

# ***Campos Electromagneticos***

## ***Campos variantes con el tiempo y ecuaciones de Maxwell***

### ***Principio:***

***El campo eléctrico que produce un campo magnético cambiante y el campo magnético que genera un campo eléctrico cambiante.***

### ***Un poco de Historia***

***El primero de estos conceptos es el resultado del trabajo experimental de Michael Faraday, y el segundo, de los esfuerzos teóricos de James Clerk Maxwell.***

*En realidad, Maxwell se inspiró en el trabajo experimental de Faraday y en la imagen mental de las “líneas de fuerza” que éste introdujo en el desarrollo de su teoría eléctrica y magnética.*

***Maxwell desarrolló su teoría.***

***Esto le tomó cinco años.***

***Las cuatro ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética presentadas en esta sección llevan su nombre.***

## ***Ley de Faraday***

***Después de que Oersted demostrara en 1820 que una corriente eléctrica afecta la aguja de una brújula, Faraday manifestó su creencia de que si una corriente podía producir un campo magnético, entonces un campo magnético debería ser capaz de producir una corriente.***

*El concepto de “campo” no existía en ese entonces y el éxito de Faraday consistió en demostrar que una corriente podía producirse por “magnetismo”.*

*Trabajó en este problema de manera intermitente a lo largo de un periodo de 10 años, hasta que finalmente tuvo éxito en 1831.*

***Enrolló dos alambres separados alrededor de un toroide de hierro y colocó un galvanómetro en un circuito, y en el otro, una batería.***

***Al cerrar el circuito de la batería observó una deflexión momentánea del galvanómetro; una deflexión similar, pero en sentido contrario, ocurría cuando se desconectaba la batería.***

*Esto, por supuesto, fue el primer experimento en el que se incluía un campo magnético variable, que fue seguido por una demostración de que tanto un campo magnético móvil como una bobina móvil podían producir una deflexión del galvanómetro.*



*En términos del campo, ahora se puede decir que un campo magnético que varía con el tiempo produce una fuerza electromotriz (fem) capaz de producir una corriente en un circuito cerrado adecuado.*

*Una fuerza electromotriz no es otra cosa que un voltaje procedente de los conductores que se mueven en un campo magnético o de campos magnéticos variantes, que serán definidos más adelante.*

*Se acostumbra expresar la ley de Faraday como:*

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} [V]$$

*La ecuación implica una trayectoria cerrada, aunque no necesariamente conductora; la trayectoria cerrada, por ejemplo, puede incluir un capacitor o ser solamente una línea imaginaria en el espacio.*

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} [V]$$

*El flujo magnético es el flujo que cruza a través de cualquier superficie cuyo perímetro sea una trayectoria cerrada y  $d\Phi/dt$  es la razón de cambio de dicho flujo con respecto al tiempo.*

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} [V]$$

***Un valor diferente de cero de:  $d\Phi/dt$  puede ser el resultado de cualquiera de las siguientes situaciones.***

- 1. Un flujo que cambia con el tiempo circundando una trayectoria cerrada fija.***
- 2. El movimiento relativo entre un flujo estable y una trayectoria cerrada.***
- 3. Una combinación de las dos.***

*El signo de menos indica que la fem tiene una dirección tal que produce una corriente, cuyo flujo, si se suma al flujo original, reduciría la magnitud de la fem.*

*Este enunciado que establece que el voltaje inducido actúa para producir un flujo opuesto se conoce como la ley de Lenz.*

*Si la trayectoria cerrada es un filamento conductor enrollado de  $N$  vueltas, por lo general es suficientemente preciso considerar las vueltas como coincidentes y hacer*

$$fem = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

*donde  $\Phi$  se interpreta como el flujo que pasa a través de cualquiera de las  $N$  trayectorias coincidentes.*

*Se necesita definir la fem de acuerdo con su utilización de las dos ecuaciones expresadas.*

*Obviamente la fem es un escalar y (esto quizás no es tan obvio) un análisis dimensional muestra que se mide en volts.*

*Se define la fem como*

$$fem = \oint E \cdot dl$$



*obsérvese que es el voltaje a lo largo de una trayectoria cerrada específica.*

*Si se cambia cualquier parte de la trayectoria, la fem por lo general cambia.*

*La desviación con respecto a los resultados estáticos se observa claramente en la ultima ecuación,*

$$fem = \oint E \cdot dl$$

*puesto que una intensidad de campo eléctrico resultado de una distribución de carga estática genera una diferencia de potencial cero a lo largo de una trayectoria cerrada.*

*En electrostática, la integral de línea da lugar a una diferencia de potencial; con campos variantes con el tiempo, el resultado es una fem o un voltaje.*

*Al sustituir  $\Phi$  en por la integral de superficie de  $B$ , se tiene:*

$$fem = \oint E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \int B \cdot dS$$

***Una densidad de flujo  $B$  en la dirección de  $\overline{dS}$  que aumenta con el tiempo produce un valor promedio de  $E$  que es opuesto a la dirección positiva en que se recorre la trayectoria cerrada.***

***El análisis se dividirá en dos partes, primero se encontrará la contribución total que hace a la fem un campo variable dentro de una trayectoria estacionaria (fem de transformador), y después se considerará una trayectoria en movimiento dentro de un campo constante (fem de generador).***

*Considérese primero una trayectoria estacionaria.*

*El flujo magnético es la única cantidad que varía con el tiempo en el lado derecho de*

$$fem = \oint E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \int B \cdot dS$$

*y la derivada parcial puede introducirse dentro de la integral*

***Aplicando el teorema de Stokes a la integral de línea cerrada, se tiene***

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

*en donde las integrales de superficie pueden evaluarse sobre superficies idénticas.*

*Las superficies son generales y pueden escogerse como diferenciales,*

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}) = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



*Ésta es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell que generalmente se emplea.*

*La ecuación:* 
$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

*La ecuación:  $\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$*

*es su forma integral y es equivalente a la ley de Faraday aplicada a una trayectoria fija.*

*Si  $\overline{\mathbf{B}}$  no es una función del tiempo, evidentemente se reducen a las ecuaciones electrostáticas*

