Campos Electromagneticos

Corriente de desplazamiento

Se utilizó la ley experimental de Faraday para obtener una de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

la cual muestra que un campo magnético variante con el tiempo produce un campo eléctrico.

Si se recuerda la definición de rotacional, se ve que este campo eléctrico tiene la propiedad espacial de la circulación; su integral de línea a lo largo de una trayectoria cerrada en general no es cero.

Ahora se prestará atención al campo eléctrico que varía con el tiempo.

Primero se debe observar la forma diferencial o puntual de la ley circuital de Ampère cuando se aplica a campos magnéticos estables,

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

y mostrar que es inadecuada para condiciones que varían con el tiempo, tomando la divergencia de ambos lados de la ecuación,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} \equiv \mathbf{0} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J}$$

Como la divergencia del rotacional es igual a cero,

$$\nabla \cdot J$$

Sin embargo, la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

muestra entonces que la ecuación:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

Es verdadera si $\frac{\partial \rho_v}{\partial t}=0$

Ésta es una limitante irreal, y $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ *debe corregirse antes de aceptarla para campos variantes con el tiempo.*

Supóngase que se añade un término desconocido G a la ecuación:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{G}$$

Aplicando de nuevo la divergencia, se tiene ecuación:

$$\mathbf{0} = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \boldsymbol{G}$$

Por lo tanto si es posible que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho_v}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

Reemplazando ρ_v por $\nabla\cdot D$

$$\nabla \cdot G = \frac{\partial(\nabla\cdot D)}{\partial t} = \frac{\nabla\cdot\partial(D)}{\partial t}$$

de la cual se obtiene la solución más sencilla para:

$$G = \frac{\partial D}{\partial t}$$

Entonces la ley circuital de Ampère, en su forma diferencial o puntual, se transforma en

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

La ecuación

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

es una forma que se ha obtenido para que no haya desacuerdo con la ecuación de continuidad.

Además, es consistente con todas las ecuaciones ya obtenidas.

Ahora se tiene la segunda de las ecuaciones de Maxwell y se investigará su significado.

El término adicional $\frac{\partial D}{\partial t}$ ***tiene dimensiones de densidad de corriente, amperes sobre metro cuadrado.***

Como resulta de una densidad de flujo eléctrico variante con el tiempo (o densidad de desplazamiento), Maxwell lo nombró una densidad de corriente de desplazamiento.

Algunas veces se denota por J_D***:***

Ahora se tiene la segunda de las ecuaciones de Maxwell y se investigará su significado.

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_D$$

$$\boldsymbol{J}_D = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

La densidad de corriente de conducción,

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

es la carga eléctrica en movimiento (generalmente electrones) en una región con densidad neta de carga nula, y la densidad de corriente de convección,

$$\boldsymbol{J} = \rho_v \boldsymbol{v}$$

Siendo

$$\boldsymbol{J} = \rho_v \boldsymbol{v}$$

el movimiento de la densidad de carga volumétrica. Ambas se representan por J

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

La densidad de corriente ligada, por supuesto, también está incluida en H.

En un medio no conductor en que no está presente una densidad de carga volumétrica, J = 0, y entonces

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

Obsérvando la simetría entre: $\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$

Se tiene: $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

Una vez más, la analogía entre los vectores de intensidad E y H y los vectores de densidad de flujo D y B es aparente.

Sin embargo, esta analogía, falla cuando se investigan fuerzas sobre partículas.

La fuerza sobre una carga está relacionada con E y B, y existen muy argumentos que muestran una analogía entre E y B, y entre D y H.

Sin embargo, se omitirán y sólo el concepto de corriente de desplazamiento tal vez le fue sugerido a Maxwell por la primera simetría mencionada anteriormente.

La corriente total de desplazamiento que cruza cualquier superficie se expresa por la integral de superficie,

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y se puede obtener la versión para variantes con el tiempo de la ley circuital de Ampere integrando

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

sobre la superficie S,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y aplicando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

¿Cuál es la esencia de la densidad de corriente de desplazamiento?

