 0$

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a}$$

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a}$$

Al integrar nuevamente

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\tan^{-1} e^{x/a} + C_2$$

Si se selecciona arbitrariamente el cero de referencia del potencial en el centro de la unión, x = 0,

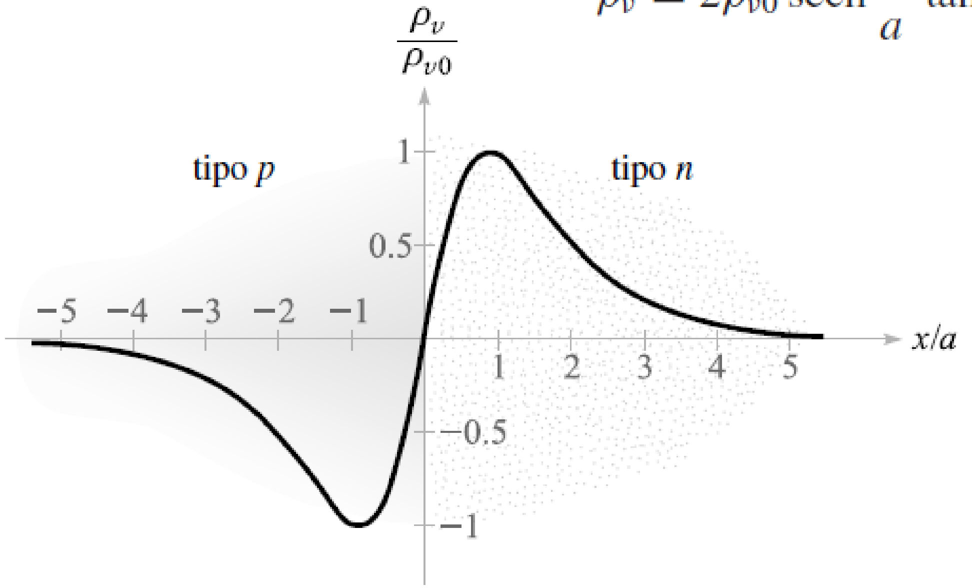
$$0 = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\frac{\pi}{4} + C_2$$

y, por último,

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\left(\tan^{-1} e^{x/a} - \frac{\pi}{4}\right)$$

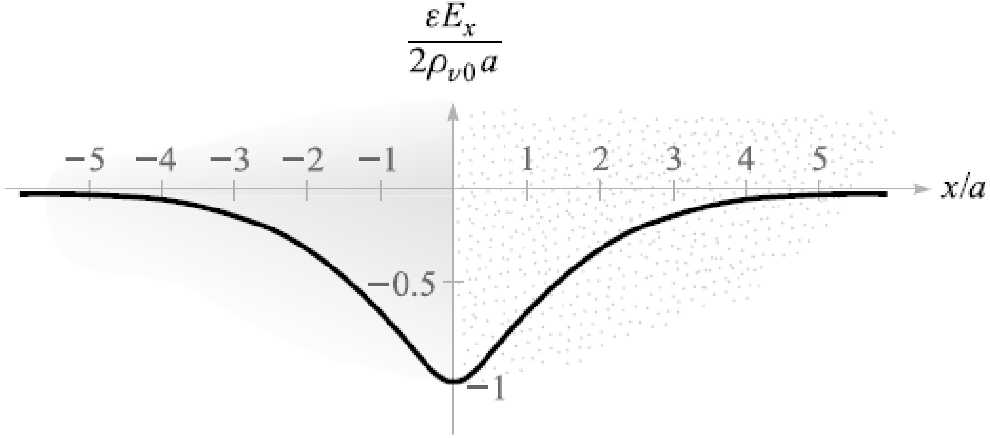
Para el ejemplo mencionado, la figura muestra la distribución de carga a), la intensidad de campo eléctrico b) y el potencial c), respectivamente.