*Como ejemplo de la interpretación de las ecuaciones dinámicas expuestas, supóngase un campo magnético sencillo que aumente exponencialmente con el tiempo dentro de una región cilíndrica  $\rho < b$ ,*

$$\overline{\mathbf{B}} = B_0 e^{kt} \overline{\mathbf{a}}_z$$

*donde  $B_0 = \text{constante}$ . Escogiendo la trayectoria circular  $\rho = a$ ,  $a < b$ , en el plano  $z = 0$ , a lo largo de la cual  $E_\phi$  debe ser constante por simetría, entonces se tiene a partir de*

$$fem = \oint E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \int \overline{B} \cdot \overline{dS} = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

$$fem = 2\pi a E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi a^2$$

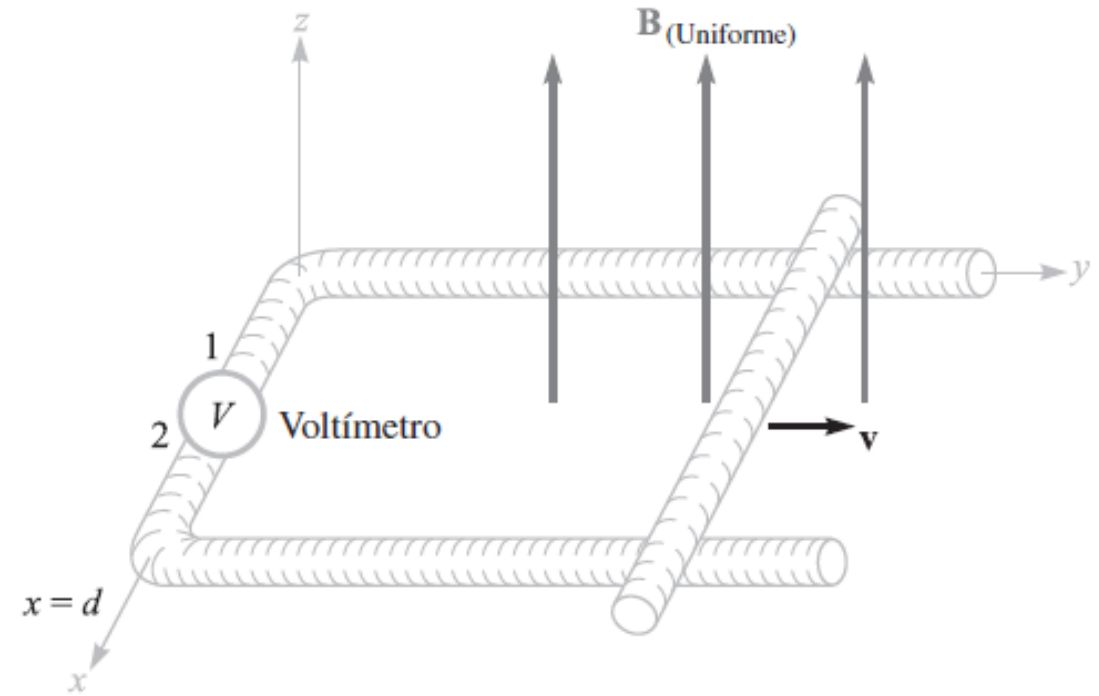
$$fem = 2\pi a E_{\phi} = -kB_0 e^{kt} \pi a^2$$

*Si se sustituye el radio **a** por  $\rho$ ,  $\rho < b$ , la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto es*

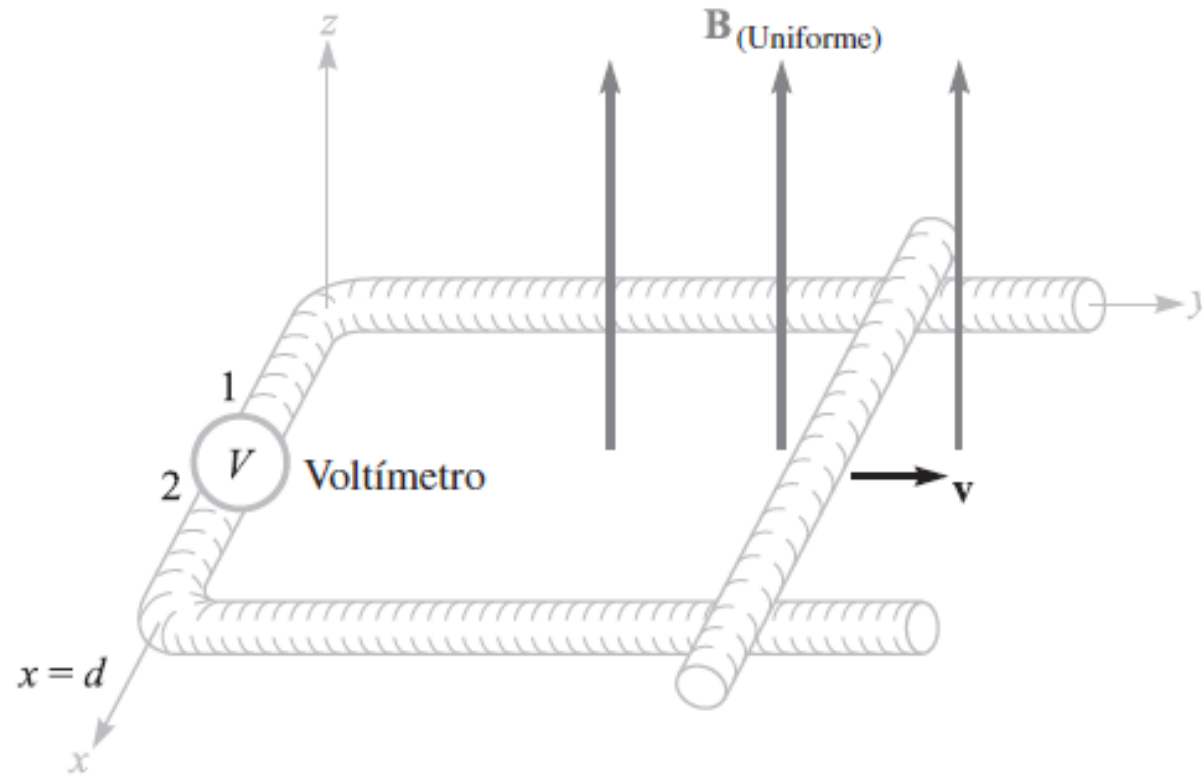
$$E = -\frac{kB_0 e^{kt} \rho}{2} a_{\phi}$$

