Campos Electromagneticos

Flujo magnético y densidad de flujo magnético

En el espacio libre, la *densidad de flujo magnético* B se define como:

$$B = \mu_0 H$$

donde B se mide en webers por metro cuadrado (Wb/m2) o en una nueva unidad adoptada por el Sistema Internacional de Unidades, el tesla (T).

Una unidad más antigua que con frecuencia se utiliza para la densidad de flujo magnético es el gauss (G), donde 1 T o 1 Wb/m2 es lo mismo que 10000 G. La constante μ_0 no es adimensional y tiene un valor específico para el espacio libre, de $4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)

Se debe notar que debido a que H se mide en amperes por metro, el weber es dimensionalmente igual al producto de henrys y amperes. Considerando el Henry como una nueva unidad, el Weber es simplemente una abreviatura conveniente para el producto de Henrys y Amperes.

Cuando se introduzcan los campos variantes con el tiempo, se mostrará que un Weber también equivale al producto de Volts y segundos.

El vector de densidad de flujo magnético B es un miembro de la familia de densidad de flujo de campos vectoriales, como el nombre weber por metro cuadrado lo implica. Una de las posibles analogías entre los campos eléctrico y magnético resulta al comparar las leyes de Biot-Savart y de Coulomb.

Así se establece una analogía entre H y E.

Las relaciones

$$B = \mu_0 H \text{ B y } D = \mu_0 E$$

conducen a una analogía entre B y D.

Si B se mide en teslas o webers por metro cuadrado, entonces el flujo magnético se debe medir en webers.

Se representará el flujo magnético por ϕ y se definirá como el flujo que pasa a través de cualquier área escogida,

$$\boldsymbol{\phi} = \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dS}$$

La analogía debe ahora traer a la memoria la densidad de flujo eléctrico , medida en coulombs, y la ley de Gauss, la cual establece que el flujo total que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada,

$$\psi = \int \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{dS} = \boldsymbol{Q}$$

La carga Q es la fuente de las líneas de flujo eléctrico y esas líneas comienzan y terminan en cargas positivas y negativas, respectivamente

Ninguna fuente así ha sido descubierta para las líneas de flujo magnético.

En el ejemplo del filamento recto infinitamente largo que transporta una corriente I, el campo H forma círculos concéntricos alrededor del filamento.

Dado que $\mathrm{B} = \mu_0 H$, el campo B es de la misma forma.

Las líneas de flujo magnético son cerradas y no terminan en una "carga magnética".

Por esta razón la ley de Gauss para el campo magnético es

$$\int B \cdot dS = 0$$

y la aplicación del teorema de la divergencia muestra que

$$\nabla B = 0$$

Esta ecuación es la última de las cuatro ecuaciones de Maxwell cuando se aplican a campos eléctricos estáticos y a campos magnéticos estables. Entonces, al reunir estas ecuaciones para los campos eléctricos estáticos y campos magnéticos estables se tiene

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}}$$

A estas ecuaciones se les pueden añadir las dos expresiones que relacionan a *D con E* y a *B con H* en el espacio libre,

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}}$$

Y el potencial electrostático

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

Si se pone atención otra vez en las ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}}$$

, se puede notar que las cuatro ecuaciones especifican la divergencia y el rotacional de un campo eléctrico y uno magnético.

El conjunto correspondiente de las cuatro ecuaciones integrales que se aplican a campos eléctricos estáticos y a campos estables es

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv$$
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

El estudio de los campos eléctrico y magnético hubiera sido mucho más simple adoptando uno de los dos conjuntos de ecuaciones,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv$$
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Con un buen conocimiento del análisis vectorial, como el que ahora se debe tener, uno de los conjuntos debe obtenerse del otro aplicando el teorema de la divergencia o el de Stokes.

Varias leyes experimentales se pueden obtener fácilmente a partir de estas ecuaciones.