Estúdiese el circuito sencillo de la figura 1, que contiene un circuito filamentario y un capacitor de placas paralela

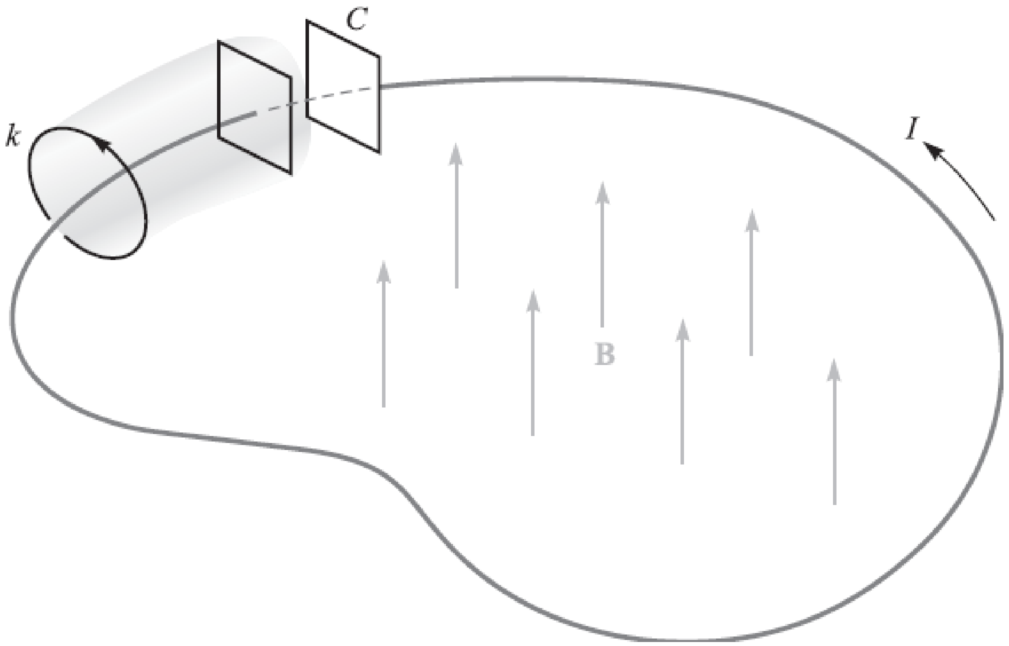

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Dentro del lazo se establece un campo magnético, que varía sinusoidalmente con el tiempo, para producir una fem sobre la trayectoria cerrada (el filamento más la línea punteada entre las placas del capacitor) que se tomará como

$$fem = v_0 \cos(wt)$$

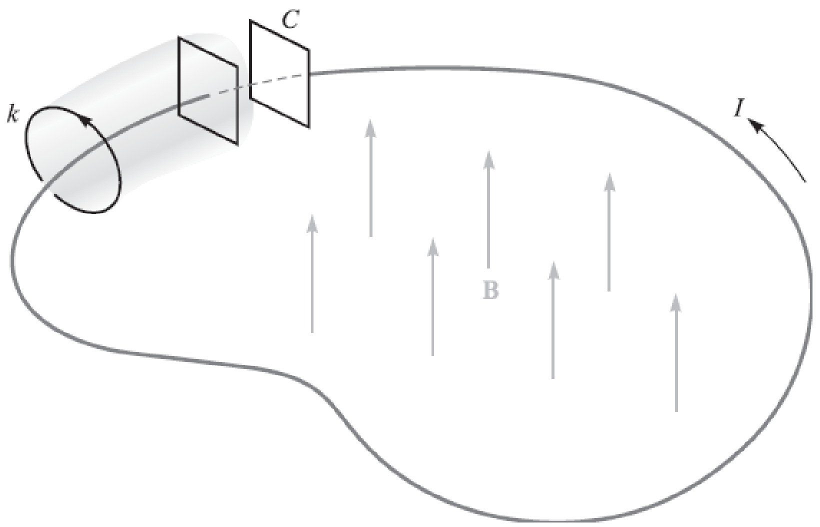

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Utilizando la teoría elemental de circuitos y suponiendo que el lazo tiene una resistencia y una inductancia despreciables, se obtiene la corriente en el lazo dada por

$$I = -\omega C V_0 \operatorname{sen} \omega t$$
$$= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

