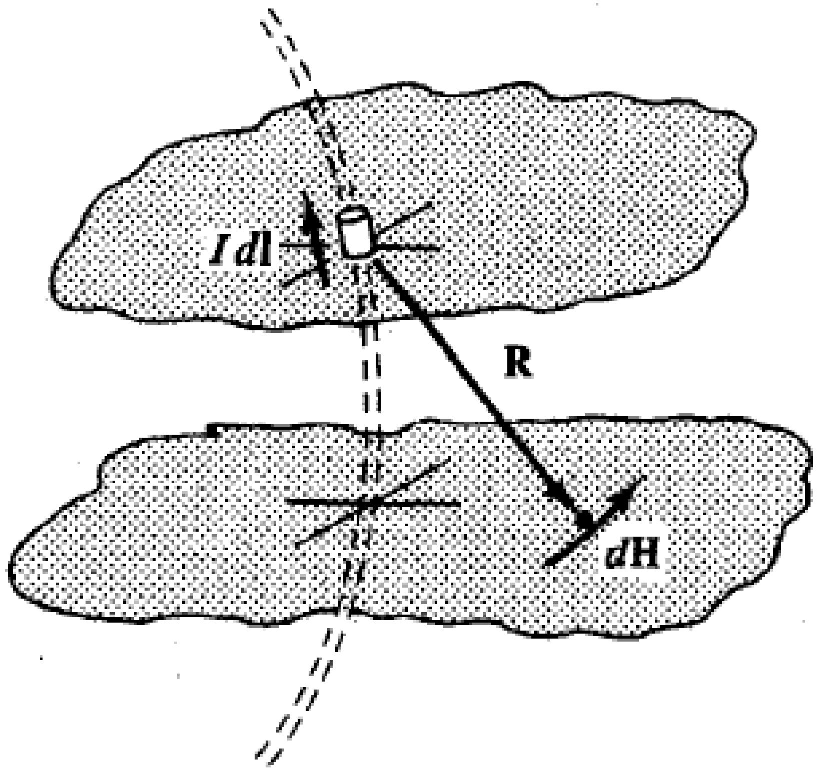
Campos Electromagneticos

El campo magnético estable

LEY DE BIOT-SAVART

Un diferencial de *intensidad de campo magnético*, $d\mathbf{H}$, se produce por un elemento diferencial de corriente $I\,d\mathbf{l}$. El campo varía inversamente con el cuadrado de la distancia, es independiente del medio que le rodea y tiene la dirección dada por el producto cruz de $I\,d\mathbf{l}$ y $\mathbf{a}_R$. Esta relación se conoce como *ley de Biot-Savart*:

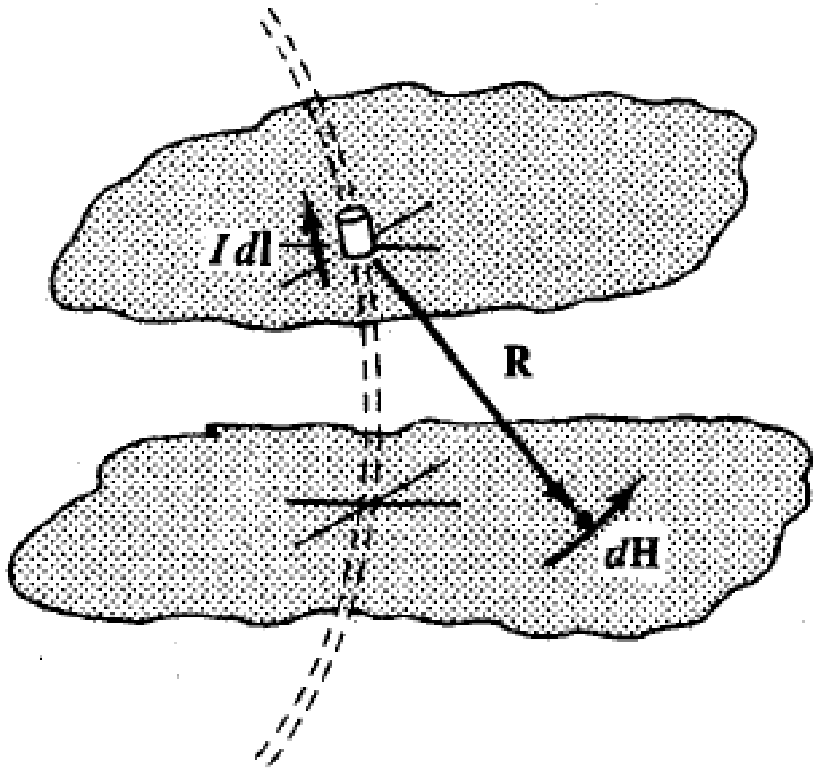
$$d\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{I}d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a_r}}{4\pi R^2}$$