***Ahora considérese el caso de un flujo constante en el tiempo y una trayectoria móvil cerrada.***

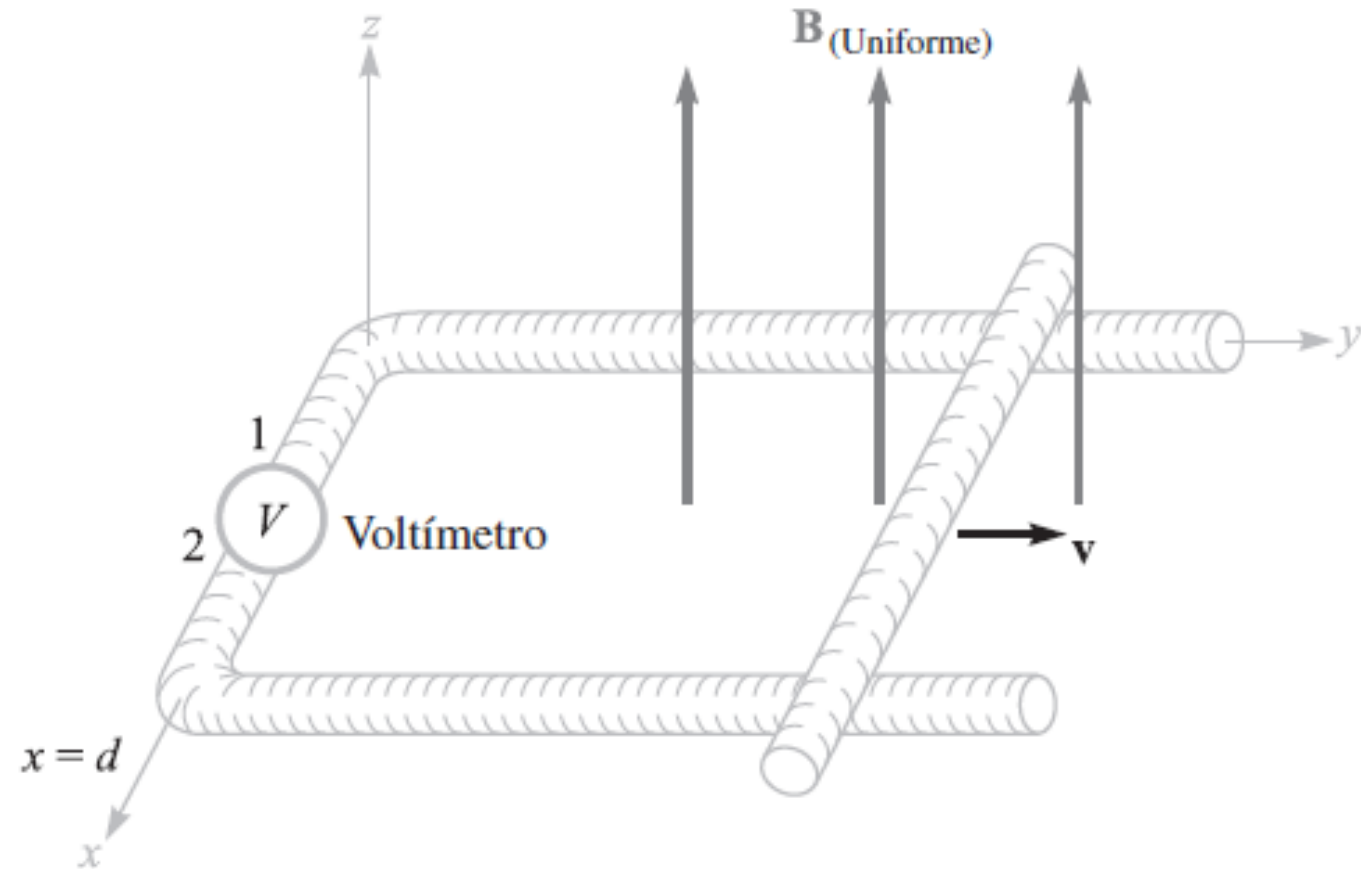
***Antes de obtener cualquier resultado especial con la ley de Faraday ,  $fem = -\frac{d\Phi}{dt}$  se utilizará la ley fundamental para analizar el problema específico planteado en la figura 1***



*El circuito cerrado consiste de dos conductores paralelos conectados en un extremo por un voltímetro de alta resistencia y de dimensiones despreciables, y en el otro extremo, de una barra deslizante que se mueve a una velocidad  $v$ .*

