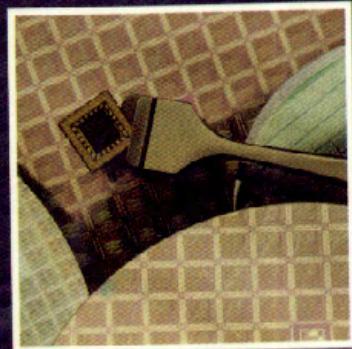
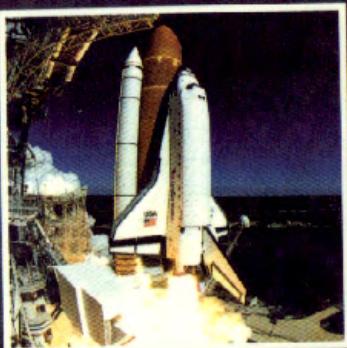


**GLYN JAMES**



**MATEMÁTICAS  
AVANZADAS  
PARA  
INGENIERÍA**

**SEGUNDA EDICIÓN**

Prentice  
Hall

© Prentice Hall Inc., 1992

---

# **Matemáticas avanzadas para ingeniería**

Segunda edición

# Matemáticas avanzadas para ingeniería

Segunda edición

**GLYN JAMES** Coventry University

y

**DAVID BURLEY** University of Sheffield

**DICK CLEMENTS** University of Bristol

**PHIL DYKE** University of Plymouth

**JOHN SEARL** University of Edinburgh

**NIGEL STEELE** Coventry University

**JERRY WRIGHT** AT&T

## TRADUCCIÓN:

**M. en C. Elena de Oteyza**

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México*

**Dr. Carlos Hernández Garciadiego**

*Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México*

## REVISIÓN TÉCNICA:

**M. en C. Juan Carlos del Valle**

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México*

**Ing. Juan Aguilar Pascual**

*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*



MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE

ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

# *Acerca de los autores*

**Glyn James** es profesor y decano de la Escuela de Ciencias Matemáticas y de Información de Coventry University. Se graduó en University College of Wales, Cardiff, a finales de la década de 1950, obteniendo honores de primera clase tanto en Matemáticas como en Química. Obtuvo su Doctorado en Ingeniería en 1971 como estudiante externo en University of Warwick. Ha estado empleado en Coventry desde 1964 y ocupó la posición de Jefe del Departamento de Matemáticas antes de su nombramiento como decano en 1992. Sus áreas de investigación actual son la teoría de control y sus aplicaciones a problemas industriales y es codirector de un gran centro de investigación en la Universidad. También se ha interesado en la educación matemática, en particular en relación con la enseñanza de las matemáticas para ingeniería y la modelación matemática. Fue codirector del Grupo Europeo de Trabajo en Matemáticas establecido por la Sociedad Europea de Educación en Ingeniería (SEFI, por sus siglas en inglés) en 1982, también fue director del Comité de Educación del Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones (IMA) y miembro del Subcomité de Educación en Matemáticas de la Sociedad Real. En 1995 fue jefe director del grupo de trabajo que creó el reporte 'Mathematics Matters in Engineering' en beneficio de los cuerpos profesionales en ingeniería y matemáticas en el Reino Unido. También es miembro del comité editorial y asesor de tres revistas internacionales. Ha publicado numerosos artículos y es coeditor de cinco libros acerca de diversos aspectos de la modelación matemática. Es miembro del Consejo y ex vicepresidente del IMA, y también ha ocupado durante un periodo la Secretaría Honoraria del Instituto. Es un Matemático Privilegiado y miembro del IMA.

**David Burley** se retiró recientemente y en la actualidad es profesor de tiempo parcial en University of Sheffield. Se graduó en matemáticas en King's College, University of London en 1955 y obtuvo su doctorado en física matemática. Después de trabajar en University of Glasgow, ha pasado la mayor parte de su carrera académica en University of Sheffield, siendo jefe de departamento durante seis años. Tiene una larga experiencia en la enseñanza de la ingeniería y ha estado particularmente interesado en alentar a los estudiantes a la construcción de modelos matemáticos en contextos físicos y biológicos para mejorar su aprendizaje. Su trabajo de investigación incluye la mecánica estadística, optimización y mecánica de fluidos. Su interés actual involucra el flujo de vidrio fundido en una variedad de situaciones y la aplicación de sus resultados a la industria del vidrio.

**Dick Clements** es profesor en el Departamento de Matemáticas para la Ingeniería en Bristol University. Impartió clases en Christ's College, Cambridge, a final de la

década de 1960. Fue a Leicester University School of Education para obtener su PGCE antes de regresar a Cambridge a hacer investigación para su doctorado en Ingeniería Aeronáutica. En 1973 fue nombrado profesor en Matemáticas para la Ingeniería en Bristol University y desde entonces ha enseñado matemáticas a estudiantes de ingeniería. Ha hecho investigaciones en una gran cantidad de temas de ingeniería, pero está interesado particularmente en la modelación matemática y el desarrollo de nuevos métodos de enseñanza de las matemáticas para ingenieros. Ha publicado numerosos artículos y el libro, *Mathematical Modelling: A Case Study Approach*. Es Ingeniero Privilegiado, miembro de la Royal Aeronautical Society, Matemático Privilegiado, miembro del IMA y miembro del Royal Institute of Navigation.

**Phil Dyke** es profesor de Matemáticas Aplicadas y director de la Escuela de Matemáticas y Estadística de University of Plymouth. Después de graduarse con honores de primera clase en Matemáticas en University of London, obtuvo su doctorado en modelos de costas marítimas en Reading en 1972. Desde entonces, Phil Dyke ha sido académico de tiempo completo, inicialmente en Heriot-Watt University educando ingenieros, seguido de una breve estancia en Sunderland. Ha estado en Plymouth desde 1984. Todavía se dedica a la enseñanza y está involucrado en la construcción de modelos matemáticos relevantes en temas ambientales.

**John Searl** es Director de Edinburgh Centre for Mathematical Education en University of Edinburgh. Dicta cursos tanto en educación matemática como cursos de servicio para ingenieros y científicos. Su investigación actual tiene que ver con el desarrollo de ambientes de estudio que hagan más efectivo el aprendizaje de las matemáticas para jóvenes de 16 a 20 años. Como matemático aplicado que ha trabajado en colaboración con ingenieros, físicos, biólogos y farmacólogos (entre otros), es muy hábil para desarrollar las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas y para motivarlos a que piensen por ellos mismos.

**Jerry Wright** es un miembro importante del equipo técnico del laboratorio AT&T Shannon, en New Jersey, EUA. Se graduó en Ingeniería (Licenciatura y doctorado en University of Southampton) y en Matemáticas (Maestría en University of London) y trabajó en el National Physical Laboratory antes de mudarse a University of Bristol en 1978. Ahí adquirió una gran experiencia en la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de ingeniería, y se convirtió en Profesor Titular en Matemáticas para la Ingeniería. Tuvo una beca de la Royal Society Industrial en 1994, y es miembro del Institute of Mathematics and its Applications. En 1996 se mudó a los laboratorios AT&T (originalmente parte de los laboratorios Bell) para continuar su investigación en el entendimiento del lenguaje hablado y en los sistemas de diálogo entre humanos y computadoras.

**Nigel Steele** es Director de Matemáticas en Coventry University. Se graduó en Matemáticas en Southampton University en 1967, recibiendo su grado de Maestría en 1969. Ha sido miembro del Departamento de Matemáticas en Coventry University desde 1968. Tiene un interés particular en la enseñanza de las Matemáticas

para la Ingeniería y es editor conjunto del reporte de la SEFI 'A Common Core Curriculum in Mathematics for the European Engineer'. Ha publicado numerosos artículos y contribuido en varios libros. Sus intereses de investigación actuales están en la aplicación de técnicas neurocomputacionales, lógica difusa y teoría de control. Es miembro de la Royal Aeronautical Society, Matemático Privilegiado, miembro e integrante del Consejo del IMA.

# Contenido

<b>Acerca de los autores</b>	v
<b>Prefacio a la primera edición</b>	xv
<b>Prefacio a la segunda edición</b>	xix
<b>Capítulo 1</b>	1
<b>Funciones de una variable compleja</b>	
<b>1.1 Introducción</b>	1
<b>1.2 Funciones complejas y mapeos</b>	2
1.2.1 Mapeos lineales	5
1.2.2 Ejercicios (1–8)	12
1.2.3 Inversión	13
1.2.4 Mapeos bilineales	18
1.2.5 Ejercicios (9–19)	24
1.2.6 El mapeo $w = z^2$	25
1.2.7 Ejercicios (20–23)	27
<b>1.3 Derivación compleja</b>	28
1.3.1 Ecuaciones Cauchy–Riemann	29
1.3.2 Funciones conjugadas y armónicas	34
1.3.3 Ejercicios (24–32)	36
1.3.4 Más sobre mapeos	37
1.3.5 Ejercicios (33–37)	41
<b>1.4 Series complejas</b>	41
1.4.1 Series de potencias	42
1.4.2 Ejercicios (38–39)	46
1.4.3 Serie de Taylor	46
1.4.4 Ejercicios (40–43)	50
1.4.5 Serie de Laurent	50
1.4.6 Ejercicios (44–46)	55
<b>1.5 Singularidades, ceros y residuos</b>	56
1.5.1 Singularidades y ceros	56
1.5.2 Ejercicios (47–49)	59
1.5.3 Residuos	59
1.5.4 Ejercicios (50–52)	64

<b>1.6 Integración de contorno</b>	<b>65</b>
1.6.1 Integrales de contorno	66
1.6.2 Teorema de Cauchy	69
1.6.3 Ejercicios (53–59)	77
1.6.4 El teorema del residuo	78
1.6.5 Evaluación de integrales reales definidas	81
1.6.6 Ejercicios (60–65)	84
<b>1.7 Aplicación a la ingeniería: análisis de circuitos de corriente alterna</b>	<b>85</b>
<b>1.8 Aplicación a la ingeniería: uso de funciones armónicas</b>	<b>87</b>
1.8.1 Un problema de transferencia de calor	87
1.8.2 Corriente en un transistor de efecto de campo	89
1.8.3 Ejercicios (66–72)	92
<b>1.9 Ejercicios de repaso (1–24)</b>	<b>93</b>
<hr/>	
<b>Capítulo 2</b>	<b>97</b>
<b>Transformadas de Laplace</b>	
<b>2.1 Introducción</b>	<b>97</b>
<b>2.2 La transformada de Laplace</b>	<b>99</b>
2.2.1 Definición y notación	99
2.2.2 Transformaciones de funciones simples	102
2.2.3 Existencia de la transformada de Laplace	105
2.2.4 Propiedades de la transformada de Laplace	107
2.2.5 Tabla de transformadas de Laplace	113
2.2.6 Ejercicios (1–3)	114
2.2.7 La transformada inversa	114
2.2.8 Evaluación de transformadas inversas	115
2.2.9 Inversión usando el primer teorema de traslación	116
2.2.10 Ejercicios (4)	118
<b>2.3 Solución de ecuaciones diferenciales</b>	<b>119</b>
2.3.1 Transformadas de derivadas	119
2.3.2 Transformada de integrales	120
2.3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias	121
2.3.4 Ecuaciones diferenciales simultáneas	126
2.3.5 Ejercicios (5–6)	128
<b>2.4 Aplicaciones a la ingeniería: circuitos eléctricos y vibraciones mecánicas</b>	<b>130</b>
2.4.1 Circuitos eléctricos	130
2.4.2 Vibraciones mecánicas	135
2.4.3 Ejercicios (7–12)	139

<b>2.5 Funciones escalón e impulso</b>	<b>141</b>
2.5.1 La función escalonada de Heaviside	141
2.5.2 Transformada de Laplace de la función escalón unitario	144
2.5.3 El segundo teorema de traslación	146
2.5.4 Inversión usando el segundo teorema de traslación	149
2.5.5 Ecuaciones diferenciales	152
2.5.6 Funciones periódicas	156
2.5.7 Ejercicios (13–24)	161
2.5.8 La función impulso	162
2.5.9 La propiedad de filtrado	164
2.5.10 La transformada de Laplace de las funciones impulsivas	164
2.5.11 Relaciones entre las funciones escalón de Heaviside y de impulso	167
2.5.12 Ejercicios (25–30)	172
2.5.13 Deformación de vigas	173
2.5.14 Ejercicios (31–33)	177
<b>2.6 Funciones de transferencia</b>	<b>177</b>
2.6.1 Definiciones	177
2.6.2 Estabilidad	180
2.6.3 Respuesta al impulso	186
2.6.4 Teoremas del valor inicial y del valor final	188
2.6.5 Ejercicios (34–47)	193
2.6.6 Convolución	194
2.6.7 Respuesta de un sistema a una entrada arbitraria	198
2.6.8 Ejercicios (48–52)	202
<b>2.7 Aplicación a la ingeniería: respuesta de frecuencia</b>	<b>202</b>
<b>2.8 Ejercicios de repaso (1–30)</b>	<b>210</b>
<b>Capítulo 3</b>	<b>217</b>
<b>La transformada z</b>	
<b>3.1 Introducción</b>	<b>217</b>
<b>3.2 La transformada z</b>	<b>218</b>
3.2.1 Definición y notación	219
3.2.2 Muestreo: una primera introducción	222
3.2.3 Ejercicios (1–2)	223
<b>3.3 Propiedades de la transformada z</b>	<b>224</b>
3.3.1 La propiedad de linealidad	224
3.3.2 La primera propiedad de traslación (retraso)	225
3.3.3 La segunda propiedad de traslación (avance)	227
3.3.4 Algunas propiedades más	227
3.3.5 Tabla de transformadas z	228
3.3.6 Ejercicios (3–10)	229

---

<b>3.4 La transformada z inversa</b>	<b>230</b>
3.4.1 Técnicas de inversión	230
3.4.2 Ejercicios (11–13)	236
<b>3.5 Sistemas de tiempo discreto y ecuaciones en diferencias</b>	<b>237</b>
3.5.1 Ecuaciones en diferencias	237
3.5.2 solución de ecuaciones en diferencias	239
3.5.3 Ejercicios (14–20)	243
<b>3.6 Sistemas lineales discretos: caracterización</b>	<b>244</b>
3.6.1 Funciones z de transferencia	244
3.6.2 La respuesta al impulso	250
3.6.3 Estabilidad	253
3.6.4 Convolución	258
3.6.5 Ejercicios (21–28)	262
<b>3.7 La relación entre la transformada de Laplace y la transformada z</b>	<b>262</b>
<b>3.8 Aplicación a la ingeniería: diseño de sistemas de tiempo discreto</b>	<b>264</b>
3.8.1 Filtros analógicos	264
3.8.2 Diseño de un filtro digital de reemplazo	265
3.8.3 Desarrollos posibles	267
<b>3.9 Aplicación a la ingeniería: el operador delta y la transformada <math>\mathcal{D}</math></b>	<b>267</b>
3.9.1 Introducción	267
3.9.2 El operador q u operador de corrimiento y el operador $\delta$	268
3.9.3 Construcción de un modelo de sistema en tiempo discreto	269
3.9.4 Realización del diseño	272
3.9.5 La transformada $\mathcal{D}$	273
3.9.6 Ejercicios (29–32)	274
<b>3.10 Ejercicios de repaso (1–16)</b>	<b>275</b>
<hr/> <b>Capítulo 4</b>	<b>279</b>
<b>Series de Fourier</b>	
<b>4.1 Introducción</b>	<b>279</b>
<b>4.2 Expansión en serie de Fourier</b>	<b>281</b>
4.2.1 Funciones periódicas	281
4.2.2 Teorema de Fourier	282
4.2.3 Los coeficientes de Fourier	283
4.2.4 Funciones de periodo $2\pi$	287

4.2.5 Funciones pares e impares	293
4.2.6 Armónicas pares e impares	297
4.2.7 Propiedad de linealidad	299
4.2.8 Convergencia de las series de Fourier	300
4.2.9 Ejercicios (1–7)	304
4.2.10 Funciones de periodo $T$	305
4.2.11 Ejercicios (8–13)	308
<b>4.3 Funciones definidas sobre un intervalo finito</b>	<b>308</b>
4.3.1 Series de recorrido completo	309
4.3.2 Series del seno y del coseno de medio recorrido	311
4.3.3 Ejercicios (14–23)	315
<b>4.4 Derivación e integración de series de Fourier</b>	<b>316</b>
4.4.1 Integración de series de Fourier	316
4.4.2 Derivación de series de Fourier	319
4.4.3 Coeficientes en términos de las discontinuidades de salto	320
4.4.4 Ejercicios (24–29)	323
<b>4.5 Aplicación a la ingeniería: respuesta a la frecuencia y sistemas oscilatorios</b>	<b>325</b>
4.5.1 Respuesta a una entrada periódica	325
4.5.2 Ejercicios (30–33)	329
<b>4.6 Forma compleja de la serie de Fourier</b>	<b>330</b>
4.6.1 Representación compleja	330
4.6.2 El teorema de la multiplicación y el teorema de Parseval	334
4.6.3 Espectro de frecuencia discreta	338
4.6.4 Espectro de potencia	344
4.6.5 Ejercicios (34–39)	346
<b>4.7 Funciones ortogonales</b>	<b>347</b>
4.7.1 Definiciones	347
4.7.2 Series generalizadas de Fourier	350
4.7.3 Convergencia de la serie generalizada de Fourier	351
4.7.4 Ejercicios (40–46)	353
<b>4.8 Aplicación a la ingeniería: funciones descriptivas</b>	<b>355</b>
<b>4.9 Ejercicios de repaso (1–20)</b>	<b>357</b>

*Capítulo 5* 361

## La transformada de Fourier

<b>5.1 Introducción</b>	<b>361</b>
<b>5.2 La transformada de Fourier</b>	<b>362</b>
5.2.1 La integral de Fourier	362
5.2.2 El par de transformadas de Fourier	368

5.2.3 El espectro de Fourier continuo	371
5.2.4 Ejercicios (1–10)	374
<b>5.3 Propiedades de las transformadas de Fourier</b>	<b>375</b>
5.3.1 La propiedad de linealidad	375
5.3.2 Propiedad de derivación con respecto al tiempo	376
5.3.3 La propiedad de corrimiento con respecto al tiempo	377
5.3.4 Propiedad de corrimiento con respecto a la frecuencia	378
5.3.5 La propiedad de simetría	379
5.3.6 Ejercicios (11–16)	381
<b>5.4 La respuesta de frecuencia</b>	<b>381</b>
5.4.1 Relación entre las transformadas de Fourier y de Laplace	381
5.4.2 La respuesta de frecuencia	384
5.4.3 Ejercicios (17–21)	387
<b>5.5 Transformadas de las funciones escalón e impulso</b>	<b>388</b>
5.5.1 Energía y potencia	388
5.5.2 Convolución	396
5.5.3 Ejercicios (22–27)	399
<b>5.6 La transformada de Fourier en tiempo discreto</b>	<b>400</b>
5.6.1 Introducción	400
5.6.2 La transformada de Fourier para sucesiones	400
5.6.3 La transformada de Fourier discreta	405
5.6.4 Estimación de la transformada de Fourier continua	409
5.6.5 La transformada rápida de Fourier	418
5.6.6 Ejercicios (28–31)	426
<b>5.7 Aplicación a la ingeniería: el diseño de filtros analógicos</b>	<b>426</b>
<b>5.8 Aplicación a la ingeniería: modulación, demodulación y filtrado en el dominio de la frecuencia</b>	<b>429</b>
5.8.1 Introducción	429
5.8.2 Modulación y transmisión	433
5.8.3 Identificación y aislamiento de la señal portadora de información	433
5.8.4 Estado de demodulación	435
5.8.5 Recuperación de señales finales	436
5.8.6 Más desarrollos	436
<b>5.9 Ejercicios de repaso (1–25)</b>	<b>437</b>
<b><i>Respuestas a ejercicios</i></b>	<b>441</b>
<b><i>Índice</i></b>	<b>453</b>

# 1

# Funciones de una variable compleja

## CONTENIDO

- 1.1 Introducción
- 1.2 Funciones complejas y mapeos
- 1.3 Derivación compleja
- 1.4 Series complejas
- 1.5 Singularidades, ceros y residuos
- 1.6 Integración de contorno
- 1.7 Aplicación a la ingeniería: análisis de circuitos de corriente alterna
- 1.8 Aplicación a la ingeniería: uso de funciones armónicas
- 1.9 Ejercicios de repaso (1-24)

## 1.1

## Introducción

En la teoría de las corrientes alternas, la aplicación de cantidades tales como la impedancia compleja involucra funciones cuyas variables independientes son números complejos. Hay muchas otras áreas en la ingeniería en las que éste es el caso; por ejemplo, el movimiento de fluidos, la transmisión de calor o el procesamiento de señales. Algunas de estas aplicaciones se analizan más adelante en este libro.

Tradicionalmente, las técnicas de variable compleja han sido importantes y ampliamente utilizadas en una gran variedad de situaciones de la ingeniería. Tal ha sido el caso especialmente en el electromagnetismo y la electrostática, la dinámica de

fluidos, la aerodinámica y la elasticidad. Con el rápido desarrollo de las computadoras y con el uso consecuente de algoritmos sofisticados para el análisis y diseño en ingeniería, en los últimos años ha existido un menor énfasis en el uso de las técnicas de variable compleja y un cambio hacia las técnicas numéricas aplicadas directamente al modelo de ecuaciones diferenciales parciales de la situación que se está investigando. Sin embargo, aun cuando este es el caso, la solución analítica todavía goza de un mérito considerable, posiblemente para un modelo idealizado para desarrollar una mejor comprensión del comportamiento de la solución y para dar seguridad en las estimaciones numéricas para la resolución de los modelos. Un ejemplo donde la teoría ha realizado una contribución significativa es en el diseño de piezas aeronáuticas para aviones y otros vehículos aéreos. La fortaleza de la teoría en tales aplicaciones es su habilidad para generar mapeos que transforman figuras complicadas (por ejemplo una ala) en figuras simples, típicamente un círculo en el caso de un ala. La idealización del flujo de aire alrededor de la pieza transformada (el círculo) es relativamente fácil de calcular y revirtiendo la transformación puede deducirse el flujo del aire alrededor del ala, y por tanto su capacidad de sustentación. Al final del capítulo hay una aplicación que ilustra la técnica aplicada para simplificar la geometría para la solución de un problema de flujo de calor.

En toda la ingeniería, las transformaciones en una forma u otra juegan un gran papel en el análisis y el diseño. El uso de las transformaciones de Laplace, z, Fourier y otras en áreas tales como el control, las comunicaciones y el procesamiento de señales es de gran importancia. Tales transformaciones se analizarán posteriormente en este libro, donde se observará que las funciones de una variable compleja juegan un papel importante. Este capítulo está dedicado al desarrollo y a la comprensión de las técnicas usuales de las variables complejas, así como también a capacitar al lector para utilizarlas con confianza en las áreas de aplicación.

## 1.2

# Funciones complejas y mapeos

El concepto de función involucra dos conjuntos  $X$  y  $Y$  y una regla que asocia a cada elemento  $x$  en el conjunto  $X$  (que se escribe como  $x \in X$ ) precisamente un elemento  $y \in Y$ . Siempre que sucede esto, decimos que hay una **función**  $f$  que **mapea** el conjunto  $X$  en el conjunto  $Y$ , y simbólicamente se representa esto como

$$y = f(x) \quad (x \in X)$$

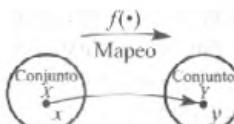


Figura 1.1 Mapeo real  
 $y = f(x)$ .

Esquemáticamente ilustramos una función como en la figura 1.1. Mientras  $x$  puede tomar cualquier valor en el conjunto  $X$ , la variable  $y = f(x)$  depende del elemento particular elegido para  $x$ . Por eso nos referimos a  $x$  como la variable **independiente** y a  $y$  como la variable **dependiente**. El conjunto  $X$  es llamado el **dominio** de la función y el conjunto de todas las imágenes  $y = f(x)$  ( $x \in X$ ) es llamado el **conjunto imagen** o **rango** de  $f$ . Previamente estuvimos interesados en funciones reales, entonces  $x$  y  $y$  eran números reales. Si la variable independiente es una variable compleja  $z = x + iy$

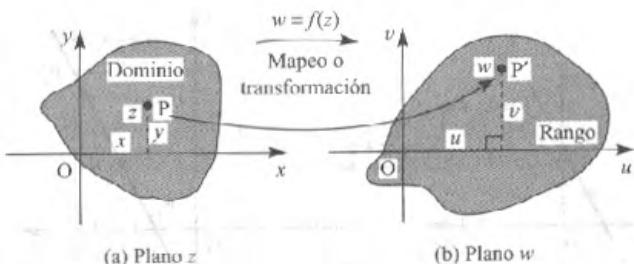


Figura 1.2 Mapeo complejo  $w = f(z)$ .

donde  $x$  e  $y$  son reales y  $j = \sqrt{(-1)}$ , entonces la función  $f(z)$  de  $z$ , en general será también compleja. Por ejemplo, si  $f(z) = z^2$  entonces al remplazar por  $x + jy$  para luego desarrollar se tiene

$$f(z) = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy = u + jv \quad (\text{digamos})$$

donde  $u$  y  $v$  son reales. Tal  $f(z)$  es llamada una **función compleja** y escribimos

$$w = f(z)$$

donde, en general, la variable dependiente  $w = u + jv$  también es compleja.

El lector recordará que un número complejo  $z = x + jy$  puede ser representado en un plano llamado el **diagrama de Argand** como se ilustra en la figura 1.2(a). Sin embargo, no podemos dibujar los valores de  $x$ ,  $y$  y  $f(z)$  en un solo conjunto de ejes, como podemos hacerlo para funciones reales  $y = f(x)$ . Por tanto representamos los valores de

$$w = f(z) = u + jv$$

en un segundo plano como se ilustra en la figura 1.2(b). El plano que contiene a la variable independiente  $z$  es llamado el **plano  $z$**  y el plano que contiene a la variable dependiente  $w$  es llamado el **plano  $w$** . Así, la función compleja  $w = f(z)$  puede verse como un **mapeo o transformación** de puntos  $P$  dentro de una región en el **plano  $z$**  (llamada el **dominio**) a los puntos imagen correspondientes  $P'$  dentro de una región en el **plano  $w$**  (llamado el **rango**).

Es esta facilidad para mapear la que da a la teoría de funciones complejas muchas de sus aplicaciones a la ingeniería. En la mayoría de los mapeos más utilizados todo el **plano  $z$**  es mapeado sobre todo el **plano  $w$** , excepto quizás para algunos puntos aislados. A lo largo de este capítulo el dominio será todo el **plano  $z$**  (esto es, el conjunto de todos los números complejos, denotado por  $\mathbb{C}$ ). Esto es análogo, para funciones reales, a que el dominio sea toda la recta real (esto es, el conjunto de todos los números reales  $\mathbb{R}$ ). Si éste no es el caso entonces la función compleja se considera que 'no está bien definida'. En contraste, como para funciones reales, el rango de la función compleja puede ser un subconjunto propio de  $\mathbb{C}$ .

### EJEMPLO 1.1

Encuentre la imagen en el **plano  $w$**  de la recta  $y = 2x + 4$  en el **plano  $z$** ,  $z = x + jy$  bajo el mapeo

$$w = 2z + 6$$

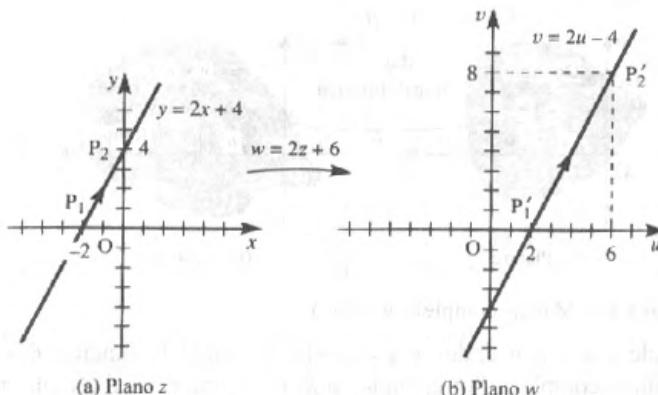
(a) Plano  $z$ (b) Plano  $w$ 

Figura 1.3 El mapeo del ejemplo 1.1.

**Solución** Al escribir  $w = u + jv$ , donde  $u$  y  $v$  son reales, el mapeo es

$$w = u + jv = 2(x + jy) + 6$$

$$u + jv = (2x + 6) + j2y$$

Al igualar las partes reales e imaginarias se obtiene

$$u = 2x + 6, \quad v = 2y \quad (1.1)$$

que al resolver para  $x$  y  $y$  conduce a

$$x = \frac{1}{2}(u - 6), \quad y = \frac{1}{2}v$$

Así la imagen de la recta

$$y = 2x + 4$$

en el plano  $z$  está representada por

$$\frac{1}{2}v = 2 \times \frac{1}{2}(u - 6) + 4$$

$$v = 2u - 4$$

que corresponde a una recta en el plano  $w$ . La recta dada en el plano  $z$  y la imagen de la recta bajo el mapeo en el plano  $w$  están dibujadas en las figuras 1.3(a) y (b) respectivamente.

Observamos de (1.1) que, en particular, el punto  $P_1(-2 + j0)$  en el plano  $z$  es mapeado al punto  $P'_1(2 + j0)$  en el plano  $w$ , y que el punto  $P_2(0 + j4)$  en el plano  $z$  es mapeado al punto  $P'_2(6 + j8)$  en el plano  $w$ . Así, conforme el punto  $P$  se mueve de  $P_1$  a  $P_2$  sobre la recta  $y = 2x + 4$  en el plano  $z$ , el punto mapeado  $P'$  se mueve de  $P'_1$  a  $P'_2$  sobre la recta  $v = 2u - 4$  en el plano  $w$ . Se puede indicar esto con una flecha como se indica en la figura 1.3.

## 1.2.1 Mapeos lineales

El mapeo  $w = 2z + 6$  del ejemplo 1.1 es un ejemplo particular de un mapeo correspondiente a la función lineal general compleja

$$w = \alpha z + \beta \quad (1.2)$$

donde  $w$  y  $z$  son variables complejas y  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes complejas. En esta sección investigaremos mapeos del plano  $z$  en el plano  $w$  que corresponden a (1.2) para distintos valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ . Al hacer esto también introduciremos algunas propiedades generales de los mapeos.

### Caso (a) $\alpha = 0$

Al tomar  $\alpha = 0$  (o  $\alpha = 0 + j0$ ) en (1.2) da

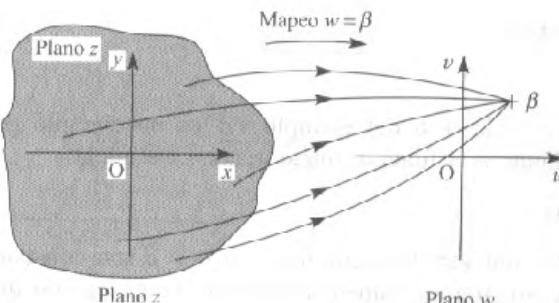
$$w = \beta$$

lo que implica que  $w = \beta$  sin importar cuál es el valor de  $z$ . Éste es obviamente un mapeo degenerado, que mapea todo el plano  $z$  en un punto  $w = \beta$  del plano  $w$ . Esto ilustra el punto señalado al inicio de esta sección, que el conjunto imagen puede ser sólo parte de todo el plano  $w$ . En este caso particular el conjunto imagen es un solo punto. Como todo el plano  $z$  se mapea en  $w = \beta$  se sigue en particular que  $z = \beta$  se mapea en  $w = \beta$ . El punto  $\beta$  es así un **punto fijo** de este mapeo, que es un concepto útil que nos ayuda a entender un mapeo particular. Una pregunta más de interés cuando consideramos mapeos es si, dado un punto en el plano  $w$ , podemos decir de qué punto proviene en el plano  $z$  bajo el mapeo. Si es posible regresar a un único punto en el plano  $z$  entonces el mapeo se dice que tiene un **mapeo inverso**. Claramente, para que exista un mapeo inverso  $z = g(w)$ , el punto en el plano  $w$  debe estar en el conjunto imagen del mapeo original  $w = f(z)$ . También, de la definición de mapeo, cada punto  $w$  del conjunto imagen en el plano  $w$  debe ir a un solo punto  $z$  en el plano  $z$  bajo el mapeo inverso  $z = g(w)$ . (Note la similitud con los requerimientos para la existencia de una función inversa  $f^{-1}(x)$  de una función real  $f(x)$ .) Para el mapeo particular  $w = \beta$  considerado aquí el conjunto imagen es un solo punto  $w = \beta$  en el plano  $w$ , y es claro de la figura 1.4 que no hay manera de regresar exactamente a un solo punto en el plano  $z$ . Por tanto, el mapeo  $w = \beta$  no tiene inverso.

### Caso (b) $\beta = 0, \alpha \neq 0$

Con esta elección para las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , el mapeo correspondiente a (1.2) se convierte en

$$w = \alpha z$$

Figura 1.4 El mapeo degenerado  $w = \beta$ .

Bajo este mapeo, el origen es el único punto fijo, no existe ningún otro punto fijo que sea finito. También, en este caso existe un mapeo inverso

$$z = \frac{1}{\alpha} w$$

que nos permite regresar del plano  $w$  al plano  $z$  al mismo punto del que empezamos bajo  $w = \alpha z$ . Para ilustrar cómo trabaja este mapeo, elegimos  $\alpha = 1 + j$  tal que

$$w = (1 + j)z \quad (1.3)$$

y consideramos lo que le pasa a un punto general  $z_0$  en el plano  $z$  bajo este mapeo. En general hay dos maneras de hacer esto. Podemos proceder como en el ejemplo 1.1 y separar ambos  $z$  y  $w$  en sus partes real e imaginaria, igualar las partes real e imaginaria para luego encontrar las curvas imágenes en el plano  $w$  de curvas específicas (usualmente las rectas  $\operatorname{Re}(z) = \text{constante}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \text{constante}$ ) en el plano  $z$ . Alternativamente, podemos reorganizar la expresión para  $w$  y deducir las propiedades del mapeo directamente. El primer plan de acción, como veremos en este capítulo, es el más usado. Aquí, sin embargo, tomaremos el último método y escribimos  $\alpha = 1 + j$  en la forma polar

$$1 + j = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

Entonces, si

$$z = re^{j\theta}$$

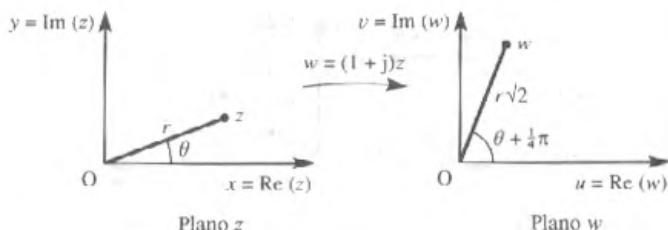
en la forma polar se tiene de (1.3) que

$$w = r\sqrt{2}e^{j(\theta+\pi/4)} \quad (1.4)$$

Podemos deducir rápidamente de (1.4) lo que realizó el mapeo. El punto general en el plano  $z$  con módulo  $r$  y argumento  $\theta$  es mapeado en un punto imagen  $w$  con módulo  $r\sqrt{2}$  y argumento  $\theta + \frac{1}{4}\pi$  en el plano  $w$  como se ilustra en la figura 1.5.

Se sigue que, en general, el mapeo

$$w = \alpha z$$

Figura 1.5 El mapeo  $w = (1 + j)z$ .

mapea el origen del plano  $z$  al origen del plano  $w$  (punto fijo) pero efectúa una dilatación por (expansión, ampliación, magnificación)  $|\alpha|$  y una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj por el arg  $\alpha$ . Por supuesto, arg  $\alpha$  no tiene que ser positivo y aun pudiera ser cero (correspondiendo a  $\alpha$  real). El mapeo puede resumirse en la frase "amplificación y rotación pero no traslación". También se preservan ciertas propiedades geométricas, siendo la más importante que las rectas en el plano  $z$  serán transformadas en rectas en el plano  $w$ . Realmente esto se confirma si se observa que la ecuación de cualquier recta en el plano  $z$  siempre puede ser escrita en la forma

$$|z - a| = |z - b|$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes complejas (esto siendo la ecuación de la bisectriz del segmento que une a los dos puntos  $a$  y  $b$  en el diagrama de Argand). Bajo el mapeo  $w = \alpha z$  la ecuación se mapea a

$$\left| \frac{w}{\alpha} - a \right| = \left| \frac{w}{\alpha} - b \right| \quad (\alpha \neq 0)$$

o

$$|w - a\alpha| = |w - b\alpha|$$

en el plano  $w$  que claramente es otra recta.

Volvamos ahora al mapco lineal general (1.2) y reescribámoslo en la forma

$$w - \beta = \alpha z$$

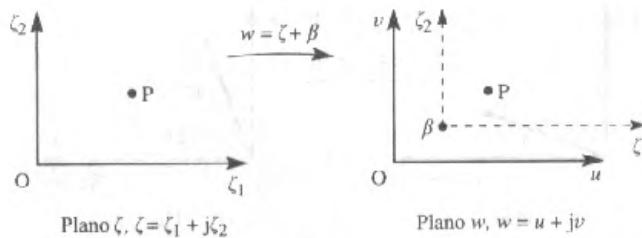
El cual puede verse como dos mapeos sucesivos: primero,

$$\zeta = \alpha z$$

idéntico a  $w = \alpha z$  considerado anteriormente, pero esta vez él mapea puntos del plano  $z$  en puntos del plano  $\zeta$ ; segundo,

$$w = \zeta + \beta \tag{1.5}$$

mapea puntos en el plano  $\zeta$  a puntos en el plano  $w$ . La eliminación de  $\zeta$  recupera la ecuación (1.2). El mapeo (1.5) representa una traslación en la que el origen del plano  $\zeta$  es mapeado al punto  $w = \beta$  en el plano  $w$ , y el mapeo de cualquier otro punto en el plano  $\zeta$  se obtiene sumando  $\beta$  a las coordenadas para obtener el punto equivalente en el plano  $w$ . Geométricamente, el mapeo (1.5) es como si el plano  $\zeta$  fuera levantado y, sin rotación, el origen fuera colocado sobre el punto  $\beta$ . Los ejes originales representan

Figura 1.6 El mapeo  $w = \zeta + \beta$ .

entonces al plano  $w$  como se ilustra en la figura 1.6. Obviamente *todas* las curvas, en particular las rectas, son preservadas bajo esta traslación.

Ahora estamos en posición de interpretar (1.2), el mapeo lineal general, geométricamente como una combinación de mapeos que pueden considerarse como fundamentales, a saber

- traslación
- rotación, y
- ampliación

esto es,

$$z \xrightarrow{\text{rotación}} e^{j\theta}z \xrightarrow{\text{ampliación}} |\alpha|e^{j\theta}z \xrightarrow{\text{traslación}} |\alpha|e^{j\theta}z + \beta = \alpha z + \beta = w$$

Se sigue claramente que una recta en el plano  $z$  es mapeada en una recta correspondiente en el plano  $w$  bajo el mapeo lineal  $w = \alpha z + \beta$ . Una segunda propiedad muy útil de los mapeos lineales es que los círculos son mapeados en círculos. Para confirmar esto, consideraremos el círculo general

$$|z - z_0| = r$$

en el plano  $z$  que tiene como centro al complejo  $z_0$  y como radio al real  $r$ . Al reorganizar la ecuación del mapeo  $w = \alpha z + \beta$  se obtiene

$$z = \frac{w - \beta}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0)$$

así que

$$z - z_0 = \frac{w - w_0}{\alpha} - z_0 = \frac{1}{\alpha}(w - w_0)$$

donde  $w_0 = \alpha z_0 + \beta$ . Entonces

$$|z - z_0| = r$$

implica

$$|w - w_0| = |\alpha|r$$

que es un círculo, con centro en  $w_0$  dado por la imagen de  $z_0$  en el plano  $w$  y con radio  $|\alpha|r$  dado por el radio del círculo en el plano  $z$  amplificado por  $|\alpha|$ .

Concluimos esta sección considerando ejemplos de mapeos lineales.

**EJEMPLO 1.2**

Examine el mapeo

$$w = (1 + j)z + 1 - j$$

como una sucesión de mapeos fundamentales: traslación, rotación y amplificación.

**Solución** El mapeo lineal puede verse como la siguiente sucesión de mapeos simples:

$$\begin{array}{ccccccc} z & \xrightarrow{\text{rotación por } \frac{1}{4}\pi} & e^{j\pi/4}z & \xrightarrow{\text{ampliación por } \sqrt{2}} & \sqrt{2}e^{j\pi/4}z & \xrightarrow{\text{traslación } 0 \rightarrow 1-j \text{ o } (0,0) \rightarrow (1,-1)} & \sqrt{2}e^{j\pi/4}z + 1 - j = w \\ & & & & & & \\ & & \text{en sentido contrario a las manecillas del reloj} & & & & \end{array}$$

La figura 1.7 ilustra este proceso en forma de diagrama. El sombreado en la Figura 1.7 ayuda a identificar cómo el plano  $z$  se mueve, se gira y se expande bajo este mapeo. Por ejemplo, la línea que une los puntos  $0 + j2$  y  $1 + j0$  en el plano  $z$  tiene la ecuación cartesiana

$$y - \frac{1}{2}y + x = 1$$

Al tomar  $w = u + jv$  y  $z = x + jy$ , el mapeo

$$w = (1 + j)z + 1 - j$$

se convierte en

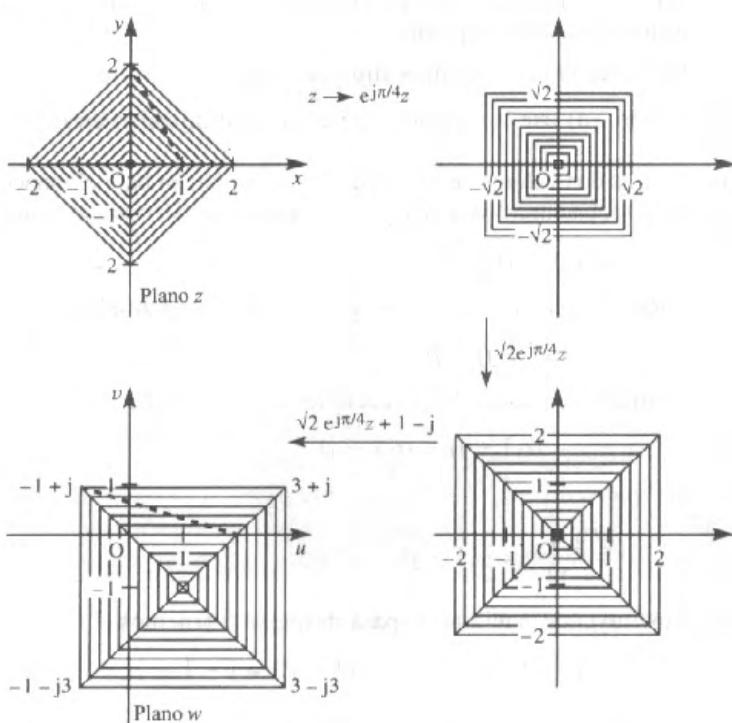


Figura 1.7 El mapeo  $w = (1 + j)z + 1 - j$ .

$$u + jv = (1 + j)(x + jy) + 1 - j = (x - y + 1) + j(x + y - 1)$$

Al igualar las partes real e imaginaria se obtiene

$$u = x - y + 1, \quad v = x + y - 1$$

luego al resolver para  $x$  y  $y$  se tiene

$$2x = u + v, \quad 2y = v - u + 2$$

Sustituyendo  $x$  y  $y$  en la ecuación  $\frac{1}{2}y + x = 1$  da la imagen de esta recta en el plano  $w$  como la recta

$$3v + u = 2$$

que corta en 2 al eje real en el plano  $w$  y al eje imaginario en  $\frac{2}{3}$ . En la figura 1.7 se muestran ambas rectas punteadas en los planos  $z$  y  $w$  respectivamente.

### EJEMPLO 1.3

El mapeo  $w = \alpha z + \beta$  ( $\alpha, \beta$  números complejos constantes) mapea el punto  $z = 1 + j$  en el punto  $w = j$ , y el punto  $z = 1 - j$  en el punto  $w = -1$ .

- Determine  $\alpha$  y  $\beta$ .
- Encuentre la región en el plano  $w$  correspondiente al semiplano derecho  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  en el plano  $z$ .
- Encuentre la región en el plano  $w$  correspondiente al interior del círculo unitario  $|z| < 1$  en el plano  $z$ .
- Encuentre los puntos fijos del mapeo.

En (b)–(d) use los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  determinados en (a).

#### Solución

- Los dos valores de  $z$  y  $w$  que se corresponden bajo el mapeo lineal dado dan origen a dos ecuaciones para  $\alpha$  y  $\beta$  como sigue: si  $z = 1 + j$  se mapea en  $w = j$  implica

$$j = \alpha(1 + j) + \beta$$

mientras que si  $z = 1 - j$  se mapea en  $w = -1$  implica

$$-1 = \alpha(1 - j) + \beta$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en  $\alpha$  y  $\beta$  da

$$j + 1 = \alpha(1 + j) - \alpha(1 - j)$$

así que

$$\alpha = \frac{1 + j}{j^2} = \frac{1}{2}(1 - j)$$

Sustituyendo hacia atrás para despejar  $\beta$  tenemos

$$\beta = j - (1 + j)\alpha = j - \frac{1}{2}(1 - j^2) = j - 1$$

así que

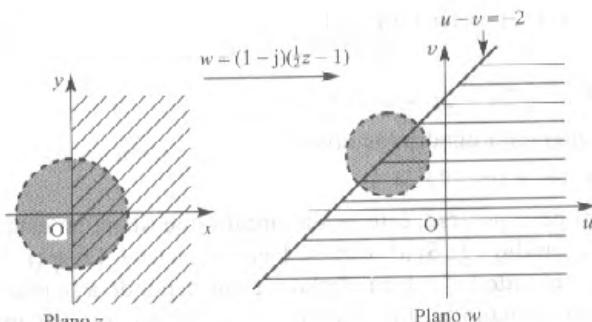


Figura 1.8 El mapeo del ejemplo 1.3.

$$w = \frac{1}{2}(1 - j)z + j - 1 = (1 - j)\left(\frac{1}{2}z - 1\right)$$

(b) La mejor manera de encontrar la imagen de curvas específicas en el plano  $w$  es primero expresar  $z$  ( $= x + jy$ ) en términos de  $w$  ( $= u + jv$ ) para luego igualar las partes real e imaginaria y expresar  $x$  y  $y$  en términos de  $u$  y  $v$ . Tenemos

$$w = (1 - j)\left(\frac{1}{2}z - 1\right)$$

el cual dividiendo entre  $1 - j$  da

$$\frac{w}{1 - j} = \frac{1}{2}z - 1$$

Al tomar  $w = u + jv$  y  $z = x + jy$  y racionalizar del lado izquierdo, tenemos

$$\frac{1}{2}(u + jv)(1 + j) = \frac{1}{2}(x + jy) - 1$$

Al igualar las partes real e imaginaria se tiene

$$u - v = x - 2, \quad u + v = y \quad (1.6)$$

La primera de éstas puede usarse para encontrar la imagen de  $x \geq 0$ . Ésta es  $u - v \geq -2$  que también es una región acotada por la recta  $u - v = 2$  y se muestra en la figura 1.8. Elegimos un punto en la mitad derecha del plano  $z$ , digamos  $z = 2$ , y el mapeo da  $w = 0$  como la imagen de este punto. Esto aclara cualquier duda acerca de cuál lado de  $u - v = -2$  corresponde a la mitad derecha del plano  $z$   $x \geq 0$ . En la figura 1.8 aparecen sombreadas las dos regiones correspondientes.