El campo magnético estable

R está dirigido desde el elemento de corriente hasta el punto en que $d\mathbf{H}$ se determina, tal como se ve en la figura .

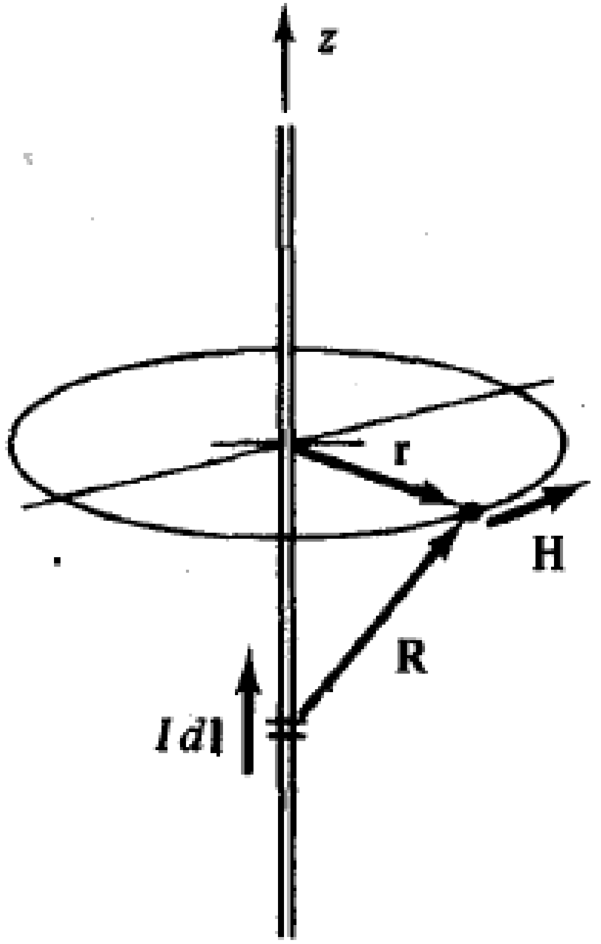
Los elementos de corriente no tienen existencia separada. Todos los elementos que conforman el filamento de corriente contribuyen a **H** y deben incluirse. La sumatoria conduce a la forma integral de la ley de Biot-Savart:



$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a}_r}{4\pi R^2}$$

EJEMPLO 1: Un filamento de corriente, recto, de longitud infinita, a lo largo del eje z en coordenadas cilíndricas, se muestra en la figura 2. Se selecciona, sin perder generalidad, un punto en el plano $z = 0$. En forma diferencial,

$$d\boldsymbol{H} = \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a}_r}{4\pi R^2}$$



$$d\mathbf{H} = \frac{I\,dz\,\mathbf{a}_z \times (r\mathbf{a}_r - z\mathbf{a}_z)}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I\,dz\,r\mathbf{a}_\phi}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

La variable de integración es z. Como $\mathbf{a}_\phi$ no cambia con z, puede removerse del integrando antes de la operación.

$$\mathbf{H} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ir\,dz}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}}\right]\mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi r}\,\mathbf{a}_\phi$$

