Campos Electromagneticos

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

Las formas integrales de las ecuaciones de Maxwell son, generalmente, más fáciles de reconocer en términos de las leyes experimentales.

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

Los experimentos deben tratar con cantidades físicas macroscópicas y sus resultados tienen que expresarse en términos de relaciones integrales. Una ecuación diferencial siempre representa una teoría.

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

Se recopilarán ahora las formas integrales de las ecuaciones de Maxwell obtenidas anteriormente. Integrando aplicando el teorema de Stokes, se obtiene la ley de Faraday,

$$\int E \cdot dl = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

$$\int H \cdot dl = I + \int \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS$$

$$\int D \cdot dS = -\int \rho_V \cdot dV$$

$$\int B \cdot dS = 0$$

Estas cuatro ecuaciones integrales permiten encontrar las condiciones en la frontera de B, D, H y E, las cuales son necesarias para evaluar las constantes obtenidas al resolver las ecuaciones de Maxwell en forma de ecuaciones diferenciales parciales.

Estas condiciones de frontera no cambian en general la forma que tienen para los campos estáticos o estables y se pueden utilizar los mismos métodos para obtenerlas.

Entre cualquier par de medios físicos se requieren relacionar las componentes tangenciales del campo E,
De la ecuación:

$$\int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{dS}$$

$$\boldsymbol{E_{t1}} = \boldsymbol{E_{t2}}$$

Así mismo para las condiciones de intensidad de campo magnético:

$$\int \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{dl} = \boldsymbol{I} + \int \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{dS}$$

$$\boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{H}_{t2}$$

Las integrales de superficie producen las condiciones de frontera sobre las componentes normales,

$$\boldsymbol{D_{N1} - D_{N2} = \rho_S}$$

Y

$$\boldsymbol{B_{N1} - B_{N2} = 0}$$

Normalmente es recomendable considerar un problema físico ideal suponiendo un conductor perfecto para el cual σ es infinita; pero J es finita.

Entonces de la ley de Ohm, en un conductor perfecto,

$$E=0$$

y se sigue de la forma diferencial de la ley de Faraday que

$$H=0$$

para campos variantes en el tiempo. La forma punto de la ley circuital de Ampère muestra que el valor finito de J es

$$J=0$$

y la corriente debe conducirse sobre la superficie del conductor como una corriente superficial K.

Así, si la región 2 es un conductor perfecto, $E_{t1} = E_{t2}$ a $B_{N1} = B_{N2}$ se transforman, respectivamente, en

$$E_{t1} = 0$$

$$H_{t1} = K \quad (\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N)$$

$$D_{N1} = \rho_s$$

$$B_{N1} = 0$$

en donde a_N apunta hacia fuera y es normal a la superficie del conductor.

Obsérvese que la densidad de carga superficial se considera como una posibilidad física tanto para dieléctricos, conductores perfectos o conductores imperfectos, pero la existencia de una densidad de corriente superficial se supone solamente en relación con conductores perfectos.

Las condiciones de frontera establecidas previamente son parte necesaria de las ecuaciones de Maxwell.

Todos los problemas físicos reales tienen fronteras y requieren una solución de las ecuaciones de Maxwell en dos o más regiones, de manera que estas soluciones concuerden con las condiciones de frontera.

En el caso de conductores perfectos, la solución de las ecuaciones en el interior del conductor es trivial (todos los campos variantes con el tiempo son cero), pero la aplicación de las condiciones de frontera $\boldsymbol{E_{t1} = 0}$ y $\boldsymbol{B_{N1} = 0}$ pueden resultar muy complicadas.

Ciertas propiedades fundamentales de la propagación de ondas se manifiestan cuando las ecuaciones de Maxwell se resuelven para una región ilimitada.

Este tipo de problema es el único problema en el cual no se necesita la aplicación de ninguna condición de frontera.

Los potenciales retardados

Los potenciales variantes con el tiempo, llamados por lo general potenciales retardados por razones que se explicarán en breve, tienen su mayor aplicación en problemas de radiación en los que la distribución de la fuente se conoce en forma aproximada.