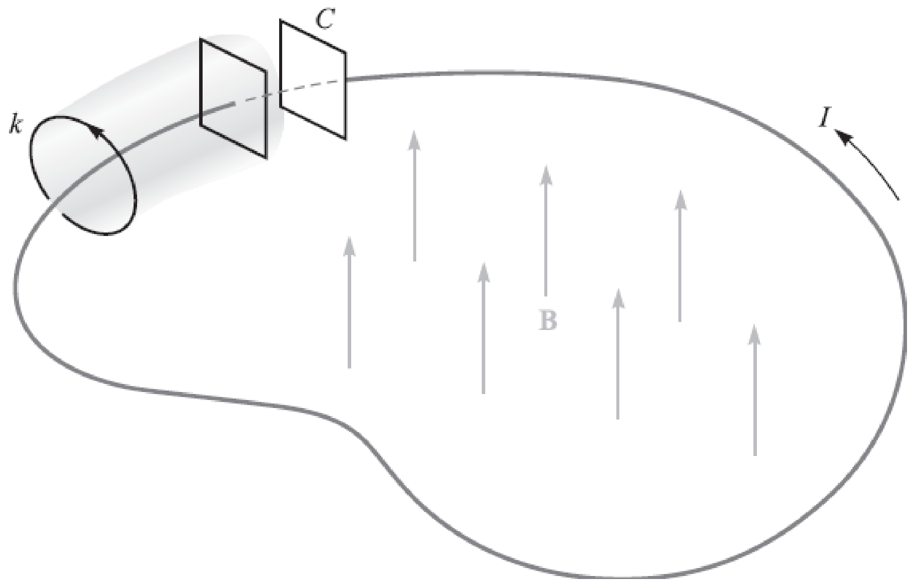

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

en donde las cantidades , S y d conciernen al capacitor. Si se aplica la ley circuital de Ampere sobre la trayectoria circular cerrada más pequeña k, y despreciando por el momento la corriente de desplazamiento, resulta:

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

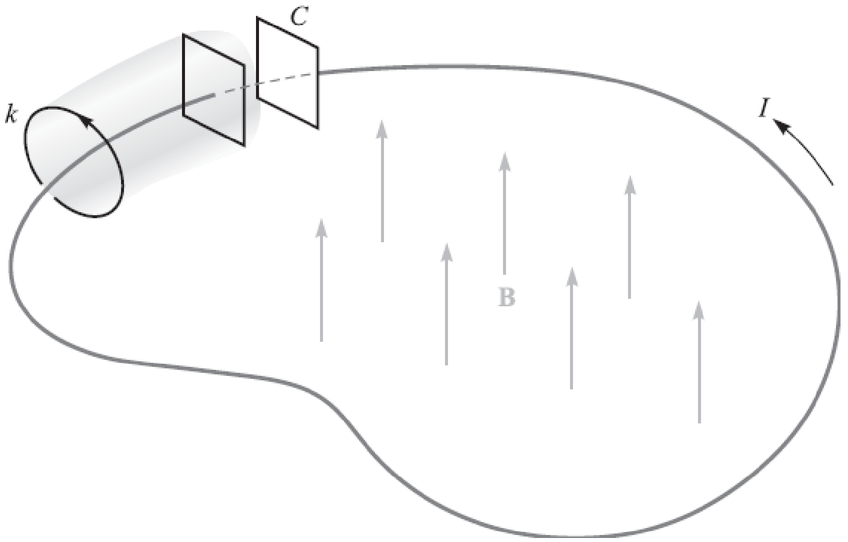

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

La trayectoria y el valor de H a lo largo de la trayectoria son cantidades definidas (aunque difíciles de determinar) y $\oint \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{dl}$ es una cantidad definida.

La corriente I_k es la corriente que atraviesa cada superficie cuyo perímetro sea la trayectoria k.