Como un ejemplo del uso del flujo y de la densidad de flujo en campos magnéticos, se encontrará el flujo entre los conductores de la línea coaxial de la figura 1a. Se encontró que la intensidad de campo magnético es

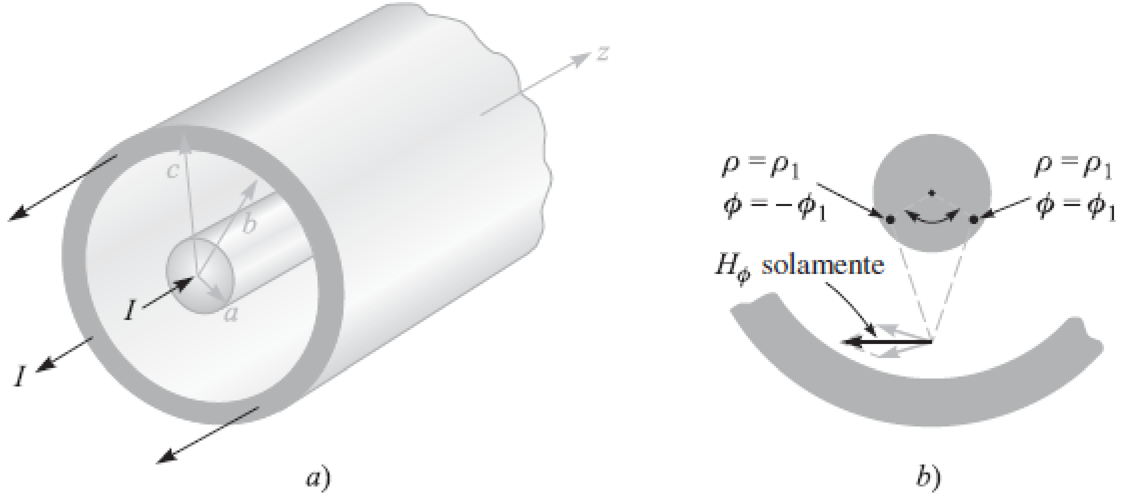
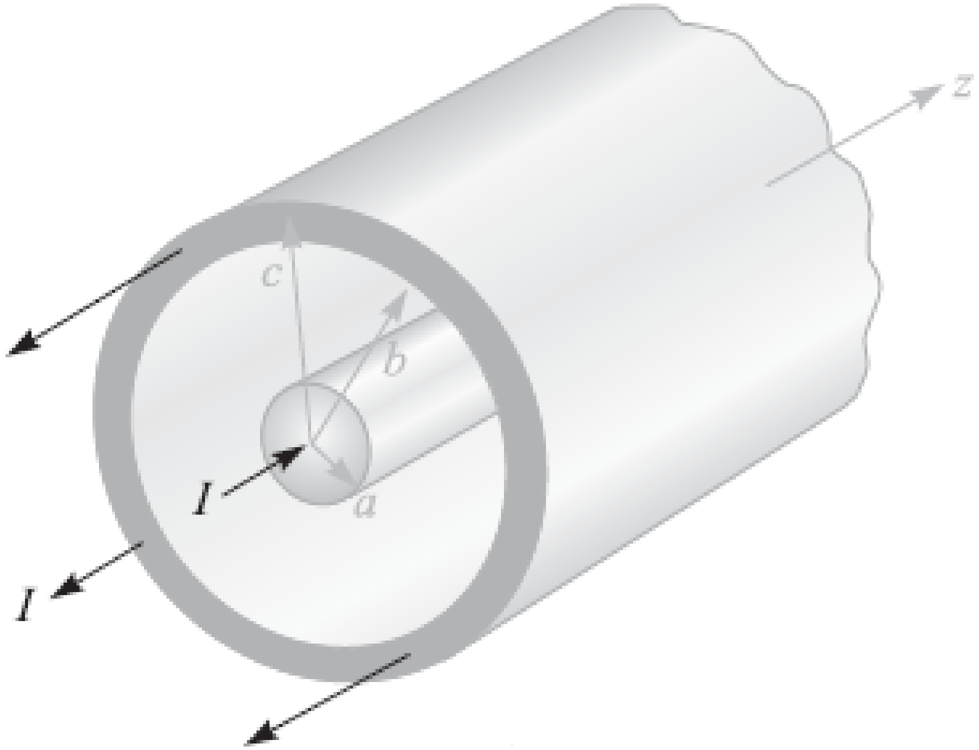


Figura 1 *a)* Sección transversal de un cable coaxial portador de una corriente uniformemente distribuida *I* en el conductor interior y $-I$ en el conductor exterior. El campo magnético en cualquier punto se determina más fácilmente por medio de la aplicación de la ley circuital de Ampère alrededor de una trayectoria cerrada. *b)* Filamentos de corriente en $\rho = \rho_1$, $\phi = \pm\phi_1$ producen componentes H_ρ que se cancelan. Para el campo total, $H = H_\phi a_\phi$.