Debe recordarse que el potencial eléctrico escalar V puede expresarse en términos de una distribución de carga estática,

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_\nu d\nu}{4\pi\epsilon R} \quad \text{(estática)}$$

y el potencial magnético vectorial puede encontrarse de una distribución de corriente que sea constante con el tiempo,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \qquad (\text{dc})$$

Las ecuaciones diferenciales satisfechas por V

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad \text{(estática)}$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad \text{(dc)}$$

, respectivamente.

Las ecuaciones diferenciales satisfechas por V y A, pueden considerarse como las formas puntuales de las ecuaciones integrales

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \quad \text{(estática)}$$

y

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \quad \text{(dc)}$$

, respectivamente.

Encontrados V y A, los campos fundamentales se obtienen simplemente utilizando el gradiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{(estática)}$$

o el rotacional

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{(dc)}$$

Se desea ahora definir potenciales adecuados variantes con el tiempo que sean consistentes con las expresiones anteriores, las cuales se aplican cuando sólo están involucradas cargas estáticas y corrientes directas.

Estas ecuaciones establecen que la divergencia del rotacional $\nabla \cdot B = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$

Se aceptará en forma tentativa $B = \nabla \times A$ como satisfactoria para campos variantes con el tiempo y se enfocará la atención en $E = -\nabla \cdot V$.

Lo inadecuado de $E = -\nabla \cdot V$ es obvio, porque al aplicar el operador rotacional en cada lado y reconociendo que el rotacional del gradiente es igual a cero, confronta con

$$\nabla \times E = 0.$$

La forma puntual de la ley de Faraday establece que $\nabla \times E$ no es, en general, cero.

Para tratar de hacer una mejora se añade un término desconocido a $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot V$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot V + \boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{N}$$

$$\nabla \times E = 0 + \nabla \times N$$

$$\nabla \times N = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times N = -\frac{\partial(\nabla \times A)}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial A}{\partial t}$$

Esto implica que: N = - $\frac{\partial A}{\partial t}$

Esto implica que: N = - $\frac{\partial A}{\partial t}$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

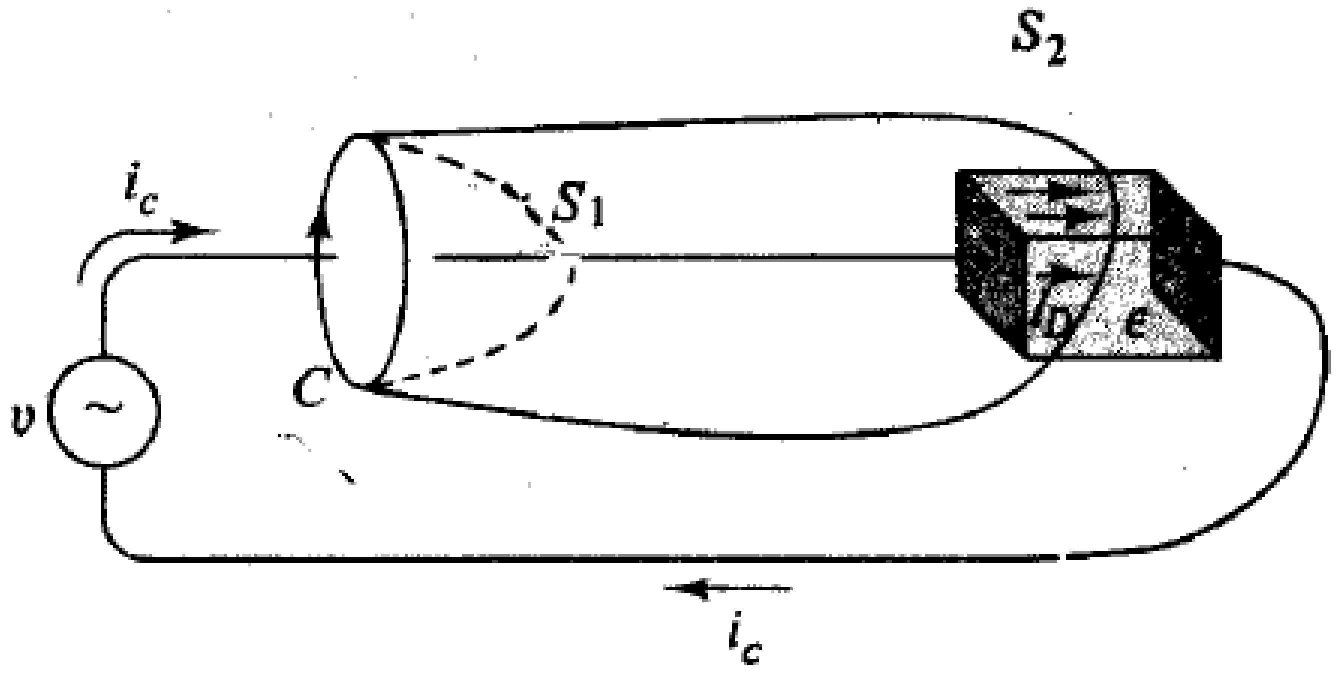
Y sustituyéndolas en las dos restantes ecuaciones de Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\rho_v}$$