Observe que lo siguiente es siempre cierto, aunque no se va a demostrar aquí. Si una curva corta al plano  $z$  en dos, entonces la curva correspondiente en el plano  $w$  también corta al plano  $w$  en dos y, más aún, los puntos en uno de los dos conjuntos distintos del plano  $z$  partidos por la curva corresponden a puntos en sólo uno de los conjuntos partidos similarmente en el plano  $w$ .

(c) En la forma cartesiana, con  $z = x + jy$ , la ecuación del círculo unitario  $|z| = 1$  es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Al sustituir  $x$  y  $y$  de las relaciones del mapeo (1.6) se obtiene la imagen de este círculo como

$$(u - v + 2)^2 + (u + v)^2 = 1$$

o

$$u^2 + v^2 + 2u - 2v + \frac{3}{2} = 0$$

que completando cuadrados nos lleva a

$$(u + 1)^2 + (v - 1)^2 = \frac{1}{2}$$

Como era de esperarse, éste es un círculo que tiene, en este caso particular, centro en  $(-1, 1)$  y radio  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Si  $x^2 + y^2 < 1$  entonces  $(u + 1)^2 + (v - 1)^2 < \frac{1}{2}$ , así la región dentro del círculo  $|z| = 1$  en el plano  $z$  corresponde a la región dentro de su círculo imagen en el plano  $w$ . Las regiones correspondientes aparecen sombreadas en la figura 1.8.

(d) Los puntos fijos del mapeo se obtienen poniendo  $w = z$  en  $w = \alpha z + \beta$ , lo que genera

$$z = (\frac{1}{2}z - 1)(1 - j)$$

esto es,

$$z = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}jz - 1 + j$$

así que

$$z = \frac{-1 + j}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j} = j2$$

es el único punto fijo.

Antes de dejar este ejemplo analicemos un último punto. En la figura 1.8 las imágenes de  $x = 0$  y  $x^2 + y^2 = 1$  también pueden ser vistas en el contexto de traslación, rotación (la línea en la figura 1.8 gira alrededor de  $z = 2j$ ) y ampliación (de hecho, reducción, como se puede ver por la disminución en el diámetro del círculo comparado con su imagen en el plano  $w$ ).

## 1.2.2 Ejercicios

- 1 Encuentre las ecuaciones de las siguientes rectas en el plano  $z$ ,  $y = mx + c$  en la forma cartesiana  $z = x + jy$  ( $m$  y  $c$  constantes reales):

(a)  $|z - 2 + j| = |z - j + 3|$

(b)  $|z + z^* + 4j(z - z^*)| = 6$

donde  $*$  denota el conjugado complejo.

- 2 Encuentre el punto de intersección y el ángulo de intersección de las rectas

$$|z - 1 - j| = |z - 3 + j|$$

$$|z - 1 + j| = |z - 3 - j|$$

- 3 La función  $w = jz + 4 - 3j$  es una combinación de traslación y rotación. Siguiendo el procedimiento del ejemplo 1.2, demuestre esto con un diagrama. Encuentre la imagen de la línea  $6x + y = 22$  ( $z = x + jy$ ) en el plano  $w$  bajo este mapeo.

- 4 Demuestre que el mapeo  $w = (1 - j)z$ , donde  $w = u + jv$  y  $z = x + jy$ , mapea la región  $y \geq 1$  del plano  $z$  en la región  $u + v \geq 2$  del plano  $w$ . Ilustrar las regiones en un diagrama.

- 5 Bajo el mapeo  $w = jz + j$ , donde  $w = u + jv$  y  $z = x + jy$ , demuestre que el semiplano  $x \geq 0$  del plano  $z$  mapea en el semiplano  $v \geq 1$  del plano  $w$ .

6 Para  $z = x + jy$  encuentre la región imagen en el plano  $w$  correspondiente a la franja semi-infinita  $x > 0$ ,  $0 \leq y < 2$  del plano  $z$  bajo el mapeo  $w = jz + 1$ . Ilustre las regiones en ambos planos.

7 Encuentre las imágenes de las siguientes curvas bajo el mapeo

$$w = (j + \sqrt{3})z + j\sqrt{3} - 1$$

$$(a) y = 0 \quad (b) x = 0$$

$$(c) x^2 + y^2 = 1 \quad (d) x^2 + y^2 + 2y = 1$$

donde  $z = x + jy$ .

8 El mapeo  $w = \alpha z + \beta$  ( $\alpha, \beta$  ambos números constantes complejos) mapea el punto  $z = 1 + j$  en el punto  $w = j$  y el punto  $z = -1$  en el punto  $w = 1 + j$ .

(a) Determine  $\alpha$  y  $\beta$ .

(b) Encuentre la región del plano  $w$  correspondiente al semiplano superior  $\operatorname{Im}(z) > 0$  e ilustre con un diagrama.

(c) Encuentre la región del plano  $w$  correspondiente al disco  $|z| < 2$  e ilustre con un diagrama.

(d) Encuentre los puntos fijos del mapeo.

En (b)–(d) utilice los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  determinados en (a).

### 1.2.3 Inversión

El mapeo de inversión es de la forma

$$w = \frac{1}{z} \tag{1.7}$$

y en esta subsección consideraremos la imagen de círculos y rectas en el plano  $z$  bajo tal mapeo. Claramente bajo este mapeo la imagen en el plano  $w$  de un círculo general

$$|z - z_0| = r$$

en el plano  $z$  con centro en  $z_0$  y radio  $r$  está dado por

$$\left| \frac{1}{w} - z_0 \right| = r \tag{1.8}$$

pero no es inmediatamente obvio qué forma tiene esta curva en el plano  $w$ . Para investigarlo, tomamos  $w = u + jv$  y  $z_0 = x_0 + jy_0$  en (1.8) obteniendo

$$\left| \frac{u - jv}{u^2 + v^2} - x_0 - jy_0 \right| = r$$

Elevando al cuadrado se tiene

$$\left( \frac{u}{u^2 + v^2} - x_0 \right)^2 + \left( \frac{v}{u^2 + v^2} - y_0 \right)^2 = r^2$$

que desarrollándolo nos lleva a

$$\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{2ux_0}{u^2 + v^2} + x_0^2 + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{2vy_0}{u^2 + v^2} + y_0^2 = r^2$$

$$\frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{2vy_0 - 2ux_0}{u^2 + v^2} = r^2 - x_0^2 - y_0^2$$

así que

$$(u^2 + v^2)(r^2 - x_0^2 - y_0^2) + 2ux_0 - 2vy_0 = 1 \quad (1.9)$$

La expresión es cuadrática en  $u$  y en  $v$ , con los coeficientes de  $u^2$  y  $v^2$  iguales y no hay término en  $uv$ . Por tanto representa un círculo, a menos que el coeficiente de  $u^2 + v^2$  sea cero, lo cual ocurre cuando

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2, \quad \text{o} \quad |z_0| = r$$

y tenemos

$$2ux_0 - 2vy_0 = 1$$

que representa una recta en el plano  $w$ .

Resumiendo, el mapeo de inversión  $w = 1/z$  mapea el círculo  $|z - z_0| = r$  del plano  $z$  en otro círculo del plano  $w$  a menos que  $|z_0| = r$  en cuyo caso el círculo es mapeado en una recta que no pasa por el origen en el plano  $w$ .

Cuando  $|z_0| \neq r$ , podemos dividir la ecuación (1.9) del círculo en el plano  $w$  entre  $r^2 - x_0^2 - y_0^2$  para obtener

$$\frac{u^2 + v^2 + \frac{2x_0u}{r^2 - x_0^2 - y_0^2} - \frac{2y_0v}{r^2 - x_0^2 - y_0^2}}{r^2 - x_0^2 - y_0^2} = \frac{1}{r^2 - x_0^2 - y_0^2}$$

que se puede escribir en la forma

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = R^2$$

donde  $(u_0, v_0)$  son las coordenadas del centro y  $R$  es el radio del círculo en el plano  $w$ . Se deja como ejercicio para el lector demostrar que

$$(u_0, v_0) = \left( -\frac{x_0}{r^2 - |z_0|^2}, \frac{y_0}{r^2 - |z_0|^2} \right), \quad R = \frac{r}{r^2 - |z_0|^2}$$

Ahora consideraremos la recta general

$$|z - a_1| = |z - a_2|$$

en el plano  $z$  donde  $a_1$  y  $a_2$  son números complejos constantes con  $a_1 \neq a_2$ . Bajo el mapeo (1.7) se convierte en la curva en el plano  $w$  representada por la ecuación

$$\left| \frac{1}{w} - a_1 \right| = \left| \frac{1}{w} - a_2 \right| \quad (1.10)$$

De nuevo, no es fácil identificar esta curva, así que procedemos como antes y tomamos

$$w = u + jv, \quad a_1 = p + jq, \quad a_2 = r + js$$

donde  $p, q, r$  y  $s$  son constantes reales. Al sustituir en (1.10) y elevar al cuadrado ambos lados se tiene que

$$\left( \frac{u}{u^2 + v^2} - p \right)^2 + \left( \frac{v}{u^2 + v^2} + q \right)^2 = \left( \frac{u}{u^2 + v^2} - r \right)^2 + \left( \frac{v}{u^2 + v^2} + s \right)^2$$

Al desarrollar cada término, el cuadrado de  $u/(u^2 + v^2)$  y  $v/(u^2 + v^2)$  se cancela, lo que da

$$-\frac{2up}{u^2 + v^2} + p^2 + \frac{2vq}{u^2 + v^2} + q^2 = -\frac{2ur}{u^2 + v^2} + r^2 + \frac{2vs}{u^2 + v^2} + s^2$$

que al simplificar se convierte en

$$(u^2 + v^2)(p^2 + q^2 - r^2 - s^2) + 2u(r - p) + 2v(q - s) = 0 \quad (1.11)$$

Nuevamente esto representa un círculo *que pasa por el origen* en el plano  $w$ , a menos que

$$p^2 + q^2 = r^2 + s^2$$

lo cual implica que  $|a_1| = |a_2|$ , cuando esto representa una recta, también pasa por el origen, en el plano  $w$ . La forma algebraica de las coordenadas del centro del círculo y su radio pueden deducirse de (1.11).

Por consiguiente, podemos hacer la importante conclusión de que el mapeo de inversión  $w = 1/z$  manda círculos o rectas en el plano  $z$  a círculos o rectas en el plano  $w$ . Más aún, como hemos desarrollado el álgebra, podemos ser más específicos. Si el círculo en el plano  $z$  pasa por el origen (esto es  $|z_0| = r$  en (1.9)) entonces es mapeado en una recta en el plano  $w$  que *no* pasa por el origen. Si la recta en el plano  $z$  pasa por el origen ( $|a_1| = |a_2|$  en (1.11)) entonces es mapeada en una recta en el plano  $w$  que pasa por el origen. La figura 1.9 resume estas conclusiones.

Para ver por qué sucede esto, primero observamos que los puntos fijos del mapeo determinado por  $w = z$  son

$$z = \frac{1}{z}, \quad \text{o} \quad z^2 = 1$$

así que  $z = \pm 1$ .

También notamos que  $z = 0$  es mapeado al infinito en el plano  $w$  y  $w = 0$  es mapeado al infinito en el plano  $z$  y viceversa en ambos casos. Más aún, si aplicamos el mapeo una segunda vez, obtenemos el mapeo identidad. Esto es, si

$$w = \frac{1}{z}, \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{1}{w}$$

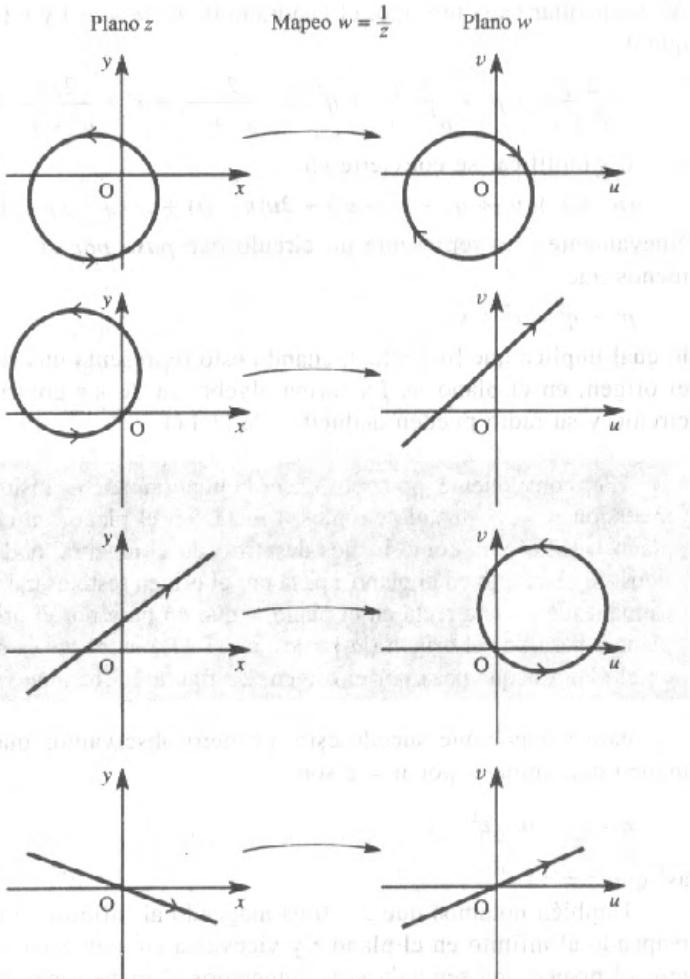
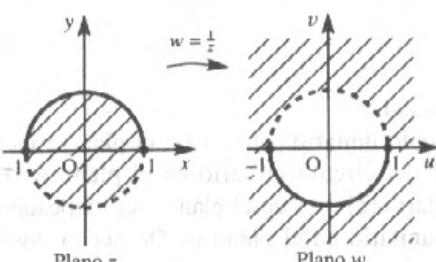
entonces

$$\zeta = \frac{1}{1/z} = z$$

que es el mapeo identidad.

El interior del círculo unitario  $|z| < 1$  en el plano  $z$  es mapeado en  $|1/w| < 1$  o  $|w| > 1$ , el exterior del círculo unitario en el plano  $w$ . Por la misma razón, el exterior del círculo unitario  $|z| > 1$  en el plano  $z$  es mapeado en  $|1/w| > 1$  o  $|w| < 1$ , el interior del círculo unitario en el plano  $w$ . De hecho, los puntos en  $|z| = 1$  en el plano  $z$  son mapeados a los puntos en  $|w| = 1$  en el plano  $w$  con  $\pm 1$  y quedan fijos, como ya se probó. La figura 1.10 resume esta propiedad.

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que la mitad superior de la frontera de  $|z| = 1$  es mapeada en la mitad inferior de la frontera de  $|w| = 1$ .

Figura 1.9 El mapeo inverso  $w = 1/z$ .Figura 1.10 Mapeo del círculo unitario bajo  $w = 1/z$ .

Para cualquier punto  $z_0$  en el plano  $z$ , el punto  $1/z_0$  es llamado el **inverso de  $z_0$  con respecto al círculo  $|z| = 1$** ; esta es la razón del nombre el mapeo. (Note el doble significado de inverso; aquí significa la función recíproca y no el mapeo “inverso”.) La definición más general de inverso es que para cualquier punto  $z_0$  en el plano  $z$  el punto  $r^2/z_0$  es el inverso de  $z_0$  con respecto al círculo  $|z| = r$ , donde  $r$  es una constante real.

### EJEMPLO 1.4

Determine la trayectoria imagen en el plano  $w$  correspondiente al círculo  $|z - 3| = 2$  en el plano  $z$  bajo el mapeo  $w = 1/z$ . Dibuje las trayectorias en ambos planos  $z$  y  $w$  y sombre en el plano  $w$  la región correspondiente a la región dentro del círculo en el plano  $z$ .

**Solución** La imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z - 3| = 2$  en el plano  $z$  bajo el mapeo  $w = 1/z$  está dada por

$$\left| \frac{1}{w} - 3 \right| = 2$$

la que al tomar  $w = u + jv$  da

$$\left| \frac{u - jv}{u^2 + v^2} - 3 \right| = 2$$

Elevando ambos lados al cuadrado, tenemos entonces

$$\left( \frac{u}{u^2 + v^2} - 3 \right)^2 + \left( \frac{-v}{u^2 + v^2} \right)^2 = 4$$

o

$$\frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} - \frac{6u}{u^2 + v^2} + 5 = 0$$

que se reduce a

$$1 - 6u + 5(u^2 + v^2) = 0$$

o

$$(u - \frac{3}{5})^2 + v^2 = \frac{4}{25}$$

Así la imagen en el plano  $w$  es un círculo con centro en  $(\frac{3}{5}, 0)$  y radio  $\frac{2}{5}$ . Los círculos correspondientes en los planos  $z$  y  $w$  se muestran en la figura 1.11.

Al tomar  $z = x + jy$  el mapeo  $w = 1/z$  se convierte en

$$u + jv = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

el cual, igualando las partes real e imaginaria da

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

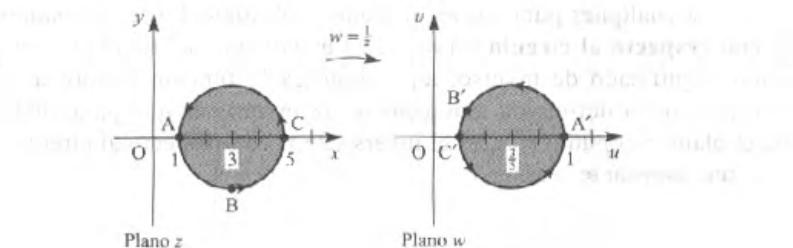


Figura 1.11 El mapeo del ejemplo 1.4.

Ahora podemos usar estas dos relaciones para determinar la imagen de puntos particulares bajo el mapeo. En particular, el centro  $(3, 0)$  del círculo en el plano  $z$  es mapeado en el punto  $u = \frac{1}{3}$ ,  $v = 0$  en el plano  $w$  que está dentro del círculo mapeado. Así, bajo el mapeo, la región dentro del círculo en el plano  $z$  es mapeada en la región dentro del círculo en el plano  $w$ .

Aún más, si por ejemplo se consideran tres puntos  $A(1 + j0)$ ,  $B(3 - j2)$  y  $C(5 + j0)$  en el círculo en el plano  $z$ , encontramos que los puntos imagen que corresponden al círculo en el plano  $w$  son puntos  $A'(1, 0)$ ,  $B'(\frac{3}{13}, \frac{2}{13})$  y  $C'(\frac{1}{5}, 0)$ . Así, conforme el punto  $z$  recorre el círculo en el plano  $z$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, el punto correspondiente  $w$  en el plano  $w$  también recorrerá el círculo mapeado en sentido contrario a las manecillas del reloj como se indica en la figura 1.11.

## 1.2.4 Mapeos bilineales

Un mapeo bilineal es un mapeo de la forma

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1.12)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$  son constantes complejas. Se llama mapeo bilineal en  $z$  y en  $w$  ya que puede ser escrito en la forma  $Awz + Bw + Cz + D = 0$ , que es lineal en ambos  $z$  y  $w$ .

Claramente se observa que el mapeo bilineal (1.12) es más complicado que el mapeo lineal dado en (1.2). De hecho, el mapeo lineal general es un caso especial del mapeo bilineal, ya que haciendo  $c = 0$  y  $d = 1$  en (1.12) da (1.2). Para investigar el mapeo bilineal, reescribimos el lado derecho de (1.12) como sigue:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d}$$

así que

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \quad (1.13)$$

Este mapeo claramente degenera en  $w = a/c$  a menos que pidamos que  $bc - ad \neq 0$ . Por tanto, decimos que (1.12) representa un mapeo bilineal si el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

no es cero. Este es llamado algunas veces el **determinante del mapeo**. Cuando esta condición se da, el mapeo inverso

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

que se obtiene al despejar  $z$  de (1.12), también es bilineal, ya que

$$\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = da - cb \neq 0$$

Al renombrar las constantes de tal manera que  $\lambda = a/c$ ,  $\mu = bc - ad$ ,  $\alpha = c^2$  y  $\beta = cd$ , (1.13) se transforma en

$$w = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta}$$

y se puede dividir el mapeo en tres pasos como se indica:

$$z_1 = \alpha z + \beta$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1}$$

$$w = \lambda + \mu z_2$$

El primero y el tercero de estos pasos son mapeos lineales como los considerados en la sección 1.2.1, mientras que el segundo es el mapeo inverso considerado en la sección 1.2.3. Así que el mapeo bilineal (1.12) puede generarse a partir de los mapeos elementales siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} z & \xrightarrow[\text{rotación}]{\text{y}} & \alpha z & \xrightarrow[\text{traslación}]{\text{y}} & \alpha z + \beta & \xrightarrow[\text{inversión}]{\text{y}} & \frac{1}{\alpha z + \beta} \\ & & & & & & \\ & & \xrightarrow[\text{ampliación}]{\text{y}} & & & & \\ & & \xrightarrow[\text{ampliación}]{\text{y}} & \frac{\mu}{\alpha z + \beta} & \xrightarrow[\text{traslación}]{\text{y}} & \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta} & = w \end{array}$$

En la sección 1.2.1 se vio que la transformación lineal general  $w = \alpha z + \beta$  no cambia la forma de la curva mapeada del plano  $z$  en el plano  $w$ . En la sección 1.2.3 también vimos que el mapeo inversión  $w = 1/z$  mapea círculos o rectas en el plano  $z$  en círculos o rectas en el plano  $w$ . Se sigue que el mapeo bilineal también exhibe esta propiedad importante, es decir, también mapeará círculos o rectas en el plano  $z$  en círculos o rectas en el plano  $w$ .

**EJEMPLO 1.5**

Investigue el mapeo

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

para tal fin encuentre las imágenes en el plano  $w$  de las rectas  $\operatorname{Re}(z) = \text{constante}$  e  $\operatorname{Im}(z) = \text{constante}$ . Encuentre los puntos fijos del mapeo.

**Solución** Como se están buscando las imágenes de curvas específicas en el plano  $w$ , primero expresamos  $z$  en términos de  $w$  y después expresamos  $x$  y  $y$  en términos de  $u$  y  $v$ , donde  $z = x + jy$  y  $w = u + jv$ . Despejando  $z$  de

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

nos da

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

Al tomar  $z = x + jy$  y  $w = u + jv$  se tiene

$$\begin{aligned} x + jy &= \frac{1+u+jv}{1-u-jv} \\ &= \frac{1+u+jv}{1-u-jv} \frac{1-u+jv}{1-u+jv} \end{aligned}$$

que se reduce a

$$x + jy = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1-u)^2 + v^2} + j \frac{2v}{(1-u)^2 + v^2}$$

Igualando las partes real e imaginaria nos da

$$x = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1-u)^2 + v^2} \quad (1.14a)$$

$$y = \frac{2v}{(1-u)^2 + v^2} \quad (1.14b)$$

De (1.14a) se tiene que las rectas  $\operatorname{Re}(z) = x = c_1$ , que son paralelas al eje imaginario en el plano  $z$ , corresponden a las curvas

$$c_1 = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1-u)^2 + v^2}$$

donde  $c_1$  es una constante en el plano  $w$ . Al reorganizar esto se llega a

$$c_1(1 - 2u + u^2 + v^2) = 1 - u^2 - v^2$$

o suponiendo que  $1 + c_1 \neq 0$ ,

$$u^2 + v^2 - \frac{2c_1 u}{1 + c_1} + \frac{c_1 - 1}{c_1 + 1} = 0$$

que completando cuadrados da

$$\left(u - \frac{c_1}{1 + c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1 + c_1}\right)^2$$

Ahora es claro que la curva correspondiente en el plano  $w$  es un círculo con centro en  $(u = c_1/(1 + c_1), v = 0)$  y radio  $(1 + c_1)^{-1}$ .

En la manipulación algebraica supusimos que  $c_1 \neq -1$  para poder dividir entre  $1 + c_1$ . En el caso excepcional  $c_1 = -1$  tenemos  $u = 1$ , y la curva mapeada es una recta paralela al eje imaginario, en el plano  $w$ .

En forma similar, a partir de (1.14b) se tiene que las rectas  $\operatorname{Im}(z) = y = c_2$ , que son paralelas al eje imaginario en el plano  $z$ , corresponden a las curvas

$$c_2 = \frac{2v}{(1-u)^2 + v^2}$$

donde  $c_2$  es una constante en el plano  $w$ . Nuevamente, esto representa usualmente un círculo en el plano  $w$ , pero excepcionalmente representará una recta. Al disponer la ecuación en un nuevo orden se tiene

$$(1-u)^2 + v^2 = \frac{2v}{c_2}$$

suponiendo que  $c_2 \neq 0$ . Al completar el cuadrado se tiene

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{c_2}\right)^2 = \frac{1}{c_2^2}$$

que representa un círculo en el plano  $w$ , con centro en  $(u = 1, v = 1/c_2)$  y radio  $1/c_2$ .

En el caso excepcional de que  $c_2 = 0$ , entonces  $v = 0$  y vemos que el eje real  $y = 0$  en el plano  $z$  mapea en el eje real  $v = 0$  en el plano  $w$ .

Tomar una sucesión de valores  $c_1$  y después  $c_2$ , digamos de  $-10$  a  $10$  en pasos de  $+1$ , nos permite verificar los mapeos mostrados en la figura 1.12. Los puntos fijos del mapeo están dados por

$$z = \frac{z-1}{z+1}$$

esto es,

$$z^2 = -1, \quad \text{o} \quad z = \pm j$$

En general, todos los mapeos bilineales tendrán dos puntos fijos. Sin embargo, aunque existen propiedades matemáticamente interesantes asociadas con mapeos particulares que tienen los mismos puntos fijos, ellos no tienen relevancia en las aplicaciones de la ingeniería, por lo que sólo merecen una pequeña referencia aquí.

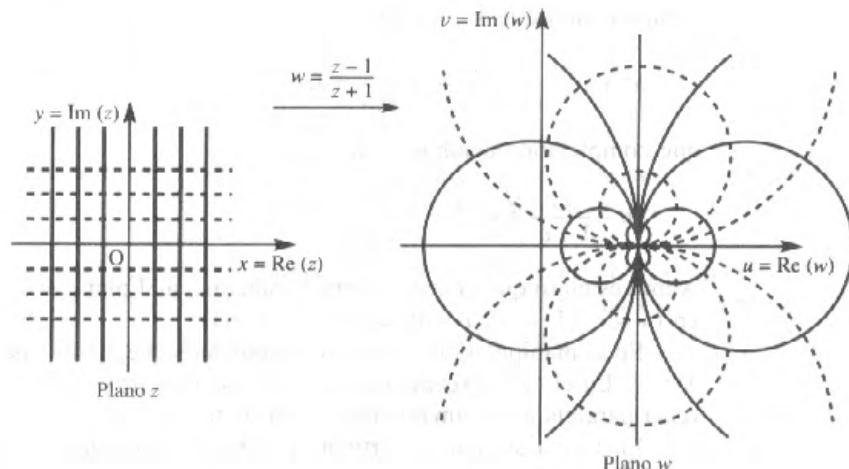


Figura 1.12 El mapeo  $w = (z - 1)/(z + 1)$ .

### EJEMPLO 1.6

Encuentre la imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z| = 2$  en el plano  $z$  bajo el mapeo bilineal

$$w = \frac{z - j}{z + j}$$

Dibuje las curvas en ambos planos  $z$  y  $w$  y sombreo la región en el plano  $w$  correspondiente a la región interior del círculo en el plano  $z$ .

**Solución** Despejando  $z$  de la transformación se tiene

$$z = \frac{jw + j}{1 - w}$$

así que la imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z| = 2$  en el plano  $z$  está determinada por

$$\left| \frac{jw + j}{1 - w} \right| = 2 \quad (1.15)$$

Una posible manera de proceder ahora es poner  $w = u + jv$  y actuar como en el ejemplo 1.4, pero el álgebra se vuelve un poco complicada. Un método alternativo es usar la propiedad de los números complejos que dice  $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ , así (1.15) se convierte en

$$|jw + j| = 2|1 - w|$$

Al tomar  $w = u + jv$  se tiene

$$|-v + j(u + 1)| = 2|(1 - u) - jv|$$

que elevando ambos lados al cuadrado nos lleva a

$$v^2 + (1 + u)^2 = 4[(1 - u)^2 + v^2]$$

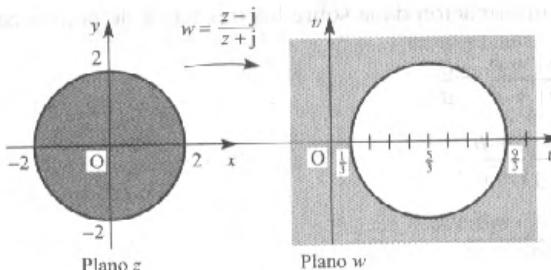


Figura 1.13 El mapeo  $w = (z - j)/(z + j)$ .

o

$$u^2 + v^2 - \frac{10}{9}u + 1 = 0$$

Al completar el cuadrado del término se tiene

$$(u - \frac{5}{9})^2 + v^2 = \frac{16}{9}$$

lo que indica que la curva imagen en el plano  $w$  es un círculo con centro en  $(u = \frac{5}{9}, v = 0)$  y radio  $\frac{4}{3}$ . En la figura 1.13 se ilustran los círculos que corresponden a los planos  $z$  y  $w$ . Para identificar las regiones correspondientes, consideramos el mapeo del punto  $z = 0 + j0$  dentro del círculo en el plano  $z$ . Bajo el mapeo dado, éste mapea el punto

$$w = \frac{0 - j}{0 + j} = -1 + j0$$

en el plano  $w$ . Entonces se sigue que la región dentro del círculo  $|z| = 2$  en el plano  $z$  mapea en la región fuera del círculo en el plano  $w$ .

1.2.6

Una propiedad interesante de (1.12) es que existe sólo una transformación bilineal que mapea tres puntos distintos dados  $z_1, z_2$  y  $z_3$  en el plano  $z$  en tres puntos distintos específicos  $w_1, w_2$  y  $w_3$  en el plano  $w$  respectivamente. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que la transformación bilineal está dada por

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (1.16)$$

El lado derecho de (1.16) es llamado la razón cruzada de  $z_1, z_2, z_3$  y  $z$ . Ilustraremos esto con un ejemplo.

Encuentre la transformación bilineal que mapea los tres puntos  $z = 0, -j$  y  $-1$  en los tres puntos  $w = j, 1, 0$  en el plano  $w$  respectivamente.

### EJEMPLO 1.7

**Solución**

Consideremos la transformación

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

al utilizar la información dada sobre los tres pares de puntos correspondientes se tiene

$$j = \frac{a(0) + b}{c(0) + d} = \frac{b}{d} \quad (1.17a)$$

$$1 = \frac{a(-j) + b}{c(-j) + d} \quad (1.17b)$$

$$0 = \frac{a(-1) + b}{c(-1) + d} \quad (1.17c)$$

De (1.17c)  $a = b$ ; entonces de (1.17a)

$$d = \frac{b}{j} = -jb = -ja$$

y de (1.17b)  $c = ja$ . Así

$$w = \frac{az + a}{jaz - ja} = \frac{\frac{1}{j}z + 1}{\frac{1}{j}z - 1} = -j \frac{z + 1}{z - 1}$$

Alternativamente, al utilizar (1.16) se puede obtener

$$\frac{(w - j)(1 - 0)}{(w - 0)(1 - j)} = \frac{(z - 0)(-j + 1)}{(z + 1)(-j - 0)}$$

o

$$w = -j \frac{z + 1}{z - 1}$$

como antes.

## 1.2.5 Ejercicios

- 9 Demuestre que si  $z = x + jy$ , la imagen del semiplano  $y \geq c$  ( $c$  constante) bajo el mapeo  $w = 1/z$  es el interior de un círculo, siempre que  $c \geq 0$ . ¿Cuál es la imagen cuando  $c = 0$  y cuando  $c < 0$ ? Ilustrarlo con un dibujo en el plano  $w$ .
- 10 Determine la imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z + \frac{3}{4} + j| = \frac{7}{4}$  bajo el mapeo inverso  $w = 1/z$ .
- 11 Pruebe que el mapeo  $w = 1/z$  mapea el círculo  $|z - a| = a$ , donde  $a$  es una constante real positiva en una recta en el plano  $w$ . Dibuje las curvas correspondientes en los planos  $z$  y  $w$  e indique la región donde se mapea el interior del círculo en el plano  $z$ .

- 12 Encuentre un mapeo bilineal que mapee  $z = 0$  en  $w = j$ ,  $z = -j$  en  $w = 1$  y  $z = -1$  en  $w = 0$ . Despues, dibuje el mapeo y encuentre las imágenes en el plano  $w$  de las rectas  $\operatorname{Re}(z) = \text{constante}$  e  $\operatorname{Im}(z) = \text{constante}$  en el plano  $z$ . Verifique que  $z = \frac{1}{2}(j - 1)(-1 \pm \sqrt{3})$  son los puntos fijos del mapeo.
- 13 Las dos variables complejas  $w$  y  $z$  están relacionadas por el mapeo inverso

$$w = \frac{1 + j}{z}$$

(a) Encuentre las imágenes de los puntos  $z = 1, 1 - j$  y  $0$  en el plano  $w$ .

(b) Encuentre la región del plano  $w$  correspondiente al interior del círculo unitario  $|z| < 1$  en el plano  $z$ .

(c) Encuentre las curvas en el plano  $w$  que corresponden a las rectas  $x = y$  y  $x + y = 1$  en el plano  $z$ .

(d) Encuentre los puntos fijos del mapeo.

14 Dado el mapeo complejo

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

donde  $w = u + jv$  y  $z = x + jy$ , determine la imagen de la curva en el plano  $w$  correspondiente al arco semicircular  $x^2 + y^2 = 1$  ( $x \leq 0$ ) descrito del punto  $(0, -1)$  al punto  $(0, 1)$ .

15 (a) Mapee la región en el plano  $z$  ( $z = x + jy$ ) que se encuentra entre las rectas  $x = y$  y  $y = 0$  con  $x < 0$  en el plano  $w$  bajo el mapeo bilineal

$$w = \frac{z+j}{z-3}$$

(Sugerencia: considere el punto  $w = \frac{j}{3}$  para facilitar la identificación de las regiones correspondientes.)

(b) Demuestre que, bajo el mismo mapeo que en (a), la recta  $3x + y = 4$  en el plano  $z$  corresponde al círculo unitario  $|w| = 1$  en el plano  $w$  y que el punto  $w = 1$  no corresponde a un valor finito de  $z$ .

16 Si  $w = (z - j)/(z + j)$  encuentre y dibuje la imagen en el plano  $w$  correspondiente al círculo  $|z| = 2$  en el plano  $z$ .

17 Demuestre que el mapeo bilineal

$$w = e^{j\theta_0} \frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

donde  $\theta_0$  es una constante real  $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ ,  $z_0$  es un número complejo fijo y  $z_0^*$  su conjugado, mapea la mitad superior del plano  $z$  ( $\text{Im}(z) > 0$ ) en el interior del círculo unitario en el plano  $w$  ( $|w| < 1$ ). Encuentre los valores de  $z_0$  y  $\theta_0$  si  $w = 0$  corresponde a  $z = j$  y  $w = -1$  corresponde a  $z = \infty$ .

18 Demuestre que bajo el mapeo

$$w = \frac{2jz}{z + j}$$

los arcos circulares o rectas que pasan por  $z = 0$  y  $z = j$  en el plano  $z$  son mapeados en arcos circulares o rectas que pasan por  $w = 0$  y  $w = j$  en el plano  $w$ . Encuentre las imágenes de las regiones  $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$  y  $|z| \leq |z - j|$  en el plano  $w$ .

19 Encuentre el mapeo bilineal más general que mapea el círculo unitario  $|z| = 1$  en el plano  $z$  en el círculo unitario  $|w| = 1$  en el plano  $w$  y el punto  $z = z_0$  en el plano  $z$  en el origen  $w = 0$  en el plano  $w$ .

## 1.2.6 El mapeo $w = z^2$

Existe un buen número de otros mapeos que se utilizan en ingeniería. Por ejemplo, al estudiar las transformadas de Laplace y  $z$ , que son los temas de los capítulos 2 y 3 respectivamente, nos interesan los mapeos polinomiales

$$w = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son constantes complejas, la función racional

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios en  $z$  y el mapeo exponencial

$$w = ac^{bz}$$

donde  $e = 2.71828 \dots$ , es la base de los logaritmos naturales. Como quedó claro con los mapeos bilineales de la sección 1.2.4, los mapeos elementales pueden ser difíciles de analizar. Afortunadamente tenemos dos factores de nuestro lado. Primero,

no se requiere de trazos muy detallados para curvas específicas y sus imágenes, solamente imágenes de puntos. Segundo, utilizando derivación compleja, el tema de la sección 1.3, varias facetas de estos mapeos más complicados pueden entenderse sin el largo proceso algebraico. Como un preludio, en esta subsección analizaremos el mapeo  $w = z^2$  que es el más sencillo de los mapeos polinomiales.

### EJEMPLO 1.8

Investigue el mapeo  $w = z^2$  y dibuje las imágenes en el plano  $w$  de las rectas  $x = \text{constante}$  y  $y = \text{constante}$  en el plano  $z$ .

#### Solución

Existen algunas dificultades al invertir este mapeo para obtener  $z$  como función de  $w$ , ya que la raíz cuadrada tiene problemas de unicidad. Sin embargo, no hay necesidad de invertir aquí, al tomar  $w = u + jv$  y  $z = x + jy$  el mapeo se convierte en

$$w = u + jv = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$$

que al considerar las partes real e imaginaria, da

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned} \tag{1.18}$$

Si  $x = \alpha$ , una constante real, entonces (1.18) se vuelve

$$u = \alpha^2 - y^2, \quad v = 2\alpha y$$

que, al eliminar  $y$ , da

$$u = \alpha^2 - \frac{v^2}{4\alpha^2}$$

o

$$4\alpha^2 u = 4\alpha^4 - v^2$$

así que

$$v^2 = 4\alpha^4 - 4\alpha^2 u = 4\alpha^2(\alpha^2 - u)$$

Esto representa una parábola en el plano  $w$  y como el lado derecho tiene que ser positivo,  $\alpha^2 \geq u$ , así la “nariz” de la parábola está en  $u = \alpha^2$  en el eje real positivo en el plano  $w$ .

Si  $y = \beta$ , una constante real, entonces (1.18) se convierte en

$$u = x^2 - \beta^2, \quad v = 2x\beta$$

luego, al eliminar  $x$ , se obtiene

$$u = \frac{v^2}{4\beta^2} - \beta^2$$

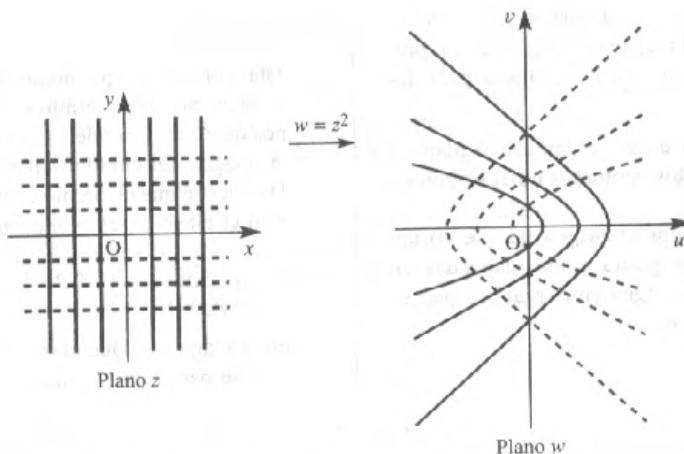


Figura 1.14 El mapeo  $w = z^2$ .

$$4\beta^2 = v^2 - 4\beta^4$$

así que

$$v^2 = 4\beta^2u + 4\beta^4 = 4\beta^2(u + \beta^2)$$

También es una parábola, pero abre en dirección opuesta. Como antes, el lado derecho debe ser positivo, así que  $u > -\beta^2$  y la “nariz” de la parábola está en el eje real negativo. En la figura 1.14 se dibujan estas curvas.

No hablaremos extensamente de los puntos finos del mapeo  $w = z^2$ . En cambio, observamos que en general, es muy difícil dibujar las imágenes de las curvas en el plano  $z$ , aun las rectas paralelas a los ejes, bajo los mapeos polinomiales.

Los siguientes ejercicios también ayudarán a entender este tópico. Volveremos a examinar los mapeos polinomiales, racionales y exponenciales después de introducir la derivación compleja en la sección 1.3.4.

## 1.2.7 Ejercicios

- 20 Encuentre la región imagen en el plano  $w$  correspondiente a la región dentro del triángulo en el plano  $z$  con vértices en  $0 + j0$ ,  $2 + j0$  y  $0 + j2$  bajo el mapeo  $w = z^2$ . Haga un dibujo.
- 21 Encuentre las imágenes de las rectas  $y = x$  y  $y = -x$  bajo el mapeo  $w = z^2$ . Encuentre también la imagen

de la recta general que pasa por el origen  $y = mx$ . Sustituyendo  $m = \tan \theta_0$  deduzca que rectas que se cortan en el origen en el plano  $z$  se mapean en rectas que se cortan en el origen en el plano  $w$ , pero que el ángulo entre las imágenes de las rectas es el doble que el ángulo entre las rectas originales.

- 22 Considere el mapeo  $w = z^n$  donde  $n$  es un entero (una generalización del mapeo  $w = z^2$ ). Use la representación polar de los números complejos para demostrar que

- (a) Círculos centrados en el origen en el plano  $z$  son mapeados en círculos centrados en el origen en el plano  $w$ .  
 (b) Rectas que pasan por el origen que se cortan con un ángulo  $\theta_0$  en el plano  $z$  son mapeadas en rectas que pasan por el origen en el plano  $w$  que se cortan con un ángulo  $n\theta_0$ .

- 23 Si la función compleja

$$w = \frac{1+z^2}{z}$$

está representada por un mapeo del plano  $z$  en el plano  $w$ , encuentre  $u$  en términos de  $x$  y de  $y$ , y  $v$  en términos de  $x$  y de  $y$  donde  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . Encuentre la imagen del círculo unitario  $|z| = 1$  en el plano  $w$ . Demuestre que el círculo centrado en el origen y radio  $r$  en el plano  $z$  ( $|z| = r$ ) es mapeado en la curva

$$\left(\frac{r^2 u}{r^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{r^2 v}{r^2 - 1}\right)^2 = r^2 \quad (r \neq 1)$$

en el plano  $w$ . ¿Qué clase de curvas son estas? ¿Qué sucede para  $r$  muy grande?

## 1.3 Derivación compleja

La derivada de una función real  $f(x)$  de una variable  $x$  en  $x = x_0$  está dada por el límite

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

Claro está que  $x_0$  es un número real, así que puede ser representado por un punto en la recta real. El punto que representa  $x$  puede aproximarse al punto fijo  $x_0$  ya sea por la izquierda o por la derecha a lo largo de esta recta. Volvamos ahora a las variables complejas y funciones dependientes de ellas. Sabemos que se requiere un plano para representar a los números complejos, así  $z_0$  es ahora un punto fijo en el diagrama de Argand, en algún lugar del plano. La definición de la derivada de la función  $f(z)$  de la variable compleja  $z$  en el punto  $z_0$  será entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

Puede parecer que si sólo intercambiamos  $z$  por  $x$ , el resto de esta sección seguirá lineas similares a la derivación de funciones de variables reales. Para funciones reales, el límite puede tomarse solo por la izquierda o por la derecha, y la existencia de un límite único no es difícil de establecer. Sin embargo, para variables complejas el punto que representa el número complejo fijo  $z_0$  puede ser aproximado a lo largo de una infinidad de curvas en el plano  $z$ . La existencia de un límite único es entonces un requerimiento muy estricto. El hecho de que la mayoría de las funciones complejas puedan ser derivadas en la forma usual es una propiedad sobresaliente de la variable compleja. Como  $z = x + iy$  y  $x$  y  $y$  pueden variar independientemente, existen varias conexiones con el cálculo de funciones de dos variables reales pero no seguiremos aquí esta conexión.

En lugar de usar la palabra “derivable” para describir funciones complejas para las cuales existe la derivada, si la función  $f(z)$  tiene una derivada  $f'(z)$  que existe en todos los puntos de una región  $R$  del plano  $z$  entonces  $f(z)$  se llama **analítica** en  $R$ . Otros

se tiene

$$f'(z_0) = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=x_0, y=y_0} \quad (1.20)$$

Al iniciar de nuevo a partir de la definición de  $f'(z_0)$  pero si esta vez se elige  $z - z_0 = j\Delta y$  para la trayectoria paralela al eje  $y$ , se obtiene

$$f'(z_0) = \lim_{j\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{f(z_0 + j\Delta y) - f(z_0)}{j\Delta y} \right]$$

Al utilizar una vez más  $f(z) = u + jv$  y separar en las partes real e imaginaria se observa que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{j\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + jv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right] \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{j} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right] \end{aligned}$$

lo que produce

$$f'(z_0) = \left[ \frac{1}{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{x=x_0, y=y_0} \quad (1.21)$$

Como  $f'(z_0)$  debe ser la misma sin importar qué trayectoria se siga, los dos valores obtenidos en (1.20) y (1.21) deben ser iguales. Por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Al igualar las partes real e imaginaria se obtienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann requeridas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

en el punto  $z = z_0$ . Como  $z_0$  es un punto arbitrario en la región  $R$  entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todo  $R$ , y así hemos probado el resultado requerido.