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (a < \rho < b)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

El flujo magnético contenido entre los conductores en una longitud d es el flujo que cruza a cualquier plano radial extendiéndose desde ρ = a hasta ρ = b y desde, por ejemplo, z = 0 hasta z = d



$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot d\rho\, dz\, \mathbf{a}_\phi$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Esta expresión se utilizará después para obtener la inductancia de la línea de transmisión coaxial.

Potenciales magnéticos escalares y vectoriales

La solución de problemas de campo electrostático se simplifica bastante utilizando el potencial electrostático escalar V.

Aunque este potencial posee un significado físico muy real, matemáticamente no es más que un escalón que permite resolver un problema en varios pasos más pequeños.

Dada una configuración de carga, primero se encuentra el potencial y entonces, a partir de éste, la intensidad de campo eléctrico.

Se podría preguntar:

¿Se puede definir una función de potencial que pueda encontrarse a partir de la distribución de corriente y de la cual los campos magnéticos puedan determinarse con facilidad?

¿Puede definirse un potencial magnético escalar similar al potencial electrostático escalar?

Posteriormente se mostrará que la respuesta a la primera pregunta es "Sí"; pero la respuesta a la segunda es "A veces".

Primero se abordará la última pregunta suponiendo la existencia de un potencial magnético escalar, el cual se designa como V_m de cuyo gradiente se obtenga la intensidad de campo magnético

$$\boldsymbol{H} = \nabla V_m$$

La selección de un gradiente negativo proporcionará una analogía más cercana al potencial eléctrico y a los problemas que ya se resolvieron.

Esta definición no debe estar en conflicto con los resultados anteriores para el campo magnético, y por lo tanto,

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \nabla \times \nabla \boldsymbol{V_m}$$

Sin embargo, el rotacional del gradiente de cualquier escalar es igual a cero; Por lo tanto, si H se define como el gradiente de un potencial magnético escalar, la densidad de corriente debe ser cero a través de la región en la cual el potencial magnético escalar está definido así. Se tiene entonces

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \,, \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$$

Dado que muchos problemas magnéticos involucran geometrías en las cuales los conductores portadores de corriente ocupan una fracción relativamente pequeña del área total de interés, es evidente que un potencial magnético escalar sería útil.

El potencial magnético escalar también es aplicable en el caso de imanes permanentes. Obviamente, las dimensiones de V_m son en amperes.

Este potencial escalar también satisface la ecuación de Laplace.

En el espacio libre,

$$\nabla \cdot B = \mu_0 \nabla \cdot H = \mu_0 \nabla \cdot -\nabla V_m = 0$$

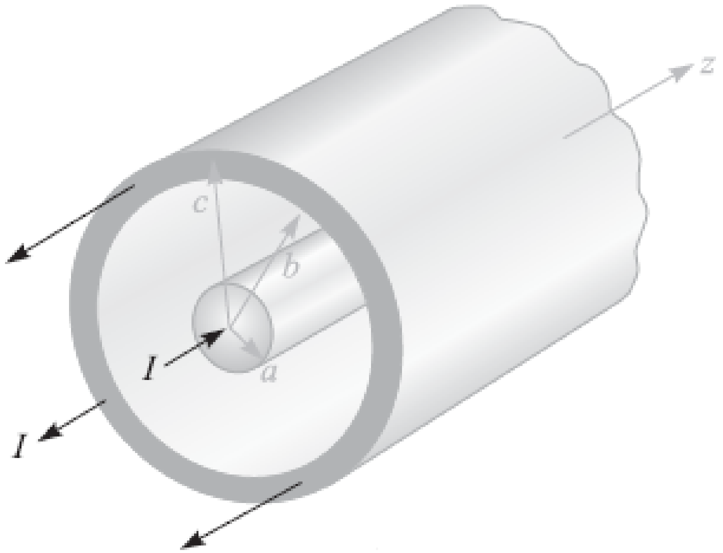
$$\nabla^2 V_m = 0$$

Posteriormente se verá que V_m continúa satisfaciendo la ecuación de Laplace en materiales magnéticos homogéneos, y no está definido en ninguna región en la que una densidad de corriente esté presente.