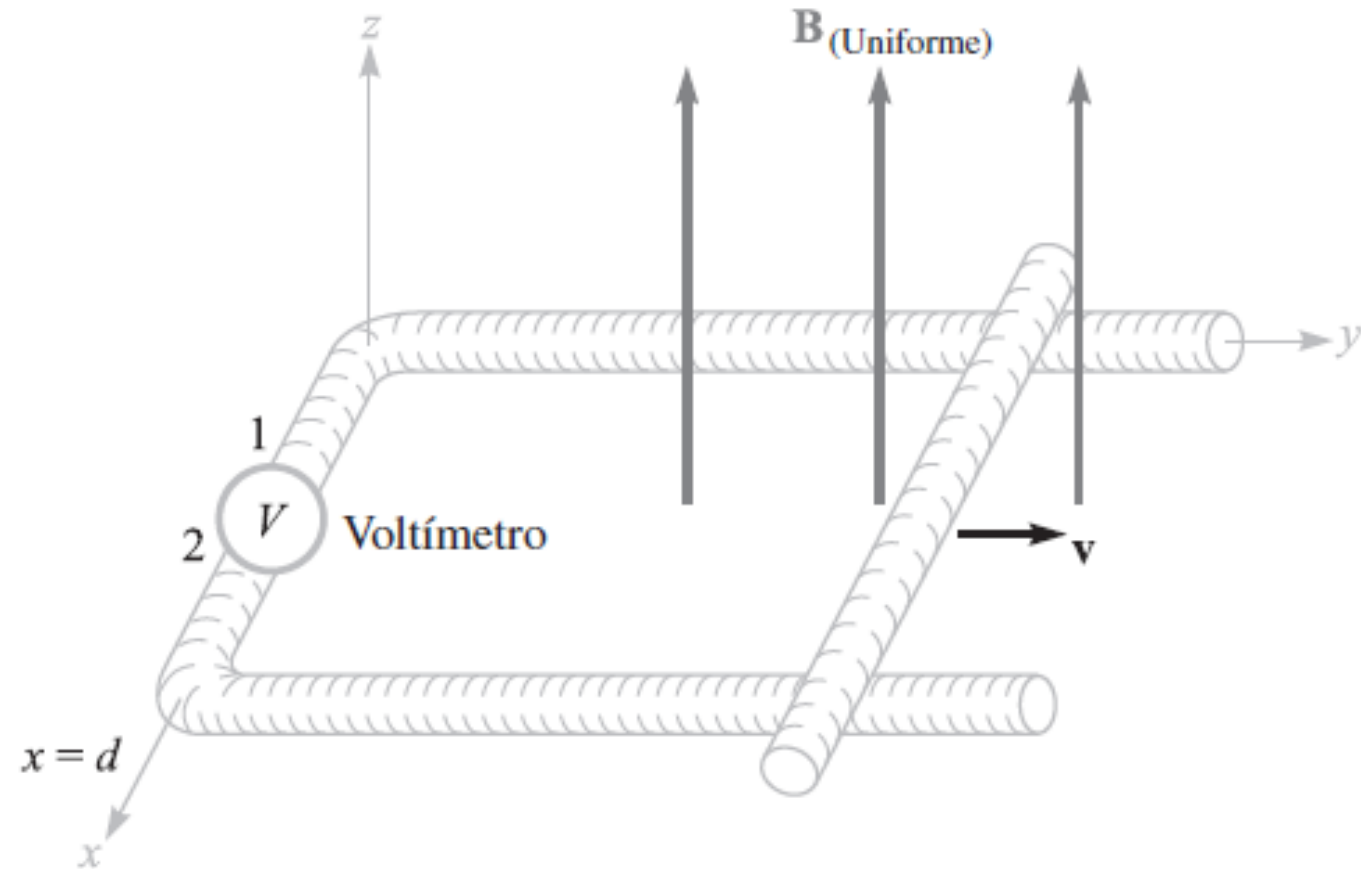


***La densidad de flujo magnético  $B$  es constante (tanto espacial como temporalmente) y es normal al plano que contiene la trayectoria cerrada.***



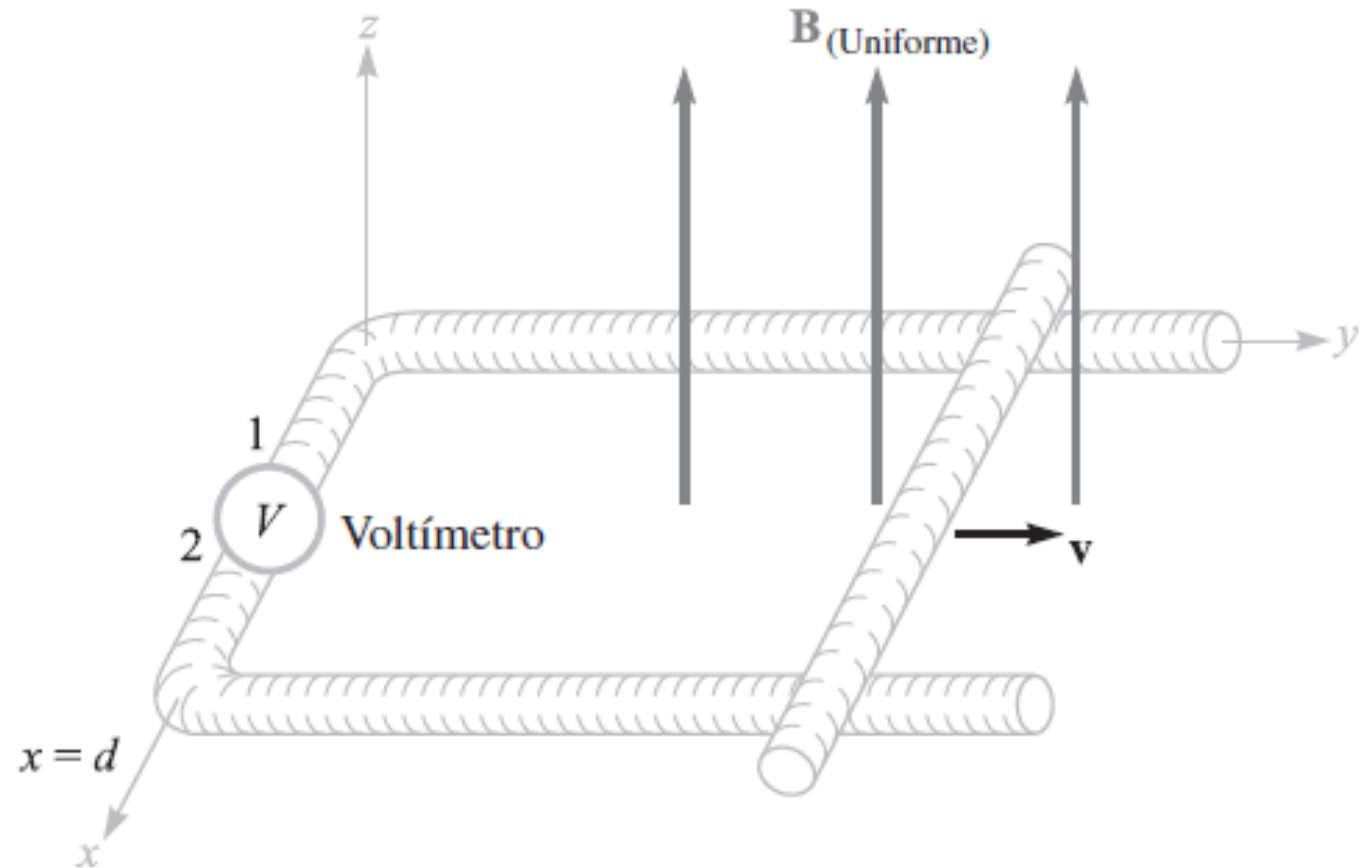


***La posición de la barra móvil transversal será denotada por  $y$ ; entonces, el flujo que pasa a través de la superficie dentro de la trayectoria cerrada en cualquier tiempo  $t$  es,  $\Phi = Byd$***



*y aplicando la Ley de Faraday*

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Byd) = Bvd$$



*Como la fem está definida como  $-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  y se tiene una trayectoria conductora, ahora es posible determinar  $\vec{E}$  en cualquier punto a lo largo de la trayectoria cerrada.*