A continuación se exponen unos ejemplos que se requiere analizar como han sido resueltos

1-Demuestre que la corriente de desplazamiento en el dieléctrico de un condensador de placas paralelas es igual a la corriente de conducción en los conectores.



Solución

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

donde A es el área de la placa y d es la separación. La corriente de conducción es entonces

$$i_c = C\frac{dv}{dt} = \frac{\epsilon A}{d}\frac{dv}{dt}$$

Por otro lado, el campo eléctrico es, despreciando el efecto de los bordes, $E = v/d$. Por tanto,

$$D = \epsilon E = \frac{\epsilon}{d}v \qquad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon}{d}\frac{dv}{dt}$$

y la corriente de desplazamiento es (**D** es normal a las placas)

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = \int_A \frac{\epsilon}{d}\frac{dv}{dt}dS = \frac{\epsilon A}{d}\frac{dv}{dt} = i_c$$

2-En un material para el cual σ= 5.0 S/m y ϵ_r=1, la intensidad de campo eléctrico es $E = 250 \sin 10^{10} t$(V/m).

Halle las densidades de las corrientes de conducción y desplazamiento y la frecuencia para la cual éstas tienen magnitudes iguales.

Solución

$$J_c = \sigma E = 1250 \operatorname{sen} 10^{10} t \quad (\mathrm{A/m^2})$$

Sobre la suposición de que la dirección del campo no varía con el tiempo,

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \epsilon_r 250 \operatorname{sen} 10^{10} t) = 22.1 \cos 10^{10} t \quad (\mathrm{A/m^2})$$

Para $J_c = J_D$,

$$\sigma = \omega \epsilon \qquad \text{ó} \qquad \omega = \frac{5.0}{8.854 \times 10^{-12}} = 5.65 \times 10^{11} \ \mathrm{rad/s}$$

lo que es equivalente de una frecuencia $\quad f = 8.99 \times 10^{10}\ \mathrm{Hz} = 89.9\ \mathrm{GHz}$

3-Un condensador coaxial con radio interno de 5 mm, externo de 6 mm y longitud 500 mm tiene un dieléctrico para el que ϵ_r = 6.7 y un voltaje aplicado $250\sin(377t)$(V).

Determine la corriente de desplazamiento I_D y compárela con la corriente de conducción I_C.