Aunque se considerará el potencial magnético escalar con mayor extensión en el siguiente capítulo, cuando se introduzcan los materiales magnéticos y se trate el circuito magnético, una diferencia entre V y V_m se señalará ahora: V_m no es una función univalente de la posición.

El potencial eléctrico V sí es una función univalente; una vez que se asigna una referencia cero, hay un valor único de V asociado con cada punto del espacio. Este no es el caso de V_m.

Considérese la sección transversal de la línea coaxial mostrada en la figura 1. En la región a < ρ < b, J = 0, y es posible establecer un potencial magnético escalar. El valor de H es



$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

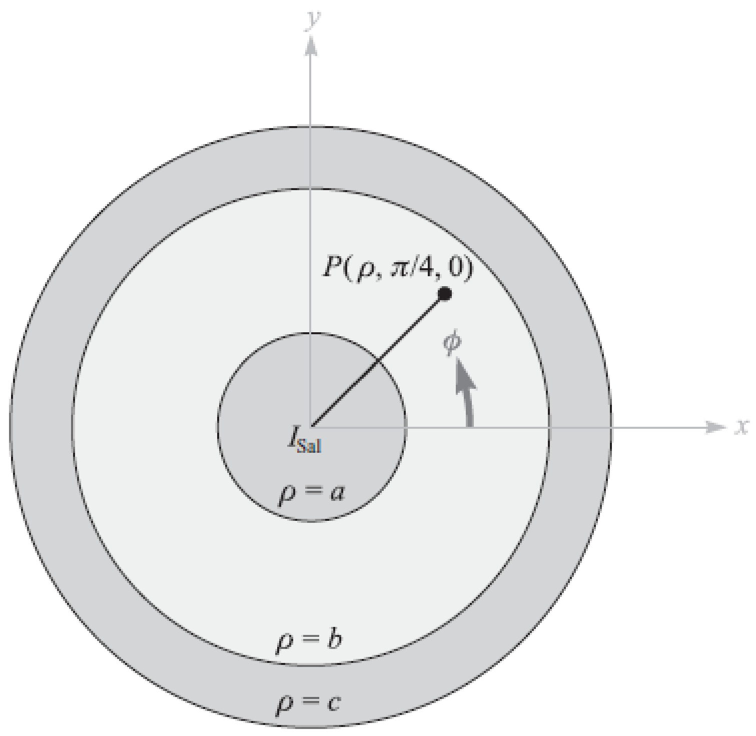
donde I es la corriente total que fluye en la dirección de a_Z en el conductor interior.
Se encontrará V_m por la integración de la componente apropiada del gradiente.

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\nabla V_m\Big|_{\phi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