Los campos magnéticos de corrientes laminares o corrientes volumétricas también están dados por la forma integral de la ley de Biot-Savart, reemplazándose $I\,d\mathbf{l}$ por $\mathbf{K}\,dS$ o $\mathbf{J}\,dv$ respectivamente, y con la integración extendida a toda la lámina o volumen. Un caso particular de importancia es el de la lámina plana infinita de densidad constante $\mathbf{K}$. Como se muestra en el problema 9.3, el campo en este caso es constante:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_n$$

LEY DE AMPÈRE

La integral lineal de la componente tangencial de **H** alrededor de una trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada por la trayectoria.

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{enc}$$

Esta es la *ley de Ampère*.

A primera vista, podría pensarse que la ley de Ampère se utiliza para determinar la corriente I por una integración. Sin embargo, la corriente es usualmente conocida y la ley más bien provee un método para hallar **H**. Esto es similar al uso de la ley de Gauss para hallar **D** dada la distribución de carga.

Para utilizar la ley de Ampère para determinar **H** debe haber un grado considerable de simetría en el problema. Deben cumplirse dos condiciones:

1. En cada punto de la trayectoria cerrada **H** es o tangencial o normal a la trayectoria.
2. H tiene el mismo valor en todos los puntos de la trayectoria donde **H** es tangencial.

Es evidente que la ley de Biot-Savart ayuda a seleccionar una trayectoria apropiada.

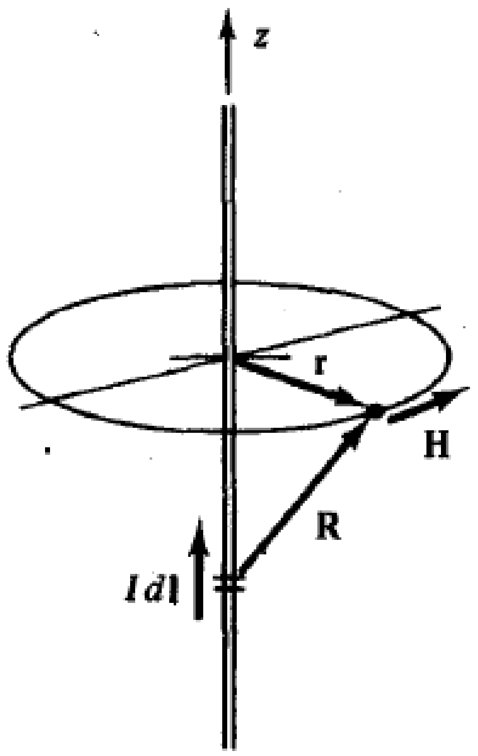
EJEMPLO 2: Utilice la ley de Ampère para obtener **H** producido por un filamento recto de corriente e infinitamente largo.

La ley de Biot-Savart muestra que en cada punto del círculo de la figura **H** es tangencial y de la misma magnitud. Entonces