Suponga que el conductor interno está en $v = 0$. Entonces, del problema 8.7, el potencial en $0.005 \leq r \leq 0.006$ m es

$$v = \left[\frac{250}{\ln(6/5)}\operatorname{sen}377t\right]\left(\ln\frac{r}{0.005}\right) \quad \text{(V)}$$

De aquí,

$$\mathbf{E} = -\nabla v = -\frac{1.37 \times 10^{3}}{r}\operatorname{sen}377t\,\mathbf{a}_r \quad \text{(V/m)}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = -\frac{8.13 \times 10^{-8}}{r}\operatorname{sen}377t\,\mathbf{a}_r \quad \text{(C/m}^2\text{)}$$

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{3.07 \times 10^{-5}}{r}\cos 377t\,\mathbf{a}_r \quad \text{(A/m}^2\text{)}$$

$$i_D = J_D(2\pi r L) = 9.63 \times 10^{-5}\cos 377t \quad \text{(A)}$$

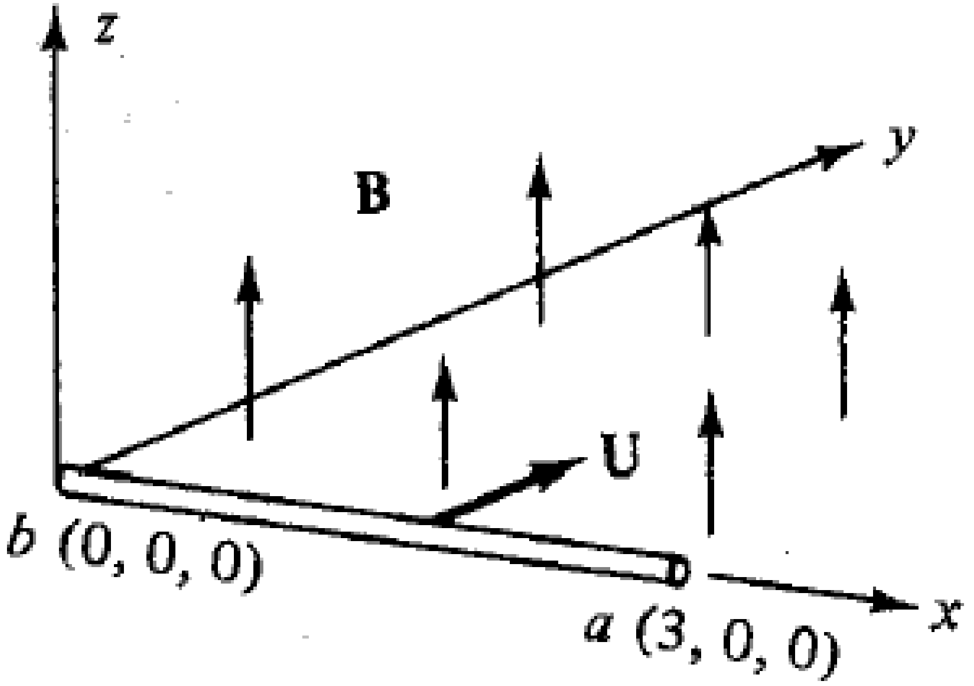
El método de análisis de circuitos para i_c requiere la capacitancia,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\,\epsilon_r\,L}{\ln(6/5)} = 1.02 \times 10^{-9}\ \text{F}$$

Entonces $$i_c = C\,\frac{dv}{dt} = (1.02 \times 10^{-9})(250)(377)(\cos 377t) = 9.63 \times 10^{-5}\cos 377t \quad \text{(A)}$$

Se ve que $$i_c = i_D.$$

4-Respecto a la figura. Halle el voltaje inducido en un conductor de 3m que yace a lo largo del eje y. Donde la velocidad U = 2.50 a_y (m/s) en un campo uniforme B = 0.50 a_z T.



El campo móvil **E** es $\mathbf{U} \times \mathbf{B} = 1.25\,\mathbf{a}_x$ V/m, como antes. Entonces, si los extremos están en (0, 0, 0) y en (0, 3, 0) m.