$$\rho_v = 2\rho_{v0}\,\mathrm{sech}\,\frac{x}{a}\,\tanh\,\frac{x}{a}$$

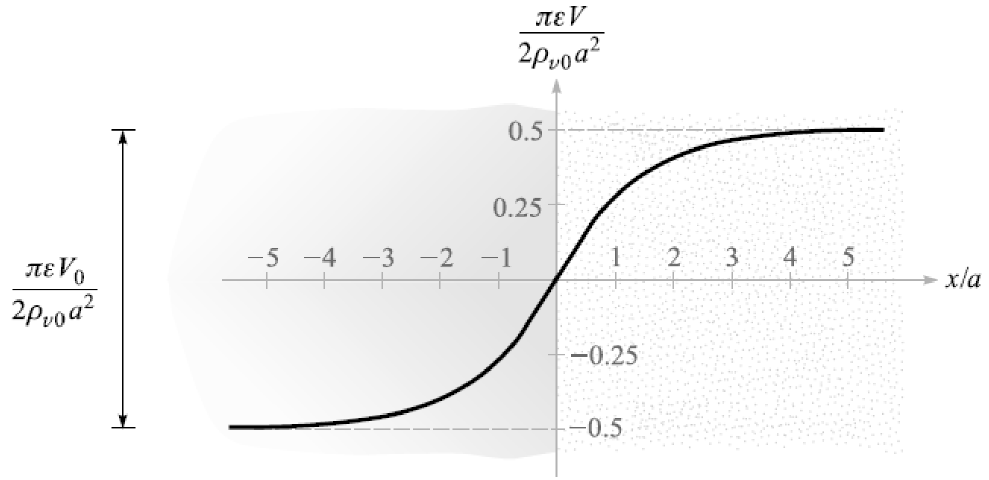


a)

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon}\,\mathrm{sech}\frac{x}{a}$$



b)



$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\left(\tan^{-1} e^{x/a} - \frac{\pi}{4}\right)$$

c)

El potencial se vuelve constante una vez que se está a una distancia de alrededor de 4ª o 5a de la unión. La diferencia de potencial total V_0 a través de la unión se obtiene de

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\left(\tan^{-1} e^{x/a} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$V_0 = V_{x\to\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_{v0}a^2}{\epsilon}$$

Esta expresión sugiere la posibilidad de determinar la carga total en un lado de la unión y aplicar la ecuación:

$$V_0 = V_{x\to\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_{v0}a^2}{\epsilon}$$

para encontrar la capacitancia de la unión. La carga total positiva es

$$Q = S\int_0^\infty 2\rho_{v0}\text{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}\,dx = 2\rho_{v0}aS$$

donde S es el área de la sección transversal de la unión. Si se emplea la ecuación:

$$V_0 = V_{x\to\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_{v0}a^2}{\epsilon}$$

para eliminar el parámetro de distancia a, la carga se convierte en

$$Q = S\sqrt{\frac{2\rho_{v0}\epsilon V_0}{\pi}}$$

Puesto que la carga total es función de la diferencia de potencial, se debe tener cuidado en definir una capacitancia.

Pensando en términos de "circuito eléctrico" por un momento,

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_0}{dt}$$

$$C = \frac{dQ}{dV_0} \quad \Longrightarrow \quad C = \sqrt{\frac{\rho_{\nu 0}\epsilon}{2\pi V_0}}\,S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

D7.5 Dada la densidad de carga volumétrica $\rho_\nu = -2 \times 10^7 \epsilon_0 \sqrt{x}$ C/m^3 en el espacio libre, sea $V = 0$ en $x = 0$ y $V = 2$ V en $x = 2.5$ mm. En $x = 1$ mm, encontrar: *a*) V; *b*) E_x.

Solución producto de la ecuación de Laplace

Esta sección abordará la clase de campos de potencial que varían con más de una de las tres coordenadas.

Aunque los ejemplos se desarrollan en el sistema de coordenadas cartesianas, el método general es aplicable a los demás sistemas de coordenadas.

Sin embargo, no se emplearán esas aplicaciones porque los campos de potencial quedan expresados en términos de funciones matemáticas más avanzadas, como las funciones de Bessel y las armónicas esféricas y cilíndricas; además, el interés no radica en estudiar nuevas funciones matemáticas, sino en las técnicas y métodos de solución de problemas de campo electrostático.

Se puede proporcionar una clase general de problemas especificando simplemente que el potencial es una función de x y y, así que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Ahora, supóngase que el potencial se puede expresar como el producto de una función sólo de x, y una función sólo de y.

Parecería que esto prohíbe muchas soluciones, como $V = x + y$, o cualquier suma de una función de x y una función de y, pero debe considerarse que la ecuación de Laplace es lineal y la suma de cualesquiera dos soluciones es también una solución.

Se podría tratar $V = x + y$ como la suma de $V1 = x$ y $V2 = y$, donde cada uno de estos últimos potenciales es ahora una solución producto (trivial).

Al representar la función de x por X y la función de y por Y, se tiene

*Al representar la función de **x por X** y la función de **y por Y**, se tiene*

$$\boldsymbol{V = XY}$$

Y remplazando esta ecuación en la ecuación de Laplace se tiene:

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

Por lo tanto:

$$Y\frac{d^2 X}{dx^2} + X\frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$