Es tentador pensar que podríamos escoger más trayectorias en las cuales  $z - z_0$  tienda a cero, podríamos obtener más relaciones a lo largo de las mismas líneas que las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Y resulta, sin embargo, que sólo las reproducimos o llegamos a expresiones que se pueden deducir de ellas, y es posible demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.19) son una condición necesaria para que una función  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ ,  $z = x + jy$  sea analítica en una región específica. En puntos donde  $f'(z)$  existe, ésta puede obtenerse tanto de (1.20) como de (1.21) como

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}$$

o

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si  $z$  está dada en la forma polar  $z = r e^{j\theta}$  entonces

$$f(z) = u(r, \theta) + jv(r, \theta)$$

y las formas polares correspondientes a las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (1.22)$$

En los puntos donde  $f'(z)$  existe puede obtenerse de cualquiera de las dos

$$f'(z) = e^{-j\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + j \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (1.23a)$$

o

$$f'(z) = e^{-j\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - j \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (1.23b)$$

Verifique que la función  $f(z) = z^2$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y determine la derivada  $f'(z)$ .

### EJEMPLO 1.9

**Solución** Como  $z = x + jy$  se tiene que

$$f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$$

en consecuencia si  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  entonces

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

dando las derivadas parciales como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

Se observa directamente que las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

son satisfechas.

La derivada  $f'(z)$  está dada entonces por

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + j2y = 2z$$

como se esperaba.

### EJEMPLO 1.10

Verifique que la función exponencial  $f(z) = e^{\alpha z}$ , donde  $\alpha$  es una constante, satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y demuestre que  $f'(z) = \alpha e^{\alpha z}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} f(z) &= u + jv = e^{\alpha z} = e^{\alpha(x+jy)} = e^{\alpha x} e^{j\alpha y} \\ &= e^{\alpha x} (\cos \alpha y + j \sin \alpha y) \end{aligned}$$

entonces, al igualar las partes real e imaginaria

$$u = e^{\alpha x} \cos \alpha y, \quad v = e^{\alpha x} \sin \alpha y$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x} \cos \alpha y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x} \sin \alpha y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha e^{\alpha x} \sin \alpha y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha e^{\alpha x} \cos \alpha y$$

esto confirma que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La derivada  $f'(z)$  está dada por

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x} (\cos \alpha y + j \sin \alpha y) = \alpha e^{\alpha z}$$

así que

$$\frac{d}{dz} e^{\alpha z} = \alpha e^{\alpha z} \tag{1.24}$$

Como en el caso de variable real, tenemos que

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z \tag{1.25}$$

(Sección 1.4.3), así que  $\cos z$  y  $\sin z$  pueden expresarse como

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \end{aligned} \right\} \tag{1.26a}$$

Usando el resultado (1.24) del ejemplo 1.10, es fácil ver que

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\operatorname{sen} z$$

En forma similar, definimos las funciones hiperbólicas  $\operatorname{senh} z$  y  $\cosh z$  como

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{senh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -j \operatorname{sen} jz \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos jz \end{aligned} \right\} \quad (1.26b)$$

de las cuales, usando (1.24) se deduce que

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{senh} z) = \cosh z$$

$$\frac{d}{dz}(\cosh z) = \operatorname{senh} z$$

Observamos de lo anterior que  $e^z$  tiene las siguientes partes real e imaginaria:

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y$$

$$\operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$$

En variables reales la exponencial y las funciones circulares son contrastantes, una siendo monótona, las otras oscilatorias. Sin embargo, en variables complejas las partes real e imaginaria de  $e^z$  son combinaciones de la exponencial y de las funciones circulares (en dos variables), lo que puede parecer sorprendente para una función exponencial. Similarmente, las funciones circulares de una variable compleja tienen propiedades poco conocidas. Por ejemplo, es fácil ver, utilizando las relaciones anteriores entre funciones circulares e hiperbólicas de variables complejas, que  $|\cos z|$  y  $|\operatorname{sen} z|$  no están acotadas para  $z$  complejo. Esto contrasta con  $|\cos x| \leq 1$  y  $|\operatorname{sen} x| \leq 1$  para una variable real  $x$ .

En forma similar al método que se utilizó en los ejemplos 1.9 y 1.10, se puede demostrar que la mayor parte de las derivadas de las funciones  $f(x)$  para una variable compleja  $x$  son las mismas que en el caso  $f(z)$  de una variable real en los puntos donde  $f(z)$  es analítica. Así, por ejemplo,

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$$

para todo  $z$  en el plano  $z$  y

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

para todo  $z$  en el plano  $z$  excepto para los puntos en el eje real no positivo, donde  $\ln z$  no es analítica.

También se puede demostrar que las reglas asociadas con las derivadas de funciones de variable real, tales como la suma, el producto, el cociente y las reglas de la cadena se siguen cumpliendo en el caso de variable compleja. Así,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] &= \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz} \\ \frac{d}{dz}[f(z)g(z)] &= f(z)\frac{dg(z)}{dz} + \frac{df(z)}{dz}g(z) \\ \frac{d}{dz}f(g(z)) &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz} \\ \frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}\end{aligned}$$

### 1.3.2 Funciones conjugadas y armónicas

Un par de funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  de variables reales  $x$  y  $y$  que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.19) se dice que son **funciones conjugadas**. (Observe aquí el uso diferente de la palabra “conjugado” al utilizado en el trabajo con los números complejos donde  $z^* = x - jy$  es el conjugado complejo de  $z = x + jy$ .) Las funciones conjugadas satisfacen la propiedad de ortogonalidad en el sentido de que las curvas en el plano  $(x, y)$  definidas por  $u(x, y) = \text{constante}$  y  $v(x, y) = \text{constante}$  son curvas ortogonales. Esto se sigue ya que el gradiente en cualquier punto en la curva  $u(x, y) = \text{constante}$  está dado por

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_u = -\frac{\partial u}{\partial y}/\frac{\partial u}{\partial x}$$

y el gradiente en cualquier punto en la curva  $v(x, y) = \text{constante}$  está dado por

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_v = -\frac{\partial v}{\partial y}/\frac{\partial v}{\partial x}$$

Se sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.19) que

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_u \left[\frac{dy}{dx}\right]_v = -1$$

así las curvas son ortogonales.

Se dice que una función que satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones es **armónica**; esto es,  $u(x, y)$  es una función armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se ve directamente (véase el ejemplo 1.12) que si  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  es analítica, de manera que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, entonces ambas  $u$  y  $v$  son funciones **armónicas**. Por tanto,  $u$  y  $v$  son **funciones conjugadas armónicas**.

Las funciones armónicas tienen aplicaciones en áreas tales como el análisis de esfuerzo en placas, el flujo de fluidos en dos dimensiones y la electrostática.

### EJEMPLO 1.11

Dada  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ , encuentre la función conjugada  $v(x, y)$  tal que  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  es una función analítica de  $z$  en todo el plano  $z$ .

### Solución

Tenemos  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$  y como  $f(z) = u + jv$  debe ser analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann deben cumplirse. Así, de (1.19)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$$

Al integrar con respecto a  $y$  se tiene

$$v = 2xy + 2y + F(x)$$

donde  $F(x)$  es una función arbitraria de  $x$ , ya que la integración se realizó suponiendo  $x$  constante. Al derivar parcialmente  $v$  con respecto a  $x$  se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{dF}{dx}$$

pero esto es igual a  $-\partial u / \partial y$  por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.19). De aquí que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - \frac{dF}{dx}$$

Pero dado que  $u = x^2 - y^2 + 2x$ ,  $\partial u / \partial y = -2y$ , y al comparar con la ecuación previa se tiene que  $F(x) = \text{constante}$ . Esta constante se iguala a cero ya que no se dio ninguna condición para que pueda determinarse. Entonces

$$u(x, y) + jv(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + j(2xy + 2y)$$

Para confirmar que es una función de  $z$ , observe que  $f(z)$  es  $f(x + jy)$  y se convierte precisamente en  $f(x)$  si tomamos  $y = 0$ . Por tanto, tomamos  $y = 0$  para obtener

$$f(x + j0) = f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0) = x^2 + 2x$$

y se sigue que

$$f(z) = z^2 + 2z$$

la cual puede verificarse fácilmente separando las partes real e imaginaria.

### EJEMPLO 1.12

Demuestre que las partes real e imaginaria  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  de una función compleja analítica  $f(z)$  son armónicas.

### Solución

Como

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

se satisfacen. Al derivar la primera con respecto a  $x$  se tiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

que es  $-\partial^2 v / \partial y^2$  por la segunda ecuación de Cauchy-Riemann. Por tanto,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

y  $v$  es una función armónica.

En forma similar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

así que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

y  $u$  también es una función armónica. Hemos supuesto que ambas  $u$  y  $v$  tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, para que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

### 1.3.3 Ejercicios

- 24 Determine cuándo las siguientes funciones son analíticas y encuentre la derivada cuando tenga sentido:

- (a)  $z e^z$     (b)  $\sin 4z$   
 (c)  $zz^*$     (d)  $\cos 2z$

- 25 Determine las constantes  $a$  y  $b$  para que

$$w = x^2 + ay^2 - 2xy + j(bx^2 - y^2 + 2xy)$$

sea analítica. Para estos valores de  $a$  y  $b$  encuentre la derivada de  $w$ , y exprese ambas  $w$  y  $dw/dz$  como funciones de  $z = x + jy$ .

- 26 Encuentre una función  $v(x, y)$  tal que, dadas  $u = 2x$  ( $1 - y$ ),  $f(z) = u + jv$  sea analítica en  $z$ .

- 27 Demuestre que  $\phi(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$  es una función armónica y encuentre la función conjugada armónica  $\psi(x, y)$ . Escriba  $\phi(x, y) + j\psi(x, y)$  como una función solamente de  $z = x + jy$ .

- 28 Demuestre que  $u(x, y) = \operatorname{sen} x \cosh y$  es armónica. Encuentre la conjugada armónica  $v(x, y)$  y exprese  $w = u + jv$  como una función de  $z = x + jy$ .

- 29 Encuentre las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

- (a)  $x^3y - xy^3 = \alpha$  (constante  $\alpha$ )  
 (b)  $e^{-x} \cos y + xy = \alpha$  (constante  $\alpha$ )

30 Encuentre las partes real e imaginaria de las funciones

$$(a) z^2 e^{2z} \quad (b) \operatorname{sen} 2z$$

Verifique que sean analíticas y encuentre sus derivadas.

31 Indique una definición de la función ángulo seno,  $\operatorname{sen}^{-1} z$  para  $z$  complejo. Encuentre las partes real e

imaginaria de  $\operatorname{sen}^{-1} z$  (Sugerencia: escriba  $z = \operatorname{sen} w$  separado en las partes real e imaginaria, y con  $w = u + jv$  y  $z = x + jy$  resuelva para  $u$  y  $v$  en términos de  $x$  y  $y$ .) ¿Es  $\operatorname{sen}^{-1} z$  analítica? Si así es, ¿cuál es su derivada?

32 Establezca qué sucede si  $z = x + jy$ ,  $|\operatorname{senh} y| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \cosh y$ .

### 1.3.4 Más sobre mapeos

En la sección 1.2 se examinaron maplos del plano  $z$  al plano  $w$  donde en la mayor parte de ellos la relación entre  $w$  y  $z$ ,  $w = f(z)$ , era lineal o bilineal. Existe una propiedad importante de mapeos sugerida en el ejemplo 1.8 cuando consideramos el mapeo  $w = z^2$ . Un mapeo  $w = f(z)$  que preserva ángulos se llama **conforme**. Bajo tales mapeos, el ángulo entre dos curvas que se cortan en el plano  $z$  es el mismo que el ángulo entre las curvas correspondientes en el plano  $w$ . El sentido de ángulo también se preserva. Esto es, si  $\theta$  es el ángulo entre las curvas 1 y 2 tomadas en sentido contrario a las manecillas del reloj en el plano  $z$  entonces  $\theta$  también es el ángulo entre la imagen de la curva 1 y la imagen de la curva 2 en el plano  $w$ , y también es tomado en sentido contrario a las manecillas del reloj. En la figura 1.15 aparece claramente la idea de un mapeo conforme. Si  $f(z)$  es analítica entonces  $w = f(z)$  define un mapeo conforme excepto en los puntos donde la derivada  $f'(z)$  es cero.

Claramente se tiene que los mapeos lineales

$$w = \alpha z + \beta \quad (\alpha \neq 0)$$

son conformes en todos lados, ya que  $dw/dz = \alpha$  y no es cero en ningún punto en el plano  $z$ . Los mapeos bilineales dados en (1.12) no son tan fáciles de verificar. Sin embargo, como vimos en la sección 1.2.4, (1.12) pueden escribirse como

$$w = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta} \quad (\alpha, \mu \neq 0)$$

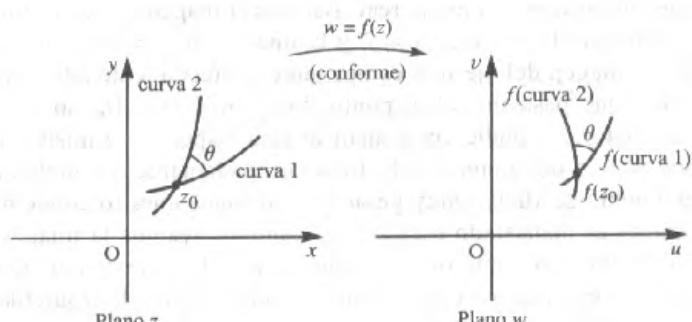


Figura 1.15 Mapeos conformes.

Así

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\mu\alpha}{(\alpha z + \beta)^2}$$

el cual de nuevo nunca es cero para ningún punto en el plano  $z$ . De hecho, el único mapeo que hemos considerado hasta ahora que tiene un punto en el que no es conforme es  $w = z^2$  (véase el ejemplo 1.8), que no es conforme en  $z = 0$ .

### EJEMPLO 1.13

Determine los puntos en los cuales el mapeo  $w = z + 1/z$  no es conforme y demuéstrelo considerando la imagen en el plano  $w$  del eje real en el plano  $z$ .

**Solución** Al tomar  $z = x + jy$  y  $w = u + jv$ , tenemos

$$w = u + jv = x + jy + \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

que, igualando las partes real e imaginaria, da

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

El eje real  $y = 0$  en el plano  $z$  corresponde a  $v = 0$ , el eje real en el plano  $w$ . Observe, sin embargo, que el punto fijo del mapeo está dado por

$$z = z + \frac{1}{z}$$

o  $z = \infty$ . De las ecuaciones de Cauchy-Riemann es fácil ver que  $w$  es analítica en todos lados excepto en  $z = 0$ . También  $dw/dz = 0$  cuando

$$1 - \frac{1}{z^2} = 0, \quad \text{esto es,} \quad z = \pm 1$$

que ambos están en el eje real. Así que el mapeo no es conforme en  $z = 0$  y  $z = \pm 1$ . La imagen de  $z = 1$  es  $w = 2$  y la imagen de  $z = -1$  es  $w = -2$ . La consideración de la imagen del eje real es por tanto perfectamente adecuada, ya que ésta es una curva que pasa por cada punto donde  $w = z + 1/z$  no es conforme. Sería muy satisfactorio si pudiésemos analizar este mapeo de la misma manera que lo hicimos con  $w = z^2$  del ejemplo 1.8. Desafortunadamente, no podemos hacer esto, porque el álgebra se vuelve muy pesada (y, además, nuestro conocimiento de curvas algebraicas es demasiado escaso). En cambio, veamos la imagen del punto  $z = 1 + \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es un número real pequeño.  $\varepsilon > 0$  corresponde al punto Q a la derecha de  $z = 1$  en el eje real en el plano  $z$ , y el punto P a la izquierda de  $z = 1$  corresponde a  $\varepsilon < 0$  (figura 1.16).

Si  $z = 1 + \varepsilon$  entonces

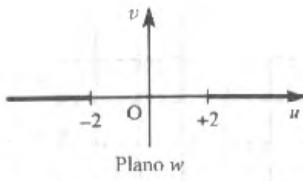
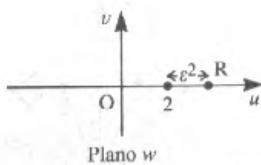
Figura 1.16 Imagen de  $z = 1 + \varepsilon$  del ejemplo 1.13.

Figura 1.17 Imagen en el plano w del eje real en el plano z para el ejemplo 1.13

$$\begin{aligned}w &= 1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon} \\&= 1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon)^{-1} \\&= 1 + \varepsilon + 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots \\&= 2 + \varepsilon^2\end{aligned}$$

si  $|\varepsilon|$  es mucho menor que 1 (discutiremos la validez del desarrollo de las series de potencias en la sección 1.4). Ya sea que  $\varepsilon$  sea positivo o negativo, el punto  $w = 2 + \varepsilon^2$  está a la derecha de  $w = 2$  en el plano  $w$  como se indica con el punto  $R$  en la figura 1.16. Por tanto, conforme  $\varepsilon \rightarrow 0$  una curva (el eje real) que pasa por  $z = 1$  en el plano  $z$  formando un ángulo  $\theta = \pi$  corresponde a una curva (nuevamente el eje real) que se aproxima a  $w = 2$  en el plano  $w$  a lo largo del eje real desde la derecha formando un ángulo  $\theta = 0$ . Se ha verificado la no conformalidad. El tratamiento para  $z = -1$  se sigue de una manera idéntica, así que se omiten los detalles. Observe que cuando  $y = 0$  ( $v = 0$ ),  $u = x + 1/x$  también, conforme el eje real en el plano  $z$  es recorrido de  $x = -\infty$  a  $x = 0$ , el eje real en el plano  $w$  es recorrido de  $u = -\infty$  a  $-2$  y regresa nuevamente a  $u = -\infty$  (cuando  $x = -1$ ,  $u$  alcanza al 2). Conforme el eje real en el plano  $z$  es recorrido de  $x = 0$  a través de  $x = 1$  a  $x = +\infty$ , así el eje real en el plano  $x$  es recorrido de  $u = +\infty$  a  $u = +2$  ( $x = 1$ ) y regresa nuevamente a  $u = \infty$ . Por tanto, los puntos en el eje real del plano  $w$  en el intervalo  $-2 < u < 2$  no corresponden a los valores reales de  $z$ . Resolviendo  $u = x + 1/x$  para  $x$  se obtiene

$$x = \frac{1}{2}[u \pm \sqrt{(u^2 - 4)}]$$

que hace que este hecho sea obvio. La figura 1.17 muestra la imagen en el plano  $w$  del eje real en el plano  $z$ . Este mapeo es rico en propiedades interesantes pero no lo seguiremos estudiando aquí. Los ingenieros aeronáuticos pueden encontrarlo nuevamente si estudian el flujo alrededor de un ala en dos dimensiones, ya que este mapeo transforma círculos centrados en el origen en el plano  $z$  sobre meniscos (en forma de lentes) en el plano  $w$ , y solamente se requiere una leve alteración antes de que estas imágenes tomen la forma de un ala.

**EJEMPLO 1.14**

Examine el mapeo

$$w = e^z$$

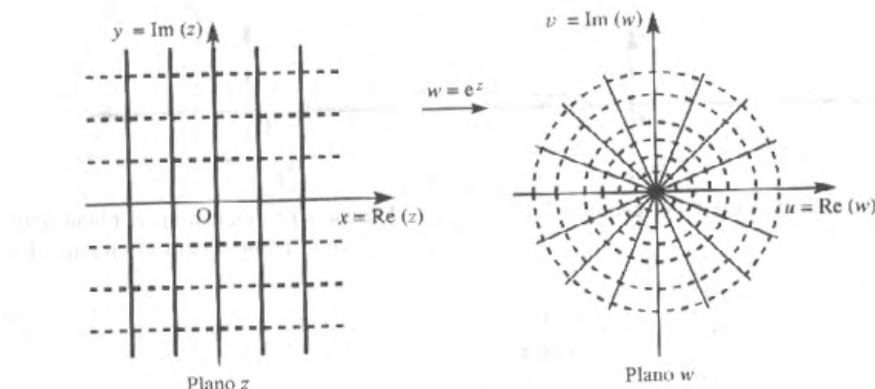


Figura 1.18 Mapeo de rectas bajo  $w = e^z$ .

- (a) encuentre las imágenes en el plano  $w$  de las rectas  $x = \text{constante}$  y  $y = \text{constante}$  en el plano  $z$ , y (b) encuentre las imágenes en el plano  $w$  del semiplano ( $x < 0$ ) en el plano  $z$ .

**Solución** Al tomar  $z = x + jy$  y  $w = u + jv$  para  $w = e^z$  tenemos

$$u = e^x \cos y$$

$$v = e^x \sin y$$

Elevando al cuadrado y sumando estas dos ecuaciones, tenemos

$$u^2 + v^2 = e^{2x}$$

Por otro lado, dividiendo las dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{v}{u} = \tan y$$

Ahora podemos abordar las preguntas.

- (a) Como  $u^2 + v^2 = e^{2x}$ , haciendo  $x = \text{constante}$  se prueba que las rectas paralelas al eje imaginario en el plano  $z$  corresponden a círculos centrados en el origen en el plano  $w$ . La ecuación

$$\frac{v}{u} = \tan y$$

prueba que rectas paralelas al eje real en el plano  $z$  corresponden a rectas que pasan por el origen en el plano  $w$  ( $v = u \tan \alpha$  si  $y = \alpha$ , una constante). La figura 1.18 muestra un dibujo general.

- (b) Como  $u^2 + v^2 = e^{2x}$ , si  $x = 0$  entonces  $u^2 + v^2 = 1$ , así el eje imaginario en el plano  $z$  corresponde al círculo unitario en el plano  $w$ . Si  $x < 0$  entonces  $e^{2x} < 1$ , y conforme  $x \rightarrow -\infty$ ,  $e^{2x} \rightarrow 0$ , entonces la mitad izquierda del plano  $z$  corresponde al interior del círculo unitario en el plano  $w$  como se ilustra en la figura 1.19.

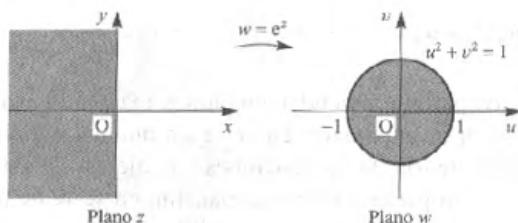


Figura 1.19 Mapeo del semiplano bajo  $w = e^z$ .

### 1.3.5 Ejercicios

33 Determine los puntos en los que los mapeos siguientes no son conformes:

- (a)  $w = z^2 - 1$
- (b)  $w = 2z^3 - 21z^2 + 72z + 6$
- (c)  $w = 8z + \frac{1}{2z^2}$

34 Siga el ejemplo 1.13 con el mapeo  $w = z - 1/z$ . Determine de nuevo los puntos en los que el mapeo no es conforme, pero esta vez demuestre esto observando la imagen del eje *imaginario*.

35 Encuentre la región en el plano  $w$  correspondiente a las regiones siguientes en el plano  $z$  bajo el mapeo exponencial  $w = e^z$ :

- (a)  $0 \leq x < \infty$
- (b)  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
- (c)  $\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \pi, 0 \leq x < \infty$

36 Considere el mapeo  $w = \sin z$ . Determine los puntos donde el mapeo no es conforme. Encuentre las imágenes en el plano  $w$  de las rectas  $x = \text{constante}$  y  $y = \text{constante}$  en el plano  $z$  ( $z = x + iy$ ), dibuje los mapeos a lo largo de rectas similares a las figuras 1.14 y 1.18.

37 Demuestre que la transformación

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$$

donde  $z = x + iy$  y  $\zeta = R e^{i\theta}$ , mapea un círculo con centro en el origen y radio  $a$ , en el plano  $\zeta$ , en un segmento de recta en el plano  $z$ . ¿Cuál es la longitud de la recta? ¿Qué sucede si el círculo en el plano  $\zeta$  está centrado en el origen pero de radio  $b$ , donde  $b \neq a$ ?

## 1.4 Series complejas

En *Modern Engineering Mathematics* vimos que hay distintas ventajas al poder expresar una función  $f(x)$ , como funciones exponenciales, trigonométricas y logarítmicas, de una variable real  $x$  en términos de su desarrollo en series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r + \dots \quad (1.27)$$

Las series de potencias también son muy importantes en el comportamiento de las funciones complejas, de hecho, cualquier función real  $f(x)$  que tiene una serie de potencias de la forma (1.27) tiene una función compleja  $f(z)$  correspondiente que tiene la misma expansión (desarrollo) en serie de potencias, que es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_r z^r + \dots \quad (1.28)$$

Esta propiedad nos permite extender funciones reales al caso complejo, así que los métodos basados en la expansión en serie de potencias tienen un papel clave en la formulación de la teoría de las funciones complejas. En esta sección consideraremos algunas de las propiedades de la expansión en serie de potencias de funciones complejas haciendo, siempre que sea posible, una analogía con la expansión en serie de potencias de las funciones reales correspondientes.

### 1.4.1 Series de potencias

Una serie que tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_r (z - z_0)^r + \dots \quad (1.29)$$

en la cual los coeficientes  $a_n$  son reales o complejos y  $z_0$  es un punto fijo en el plano complejo  $z$  es llamada una **serie de potencias** alrededor de  $z_0$  o una serie de potencias centrada en  $z_0$ . Cuando  $z_0 = 0$ , la serie (1.29) se reduce a la serie (1.28), que es una serie de potencias centrada en el origen. De hecho, haciendo el cambio de variable  $z' = z - z_0$ , (1.29) toma la forma (1.28), entonces no hay pérdida de generalidad cuando se considera la última de ellas.

Las pruebas para la convergencia o divergencia de las series de potencias complejas son similares a aquellas usadas para las series de potencias de variable real. Sin embargo, en las series complejas es esencial utilizar el módulo  $|a_n|$ . Por ejemplo, la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

tiene una suma para los  $N$  primeros términos de

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

y converge, si  $|z| < 1$ , al límite  $1/(1 - z)$  conforme  $N \rightarrow \infty$ . Si  $|z| \geq 1$  la serie diverge. Estos resultados parecen ser idénticos con la condición de que  $|x| < 1$  para garantizar la convergencia de las series de potencias reales

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Sin embargo, en el caso complejo la interpretación geométrica es diferente en que la condición  $|z| < 1$  implica que  $z$  está dentro del círculo con centro en el origen y radio 1 en el plano  $z$ . Así la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  converge si  $z$  está dentro de este círculo y diverge si  $z$  está fuera de él. Esta situación está ilustrada en la figura 1.20.

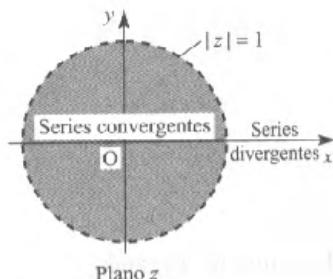


Figura 1.20 Región de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ .

La existencia de tal círculo conduce al siguiente concepto importante: En general existe un círculo centrado en el origen y de radio  $R$  tal que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \begin{cases} \text{converge si} & |z| < R \\ \text{diverge si} & |z| > R \end{cases}$$

El radio  $R$  es llamado el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Lo que sucede cuando  $|z| = R$  normalmente es investigado como un caso especial.

Hemos introducido el radio de convergencia basándonos en un círculo centrado en el origen, pero el concepto obviamente no depende de la localización del centro del círculo. Si la serie está centrada en  $z_0$  como en (1.29) entonces el círculo de convergencia estará centrado en  $z_0$ . Más aún, puede estar centrado en el infinito, cuando la serie de potencias es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_r}{z^r} + \dots$$

que consideraremos más adelante en la sección 1.4.5.

Para determinar el radio de convergencia  $R$  de una serie dada, pueden aplicarse varios criterios de convergencia como los introducidos en *Modern Engineering Mathematics* para series reales. En particular, usando el criterio de la razón de D'Alambert se puede demostrar que el radio de convergencia  $R$  de la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  está dada por

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (1.30)$$

siempre que el límite exista. Entonces la serie es convergente dentro del disco  $|z| < R$ . En general, por supuesto, el límite puede no existir y en tales casos se debe usar un método alternativo.

### EJEMPLO 1.15

Encuentre la serie de potencias, en la forma indicada, que representa la función  $1/(z - 3)$  en las tres regiones siguientes:

(a)  $|z| < 3$ ;  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

(b)  $|z - 2| < 1$ ;  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 2)^n$

(c)  $|z| > 3$ ;  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$

y dibuje estas regiones en un diagrama de Argand.

**Solución** Se sabe que el desarrollo de la serie binomial

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}z^r + \dots$$

es válido para  $|z| < 1$ . Para resolver el problema, explotamos este resultado expandiendo la función  $1/(z-3)$  de tres maneras diferentes:

$$(a) \frac{1}{z-3} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}z} = -\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}z\right)^{-1} = -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{3}z + \left(\frac{1}{3}z\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}z\right)^n + \dots\right]$$

para  $|\frac{1}{3}z| < 1$ , esto es  $|z| < 3$ , dando la serie de potencias

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9}z - \frac{1}{27}z^2 - \dots \quad (|z| < 3)$$

$$(b) \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-2)-1} = [(z-2)-1]^{-1} \\ = -[1 + (z-2) + (z-2)^2 + \dots] \quad (|z-2| < 1)$$

dando la serie de potencias

$$\frac{1}{z-3} = -1 - (z-2) - (z-2)^2 - \dots \quad (|z-2| < 1)$$

$$(c) \frac{1}{z-3} = \frac{1/z}{1-3/z} = \frac{1}{z}\left[1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \dots\right]$$

dando la serie de potencias

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \dots \quad (|z| > 3)$$

Las tres regiones están dibujadas en la figura 1.21. Observe que ninguna de las regiones incluye al punto  $z = 3$  que se dice es una **singularidad** de la función, el concepto lo discutiremos en la sección 1.5.1.

En el ejemplo 1.15 todo el círculo  $|z| = 3$  fue excluido de las tres regiones donde la serie de potencias converge. De hecho, es posible considerar cualquier punto en el plano  $z$  como centro del círculo en el que se define una serie de potencias

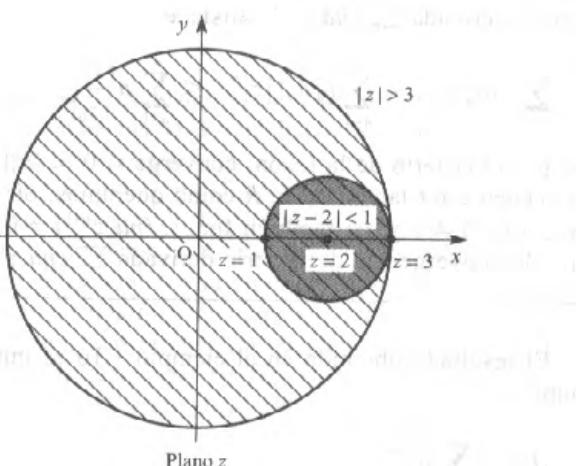


Figura 1.21 Región de convergencia para las series del ejemplo 1.15.

que converge a  $1/(z - 3)$  para todos los puntos dentro del círculo, con excepción del punto  $z = 3$ . Por ejemplo, el punto  $z = 4j$  llevaría a la expansión (desarrollo)

$$\frac{1}{z - 4j + 4j - 3} = \frac{1}{4j - 3} \frac{1}{z - 4j} = \frac{1}{4j - 3} \frac{1}{1 + (z - 4j)/(4j - 3)}$$

en una serie binomial en potencias de  $(z - 4j)/(4j - 3)$  que converge a  $1/(z - 3)$  dentro del círculo

$$|z - 4j| = |4j - 3| = \sqrt{(16 + 9)} = 5$$

No debemos esperar que el punto  $z = 3$  sea incluido en ninguno de los círculos, ya que la función  $1/(z - 3)$  es infinita ahí y por tanto no está.

### EJEMPLO 1.16

Demuestre que la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  y la serie de derivadas correspondiente  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  tienen el mismo radio de convergencia.

### Solución

Sea  $R$  el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n z^n)_0 = 0$  (de otra manera la serie no tiene posibilidades de converger), si  $|z_0| < R$  para algún número complejo  $z_0$  entonces siempre es posible elegir

$$|a_n| < |z_0|^{-n}$$

para  $n > N$ ,  $N$  un entero fijo. Usamos ahora el criterio de la razón de D'Alambert, a saber

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \text{ entonces } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge}$$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \text{ entonces } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ diverge}$$

La serie derivada  $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$  satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} |na_n z^{n-1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{|z|^{n-1}}{|z_0|^n}$$

que, por el criterio de la razón, converge si  $0 < |z_0| < R$  puesto que  $|z| < |z_0|$  y  $|z_0|$  pueden estar tan cerca de  $R$  como queramos. Si, en cambio,  $|z| > R$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n z^n) \neq 0$  y así también  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n z^{n-1}) \neq 0$ . Por lo que  $R$  también es el radio de convergencia de la serie derivada  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ .

El resultado obtenido en el ejemplo 1.16 es importante ya que si la función compleja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge en  $|z| < R$  entonces la derivada

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$$

también converge en  $|z| < R$ . Podemos seguir derivando  $f(z)$  con la ayuda de su serie de potencias y estar seguros de que la función derivada y la serie de potencias derivada son iguales dentro del círculo de convergencia.

## 1.4.2 Ejercicios

- 38 Encuentre la representación de la serie de potencias de la función  $1/(z - j)$  en las regiones

(a)  $|z| < 1$     (b)  $|z| > 1$     (c)  $|z - 1 - j| < \sqrt{2}$

Deduzca que el radio de convergencia de la representación de la serie de potencias de esta función es  $|z_0 - j|$ , donde  $z = z_0$  es el centro del círculo de convergencia ( $z_0 \neq j$ ).

- 39 Encuentre la representación de la serie de potencias de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

en el disco  $|z| < 1$ . Use el ejemplo 1.16 para deducir la serie de potencias para

$$(a) \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \quad (b) \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$$

válida en el mismo disco.

## 1.4.3 Serie de Taylor

En *Modern Engineering Mathematics* introducimos la expansión en serie de Taylor

$$f(x+a) = f(a) + \frac{x}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) \quad (1.31)$$

de una función  $f(x)$  de una variable real  $x$  alrededor de  $x = a$  y válida dentro del intervalo de convergencia de la serie de potencias. Para un ingeniero la habilidad de expresar una función en tal desarrollo (expansión) de serie de potencias es particularmente útil en métodos numéricos y cálculo de errores. La habilidad de expresar una función compleja como una serie de Taylor también es importante para los ingenieros en muchos campos de aplicaciones, tales como la teoría del control y de las comunicaciones. La forma de la serie de Taylor en el caso complejo es idéntica a la de (1.31).

Si  $f(z)$  es una función compleja analítica dentro y en una curva cerrada simple  $C$  (usualmente un círculo) en el plano  $z$  entonces se sigue del ejemplo 1.16 que las derivadas superiores de  $f(z)$  existen también dentro de  $C$ . Si  $z_0$  y  $z_0 + h$  son dos puntos fijos dentro de  $C$  entonces

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf^{(1)}(z_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \dots$$

donde  $f^{(k)}(z_0)$  es la  $k$ -ésima derivada de  $f(z)$  evaluada en  $z = z_0$ . Normalmente  $z = z_0 + h$  es introducido de tal manera que  $h = z - z_0$ , y entonces la expansión de la serie es

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)f^{(1)}(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f^{(2)}(z_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{aligned} \quad (1.32)$$

La expansión en serie de potencias (1.32) es llamada **desarrollo en serie de Taylor** de la función compleja  $f(z)$  alrededor de  $z_0$ . La región de convergencia de esta serie es  $|z - z_0| < R$ , un disco centrado en  $z = z_0$  y radio  $R$ , el radio de convergencia. La Figura 1.22 ilustra la región de convergencia. Cuando  $z_0 = 0$ , como en variables reales, la expansión de la serie alrededor del origen usualmente es llamada **desarrollo en serie de Maclaurin**.

Como la prueba de la expansión en serie de Taylor no aumenta nuestro conocimiento de cómo aplicar el resultado a la solución de problemas de ingeniería, la omitimos en este momento.

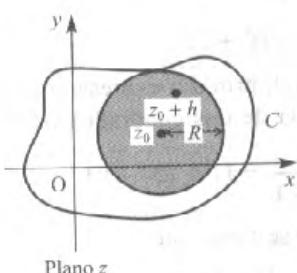


Figura 1.22 Región de convergencia para la serie de Taylor.

**EJEMPLO 1.17**

Determine la expansión en serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2j)}$$

alrededor del punto  $z = j$ :

- (a) directamente hasta el término  $(z - j)^4$ ,
- (b) utilizando la expansión binomial.

Determine el radio de convergencia.

**Solución**

(a) La desventaja que tienen las funciones distintas con respecto a las funciones más directas es que la obtención de sus derivadas es bastante complicada en términos algebraicos. En este caso, en particular, es más fácil escribir la función dada en fracciones parciales como

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2j)} = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{z - 2j} - \frac{1}{z} \right)$$

La parte derecha es ahora más fácil de derivar repetidamente. Para determinar a  $f^{(k)}(j)$  tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{z - 2j} - \frac{1}{z} \right), \quad \text{así que } f(j) = 1$$

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2j} \left[ -\frac{1}{(z - 2j)^2} + \frac{1}{z^2} \right], \quad \text{así que } f^{(1)}(j) = 0$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{2}{(z - 2j)^3} - \frac{2}{z^3} \right], \quad \text{así que } f^{(2)}(j) = -2$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{1}{2j} \left[ -\frac{6}{(z - 2j)^4} + \frac{6}{z^4} \right], \quad \text{así que } f^{(3)}(j) = 0$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{24}{(z - 2j)^5} - \frac{24}{z^5} \right], \quad \text{así que } f^{(4)}(j) = 24$$

que conduce a partir de (1.32) a la expansión en serie de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z - 2j)} &= 1 - \frac{2}{2!}(z - j)^2 + \frac{24}{4!}(z - j)^4 + \dots \\ &= 1 - (z - j)^2 + (z - j)^4 + \dots \end{aligned}$$

(b) Para usar la expansión binomial, primero expresamos  $z(z - 2j)$  como  $(z - j + j)(z - j - j)$ , que siendo la diferencia de dos cuadrados  $((z - j)^2 - j^2)$  nos lleva a

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2j)} = \frac{1}{(z - j)^2 + 1} = [1 + (z - j)^2]^{-1}$$

Al utilizar la expansión binomial se tiene que

$$f(z) = 1 - (z - j)^2 + (z - j)^4 - (z - j)^6 + \dots$$

es válida para  $|z - j| < 1$ , así el radio de convergencia es 1.

Los puntos donde  $f(z)$  es infinita (sus singularidades) son precisamente los que distan 1 de  $z = j$ , así que no nos sorprende que éste sea el radio de convergencia.

### EJEMPLO 1.18

Sugerir una función para representar la serie de potencias

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

y determine su radio de convergencia.

**Solución** Sea

$$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Suponiendo que podemos derivar término a término la serie para  $f(z)$ , obtenemos

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = f(z)$$

Entonces  $f(z)$  es su propia derivada. Como  $e^x$  es su propia derivada en variable real y es la única función, parece razonable proponer que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \quad (1.33)$$

la función exponencial compleja. Por cierto, la exponencial compleja  $e^z$  está definida por la serie de potencias (1.33). Siguiendo el criterio de la razón de D'Alambert la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es convergente si  $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow L < 1$  conforme  $n \rightarrow \infty$ . Donde  $L$  es una constante real. Si  $a_n = z^n/n!$  entonces  $|a_{n+1}/a_n| = |z|/(n+1)$  que es menor que la unidad para  $n$  suficientemente grande, sin importar qué tan grande sea  $|z|$ . De ahí que  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$  es convergente para todo  $z$  y así tiene un radio de convergencia infinito. Observe que esto está corroborado de (1.30). Tales funciones son llamadas **enteras**.

De la misma manera que definimos la función exponencial  $e^z$  como una expansión de la serie de potencias (1.31), podemos definir las funciones circulares  $\sin z$  y  $\cos z$  por expansiones de series de potencias

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

ambas son válidas para todo  $z$ . Usando estas definiciones de series de potencias podemos demostrar rápidamente el resultado (1.25), a saber

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

## 1.4.4 Ejercicios

- 40 Encuentre los cuatro primeros términos distintos de cero de las expansiones en serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados y determine, en cada caso, el radio de convergencia:

(a)  $\frac{1}{1+z}$  ( $z = 1$ )      (b)  $\frac{1}{z(z-4j)}$  ( $z = 2j$ )

(c)  $\frac{1}{z^2}$  ( $z = 1+j$ )

- 41 Encuentre la expansión en serie de Maclaurin de la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

hasta e incluyendo el término  $z^3$ .

- 42 Sin encontrar explicitamente cada expansión en serie de Taylor, encuentre el radio de convergencia de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$$

alrededor de los tres puntos  $z = 0$ ,  $z = 1+j$  y  $z = 2+2j$ . ¿Por qué no existe la expansión de la serie de Taylor de la función alrededor de  $z = j$ ?

- 43 Determine la expansión en serie de Taylor de  $f(z) = \tan z$ . ¿Cuál es su radio de convergencia?

## 1.4.5 Serie de Laurent

Examinemos ahora más de cerca la solución del ejemplo 1.15(c), donde la serie de potencias obtenida fue

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \dots$$

válida para  $|z| > 3$ . En el contexto de la definición, ésta es una serie de potencias alrededor de ' $z = \infty$ ', el 'punto al infinito'. Algunos lectores, justificadamente, pueden no estar convencidos de que hay un único punto en el infinito. La figura 1.23 muestra lo que se conoce como la **esfera de Riemann**. Una esfera que está en el plano complejo  $z$  con el punto de contacto en el origen  $O$ . Sea  $O'$  la cima de la esfera en el punto diametralmente opuesto a  $O$ . Ahora, para cualquier elección arbitraria del punto  $P$  en el plano  $z$ , uniendo  $O'$  y  $P$  determinamos un único punto  $P'$  donde la recta  $O'P$  corta la esfera. Existe así exactamente un punto  $P'$  en la esfera correspondiente a cada  $P$  en el plano  $z$ . El punto  $O'$  es el único punto de la esfera que no tiene un punto

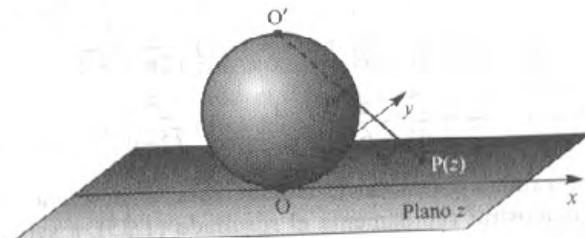


Figura 1.23 La esfera de Riemann.

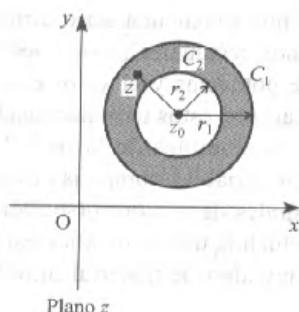


Figura 1.24 Región de validez de la serie de Laurent.

(finito) correspondiente en el plano  $z$ ; por tanto, decimos que le corresponde el punto **al infinito** en el plano  $z$ .

Volviendo a considerar las series de potencias, sabemos que, dentro del radio de convergencia, una función dada y su expansión en serie de Taylor son idénticas. Los puntos en los que una función no es analítica son llamados **singularidades**, que discutiremos en la sección 1.5.1. No es posible ninguna expansión en serie de Taylor alrededor de una singularidad. Más aún, un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto  $z_0$  en el cual la función es analítica, solamente es válido dentro del círculo con centro en  $z_0$  hasta la más cercana singularidad. Así, todas las singularidades deben ser excluidas en cualquier consideración de series de Taylor. La representación de las series de Laurent incluye (o al menos toma nota de) el comportamiento de la función en la vecindad de una singularidad.

Si  $f(z)$  es una función compleja analítica en círculos concéntricos  $C_1$  y  $C_2$  de radios  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente (con  $r_2 < r_1$ ), centrados en  $z_0$ , y también es analítica en toda la región entre los círculos (esto es, la región anular), entonces, para cada punto  $z$  dentro del anillo (figura 1.24),  $f(z)$  puede ser representada por la **serie de Laurent**

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \dots + \frac{c_{-r}}{(z - z_0)^r} + \frac{c_{-r+1}}{(z - z_0)^{r-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 \\ &\quad + c_1(z - z_0) + \dots + c_r(z - z_0)^r + \dots \end{aligned} \tag{1.34}$$

donde, en general, los coeficientes  $c_r$  son complejos. La forma anular de la región es necesaria para excluir el punto  $z = z_0$ , el cual puede ser una singularidad de  $f(z)$ . Si  $f(z)$  es analítica en  $z = z_0$  entonces  $c_n = 0$  para  $n = -1, -2, \dots, -\infty$ , y la serie de Laurent se reduce a la serie de Taylor.

La serie de Laurent (1.34) para  $f(z)$  puede escribirse como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

y la primera suma del lado derecho, la parte que ‘no es de Taylor’, es llamada la **parte principal** de la serie de Laurent.

Por supuesto, raramente podemos sumar una serie infinita. Por tanto, hay más interés en los así llamados ‘términos residuales’, estos son la diferencia entre los primeros  $n$  términos de la serie de potencias y el valor exacto de la función. Para ambas series, la de Taylor y la de Laurent, estos términos residuales están expresados, como en el caso de variable real, en términos de la  $(n+1)$ -ésima derivada de la función. Para la serie de Laurent en variables complejas estas derivadas pueden ser expresadas en términos de las integrales de contorno (sección 1.6), que pueden simplificar enormemente el cálculo. Muchos de los detalles están fuera del alcance de este libro, pero en la sección 1.6 hay algo de material introductorio.

### EJEMPLO 1.19

Para  $f(z) = 1/z^2(z + 1)$  encuentre la expansión en serie de Laurent alrededor de (a)  $z = 0$  y (b)  $z = -1$ . En cada caso, determine la región en donde es válida.

**Solución** Como en el ejemplo 1.15, este tipo de problemas son abordados haciendo uso de la expansión de la serie binomial.

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}z^r + \dots$$

siempre que  $|z| < 1$ .

(a) En este caso  $z_0 = 0$ , entonces necesitamos una serie de potencias de  $z$ . Así

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(1+z)} &= \frac{1}{z^2}(1+z)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2}(1-z+z^2-z^3+z^4-\dots) \quad (0 < |z| < 1)\end{aligned}$$

Así, la expansión en serie de Laurent requerida es

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 \dots$$

válida para  $0 < |z| < 1$ . El valor  $z = 0$  debe ser excluido debido a los dos primeros términos de la serie. La región  $0 < |z| < 1$  es un ejemplo de un **disco agujerado**, un hecho común en esta rama de las matemáticas.

(b) En este caso  $z_0 = -1$ , entonces necesitamos una serie de potencias de  $(z+1)$ . Así

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{(z+1)}(z+1-1)^{-2} \\ &= \frac{1}{(z+1)}[1-(z+1)]^{-2} \\ &= \frac{1}{(z+1)}[1+2(z+1)+3(z+1)^2+\dots] \\ &= \frac{1}{z+1}[1+2+3(z+1)+4(z+1)^2+\dots]\end{aligned}$$

es válida para  $0 < |z + 1| < 1$ . Observamos que en una región en forma de menisco (esto es, la región donde se enciman las dos regiones circulares  $|z| < 1$  y  $|z + 1| < 1$ ), ambas series de Laurent son simultáneamente válidas. Esto es bastante común y no una causa de preocupación.