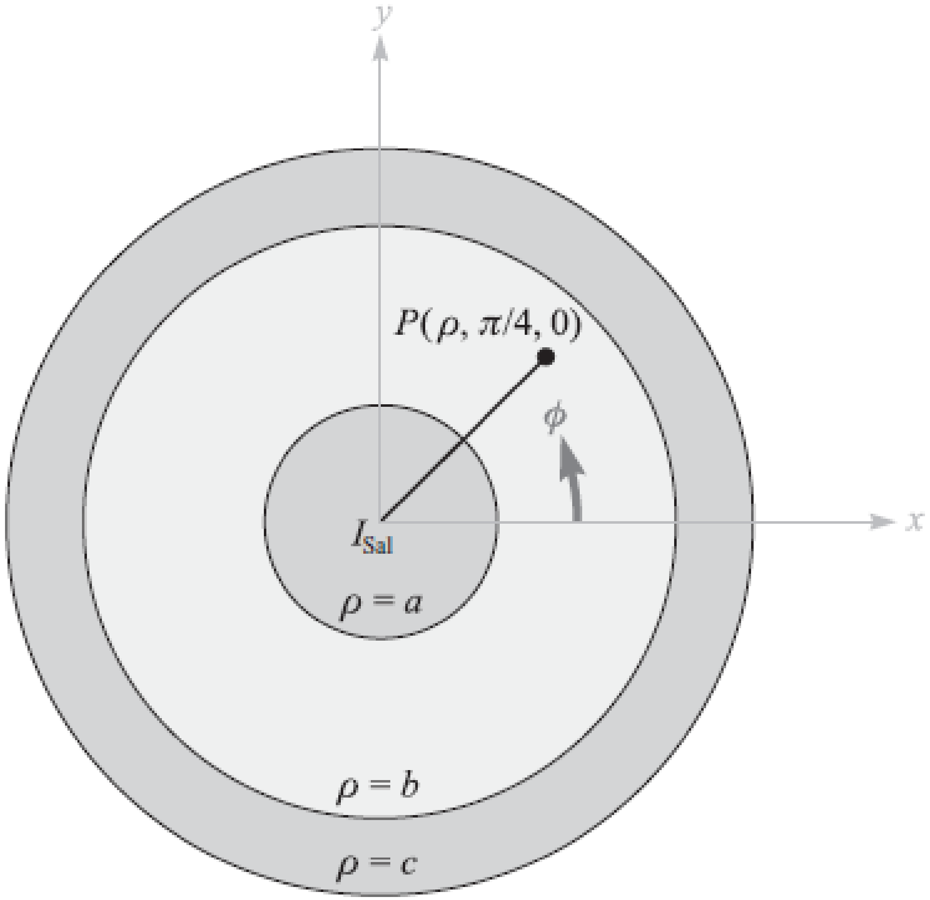
$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\nabla V_m\Big|_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$



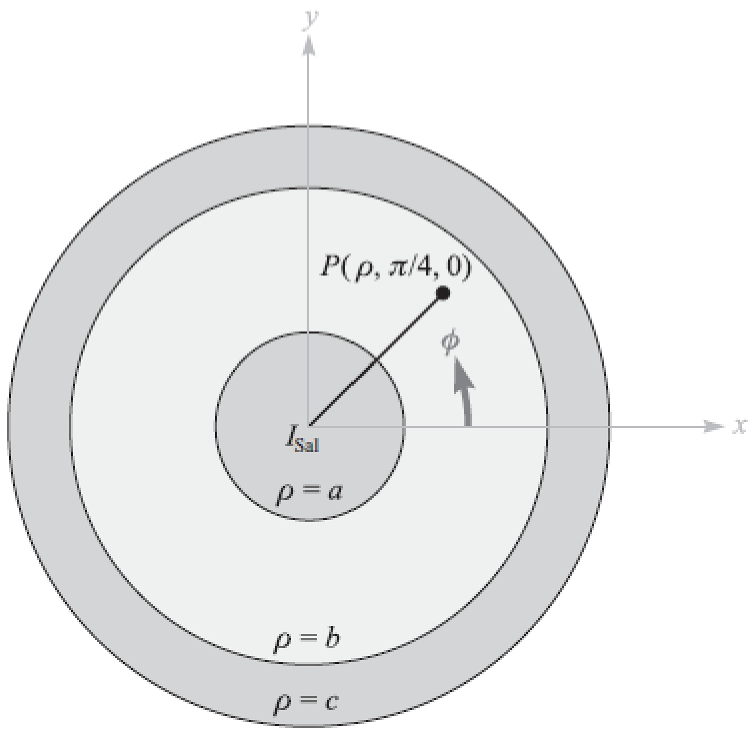
$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

donde la constante de integración ha sido igualada a cero. ¿Qué valor del potencial se puede asociar con el punto P, donde θ = π/4? Si se permite que V_m sea cero en ϕ = 0 y se procede a recorrer el círculo en dirección contraria a las manecillas de reloj, el potencial magnético se torna negativo linealmente.



Cuando se completa una vuelta, el potencial es −I, pero ése era el punto en el cual se dijo hace un momento que el potencial era cero.

En P, entonces, $\phi = \pi/4, 9\pi/4, 17\pi/4, \ldots$, o $-7\pi/4, -15\pi/4, -23\pi/4, \ldots$, o



$$V_{mP} = \frac{I}{2\pi}\left(2n - \frac{1}{4}\right)\pi\;, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$V_{mP} = I\left(n - \frac{1}{8}\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$