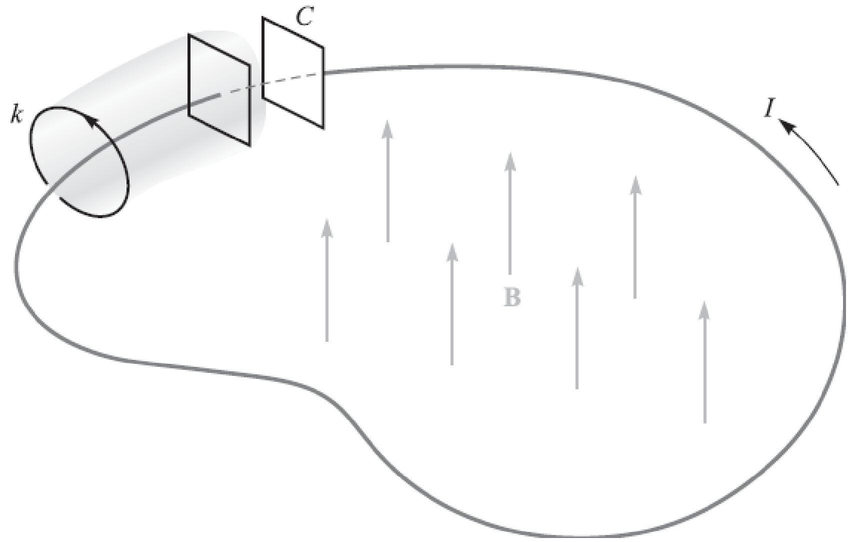

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Si se escoge una superficie sencilla, la perforada por el alambre, como la superficie circular plana definida por la trayectoria circular k, la corriente es evidentemente la corriente de conducción.

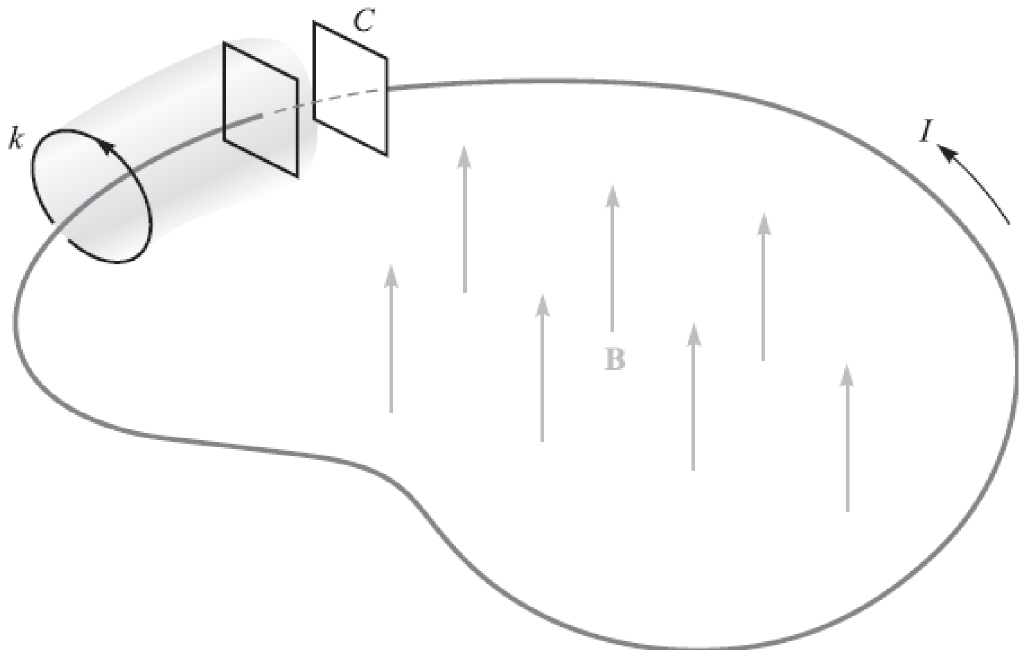

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Suponga ahora que se considera la trayectoria cerrada k como la boca de una bolsa de papel cuyo fondo pasa entre las placas del capacitor.