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H(2\pi r) = I$$

así que

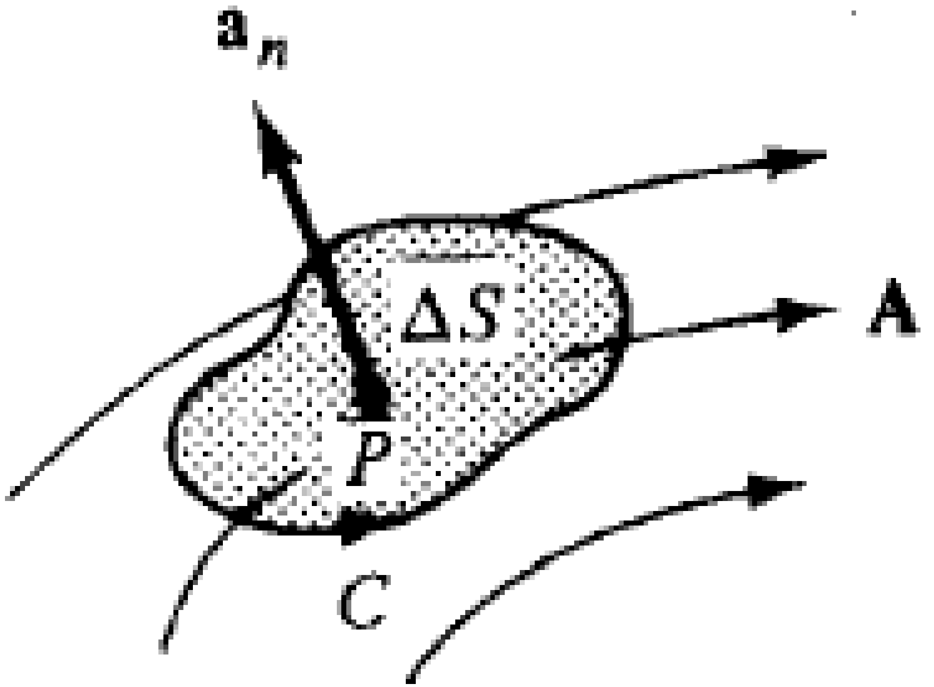
$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\phi$$



ROTACIONAL (ROTOR)

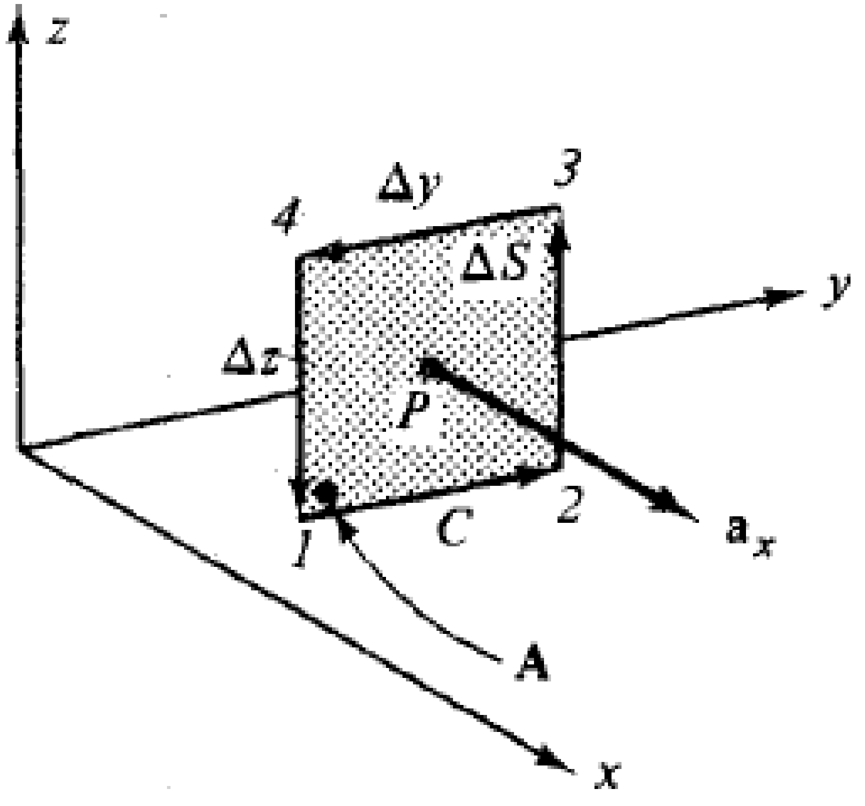
El *rotacional* de un campo vectorial **A** es otro campo vectorial. El punto P de la figura 3 yace en un área plana ΔS limitada por una curva cerrada C. En la integración que define el rotacional, C se recorre de tal manera que el área encerrada está a la izquierda. La normal unitaria $\mathbf{a}_n$, determinada por la regla de la mano derecha, es la que aparece en la figura. Entonces la *componente* del rotacional de **A** en la dirección $\mathbf{a}_n$ se define como

$$(\text{rotacional } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_n \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$