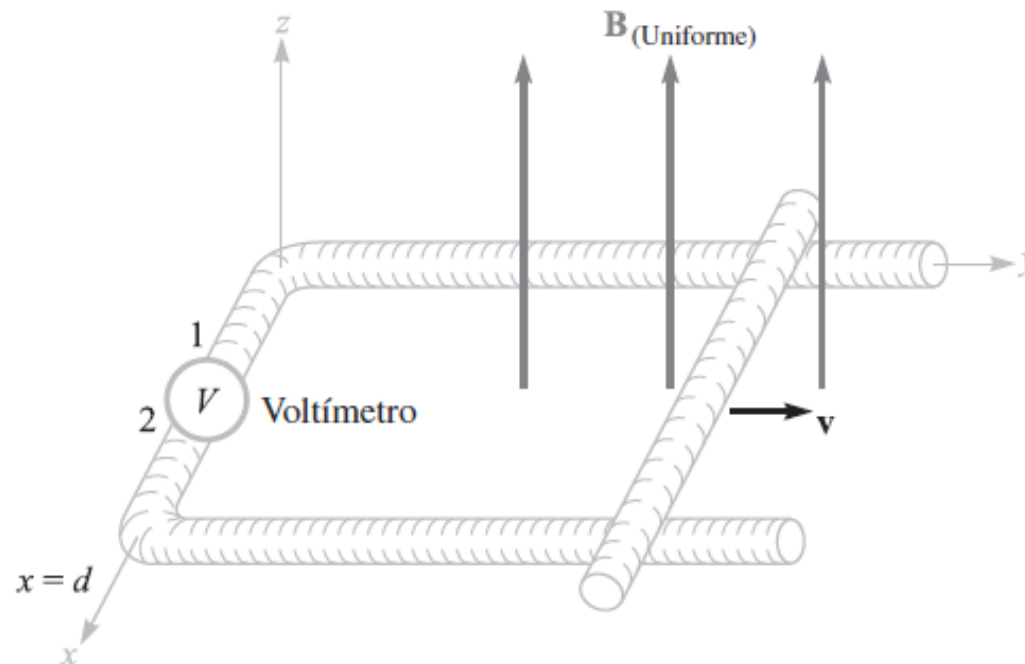
*Se encontró en electrostática que la componente tangencial de  $E$  es cero en la superficie de un conductor, y se demostrará más adelante que la componente tangencial es cero en la superficie de un conductor perfecto ( $\sigma = \infty$ ) para toda condición de variación con el tiempo.*

*Esto equivale a decir que un conductor perfecto siempre produce un “corto circuito”.*

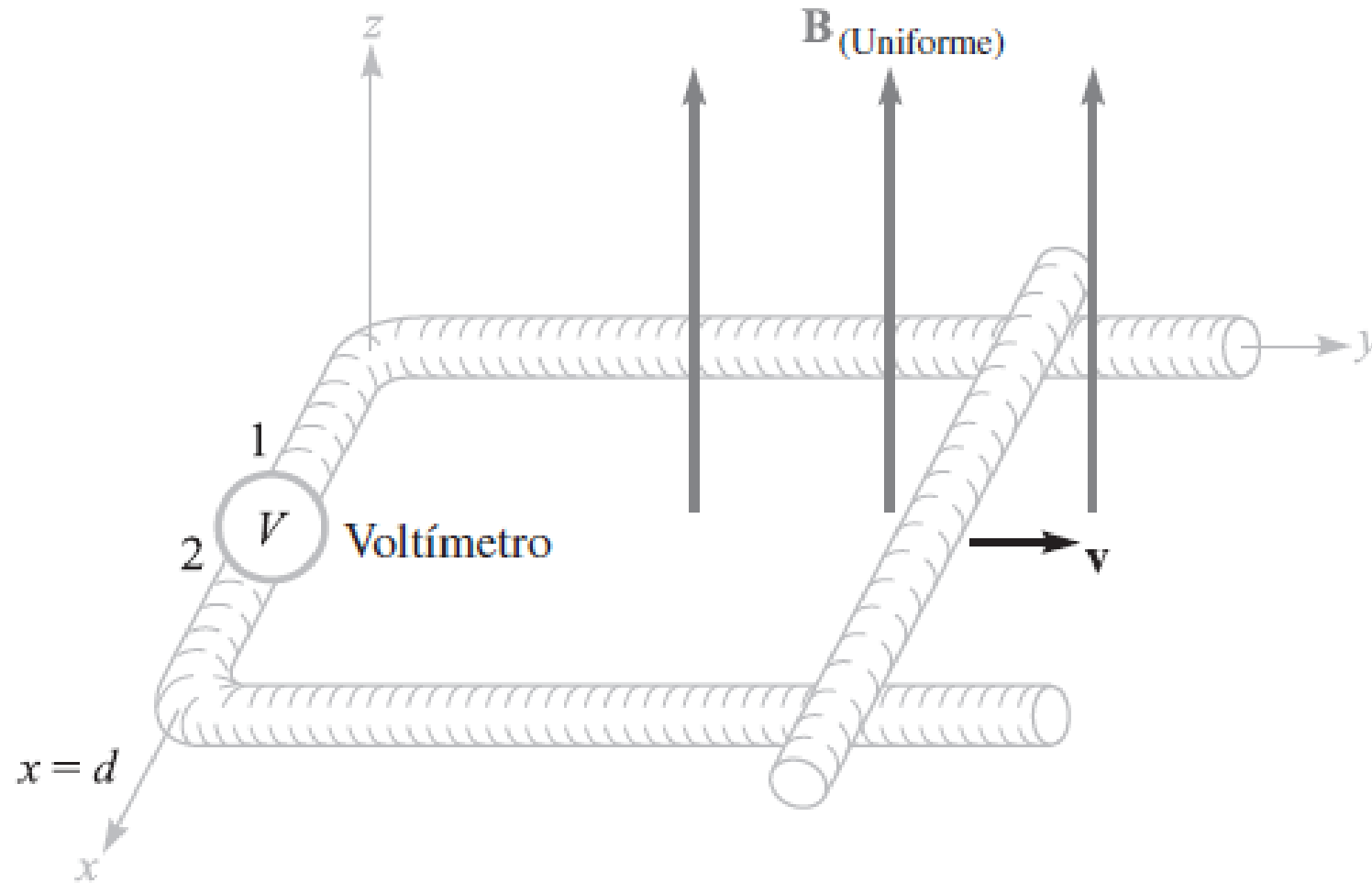
*La trayectoria cerrada, mostrada en la figura 1, puede considerarse en su totalidad como un conductor perfecto, a excepción del voltímetro.*

*Entonces la evaluación efectiva de  $-\int \overline{E} \cdot \overline{d\mathbf{l}}$  no debe involucrar contribuciones a lo largo de la barra móvil, los rieles y las terminales del voltímetro.*