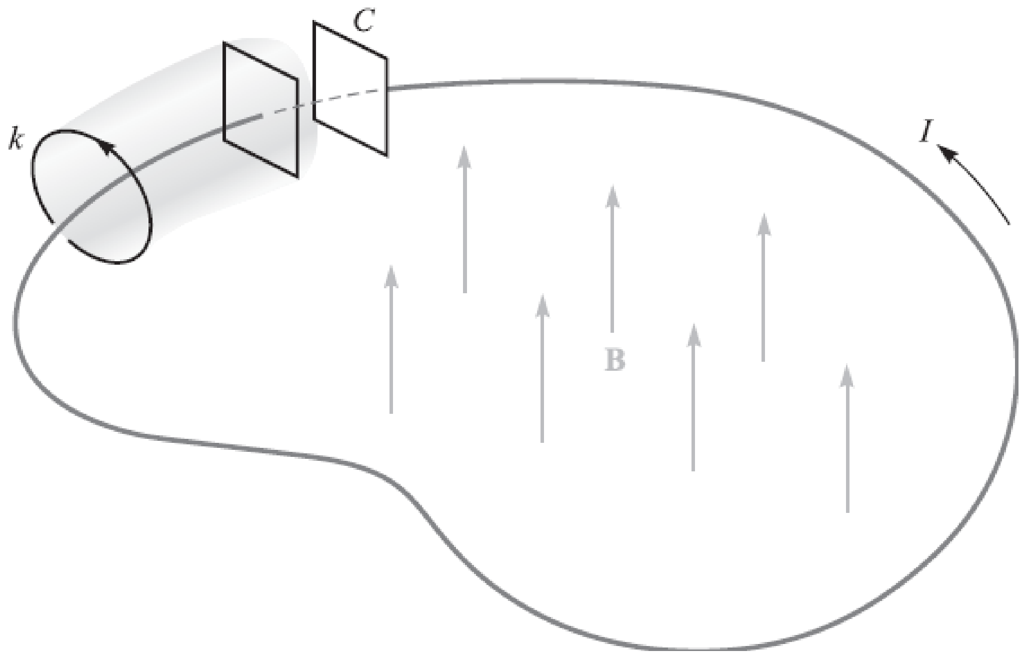

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

La bolsa no se traspasa por el filamento y la corriente de conducción es cero.

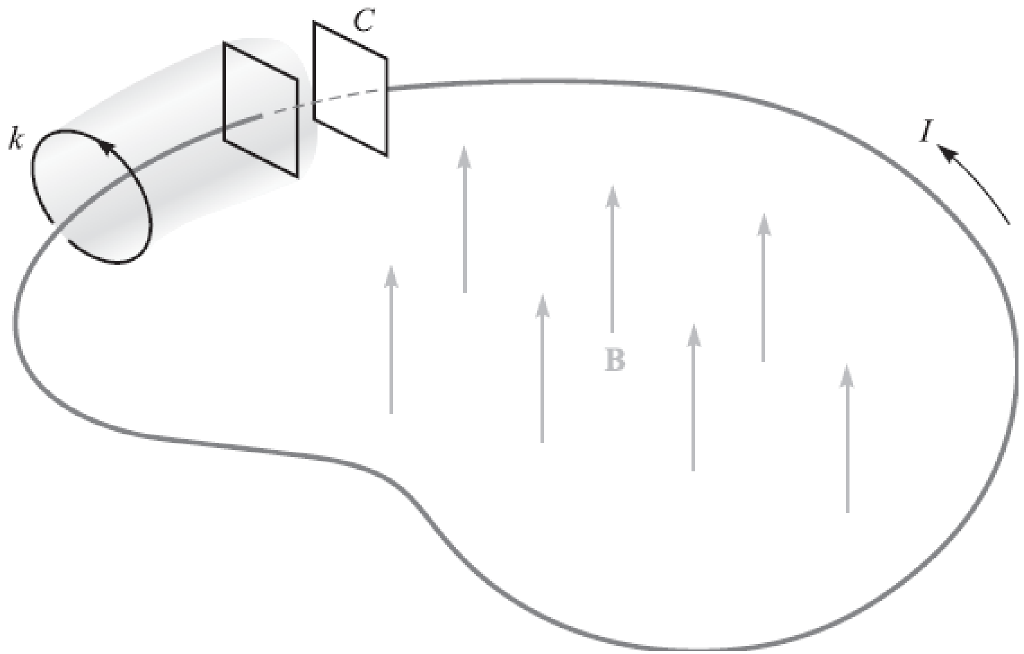

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Ahora es cuando se torna necesaria la corriente de desplazamiento, puesto que para la parte interior del capacitor