**EJEMPLO 1.20**

Determine la expansión en serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

que es válida para

- (a)  $1 < |z| < 3$
- (b)  $|z| > 3$
- (c)  $0 < |z + 1| < 2$
- (d)  $|z| < 1$

**Solución** (a) Resolviendo en fracciones parciales,

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+3} \right)$$

Como  $|z| > 1$  y  $|z| < 3$ , expresamos lo anterior como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z} \left( \frac{1}{1+1/z} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{3}z} \right) \\ &= \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^{-1} - \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{3}z \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2z} \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right) - \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{9}z^2 - \frac{1}{27}z^3 + \dots \right) \\ &= \dots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18}z - \frac{1}{54}z^2 + \frac{1}{162}z^3 - \dots \end{aligned}$$

$$(b) f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+3} \right)$$

Como  $|z| > 3$ , expresamos esto como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z} \left( \frac{1}{1+1/z} \right) - \frac{1}{2z} \left( \frac{1}{1+3/z} \right) \\ &= \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^{-1} - \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{3}{z} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2z} \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right) - \frac{1}{2z} \left( 1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \frac{27}{z^3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots \end{aligned}$$

(c) Se puede proceder como en el ejemplo 1.18. Alternativamente se puede tomar  $z + 1 = u$ , entonces  $0 < |u| < 2$  y

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+\frac{1}{2}u)} \\ &= \frac{1}{2u} \left( 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{8}u^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

dando

$$f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots$$

$$(d) \quad f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z+3)}$$

Como  $|z| < 1$ , expresamos esto como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2(1+z)} - \frac{1}{6(1+\frac{1}{3}z)} \\ &= \frac{1}{2}(1+z)^{-1} - \frac{1}{6}(1+\frac{1}{3}z)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(1-z+z^2-z^3+\dots) - \frac{1}{6}(1-\frac{1}{3}z+\frac{1}{9}z^2-\frac{1}{27}z^3+\dots) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots \end{aligned}$$

### EJEMPLO 1.21

Determine la expansión en serie de Laurent de la función  $f(z) = z^3 e^{1/z}$  alrededor de

- (a)  $z = 0$
- (b)  $z = a$ , un número complejo finito distinto de cero
- (c)  $z = \infty$

**Solución** (a) De (1.33),

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (0 \leq |z| < \infty)$$

Sustituyendo  $1/z$  por  $z$ , obtenemos

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \quad (0 < |z| \leq \infty)$$

así que

$$z^3 e^{1/z} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots \quad (0 < |z| \leq \infty)$$

Esta serie tiene una infinidad de términos en la parte principal, pero se detiene en  $z^3$  (está escrita de atrás hacia delante). Las series que tienen las partes principales

infinitas son un problema, afortunadamente son poco frecuentes en ingeniería. Observemos también que la serie es válida en un disco agujerado infinito.

(b) El valor de  $f(a)$  debe ser  $a^3 e^{1/a}$ , que no es infinito ya que  $a \neq 0$ . Entonces  $f(z)$  tiene una expansión en serie de Taylor

$$f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + \frac{(z - a)^2}{2!}f''(a) + \dots$$

alrededor de  $z = a$ . Tenemos que

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(z^3 e^{1/z}) = 3z^2 e^{1/z} - z e^{1/z}$$

$$f''(z) = \frac{d}{dz}(3z^2 e^{1/z} - z e^{1/z}) = 6z e^{1/z} - 4 e^{1/z} + \frac{1}{z^2} e^{1/z}$$

obteniendo la serie como

$$z^3 e^{1/z} = a^3 e^{1/a} + (z - a)(3a^2 e^{1/a} - a e^{1/a})$$

$$+ \frac{1}{2!}(z - a)^2 \left( 6a e^{1/a} - 4e^{1/a} + \frac{1}{a^2} e^{1/a} \right) + \dots$$

que es válida en la región  $|z - a| < R$ , donde  $R$  es la distancia entre el origen, donde  $f(z)$  no está definida, y el punto  $a$ ; de donde  $R = |a|$ . Así la región de validez para esta serie de Taylor es el disco  $|z - a| < |a|$ .

(c) Para desarrollar alrededor de  $z = \infty$ , sea  $w = 1/z$  para que

$$f(z) = \frac{1}{w^3} e^w$$

Al desarrollar alrededor de  $w = 0$  se tiene

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3} \left( 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{2!w} + \frac{1}{3!} + \frac{w}{4!} + \dots \quad (0 < |w| < \infty)$$

Observamos que esta vez solamente hay tres términos en la parte principal de  $f(z) (= f(1/w))$ .

## 1.4.6 Ejercicios

44 Determine la expansión en serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

alrededor de (a)  $z = 0$  y (b)  $z = 1$ , y especifique la región de validez para cada una.

45 Determine la expansión en serie de Laurent de la función

$$f(z) = z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$

alrededor de los puntos

- (a)  $z = 0$
  - (b)  $z = \infty$
  - (c)  $z = a$ , un número complejo finito distinto de cero
- (Para (c) no calcule los coeficientes explícitamente.)

#### 46 Desarrolle

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

en una expansión en serie de Laurent válida para

- (a)  $|z| < 1$
- (b)  $1 < |z| < 2$
- (c)  $|z| > 2$
- (d)  $|z-1| > 1$
- (e)  $0 < |z-2| < 1$

## 1.5 Singularidades, ceros y residuos

### 1.5.1 Singularidades y ceros

Como fue indicado en la sección 1.4.5 una **singularidad** de una función compleja  $f(z)$  es un punto en el plano  $z$  donde  $f(z)$  no es analítica. Normalmente, esto significa que  $f(z)$  es infinita en tal punto, pero también puede significar que hay varios valores y no es posible elegir uno en particular. En este capítulo, estamos interesados principalmente en las singularidades en donde  $f(z)$  tiene valor infinito. Un **cerro** de  $f(z)$  es un punto en el plano  $z$  donde  $f(z) = 0$ .

Las singularidades pueden ser clasificadas en términos de la expansión en serie de Laurent de  $f(z)$  alrededor del punto en cuestión. Si  $f(z)$  tiene una expansión en serie de Taylor que es una expansión de la serie de Laurent con la parte principal cero, alrededor del punto  $z = z_0$ , entonces  $z_0$  es un **punto regular** de  $f(z)$ . Si  $f(z)$  tiene una expansión en serie de Laurent con solamente un número finito de términos en su parte principal, por ejemplo

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_m(z-z_0)^m + \dots$$

entonces  $f(z)$  tiene una singularidad en  $z = z_0$  llamada **polo**. Si hay  $m$  términos en la parte principal, como en este ejemplo, entonces se dice que el polo es de **orden**  $m$ . Otra manera de definir esto es decir que  $z_0$  es un polo de orden  $m$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \tag{1.35}$$

donde  $a_{-m}$  es finito y distinto de cero. Si la parte principal de la serie de Laurent para  $f(z)$  en  $z = z_0$  tiene una infinidad de términos, lo que significa que el límite anterior no existe para ningún  $m$ , entonces  $z = z_0$  es llamada una **singularidad esencial** de  $f(z)$ .

Si  $f(z)$  parece que es singular en  $z = z_0$ , pero es posible definir su expansión en serie de Taylor ahí, entonces  $z = z_0$  es llamada **singularidad removible**. Los siguientes ejemplos ilustran estos casos.

- (a)  $f(z) = z^{-1}$  tiene un polo de orden uno, llamado un **polo simple**, en  $z = 0$ .
- (b)  $f(z) = (z-1)^{-3}$  tiene un polo de orden tres en  $z = 1$ .

- (c)  $f(z) = e^{1/(z-j)}$  tiene una singularidad esencial en  $z = j$ .  
 (d) La función

$$f(z) = \frac{z-1}{(z+2)(z-3)^2}$$

tiene un cero en  $z = 1$ , un polo simple en  $z = -2$  y un polo de orden dos en  $z = 3$ .

- (e) La función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

no está definida en  $z = 0$ , y parece tener una singularidad ahí. Sin embargo, al definir

$$\operatorname{sen} z = \begin{cases} (\operatorname{sen} z)/z & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

obtenemos una función que tiene una expansión en serie de Taylor

$$\operatorname{sen} z = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

que es regular en  $z = 0$ . Por tanto, la (aparente) singularidad en  $z = 0$  ha sido removida y así  $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$  tiene una singularidad removable en  $z = 0$ .

Las funciones cuyas únicas singularidades son polos se denominan **meromorfas**, y en general, en las aplicaciones a ingeniería de la variable compleja la mayoría de las funciones son meromorfas. El siguiente ejemplo será de utilidad para ayudar al lector a familiarizarse con estas definiciones.

### EJEMPLO 1.22

Encuentre las singularidades y los ceros de las siguientes funciones complejas:

- (a)  $\frac{1}{z^4 - z^2(1+j) + j}$       (b)  $\frac{z-1}{z^4 - z^2(1+j) + j}$   
 (c)  $\frac{\operatorname{sen}(z-1)}{z^4 - z^2(1+j) + j}$       (d)  $\frac{1}{[z^4 - z^2(1+j) + j]^3}$

**Solución** (a) Para

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2(1+j) + j}$$

el numerador nunca es cero y el denominador es infinito sólo cuando  $z$  es infinito. Así  $f(z)$  no tiene ceros en el plano finito  $z$ . El denominador es cero cuando

$$z^4 - z^2(1+j) + j = 0$$

que factorizado da

$$(z^2 - 1)(z^2 - j) = 0$$

llegando a

$$z^2 = 1 \text{ o } j$$

así que las singularidades están en

$$z = +1, -1, (1+j)/\sqrt{2}, (1-j)/\sqrt{2} \quad (1.36)$$

todos los polos son simples ya que ninguna de las raíces se repite.

(b) La función

$$f(z) = \frac{z-1}{z^4 - z^2(1+j) + j}$$

es similar a  $f(z)$  en (a), excepto que tiene un término adicional  $z-1$  en el numerador. Por tanto, a primera vista, parece que las singularidades son como en (1.36). Sin embargo, una mirada más cercana indica que  $f(z)$  puede describirse como

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-1)(z+1)[z-\sqrt{\frac{1}{2}}(1+j)][z-\sqrt{\frac{1}{2}}(1-j)]}$$

y el factor  $z-1$  se cancela, dando una singularidad removable en  $z=1$  y reduciendo  $f(z)$  a

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)[z-\sqrt{\frac{1}{2}}(1+j)][z-\sqrt{\frac{1}{2}}(1-j)]}$$

que no tiene ceros (finitos) y  $z=-1$ ,  $\sqrt{\frac{1}{2}}(1+j)$  y  $\sqrt{\frac{1}{2}}(1-j)$  como polos simples.

(c) En el caso de

$$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{z^4 - z^2(1+j) + j}$$

la función puede describirse como

$$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{z-1} \frac{1}{(z+1)[z-\sqrt{\frac{1}{2}}(1+j)][z-\sqrt{\frac{1}{2}}(1-j)]}$$

Ahora

$$\frac{\sin(z-1)}{z-1} \rightarrow 1 \text{ conforme } z \rightarrow 1$$

así otra vez  $z=1$  es una singularidad removable. También como en (b)  $z=-1$ ,  $\sqrt{\frac{1}{2}}(1+j)$  y  $\sqrt{\frac{1}{2}}(1-j)$  son polos simples y las únicas singularidades. Sin embargo,

$$\sin(z-1) = 0$$

tiene la solución general  $z = 1 + N\pi$  ( $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Así, aparte de  $N=0$ , todos estos son ceros de  $f(z)$ .

(d) Para

$$f(z) = \frac{1}{[z^4 - z^2(1+j) + j]^3}$$

al factorizar como en (b), tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3[z-\sqrt[4]{2}(1+j)]^3[z-\sqrt[4]{2}(1-j)]^3}$$

así  $-1$ ,  $+1$ ,  $\sqrt[4]{2}(1+j)$  y  $\sqrt[4]{2}(1-j)$  aún son singularidades, pero esta vez están por triplicado. Entonces todos son polos de orden tres. No hay ceros.

### 1.5.2 Ejercicios

47 Determine la localización y clasificación de las singularidades y los ceros de las siguientes funciones. Especifique también cualquier cero que pueda existir.

- |                               |                                |                       |
|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------|
| (a) $\frac{\cos z}{z^2}$      | (b) $\frac{1}{(z+j)^3(z-j)}$   | (c) $\frac{z}{z^4+1}$ |
| (d) $\coth z$                 | (e) $\frac{\sin z}{z^2+\pi^2}$ | (f) $e^{z/(1-z)}$     |
| (g) $\frac{z-1}{z^2+1}$       | (h) $\frac{z+j}{(z+2)^3(z-3)}$ |                       |
| (i) $\frac{1}{z^2(z^2-4z+5)}$ |                                |                       |

48 Desarrolle cada una de las siguientes funciones en serie de Laurent alrededor de  $z = 0$  y diga, en cada caso, el tipo de singularidad (si existe):

- |                           |
|---------------------------|
| (a) $\frac{1-\cos z}{z}$  |
| (b) $\frac{e^{z^2}}{z^3}$ |
| (c) $z^{-1} \cosh z^{-1}$ |
| (d) $\tan^{-1}(z^2+2z+2)$ |

49 Demuestre que si  $f(z)$  es una razón de dos polinomios entonces no puede tener una singularidad esencial.

### 1.5.3 Residuos

Si una función compleja  $f(z)$  tiene un polo en el punto  $z = z_0$  entonces el coeficiente  $a_{-1}$  del término  $1/(z - z_0)$  en la expansión en serie de Laurent de  $f(z)$  alrededor de  $z = z_0$  es llamado el **residuo** de  $f(z)$  en el punto  $z = z_0$ . La importancia de los residuos será evidente cuando discutamos integración en la sección 1.6. Aquí nos concentraremos en formas eficientes de calcularlos, sin tener que encontrar explícitamente la expansión en serie de Laurent. Sin embargo, la experiencia y el juicio son algunas veces la única ayuda para encontrar la manera más fácil de calcular los residuos. Primero, consideremos el caso cuando  $f(z)$  tiene un polo simple en  $z = z_0$ . Esto implica, de la definición de polo simple, que

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

en un anillo apropiado  $S < |z - z_0| < R$ . Al multiplicar por  $z - z_0$  se tiene

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots$$

que es una expansión en serie de Taylor de  $(z - z_0)f(z)$ . Si hacemos que  $z$  tienda a  $z_0$  entonces obtenemos el resultado

$$\text{residuo en } a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] = a_{-1}$$
(1.37)

Entonces este límite da una forma para calcular el residuo en un polo simple.

### EJEMPLO 1.23

Determine el residuo de

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2 + 1)(2z - 1)}$$

en cada uno de sus polos en el plano finito  $z$ .

**Solución** Factorizando el denominador tenemos

$$f(z) = \frac{2z}{(z - j)(z + j)(2z - 1)}$$

así que  $f(z)$  tiene polos simples en  $z = j, -j$  y  $\frac{1}{2}$ . Al utilizar (1.37) se obtiene

$$\text{residuo en } z = j = \lim_{z \rightarrow j} (z - j) \frac{2z}{(z - j)(z + j)(2z - 1)}$$

$$= \frac{2j}{2j(2j - 1)} = -\frac{1 + 2j}{5}$$

$$\text{residuo en } z = -j = \lim_{z \rightarrow -j} (z + j) \frac{2z}{(z - j)(z + j)(2z - 1)}$$

$$= \frac{-2j}{-2j(-2j - 1)} = -\frac{1 - 2j}{5}$$

$$\text{residuo en } z = \frac{1}{2} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) \frac{z}{(z - j)(z + j)(2z - 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2} - j)(\frac{1}{2} + j)} = \frac{2}{5}$$

Observe en este caso la importancia de expresar  $2z - 1$  como  $2(z - \frac{1}{2})$ .

**EJEMPLO 1.24** Determine los residuos de la función  $1/(1 + z^4)$  en cada uno de sus polos en el plano finito  $z$ .

**Solución** La función  $1/(1 + z^4)$  tiene polos donde

$$1 + z^4 = 0$$

esto es, los puntos donde

$$z^4 = -1 = e^{n\pi j + 2\pi nj}$$

siendo  $n$  un entero. Recordando cómo determinar las raíces de un número complejo, estos puntos son

$$z = e^{\frac{n\pi j}{4} + \frac{2\pi nj}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

esto es

$$z = e^{\pi j/4}, e^{3\pi j/4}, e^{5\pi j/4}, e^{7\pi j/4}$$

o

$$z = (1+j)/\sqrt{2}, (-1+j)/\sqrt{2}, (-1-j)/\sqrt{2}, (1-j)/\sqrt{2}$$

Para encontrar el residuo en el punto  $z_0$  usamos (1.37), para obtener

$$\text{residuo en } z_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{z - z_0}{1 + z^4} \right)$$

donde  $z_0$  es una de las raíces anteriores de  $z^4 = -1$ . Se debe usar la regla de L'Hôpital antes de sustituir para una  $z_0$  particular. Esto está justificado, dado que  $(z - z_0)/(1 + z^4)$  es de la forma indeterminada 0/0 en cada uno de los cuatro polos simples. Derivando el numerador y el denominador obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{z - z_0}{1 + z^4} \right) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{1}{4z^3} \right) \\ &= \frac{1}{4z_0^3} \end{aligned}$$

dado que  $4z^3$  es distinto de cero en cualquiera de los polos.  $1/4z_0^3$  es el valor de cada residuo en  $z = z_0$ . Al sustituir para los cuatro valores  $(\pm 1 \pm j)/\sqrt{2}$  se obtiene lo siguiente:

$$\text{residuo en } z = (1+j)/\sqrt{2} = \frac{1}{4(\sqrt{\frac{1}{2}})^3(1+j)^3} = -(1+j)/4\sqrt{2}$$

$$\text{residuo en } z = (1-j)/\sqrt{2} = \frac{1}{4(\sqrt{\frac{1}{2}})^3(1-j)^3} = (-1+j)/4\sqrt{2}$$

$$\text{residuo en } z = (-1+j)/\sqrt{2} = \frac{1}{4(\sqrt{\frac{1}{2}})^3(-1+j)^3} = (1-j)/4\sqrt{2}$$

$$\text{residuo en } z = (-1-j)/\sqrt{2} = \frac{1}{4(\sqrt{\frac{1}{2}})^3(-1-j)^3} = (1+j)/4\sqrt{2}$$

La obtención explícita de cada serie de Laurent para los cuatro polos involucraría una manipulación difícil. Sin embargo, el lector entusiasta puede querer verificar al menos uno de los residuos anteriores.

Ahora supongamos que se tiene un polo de orden dos en  $z = z_0$ . La función  $f(z)$  tiene entonces una expansión en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Nuevamente, sólo estamos interesados en aislar el residuo  $a_{-1}$ . Esta vez no podemos usar (1.37). En cambio, multiplicamos  $f(z)$  por  $(z - z_0)^2$  para obtener

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \dots$$

y derivamos para eliminar la no deseada  $a_{-2}$ :

$$\frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + \dots$$

Haciendo tender  $z$  a  $z_0$  obtenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z) \right] = a_{-1}$$

el residuo requerido.

Ahora tenemos la esencia para encontrar residuos, así que recapitulemos y generalicemos. Si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z = z_0$ , primero multiplicamos  $f(z)$  por  $(z - z_0)^m$ . Si  $m \geq 2$  entonces necesitaremos derivar tantas veces como sea necesario (esto es,  $m - 1$  veces) para hacer  $a_{-1}$ , el primer término, sin el factor  $z - z_0$ . La fórmula general para el residuo de un polo de orden  $m$  es

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\} \quad (1.38)$$

donde el factor  $(m - 1)!$  surge cuando el término  $a_{-1}(z - z_0)^{m-1}$  es derivado  $m - 1$  veces. Esta fórmula parece tan difícil de aplicar como encontrar la expansión en serie de Laurent directamente. Esta situación se da con frecuencia; y por esto se requiere experiencia y criterio. Algunos ejemplos ayudarán a decidir de qué manera calcular residuos. Cuidado: un error común es la confusión entre la derivada en la fórmula para el residuo y la aplicación de la regla de L'Hôpital para encontrar el límite resultante.

### EJEMPLO 1.25

Determine los residuos de

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

en cada uno de sus polos en el plano finito  $z$ .

**Solución.** Al factorizar el denominador se obtiene

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2j)(z+2j)}$$

así que  $f(z)$  tiene polos simples en  $z = 2j$  y  $z = -2j$  y un polo de orden dos en  $z = -1$ .

Usando (1.37),

$$\begin{aligned} \text{residuo en } z = 2j &= \lim_{z \rightarrow 2j} (z-2j) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2j)(z+2j)} \\ &= \frac{-4-4j}{(2j+1)^2(4j)} = \frac{1}{25}(7+j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{residuo en } z = -2j &= \lim_{z \rightarrow -2j} (z+2j) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2j)(z+2j)} \\ &= \frac{-4+4j}{(-2j+1)^2(-4j)} = \frac{1}{25}(7-j) \end{aligned}$$

Usando (1.38) con  $m = 2$  sabemos que

$$\begin{aligned} \text{residuo en } z = -1 &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2 + 4)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z^2 + 4)(2z - 2) - (z^2 - 2z)(2z)}{(z^2 + 4)^2} = \frac{(5)(-4) - (3)(-2)}{25} = -\frac{14}{25} \end{aligned}$$

### EJEMPLO 1.26

Determine los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados:

$$(a) \frac{e^z}{(1+z^2)^2} \quad (z=j) \quad (b) \left(\frac{\sin z}{z^2}\right)^3 \quad (z=0) \quad (c) \frac{z^4}{(z+1)^3} \quad (z=-1)$$

**Solución.** (a) Como

$$\frac{e^z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{e^z}{(z+j)^2(z-j)^2}$$

y  $e^z$  es regular en  $z = j$ , se sigue que  $z = j$  es un polo de orden dos. Así, de (1.38),

$$\begin{aligned} \text{residuo} &= \lim_{z \rightarrow j} \frac{d}{dz} \left[ (z-j)^2 \frac{e^z}{(z+j)^2(z-j)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow j} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^z}{(z+j)^2} \right] \right\} = \lim_{z \rightarrow j} \frac{(z+j)^2 e^z - 2(z+j)e^z}{(z+j)^4} \\ &= \frac{(2j)^2 e^j - 2(2j)e^j}{(2j)^4} = -\frac{1}{4}(1+j)e^j \end{aligned}$$

Como  $e^j = \cos 1 + j \sin 1$ , podemos calcular el residuo en  $z = j$  como  $0.075 - j0.345$ .

(b) La función  $[(\operatorname{sen} z)/z^2]^3$  tiene un polo en  $z = 0$ , y como  $(\operatorname{sen} z/z) \rightarrow 1$  conforme  $z \rightarrow 0$ ,  $(\operatorname{sen}^2 z)/z^2$  también puede ser definida como 1 en  $z = 0$ . Por tanto, como

$$\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\right)^3 = \frac{\operatorname{sen}^3 z}{z^3} \frac{1}{z^3}$$

la singularidad en  $z = 0$  debe ser un polo de orden tres. Podemos usar (1.38) para obtener el residuo, lo cual implica determinar la segunda derivada, pero en este caso es más fácil derivar el coeficiente de  $1/z$  de la expansión en serie de Laurent

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

dando

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}z + \frac{1}{120}z^3 - \dots$$

Elevando al cubo esta serie se tiene que

$$\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\right)^3 = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6}z + \frac{1}{120}z^3 - \dots\right)^3 = \frac{1}{z^3} - 3\frac{1}{z^2}\frac{z}{6} + \dots = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \dots$$

Entonces, el residuo en  $z = 0$  es  $-\frac{1}{2}$ .

(c) La función  $z^4/(z+1)^3$  tiene un polo triple en  $z = -1$ , así, usando (1.38),

$$\begin{aligned} \text{residuo} &= \lim_{z \rightarrow -1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z+1)^3 \frac{z^4}{(z+1)^3} \right] \right\} = \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (z^4) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} \times 4 \times 3z^2 = 6(-1)^2 = 6 \end{aligned}$$

Algunas veces, los residuos son difíciles de calcular usando (1.38), especialmente si están involucradas funciones circulares y el polo es de orden tres o más. En tales casos, el mejor procedimiento es el cálculo directo de la expansión en serie de Laurent usando las series usuales de  $\operatorname{sen} z$  y  $\cos z$  junto con la serie binomial, como en el ejemplo 1.26(b).

## 1.5.4 Ejercicios

- 50 Determine los residuos de las siguientes funciones racionales en cada polo en el plano finito  $z$ :

(a)  $\frac{2z+1}{z^2-z-2}$

(b)  $\frac{1}{z^2(1-z)}$

- |  |  |
|--|--|
| <p>(c) <math>\frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}</math></p>    | <p>(d) <math>\frac{z^3-z^2+z-1}{z^3+4z}</math></p>     |
| <p>(e) <math>\frac{z^6+4z^4+z^3+1}{(z-1)^5}</math></p> | <p>(f) <math>\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2</math></p> |

$$(g) \frac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}$$

$$(h) \frac{3+4z}{z^3+3z^2+2z}$$

51 Calcule, en las siguientes funciones, los residuos en los polos simples indicados:

$$(a) \frac{\cos z}{z} \quad (z = 0)$$

$$(b) \frac{\sin z}{z^4+z^2+1} \quad (z = e^{\pi j/3})$$

$$(c) \frac{z^4-1}{z^4+1} \quad (z = e^{\pi j/4})$$

$$(d) \frac{z}{\sin z} \quad (z = \pi) \quad (e) \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad (z = j)$$

52 Las siguientes funciones tienen polos en los puntos indicados. Determine el orden del polo y el residuo ahí.

$$(a) \frac{\cos z}{z^3} \quad (z = 0)$$

$$(b) \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \quad (z = -1)$$

$$(c) \frac{e^z}{\sin^2 z} \quad (z = n\pi, \text{ siendo } n \text{ un entero})$$

(Sugerencia: use  $\lim_{u \rightarrow 0} (\sin u)/u = 1$  ( $u = z - n\pi$ ), después de derivar, reemplace  $\sin u$  por  $u$  en el límite.)

## 1.6

# Integración de contorno

Consideremos la integral definida

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$

de la función  $f(z)$  de una variable compleja  $z$ , en donde  $z_1$  y  $z_2$  son un par de números complejos. Esto implica que evaluamos la integral conforme  $z$  toma valores, en el plano  $z$ , del punto  $z_1$  al punto  $z_2$ . Como estos son dos puntos en el plano, se sigue que para evaluar la integral definida se requiere definir alguna trayectoria de  $z_1$  a  $z_2$ . Por tanto, es claro que una integral definida de una función compleja  $f(z)$  es de hecho una **integral de línea**.

Brevemente, una integral de línea en el plano  $(x, y)$ , de las variables reales  $x$  e  $y$ , es una integral de la forma

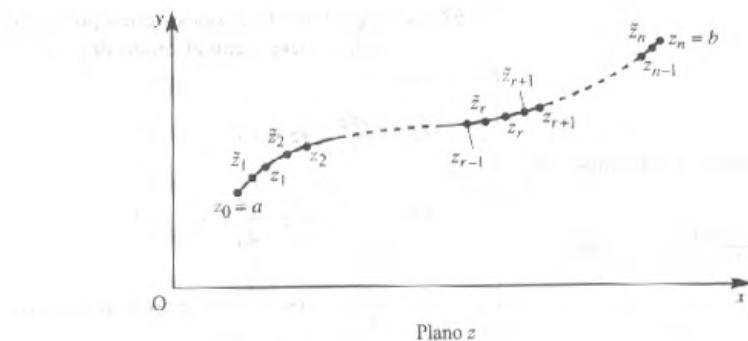
$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \tag{1.39}$$

donde  $C$  denota la trayectoria de integración entre los puntos A y B en el plano. En el caso particular cuando

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.40}$$

el integrando  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  es una diferencial total, y la integral de línea es independiente de la trayectoria  $C$  que une a A y B.

En esta sección introducimos la **integral de contorno**, que es el término que se utilizó para evaluar integrales de línea en el plano complejo.

Figura 1.25 Particiones de la curva  $C$ .

### 1.6.1 Integrales de contorno

Sea  $f(z)$  una función compleja continua en todos los puntos de una curva simple  $C$  en el plano  $z$ , de longitud finita y que une dos puntos  $a$  y  $b$ . (No profundizamos con respecto a la continuidad para variables complejas.) Subdividimos la curva en  $n$  partes con los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ , al tomar  $z_0 = a$  y  $z_n = b$  (figura 1.25); en cada uno de los arcos que unen a  $z_{k-1}$  con  $z_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) elegimos un punto  $\tilde{z}_k$ ; formamos la suma

$$S_n = f(\tilde{z}_1)(z_1 - z_0) + f(\tilde{z}_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\tilde{z}_n)(z_n - z_{n-1})$$

Después, escribiendo  $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$ ,  $S_n$  obtenemos

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k$$

Si hacemos que  $n$  crezca, de tal manera que la mayor de las longitudes de la cuerda  $|\Delta z_k|$  se aproxime a cero, entonces la suma  $S_n$  se aproxima a un límite que no depende de la manera de subdivisión de la curva. A este límite lo llamamos la integral de **contorno** de  $f(z)$  a lo largo de la curva  $C$ :

$$\int_C f(z) dz = \lim_{|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k \quad (1.41)$$

Si tomamos  $z = x + iy$  y expresamos  $f(z)$  como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

entonces se puede demostrar a partir de (1.41) que

$$\int_C f(z) dz = \int_C [u(x, y) + jv(x, y)](dx + jdy)$$

o

$$\int_C f(z) dz = \int_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + j \int_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy]$$
(1.42)

Ambas integrales del lado derecho de (1.42) son integrales de línea reales de la forma (1.39) y, por tanto, pueden ser evaluadas usando los métodos desarrollados para tales integrales.

### EJEMPLO 1.27

Evalúe la integral de contorno  $\int_C z^2 dz$  a lo largo de la trayectoria  $C$  de  $-1 + j$  a  $5 + j3$  y formada por dos segmentos de recta, el primero de  $-1 + j$  a  $5 + j$  y el segundo de  $5 + j$  a  $5 + j3$ .

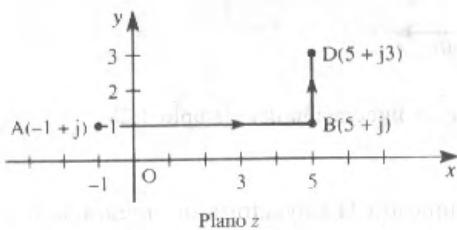


Figura 1.26 Trayectoria de integración del ejemplo 1.27.

**Solución** En la figura 1.26, se muestra la trayectoria de integración  $C$ . Como

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$$

se tiene de (1.42) que

$$I = \int_C z^2 dz = \int_C [(x^2 - y^2)dx - 2xy dy] + j \int_C [2xy dx + (x^2 - y^2)dy]$$

A lo largo de AB,  $y = 1$  y  $dy = 0$ , así que

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \int_{-1}^5 (x^2 - 1) dx + j \int_{-1}^5 2x dx \\ &= [\frac{1}{3}x^3 - x]_{-1}^5 + j[x^2]_{-1}^5 = 36 + j24 \end{aligned}$$

A lo largo de BD,  $x = 5$  y  $dx = 0$ , así que

$$\begin{aligned}
 I_{BD} &= \int_1^3 -10y \, dy + j \int_1^3 (25 - y^2) \, dy \\
 &= [-5y^2]_1^3 + j[25y - \frac{1}{3}y^3]_1^3 \\
 &= -40 + j\frac{124}{3}
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_C z^2 \, dz = I_{AB} + I_{BD} = (36 + j24) + (-40 + j\frac{124}{3}) = -4 + j\frac{196}{3}$$

### EJEMPLO 1.28

Demuestre que  $\int_C (z+1) \, dz = 0$ , donde  $C$  es la frontera del cuadrado con vértices en  $z = 0$ ,  $z = 1 + j0$ ,  $z = 1 + j1$  y  $z = 0 + j1$ .

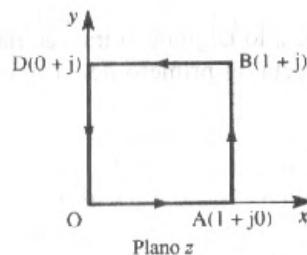


Figura 1.27 Trayectoria de integración del ejemplo 1.28.

**Solución** En la figura 1.27 se muestra la trayectoria de integración  $C$ .

Como  $z + 1 = (x + 1) + jy$ , se sigue de (1.42) que

$$I = \int_C (z + 1) \, dz = \int_C [(x + 1) \, dx - y \, dy] + j \int_C [y \, dx + (x + 1) \, dy]$$

A lo largo de OA,  $y = 0$  y  $dy = 0$ , así que

$$I_{OA} = \int_0^1 (x + 1) \, dx = \frac{3}{2}$$

A lo largo de AB,  $x = 1$  y  $dx = 0$ , así que

$$I_{AB} = \int_0^1 -y \, dy + j \int_0^1 2 \, dy = -\frac{1}{2} + j2$$

A lo largo de BD,  $y = 1$  y  $dy = 0$ , así que

$$I_{BD} = \int_1^0 (x + 1) \, dx + j \int_1^0 1 \, dx = -\frac{3}{2} - j$$

A lo largo de DO,  $x = 0$  y  $dx = 0$ , así que

$$I_{DO} = \int_1^0 -y \, dy + j \int_1^0 dx = \frac{1}{2} - j$$

De donde

$$\oint_C (z+1) \, dz = I_{OA} + I_{AB} + I_{BD} + I_{DO} = 0$$

## 1.6.2 Teorema de Cauchy

El resultado más importante de toda la teoría de variable compleja es el llamado teorema de Cauchy y sienta las bases en las que se apoya la teoría de integración de variable compleja. El teorema puede formularse de la siguiente manera.

### TEOREMA 1.1

#### Teorema de Cauchy

Si  $f(z)$  es una función analítica con derivada  $f'(z)$  continua en todos los puntos dentro y en una curva cerrada simple  $C$  entonces

$$\oint_C f(z) \, dz = 0$$

(Observe el uso del símbolo  $\oint_C$  para denotar la integración alrededor de una curva cerrada, con la convención de que la integral se evalúa recorriendo a  $C$  en el sentido positivo, es decir, en contra de las manecillas del reloj.)

#### Demostración

Para demostrar el teorema, hacemos uso del **teorema de Green** en un plano. En esta etapa es suficiente enunciar el teorema.

Si  $C$  es una curva cerrada simple que encierra una región  $A$  en el plano y  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son funciones continuas con derivadas parciales continuas, entonces

$$\oint_C (P \, dx + Q \, dy) = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (1.43)$$

Volviendo a la integral de contorno y al considerar

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y), \quad z = x + jy$$

se tiene de (1.42)

$$\oint_C f(z) \, dz = \oint_C (u \, dx - v \, dy) + j \oint_C (v \, dx + u \, dy) \quad (1.44)$$

Como  $f(z)$  es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

se satisfacen en  $C$  y dentro de la región  $R$  encerrada por  $C$ .

Como  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  satisfacen las condiciones impuestas a  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  en el teorema de Green, podemos aplicar (1.43) a ambas integrales del lado derecho de (1.44) para obtener

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \iint_R \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0 + i0 \end{aligned}$$

por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Así

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

como se quería mostrar.  $\square$

De hecho, la restricción del teorema de Cauchy de que  $f'(z)$  debe ser continua en  $C$  puede ser eliminada y esto hace el teorema aplicable a una clase más grande de funciones. Una forma revisada del teorema 1.1, sin la restricción, es conocida como el **teorema fundamental de integración compleja**. Como la demostración de que  $f'(z)$  no necesita ser continua en  $C$  fue propuesta primero por Goursat, el teorema fundamental es algunas veces conocido como el **teorema de Cauchy-Goursat**. En este libro, no seguiremos las consecuencias de relajación de esta restricción.

En la práctica, se necesitan evaluar con cierta frecuencia las integrales de contorno en las que aparecen funciones tales como

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2}, \quad f_2(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+2)}$$

que tienen singularidades asociadas a ellas. Como las funciones no son analíticas en tales puntos, ¿cómo vamos a evitar las singularidades si éstas se encuentran dentro del contorno de integración? Para resolver el problema, la singularidad se elimina al **deformar el contorno**.

Primero consideramos el caso en que la función compleja  $f(z)$  tiene una sola singularidad aislada en  $z = z_0$  dentro de la curva cerrada  $C$ . Para quitar la singularidad, la rodeamos con un círculo  $\gamma$ , de radio  $\rho$ , y después cortamos con una recta  $AB$  la región entre el círculo y el contorno exterior de  $C$ . Esto nos lleva al contorno deformado indicado por las flechas en la figura 1.28. En la figura, la línea que une el círculo  $\gamma$  al contorno  $C$  se muestra como un canal estrecho para poder distinguir entre la trayectoria de  $A$  a  $B$  y la trayectoria de  $B$  a  $A$ . La región dentro de este contorno deformado está sombreada en la figura (recuerde que la región dentro de un contorno cerrado es la región de la izquierda cuando recorremos el contorno). Como aquí no hay singularidades, podemos aplicar el teorema de Cauchy y escribir

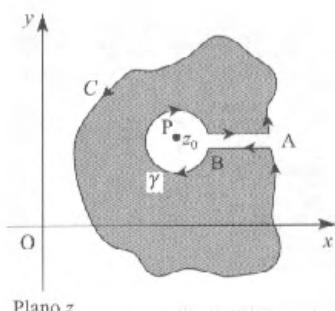


Figura 1.28 Contorno deformado para una singularidad aislada.

$$\oint_C f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \oint_{\gamma} f(z) dz + \oint_{BA} f(z) dz = 0$$

Como

$$\oint_{BA} f(z) dz = -\oint_{AB} f(z) dz, \quad \text{y} \quad \oint_{\gamma} f(z) dz = -\oint_{\gamma^+} f(z) dz$$

se simplifica a

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma^+} f(z) dz \quad (1.45)$$

el  $+$  indica el cambio de sentido, del giro en el sentido de las manecillas del reloj al sentido contrario al giro de las manecillas, alrededor del círculo  $\gamma$ .

### EJEMPLO 1.29

Evalúe la integral  $\oint_C dz/z$  alrededor

(a) cualquier contorno que contenga el origen;

(b) cualquier contorno que no contenga el origen.

**Solución** (a)  $f(z) = 1/z$  tiene una singularidad (un polo simple) en  $z = 0$ . Entonces, al usar (1.45) la integral alrededor de cualquier contorno que encierre al origen es igual a la integral alrededor del círculo  $\gamma$ , centrado en el origen y de radio  $\rho_0$ . Así que necesitamos evaluar

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

Como se puede ver de la figura 1.29, en el círculo  $\gamma$

$$z = \rho_0 e^{j\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

así

$$dz = j\rho_0 e^{j\theta} d\theta$$

se llega a

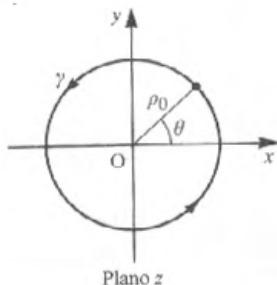


Figura 1.29 Un círculo de radio  $\rho_0$  con centro en el origen.

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{j\rho_0 e^{j\theta}}{\rho_0 e^{j\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} j d\theta = 2\pi j$$

Por tanto, si  $C$  encierra el origen entonces

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi j$$

(b) Si  $C$  no encierra el origen entonces, por el teorema de Cauchy

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 0$$

ya que  $1/z$  es analítica dentro y en cualquier curva que no encierre al origen.

### EJEMPLO 1.30

Generalice el resultado del ejemplo 1.29 evaluando

$$\oint_C \frac{dz}{z^n}$$

cuando  $n$  es un entero, alrededor de cualquier contorno que contenga al origen.

#### Solución

Si  $n \leq 0$  podemos aplicar directamente el teorema de Cauchy (o se puede evaluar directamente la integral) para demostrar que la integral es cero. Si  $n > 1$  procedemos como en el ejemplo 1.29 y evaluamos la integral alrededor de un círculo centrado en el origen. Al tomar  $z = \rho_0 e^{j\theta}$  como en el ejemplo 1.29, tenemos

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{j\rho_0 e^{j\theta}}{\rho_0^n e^{nj\theta}} d\theta$$

donde  $\rho_0$  es una vez más el radio del círculo. Si  $n \neq 1$ ,

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = j \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\rho_0^{\frac{n-1}{n}} e^{\frac{(n-1)j\theta}{n}}} = j\rho_0^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{e^{\frac{(1-n)j\theta}{n}}}{(1-n)j} \right]_0^{2\pi} = \frac{\rho_0^{\frac{1}{n}}}{1-n} (e^{(1-n)2\pi j} - 1) = 0$$

puede que  $e^{2\pi jN} = 1$  para cualquier entero  $N$ . Por tanto,

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = 0 \quad (n \neq 1)$$

En los ejemplos 1.29 y 1.30 hemos establecido el resultado, quizás sorprendente, de que si  $C$  es un contorno que contiene al origen entonces

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 2\pi j & (n=1) \\ 0 & (\text{siendo } n \text{ cualquier otro entero}) \end{cases}$$

Si  $C$  no contiene al origen la integral, por el teorema de Cauchy, es por supuesto cero.

### EJEMPLO 1.31

Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{dz}{z-2-j}$$

alrededor de cualquier contorno  $C$  que contenga el punto  $z = 2 + j$ .

**Solución** La función

$$f(z) = \frac{1}{z-2-j}$$

tiene una singularidad (un polo simple) en  $z = 2 + j$ . Entonces, al utilizar (1.45), la integral alrededor de cualquier contorno  $C$  que contenga el punto  $z = 2 + j$  es la misma que la integral alrededor de un círculo  $\gamma$  centrado en  $z = 2 + j$  y de radio  $\rho$ . Así necesitamos evaluar

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-2-j}$$

Como puede verse en la figura 1.30, en el círculo  $\gamma$

$$z = (2 + j) + \rho e^{j\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$dz = j\rho e^{j\theta} d\theta$$

al llegar a

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-2-j} &= \int_0^{2\pi} \frac{j\rho e^{j\theta}}{\rho e^{j\theta} - 2 - j} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} j d\theta = j2\pi \end{aligned}$$

Ahora, si  $C$  encierra el punto  $z = 2 + j$  entonces

$$\oint_C \frac{dz}{z-2-j} = \pi j 2$$

Compare esta integral con la respuesta del ejemplo 1.29.

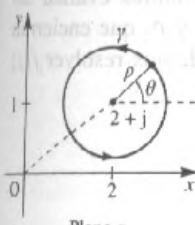
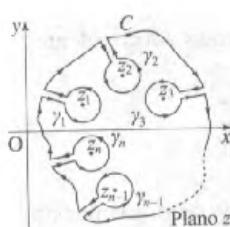


Figura 1.30 Un círculo de radio  $\rho$  con centro en  $2 + j$ .



**Figura 1.31**  
Contorno deformado para  $n$  singularidades.

Hasta aquí, solo hemos considerado funciones con una singularidad simple dentro de un contorno cerrado  $C$ . El método puede extenderse para acomodar cualquier número finito de singularidades. Si la función  $f(z)$  tiene un número finito de singularidades  $z = z_1, z_2, \dots, z_n$ , dentro de un contorno cerrado  $C$ , podemos deformar éste último introduciendo  $n$  círculos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  para rodear cada una de las singularidades, como se muestra en la figura 1.31. Entonces se ha probado rápidamente que

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z) dz \quad (1.46)$$

### EJEMPLO 1.32

Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{z dz}{(z-1)(z+2j)}$$

donde  $C$  es

- (a) cualquier contorno que contenga a ambos puntos  $z = 1$  y  $z = -2j$ ;
- (b) cualquier contorno que contenga a  $z = -2j$  pero que excluya al punto  $z = 1$ .

**Solución** La función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2j)}$$

tiene singularidades en  $z = 1$  y  $z = -2j$ .

(a) Como el contorno encierra a ambas singularidades, necesitamos evaluar las integrales alrededor de los círculos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  cuyos radios son  $\rho_1$  y  $\rho_2$  que encierran los puntos  $z = 1$  y  $z = -2j$  respectivamente. Por otra parte, podemos resolver  $f(z)$  en fracciones parciales como

$$f(z) = \frac{\frac{1}{3}(1-j2)}{z-1} + \frac{\frac{1}{5}(4+2j)}{z+2j}$$

y se considera

$$I = \oint_C \frac{z dz}{(z-1)(z+2j)} = \frac{1}{3}(1-2j) \oint_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{5}(4+2j) \oint_C \frac{dz}{z+2j} = I_1 + I_2$$

El integrando de  $I_1$  tiene una singularidad simple en  $z = 1$ , y solo necesitamos evaluarlo alrededor del círculo  $\gamma_1$  de radio  $\rho_1$  alrededor de  $z = 1$  para obtener

$$I_1 = 2\pi j$$

En forma similar,  $I_2$  tiene una singularidad simple en  $z = -2j$  y lo evaluamos alrededor del círculo  $\gamma_2$  para obtener

$$I_2 = 2\pi j$$

Entonces

$$I = \frac{1}{3}(1 - j2)2\pi j + \frac{1}{3}(4 + j2)2\pi j = 2\pi j\left(\frac{17}{15} - j\frac{4}{15}\right)$$

Así como el contorno  $C$  contiene ambas singularidades entonces

$$\oint_C \frac{z \, dz}{(z-1)(z+j2)} = 2\pi j\left(\frac{17}{15} - j\frac{4}{15}\right)$$

(b) Si el contorno  $C$  sólo contiene la singularidad  $z = -2j$  entonces

$$\oint_C \frac{z \, dz}{(z-1)(z+2j)} = I_2 = 2\pi j\left(\frac{4}{5} + j\frac{2}{5}\right)$$

En los ejemplos 1.29–1.32 podemos observar algunas semejanzas en las respuestas, como la aparición del término  $2\pi j$  en todas ellas. Por tanto, parece que se pueden obtener algunos resultados generales para ayudar en la evaluación de las integrales de contorno. Este es el caso, y dichos resultados generales están contenidos en el **teorema de Cauchy para integrales**.

## TEOREMA 1.2

### Teorema de Cauchy para integrales

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro y sobre un contorno cerrado simple  $C$ . Si  $z_0$  es cualquier punto en  $C$  entonces

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \, dz = 2\pi j f(z_0) \quad (1.47)$$

Si derivamos repetidamente  $n$  veces con respecto a  $z$  bajo el signo de la integral entonces también se sigue que

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (1.48)$$

Observamos que (1.48) implica que si  $f'(z)$  existe en  $z = z_0$  así  $f^{(n)}(z)$  también existe para toda  $n$ , como se predijo antes en las observaciones que siguen al ejemplo 1.16.