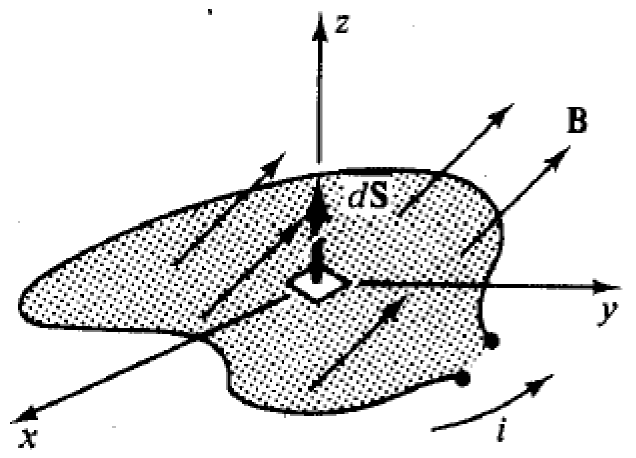
$$v = \int_0^3 1.25\,\mathbf{a}_x \cdot dy\,\mathbf{a}_y = 0$$

Más generalmente, un conductor que se mueve a lo largo de su propia longitud no corta ningún flujo magnético.

5-Un área de 0.65 m^2 en el plano z=0 está encerrada por un filamento conductor.

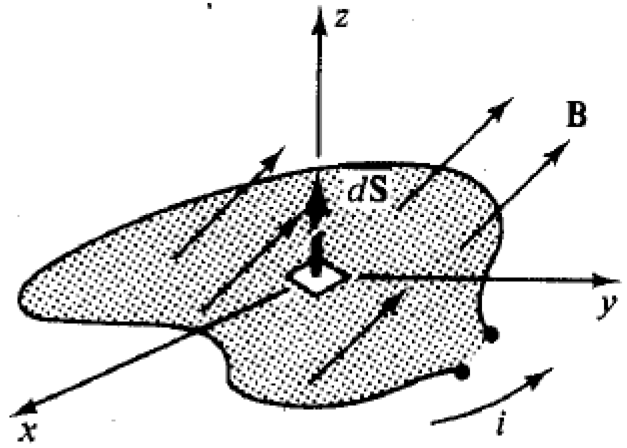
Halle el voltaje inducido, sabiendo que

$$\mathbf{B} = 0.05 \cos 10^3 t \, (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2} \quad \text{(T)}$$



$$\mathbf{B} = 0.05 \cos 10^3 t\,(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2} \quad (\mathrm{T})$$

de acuerdo a la figura



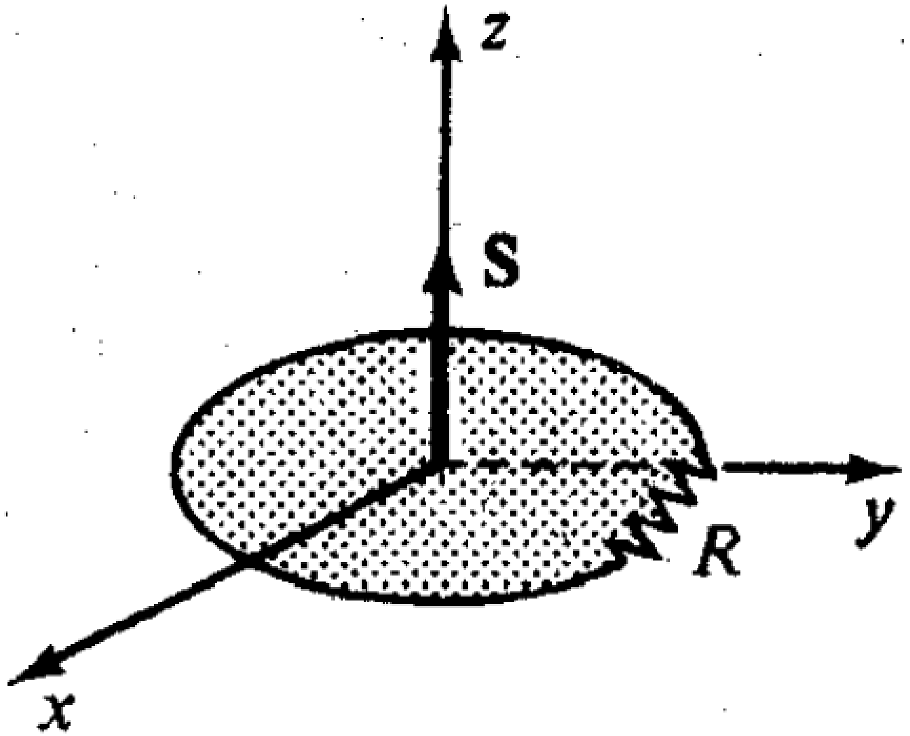
$$v = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot dS\,\mathbf{a}_z$$