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

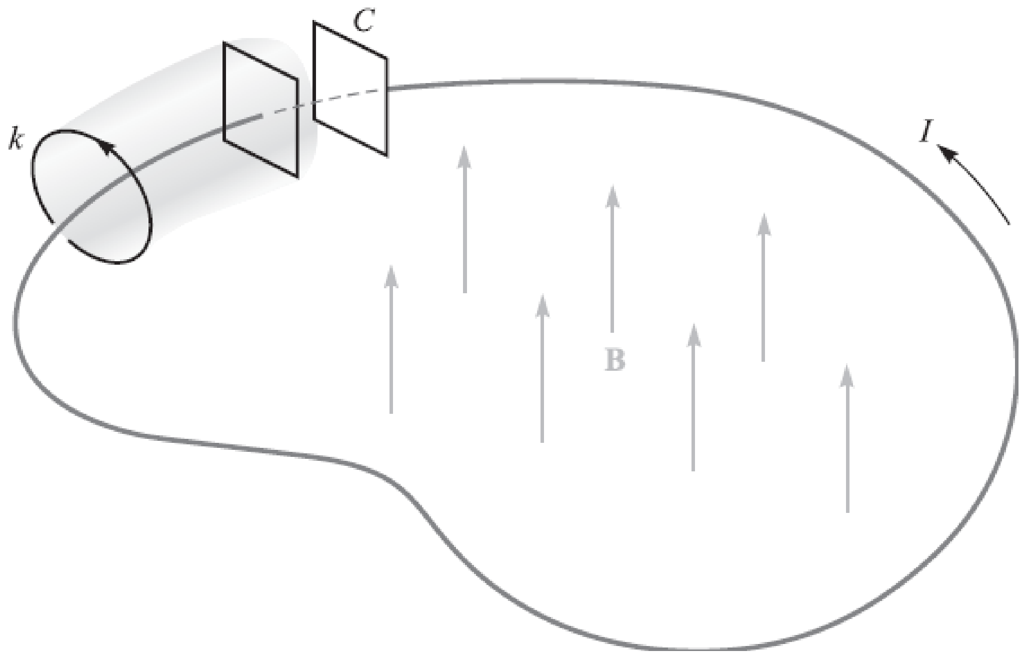

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

y, por lo tanto,

$$I_d = \frac{\partial D}{\partial t} S = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

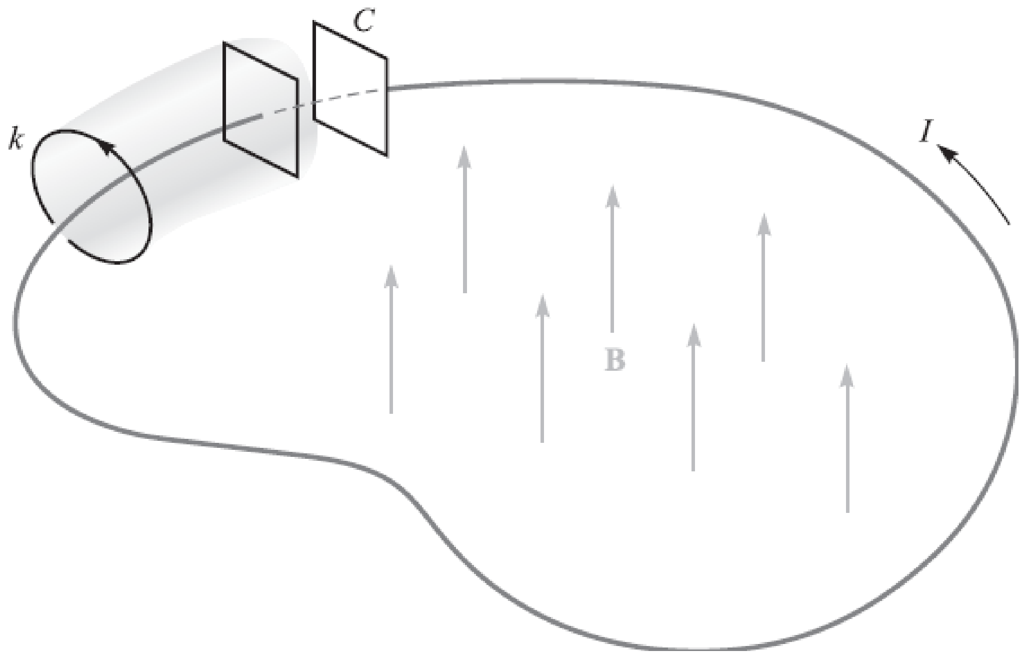

Figura 1 Un filamento conductor forma un lazo conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ a lo largo de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Éste es el mismo valor que el de la corriente de conducción en el filamento del lazo.

De esta manera la aplicación de la ley circuital de Ampere con la corriente de desplazamiento incluida para la trayectoria k conduce a que la integral de línea de H tenga un valor definido.

Este valor debe ser igual al de la corriente total que atraviesa la superficie escogida.

Para algunas superficies la corriente es casi en su totalidad corriente de conducción, pero para aquellas que pasan entre las placas del capacitor, la corriente de conducción es cero y es la corriente de desplazamiento la que ahora es igual a la integral de línea cerrada de H.

Físicamente se debe observar que un capacitor almacena carga y que el campo eléctrico entre las placas del capacitor es mucho mayor que los pequeños campos externos de fuga.

Entonces, el error cometido cuando no se toma en cuenta la corriente de desplazamiento sobre todas esas superficies que no pasan entre las placas es muy pequeño.