EJEMPLO 1.33 Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)} \, dz$$

donde  $C$  es un contorno que incluye los tres puntos  $z = 1$ ,  $z = -2$  y  $z = -j$ .

**Solución** Como

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}$$

tiene singularidades en los puntos  $z = 1$ ,  $z = -2$  y  $z = -j$  dentro del contorno, se sigue de (1.46) que

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \oint_{\gamma_3} f(z) dz \quad (1.49)$$

donde  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  son círculos centrados en las singularidades  $z = 1$ ,  $z = -2$  y  $z = -j$  respectivamente. Para poder utilizar el teorema de Cauchy para integrales, reescribimos (1.49) como

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_{\gamma_1} \left\{ \frac{2z/[(z+2)(z+j)]}{z-1} \right\} dz + \oint_{\gamma_2} \left\{ \frac{2z/[(z-1)(z+j)]}{z+2} \right\} dz \\ &\quad + \oint_{\gamma_3} \left\{ \frac{2z/[(z-1)(z+2)]}{z+j} \right\} dz \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z-1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z+2} dz + \oint_{\gamma_3} \frac{f_3(z)}{z+j} dz \end{aligned}$$

Como  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  y  $f_3(z)$  son analíticas dentro y sobre los círculos  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  respectivamente, se sigue de (1.47) que

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi j[f_1(1) + f_2(-2) + f_3(-j)] \\ &= 2\pi j \left[ \frac{3}{2(1+j)} + \frac{-4}{(-3)(-2+j)} + \frac{-2j}{(-j-1)(-j+2)} \right] \end{aligned}$$

para que

$$\oint_C \frac{2z dz}{(z-1)(z+2)(z+j)} = 0$$

### EJEMPLO 1.34

Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{z^4}{(z-1)^3} dz$$

donde el contorno  $C$  encierra al punto  $z = 1$ .

**Solución** Como  $f(z) = z^4/(z-1)^3$  tiene un polo de orden tres en  $z = 1$ , se sigue que

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{z^4}{(z-1)^3} dz$$

donde  $\gamma$  es un círculo centrado en  $z = 1$ . Escribiendo  $f_1(z) = z^4$ , entonces

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{f_1(z)}{(z-1)^3} dz$$

y como  $f_1(z)$  es analítica dentro y sobre del círculo  $\gamma$ , se sigue de (1.48) que

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{dz^2} f_1(z) \right]_{z=1} = \pi j (12z^2)_{z=1}$$

para que

$$\oint_C \frac{z^4}{(z-1)^3} dz = 12\pi j$$

### 1.6.3 Ejercicios

53 Evalúe  $\oint_C (z^2 + 3z)$  a lo largo de los siguientes contornos  $C$  en el plano complejo  $z$ :

- (a) la recta que une  $2 + j0$  con  $0 + j2$ ;
- (b) la recta que une  $2 + j0$  con  $2 + j2$  y después con  $0 + j2$ ;
- (c) el círculo  $|z| = 2$  para  $2 + j0$  con  $0 + j2$  en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

54 Evalúe  $\oint_C (5z^4 - z^3 + 2) dz$  alrededor de los siguientes contornos cerrados  $C$  en el plano complejo  $z$ :

- (a) el círculo  $|z| = 1$ ;
- (b) el cuadrado con vértices en  $0 + j0, 1 + j0, 1 + j1$  y  $0 + j1$ ;
- (c) la curva que consiste de las parábolas  $y = x^2$  de  $0 + j0$  a  $1 + j1$  y  $y^2 = x$  de  $1 + j1$  a  $0 + j0$ .

55 Generalice el resultado del ejemplo 1.30 y demuestre que

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} j2\pi & (n=1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$$

donde  $C$  es un contorno cerrado simple que encierra al punto  $z = z_0$ .

56 Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{dz}{z-4}$$

donde  $C$  es cualquier curva cerrada simple y  $z = 4$  está

- (a) fuera de  $C$
- (b) dentro de  $C$

57 Con la ayuda del teorema de Cauchy para integrales, evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{2z dz}{(2z-1)(z+2)}$$

donde  $C$  es

- (a) el círculo  $|z| = 1$ ,
- (b) el círculo  $|z| = 3$

58 Con la ayuda del teorema de Cauchy para integrales, evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{5z dz}{(z+1)(z-2)(z+4j)}$$

donde  $C$  es

- (a) el círculo  $|z| = 3$ ,
- (b) el círculo  $|z| = 5$

59 Utilizando el teorema de Cauchy para integrales, evalúe las siguientes integrales de contorno:

$$(a) \oint_C \frac{z^3 + z}{(2z+1)^3} dz$$

donde  $C$  es el círculo unitario  $|z| = 1$ ;

$$(b) \oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2} dz$$

donde  $C$  es el círculo  $|z| = 3$ .

## 1.6.4 El teorema del residuo

Este teorema relaciona las teorías de derivación e integración de funciones complejas. Está relacionado con la evaluación de la integral de contorno

$$I = \oint_C f(z) dz$$

donde la función compleja  $f(z)$  tiene un número finito  $n$  de singularidades aisladas en  $z_1, z_2, \dots, z_n$  dentro del contorno cerrado  $C$ . Definiendo el contorno  $C$  como en la figura 1.31, tenemos como en (1.46) que

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z) dz \quad (1.46)$$

Si suponemos que  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z = z_i$  entonces puede ser representada mediante la expansión en serie de Laurent como

$$f(z) = \frac{a_m^{(i)}}{(z - z_i)^m} + \dots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z - z_i} + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z - z_i) + \dots + a_m^{(i)}(z - z_i)^m + \dots$$

válida en el anillo  $r_i < |z - z_i| < R_i$ . Si la curva  $C$  está totalmente contenida en este anillo, entonces por el teorema de Cauchy (1.46) se convierte en

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_i} f(z) dz$$

Al sustituir la expansión en serie de Laurent de  $f(z)$ , cosa que se puede hacer con certeza ya que nos encontramos en el interior del anillo de convergencia, se obtiene

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_i} f(z) dz &= \oint_{\gamma_i} \left[ \frac{a_{-m}^{(i)}}{(z - z_i)^m} + \dots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z - z_i} + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z - z_i) + \dots \right. \\ &\quad \left. + a_m^{(i)}(z - z_i)^m + \dots \right] dz \\ &= a_{-m}^{(i)} \oint_{\gamma_i} \frac{dz}{(z - z_i)^m} + \dots + a_{-1}^{(i)} \oint_{\gamma_i} \frac{dz}{z - z_i} + a_0^{(i)} \oint_{\gamma_i} dz \\ &\quad + a_1^{(i)} \oint_{\gamma_i} (z - z_i) dz + \dots \end{aligned}$$

Al utilizar el resultado del ejercicio 55, todas estas integrales son cero excepto la que está multiplicando a  $a_{-1}^{(i)}$ , que es el residuo, y tiene el valor  $2\pi j$ . Por tanto, hemos probado que

$$\oint_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi j a_{-1}^{(i)} = 2\pi j \times \text{residuo en } z = z_i$$

Esto claramente se generaliza, de manera que (1.46) se convierte en

$$\begin{aligned} I = \oint_C f(z) dz &= 2\pi j \sum_{i=1}^n (\text{residuo en } z = z_i) \\ &= 2\pi j \times (\text{suma de los residuos dentro de } C) \end{aligned}$$

Así tenemos el siguiente resultado general:

### TEOREMA 1.3

### El teorema del residuo

Si  $f(z)$  es una función analítica dentro y sobre una curva cerrada simple  $C$ , excepto en un número finito de polos, entonces

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \times [\text{suma de los residuos de } f(z) \text{ en los polos dentro de } C] \quad \square$$

Este es un resultado bastante notable, nos permite evaluar la integral de contorno  $\oint_C f(z) dz$  con la simple evaluación de un coeficiente de la expansión en serie de Laurent de  $f(z)$  en cada una de sus singularidades dentro de  $C$ .

### EJEMPLO 1.35

Evalúe la integral de contorno  $\oint_C dz/[z(1+z)]$  si  $C$  es

- (a) el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$ ;      (b) el círculo  $|z| = 2$ .

**Solución** Las singularidades de  $1/[z(1+z)]$  están en  $z = 0$  y  $-1$ . Al evaluar los residuos usando (1.37) se tiene que

$$\text{residuo en } z = 0 = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(1+z)} = 1$$

$$\text{residuo en } z = -1 = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z(1+z)} = -1$$

- (a) Si  $C$  es  $|z| = \frac{1}{2}$  entonces contiene el polo en  $z = 0$ , pero *no* el polo en  $z = -1$ . Entonces, por el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{dz}{z(z+1)} = 2\pi j \times (\text{residuo en } z = 0) = 2\pi j$$

- (b) Si  $C$  es  $|z| = 2$  entonces ambos polos están dentro de  $C$ . Entonces, por el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{dz}{z(z+1)} = 2\pi j(1 - 1) = 0$$

Evalúe la integral de contorno  $\oint_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z} dz$  donde  $C$  es

- (a)  $|z| = 1$       (b)  $|z| = 3$

### EJEMPLO 1.36

**Solución** La función racional

$$\frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z}$$

tiene polos en  $z = 0$  y  $\pm 2j$ . Al evaluar los residuos usando (1.37) se obtiene

$$\text{residuo en } z = 0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(z^3 - z^2 + z - 1)}{z(z^2 + 4)} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{residuo en } z = 2j = \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{(z - 2j)(z^3 - z^2 + z - 1)}{z(z - 2j)(z + 2j)} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{4}j$$

$$\text{residuo en } z = -2j = \lim_{z \rightarrow -2j} \frac{(z + 2j)(z^3 - z^2 + z - 1)}{z(z - 2j)(z + 2j)} = -\frac{3}{8} - \frac{3}{4}j$$

(Observe que estos han sido evaluados en el ejercicio 50(d).)

(a) Si  $C$  es  $|z| = 1$  entonces el único polo en  $z = 0$  está dentro del contorno, así sólo el residuo ahí se toma en cuenta en el teorema del residuo, y

$$\oint_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z} dz = 2\pi j \left( -\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2}\pi j$$

(b) Si  $C$  es  $|z| = 3$  entonces todos los polos están dentro del contorno. De donde, por el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z} dz = 2\pi j \left( -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{4}j - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}j \right) = -2\pi j$$

### EJEMPLO 1.37

Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z^2 + 2z + 2)}$$

donde  $C$  es el círculo  $|z| = 3$ .

**Solución** Los polos de  $1/z^3(z^2 + 2z + 2)$  son como sigue: un polo de orden tres en  $z = 0$ , dos polos simples donde  $z^2 + 2z + 2 = 0$ , esto es en  $z = -1 \pm j$ . Todos estos polos están dentro del contorno  $C$ .

De (1.38), el residuo en  $z = 0$  está dado por

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \right] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{-(2z+2)}{(z^2 + 2z + 2)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ \frac{-(z+1)}{(z^2 + 2z + 2)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-(z^2 + 2z + 2)^2 + (z+1)2(z^2 + 2z + 2)(2z+2)}{(z^2 + 2z + 2)^4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De (1.37), el residuo en  $z = -1 - j$  es

$$\lim_{z \rightarrow -1-j} (z+1+j) \frac{1}{z^3(z+1+j)(z+1-j)} = \lim_{z \rightarrow -1-j} \frac{1}{z^3(z+1-j)}$$

$$= \frac{1}{(-1-j)^3(-2j)} = \frac{1}{(1+j)^3 2j} = \frac{1}{(-2+2j)2j}$$

al utilizar  $(1+j)^3 = 1 + 3j + 3j^2 + j^3 = -2 + 2j$ . De donde

$$\text{residuo en } z = -1 - j = \frac{1}{4} \frac{1}{-1-j} = -\frac{1}{4} \frac{1-j}{2} = \frac{1}{8}(-1+j)$$

También al utilizar (1.37)

$$\text{residuo en } z = -1 + j = \lim_{z \rightarrow -1+j} (z+1-j) \frac{1}{z^3(z+1+j)(z+1-j)}$$

que es precisamente el conjugado complejo del residuo en  $z = -1 - j$ . De lo anterior, se puede abreviar el álgebra y establecer el residuo como  $\frac{1}{8}(-1-j)$ .

La suma de los residuos es

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}(-1+j) + \frac{1}{8}(-1-j) = 0$$

así, por el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z^2+2z+2)} = 2\pi j(0) = 0$$

## 1.6.5 Evaluación de integrales reales definidas

La evaluación de las integrales definidas se realiza con la ayuda del teorema del residuo junto con una función compleja  $f(z)$  conveniente y un contorno cerrado  $C$  conveniente. En esta sección consideraremos brevemente dos de los tipos más comunes de integrales reales que pueden ser evaluadas de esta manera.

*Tipo 1: Integrales reales infinitas de la forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

*donde  $f(x)$  es una función racional de la variable  $x$ .*

Para evaluar tales integrales, consideraremos la integral de contorno

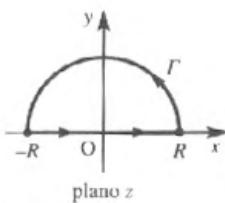


Figura 1.32  
El contorno cerrado para evaluar  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .

$$\oint_C f(z) dz$$

donde  $C$  es el contorno cerrado ilustrado en la figura 1.32, que consiste del eje real de  $-R$  a  $+R$  y del semicírculo  $\Gamma$ , de radio  $R$ , en el semiplano superior  $z$ . Como  $z = x$  en el eje real

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma} f(z) dz$$

Entonces, suponiendo que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ , al tomar  $R \rightarrow \infty$  da

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

En la trayectoria semicircular  $\Gamma$ ,  $z = Re^{j\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ ), dando

$$dz = jRe^{j\theta} d\theta$$

y

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{\pi/2} f(Re^{j\theta}) jRe^{j\theta} d\theta$$

Para que esto tienda a cero conforme  $R \rightarrow \infty$ ,  $|f(Re^{j\theta})|$  debe decrecer al menos tan rápidamente como  $R^{-2}$ , esto implica que el grado del denominador de la función racional  $f(x)$  debe ser al menos dos veces más grande que el grado del numerador. Así suponiendo que esta condición es satisfecha, esta aproximación puede utilizarse para calcular la integral real infinita  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . Observe que si  $f(x)$  es una función par de  $x$  entonces la misma aproximación puede ser usada para evaluar  $\int_0^{\infty} f(x) dx$ , ya que si  $f(x)$  es par, se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$$

### EJEMPLO 1.38

Utilice la integración de contorno y demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{16}\pi$$

**Solución** Considere la integral de contorno

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}$$

donde  $C$  es el contorno semicircular cerrado que se muestra en la figura 1.32. El integrando  $1/(z^2 + 4)^2$  tiene polos de orden dos en  $z = \pm 2j$ . Sin embargo, la única singularidad dentro del contorno  $C$  es el polo doble en  $z = 2j$ . De (1.38),

$$\begin{aligned} \text{residuo en } z = 2j &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (z - 2j)^2 \frac{1}{(z - 2j)^2 (z + 2j)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{-2}{(z + 2j)^3} = \frac{-2}{(4j)^3} = -\frac{1}{32} j \end{aligned}$$

así, por el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = 2\pi j \left(-\frac{1}{32} j\right) = \frac{1}{16} \pi$$

Como

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} + \int_R^\infty \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}$$

haciendo  $R \rightarrow \infty$ , y al observar que la segunda integral se hace cero, entonces

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{16} \pi$$

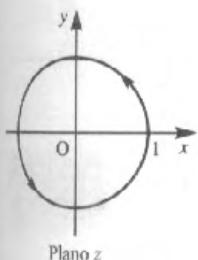
Cabe indicar que, en este caso particular, podríamos haber evaluado la integral sin utilizar la integración de contorno. Haciendo la sustitución  $x = 2\tan \theta$ ,  $dx = 2\sec^2 \theta d\theta$  da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\sec^2 \theta d\theta}{(4\sec^2 \theta)^2} = \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{16} [\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{16} \pi$$

### Tipo 2: Integrales reales de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} G(\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) d\theta$$

donde  $G$  es una función racional de  $\operatorname{sen} \theta$  y  $\cos \theta$



Se toma  $z = e^{j\theta}$ , de modo que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

y

$$dz = j e^{j\theta} d\theta, \quad \text{o} \quad d\theta = \frac{dz}{jz}$$

Sustituyendo en la integral  $I$ , ésta se vuelve

$$I = \oint_C f(z) dz$$

donde  $C$  es el círculo unitario  $|z| = 1$  que se muestra en la figura 1.33.

Figura 1.33 El contorno del círculo unitario para evaluar

$$\int_0^{2\pi} G(\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) d\theta$$

**EJEMPLO 1.39**

Usando integración de contorno, evalúe

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$$

**Solución** Al tomar  $z = e^{j\theta}$ , de manera que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad d\theta = \frac{dz}{jz}$$

Sustituyendo la integral se vuelve

$$I = \oint_C \frac{dz}{jz \left[ 2 + \frac{1}{2}(z + 1/z) \right]} = \frac{2}{j} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}$$

donde  $C$  es el círculo unitario  $|z| = 1$  que se muestra en la figura 1.33. El integrando tiene singularidades en

$$z^2 + 4z + 1 = 0$$

esto es, en  $z = -2 \pm \sqrt{3}$ . La única singularidad dentro del contorno  $C$  es el polo simple en  $z = -2 + \sqrt{3}$ . De (1.37),

$$\text{residuo en } z = -2 + \sqrt{3}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2+\sqrt{3}} \left[ \frac{2}{j} (z + 2 - \sqrt{3}) \frac{1}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} \right] = \frac{2}{j} \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{j\sqrt{3}}$$

así, por el teorema del residuo,

$$I = 2\pi j \left( \frac{1}{j\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

En consecuencia

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

### 1.6.6 Ejercicios

**60** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z dz}{z^2 + 1}$$

donde  $C$  es

- (a) el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$  (b) el círculo  $|z| = 2$

**61** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z^2 + 3jz - 2}{z^3 + 9z} dz$$

donde  $C$  es

- (a) el círculo  $|z| = 1$  (b) el círculo  $|z| = 4$

62 Calcule los residuos de todos los polos de la función

$$f(z) = \frac{(z^2 + 2)(z^2 + 4)}{(z^2 + 1)(z^2 + 6)}$$

Ahora calcule la integral

$$\oint_C f(z) dz$$

donde  $C$  es

- (a) el círculo  $|z| = 2$
- (b) el círculo  $|z - j| = 1$
- (c) el círculo  $|z| = 4$

63 Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(1+z^2)^2}$$

donde  $C$  es

- (a) el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
- (b) el círculo  $|z| = 2$

64 Con la ayuda del teorema del residuo evalúe las siguientes integrales de contorno:

$$(a) \oint_C \frac{(3z^2 + 2) dz}{(z-1)(z^2+4)},$$

donde  $C$  es 

- (i) el círculo  $|z-2| = 2$
- (ii) el círculo  $|z| = 4$

$$(b) \oint_C \frac{(z^2 - 2z) dz}{(z+1)^2(z^2+4)},$$

donde  $C$  es 

- (i) el círculo  $|z| = 3$
- (ii) el círculo  $|z+j| = 2$

$$(c) \oint_C \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)(z-2)},$$

donde  $C$  es 

- (i) el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
- (ii) el círculo  $|z+1| = 1$
- (iii) el rectángulo con vértices en  $\pm j, 3 \pm j$

$$(d) \oint_C \frac{(z-1) dz}{(z^2-4)(z+1)^4},$$

donde  $C$  es 

- (i) el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
- (ii) el círculo  $|z + \frac{3}{2}| = 2$
- (iii) el triángulo con vértices at  $-\frac{3}{2}+j, -\frac{3}{2}-j, 3+j0$

65 Usando una integral de contorno apropiada evalúe las siguientes integrales reales:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2}$$

$$(d) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

$$(e) \int_0^{2\pi} \frac{4 d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$$

$$(f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

$$(g) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} \quad (h) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} \quad (j) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + 2 \cos \theta} d\theta$$

## 1.7

# Aplicación a la ingeniería: análisis de circuitos de corriente alterna

En el circuito de la figura 1.34 deseamos encontrar la variación en la impedancia  $Z$  y la admitancia  $Y$  conforme la capacitancia  $C$  del capacitor varía de 0 a  $\infty$ . Aquí

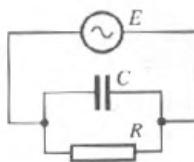


Figura 1.34 Circuito de corriente alterna de la sección 1.7.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j\omega C, \quad Y = \frac{1}{Z}$$

Al escribir

$$\frac{1}{Z} = \frac{1 + j\omega CR}{R}$$

tenemos claramente

$$Z = \frac{R}{1 + j\omega CR} \quad (1.50)$$

La ecuación (1.50) puede ser interpretada como un mapeo bilineal con  $Z$  y  $C$  como las dos variables. Examinamos lo que pasa con el eje real en el plano  $C$  ( $C$  varía de 0 a  $\infty$  y, por supuesto, es real) bajo el inverso del mapeo dado por (1.50). Despejando  $C$  de (1.50) tenemos

$$C = \frac{R - Z}{j\omega R Z} \quad (1.51)$$

Al tomar  $Z = x + jy$

$$C = \frac{R - x - jy}{j\omega R(x + jy)} = \frac{x + jy - R}{\omega R(y - jx)} = \frac{(x + jy - R)(y + jx)}{\omega R(x^2 + y^2)} \quad (1.52)$$

Igualando las partes imaginarias, y recordando que  $C$  es real, tenemos

$$0 = x^2 + y^2 - Rx \quad (1.53)$$

que representa un círculo con centro en  $(\frac{1}{2}R, 0)$  y radio  $\frac{1}{2}R$ . Así el eje real en el plano  $C$  es mapeado en el círculo dado por (1.53) en el plano  $Z$ . Por supuesto,  $C$  es positivo. Si  $C = 0$ , (1.53) indica que  $Z = R$ . El circuito de la figura 1.34 confirma que, en este caso, la impedancia es  $R$ . Si  $C \rightarrow \infty$  entonces  $Z \rightarrow 0$ , así el eje real positivo en el plano es mapeado en el semicírculo superior o en el inferior. Igualando las partes reales en (1.52) da

$$C = \frac{-y}{\omega(x^2 + y^2)}$$

así que  $C > 0$  da  $y < 0$ , esto implica que el semicírculo inferior es la imagen en el plano  $Z$  del eje real positivo del plano  $C$ . Un diagrama como el de la figura 1.35 da una idea gráfica inmediata de cómo varía la impedancia  $Z$  conforme varía  $C$ .

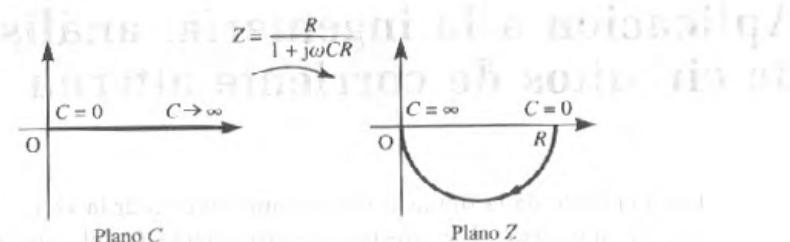
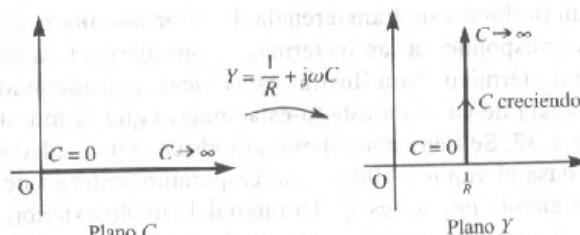


Figura 1.35 Mapeo para la impedancia  $Z$ .

Figura 1.36 Mapeo para la admitancia  $Y$ .

La admitancia  $Y = 1/Z$  está dada por

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C$$

que representa un mapeo lineal como se muestra en la figura 1.36.

## 1.8

# Aplicación a la ingeniería: uso de funciones armónicas

En esta sección discutimos dos aplicaciones a la ingeniería donde se hace uso de las propiedades de las funciones armónicas.

## 1.8.1

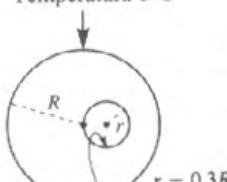
### Un problema de transferencia de calor

Vimos en la sección 1.3.2 que toda función analítica genera un par de funciones armónicas. El problema de encontrar una función que sea armónica en una región específica y que satisfaga las condiciones de frontera prescritas es uno de los problemas más viejos y más importantes en las ciencias basadas en la ingeniería. Algunas veces la solución puede ser encontrada por medio de un mapeo conforme definido por una función analítica. Esto, esencialmente, es una consecuencia de la regla del cálculo ‘función de funciones’, la cual implica que toda función armónica de  $x$  y  $y$  se transforma en una función armónica de  $u$  y  $v$  bajo el mapeo

$$w = u + jv = f(x + jy) = f(z)$$

donde  $f(z)$  es analítica. Más aún, las curvas de nivel de la función armónica en el plano  $z$  son mapeadas a las curvas de nivel correspondientes en el plano  $w$ , de modo que una función armónica que tiene un valor constante a lo largo de una parte de la frontera de una región o tiene una derivada normal cero a lo largo de una parte de la frontera es mapeada en una función armónica con la misma propiedad en el plano  $w$ .

Temperatura 0°C



Temperatura 100°C

Figura 1.37 Diagrama esquemático de un problema de transferencia de calor.

Para un problema de transferencia de calor las curvas de nivel de una función armónica corresponden a las isotermas, y una derivada normal cero corresponde al aislamiento térmico. Para ilustrar estas ideas, consideraremos el problema simple de transferencia de calor en estado-estacionario que se muestra esquemáticamente en la figura 1.37. Se tiene una tubería cilíndrica con cavidad cilíndrica descentrada por la que pasa el vapor a 100°C. La temperatura exterior de la tubería es de 0°C. El radio del círculo interior es  $\frac{3}{10}$  del radio del círculo exterior, así que si elegimos el radio exterior como la unidad de longitud, el problema puede ser formulado como el de encontrar una función armónica  $T(u, v)$  tal que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

en la región entre los círculos  $|z| = 1$  y  $|z - 0.3| = 0.3$ , y  $T = 0$  sobre  $|z| = 1$  y  $T = 100$  sobre  $|z - 0.3| = 0.3$ .

El mapeo

$$w = \frac{z - 3}{3z - 1}$$

transforma el círculo  $|z| = 1$  en el círculo  $|w| = 1$  y el círculo  $|z - 0.3| = 0.3$  en el círculo  $|w| = 3$  como se muestra en la figura 1.38. Así el problema es transformado en un problema de simetría axial en el plano  $w$  que consiste en encontrar una función armónica  $T(u, v)$  tal que  $T(u, v) = 100$  en  $|w| = 1$  y  $T(u, v) = 0$  en  $|w| = 3$ . Las funciones armónicas con tal simetría axial tienen la forma general

$$T(u, v) = A \ln(u^2 + v^2) + B$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes.

Aquí requerimos, además de la simetría axial, que  $T(u, v) = 100$  en  $u^2 + v^2 = 1$  y  $T(u, v) = 0$  en  $u^2 + v^2 = 9$ . Así  $B = 100$  y  $A = -100 \ln 9$ , y la solución en el plano  $w$  es

$$T(u, v) = \frac{100[1 - \ln(u^2 + v^2)]}{\ln 9}$$

Necesitamos la solución en el plano  $z$ , que en general significa que tenemos que obtener  $u$  y  $v$  en términos de  $x$  y  $y$ . Aquí, sin embargo, es un poco más fácil ya que  $u^2 + v^2 = |w|^2$  y

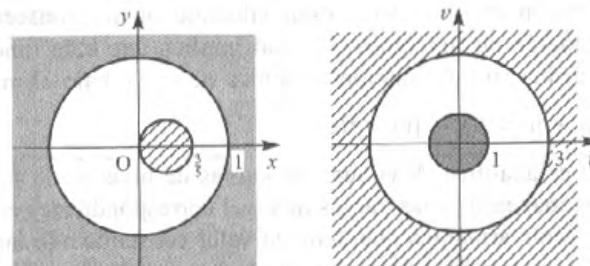


Figura 1.38 El mapeo  $w = (z - 3)/(3z - 1)$ .

$$|w|^2 = \left| \frac{z-3}{3z-1} \right|^2 = \frac{|z-3|^2}{|3z-1|^2} = \frac{(x-3)^2 + y^2}{(3x-1)^2 + 9y^2}$$

Así

$$T(x, y) = \frac{100}{\ln 9} \{1 - \ln [(x-3)^2 + y^2] - \ln [(3x-1)^2 + 9y^2]\}$$

## 1.8.2 Corriente en un transistor de efecto de campo

Los campos ( $E_x, E_y$ ) en un transistor tipo efecto de campo con compuerta aislada son armónicas conjugadas que satisfacen una condición de frontera no lineal. Para el transistor mostrado esquemáticamente en la figura 1.39 tenemos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

con condiciones

$$E_x = 0 \quad \text{en los electrodos}$$

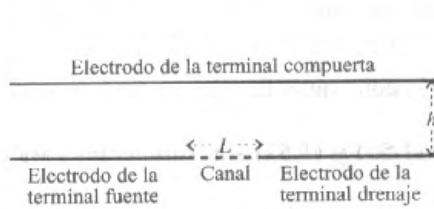
$$E_x \left( E_y + \frac{V_0}{h} \right) = -\frac{I}{2\mu\epsilon_0\epsilon_r} \quad \text{en el canal}$$

$$E_y \rightarrow -\frac{V_g}{h} \quad \text{con } x \rightarrow -\infty \quad (0 < y < h)$$

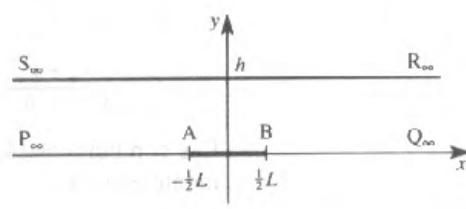
$$E_y \rightarrow \frac{V_d - V_g}{h} \quad \text{con } x \rightarrow \infty \quad (0 < y < h)$$

donde  $V_0$  es una constante con dimensiones de potencial,  $h$  es el grosor del aislante,  $I$  es la corriente en el canal, que tiene que calcularse,  $\mu$ ,  $\epsilon_0$  y  $\epsilon_r$  tienen sus significados usuales y los potenciales de compuerta  $V_g$  y drenaje  $V_d$  se toman con respecto a la fuente de potencial.

La clave para la solución de este problema es la observación de la condición de que la frontera no lineal



(a)



(b)

Figura 1.39 (a) Diagrama esquemático para un transistor tipo efecto de campo; (b) un sistema coordenado adecuado para la aplicación.

$$2E_x \left( E_y + \frac{V_0}{h} \right) = -\frac{I}{\mu \epsilon_0 \epsilon_r}$$

contiene a la función armónica (ahora de  $E_x$  y  $E_y$ )

$$H(E_x, E_y) = 2E_x \left( E_y + \frac{V_0}{h} \right)$$

Una conjugada armónica de  $H$  es la función

$$G(E_x, E_y) = \left( E_y + \frac{V_0}{h} \right)^2 - E_x^2$$

Como  $E_x$  y  $E_y$  son armónicas conjugadas con respecto a  $x$  e  $y$ , también lo son  $G$  y  $H$ . Así el problema puede ser reformulado como el de encontrar las armónicas conjugadas  $G$  y  $H$  tales que

$$H = 0 \quad \text{en los electrodos}$$

$$H = -\frac{I}{\mu \epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{en el canal}$$

$$G \rightarrow \left( \frac{V_0 - V_g}{h} \right)^2 \quad \text{con } x \rightarrow \infty \quad (0 < y < h)$$

$$G \rightarrow \left( \frac{V_0 + V_d - V_g}{h} \right)^2 \quad \text{con } x \rightarrow -\infty \quad (0 < y < h)$$

Al utilizar la sucesión del mapeo que se indica en la figura 1.40, que puede convertirse en la fórmula simple

$$w = \frac{a e^{bx} - a^2}{a e^{bx} - 1}$$

donde  $a = e^{bl/2}$  y  $b = \pi/h$ , el problema se ha transformado para encontrar las funciones armónicas conjugadas  $G$  y  $H$  (en el plano  $w$ ) tales que

$$H = 0 \quad \text{sobre } v = 0 \quad (u \geq 0) \quad (1.54)$$

$$H = -\frac{I}{\mu \epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{sobre } v = 0 \quad (u < 0) \quad (1.55)$$

$$G = \left( \frac{V_0 - V_g}{h} \right)^2 \quad \text{con } w = e^{bu} \quad (1.56)$$

$$G = \left( \frac{V_0 + V_d - V_g}{h} \right)^2 \quad \text{con } w = 1 \quad (1.57)$$

Las condiciones (1.54), (1.55) y (1.57) son suficientes para determinar completamente  $H$  y  $G$

$$H = -\frac{I \arg(w)}{\pi \mu \epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$G = \frac{I \ln|w|}{\pi \mu \epsilon_0 \epsilon_r} + \left( \frac{V_0 + V_d - V_g}{h} \right)^2$$

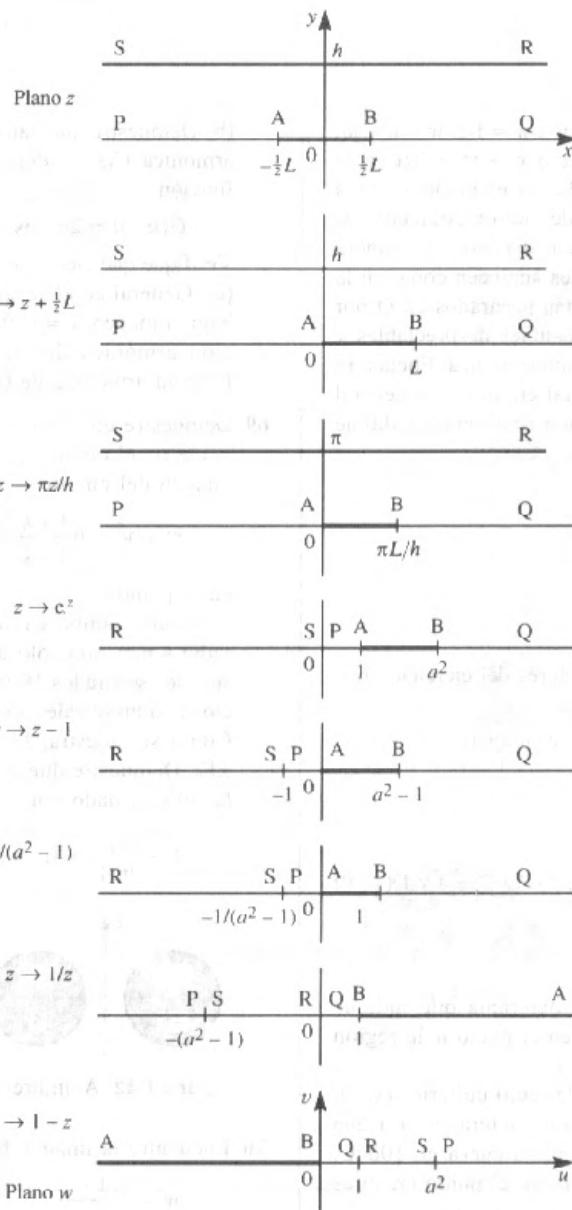


Figura 1.40 Secuencia de mapeos para simplificar el problema.

mientras que la condición (1.56) determina el valor de  $I$

$$I = \frac{\mu E_0 E_r}{Lh} (2V_0 - 2V_g + V_d)V_d$$

Estos ejemplos muestran el poder de los métodos de la variable compleja para resolver problemas difíciles que aparecen en las matemáticas aplicadas a la ingeniería. Los siguientes ejercicios dan algunos ejemplos simples para que el lector los investigue.

### 1.8.3 Ejercicios

- 66 Demuestre que la transformación  $w = 1/z$ ,  $w = u + jv$ ,  $z = x + jy$ , transforma el círculo  $x^2 + y^2 = 2ax$  en el plano  $z$  en la recta  $u = 1/2a$  en el plano  $w$ . Dos alambres conductores largos de radio  $a$  están colocados adyacentes y paralelos uno del otro, de manera que sus secciones transversales aparecen como en la figura 1.41. Los alambres están separados en  $O$  por una brecha aislante de dimensiones despreciables y llevan un potencial de  $\pm V_0$  como se indica. Encuentre una expresión para el potencial en un punto general  $(x, y)$  en el plano de la sección transversal y dibuje las equipotenciales.

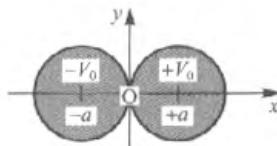


Figura 1.41 Alambres conductores del ejercicio 66.

- 67 Encuentre las imágenes bajo el mapeo

$$w = \frac{z+1}{1-z}$$

$z = x + jy$ , de

- (a) los puntos A(-1, 0), B(0, 1), C( $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}$ ) y D( $\frac{3}{4}, 0$ ) en el plano  $z$ ,  
 (b) la recta  $y = 0$ ,  
 (c) el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

Ilustre su respuesta con un diagrama que indique los planos  $z$  y  $w$  y sombree en el plano  $w$  la región correspondiente a  $x^2 + y^2 < 1$ .

Un disco semicircular de radio unitario  $[(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0]$ , tiene su frontera recta a una temperatura de  $0^\circ\text{C}$  y su frontera curva en  $100^\circ\text{C}$ . Demuestre que la temperatura en el punto  $(x, y)$  es

$$T = \frac{200}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right)$$

- 68 (a) Demuestre que la función

$$G(x, y) = 2x(1-y)$$

satisface la ecuación de Laplace y construya su conjugada armónica  $H(x, y)$  que satisface  $H(0, 0) = 0$ . Ahora para obtener, en términos de  $z$ , donde  $z = x + jy$ , la función  $F$  tal que  $W = F(z)$ , donde  $W = G + jH$ .

- (b) Demuestre que bajo el mapeo  $w = \ln z$ , la función armónica  $G(x, y)$  definida en (a) es mapeada en la función

$$G(u, v) = 2e^u \cos v - e^{2u} \sin 2v$$

Verifique que  $G(x, y)$  es armónica.

- (c) Generalice el resultado (b) para demostrar que bajo el mapeo  $w = f(z)$ , donde  $f'(z)$  existe, una función armónica de  $(x, y)$  es transformada en una función armónica de  $(u, v)$ .

- 69 Demuestre que si  $w = (z+3)/(z-3)$ ,  $w = u + jv$ ,  $z = x + jy$ , el círculo  $u^2 + v^2 = k^2$  en el plano  $w$  es la imagen del círculo

$$x^2 + y^2 + 6 \frac{1+k^2}{1-k^2} x + 9 = 0 \quad (k^2 \neq 1)$$

en el plano  $z$ .

Dos alambres cilíndricos largos, cada uno de radio 4 mm, son colocados paralelos uno al otro con sus ejes separados 10 mm de tal manera que sus secciones transversales aparecen como en la figura 1.42. Como se muestra, los alambres llevan potenciales  $\pm V_0$ . Demuestre que el potencial  $V(x, y)$  en el punto  $(x, y)$  está dado por

$$V = \frac{V_0}{\ln 4} \{ \ln [(x+3)^2 + y^2] - \ln [(x-3)^2 + y^2] \}$$

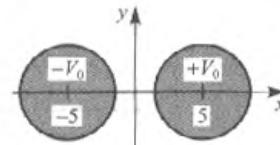


Figura 1.42 Alambres cilíndricos del ejercicio 69.

- 70 Encuentre la imagen bajo el mapeo

$$w = \frac{j(1-z)}{1+z}$$

$z = x + jy$ ,  $w = u + jv$ , de

- (a) los puntos A(1, 0), B(0, 1), C(0, -1) en el plano  $z$ ,  
 (b) la recta  $y = 0$ ,  
 (c) el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

Una lámina circular de radio unitario,  $[(x, y); x^2 + y^2 \leq 1]$ , tiene una mitad (con  $y > 0$ ) de su borde  $x^2 + y^2 = 1$  a una temperatura de  $0^\circ\text{C}$  y la otra mitad (con  $y < 0$ ) a una temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . Usando el

mapeo anterior demuestre que el estado estacionario de la temperatura en el punto  $(x, y)$  es

$$T = \frac{100}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{1-x^2-y^2}{2y} \right)$$

- 71 El problema mostrado esquemáticamente en la figura 1.43 surge durante una investigación de transferencia de calor en estado estacionario.  $T$  es la temperatura. Aplique mapeos sucesivos

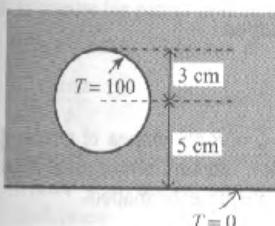


Figura 1.43 Representación esquemática del ejercicio 71.

$$z_1 = \frac{z+j4}{z-j4}, \quad w = \ln z_1$$

y demuestre que la temperatura en el punto  $(x, y)$  en la región sombreada de la figura está dada por

$$T(x, y) = \frac{50}{\ln 3} \ln \left[ \frac{x^2 + (4+y)^2}{x^2 + (4-y)^2} \right]$$

72 Las funciones

$$w = z + \frac{1}{z}, \quad w = \frac{z+1}{z-1}$$

representan el mapeo mostrado en la figura 1.44. Una barra larga con una sección transversal semicircular tiene una temperatura constante de  $100^\circ\text{C}$  en la parte de su superficie curva correspondiente al arco PQ en la figura 1.45, mientras que el resto de la superficie se mantiene en  $0^\circ\text{C}$ . Demuestre que la temperatura  $T$  en el punto  $(x, y)$  está dada por

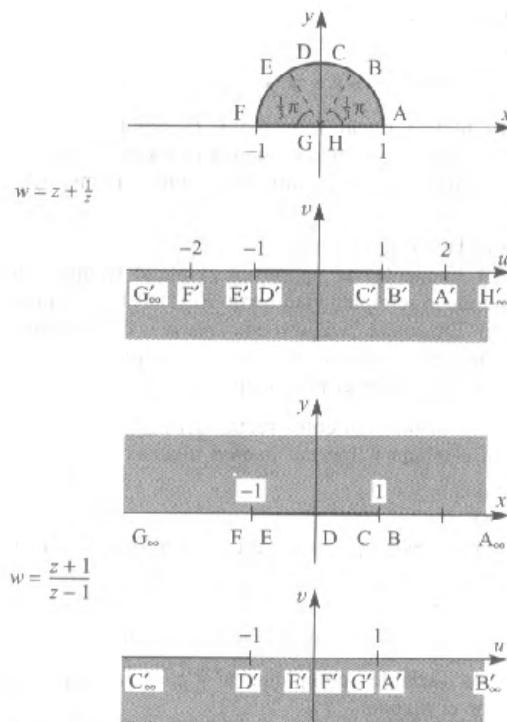


Figura 1.44 Mapeos del ejercicio 72.

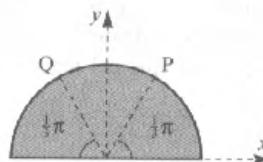


Figura 1.45 Sección transversal de la barra del ejercicio 72.

$$T = \frac{100}{\pi} [\arg(z^2 + z + 1) - \arg(z^2 - z + 1)]$$

## 1.9 Ejercicios de repaso (1-24)

1 Encuentre las imágenes de los siguientes puntos bajo los mapeos dados:

- (a)  $z = 1 + j$     bajo     $w = (1 + j)z + j$   
 (b)  $z = 1 - j2$     bajo     $w = j3z + j + 1$

- (c)  $z = 1$     bajo     $w = \frac{1}{2}(1 - j)z + \frac{1}{2}(1 + j)$   
 (d)  $z = j2$     bajo     $w = \frac{1}{2}(1 - j)z + \frac{1}{2}(1 + j)$

- 2 Bajo cada uno de los mapeos dados en el ejercicio de repaso 1, encuentre las imágenes en el plano  $w$  de las dos rectas

(a)  $y = 2x$

(b)  $x + y = 1$

en el plano  $z$ ,  $z = x + jy$ .

- 3 El mapeo lineal  $w = \alpha z + \beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes complejas, mapea el punto  $z = 2 - j$  en el plano  $z$  en el punto  $w = 1$  en el plano  $w$ , y el punto  $z = 0$  en el punto  $w = 3 + j$ .

(a) Determine  $\alpha$  y  $\beta$ .

(b) Encuentre la región en el plano  $w$  que corresponde al semiplano izquierdo  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  en el plano  $z$ .

(c) Encuentre la región en el plano  $w$  correspondiente a la región circular  $5|z| \leq 1$  en el plano  $z$ .

(d) Encuentre el punto fijo del mapeo.

- 4 Mapear las siguientes rectas del plano  $z$ ,  $z = x + jy$ , en el plano  $w$  bajo el mapeo inverso  $w = j/z$ :

(a)  $x = y + 1$

(b)  $y = 3x$

(c) la recta que une  $A(1 + j)$  a  $B(2 + j3)$  en el plano  $z$

(d)  $y = 4$

En cada caso dibuje la curva imagen.

- 5 Dos variables complejas  $w$  y  $z$  están relacionadas por el mapeo

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

Dibuje este mapeo y encuentre las imágenes en el plano  $w$  de las rectas  $\operatorname{Re}(z) = \text{constante}$  e  $\operatorname{Im}(z) = \text{constante}$ . Encuentre los puntos fijos del mapeo.

- 6 El mapeo

$$w = \frac{1-z^2}{z}$$

manda puntos del plano  $z$  al plano  $w$ . Encuentre los puntos fijos del mapeo y demuestre que el círculo de radio  $r$  con centro en el origen en el plano  $z$  es transformado en la ellipse

$$\left(\frac{ur^2}{r^2-1}\right)^2 + \left(\frac{vr^2}{r^2+1}\right)^2 = r^2$$

en el plano  $w$ , donde  $w = u + jv$ . Investigue qué pasa cuando  $r = 1$ .

- 7 Encuentre las partes real e imaginaria de la función compleja  $w = z^3$ , y verifique las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

- 8 Encuentre una función  $v(x, y)$  tal que, dado

$$u(x, y) = x \operatorname{sen} x \cosh y - y \cos x \operatorname{senh} y$$

$f(z) = u + jv$  es una función analítica de  $z$  ( $f'(0) = 0$ ).

- 9 Encuentre la transformación bilineal que mapea los tres puntos  $z = 0$ ,  $j$  y  $\frac{1}{2}(1+j)$  en el plano  $z$  en los tres puntos  $w = \infty$ ,  $-j$  y  $1-j$  en el plano  $w$  respectivamente. Verifique que la transformación mapeará

(a) la mitad inferior del plano  $z$  en la mitad superior del plano  $w$

(b) el interior del círculo con centro en  $z = j\frac{1}{2}$  y radio  $\frac{1}{2}$  en el plano  $z$  en el semiplano  $\operatorname{Im}(w) < -1$  en el plano  $w$ .