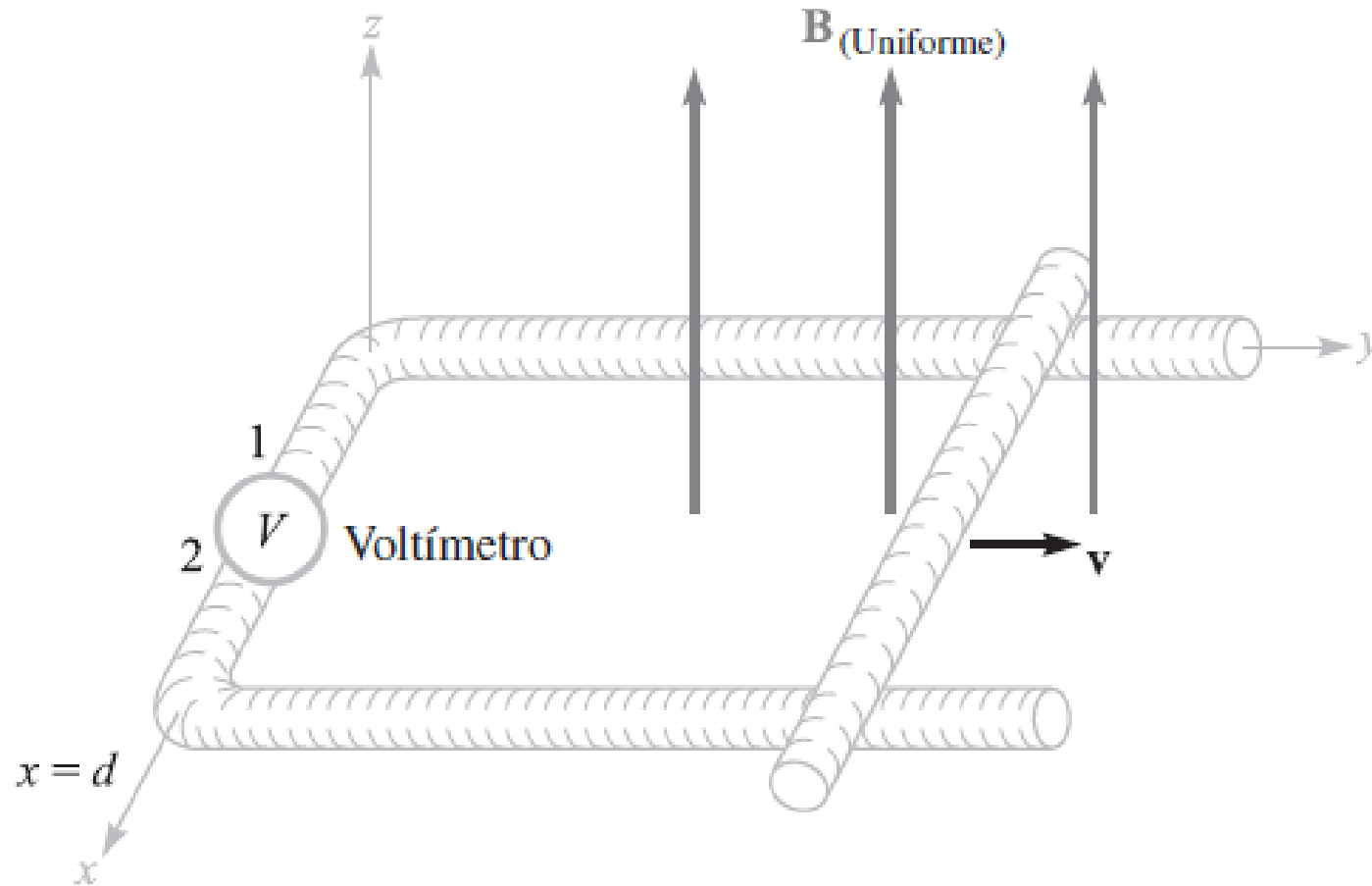
***Dado que se está integrando en la dirección inversa al movimiento de las manecillas del reloj (manteniendo el interior del lado positivo de la superficie a la izquierda, como es usual), la contribución  $\vec{E} \cdot \Delta\vec{L}$  a través del voltímetro debe ser  $-\vec{B}\vec{v}d$ , mostrando que la intensidad de campo eléctrico en el instrumento está dirigida de la terminal 2 a la terminal 1.***



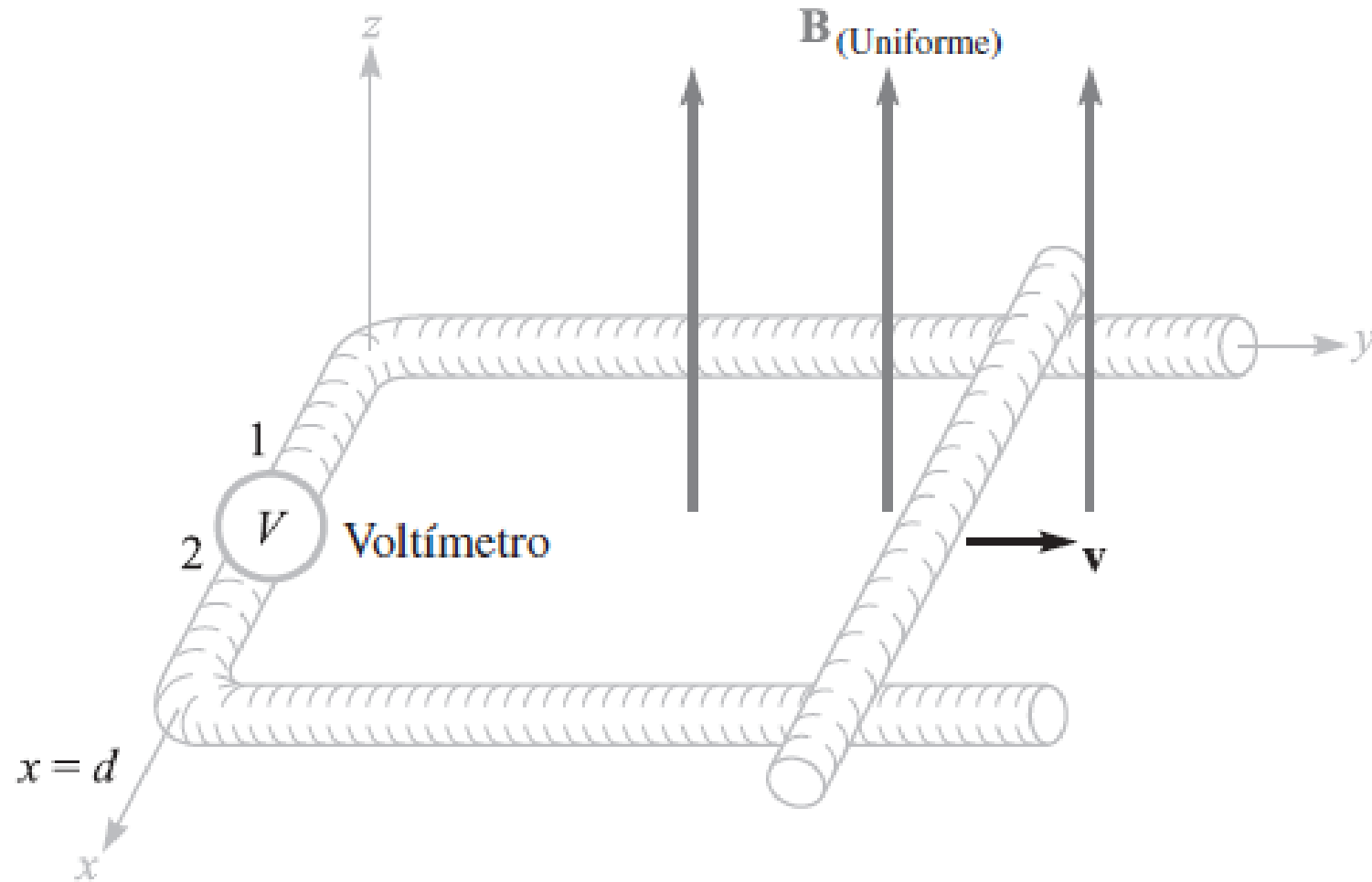
***Para obtener una lectura de la escala, la terminal positiva del voltímetro debe ser, por consiguiente, la terminal 2.***