$$= \int_S 50 \operatorname{sen} 10^3 t \left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \cdot dS\,\mathbf{a}_z$$

$$= 23.0 \operatorname{sen} 10^3 t \quad (\mathrm{V})$$

El campo decrece en el primer medio ciclo de la función coseno. La dirección de i en un circuito cerrado debe ser tal que se oponga a esta disminución. De esta manera la corriente convencional debe tener la dirección que aparece en la figura.

6-La espira conductora circular que aparece en la figura, yace en el plano z=O, tiene un radio de 0.10 m y una resistencia de 5.0 Ω . Dado B = 0.20 $sin\, 10^3 t\ a_z$, determine la corriente.



$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = 2 \times 10^{-3}\pi \operatorname{sen} 10^3 t \quad \text{(Wb)}$$

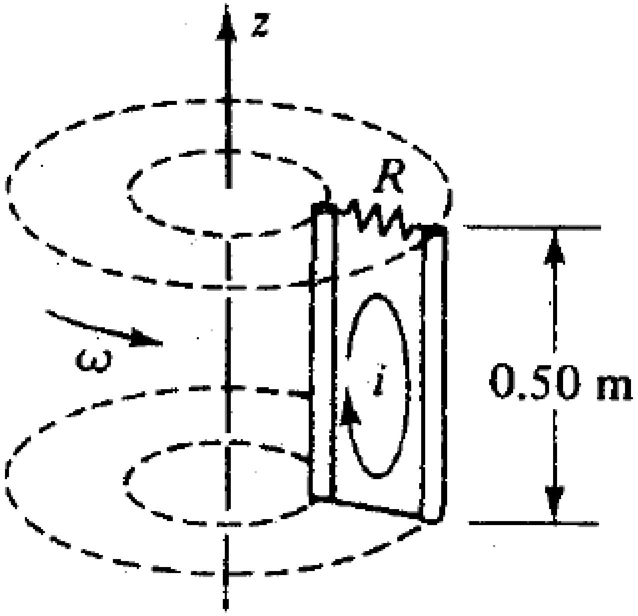
$$v = -\frac{d\phi}{dt} = -2\pi \cos 10^3 t \quad \text{(V)}$$

$$i = \frac{v}{R} = -0.4\,\pi \cos 10^3 t \quad \text{(A)}$$

En $t = 0+$ el flujo aumenta. Para oponerse a este aumento, la corriente de la espira debe tener una dirección instantánea $-\mathbf{a}_y$ donde la espira cruza el eje x positivo.

7-En la figura una espira conductora rectangular, con resistencia R = 0.20 Ω, gira a 500 rev/min. El conductor vertical en r 1 = 0.03 m está en un campo B_1 = 0.25 a_r, T, y el conductor en r2 = 0.05 m está en un campo B_2 =0.80 a_r, T.

Halle la corriente en la espira.



$$\mathbf{U}_1 = (500)(\tfrac{1}{60})(2\pi)(0.03)\,\mathbf{a}_\phi = 0.50\,\pi\mathbf{a}_\phi \text{ m/s}$$

$$v_1 = \int_0^{0.50} (0.50\,\pi\mathbf{a}_\phi \times 0.25\,\mathbf{a}_r) \cdot dz\,\mathbf{a}_z = -0.20\text{ V}$$

Similarmente, $\mathbf{U}_2 = 0.83\,\pi\mathbf{a}_\phi$ m/s y $v_2 = -1.04$ V. Entonces

$$i = \frac{1.04 - 0.20}{0.20} = 4.20\text{ A}$$