- 10 Demuestre que el mapeo

$$z = \zeta + \frac{a^2}{4\zeta}$$

donde  $z = x + jy$  y  $\zeta = R e^{j\theta}$  mapea el círculo  $R = \text{constante}$  en el plano  $\zeta$  en una elipse en el plano  $z$ . Sugiera un uso posible de este mapeo.

- 11 Encuentre la serie de potencias representante de la función

$$\frac{1}{1+z^3}$$

en el disco  $|z| < 1$ . Deduzca la serie de potencias para

$$\frac{1}{(1+z^3)^2}$$

válida en el mismo disco.

- 12 Encuentre los primeros cuatro términos distintos de cero de la expansión en la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor del punto indicado y determine el radio de convergencia de cada una:

$$(a) \frac{1-z}{1+z} \quad (z=0) \quad (b) \frac{1}{z^2+1} \quad (z=1)$$

$$(c) \frac{z}{z+1} \quad (z=j)$$

- 13 Encuentre el radio de convergencia de cada expansión en serie de Taylor de la siguiente función alrededor de los puntos indicados, sin calcular la serie:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$$

en los puntos  $z = 1, -1, 1+j, 1+j\frac{1}{2}$  y  $2+j3$ .

- 14 Determine la expansión en la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)z}$$

alrededor de los puntos (a)  $z = 0$  y (b)  $z = 1$ , y determine la región de validez de cada una.

- 15 Encuentre la expansión en serie de Laurent de la función

$$f(z) = e^z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

alrededor de (a)  $z = 0$ , (b)  $z = 1$  y (c)  $z = \infty$ , indique, en cada caso, el rango de validez. (No encuentre los términos explícitamente, indique sólo la forma de la parte principal.)

- 16 Encuentre las partes real e imaginaria de las funciones

$$\begin{array}{ll} (a) e^z \operatorname{sen} z & (b) \cos 2z \\ (c) \frac{\operatorname{sen} z}{z} & (d) \tan z \end{array}$$

- 17 Determine cuándo los siguientes mapeos son conformes y si no lo son encuentre los puntos no conformes:

$$\begin{array}{l} (a) w = \frac{1}{z} \\ (b) w = 2z^3 + 3z^2 + 6(1 - j)z + 1 \\ (c) w = 64z + \frac{1}{z^3} \end{array}$$

- 18 Considere el mapeo  $w = \cos z$ . Determine los puntos donde el mapeo no es conforme. Encuentre las imágenes en el plano  $w$  de las rectas  $x = \text{constante}$  y  $y = \text{constante}$  en el plano  $z$  ( $z = x + jy$ ), dibuje el mapeo de manera similar al de las figuras 1.14 y 1.18.

- 19 Determine la localización y la clasificación de las singularidades de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} (a) \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} & (b) \frac{1}{(z^3 - 8)^2} \\ (c) \frac{z+1}{z^4 - 1} & (d) \operatorname{sech} z \\ (e) \operatorname{senh} z & (f) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) \\ (g) z^z \end{array}$$

- 20 Encuentre los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados:

$$\begin{array}{ll} (a) \frac{e^{2z}}{(1+z)^2} & (z = -1) \\ (b) \frac{\cos z}{2z - \pi} & (z = \frac{1}{2}\pi) \\ (c) \frac{\tan z}{2z - \pi} & (z = \frac{1}{2}\pi) \\ (d) \frac{z}{(z+8)^3} & (z = -8) \end{array}$$

- 21 Encuentre los polos y ceros y determine todos los residuos de la función racional

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)(z^2 + 3z + 5)}{z(z^4 + 1)}$$

- 22 Determine el residuo de la función racional

$$\frac{z^7 + 6z^5 - 30z^4}{(z - 1 - j)^3}$$

- 23 Evalúe las siguientes integrales de contorno a lo largo de las trayectorias circulares indicadas:

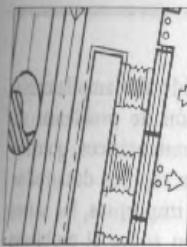
$$\begin{aligned} (a) \oint_C \frac{z \, dz}{z^2 + 7z + 6}, & \quad \text{donde } C \text{ es } |z| = 2 \\ (b) \oint_C \frac{(z^2 + 1)(z^2 + 3)}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)} \, dz, & \quad \text{donde } C \text{ es } |z| = 4 \\ (c) \oint_C \frac{dz}{z^2(1 - z^2)^2}, & \quad \text{donde } \begin{cases} (i) C \text{ es } |z| = \frac{1}{2} \\ (ii) C \text{ es } |z| = 2 \end{cases} \\ (d) \oint_C \frac{dz}{(2z - 3j)(z + j)}, & \\ & \quad \text{donde } \begin{cases} (i) C \text{ es } |z| = 2 \\ (ii) C \text{ es } |z - 1| = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e) \oint_C \frac{z^3 \, dz}{(z^2 + 1)(z^2 + z + 1)}, & \quad \text{donde } C \text{ es } |z - j| = \frac{1}{2} \\ (f) \oint_C \frac{(z - 1) \, dz}{z(z - 2)^2(z - 3)}, & \quad \text{donde } \begin{cases} (i) C \text{ es } |z| = 1 \\ (ii) C \text{ es } |z| = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

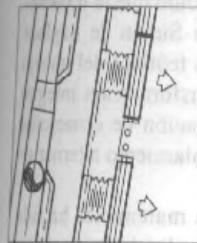
- 24 Utilice una integral de contorno apropiada y evalúe las siguientes integrales reales:

$$\begin{array}{ll} (a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} & \\ (b) \int_0^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{x^4 + 16} & (c) \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta}{5 + 4 \cos \theta} \\ (d) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{5 - 4 \cos \theta} & \end{array}$$

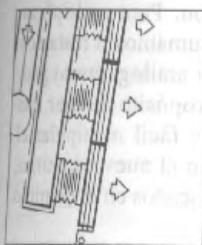




# 2



## Transformadas de Laplace



### CONTENIDO

- 2.1 Introducción
- 2.2 La transformada de Laplace
- 2.3 Solución de ecuaciones diferenciales
- 2.4 Aplicaciones a la ingeniería: circuitos eléctricos y vibraciones mecánicas
- 2.5 Funciones escalón e impulso
- 2.6 Funciones de transferencia
- 2.7 Aplicación a la ingeniería: respuesta de frecuencia
- 2.8 Ejercicios de repaso (1-30)

### 2.1 Introducción

Los métodos de la transformada de Laplace tienen un papel clave en el enfoque moderno al análisis y diseño en los sistemas de ingeniería. El incentivo para desarrollar estos métodos fue el trabajo pionero del ingeniero electricista inglés Oliver Heaviside (1850–1925) que desarrolló un método para la solución sistemática de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Heaviside estuvo interesado en la resolución de problemas prácticos y su método fue basado principalmente en la intuición, faltándole rigor matemático; por consiguiente fue criticado por los teóricos de su tiempo. No obstante, Heaviside no estaba interesado en las demostraciones rigurosas y estuvo satisfecho con que sus métodos dieran los resultados correctos. Usando sus ideas, usted pudo resolver problemas prácticos importantes que no podrían haber sido tratados usando los métodos clásicos. Esto condujo a muchos resultados nuevos en campos tales como la propagación de corrientes y voltajes a lo largo de líneas de transmisión.

Debido a que trabajó en la práctica, el método de Heaviside fue ampliamente aceptado por los ingenieros. Como su poder para la resolución de problemas se volvió más y más evidente, el método atrajo la atención de los matemáticos, quienes se encargaron de justificarlo. Esto proporcionó el estímulo para rápidos desarrollos en muchas ramas de las matemáticas, incluyendo las integrales impropias, las series asintóticas y la teoría de las transformaciones. La investigación sobre el problema continuó por muchos años antes de que finalmente fuera reconocido que la transformación integral desarrollada por el matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749–1827) casi un siglo antes proporcionaba los fundamentos teóricos del trabajo de Heaviside. También fue reconocido que el uso de esta transformación integral proporcionaba una alternativa más sistemática para la investigación de ecuaciones diferenciales que el método propuesto por Heaviside. Es este tratamiento alternativo del tema la base del **método de la transformada de Laplace**.

Hemos tropezado con ejemplos donde una transformación matemática ha sido usada para simplificar la solución de un problema. Por ejemplo, los logaritmos son usados para simplificar problemas de multiplicación y división. Para multiplicar o dividir dos números, los transformamos en sus logaritmos, sumamos o restamos estos y después realizamos la transformación inversa (esto es, el antilogaritmo) para obtener el producto o cociente de los números originales. El propósito de usar una transformación es crear un nuevo dominio en el cual sea más fácil manipular el problema a ser investigado. Una vez obtenidos los resultados en el nuevo dominio, pueden ser transformados inversamente para dar los resultados descados en el dominio original.

La transformada de Laplace es un ejemplo de una clase llamada **transformación integral** y toma una función  $f(t)$  de una variable  $t$  (a la cual nos referiremos como **tiempo**) en una función  $F(s)$  de otra variable  $s$  (la **frecuencia compleja**). Otra transformación integral usada ampliamente por los ingenieros es la **transformada de Fourier**, la cual trataremos en el capítulo 5. La atracción de la transformada de Laplace es que transforma ecuaciones *diferenciales* en el dominio  $t$  (tiempo) en ecuaciones *algebraicas* en el dominio  $s$  (frecuencia). La resolución de ecuaciones diferenciales en el dominio  $t$ , por tanto, se reduce a resolver ecuaciones algebraicas en el dominio  $s$ . Habiendo hecho lo anterior para las incógnitas deseadas, sus valores como funciones del tiempo pueden ser encontrados al tomar la transformación inversa. Otra ventaja al usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales es que las condiciones iniciales juegan un papel esencial en el proceso de la transformación, así están automáticamente incorporadas en la solución. Por tanto, la transformada de Laplace es una herramienta ideal para resolver problemas con valor inicial tales como los que aparecen en la investigación de circuitos eléctricos y vibraciones mecánicas.

La transformada de Laplace encuentra una aplicación particular en el campo de las señales y el análisis de sistemas lineales. Una característica sobresaliente en un sistema es que cuando está sujeto a una excitación (entrada), produce una respuesta (salida). Cuando la entrada  $u(t)$  y la salida  $x(t)$  son funciones de una sola variable  $t$ , que representa al tiempo, es normal referirse a ellas como **señales**. Esquemáticamente, un sistema puede ser representado como en la figura 2.1. El problema que enfrenta el ingeniero es el de determinar la salida  $x(t)$  del sistema cuando está sujeto a una entrada  $u(t)$  aplicada a algún instante de tiempo, que podemos tomar como  $t = 0$ . La relación entre la salida y la entrada está determinada por las leyes que gobiernan el



Figura 2.1 Representación esquemática de un sistema.

comportamiento del sistema. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, entonces la salida está relacionada con la entrada por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y tenemos un problema de valor inicial estándar, que es fácil de resolver usando la transformada de Laplace.

Mientras que muchos de los problemas considerados en este capítulo pueden ser resueltos mediante el tratamiento clásico, la transformada de Laplace nos lleva a un tratamiento más unificado y provee al ingeniero de una mayor comprensión del comportamiento del sistema. En la práctica, la señal de entrada  $u(t)$  puede ser una función discontinua o periódica, o incluso un pulso, y en tales casos el uso de la transformada de Laplace tiene distintas ventajas sobre el tratamiento clásico. También, con bastante frecuencia, un ingeniero está interesado no sólo en el análisis de sistemas sino también en la síntesis o el diseño del sistema. Consecuentemente, el objetivo de un ingeniero al estudiar la respuesta de un sistema a entradas específicas es frecuentemente aprender más acerca del sistema con vistas a mejorarlo o controlarlo de manera que satisfaga ciertas especificaciones. Es en esta área en la que el uso de la transformada de Laplace es atractiva, ya que el hecho de considerar la respuesta del sistema a entradas particulares, tales como una senoidal, provee al ingeniero de métodos gráficos poderosos para diseñar sistemas que son relativamente fáciles de aplicar y ampliamente usados en la práctica.

En el modelado del sistema con una ecuación diferencial, han sido usadas las señales de entrada y salida que pueden variar en cualquier instante de tiempo; esto es, son funciones de una variable continua de tiempo (observe que esto no significa que las señales tengan que ser ellas mismas funciones continuas del tiempo). Tales sistemas son llamados **sistemas de tiempo continuo**, y para investigar estos la transformada de Laplace resulta ser la más conveniente. Con la introducción del control computarizado en el diseño de sistemas, las señales asociadas con un sistema solo pueden cambiar en instantes discretos de tiempo. En tales casos el sistema se dice que es un **sistema de tiempo discreto** y es modelado por una ecuación en diferencias en lugar de una ecuación diferencial. Tales sistemas son tratados con el uso de la transformada  $z$  considerada en el capítulo 3.

## 2.2 La transformada de Laplace

### 2.2.1 Definición y notación

Definimos la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  mediante la expresión

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.1)$$

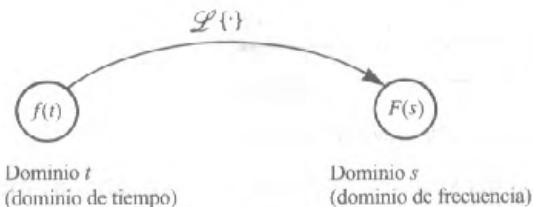


Figura 2.2 El operador transformada de Laplace.

donde  $s$  es una variable compleja y  $e^{-st}$  es llamado el **núcleo** de la transformación.

Es usual representar la transformada de Laplace de una función  $f$ , por la letra mayúscula correspondiente,  $F$ , así que escribimos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.2)$$

Una notación alternativa de uso común es denotar  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  por  $f(s)$  o simplemente  $f$ .

Antes de seguir, hay algunas observaciones relacionadas con la definición (2.2) que vale la pena comentar.

(b) El símbolo  $\mathcal{L}$  denota el **operador transformada de Laplace**; cuando opera en una función  $f(t)$  la transforma en una función  $F(s)$  de variable compleja  $s$ . Decimos que el operador transforma la función  $f(t)$  en el dominio  $t$  (usualmente llamado el **dominio de tiempo**) en la función  $F(s)$  en el dominio  $s$  (usualmente llamado el **dominio de frecuencia complejo** o simplemente el **dominio de frecuencia**). Esta relación está descrita gráficamente en la figura 2.2, y es usual referirse a  $f(t)$  y  $F(s)$  como el **par de transformadas de Laplace** escrito como  $\{f(t), F(s)\}$ .

(b) Como el límite superior de la integral es infinito, el dominio de integración es infinito. Así la integral es un ejemplo de una **integral impropia**, como se introdujo en la sección 9.3 de *Modern Engineering Mathematics*; esto es

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Inmediatamente surge la pregunta de si la integral converge o no, tema que consideraremos en la sección 2.2.3.

(c) Como el límite inferior de la integral es cero, se sigue que cuando tomamos la transformada de Laplace, el comportamiento de  $f(t)$  para valores negativos de  $t$  es ignorado o suprimido. Esto significa que  $F(s)$  contiene información sobre el comportamiento de  $f(t)$  sólo para  $t \geq 0$ , así que la transformada de Laplace no es una herramienta conveniente para investigar problemas en los que sean relevantes los valores de  $f(t)$  para  $t < 0$ . En la mayoría de las aplicaciones a la ingeniería esto no causa ningún problema, ya que estamos interesados en sistemas físicos para los cuales las funciones con las que estamos tratando varían con el tiempo  $t$ . Un atributo de los sistemas físicos realizables es que son **no anticipantes** en el sentido de que no hay una salida (o respuesta) hasta que se aplica una entrada (o excitación). Debido a esta relación causal entre la entrada y la salida, definimos a una función  $f(t)$  como

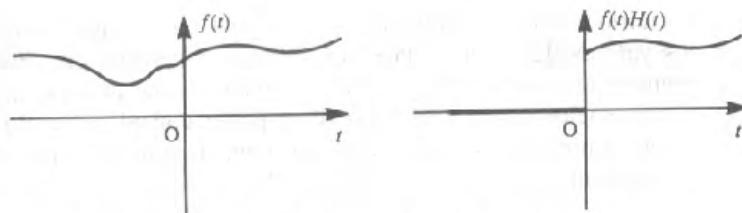


Figura 2.3 Gráfica de  $f(t)$  y su función causal equivalente.

**causal** si  $f(t) = 0(t < 0)$ . Sin embargo, en general, a menos que el dominio esté claramente especificado, una función  $f(t)$  se interpreta normalmente como definida para todos los valores reales, tanto positivos como negativos de  $t$ . Haciendo uso de la función escalón unitario de Heaviside  $H(t)$  (ver también la sección 2.5.1) donde

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

tenemos

$$f(t)H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

Así el efecto de multiplicar  $f(t)$  por  $H(t)$  es convertirla en una función causal. Gráficamente, la relación entre  $f(t)$  y  $f(t)H(t)$  se muestra en la figura 2.3.

Se sigue que la transformada de Laplace correspondiente  $F(s)$  contiene toda la información acerca del comportamiento de  $f(t)H(t)$ . En consecuencia, estrictamente hablando, deberíamos referirnos a  $\{f(t)H(t), F(s)\}$  en vez de  $\{f(t), F(s)\}$  como el par de transformadas de Laplace. Sin embargo, es una práctica común eliminar a  $H(t)$  y suponer que estamos tratando con funciones causales. Debe hacerse notar que es posible calcular la transformada de Laplace de una función no causal  $f(t)$ , reconociendo que toda la información concerniente a su comportamiento para  $t < 0$  se pierde bajo la transformación.

(d) Si el comportamiento de  $f(t)$  para  $t < 0$  es de interés entonces necesitamos la **transformada de Laplace bilateral o de dos lados** de la función  $f(t)$  definida por

$$\mathcal{L}_B\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.3)$$

La transformada de Laplace definida por (2.2) con límite inferior cero es algunas veces llamada la **transformada de Laplace unilateral o de un lado** de la función  $f(t)$ . En este capítulo nos ocuparemos solamente de estas últimas transformadas y nos referiremos a ellas simplemente como la transformada de Laplace de la función  $f(t)$ . Observamos que cuando  $f(t)$  es una función causal

$$\mathcal{L}_B\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

(e) Otro resultado concerniente al cero como límite inferior es la interpretación de  $f(0)$  cuando  $f(t)$  tiene una peculiaridad en el origen. La pregunta que surge entonces es si se debe o no incluir la peculiaridad y tomar el límite inferior como 0– o

excluirlo y tomar el límite inferior como  $0+$  (como una convención  $0-$  y  $0+$  denotan los valores de  $t$  justo a la izquierda y a la derecha del origen respectivamente). Siempre que seamos consistentes, podemos tomar cualquiera, en la práctica ambas interpretaciones son adoptadas. Para poder considerar cualquier peculiaridad que pueda ocurrir en  $t = 0$ , tal como un impulso aplicado en  $t = 0$ , tomamos  $0-$  como el límite inferior e interpretamos (2.2) como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.4)$$

Volveremos a este tema cuando consideremos, en la sección 2.5.8, la respuesta de impulso.

## 2.2.2 Transformaciones de funciones simples

En esta sección obtenemos las transformaciones de Laplace de algunas funciones simples.

### EJEMPLO 2.1

Determine la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = c$$

donde  $c$  es una constante.

**Solución** Utilizando la definición (2.2),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c) &= \int_0^{\infty} e^{-st} c dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} c dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{c}{s} e^{-st} \right]_0^T = \frac{c}{s} \left( 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} \right) \end{aligned}$$

Al tomar  $s = \sigma + j\omega$ , donde  $\sigma$  y  $\omega$  son reales,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{-(\sigma+j\omega)T}) = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\sigma T} (\cos \omega T + j \sin \omega T)$$

El límite finito existe siempre que  $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 0$ , y en tal caso el límite es cero. Así, siempre que  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , la transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}(c) = \frac{c}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

entonces

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= c \\ F(s) &= \frac{c}{s} \end{aligned} \right\} \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (2.5)$$

constituye un ejemplo de un par de transformadas de Laplace.

**EJEMPLO 2.2**

Determine la transformada de Laplace de la función rampa

$$f(t) = t$$

**Solución** Utilizando la definición (2.2),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} t dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{s^2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T e^{-sT}}{s} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT}}{s^2}\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo 2.1, los límites existen siempre que  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , cuando

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T e^{-sT}}{s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT}}{s^2} = 0$$

Así, siempre que  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ,

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

nos da el par de transformadas de Laplace

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = t \\ F(s) = \frac{1}{s^2} \end{array} \right\} \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (2.6)$$

**EJEMPLO 2.3**

Determine la transformada de Laplace de la función exponencial

$$f(t) = e^{kt}$$

**Solución** La definición (2.2) da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-k)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{s-k} [e^{-(s-k)t}]_0^T = \frac{1}{s-k} \left( 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(s-k)T} \right)\end{aligned}$$

Escribiendo  $s = \sigma + j\omega$ , donde  $\sigma$  y  $\omega$  son reales, tenemos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(s-k)T} = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-k)T} e^{j\omega T}$$

Si  $k$  es real, entonces siempre que  $\sigma = \operatorname{Re}(s) > k$ , el límite anterior es cero. Si  $k$  es complejo, digamos  $k = a + jb$ , entonces el límite también será cero, siempre que  $\sigma > a$  (esto es,  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(k)$ ). Bajo estas condiciones, tenemos

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s - k}$$

dándonos el par de transformadas de Laplace

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = e^{kt} \\ F(s) = \frac{1}{s - k} \end{array} \right\} \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(k) \quad (2.7)$$

### EJEMPLO 2.4

Determine la transformada de Laplace de las funciones seno y coseno

$$f(t) = \operatorname{sen} at, \quad g(t) = \cos at$$

donde  $a$  es una constante real.

**Solución** Como

$$e^{iat} = \cos at + j \operatorname{sen} at$$

podemos escribir

$$f(t) = \operatorname{sen} at = \operatorname{Im} e^{iat}$$

$$g(t) = \cos at = \operatorname{Re} e^{iat}$$

Usando esta formulación, las transformadas requeridas pueden ser obtenidas a partir del resultado

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s - k}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(k)$$

del ejemplo 2.3.

Al tomar  $k = ja$  en este resultado se obtiene

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{s - ja}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

o

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{s + ja}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Así, igualando las partes real e imaginaria y suponiendo que  $s$  es real,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \operatorname{Im} \mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \operatorname{Re} \mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Este resultado también se tiene si  $s$  es complejo, dándonos el par de transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Existencia de la transformada de Laplace

Claramente, de la definición (2.2), la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  existe si y sólo si la integral impropia de la definición converge para al menos algunos valores de  $s$ . Los ejemplos de la sección 2.2.2 sugieren que esto está relacionado con el acotamiento de la función, con el factor  $e^{-st}$  en la transformada integral actuando como un factor de convergencia en que los valores permitidos de  $\operatorname{Re}(s)$  son aquellos para los que la integral converge. Para poder establecer condiciones suficientes sobre  $f(t)$  para la existencia de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , primero introducimos la definición de una función de orden exponencial.

#### DEFINICIÓN 2.1

Decimos que una función  $f(t)$  es de **orden exponencial** cuando  $t \rightarrow \infty$  si existen un número real  $\sigma$  y constantes positivas  $M$  y  $T$  tales que

$$|f(t)| < M e^{\sigma t}$$

para todo  $t > T$ .

Lo que nos dice esta definición es que una función  $f(t)$  es de orden exponencial si no crece más rápido que una función exponencial de la forma  $M e^{\sigma t}$ . Afortunadamente la mayoría de las funciones de significado práctico satisfacen este requerimiento, y por tanto son de orden exponencial. Sin embargo, hay funciones que no son de orden exponencial, un ejemplo de ellas es  $e^{t^2}$ , ya que crece más rápidamente que  $M e^{\sigma t}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  cualesquiera que sean los valores de  $M$  y  $\sigma$ .

#### EJEMPLO 2.5

La función  $f(t) = e^{3t}$  es de orden exponencial, con  $\sigma \geq 3$ .

#### EJEMPLO 2.6

Verifique que la función  $f(t) = t^3$  ( $t \geq 0$ ) es de orden exponencial.

**Solución** Dado que

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{1}{2} \alpha^2 t^2 + \frac{1}{6} \alpha^3 t^3 + \dots$$

se sigue que para cualquier  $\alpha > 0$

$$t^3 < \frac{6}{\alpha^3} e^{\sigma t}$$

así que  $t^3$  es de orden exponencial, con  $\sigma > 0$ .

De los ejemplos 2.5 y 2.6 se sigue que la elección de  $\sigma$  en la definición 2.1 no es única para una función particular. Por esta razón, definimos la **abscisa de convergencia** de  $f(t)$  como la máxima cota inferior  $\sigma_c$  del conjunto de valores posibles de  $\sigma$ . Así, en el caso de la función  $f(t) = e^{3t}$ ,  $\sigma_c = 3$ , mientras que en el caso de la función  $f(t) = t^3$ ,  $\sigma_c = 0$ .

Regresando a la definición de la transformada de Laplace dada por (2.2), se sigue que si  $f(t)$  es una función continua y si también es de orden exponencial con abscisa de convergencia  $\sigma_c$ , de manera que

$$|f(t)| < M e^{\sigma t}, \quad \sigma > \sigma_c$$

entonces, al tomar, en la definición 2.1,  $T = 0$

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-st}| |f(t)| dt$$

Escribiendo  $s = \sigma + j\omega$ , donde  $\sigma$  y  $\omega$  son reales, como  $|e^{-j\omega t}| = 1$ , tenemos

$$|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}| |e^{-j\omega t}| = |e^{-\sigma t}| = e^{-\sigma t}$$

así que

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq \int_0^\infty e^{-\sigma t} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{\sigma_d t} dt, \quad \sigma_d > \sigma_c \\ &= M \int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_d)t} dt \end{aligned}$$

Esta última integral es finita siempre que  $\sigma = \operatorname{Re}(s) > \sigma_d$ . Como  $\sigma_d$  puede elegirse arbitrariamente para que  $\sigma_d > \sigma_c$  concluimos que  $F(s)$  existe para  $\sigma > \sigma_c$ . Así una función continua  $f(t)$  de orden exponencial, con abscisa de convergencia  $\sigma_c$ , tiene una transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_c$$

donde, en la figura 2.4, se muestra la región de convergencia.

De hecho, el requerimiento de que  $f(t)$  sea continua no es esencial y puede relajarse a que  $f(t)$  sea continua a pedazos, como se definió en la sección 8.6.1 de *Modern Engineering Mathematics*; esto es,  $f(t)$  debe tener sólo un número finito de discontinuidades finitas, siendo continua y acotada en otra parte.

Concluimos esta sección formulando un teorema que asegura la existencia de una transformada de Laplace.

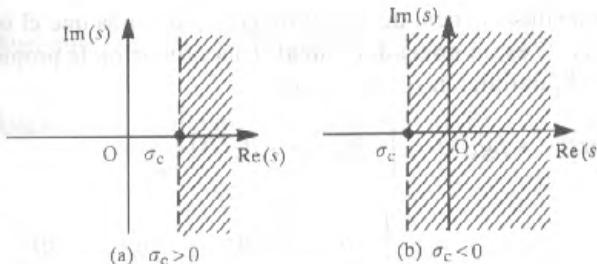


Figura 2.4 Región de convergencia para  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ;  $\sigma_c$  es la abscisa de convergencia para  $f(t)$ .

## TEOREMA 2.1

### Existencia de la transformada de Laplace

Si la función causal  $f(t)$  es continua a pedazos en  $[0, \infty]$  y es de orden exponencial, con abscisa de convergencia  $\sigma_c$ , entonces existe la transformada de Laplace con región de convergencia  $\text{Re}(s) > \sigma_c$  en el dominio  $s$ ; esto es

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re}(s) > \sigma_c \quad \square$$

Las condiciones de este teorema son *suficientes* para asegurar la existencia de la transformada de Laplace de una función. Sin embargo, no constituyen condiciones *necesarias* para la existencia de tal transformación y no se sigue que si las condiciones no son satisfechas entonces no exista una transformación. De hecho, las condiciones son más restrictivas que lo necesario, ya que existen funciones con infinidad de discontinuidades que poseen transformada de Laplace.

## 2.2.4 Propiedades de la transformada de Laplace

En esta sección consideraremos algunas de las propiedades de la transformada de Laplace que nos ayudarán a encontrar pares de transformadas  $\{f(t), F(s)\}$ , sin tener que calcularlas directamente usando la definición. En las secciones siguientes desarrollaremos más propiedades cuando surja la necesidad.

### Propiedad 2.1: La propiedad de linealidad

Una propiedad fundamental de la transformada de Laplace es su linealidad, que puede ser enunciada como sigue:

**Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones que tienen transformadas de Laplace y si  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes cualesquiera entonces**

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Como una consecuencia de esta propiedad, decimos que el operador transformada de Laplace  $\mathcal{L}$  es un **operador lineal**. Una prueba de la propiedad se sigue directamente de la definición (2.2), ya que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \alpha f(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \beta g(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

Respecto a la región de convergencia, si  $f(t)$  y  $g(t)$  tienen abscisas de convergencia  $\sigma_f$  y  $\sigma_g$  respectivamente, y  $\sigma_1 > \sigma_f$ ,  $\sigma_2 > \sigma_g$ , entonces

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}, \quad |g(t)| \leq M_2 e^{\sigma_2 t}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}|\alpha f(t) + \beta g(t)| &\leq |\alpha| |f(t)| + |\beta| |g(t)| \\ &\leq |\alpha| M_1 e^{\sigma_1 t} + |\beta| M_2 e^{\sigma_2 t} \\ &\leq (|\alpha| M_1 + |\beta| M_2) e^{\sigma t}\end{aligned}$$

donde  $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$ , así que la abscisa de convergencia de una combinación lineal  $\alpha f(t) + \beta g(t)$  es menor o igual al máximo de las combinaciones de  $f(t)$  y  $g(t)$ .

Esta propiedad de linealidad puede extenderse claramente a una combinación lineal de cualquier número finito de funciones.

### EJEMPLO 2.7

Determine  $\mathcal{L}\{3t + 2e^{3t}\}$ .

**Solución** Usando los resultados dados en (2.6) y (2.7),

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3}, \quad \operatorname{Re}(s) > 3$$

así, por la propiedad de linealidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3t + 2e^{3t}\} &= 3\mathcal{L}\{t\} + 2\mathcal{L}\{e^{3t}\} \\ &= \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s-3}, \quad \operatorname{Re}(s) > \max\{0, 3\} \\ &= \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s-3}, \quad \operatorname{Re}(s) > 3\end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.8**

Determine  $\mathcal{L}\{5 - 3t + 4 \operatorname{sen} 2t - 6e^{4t}\}$ .

**Solución** Usando los resultados dados en (2.5)–(2.8),

$$\mathcal{L}\{5\} = \frac{5}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad \mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s - 4}, \quad \operatorname{Re}(s) > 4$$

así, por la propiedad de linealidad,

$$\mathcal{L}\{5 - 3t + 4 \operatorname{sen} 2t - 6e^{4t}\} = \mathcal{L}\{5\} - 3\mathcal{L}\{t\} + 4\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} - 6\mathcal{L}\{e^{4t}\}$$

$$= \frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{8}{s^2 + 4} - \frac{6}{s - 4}, \quad \operatorname{Re}(s) > \max\{0, 4\}$$

$$= \frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{8}{s^2 + 4} - \frac{6}{s - 4}, \quad \operatorname{Re}(s) > 4$$

La primera propiedad de traslación es otra propiedad que nos permite añadir más combinaciones a nuestro repertorio de pares de transformadas de Laplace. Así como con la propiedad de linealidad, ésta probará ser de considerable importancia en nuestras discusiones posteriores, particularmente cuando consideremos la inversión de las transformadas de Laplace.

**Propiedad 2.2: La primera propiedad de traslación**

La propiedad está contenida en el siguiente teorema, conocido usualmente como el **primer teorema de traslación** o algunas veces como el **teorema de la modulación exponencial**.

**TEOREMA 2.2****Primer teorema de traslación**

Si  $f(t)$  es una función que tiene una transformada de Laplace  $F(s)$ , con  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_e$ , entonces la función  $e^{at}f(t)$  también tiene una transformada de Laplace dada por

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_e + \operatorname{Re}(a)$$

**Demostración**

Una prueba de este teorema se sigue directamente de la definición de transformada de Laplace, ya que

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt$$

Entonces, como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_c$$

vemos que la última integral de arriba está estructurada exactamente como la transformada de Laplace de  $f(t)$  excepto que  $s - a$  toma el lugar de  $s$ , así que

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \quad \operatorname{Re}(s - a) > \sigma_c$$

o

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_c + \operatorname{Re}(a) \quad \square$$

Una manera alternativa para expresar el resultado del teorema 2.2, que puede ser más conveniente para aplicaciones, es

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = [\mathcal{L}\{f(t)\}]_{s \rightarrow s-a} = [F(s)]_{s \rightarrow s-a}$$

En otras palabras, el teorema dice que la transformada de Laplace de  $e^{at}$  veces una función  $f(t)$  es igual a la transformada de Laplace de  $f(t)$  reemplazando  $s$  con  $s - a$ .

### EJEMPLO 2.9

Determine  $\mathcal{L}\{t e^{-2t}\}$ .

#### Solución

Del resultado dado en (2.6),

$$\mathcal{L}\{t\} = F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

así, por el primer teorema de traslación,

$$\mathcal{L}\{te^{-2t}\} = F(s+2) = [F(s)]_{s \rightarrow s+2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 - 2$$

esto es,

$$\mathcal{L}\{t e^{-2t}\} = \frac{1}{(s+2)^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -2$$

### EJEMPLO 2.10

Determine  $\mathcal{L}\{e^{-3t} \operatorname{sen} 2t\}$ .

#### Solución

Del resultado (2.8),

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

así, por el primer teorema de traslación,

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \operatorname{sen} 2t\} = F(s+3) = [F(s)]_{s \rightarrow s+3}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 - 3$$

esto es,

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \operatorname{sen} 2t\} = \frac{2}{(s+3)^2 + 4} = \frac{2}{s^2 + 6s + 13}, \quad \operatorname{Re}(s) > -3$$

La función  $e^{-3t} \sin 2t$  en el ejemplo 2.10 es un miembro de una clase general de funciones llamadas **senoidales amortiguadas**. Estas juegan un papel importante en el estudio de la ingeniería de sistemas, particularmente en el análisis de vibraciones. Por esta razón, añadimos los dos siguientes miembros generales de la clase a nuestra biblioteca estándar de pares de transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-kt} \sin at\} = \frac{a}{(s+k)^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -k \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-kt} \cos at\} = \frac{s+k}{(s+k)^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -k \quad (2.11)$$

donde en ambos casos  $k$  y  $a$  son constantes reales.

### Propiedad 2.3: La propiedad de la derivada de la transformada

Esta propiedad relaciona operaciones en el dominio tiempo con aquellas en el dominio transformado  $s$ , pero inicialmente las consideraremos como un método para incrementar nuestro repertorio de pares de transformadas de Laplace. La propiedad algunas veces también es conocida como la propiedad de la **multiplicación por  $t$** . En el siguiente teorema está contenido un enunciado de esta propiedad.

### TEOREMA 2.3

#### Derivada de la transformada

Si  $f(t)$  es una función cuya transformada de Laplace es

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_c$$

entonces la función  $t^n f(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) también tiene transformada de Laplace dada por

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_c$$

#### Demostración

Por definición

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

así que

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Debido a las propiedades de convergencia de la integral impropia involucrada, podemos intercambiar las operaciones de diferenciación e integración y diferenciación con respecto a  $s$  bajo el signo de la integral. Así

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \int_0^\infty \frac{d^n}{ds^n} [e^{-st} f(t)] dt$$

la cual, efectuando la diferenciación repetida, da

Por lo tanto, la transformada de Laplace con  $\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n f(t) dt$  es  $= (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$ ,  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_c$ . La región de convergencia queda igual.  $\square$

En otras palabras, el teorema 2.3 dice que diferenciar la transformada de una función con respecto a  $s$  es equivalente a multiplicar la función por  $-t$ . Al igual que con las propiedades anteriores, podemos usar este resultado para aumentar nuestros pares de transformadas de Laplace.

**EJEMPLO 2.11**

Determine  $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} 3t\}$ .

**Solución**

Usando el resultado (2.8),

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\} = F(s) = \frac{3}{s^2 + 9}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

así, por el teorema de la derivada

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} 3t\} = -\frac{dF(s)}{ds} = \frac{6s}{(s^2 + 9)^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

**EJEMPLO 2.12**

Determine  $\mathcal{L}\{t^2 e^t\}$ .

**Solución**

Usando el resultado (2.7),

$$\mathcal{L}\{e^t\} = F(s) = \frac{1}{s-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

así, por el teorema de la derivada,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^2 e^t\} &= (-1)^2 \frac{d^2 F(s)}{ds^2} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s-1} \right) \\ &= (-1) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{(s-1)^2} \right) = \frac{2}{(s-1)^3}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1 \end{aligned}$$

Observe que es más fácil deducir el resultado usando el primer teorema de translación.

**EJEMPLO 2.13**

Determine  $\mathcal{L}\{t^n\}$ , donde  $n$  es un entero positivo.

**Solución**

Usando el resultado (2.5),

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

así, por el teorema de la derivada,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

## 2.2.5 Tabla de transformadas de Laplace

Es apropiado en este momento recopilar los resultados hasta ahora probados para tener un fácil acceso a ellos. Esto lo hacemos en la forma de dos tablas cortas. La figura 2.5(a) contiene una lista de algunos de los pares de transformadas de Laplace y la figura 2.5(b) registra las propiedades hasta aquí consideradas.

(a)	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Región de convergencia
	$c, c$ una constante	$\frac{c}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
	$t^n, n$ un entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
	$e^{kt}, k$ una constante	$\frac{1}{s - k}$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(k)$
	$\sin at, a$ una constante real	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
	$\cos at, a$ una constante real	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
	$e^{-kt} \sin at, k$ y $a$ constantes reales	$\frac{a}{(s + k)^2 + a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -k$
	$e^{-kt} \cos at, k$ y $a$ constantes reales	$\frac{s + k}{(s + k)^2 + a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -k$

$$(b) \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_1 \text{ y } \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_2$$

$$\text{Linealidad:} \quad \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\text{Primer teorema de traslación:} \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_1 + \operatorname{Re}(a)$$

Derivada de una transformación:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_1$$

Figura 2.5 (a) Tabla de pares de transformadas de Laplace; (b) algunas propiedades de la transformada de Laplace.

## 2.2.6 Ejercicios

- 1 Use la definición de transformada de Laplace para obtener las transformadas de  $f(t)$  cuando  $f(t)$  está dada por  
 (a)  $\cosh 2t$     (b)  $t^2$     (c)  $3 + t$     (d)  $te^{-t}$   
 establezca la región de convergencia en cada caso.

- 2 ¿Cuáles son las abscisas de convergencia de las siguientes funciones?

- (a)  $e^{5t}$     (b)  $e^{-3t}$   
 (c)  $\operatorname{sen} 2t$     (d)  $\operatorname{senh} 3t$   
 (e)  $\cosh 2t$     (f)  $t^4$   
 (g)  $e^{-5t} + t^2$     (h)  $3 \cos 2t - t^3$   
 (i)  $3e^{7t} - 2e^{-2t} + \operatorname{sen} 2t$     (j)  $\operatorname{senh} 3t + \operatorname{sen} 3t$

- 3 Usando los resultados mostrados en la figura 2.5, obtenga las transformadas de Laplace de las siguientes funciones, estableciendo la región de convergencia:

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| (a) $5 - 3t$                              | (b) $7t^3 - 2 \operatorname{sen} 3t$ |
| (c) $3 - 2t + 4 \cos 2t$                  | (d) $\cosh 3t$                       |
| (e) $\operatorname{senh} 2t$              | (f) $5e^{2t} + 3 - 2 \cos 2t$        |
| (g) $4te^{-2t}$                           | (h) $2e^{-3t} \operatorname{sen} 2t$ |
| (i) $t^2 e^{-4t}$                         | (j) $6t^3 - 3t^2 + 4t - 2$           |
| (k) $2 \cos 3t + 5 \operatorname{sen} 3t$ | (l) $t \cos 2t$                      |
| (m) $t^2 \operatorname{sen} 3t$           | (n) $t^2 - 3 \cos 4t$                |
| (o) $t^2 e^{-2t} + e^{-t} \cos 2t + 3$    |                                      |

## 2.2.7 La transformada inversa

El símbolo  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  denota una función causal  $f(t)$  cuya transformada de Laplace es  $F(s)$ , esto es:

$$\text{si } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ entonces } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Esta correspondencia entre las funciones  $F(s)$  y  $f(t)$  es llamada la **transformación inversa de Laplace**, siendo  $f(t)$  la **transformada inversa** de  $F(s)$ , llamamos a  $\mathcal{L}^{-1}$  el **operador transformación inversa de Laplace**. Estas relaciones están dibujadas en la figura 2.6.

Como señalamos en la observación (c) de la sección 2.2.1, la transformada de Laplace  $F(s)$  sólo determina el comportamiento de  $f(t)$  para  $t \geq 0$ . Así  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$  sólo para  $t \geq 0$ . Cuando escribimos  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ , suponemos que  $t \geq 0$  así que, estrictamente hablando, deberíamos escribir

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)H(t) \quad (2.12)$$

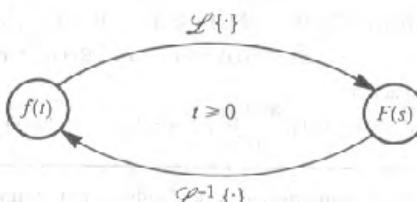


Figura 2.6 La transformada de Laplace y su inversa.

**EJEMPLO 2.14**

Como

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$$

**EJEMPLO 2.15**

Como

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} = \sin \omega t$$

La propiedad de linealidad para la transformada de Laplace (propiedad 2.1) establece que si  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s)\end{aligned}$$

Entonces se sigue de la definición anterior que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} &= \alpha f(t) + \beta g(t) \\ &= \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\end{aligned}$$

así que el operador inverso de la transformada de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  también es un operador lineal.

**2.2.8****Evaluación de transformadas inversas**

La manera más obvia de encontrar la transformada inversa de la función  $F(s)$  es hacer uso de una tabla de transformadas tal como la dada en la figura 2.5. Algunas veces es posible escribir la transformada inversa directamente a partir de la tabla, pero es más frecuente que sea necesario primero hacer alguna manipulación algebraica sobre  $F(s)$ . En particular, frecuentemente necesitamos determinar la transformada inversa de una función racional de la forma  $p(s)/q(s)$ , donde  $p(s)$  y  $q(s)$  son polinomios en  $s$ . En tales casos, el procedimiento consiste en desarrollar primero la función en fracciones parciales y después usar la tabla de transformadas.

**EJEMPLO 2.16**

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\}$$

**Solución** Desarrollando  $1/(s+3)(s-2)$  en fracciones parciales da

$$\frac{1}{(s+3)(s-2)} = \frac{-\frac{1}{5}}{s+3} + \frac{\frac{1}{5}}{s-2}$$

Usando el resultado  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+a)\} = e^{-at}$  junto con la propiedad de linealidad tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\} = -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$$

**EJEMPLO 2.17**

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s^2+9)}\right\}$$

**Solución** Resolviendo  $(s+1)/s^2(s^2+9)$  en fracciones parciales da

$$\begin{aligned}\frac{s+1}{s^2(s^2+9)} &= \frac{\frac{1}{9}}{s} + \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{1}{9}\frac{s+1}{s^2+9} \\ &= \frac{\frac{1}{9}}{s} + \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+3^2} - \frac{1}{27}\frac{3}{s^2+3^2}\end{aligned}$$

Usando los resultados de la figura 2.5 junto con la propiedad de linealidad, tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s^2+9)}\right\} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}t - \frac{1}{9}\cos 3t - \frac{1}{27}\sin 3t$$

**2.2.9 Inversión usando el primer teorema de traslación**

En el teorema 2.2 vimos que si  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$  entonces, para un escalar  $a$ ,  $F(s-a)$  es la transformada de Laplace de  $e^{at}f(t)$ . Normalmente, este teorema causa poca dificultad cuando se usa para obtener transformadas de Laplace de funciones, pero es difícil de aplicar cuando es usado para obtener las transformadas inversas. Expresado en la forma inversa, el teorema se convierte en

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

La notación

$$\mathcal{L}^{-1}\{[F(s)]_{s \rightarrow s-a}\} = e^{at}[f(t)],$$

donde  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  y  $[F(s)]_{s \rightarrow s-a}$  denota que  $s$  en  $F(s)$  es reemplazado por  $s-a$ , puede hacer la relación más clara.

### EJEMPLO 2.18

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

**Solución**

$$\frac{1}{(s+2)^2} = \left[\frac{1}{s^2}\right]_{s \rightarrow s+2}$$

y, como  $1/s^2 = \mathcal{L}\{t\}$ , el primer teorema de traslación da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = t e^{-2t}$$

### EJEMPLO 2.19

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 6s + 13}\right\}$$

**Solución**

$$\frac{2}{s^2 + 6s + 13} = \frac{2}{(s+3)^2 + 4} = \left[\frac{2}{s^2 + 2^2}\right]_{s \rightarrow s+3}$$

y, como  $2/(s^2 + 2^2) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}$ , el primer teorema de traslación da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 6s + 13}\right\} = e^{-3t} \operatorname{sen} 2t$$

### EJEMPLO 2.20

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2 + 2s + 5}\right\}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{s+7}{s^2 + 2s + 5} &= \frac{s+7}{(s+1)^2 + 4} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 4} + 3 \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \\ &= \left[\frac{s}{s^2 + 2^2}\right]_{s \rightarrow s+1} + 3 \left[\frac{2}{s^2 + 2^2}\right]_{s \rightarrow s+1} \end{aligned}$$

Como  $s/(s^2 + 2^2) = \mathcal{L}\{\cos 2t\}$  y  $2/(s^2 + 2^2) = \mathcal{L}\{\sin 2t\}$ , el primer teorema de traslación da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s+5}\right\} = e^{-t} \cos 2t + 3e^{-t} \sin 2t$$

### EJEMPLO 2.21

Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}\right\}$$

**Solución** Desarrollando  $1/(s+1)^2(s^2+4)$  en fracciones parciales da

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} &= \frac{\frac{2}{25}}{s+1} + \frac{\frac{1}{5}}{(s+1)^2} - \frac{1}{25} \frac{2s+3}{s^2+4} \\ &= \frac{\frac{2}{25}}{s+1} + \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{s^2} \right]_{s \rightarrow s+1} - \frac{2}{25} \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{3}{50} \frac{2}{s^2+2^2}\end{aligned}$$

Como  $1/s^2 = \mathcal{L}\{t\}$ , el primer teorema de traslación junto con los resultados de la figura 2.5, da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}\right\} = \frac{2}{25} e^{-t} + \frac{1}{5} e^{-t} t - \frac{2}{25} \cos 2t - \frac{3}{50} \sin 2t$$

## 2.2.10 Ejercicios

4 Encuentre  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  donde  $F(s)$  está dada por

(a)  $\frac{1}{(s+3)(s+7)}$

(b)  $\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}$

(c)  $\frac{s-1}{s^2(s+3)}$

(d)  $\frac{2s+6}{s^2+4}$

(e)  $\frac{1}{s^2(s^2+16)}$

(f)  $\frac{s+8}{s^2+4s+5}$

(g)  $\frac{s+1}{s^2(s^2+4s+8)}$

(i)  $\frac{s+7}{s^2+2s+5}$

(h)  $\frac{4s}{(s-1)(s+1)^2}$

(j)  $\frac{3s^2-7s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}$

(k)  $\frac{5s-7}{(s+3)(s^2+2)}$

(l)  $\frac{s}{(s-1)(s^2+2s+2)}$

(m)  $\frac{s-1}{s^2+2s+5}$

(n)  $\frac{s-1}{(s-2)(s-3)(s-4)}$

(o)  $\frac{3s}{(s-1)(s^2-4)}$

(p)  $\frac{36}{s(s^2+1)(s^2+9)}$

(q)  $\frac{2s^2+4s+9}{(s+2)(s^2+3s+3)}$

(r)  $\frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+10)}$

## 2.3

# Solución de ecuaciones diferenciales

Primero consideraremos las transformadas de Laplace de derivadas e integrales y después aplicaremos éstas en la solución de ecuaciones diferenciales.