***La dirección del pequeño flujo de corriente resultante puede confirmarse observando que el flujo encerrado se reduce debido a una corriente en sentido de las manecillas del reloj de acuerdo con la ley de Lenz.***



*Se ve una vez más que la terminal positiva del voltímetro debe ser la terminal 2.*





*Considérese ahora este ejemplo utilizando el concepto de fem de movimiento.*

*La fuerza sobre una carga  $Q$  que se mueve a la velocidad  $\bar{v}$  en el campo magnético  $\bar{B}$  es*

$$\bar{F} = Q\bar{v} \times \bar{B}$$

$$\frac{\bar{F}}{Q} = \bar{v} \times \bar{B}$$

*La barra conductora deslizable está compuesta de cargas positivas y negativas, y cada una experimenta esta fuerza. La fuerza por unidad de carga, dada por*

$$\frac{\overline{F}}{Q} = \overline{v} \times \overline{B}$$

*, se llama intensidad de campo eléctrico móvil  $E_m$*

$$\overline{E}_m = \overline{v} \times \overline{B}$$

*Si el conductor móvil estuviera arriba de los rieles, la intensidad de campo eléctrico forzaría a los electrones a moverse hacia un extremo de la barra (el más lejano) hasta que el campo estático debido a estas cargas equilibrara al campo que indujo el movimiento de la barra.*

*La intensidad del campo eléctrico resultante en la dirección tangencial sería entonces cero a lo largo de la longitud de la barra. La fem de movimiento que produce el desplazamiento del conductor es entonces*

$$fem = \int \overline{E}_m \cdot \overline{dl} = \int (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot \overline{dl}$$

*donde la última integral puede tener un valor diferente de cero solamente a lo largo de la porción de la trayectoria en movimiento a lo largo de cualquier porción para la cual  $v$  tenga un valor distinto de cero. Evaluando el lado derecho de la ecuación, se llega a*

$$fem = \int \overline{E}_m \cdot \overline{dl} = \int (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot \overline{dl} = \int_d^0 v B dx = -v B d$$

*como anteriormente se obtuvo. Ésta es la fem total, puesto que  $B$  no es una función del tiempo.*

*En el caso de un conductor que se mueve en un campo magnético constante se puede asociar una intensidad de campo eléctrico de movimiento dada por*

$$\overline{E}_m = (\overline{v} \times \overline{B})$$

*a cada parte del conductor móvil, y evaluar la fem resultante por medio de:*  $fem = \int \overline{E}_m \cdot \overline{dl} = \int \overline{E}_m \cdot \overline{dl} = \int (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot \overline{dl}$

*Si la densidad de flujo magnético también cambia con el tiempo, entonces se deben incluir ambas contribuciones, la fem de transformador  $-\frac{d}{dt} \int \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{d\mathbf{S}}$*

*y la fem de movimiento  $\int (\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}}) \cdot \overline{d\mathbf{l}}$ ,*

$$fem = -\frac{d}{dt} \int \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{d\mathbf{S}} + \int (\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}}) \cdot \overline{d\mathbf{l}}$$

***Esta expresión es equivalente al sencillo enunciado***

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt}$$

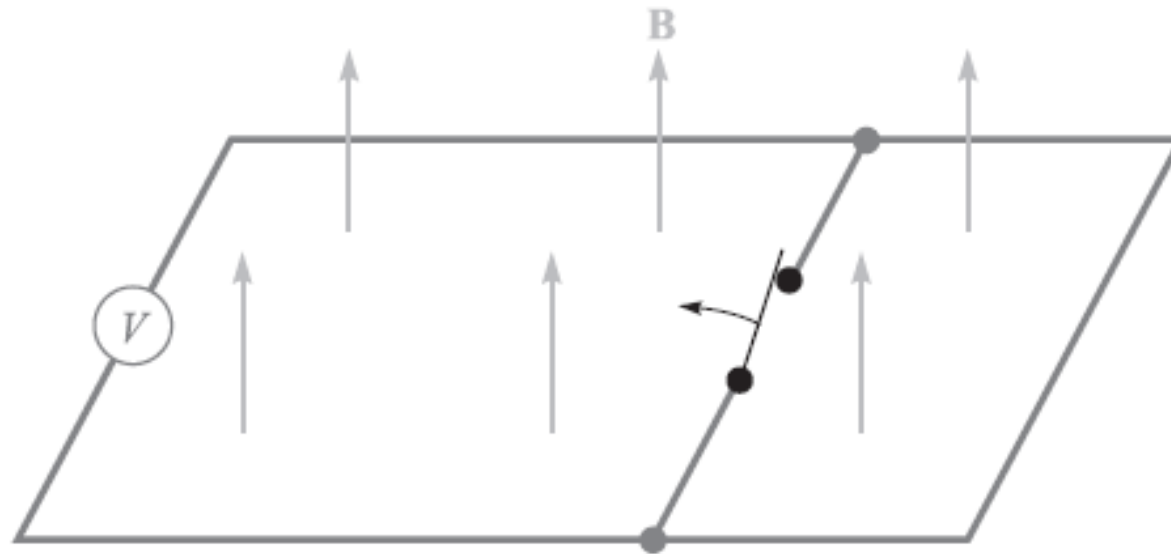
***y cualquiera de las dos puede emplearse para determinar estos voltajes inducidos.***