Las corrientes de desplazamiento están asociadas con campos eléctricos variantes con el tiempo y, por lo tanto, existen en todo conductor imperfecto que lleva una corriente de conducción variante con el tiempo.

La última parte del siguiente problema planteado, indica la razón de por qué esta corriente adicional nunca fue descubierta en forma experimental.

Taller

Encontrar la amplitud de la densidad de la corriente de desplazamiento: *a*) adyacente a una antena de automóvil donde la intensidad de campo magnético de una señal de FM es $H_x = 0.15 \cos[3.12(3 \times 10^8 t - y)]$ A/m; *b*) en el espacio libre en un punto dentro de un transformador de distribución de gran potencia donde $\mathbf{B} = 0.8 \cos[1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - x)]\mathbf{a}_y$ T; *c*) dentro de un capacitor de potencia grande lleno de aceite donde $\epsilon_r = 5$ y $\mathbf{E} = 0.9 \cos[1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - z\sqrt{5})]\mathbf{a}_x$ MV/m; *d*) en un conductor metálico de 60 Hz, si $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m y $\mathbf{J} = \operatorname{sen}(377t - 117.1z)\mathbf{a}_x$ MA/m^2.

Respuesta: 0.468 A/m^2; 0.800 A/m^2; 0.0150 A/m^2; 57.6 pA/m^2

Ecuaciones de Maxwell en forma puntual

Se han obtenido dos de las ecuaciones de Maxwell para campos variantes con el tiempo,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Las dos ecuaciones restantes permanecen sin cambio con respecto a la forma que tienen cuando no existe dependencia temporal:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La ecuación $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ *esencialmente establece que la densidad de carga es una fuente (o sumidero) de las líneas de flujo eléctrico. Obsérvese que no se puede seguir diciendo que todo flujo eléctrico comienza y termina en una carga porque la parte importante de la ley de Faraday*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

muestra que E, y también D, pueden tener circulación si está presente un campo magnético variable.

Por ello las líneas de flujo eléctrico pueden formar trayectorias cerradas.

Sin embargo, sigue siendo cierto que cada coulomb de carga debe tener un coulomb de flujo eléctrico saliendo de él.

Con la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

reconoce el hecho de que se desconoce la existencia de "cargas magnéticas" o polos.

El flujo magnético siempre se encuentra en circuitos cerrados y nunca diverge de una fuente puntual.

Estas cuatro ecuaciones son la base de toda la teoría electromagnética.

Son ecuaciones diferenciales parciales que relacionan el campo eléctrico y el magnético entre sí y con sus fuentes, cargas y densidades de corriente.

Las ecuaciones auxiliares que relacionan D y E,

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

La ecuación que define la densidad de corriente de conducción,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

y la ecuación que define la densidad de corriente de convección en términos de la densidad de carga volumétrica ρ_v ,

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$$

también son necesarias para definir y relacionar las cantidades que aparecen en las ecuaciones de Maxwell.

Los potenciales V y A no se incluyen en estas ecuaciones porque no son estrictamente necesarios, a pesar de lo mucho que se utilizan.

Si no se cuenta con materiales apropiados para trabajar, entonces se debe sustituir

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}}$$

por las relaciones que involucran los campos de polarización y de magnetización,

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})}$$

Para materiales lineales se puede relacionar P con E

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

y M con H

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

Por último, debido a su importancia fundamental se debe incluir la ecuación de la fuerza de Lorentz, escrita en su forma puntual como la fuerza por unidad de volumen,

$$\mathbf{f} = \rho_\nu(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Taller

Sea $\mu = 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 4 \times 10^{-9}$ F/m, $\sigma = 0$ y $\rho_v = 0$. Encontrar k (incluyendo sus unidades) de forma que cada uno de los siguientes pares de campos satisfaga las ecuaciones de Maxwell: *a*) $\mathbf{D} = 6\mathbf{a}_x - 2y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ nC/m^2, $\mathbf{H} = kx\mathbf{a}_x + 10y\mathbf{a}_y - 25z\mathbf{a}_z$ A/m; *b*) $\mathbf{E} = (20y - kt)\mathbf{a}_x$ V/m, $\mathbf{H} = (y + 2 \times 10^6 t)\mathbf{a}_z$ A/m.

Respuesta: 15 A/m^2; -2.5×10^8 V/(m $\cdot$ s)