## 2.3.1

## Transformadas de derivadas

Si vamos a usar los métodos de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, necesitamos encontrar expresiones convenientes para las transformadas de Laplace de derivadas tales como  $\frac{df}{dt}$ ,  $\frac{d^2f}{dt^2}$  o, en general,  $\frac{d^n f}{dt^n}$ . Por definición

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt$$

Integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= [e^{-st} f(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) + f(0) \quad (2.13)$$

Al tomar la transformada de Laplace de una derivada hemos supuesto que  $f(t)$  es continua en  $t = 0$ , así que  $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$ . En la sección 2.5.8 cuando consideremos la función impulso,  $f(0^-) \neq f(0^+)$  y tendremos que recurrir a un cálculo más generalizado para resolver el problema.

La ventaja de usar la transformada de Laplace cuando tratamos con ecuaciones diferenciales puede verse rápidamente ya que nos permite reemplazar la operación de diferenciación en el dominio tiempo por una operación algebraica sencilla en el dominio  $s$ .

Observe que para deducir el resultado (2.13) hemos supuesto que  $f(t)$  es continua, con una derivada continua a pedazos  $\frac{df}{dt}$ , para  $t \geq 0$  y que también es de orden exponencial cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Asimismo, si  $f(t)$  y  $\frac{df}{dt}$  son continuas en  $t \geq 0$  y son de orden exponencial cuando  $t \rightarrow \infty$ , y  $\frac{d^2f}{dt^2}$  es continua a pedazos para  $t \geq 0$ , entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2f}{dt^2} dt = \left[ e^{-st} \frac{df}{dt} \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt = -\left[ \frac{df}{dt} \right]_{t=0} + s \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}$$

que al usar (2.12) da

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = -\left[\frac{df}{dt}\right]_{t=0} + s[sF(s) - f(0)]$$

llegando al resultado

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \left[\frac{df}{dt}\right]_{t=0} = s^2F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0) \quad (2.14)$$

Claramente, suponiendo que  $f(t)$  y su derivada satisfacen las condiciones requeridas, este procedimiento puede ser extendido para obtener la transformada de Laplace de  $f^{(n)}(t) = d^n f/dt^n$  en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

un resultado que puede ser probado, sin esfuerzo, por inducción.

De nuevo, observemos que en la determinación de la transformada de Laplace de  $f^{(n)}(t)$  hemos supuesto que  $f^{(n-1)}(t)$  es continua.

### 2.3.2 Transformada de integrales

En algunas aplicaciones, el comportamiento de un sistema puede ser representado por una **ecuación integro-diferencial**, que es una ecuación que contiene tanto derivadas como integrales de una incógnita variable. Por ejemplo, la corriente  $i$  en un circuito eléctrico en serie que consiste de una resistencia  $R$ , una inductancia  $L$  y una capacitancia  $C$ , y sujeto a un voltaje aplicado  $E$ , está dada por

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E$$

Para resolver directamente tales ecuaciones, es conveniente poder obtener la transformada de Laplace de integrales tales como  $\int_0^t f(\tau) d\tau$ .

Escribiendo

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

tenemos

$$\frac{dg}{dt} = f(t), \quad g(0) = 0$$

Tomando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

que, usando (2.13), da

$$sG(s) = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

llegando al resultado

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}F(s) \quad (2.16)$$

## EJEMPLO 2.22

Obtenga

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (\tau^3 + \operatorname{sen} 2\tau) d\tau\right\}$$

En este caso  $f(t) = t^3 + \operatorname{sen} 2t$ , dando

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}$$

$$= \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^2+4}$$

así, por (2.16),

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (\tau^3 + \operatorname{sen} 2\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) = \frac{6}{s^5} + \frac{2}{s^3(s^2+4)}$$

en el mismo sentido que en el Ejemplo 2.21, se obtiene la transformada de Laplace de la integral definida.

### 2.3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que contiene una o más derivadas de una función de una sola variable.

Habiendo obtenido expresiones para la transformada de Laplace de derivadas, estamos ahora en posición de usar los métodos de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. Para ilustrar esto, consideraremos la ecuación diferencial general lineal de segundo orden

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = u(t) \quad (t \geq 0) \quad (2.17)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$  donde como es usual el punto denota diferenciación con respecto al tiempo  $t$ . Tal ecuación diferencial puede modelar la dinámica de algún sistema para el cual la variable  $x(t)$  determina la **respuesta** del sistema al término  $u(t)$  de **compulsión o excitación**. Los términos **sistema de entrada** y **sistema de salida** también son usados frecuentemente para  $u(t)$  y  $x(t)$  respectivamente. Como la ecuación diferencial es lineal y tiene coeficientes constantes, un sistema caracterizado por tal modelo se llama un **sistema lineal invariante en el tiempo**.

Al tomar la transformada de Laplace de cada término en (2.17) se obtiene

$$a\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + b\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + c\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

que usando (2.13) y (2.14) lleva a

$$a[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + cX(s) = U(s)$$

Reorganizando da

$$(as^2 + bs + c)X(s) = U(s) + (as + b)x_0 + av_0$$

así que

$$X(s) = \frac{U(s) + (as + b)x_0 + av_0}{as^2 + bs + c} \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) determina la transformada de Laplace  $X(s)$  de la respuesta, de donde, tomando la transformada inversa, puede obtenerse la respuesta en el tiempo deseada  $x(t)$ .

Antes de considerar ejemplos específicos, hay algunas observaciones qué hacer en este momento.

(a) Como ya hemos observado en el sección 2.3.1, una ventaja distintiva al usar la transformada de Laplace es que nos permite reemplazar la operación de diferenciación por una operación algebraica. Consecuentemente, al tomar la transformada de Laplace de cada término de una ecuación diferencial, ésta es convertida en una ecuación algebraica en la variable  $s$ . Entonces ésta puede ser manipulada usando reglas algebraicas para obtener una expresión para la transformada de Laplace de la respuesta; la respuesta en el tiempo deseada es obtenida entonces tomando la transformada inversa.

(b) El método de la transformada de Laplace produce la solución completa de la ecuación diferencial lineal con las condiciones iniciales automáticamente incluidas. Esto contrasta con el tratamiento del tema clásico en donde la solución general consiste de dos componentes, la **función complementaria** y la **integral particular**, con las condiciones iniciales que determinan las constantes indeterminadas asociadas con la función complementaria. Cuando la solución se expresa en la forma general (2.18), la inversión del término que involucra  $U(s)$  conduce a una integral particular mientras que los que involucran a  $x_0$  y  $v_0$  dan una función complementaria. Un problema secundario pero útil es que la solución explícita obtenida refleja las condiciones iniciales.

(c) El método de la transformada de Laplace se adapta idealmente para resolver problemas con valor inicial, esto es, las ecuaciones diferenciales lineales en donde están especificadas todas las condiciones iniciales  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ , y así sucesivamente.

en el tiempo  $t = 0$ . El método es menos atractivo para problemas con valores en la frontera, cuando no todas las condiciones en  $x(t)$  y sus derivadas están especificadas en  $t = 0$ , pero algunas están especificadas en otros valores de la variable independiente. Sin embargo, todavía puede utilizar el método de la transformada de Laplace si asigna constantes arbitrarias a una o más de las condiciones iniciales y después determina sus valores usando las condiciones de frontera dadas.

(d) Debe notarse que el denominador del lado derecho de (2.18) es el lado izquierdo de (2.17) reemplazando el operador  $d/dt$  con  $s$ . El denominador igualado a cero también corresponde a la ecuación auxiliar o ecuación característica usada en el tratamiento clásico. Dado un problema con valor inicial específico, el proceso de obtener una solución usando los métodos de la transformada de Laplace es bastante directo y está ilustrado por el ejemplo 2.23.

**EJEMPLO 2.23**

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 2e^{-t} \quad (t \geq 0)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $x = 1$  y  $dx/dt = 0$  en  $t = 0$ .

**Solución** Al aplicar la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 6\mathcal{L}\{x\} = 2\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

llegamos a la ecuación transformada

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 5[sX(s) - x(0)] + 6X(s) = \frac{2}{s+1}$$

que con una reorganización da

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = \frac{2}{s+1} + (s+5)x(0) + \dot{x}(0)$$

Incorporando las condiciones iniciales dadas  $x(0) = 1$  y  $\dot{x}(0) = 0$  llegamos a

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = \frac{2}{s+1} + s + 5$$

Esto es,

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{s+5}{(s+3)(s+2)}$$

Al desarrollar los términos racionales en fracciones parciales se tiene

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Tomando las transformadas inversas, da la solución deseada

$$x(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

En principio, el procedimiento adoptado en el ejemplo 2.23 para resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes puede ser aplicado fácilmente a ecuaciones diferenciales de orden superior. Una ecuación diferencial general lineal de orden  $n$  puede ser escrita como

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = u(t) \quad (t \geq 0) \quad (2.19)$$

donde  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  son constantes, con  $a_n \neq 0$ . Esto puede ser escrito en forma más concisa como

$$q(D)x(t) = u(t) \quad (2.20)$$

donde  $D$  denota el operador  $d/dt$  y  $q(D)$  es el operador polinomial

$$q(D) = \sum_{r=0}^n a_r D^r$$

El objetivo consiste en determinar la respuesta  $x(t)$  para una función de excitación  $u(t)$  sujeta al conjunto dado de condiciones iniciales

$$D^r x(0) = \left[ \frac{d^r x}{dt^r} \right]_{t=0} = c_r \quad (r = 0, 1, \dots, n-1)$$

Tomando las transformadas de Laplace en (2.20) y procediendo como antes llegamos a

$$X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

donde

$$p(s) = U(s) + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{i=r+1}^n a_i s^{i-r-1}$$

Entonces, en principio, tomando la transformada inversa, la respuesta deseada  $x(t)$  puede obtenerse como

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} \right\}$$

Para ecuaciones diferenciales de orden superior el proceso de realizar esta inversión puede resultar bastante tediosa, y conviene usar métodos matriciales.

Para concluir esta sección, se han desarrollado algunos ejemplos resueltos para consolidar la comprensión de este método para resolver ecuaciones diferenciales lineales.

**EJEMPLO 2.24**

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 9x = \operatorname{sen} t \quad (t \geq 0)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $x = 0$  y  $dx/dt = 0$  en  $t = 0$ .

**Solución** Al aplicar la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 6\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 9\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}$$

llegamos a la ecuación

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 6[sX(s) - x(0)] + 9X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

que reorganizando da

$$(s^2 + 6s + 9)X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + (s + 6)x(0) + \dot{x}(0)$$

Incorporando las condiciones iniciales dadas  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  llegamos a

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 3)^2}$$

Al desarrollar en fracciones parciales se tiene

$$X(s) = \frac{3}{50} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{10} \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{2}{25} \frac{1}{s^2+1} - \frac{3}{50} \frac{s}{s^2+1}$$

esto es,

$$X(s) = \frac{3}{50} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{10} \left[ \frac{1}{s^2+1} \right]_{s \rightarrow -3+0} + \frac{2}{25} \frac{1}{s^2+1} - \frac{3}{50} \frac{s}{s^2+1}$$

Tomando las transformadas inversas, usando el primer teorema de traslación, llegamos a la solución deseada

$$x(t) = \frac{3}{50} e^{-3t} + \frac{1}{10} t e^{-3t} + \frac{2}{25} \operatorname{sen} t - \frac{3}{50} \cos t \quad (t \geq 0)$$

**EJEMPLO 2.25** Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 17 \frac{dx}{dt} + 13x = 1 \quad (t \geq 0)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $x = dx/dt = 1$  y  $d^2x/dt^2 = 0$  en  $t = 0$ .

**Solución** Al aplicar la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3x}{dt^3}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 17\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 13\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{1\}$$

llegamos a la ecuación

$$\begin{aligned}s^3X(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) + 5[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] \\ + 17[sX(s) - x(0)] + 13X(s) = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

que reorganizando da

$$(s^3 + 5s^2 + 17s + 13)X(s) = \frac{1}{s} + (s^2 + 5s + 17)x(0) + (s + 5)\dot{x}(0) + \ddot{x}(0)$$

Incorporando las condiciones iniciales dadas  $x(0) = \dot{x}(0) = 1$  y  $\ddot{x}(0) = 0$  llegamos a

$$X(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 22s + 1}{s(s^3 + 5s^2 + 17s + 13)}$$

Claramente  $s + 1$  es un factor de  $s^3 + 5s^2 + 17s + 13$ , y por división algebraica tenemos

$$X(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 22s + 1}{s(s+1)(s^2 + 4s + 13)}$$

Al desarrollar en fracciones parciales,

$$X(s) = \frac{\frac{1}{13}}{s} + \frac{\frac{8}{5}}{s+1} - \frac{1}{65} \frac{44s+7}{s^2+4s+13} = \frac{\frac{1}{13}}{s} + \frac{\frac{8}{5}}{s+1} - \frac{1}{65} \frac{44(s+2)-27(3)}{(s+2)^2+3^2}$$

Tomando las transformadas inversas, usando el primer teorema de traslación, llegamos a la solución deseada

$$x(t) = \frac{1}{13} + \frac{8}{5}e^{-t} - \frac{1}{65}e^{-2t}(44 \cos 3t - 27 \operatorname{sen} 3t) \quad (t \geq 0)$$

### 2.3.4 Ecuaciones diferenciales simultáneas

En ingeniería frecuentemente encontramos sistemas cuyas características son modeladas por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con coeficientes constantes. El método de solución es esencialmente el mismo que el adoptado en la sección 2.3.3 para resolver un ecuación diferencial simple con una incógnita. Aplicando la transformada de Laplace en todos lados, el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas es transformado en un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, las cuales son resueltas para las variables transformadas; las transformadas inversas nos dan entonces las soluciones deseadas.

#### EJEMPLO 2.26

Resolver para  $t \geq 0$  las ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 5x + 3y = e^{-t} \quad (2.21)$$

$$2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + y = 3 \quad (2.22)$$

sujetas a las condiciones iniciales  $x = 2$  y  $y = 1$  en  $t = 0$ .

**Solución** Aplicando la transformada de Laplace en (2.21) y (2.22) da

$$sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) + 5X(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$2[sX(s) - x(0)] + sY(s) - y(0) + X(s) + Y(s) = \frac{3}{s}$$

Reorganizando e incorporando las condiciones iniciales dadas  $x(0) = 2$  y  $y(0) = 1$  llegamos a

$$(s+5)X(s) + (s+3)Y(s) = 3 + \frac{1}{s+1} = \frac{3s+4}{s+1} \quad (2.23)$$

$$(2s+1)X(s) + (s+1)Y(s) = 5 + \frac{3}{s} = \frac{5s+3}{s} \quad (2.24)$$

Ahora, aplicando la transformada de Laplace, el par de ecuaciones diferenciales simultáneas (2.21) y (2.22) en  $x(t)$  y  $y(t)$  ha sido transformado en un par de ecuaciones algebraicas simultáneas (2.23) y (2.24) en las variables  $X(s)$  y  $Y(s)$ . Estas ecuaciones algebraicas ahora pueden ser resueltas simultáneamente para  $X(s)$  y  $Y(s)$  usando las técnicas algebraicas usuales.

Resolviendo primero para  $X(s)$  da

$$X(s) = \frac{2s^2 + 14s + 9}{s(s+2)(s-1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales

$$X(s) = -\frac{\frac{9}{2}}{s} - \frac{\frac{11}{6}}{s+2} + \frac{\frac{25}{3}}{s-1}$$

que al invertir da

$$x(t) = -\frac{9}{2}t - \frac{11}{6}e^{-2t} + \frac{25}{3}e^t \quad (t \geq 0) \quad (2.25)$$

Igualmente, resolviendo para  $Y(s)$  da

$$Y(s) = \frac{s^3 - 22s^2 - 39s - 15}{s(s+1)(s+2)(s-1)}$$

Resolviendo en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{\frac{15}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{11}{2}}{s+2} - \frac{\frac{25}{2}}{s-1}$$

que al invertir da

$$y(t) = \frac{15}{2}t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}e^{-2t} - \frac{25}{2}e^t \quad (t \geq 0)$$

Así la solución para el par de ecuaciones diferenciales dadas es

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = -\frac{9}{2} - \frac{11}{6} e^{-2t} + \frac{25}{3} e^t \\ y(t) = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{11}{2} e^{-2t} - \frac{25}{2} e^t \end{array} \right\} \quad (t \geq 0)$$

*Nota:* Cuando se resuelve un par de ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden tales como (2.21) y (2.22), una alternativa para obtener el valor de  $y(t)$  habiendo obtenido el valor de  $x(t)$  es usar directamente (2.21) y (2.22).

Eliminando  $dy/dt$  de (2.21) y (2.22) da

$$2y = \frac{dx}{dt} - 4x - 3 + e^{-t}$$

Sustituyendo la solución obtenida en (2.25) para  $x(t)$  da

$$2y = \left(\frac{11}{3}e^{-2t} + \frac{25}{3}e^t\right) - 4\left(-\frac{9}{2} - \frac{11}{6}e^{-2t} + \frac{25}{3}e^t\right) - 3 + e^{-t}$$

llegando como antes a la solución

$$y = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}e^{-2t} - \frac{25}{2}e^t$$

Una alternativa más consiste en expresar (2.23) y (2.24) en la forma matricial y resolver para  $X(s)$  y  $Y(s)$  usando la eliminación gaussiana.

En principio, el procedimiento usado en el ejemplo 2.26 puede emplearse para resolver un par de ecuaciones diferenciales simultáneas de orden superior o un sistema grande de ecuaciones diferenciales que involucren más incógnitas. Sin embargo, el álgebra involucrada puede ser bastante complicada, y usualmente se prefieren los métodos matriciales.

### 2.3.5 Ejercicios

- 5 Usando los métodos de la transformada de Laplace, resuelva para  $t \geq 0$  las siguientes ecuaciones diferenciales, sujetas a las condiciones iniciales especificadas:

(a)  $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{-2t}$

sujeta a  $x = 2$  en  $t = 0$

(b)  $3\frac{dx}{dt} - 4x = \operatorname{sen} 2t$

sujeta a  $x = \frac{1}{3}$  en  $t = 0$

(c)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 1$

sujeta a  $x = 0$  y  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $t = 0$

(d)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 4 \cos 2t$

sujeta a  $y = 0$  y  $\frac{dy}{dt} = 2$  en  $t = 0$

(e)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2e^{-4t}$

sujeta a  $x = 0$  y  $\frac{dx}{dt} = 1$  en  $t = 0$

(f)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 3e^{-2t}$

sujeta a  $x = 4$  y  $\frac{dx}{dt} = -7$  en  $t = 0$

(g)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 5e^{-t} \operatorname{sen} t$

sujeta a  $x = 1$  y  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $t = 0$

(h)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = 3t$

sujeta a  $y = 0$  y  $\frac{dy}{dt} = 1$  en  $t = 0$

(i)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = t^2 + e^{-2t}$

sujeta a  $x = \frac{1}{2}$  y  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $t = 0$

(j)  $9\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 5x = 1$

sujeta a  $x = 0$  y  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $t = 0$

(k)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 16 \operatorname{sen} 4t$

sujeta a  $x = -\frac{1}{2}$  y  $\frac{dx}{dt} = 1$  en  $t = 0$

(l)  $9\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 4y = e^{-t}$

sujeta a  $y = 1$  y  $\frac{dy}{dt} = 1$  en  $t = 0$

(m)  $\frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 2x = 2 + t$

sujeta a  $x = 0$ ,  $\frac{dx}{dt} = 1$  y  $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$  en  $t = 0$

(n)  $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \cos 3t$

sujeta a  $x = 0$ ,  $\frac{dx}{dt} = 1$  y  $\frac{d^2x}{dt^2} = 1$  en  $t = 0$

6 Usando los métodos de la transformada de Laplace, resuelva para  $t \geq 0$  las siguientes ecuaciones diferenciales simultáneas, sujetas a las condiciones iniciales dadas:

(a)  $2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - 9y = e^{-2t}$

$$2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 4x - 37y = 0$$

sujeta a  $x = 0$  y  $y = \frac{1}{4}$  en  $t = 0$

(b)  $\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + x - y = 5 \operatorname{sen} t$

$$2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + x - y = e^t$$

sujeta a  $x = 0$  y  $y = 0$  en  $t = 0$

(c)  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = e^{-3t}$

$$\frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 5e^{-2t}$$

sujeta a  $x = -1$  y  $y = 4$  en  $t = 0$

(d)  $3\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} - 2x = e^t$

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - y = 1$$

sujeta a  $x = 1$  y  $y = 1$  en  $t = 0$

(e)  $3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 3 \operatorname{sen} t + 5 \cos t$

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t + \cos t$$

sujeta a  $x = 0$  y  $y = -1$  en  $t = 0$

(f)  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = t$

$$\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x = 1$$

sujeta a  $x = 1$  y  $y = 0$  en  $t = 0$

(g)  $2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 7x = 14t + 7$

$$5\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} + 4x + 6y = 14t - 14$$

sujeta a  $x = y = 0$  en  $t = 0$

(h)  $\frac{d^2x}{dt^2} = y - 2x$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x - 2y$$

sujeta a  $x = 4$ ,  $y = 2$ ,  $dx/dt = 0$  y  $dy/dt = 0$  en  $t = 0$

(i)  $5\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{d^2y}{dt^2} + 6x = 0$

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{d^2y}{dt^2} + 6y = 0$$

sujeta a  $x = \frac{7}{4}$ ,  $y = 1$ ,  $dx/dt = 0$  y  $dy/dt = 0$  en  $t = 0$

(j)  $2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 3y - 9x$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 5y - 7x$$

sujeta a  $x = dx/dt = 1$  y  $y = dy/dt = 0$  en  $t = 0$

## 2.4

## Aplicaciones a la ingeniería: circuitos eléctricos y vibraciones mecánicas

Para ilustrar el uso de la transformada de Laplace, consideraremos aquí sus aplicaciones al análisis de sistemas de circuitos eléctricos y vibraciones mecánicas. Como las condiciones iniciales son tomadas automáticamente en cuenta en el proceso de transformación, la transformada de Laplace es especialmente atractiva para examinar el comportamiento de tales sistemas.

### 2.4.1 Circuitos eléctricos

Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos: **resistores** (que tienen resistencia  $R$ , medida en ohms  $\Omega$ ), **capacitores** (que tienen capacitancia  $C$ , medida en farads F) e **inductores** (que tienen inductancia  $L$ , medida en henrys H), con las variables asociadas **corriente**  $i(t)$  (medida en amperes A) y **voltaje**  $v(t)$  (medido en volts V). El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga  $q(t)$  (medida en coulombs C) mediante la relación

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Convencionalmente, los elementos básicos se representan simbólicamente como en la figura 2.7.

Las relaciones entre el flujo de corriente  $i(t)$  y la caída de voltaje  $v(t)$  a través de estos elementos en el tiempo  $t$  son

caída de voltaje a través de la resistencia =  $Ri$  (Ley de Ohm)

$$\text{caída de voltaje a través del capacitor} = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{q}{C}$$

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito eléctrico está determinada por las **leyes de Kirchhoff**:

#### Ley 1

La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.

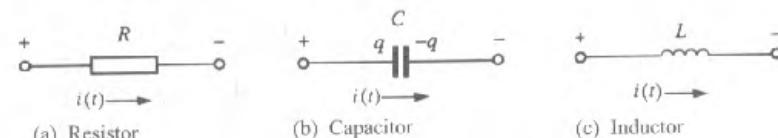


Figura 2.7 Elementos componentes de un circuito eléctrico.

**Ley 2**

La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.

El uso de estas leyes nos lleva a las ecuaciones de circuito, las cuales pueden ser analizadas usando las técnicas de la transformada de Laplace.

**EJEMPLO 2.27**

El circuito  $RLC$  de la figura 2.8 está formado por un resistor  $R$ , un capacitor  $C$  y un inductor  $L$  conectados en serie a una fuente de voltaje  $e(t)$ . Antes de cerrar el interruptor en el tiempo  $t = 0$ , tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la carga  $q(t)$  en el capacitor y la corriente resultante  $i(t)$  en el circuito en el tiempo  $t$  sabiendo que  $R = 160\Omega$ ,  $L = 1H$ ,  $C = 10^{-4} F$  y  $e(t) = 20V$ .

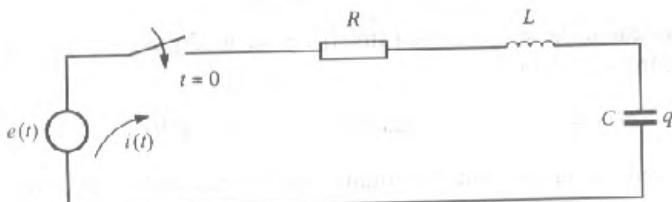


Figura 2.8 Circuito  $RLC$  del ejemplo 2.27.

**Solución** Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito de la figura 2.8 se obtiene

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt = e(t) \quad (2.26)$$

o, usando  $i = dq/dt$ ,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e(t)$$

Sustituyendo los valores dados para  $L$ ,  $R$ ,  $C$  y  $e(t)$  da

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160 \frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados llegamos a la ecuación

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = [sq(0) + \dot{q}(0)] + 160q(0) + \frac{20}{s}$$

donde  $Q(s)$  es la transformada de  $q(t)$ . Estamos suponiendo que  $q(0) = 0$  y  $\dot{q}(0) = i(0) = 0$ , así que esto se reduce a

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = \frac{20}{s}$$

esto es,

$$Q(s) = \frac{20}{s(s^2 + 160s + 10^4)}$$

Desarrollando en fracciones parciales da

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\frac{1}{500}}{s} - \frac{1}{500} \frac{s + 160}{s^2 + 160s + 10^4} \\ &= \frac{1}{500} \left[ \frac{1}{s} - \frac{(s + 80) + \frac{4}{3}(60)}{(s + 80)^2 + (60)^2} \right] \\ &= \frac{1}{500} \left[ \frac{1}{s} - \left[ \frac{s + \frac{4}{3} \times 60}{s^2 + 60^2} \right]_{s \rightarrow s+80} \right] \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso del primer teorema de traslación (teorema 2.2) da

$$q(t) = \frac{1}{500} (1 - e^{-80t} \cos 60t - \frac{4}{3} e^{-80t} \operatorname{sen} 60t)$$

Entonces, la corriente resultante en el circuito  $i(t)$  está dada por

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3} e^{-80t} \operatorname{sen} 60t$$

Observe que pudimos haber determinado la corriente aplicando la transformada de Laplace en (2.26). Sustituyendo los valores dados para  $L$ ,  $R$ ,  $C$  y  $e(t)$  y usando (2.26) llegamos a la ecuación transformada

$$160I(s) + sI(s) + \frac{10^4}{s} I(s) = \frac{20}{s}$$

esto es,

$$I(s) = \frac{20}{(s^2 + 80)^2 + 60^2} \quad (= sQ(s) \text{ puesto que } q(0) = 0)$$

la cual, aplicando la transformada inversa, da como antes

$$(t) = \frac{1}{3} e^{-80t} (\operatorname{sen} 60t)$$

### EJEMPLO 2.28

En la red en paralelo de la figura 2.9 no hay flujo de corriente en ninguno de los lazos antes del cierre del interruptor en el tiempo  $t = 0$ . Deducir las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  que circulan en cada malla en el tiempo  $t$ .

**Solución** Aplicando la primera ley de Kirchhoff al nodo X da

$$i = i_1 + i_2$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las dos mallas se obtiene

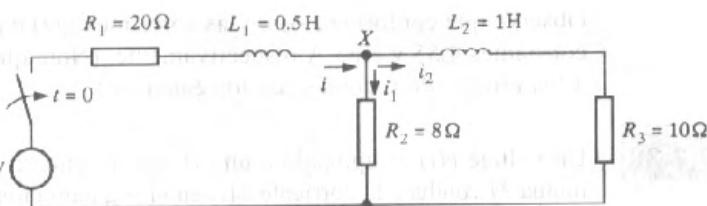


Figura 2.9 Circuito en paralelo del ejemplo 2.28.

$$R_1(i_1 + i_2) + L_1 \frac{di}{dt} (i_1 + i_2) + R_2 i_1 = 200$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0$$

Sustituyendo los valores dados para las resistencias y las inductancias da

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + 56i_1 + 40i_2 &= 400 \\ \frac{di_2}{dt} - 8i_1 + 10i_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Aplicando la transformada de Laplace e incorporando las condiciones iniciales  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  llegamos a las ecuaciones transformadas

$$(s + 56)I_1(s) + (s + 40)I_2(s) = \frac{400}{s} \quad (2.28)$$

$$-8I_1(s) + (s + 10)I_2(s) = 0 \quad (2.29)$$

De aquí

$$I_2(s) = \frac{3200}{s(s^2 + 74s + 880)} = \frac{3200}{s(s + 59.1)(s + 14.9)}$$

Desarrollando en fracciones parciales da

$$I_2(s) = \frac{3.64}{s} + \frac{1.22}{s + 59.1} - \frac{4.86}{s + 14.9}$$

la cual, aplicando la transformada inversa, produce

$$i_2(t) = 3.64 + 1.22 e^{-59.1t} - 4.86 e^{-14.9t}$$

De (2.27),

$$i_1(t) = \frac{1}{8} \left( 10i_2 + \frac{di_2}{dt} \right)$$

esto es,

$$i_1(t) = 4.55 - 7.49 e^{-59.1t} + 2.98 e^{-14.9t}$$

Observe que conforme  $t \rightarrow \infty$ , las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  se aproximan a los valores constantes 4.55 y 3.64 A respectivamente. (Note que  $i(0) = i_1(0) + i_2(0) \neq 0$  debido a los errores de redondeo en los cálculos.)

### EJEMPLO 2.29

Un voltaje  $e(t)$  es aplicado a un primer circuito en el tiempo  $t = 0$ , y la inducción mutua  $M$  conduce la corriente  $i_2(t)$  en el segundo circuito de la figura 2.10. Si, previo al cierre del interruptor, las corrientes en ambos circuitos son cero, determine la corriente inducida  $i_2(t)$  en el segundo circuito en el tiempo  $t$  cuando  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $L_1 = 2H$ ,  $L_2 = 8H$ ,  $M = 2H$  y  $e(t) = 28 \operatorname{sen} 2t$  V.

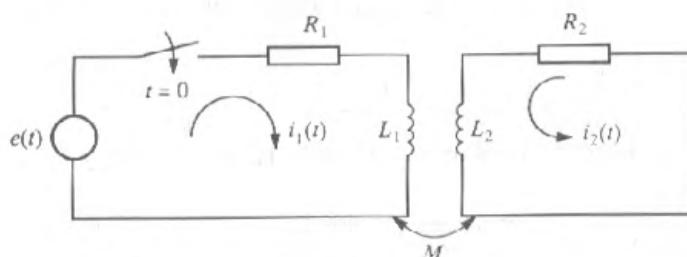


Figura 2.10 Circuito del ejemplo 2.29.

**Solución** Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al primer y segundo circuito respectivamente da

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = e(t) \quad (2.29)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

Sustituyendo los valores dados para las resistencias, las inductancias y el voltaje aplicado llegamos a

$$2 \frac{di_1}{dt} + 4i_1 + 2 \frac{di_2}{dt} = 28 \operatorname{sen} 2t$$

$$2 \frac{di_1}{dt} + 8 \frac{di_2}{dt} + 10i_2 = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace y observando que  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  llegamos a las ecuaciones

$$(s + 2)I_1(s) + sI_2(s) = \frac{28}{s^2 + 4} \quad (2.30)$$

$$sI_1(s) + (4s + 5)I_2(s) = 0 \quad (2.31)$$

Resolviendo para  $I_2(s)$  da

$$I_2(s) = -\frac{28s}{(3s + 10)(s + 1)(s^2 + 4)}$$

Resolviendo en fracciones parciales se obtiene

$$I_2(s) = -\frac{\frac{45}{17}}{3s+10} + \frac{\frac{4}{5}}{s+1} + \frac{\frac{7}{85}}{s^2+4}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene la corriente en el segundo circuito como

$$i_2(t) = \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{15}{17}e^{-10t/3} + \frac{7}{85}\cos 2t - \frac{91}{85}\sin 2t$$

Conforme  $t \rightarrow \infty$ , la corriente se aproximará a la respuesta senoidal

$$i_2(t) = \frac{7}{85}\cos 2t - \frac{91}{85}\sin 2t$$

## 2.4.2 Vibraciones mecánicas

Los sistemas mecánicos de traslación pueden ser usados para modelar muchas situaciones e involucran tres elementos básicos: **masas** (con masa  $M$ , medida en Kg), **resortes** (con rigidez del resorte  $K$ , medida en  $\text{Nm}^{-1}$ ) y **amortiguadores** (con coeficiente de amortiguamiento  $B$ , medido en  $\text{Nsm}^{-1}$ ). Las variables asociadas son el **desplazamiento**  $x(t)$  (medido en m) y la **fuerza**  $F(t)$  (medida en N). Convencionalmente, los elementos básicos son representados simbólicamente como en la figura 2.11.

Suponiendo que estamos tratando con resortes y amortiguadores ideales (esto es, suponiendo que se comportan linealmente), las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos en el tiempo  $t$  son

Masa:  $F = M \frac{d^2x}{dt^2} = M\ddot{x}$  (Ley de Newton)

Resorte:  $F = K(x_2 - x_1)$  (Ley de Hooke)

Amortiguador:  $F = B\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) = B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

Usando estas relaciones llegamos a las ecuaciones del sistema, las que pueden ser analizadas usando las técnicas de la transformada de Laplace.

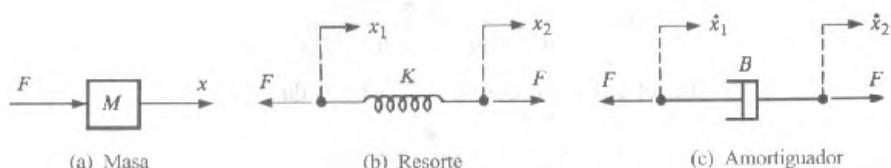


Figura 2.11 Elementos componentes de un sistema mecánico de traslación.

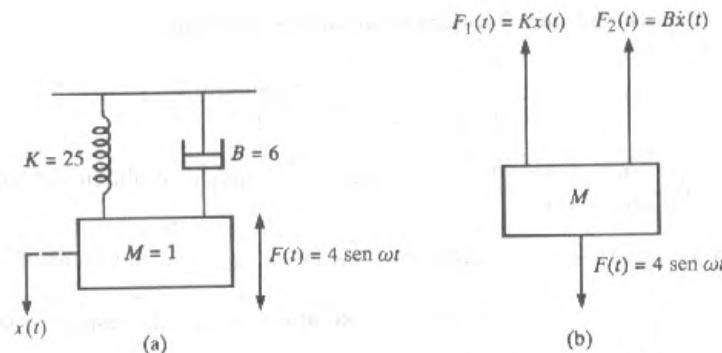


Figura 2.12 Sistema masa-resorte-amortiguador del ejemplo 2.30.

**EJEMPLO 2.30**

La masa del sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 2.12(a) está sometida a una fuerza periódica externa  $F(t) = 4 \operatorname{sen} \omega t$  aplicada en el tiempo  $t = 0$ . Determine el desplazamiento resultante  $x(t)$  de la masa en el tiempo  $t$ , suponiendo que  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , para los dos casos

$$(a) \omega = 2 \quad (b) \omega = 5$$

En el caso  $\omega = 5$ , ¿qué pasaría con la respuesta si no estuviera el amortiguador?

**Solución**

Como está indicado en la figura 2.12(b), las fuerzas que actúan sobre la masa son las fuerzas aplicadas  $F(t)$  y las fuerzas de restauración  $F_1$  y  $F_2$  debidas al resorte y al amortiguador respectivamente. Así, por la ley de Newton,

$$M\ddot{x}(t) = F(t) - F_1(t) - F_2(t)$$

Como  $M = 1$ ,  $F(t) = 4 \operatorname{sen} \omega t$ ,  $F_1(t) = Kx(t) = 25x(t)$  y  $F_2(t) = B\dot{x}(t) = 6\dot{x}(t)$ , esto da

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 25x(t) = 4 \operatorname{sen} \omega t \quad (2.32)$$

la ecuación diferencial representa el movimiento del sistema.

Aplicando la transformada de Laplace en todo (2.32) se obtiene

$$(s^2 + 6s + 25)X(s) = [sx(0) + \dot{x}(0)] + 6\dot{x}(0) + \frac{4\omega}{s^2 + \omega^2}$$

donde  $X(s)$  es la transformada de  $x(t)$ . Incorporando las condiciones iniciales dadas  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  llegamos a

$$X(s) = \frac{4\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 6s + 25)} \quad (2.33)$$

En el caso (a), con  $\omega = 2$ , (2.33) da

$$X(s) = \frac{8}{(s^2 + 4)(s^2 + 6s + 25)}$$

la cual, resolviendo en fracciones parciales, lleva a

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{4}{195} \frac{-4s+14}{s^2+4} + \frac{2}{195} \frac{8s+20}{s^2+6s+25} \\ &= \frac{4}{195} \frac{-4s+14}{s^2+4} + \frac{2}{195} \frac{8(s+3)-4}{(s+3)^2+16} \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene la respuesta requerida

$$x(t) = \frac{4}{195} (7 \operatorname{sen} 2t - 4 \cos 2t) + \frac{2}{195} e^{-3t} (8 \cos 4t - \operatorname{sen} 4t) \quad (2.34)$$

En el caso (b), con  $\omega = 5$ , (2.33) da

$$X(s) = \frac{20}{(s^2+25)(s^2+6s+25)} \quad (2.35)$$

esto es,

$$X(s) = \frac{-\frac{2}{15}s}{s^2+25} + \frac{\frac{1}{15}2(s+3)+6}{(s+3)^2+16}$$

la cual, aplicando la transformada de Laplace inversa, da la respuesta requerida

$$x(t) = -\frac{2}{15} \cos 5t + \frac{1}{15} e^{-3t} (2 \cos 4t + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4t) \quad (2.36)$$

Si no hay amortiguador entonces (2.35) será

$$X(s) = \frac{20}{(s^2+25)^2} \quad (2.37)$$

Por el teorema 2.3,

$$\mathcal{L}\{t \cos 5t\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\cos 5t\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2+25} \right)$$

esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cos 5t\} &= -\frac{1}{s^2+25} + \frac{2s^2}{(s^2+25)^2} = \frac{1}{s^2+25} - \frac{50}{(s^2+25)^2} \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 5t\} - \frac{50}{(s^2+25)^2} \end{aligned}$$

Así, por la propiedad de linealidad (2.11),

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{s} \operatorname{sen} 5t - t \cos 5t\} = \frac{50}{(s^2+25)^2}$$

de manera que aplicando la transformada inversa de Laplace en (2.37) se obtiene la respuesta

$$x(t) = \frac{2}{25} (\operatorname{sen} 5t - 5t \cos 5t)$$

Debido al término  $t \cos 5t$ , la respuesta  $x(t)$  no está acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto se debe a que en este caso la fuerza aplicada  $F(t) = 4 \sin 5t$  está en **resonancia** con el sistema (esto es, la masa vibrante) cuya frecuencia de oscilación natural es  $5/2\pi$  Hz, igual que la fuerza aplicada. Aún en la presencia del amortiguamiento, la amplitud de respuesta del sistema es maximizada cuando la fuerza aplicada se aproxima a la resonancia con el sistema. (Esto se deja como ejercicio para el lector). En ausencia de amortiguamiento tenemos el caso límite de **resonancia pura**, ya que, por ejemplo, puede llevar al colapso a estructuras grandes y fuertes bajo lo que parecen ser fuerzas relativamente pequeñas.

### EJEMPLO 2.31

Considere el sistema mecánico de la figura 2.13(a), que consiste en dos masas  $M_1 = 1$  y  $M_2 = 2$ , cada una atada a una base fija por un resorte, con constantes  $K_1 = 1$  y  $K_3 = 2$  respectivamente, y atadas entre sí por un tercer resorte con constante  $K_2 = 2$ . El sistema es soltado desde el reposo en el tiempo  $t = 0$  en una posición en la cual  $M_1$  está desplazada una unidad a la izquierda de su posición de equilibrio y  $M_2$  está desplazada 2 unidades a la derecha de su posición de equilibrio. Despreciando todos los efectos de fricción, determine las posiciones de las masas en el tiempo  $t$ .

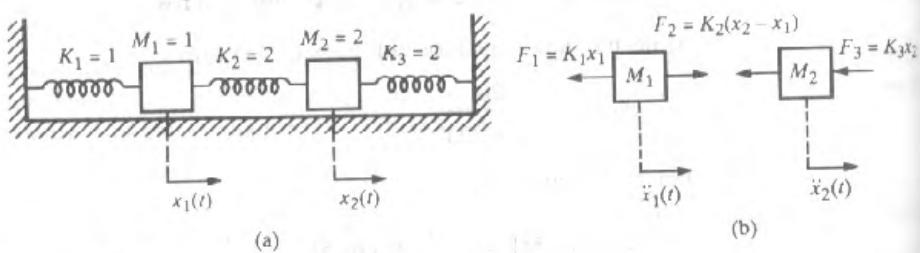


Figura 2.13 Sistema de dos masas del ejemplo 2.31.

### Solución

Sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  los desplazamientos de las masas  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente desde sus posiciones de equilibrio. Como todos los efectos de fricción son despreciados, las únicas fuerzas que actúan sobre las masas son las fuerzas de restauración debidas a los resortes, como se muestra en la figura 2.13(b). Aplicando la ley del movimiento de Newton a  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente, se obtiene

$$M_1\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 = K_2(x_2 - x_1) - K_1x_1$$

$$M_2\ddot{x}_2 = -F_3 - F_2 = -K_3x_2 - K_2(x_2 - x_1)$$

que, sustituyendo los valores dados para  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , dan

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 0 \quad (2.38)$$

$$2\ddot{x}_2 + 4x_2 - 2x_1 = 0 \quad (2.39)$$

Aplicando la transformada de Laplace llegamos a las ecuaciones

$$(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = sx_1(0) + \dot{x}_1(0)$$

$$-X_1(s) + (s^2 + 2)X_2(s) = sx_2(0) + \dot{x}_2(0)$$

Como  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  denotan desplazamientos hacia la derecha de las posiciones de equilibrio, tenemos que  $x_1(0) = -1$  y  $x_2(0) = 2$ . También, debido a que el sistema es soltado desde el reposo, se tiene  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ . Incorporando estas condiciones iniciales, las ecuaciones transformadas son

$$(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = -s \quad (2.40)$$

$$-X_1(s) + (s^2 + 2)X_2(s) = 2s \quad (2.41)$$

De aquí

$$X_2(s) = \frac{2s^3 + 5s}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}$$

Resolviendo en fracciones parciales da

$$X_2(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

que, al aplicar la transformada inversa de Laplace, da la respuesta

$$x_2(t) = \cos t + \cos 2t$$

Sustituyendo para  $x_2(t)$  en (2.39) da

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2x_2(t) + \dot{x}_2(t) \\ &= 2 \cos t + 2 \cos 2t - \cos t - 4 \cos 2t \end{aligned}$$

esto es,

$$x_1(t) = \cos t - 2 \cos 2t$$

Así las posiciones de las masas en el tiempo  $t$  son

$$x_1(t) = \cos t - 2 \cos 2t$$

$$x_2(t) = \cos t + \cos 2t$$

### 2.4.3 Ejercicios

- 7 Use las técnicas de la transformada de Laplace para encontrar las transformadas  $I_1(s)$  y  $I_2(s)$  de las respectivas corrientes en el circuito de la figura 2.14, donde  $i_1(t)$  es la corriente a través del capacitor e  $i_2(t)$  es la corriente a través de la resistencia. Despues, determine  $i_2(t)$ . (Inicialmente  $i_1(0) = i_2(0) = q_1(0) = 0$ .) Dibuje  $i_2(t)$  para valores grandes de  $t$ .

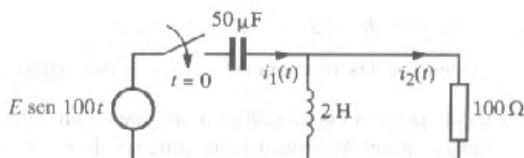


Figura 2.14 Circuito del ejercicio 7.

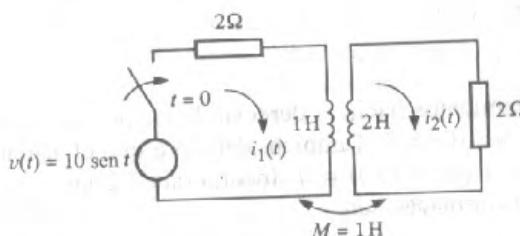


Figura 2.15 Circuito del ejercicio 8.

- 8 En el tiempo  $t = 0$  sin que fluya ninguna corriente, un voltaje  $v(t) = 10 \operatorname{sen} t$  es aplicado al primer circuito de un transformador que tiene una inductancia mutua de  $1 \text{ H}$ , como se muestra en la figura 2.15. Si se denota el flujo de corriente en el segundo circuito, en el tiempo  $t$  por  $i_2(t)$ , verifique que

$$\mathcal{L}\{i_2(t)\} = \frac{10s}{(s^2 + 7s + 6)(s^2 + 1)}$$

y deduzca que

$$i_2(t) = -e^{-t} + \frac{12}{37} e^{-6t} + \frac{25}{37} \cos t + \frac{35}{37} \operatorname{sen} t$$

- 9 En el circuito de la figura 2.16 no hay energía almacenada (esto es, no hay carga en los capacitores y tampoco hay corriente fluyendo en los inductores) antes de cerrar el interruptor en el tiempo  $t = 0$ . Determine  $i_1(t)$  para  $t > 0$  para un voltaje constante aplicado  $E_0 = 10 \text{ V}$ .