***A pesar de que  $fem = -\frac{d\Phi}{dt}$  parece sencilla, existen algunos ejemplos inventados en los cuales su aplicación adecuada es muy difícil.***



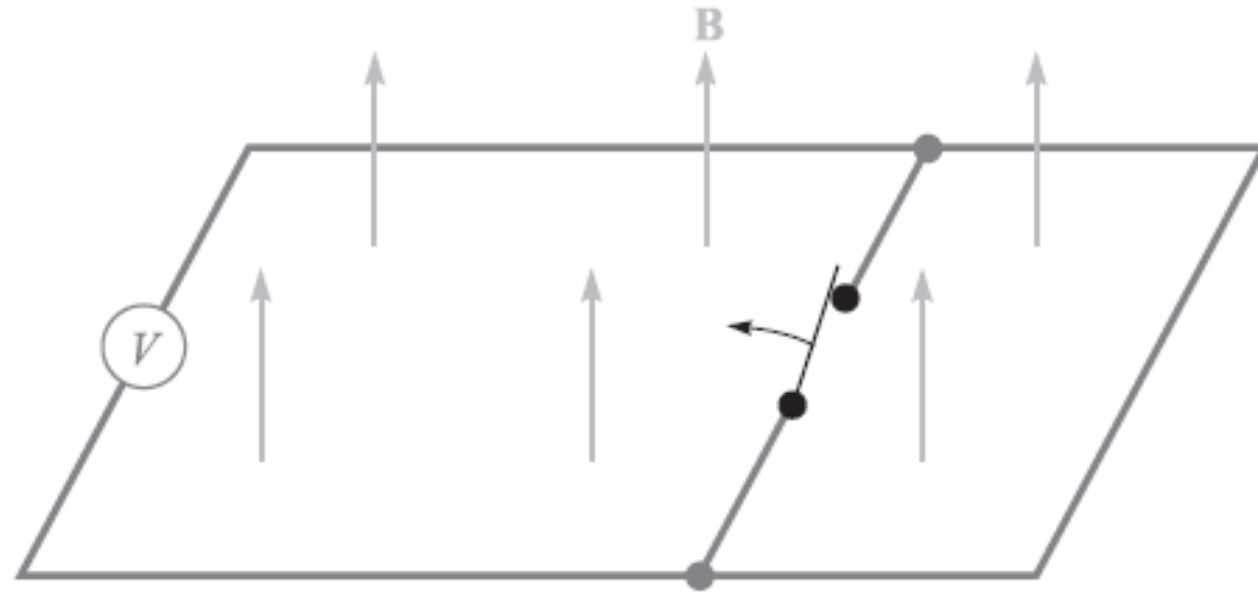
***Generalmente, estos ejemplos involucran contactos deslizantes o interruptores; siempre incluyen la sustitución de una parte del circuito por una nueva.***

*Como ejemplo, considérese el sencillo circuito de la figura 2, que contiene varios alambres conductores perfectos, un voltímetro ideal, un campo uniforme y constante  $B$  y un interruptor.*



**Figura 2** Un aumento aparente en eslabonamientos de flujo no conduce a un voltaje inducido cuando una parte del circuito es simplemente sustituida por otra mediante la apertura de un interruptor. Ninguna indicación se observará en el voltímetro.

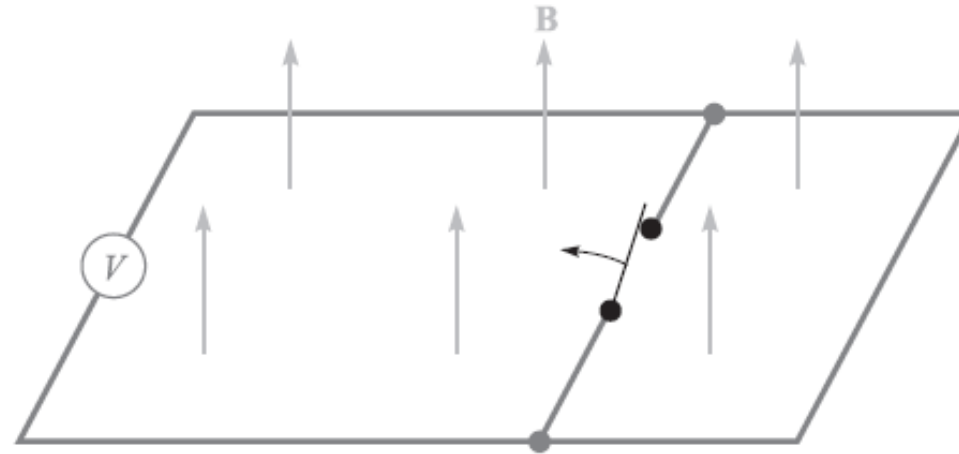
*Cuando el interruptor se abre, obviamente hay un mayor flujo encerrado en el circuito del voltímetro, sin embargo, continúa marcando cero.*



**Figura 2** Un aumento aparente en eslabonamientos de flujo no conduce a un voltaje inducido cuando una parte del circuito es simplemente sustituida por otra mediante la apertura de un interruptor. Ninguna indicación se observará en el voltímetro.

*El cambio en el flujo no fue producido ni por un  $B$  que varía en el tiempo, ni por un conductor moviéndose a través del campo magnético.*

*En su lugar, un nuevo circuito sustituyó al viejo. Así que es necesario tener cuidado al evaluar el cambio en eslabonamientos de flujo.*



**Figura 2** Un aumento aparente en eslabonamientos de flujo no conduce a un voltaje inducido cuando una parte del circuito es simplemente sustituida por otra mediante la apertura de un interruptor. Ninguna indicación se observará en el voltímetro.

***La separación de la fem en dos partes indicadas, una debida a la razón de cambio de  $B$  con el tiempo y la otra al movimiento del circuito, es de alguna manera arbitraria considerando que esto depende de la velocidad relativa del observador y del sistema.***

***Un campo que cambia tanto en el tiempo como en el espacio parecería constante a un observador que se mueve con el campo.***

***Esta línea de razonamiento se desarrolla con mayor profundidad aplicando la teoría especial de la relatividad a la teoría electromagnética.***