En los sistemas de coordenadas, el rotacional **A** queda especificado completamente por sus componentes a lo largo de los tres vectores unitarios. Por ejemplo, la componente x en coordenadas cartesianas se define tomando como contorno C un cuadrado en el plano $x =$ constante a través de P, tal como se muestra en la figura

$$(\text{rotacional } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta y\, \Delta z \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta y\, \Delta z}$$



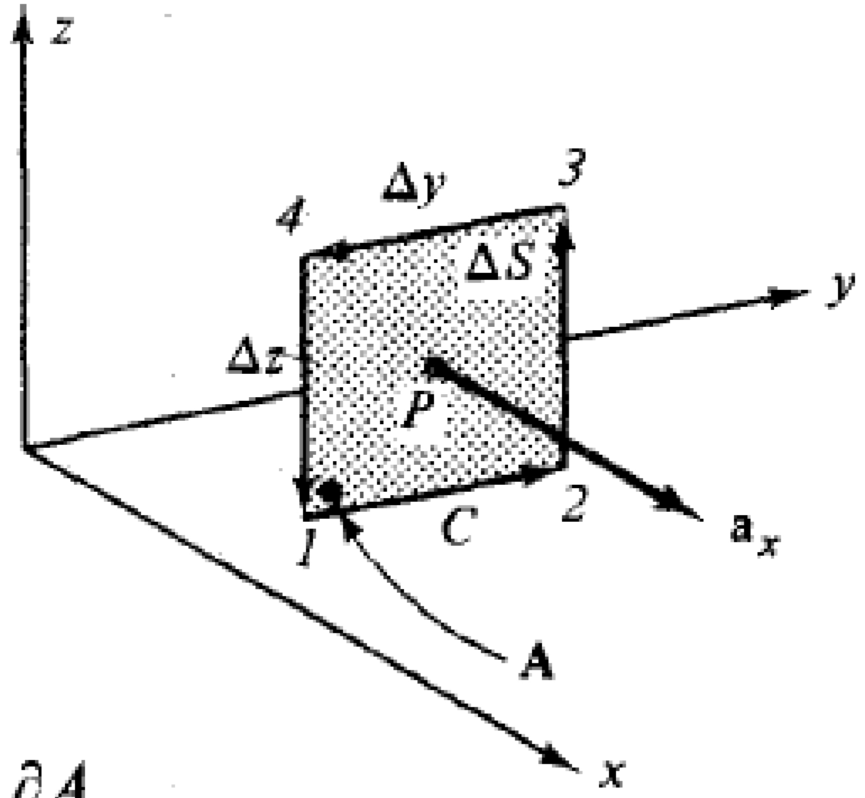
Si $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ en la esquina ΔS más cercana al origen (punto I), entonces

$$\oint = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1$$

$$= A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z$$

$$+ \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\Delta z\right)(-\Delta y) + A_z(-\Delta z)$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y \Delta z$$



y $$(\text{rotacional } \mathbf{A}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

Las componentes y y z pueden determinarse en forma similar. Combinando las tres componentes,

$$\text{rotacional } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z \qquad \text{(cartesiano)}$$

Las expresiones para el rotacional **A** en coordenadas cilíndricas y esféricas pueden derivarse en la misma forma antes mencionada, aunque con más dificultad.

$$\text{rotacional } \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z \qquad \text{(cilíndrico)}$$

$$\text{rotacional } \mathbf{A} = \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial (A_\phi \text{sen}\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi \qquad \text{(esférico)}$$

Dos propiedades del operador rotacional frecuentemente útiles son:

(1) *la divergencia de un rotacional es cero.* Esto es,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

para cualquier campo vectorial **A**.

(2) *el rotacional de un gradiente es cero.* Esto es,

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

para cualquier función escalar de posición f

Bajo condiciones estáticas, $\mathbf{E} = -\nabla V$, y así, de (2),

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

DENSIDAD DE CORRIENTE J Y $\nabla \times \mathbf{H}$

La componente x de $\nabla \times \mathbf{H}$ se determina por $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$, donde la trayectoria yace en un plano normal al eje x. La ley de Ampère establece que esta integral es igual a la corriente encerrada. La dirección es $\mathbf{a}_x$, así que la corriente puede llamarse I_x. Entonces,

$$(\text{rotacional } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{I_x}{\Delta S} = J_x$$

la componente x de la densidad de corriente **J**. En igual forma se procede para las direcciones y y z. Por consiguiente,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Este importante resultado es una de las ecuaciones de Maxwell para campos estáticos. Si **H** se conoce a través de una región particular, entonces $\nabla \times \mathbf{H}$ dará **J** para esa región.

DENSIDAD DE FLUJO MAGNETICO B

Como **D**, la intensidad del campo magnético **H** depende sólo de las cargas (en movimiento) y es independiente del medio. El campo de fuerza asociado con **H** es la *densidad de flujo magnético* **B**, que está dada por

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

donde $\mu = \mu_0 \mu_r$ es la permeabilidad del medio. La unidad de **B** es el *tesla*,

$$1\ \mathrm{T} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}}$$

La permeabilidad del espacio vacío μ_0 tiene un valor numérico de $4\pi \times 10^{-7}$ con unidades de *henrys por metro*, H/m; μ_r, la permeabilidad relativa del medio, es un número puro muy cercano a la unidad, excepto para un pequeño grupo de materiales *ferromagnéticos*

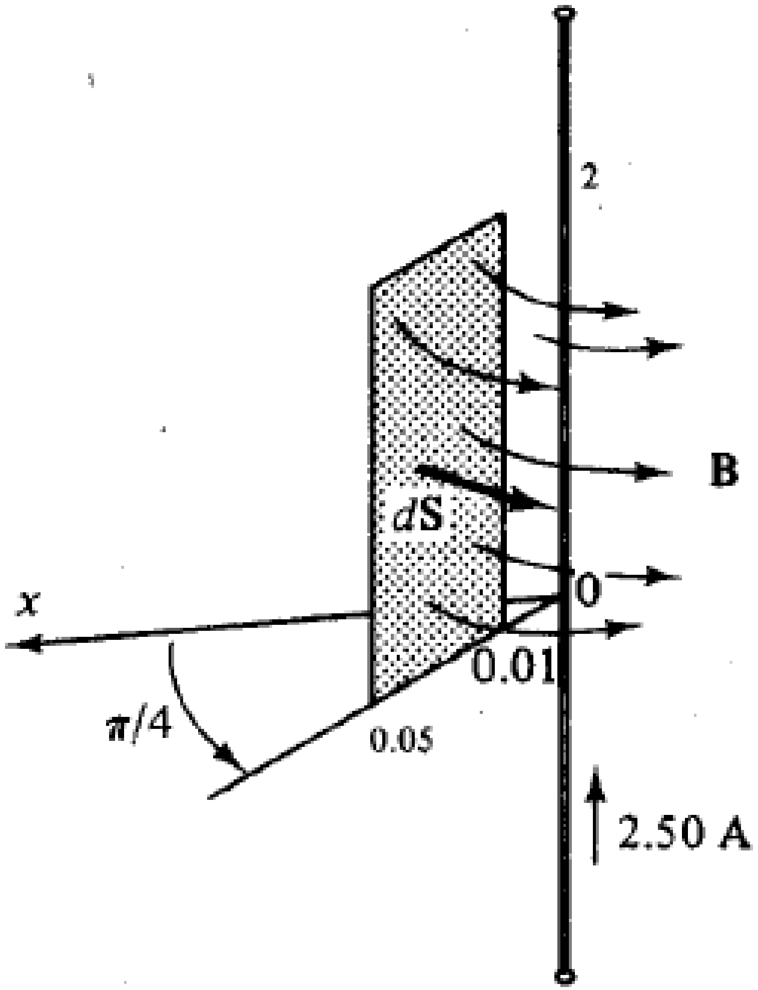
El flujo magnético, $\mathbf{\Phi}$, a través de una superficie se define como

$$\mathbf{\Phi} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

El signo de Φ puede ser positivo o negativo según como se escoja la superficie normal en $d\mathbf{S}$. La unidad del flujo magnético es el *weber*, Wb. Las diferentes unidades magnéticas están relacionadas por:

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 \qquad 1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$$

EJEMPLO 3: Encuentre el flujo que cruza la porción del plano $\phi = \pi/4$ definido por $0.01 < r < 0.05$ m y $0 < z < 2$ m (ver figura) . Un filamento de corriente de 2.50 A a lo largo del eje z está en la dirección $\mathbf{a}_z$.



$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{S} = dr\,dz\,\mathbf{a}_\phi$$

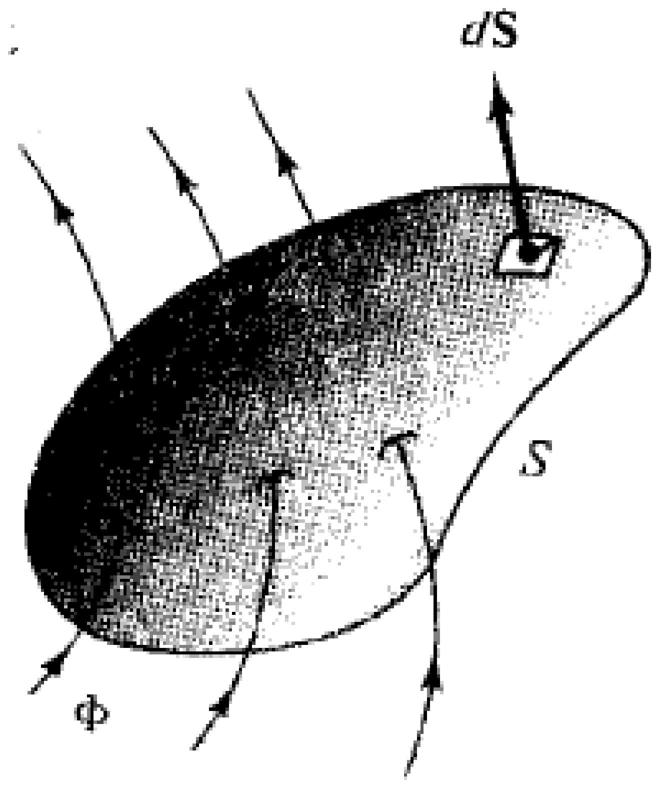
$$\Phi = \int_0^2 \int_{0.01}^{0.05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{a}_\phi \cdot dr\,dz\,\mathbf{a}_\phi$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{0.05}{0.01}$$

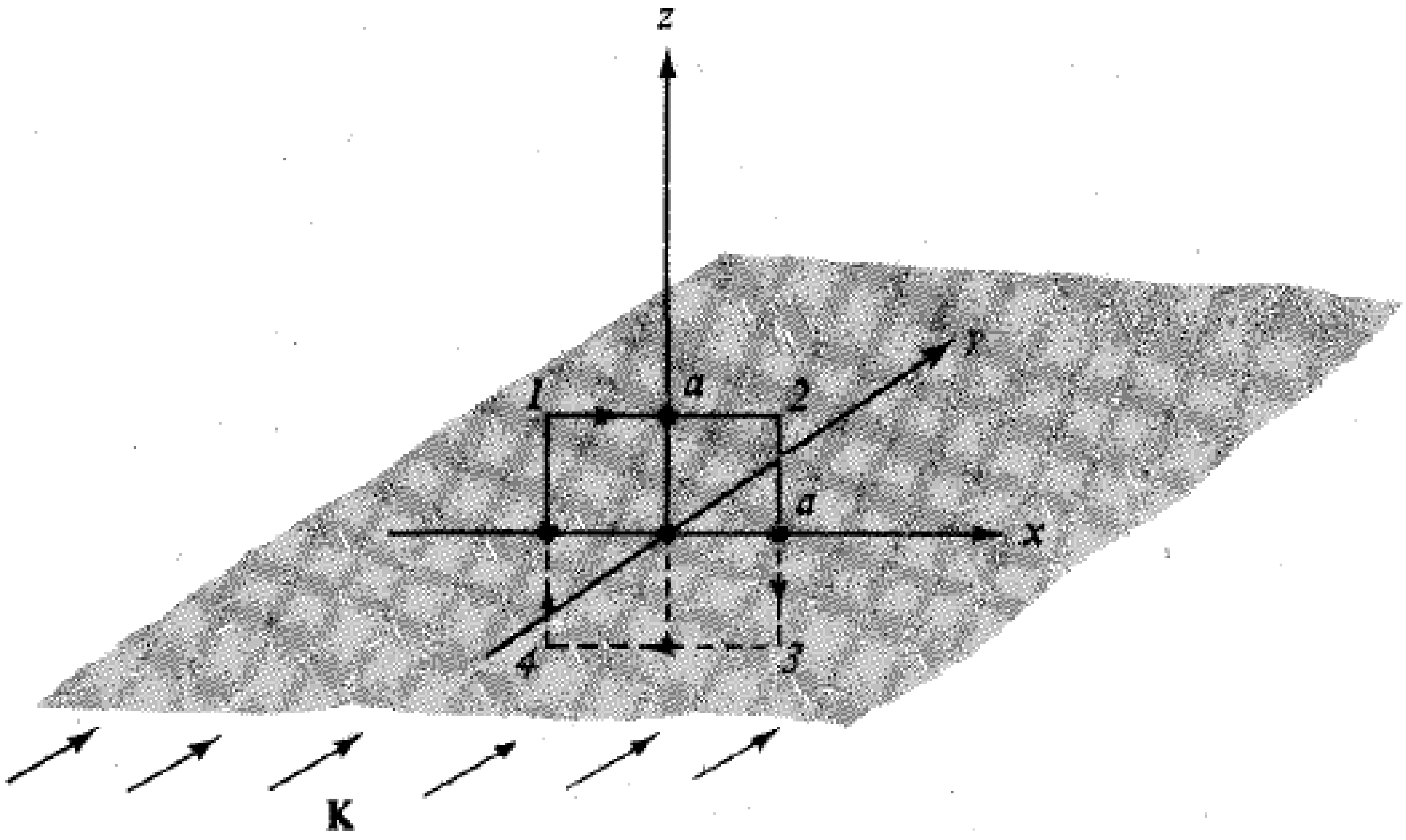
$$= 1.61 \times 10^{-6}\ \text{Wb} \quad \text{ó} \quad 1.61\ \mu\text{Wb}$$

Obsérvese que las líneas de flujo magnético Φ son curvas cerradas, sin punto de comienzo ni de terminación. Esto contrasta con el flujo eléctrico Ψ, que se origina en cargas positivas y termina en cargas negativas. En la figura todo el flujo magnético Φ que entra en la superficie cerrada debe abandonarla. Así pues, los campos **B** no tienen fuentes o sumideros lo que se expresa matemáticamente por

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



9.3. Determine una expresión para **H** producido por una lámina de corriente plana e infinita de densidad uniforme **K**.



$$H = \frac{1}{2} K \times a_n$$

La ley de Biot-Savart y las consideraciones debidas a la simetría muestran que **H** sólo tiene una componente x, que es independiente de x y y, si $\mathbf{K} = K\mathbf{a}_y$ (ver figura 9-10). Aplicando la ley de Ampère al contorno cuadrado *12341*, y aprovechando el hecho de que **H** debe ser antisimétrico en z,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H)(2a) + 0 + (H)(2a) + 0 = (K)(2a) \qquad \text{ó} \qquad H = \frac{K}{2}$$