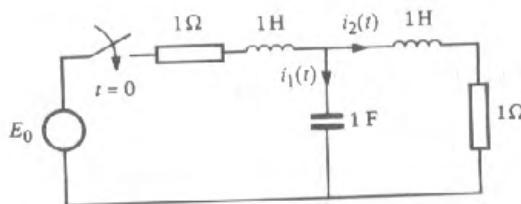


Figura 2.16 Circuito del ejercicio 9.

- 10 Determine los desplazamientos de las masas  $M_1$  y  $M_2$  en la figura 2.13 en el tiempo  $t > 0$  cuando

$$M_1 = M_2 = 1$$

$$K_1 = 1, K_2 = 3 \quad \text{y} \quad B_1 = 2$$

¿Cuáles son las frecuencias naturales del sistema?

- 11 Cuando se probó la unidad de aterrizaje de un vehículo espacial se llevaron a cabo pruebas de caída. La figura 2.17 es un modelo esquemático de la unidad en el instante que toca el suelo por primera vez. En este

instante el resorte está totalmente extendido y la velocidad de la masa es  $\sqrt{2gh}$ , donde  $h$  es la altura desde la que la unidad se dejó caer. Obtenga la ecuación que representa el desplazamiento de la masa en el momento  $t > 0$  cuando  $M = 50 \text{ kg}$ ,  $B = 180 \text{ N s m}^{-1}$  y  $K = 474.5 \text{ N m}^{-1}$ , e investigue los efectos de caídas a diferentes alturas  $h$ . ( $g$  es la aceleración debida a la gravedad, y puede tomarse como  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ .)

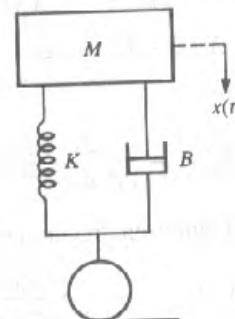


Figura 2.17 Sistema de aterrizaje del ejercicio 11.

- 12 Considere el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 2.18 que ha sido sometido a dos fuerzas de entrada  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ . Demuestre que el desplazamiento  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de las dos masas está dado por

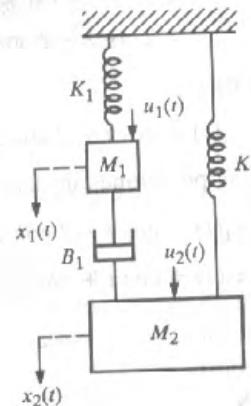


Figura 2.18 Sistema mecánico del ejercicio 12.

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{M_2 s^2 + B_1 s + K_2}{\Delta} U_1(s) + \frac{B_1 s}{\Delta} U_2(s) \right\}$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B_1 s}{\Delta} U_1(s) + \frac{M_1 s^2 + B_1 s + K_1}{\Delta} U_2(s) \right\}$$

donde

$$\Delta = (M_1 s^2 + B_1 s + K_1)(M_2 s^2 + B_1 s + K_2) + B_1^2$$

## 2.5

# Funciones escalón e impulso

## 2.5.1 La función escalonada de Heaviside

En las secciones 2.3 y 2.4 consideramos ecuaciones diferenciales lineales en donde las funciones de fuerza eran continuas. En muchas aplicaciones de la ingeniería las funciones de fuerza frecuentemente son discontinuas, por ejemplo, la onda cuadrada resultante del encendido y apagado de un interruptor. Para manipular tales funciones discontinuas usamos la función escalón unitario de Heaviside  $H(t)$ , la cual, como vimos en la sección 2.2.1, está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

y está ilustrada gráficamente en la figura 2.19(a). La función de Heaviside también se conoce simplemente como la **función escalón unitario**. Una función que representa un escalón unitario en  $t = a$  puede ser obtenida por una traslación horizontal de duración  $a$ . Esto está descrito gráficamente en la figura 2.19(b) y definido por

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (t \geq a) \end{cases}$$

La función producto  $f(t)H(t-a)$  toma valores

$$f(t)H(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ f(t) & (t \geq a) \end{cases}$$

así la función  $H(t-a)$  puede ser interpretada como un mecanismo para ‘encender’ la función  $f(t)$  en  $t = a$ . De esta manera, la función escalón unitario puede ser usada para escribir una manera concisa de funciones continuas a pedazos. Para ilustrar esto, consideremos la función  $f(t)$  continua a pedazos ilustrada en la figura 2.20 y definida por

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & (0 \leq t < t_1) \\ f_2(t) & (t_1 \leq t < t_2) \\ f_3(t) & (t \geq t_2) \end{cases}$$

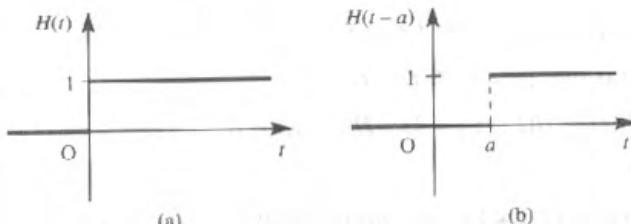


Figura 2.19 Función escalón unitario de Heaviside.

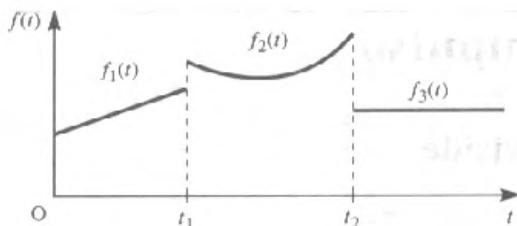


Figura 2.20 Función continua a pedazos.

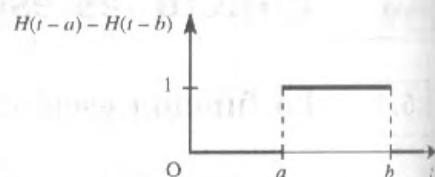


Figura 2.21 Función de sombrero de copa (pulso unitario).

Para construir esta función  $f(t)$  podemos usar las siguientes operaciones 'de encendido':

- encender la función  $f_1(t)$  en  $t = 0$ ;
- encender la función  $f_2(t)$  en  $t = t_1$  y al mismo tiempo apagar la función  $f_1(t)$ ;
- encender la función  $f_3(t)$  en  $t = t_2$  y al mismo tiempo apagar la función  $f_2(t)$ .

En términos de la función escalón unitario,  $f(t)$  puede expresarse como

$$f(t) = f_1(t)H(t) + [f_2(t) - f_1(t)]H(t - t_1) + [f_3(t) - f_2(t)]H(t - t_2)$$

Alternativamente,  $f(t)$  puede ser construida usando la **función sombrero de copa**  $H(t-a) - H(t-b)$ . Claramente

$$H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 1 & (a \leq t < b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.4)$$

La cual, como está ilustrado en la figura 2.21, da

$$f(t)[H(t-a) - H(t-b)] = \begin{cases} f(t) & (a \leq t < b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Usando esta propuesta, la función  $f(t)$  de la figura 2.20 puede ser expresada como

$$f(t) = f_1(t)[H(t) - H(t - t_1)] + f_2(t)[H(t - t_1) - H(t - t_2)] + f_3(t)H(t - t_2)$$

dando, como antes,

$$f(t) = f_1(t)H(t) + [f_2(t) - f_1(t)]H(t - t_1) + [f_3(t) - f_2(t)]H(t - t_2)$$

Es fácil verificar que esto corresponde a la formulación dada, ya que para  $0 \leq t < t_1$

$$H(t) = 1, \quad H(t - t_1) = H(t - t_2) = 0$$

dando

$$f(t) = f_1(t) \quad (0 \leq t < t_1)$$

mientras que para  $t_1 \leq t < t_2$

$$H(t) = H(t - t_1) = 1, \quad H(t - t_2) = 0$$

dando

$$f(t) = f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)] = f_2(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

y finalmente para  $t \geq t_2$

$$H(t) = H(t - t_1) = H(t - t_2) = 1$$

dando

$$f(t) = f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)] + [f_3(t) - f_2(t)] = f_3(t) \quad (t \geq t_2)$$

### EJEMPLO 2.32

Expresé en términos de funciones escalones unitarios la función causal continua a pedazos

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & (0 \leq t < 3) \\ t+4 & (3 \leq t < 5) \\ 9 & (t \geq 5) \end{cases}$$

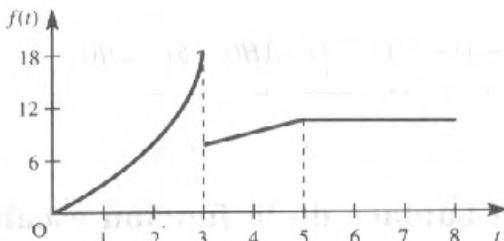


Figura 2.22 Función continua a pedazos del ejemplo 2.32.

**Solución** En la figura 2.22 se muestra gráficamente  $f(t)$ , y en términos de funciones escalones unitarios puede ser expresada como

$$f(t) = 2t^2H(t) + (t+4-2t^2)H(t-3) + (9-t)H(t-5)$$

Esto es,

$$f(t) = 2t^2H(t) + (4+t-2t^2)H(t-3) + (5-t)H(t-5)$$

### EJEMPLO 2.33

Expresé en términos de funciones escalones unitarios la función causal continua a pedazos

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 1) \\ 1 & (1 \leq t < 3) \\ 3 & (3 \leq t < 5) \\ 2 & (5 \leq t < 6) \\ 0 & (t \geq 6) \end{cases}$$

**Solución** En la figura 2.23 se muestra gráficamente  $f(t)$ , y en términos de funciones escalones unitarios puede ser expresada como

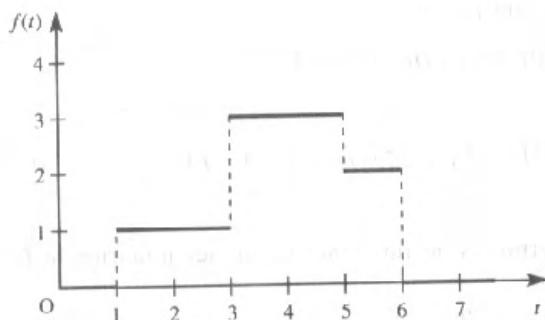


Figura 2.23 Función continua a pedazos del ejemplo 2.33.

$$f(t) = 1H(t - 1) + (3 - 1)H(t - 3) + (2 - 3)H(t - 5) + (0 - 2)H(t - 6)$$

Esto es,

$$f(t) = 1H(t - 1) + 2H(t - 3) - 1H(t - 5) - 2H(t - 6)$$

## 2.5.2 Transformada de Laplace de la función escalón unitario

Por la definición de la transformada de Laplace, la transformada de  $H(t - a)$ ,  $a \geq 0$ , está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - a)\} &= \int_0^{\infty} H(t - a) e^{-st} dt \\ &= \int_0^a 0 e^{-st} dt + \int_a^{\infty} 1 e^{-st} dt \\ &= \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

Esto es,

$$\mathcal{L}\{H(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (a \geq 0) \quad (2.4)$$

y en el caso particular de  $a = 0$

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s}$$

**EJEMPLO 2.34**

Determine la transformada de Laplace del pulso rectangular

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ K & (a \leq t < b) \\ 0 & (t \geq b) \end{cases} \quad K \text{ constante, } b > a > 0$$

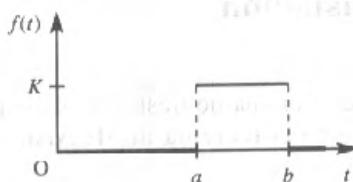


Figura 2.24 Pulso rectangular.

**Solución**

El pulso se muestra gráficamente en la figura 2.24. En términos de funciones escalones unitarios puede ser expresado, usando la función sombrero de copa, como

$$f(t) = K[H(t - a) - H(t - b)]$$

Entonces, aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = K\mathcal{L}\{H(t - a)\} - K\mathcal{L}\{H(t - b)\}$$

la cual, usando el resultado (2.43), da

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = K \frac{e^{-as}}{s} - K \frac{e^{-bs}}{s}$$

Esto es,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{K}{s} (e^{-as} - e^{-bs})$$

**EJEMPLO 2.35**

Determine la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  constante a pedazos mostrada en la figura 2.23.

**Solución**

Del ejemplo 2.33  $f(t)$  puede ser expresada como

$$f(t) = 1H(t - 1) + 2H(t - 3) - 1H(t - 5) - 2H(t - 6)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 1\mathcal{L}\{H(t - 1)\} + 2\mathcal{L}\{H(t - 3)\} - 1\mathcal{L}\{H(t - 5)\} - 2\mathcal{L}\{H(t - 6)\}$$

la cual, usando el resultado (2.43), da

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} + 2 \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} - 2 \frac{e^{-6s}}{s}$$

Esto es,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} (e^{-s} + 2e^{-3s} - e^{-5s} - 2e^{-6s})$$

### 2.5.3 El segundo teorema de traslación

Este teorema es dual del primer teorema de traslación dado como el teorema 2.2, y algunas veces es conocido como el **teorema de Heaviside o de retraso**.

#### TEOREMA 2.4

Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  entonces para una constante positiva  $a$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

**Demostración** Por definición

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} &= \int_0^\infty f(t-a)H(t-a)e^{-st}dt \\ &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución  $T = t - a$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} &= \int_0^\infty f(T)e^{-s(T+a)}dT \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty f(T)e^{-sT}dT\end{aligned}$$

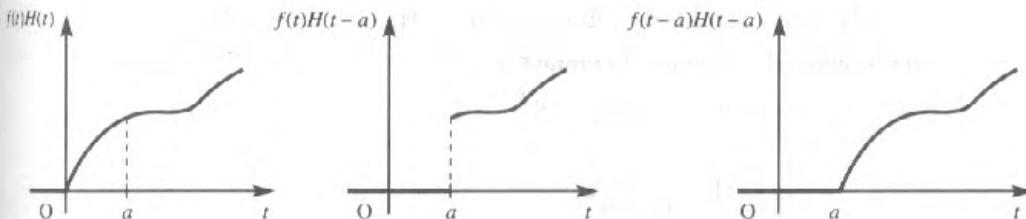
Como  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(T)e^{-sT}dT$ , se sigue que

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Es importante distinguir entre las dos funciones  $f(t)H(t-a)$  y  $f(t-a)H(t-a)$ . Como vimos antes  $f(t)H(t-a)$  simplemente indica que la función  $f(t)$  está 'encendida' en el tiempo  $t = a$ , así que

$$f(t)H(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ f(t) & (t \geq a) \end{cases}$$

Por otro lado,  $f(t-a)H(t-a)$  representa una traslación a la derecha de la función  $f(t)$  en  $a$  unidades (a la derecha, ya que  $a > 0$ ), así que

Figura 2.25 Ilustración de  $f(t-a)H(t-a)$ .

$$f(t-a)H(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ f(t-a) & (t \geq a) \end{cases}$$

La diferencia entre las dos está ilustrada gráficamente en la figura 2.25,  $f(t-a)H(t-a)$  puede interpretarse como la representación de la función  $f(t)$  retrasada en el tiempo por  $a$  unidades. Así, cuando consideramos su transformada de Laplace  $e^{-as}F(s)$ , donde  $F(s)$  denota la transformada de Laplace de  $f(t)$ , la componente  $e^{-as}$  puede ser interpretada como el operador retraso en la transformada  $F(s)$ . Esto indicará que la respuesta del sistema caracterizada por  $F(s)$  será retrasada en el tiempo  $a$  unidades. Como muchos sistemas prácticos tienen alguna forma de retraso inherente a su comportamiento, es claro que el resultado de este teorema es muy útil.

**EJEMPLO 2.36**

Determine la transformada de Laplace de la función causal  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < b) \\ 0 & (t \geq b) \end{cases}$$

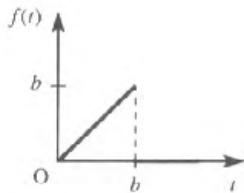


Figura 2.26 Pulso de diente de sierra.

**Solución**

En la figura 2.26  $f(t)$  está ilustrada gráficamente y se ve que caracteriza a un pulso de diente de sierra de duración  $b$ . En términos de funciones escalones unitarios,

$$f(t) = tH(t) - tH(t-b)$$

Para aplicar el segundo teorema de traslación cada término debe ser reorganizado para que sea de la forma  $f(t-a)H(t-a)$ ; (esto es, el argumento en el tiempo  $t-a$  de la función debe ser el mismo que el de la función escalón asociada). En este ejemplo en particular, esto da

$$f(t) = tH(t) - (t-b)H(t-b) - bH(t-b)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tH(t)\} - \mathcal{L}\{(t-b)H(t-b)\} - b\mathcal{L}\{H(t-b)\}$$

que usando el teorema 2.4 conduce a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2} - e^{-bs} \mathcal{L}(t) - b \frac{e^{-bs}}{s} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-bs}}{s^2} - b \frac{e^{-bs}}{s}\end{aligned}$$

dando

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-bs}) - \frac{b}{s}e^{-bs}$$

Debe hacerse notar que este resultado pudo haberse obtenido sin utilizar el segundo teorema de traslación, ya que, directamente de la definición de la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^b t e^{-st} dt + \int_b^\infty 0 e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{t e^{-st}}{s} \right]_0^b + \int_0^b \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= \left[ -\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^b \\ &= \left( -\frac{b e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} \right) - \left( -\frac{1}{s^2} \right) \\ &= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-bs}) - \frac{b}{s}e^{-bs}\end{aligned}$$

como antes.

### EJEMPLO 2.37

Obtenga la transformada de Laplace de la función causal continua a pedazos

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & (0 \leq t < 3) \\ t+4 & (3 \leq t < 5) \\ 9 & (t \geq 5) \end{cases}$$

considerada en el ejemplo 2.32.

**Solución** En el ejemplo 2.32 vimos que  $f(t)$  puede ser expresada en términos de funciones escalones unitarios como

$$f(t) = 2t^2 H(t) - (2t^2 - t - 4)H(t-3) - (t-5)H(t-5)$$

Antes de poder encontrar  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , la función  $2t^2 - t - 4$  debe expresarse como una función de  $t-3$ . Esto puede obtenerse fácilmente de la siguiente manera. Sea  $z = t-3$ . Entonces

$$\begin{aligned}2t^2 - t - 4 &= 2(z+3)^2 - (z+3) - 4 \\&= 2z^2 + 11z + 11 \\&= 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 11\end{aligned}$$

Ahora

$$f(t) = 2t^2H(t) - [2(t-3)^2 + 11(t-3) + 11]H(t-3) - (t-5)H(t-5)$$

Aplicando la transformada de Laplace,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\mathcal{L}\{t^2H(t)\} - \mathcal{L}\{[2(t-3)^2 + 11(t-3) + 11]H(t-3)\} \\&\quad - \mathcal{L}\{(t-5)H(t-5)\}\end{aligned}$$

que, usando el teorema 2.4, conduce a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= 2 \frac{2}{s^3} - e^{-3s} \mathcal{L}\{2t^2 + 11t + 11\} - e^{-5s} \mathcal{L}\{t\} \\&= \frac{4}{s^3} - e^{-3s} \left( \frac{4}{s^3} + \frac{11}{s^2} + \frac{11}{s} \right) - \frac{e^{-5s}}{s^2}\end{aligned}$$

Otra vez, este resultado pudo haber sido obtenido directamente de la definición de la transformada de Laplace, pero en este caso la integración por partes requerida es un poco más tediosa.

## 2.5.4 Inversión usando el segundo teorema de traslación

Hemos visto en los ejemplos 2.34 y 2.35 que, para obtener la transformada de Laplace de una función continua a pedazos, puede evitarse el uso del segundo teorema de traslación, ya que es posible obtener tal transformada directamente de la definición de la transformada de Laplace.

En la práctica, la importancia del teorema radica en determinar transformadas *inversas*, ya que, como se indicó antes, los retrasos son inherentes en la mayoría de los sistemas prácticos y los ingenieros están interesados en conocer cómo influye esto en la respuesta del sistema. Consecuentemente, por mucho, la forma más usual del segundo teorema de traslación es

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)H(t-a) \quad (2.45)$$

Comparando (2.45) con el resultado (2.12), a saber

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)H(t)$$

vemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = [f(t)H(t)] \text{ con } t \text{ reemplazado por } t-a$$

esto indica que la respuesta  $f(t)$  ha sido retrasada en el tiempo en  $a$  unidades. Es por esto por lo que algunas veces a este teorema se le conoce como el teorema del retraso.

**EJEMPLO 2.38**

Determine  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}\right\}$ .

**Solución** Esto puede escribirse como  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-4s}F(s)\}$ , donde

$$F(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Primero obtenemos la transformada inversa  $f(t)$  de  $F(s)$ . Resolviendo en fracciones parciales,

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2}$$

la cual, al invertir, da

$$f(t) = 2 - 2e^{-2t}$$

en la figura 2.27(a) se muestra su gráfica. Entonces, usando (2.45), tenemos

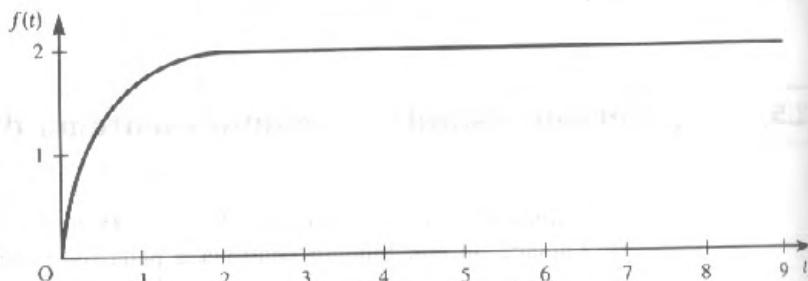
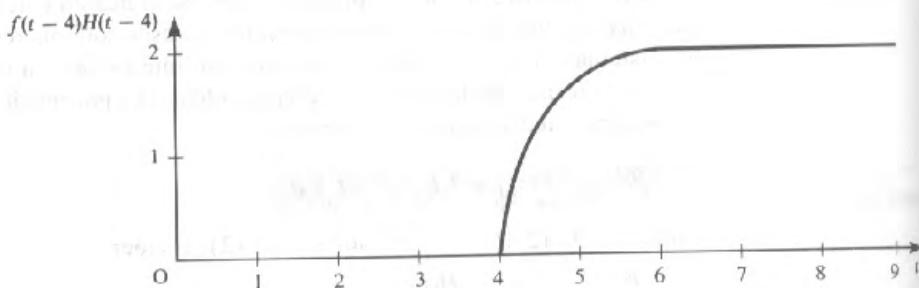
(a) Gráfica de  $f(t)$ (b) Gráfica de  $f(t-4)H(t-4)$ 

Figura 2.27 Transformada inversa del ejemplo 2.38.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{-4s} \frac{4}{s(s+2)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-4s} F(s)\} = f(t-4)H(t-4) \\ &= (2 - 2\mathrm{e}^{-2(t-4)})H(t-4)\end{aligned}$$

dando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4\mathrm{e}^{-4s}}{s(s+2)}\right\} = \begin{cases} 0 & (t < 4) \\ 2(1-\mathrm{e}^{-2(t-4)}) & (t \geq 4) \end{cases}$$

que está dibujada en la figura 2.27(b).

### EJEMPLO 2.39

Determine  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}\right\}$ .

**Solución** Esto puede escribirse como  $\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-s\pi}F(s)\}$ , donde

$$F(s) = \frac{s+3}{s(s^2+1)}$$

Resolviendo en fracciones parciales,

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

la cual, al invertir, da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-s\pi}F(s)\} = f(t-\pi)H(t-\pi) \\ &= [3 - 3\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)]H(t-\pi) \\ &= (3 + 3\cos t - \sin t)H(t-\pi)\end{aligned}$$

dando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}\right\} = \begin{cases} 0 & (t < \pi) \\ 3 + 3\cos t - \sin t & (t \geq \pi) \end{cases}$$

que está dibujada en la figura 2.28(b).

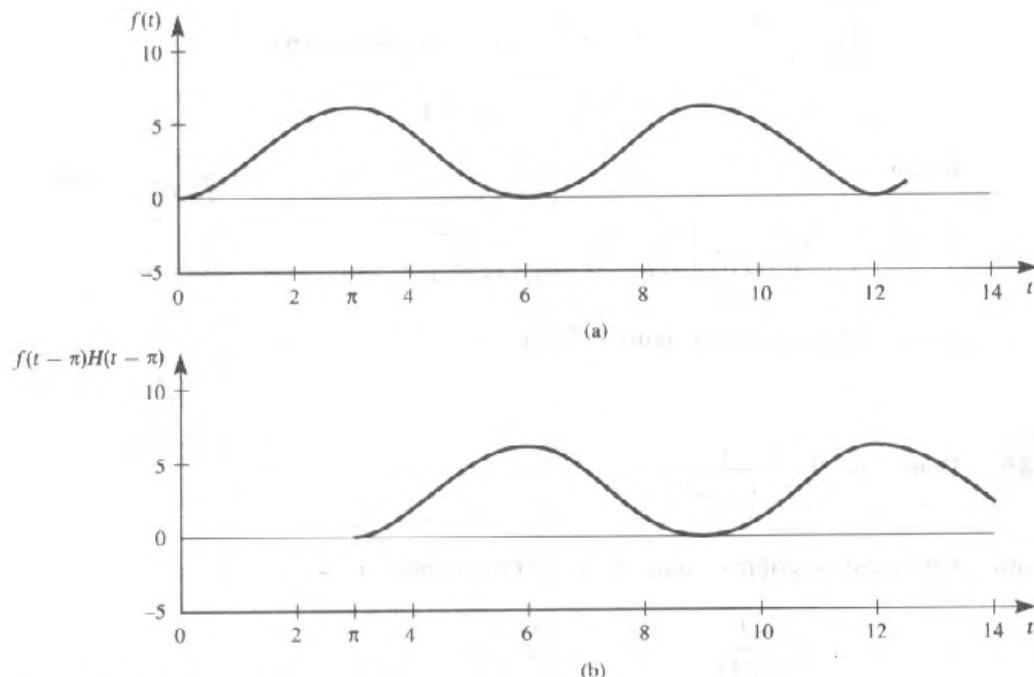


Figura 2.28 Transformada inversa del ejemplo 2.39.

### 2.5.5 Ecuaciones diferenciales

Ahora volvemos a la soluciones de ecuaciones diferenciales lineales para las cuales la función de fuerza  $f(t)$  es continua a pedazos, como la ilustrada en la figura 2.20. Un camino para resolver una ecuación diferencial teniendo tal función de fuerza es resolverla separadamente para cada componente continua  $f_1(t), f_2(t)$  y así sucesivamente, que forman a  $f(t)$ , usando el hecho de que en esta ecuación todas las derivadas, excepto las de orden superior, deben permanecer continuas de manera que los valores en los puntos de discontinuidad provean las condiciones iniciales para la siguiente sección. Este camino es obviamente bastante tedioso, y uno más directo es hacer uso de la funciones escalones de Heaviside para especificar  $f(t)$ . Entonces el método de solución seguido es el usado en la sección 2.3 y simplemente lo ilustraremos con ejemplos.

#### EJEMPLO 2.40

Obtenga la solución  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = f(t) \quad (2.40)$$

donde  $f(t)$  es la función pulso

$$f(t) = \begin{cases} 3 & (0 \leq t < 6) \\ 0 & (t \geq 6) \end{cases}$$

y está sujeta a las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 2$ .

**Solución** Para ilustrar las ventajas de usar una función escalón en la formulación de la función de fuerza  $f(t)$ , resolveremos primero separadamente para cada uno de los intervalos de tiempo.

**Método 1** Para  $0 \leq t < 6$ , (2.46) es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 3$$

con  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 2$ .

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = s\dot{x}(0) + \dot{x}(0) + 5x(0) + \frac{3}{s} = 2 + \frac{3}{s}$$

Esto es,

$$X(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} - \frac{1}{s+2}$$

la cual, al invertir, da

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \quad (0 \leq t < 6)$$

Ahora determinamos los valores de  $x(6)$  y  $\dot{x}(6)$  para proporcionar las condiciones iniciales para la siguiente etapa:

$$x(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-12} - e^{-18} = \alpha, \quad \dot{x}(6) = -e^{-12} + 3e^{-18} = \beta$$

Para  $t \geq 6$  hacemos el cambio de la variable independiente  $T = t - 6$ , de donde (2.46) se transforma en

$$\frac{d^2x}{dT^2} + 5 \frac{dx}{dT} + 6x = 0$$

sujeta a  $x(T=0) = \alpha$  y  $\dot{x}(T=0) = \beta$ .

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$\begin{aligned} (s^2 + 5s + 6)X(s) &= sx(T=0) + \dot{x}(T=0) + 5x(T=0) \\ &= \alpha s + 5\alpha + \beta \end{aligned}$$

Esto es,

$$X(s) = \frac{\alpha s + 5\alpha + \beta}{(s+2)(s+3)} = \frac{\beta + 3\alpha}{s+2} - \frac{\beta + 2\alpha}{s+3}$$

la cual, aplicando la transformada inversa, da

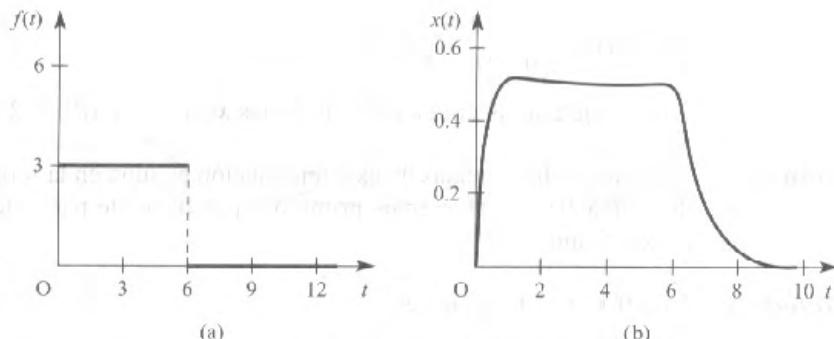


Figura 2.29 Función de fuerza y respuesta del ejemplo 2.40.

$$x(T) = (\beta + 3\alpha)e^{-2T} - (\beta + 2\alpha)e^{-3T}$$

Sustituyendo los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  y regresando a la variable independiente  $t$  da

$$x(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-12}\right)e^{-2(t-6)} - (1 + e^{-18})e^{-3(t-6)} \quad (t \geq 6)$$

Esto es,

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) + \left(\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)}\right) \quad (t \geq 6)$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} & (0 \leq t < 6) \\ \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) + \left(\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)}\right) & (t \geq 6) \end{cases}$$

En la figura 2.29(a) y (b), se muestran la función de fuerza  $f(t)$  y la respuesta  $x(s)$  respectivamente.

**Método 2** En términos de las funciones escalón de Heaviside,

$$f(t) = 3H(t) - 3H(t-6)$$

así que, usando (2.43),

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-6s}$$

Aplicando la transformada de Laplace en (2.46) entonces da

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = sx(0) + \dot{x}(0) + 5x(0) + \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$= 2 + \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-6s}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} - e^{-6s} \frac{3}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \left( \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right) - e^{-6s} \left( \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2} + \frac{1}{s+3} \right) \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace y usando el resultado (2.45) da

$$x(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2(t-6)} + e^{-3(t-6)} \right) H(t-6)$$

que es la solución requerida. Esta es igual a la obtenida con el método 1, ya que usando la definición de  $H(t-6)$ , puede ser escrita como

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} & (0 \leq t < 6) \\ (\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}) + (\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)}) & (t \geq 6) \end{cases}$$

Este método claramente es menos tedioso, ya que las condiciones iniciales en las discontinuidades son tomadas automáticamente en cuenta en la solución.

### EJEMPLO 2.41

Determine la solución  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = f(t) \quad (2.47)$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (t \geq \pi) \end{cases}$$

y sujeta a las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 3$ .

**Solución** Siguiendo los procedimientos del ejemplo 2.36, tenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= tH(t) - tH(t-\pi) \\ &= tH(t) - (t-\pi)H(t-\pi) - \pi H(t-\pi) \end{aligned}$$

así que, usando el teorema 2.4,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} - \frac{\pi e^{-\pi s}}{s} \\ &= \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} \right) \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace en (2.47) entonces da

$$\begin{aligned} (s^2 + 2s + 5)X(s) &= sx(0) + \dot{x}(0) + 2x(0) + \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= 3 + \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} \right) \end{aligned}$$

usando las condiciones iniciales determinadas.

Así

$$X(s) = \frac{3s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2s + 5)} - e^{-\pi s} \frac{1 + s\pi}{s^2(s^2 + 2s + 5)}$$

al desarrollar en fracciones parciales llegamos a

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{25} \left[ -\frac{2}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{2s + 74}{(s+1)^2 + 4} \right] - \frac{e^{-\pi s}}{25} \left[ \frac{5\pi - 2}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{(5\pi - 2)s + (10\pi + 1)}{(s+1)^2 + 4} \right] \\ &= \frac{1}{25} \left[ -\frac{2}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{2(s+1) + 72}{(s+1)^2 + 4} \right] \\ &\quad - \frac{e^{-\pi s}}{25} \left[ \frac{5\pi - 2}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{(5\pi - 2)(s+1) + (5\pi + 3)}{(s+1)^2 + 4} \right] \end{aligned}$$

Aplicando la inversa de la transformada de Laplace y usando (2.45) da la solución deseada:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{25} (-2 + 5t + 2 e^{-t} \cos 2t + 36 e^{-t} \sin 2t) \\ &\quad - \frac{1}{25} [(5\pi - 2) + 5(t - \pi) - (5\pi - 2) e^{-(t-\pi)} \cos 2(t - \pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} (5\pi + 3) e^{-(t-\pi)} \sin 2(t - \pi)] H(t - \pi) \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{25} [5t - 2 + 2 e^{-t} (\cos 2t + 18 \sin 2t)] \\ &\quad - \frac{1}{25} \{5t - 2 - e^\pi e^{-t} [(5\pi - 2) \cos 2t + \frac{1}{2} (5\pi + 3) \sin 2t]\} H(t - \pi) \end{aligned}$$

o, en forma alternativa,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{25} [5t - 2 + 2 e^{-t} (\cos 2t + 18 \sin 2t)] & (0 \leq t < \pi) \\ \frac{1}{25} e^{-t} \{2 + (5\pi - 2) e^\pi\} \cos 2t + [36 + \frac{1}{2} (5\pi + 3) e^\pi] \sin 2t & (t \geq \pi) \end{cases}$$

## 2.5.6 Funciones periódicas

Ya hemos determinado la transformada de Laplace para funciones periódicas tales como  $\sin \omega t$  y  $\cos \omega t$ , que son funciones continuas suaves (diferenciables). Sin embargo, en muchas aplicaciones de ingeniería, frecuentemente encontramos funciones periódicas que tienen un comportamiento discontinuo. En la figura 2.30 se muestran ejemplos de funciones periódicas típicas de importancia práctica.

Tales funciones periódicas pueden representarse como series infinitas de términos que involucran funciones escalonadas; una vez expresadas en tal forma, el resultado (2.43) puede usarse para obtener su transformada de Laplace.

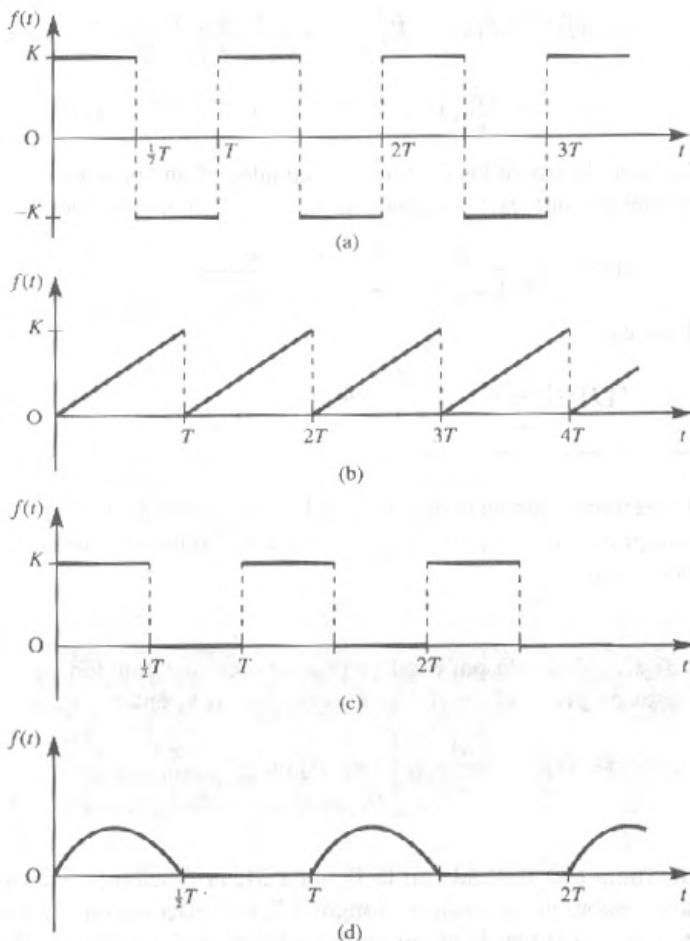


Figura 2.30 Formas de onda periódicas típicas en la práctica; (a) onda cuadrada, (b) diente de sierra, (c) tren de impulsos, (d) media onda rectificada.

### EJEMPLO 2.42

Obtenga la transformada de Laplace de la onda cuadrada ilustrada en la figura 2.30(a).

**Solución** En términos de funciones escalones, la onda cuadrada puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= KH(t) - 2KH\left(t - \frac{1}{2}T\right) + 2KH(t - T) - 2KH\left(t - \frac{3}{2}T\right) \\ &\quad + 2KH(t - 2T) + \dots \\ &= K[H(t) - 2H\left(t - \frac{1}{2}T\right) + 2H(t - T) - 2H\left(t - \frac{3}{2}T\right) + 2H(t - 2T) + \dots] \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace y usando el resultado (2.43) da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-sT/2} + \frac{2}{s}e^{-sT} - \frac{2}{s}e^{-3sT/2} + \frac{2}{s}e^{-2sT} + \dots\right) \\ &= \frac{2K}{s}[1 - e^{-sT/2} + (e^{-sT/2})^2 - (e^{-sT/2})^3 + (e^{-sT/2})^4 - \dots] - \frac{K}{s}\end{aligned}$$

La serie dentro de los paréntesis cuadrados es una progresión geométrica infinita cuyo primer término es 1 y razón común  $-e^{-sT/2}$ , y por tanto tiene suma  $(1 + e^{-sT/2})^{-1}$ . Así,

$$F(s) = \frac{2K}{s} \frac{1}{1 + e^{-sT/2}} - \frac{K}{s} = \frac{K}{s} \frac{1 - e^{-sT/2}}{1 + e^{-sT/2}}$$

Esto es,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{K}{s} \tanh \frac{1}{4}sT$$

El método usado en el ejemplo 2.42 puede usarse para comprobar el siguiente teorema que provee una expresión explícita para la transformada de Laplace de una función periódica.

### TEOREMA 2.5

Si  $f(t)$ , definida para todo  $t$  positivo, es una función periódica con periodo  $T$ , esto es,  $f(t + nT) = f(t)$  para todo entero  $n$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

### Demostración

Si, como está ilustrado en la figura 2.31, la función periódica  $f(t)$  es continua a pedazos sobre un intervalo de longitud  $T$ , entonces su transformada de Laplace existe y puede ser expresada como un serie de integrales sobre períodos sucesivos; esto es,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} f(t) e^{-st} dt + \dots \\ &\quad + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t) e^{-st} dt + \dots\end{aligned}$$

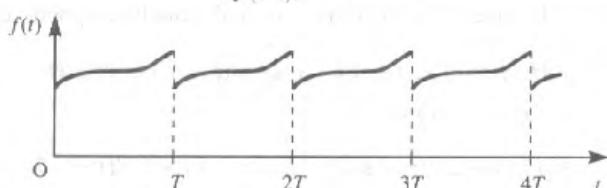


Figura 2.31 Función periódica teniendo periodo  $T$ .

Si en integrales sucesivas hacemos las sustituciones

$$t = \tau + nT \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau + nT) e^{-s(\tau+nT)} d\tau$$

Como  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$ ,

$$f(\tau + nT) = f(\tau) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

así que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} e^{-snT} d\tau = \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \right) \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \dots$  es una progresión geométrica infinita cuyo primer término es 1 y razón común  $e^{-sT}$ . Su suma está dada por  $(1 - e^{-sT})^{-1}$ , así que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Como, dentro de la integral,  $\tau$  es una variable ‘muda’, la podemos reemplazar por  $t$  para obtener el resultado deseado.  $\square$

Observamos que, en términos de la función escalón de Heaviside, el teorema 2.5 puede expresarse como sigue:

Si  $f(t)$ , definida para todo  $t$  positivo, es una función periódica con periodo  $T$

$$f_1(t) = f(t)(H(t) - H(t - T))$$

entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = (1 - e^{-sT})^{-1} \mathcal{L}\{f_1(t)\}$$

Esta formulación se sigue ya que  $f(t)$  es periódica y  $f_1(t) = 0$  para  $t > T$ . Para la función periódica  $f(t)$  mostrada en la figura 2.31 la función correspondiente  $f_1(t)$  se muestra en la figura 2.32. Veremos, a partir de los siguientes ejemplos, que esta formulación simplifica el proceso para obtener la transformada de Laplace de funciones periódicas.

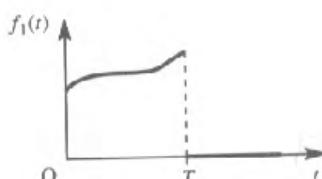


Figura 2.32 Gráfica de una función periódica dentro de un periodo.

**EJEMPLO 2.43**

Confirmar el resultado obtenido en el ejemplo 2.42 usando el teorema 2.5.

**Solución** Para la onda cuadrada  $f(t)$  ilustrada en la figura 2.30(a),  $f(t)$  está definida sobre el periodo  $0 < t < T$  por

$$f(t) = \begin{cases} K & (0 < t < \frac{1}{2}T) \\ -K & (\frac{1}{2}T < t < T) \end{cases}$$

Ahora podemos escribir  $f_1(t) = K[H(t) - 2H(t - \frac{1}{2}T) + H(t - T)]$ , y así

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-sT/2} + \frac{1}{s}e^{-sT}\right) = \frac{K}{s}(1 - e^{-sT/2})^2$$

Usando el resultado del teorema 2.5,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{K(1 - e^{-sT/2})^2}{s(1 - e^{-sT})} = \frac{K(1 - e^{-sT/2})^2}{s(1 - e^{-sT/2})(1 + e^{-sT/2})} \\ &= \frac{K}{s} \frac{1 - e^{-sT/2}}{1 + e^{-sT/2}} = \frac{K}{s} \tanh \frac{1}{4}sT \end{aligned}$$

confirmando el resultado obtenido en el ejemplo 2.42.

**EJEMPLO 2.44**

Determine la transformada de Laplace de la semi onda rectificada definida por

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & (0 < t < \pi/\omega) \\ 0 & (\pi/\omega < t < 2\pi/\omega) \end{cases}$$

$$f(t + 2n\pi/\omega) = f(t) \quad \text{para todo entero } n$$

**Solución** En la figura 2.30(d) está ilustrada  $f(t)$ , con  $T = 2\pi/\omega$ . Podemos expresar  $f_1(t)$  como

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin \omega t [H(t) - H(t - \pi/\omega)] \\ &= \sin \omega t H(t) + \sin \omega(t - \pi/\omega) H(t - \pi/\omega) \end{aligned}$$

Así

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + e^{-s\pi/\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (1 + e^{-s\pi/\omega})$$

Entonces, por el resultado del teorema 2.5,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-s\pi/\omega}}{1 - e^{-2s\pi/\omega}} \\ &= \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-s\pi/\omega})} \end{aligned}$$

## 2.5.7 Ejercicios

13 La función  $f(t)$  está definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t > 1) \end{cases}$$

Expresese  $f(t)$  en términos de las funciones escalones unitarios de Heaviside y verifique que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}) - \frac{1}{s}e^{-s}$$

14 Exprese en términos de las funciones escalones unitarios de Heaviside las siguientes funciones causales continuas a pedazos. En cada caso, obtenga la transformada de Laplace de la función.

$$(a) f(t) = \begin{cases} 3t^2 & (0 \leq t \leq 4) \\ 2t - 3 & (4 < t \leq 6) \\ 5 & (t > 6) \end{cases}$$

$$(b) g(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < 1) \\ 2-t & (1 < t < 2) \\ 0 & (t > 2) \end{cases}$$

15 Obtenga la transformada inversa de Laplace de las siguientes:

$$(a) \frac{e^{-5s}}{(s-2)^4} \quad (b) \frac{3e^{-2s}}{(s+3)(s+1)}$$

$$(c) \frac{s+1}{s^2(s^2+1)} e^{-s} \quad (d) \frac{s+1}{s^2+s+1} e^{-\pi s}$$

$$(e) \frac{s}{s^2+25} e^{-4\pi s/5} \quad (f) \frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s^2(s^2+1)}$$

16 Dado que  $x = 0$  cuando  $t = 0$ , obtenga la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad (t \geq 0)$$

donde  $f(t)$  es la función definida en el ejercicio 13. Bosqueje la gráfica de la solución.

17 Dado que  $x = 1$  y  $dx/dt = 0$ , obtenga la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = g(t) \quad (t \geq 0)$$

donde  $g(t)$  es la función continua a pedazos definida en el ejercicio 14(b).

18 Verifique que la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < \frac{1}{2}\pi) \\ \sin t & (t \geq \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$$

puede expresarse en la forma  $f(t) = \cos(t - \frac{1}{2}\pi) H(t - \frac{1}{2}\pi)$ , donde  $H(t)$  es la función escalón unitario de Heaviside. Luego resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = f(t)$$

donde  $f(t)$  está dada arriba, y  $x = 1$  y  $dx/dt = -1$  cuando  $t = 0$ .

19 Exprese la función

$$f(t) = \begin{cases} 3 & (0 \leq t < 4) \\ 2t - 5 & (t \geq 4) \end{cases}$$

en términos de las funciones escalones de Heaviside y obtenga sus transformadas de Laplace. Obtenga la respuesta del oscilador armónico

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

para tal función de fuerza, dado que  $x = 1$  y  $dx/dt = 0$  cuando  $t = 0$ .

20 La respuesta  $\theta_o(t)$  de un sistema para una función de fuerza  $\theta_i(t)$  está determinada por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\theta}_o + 6\dot{\theta}_o + 10\theta_o = \theta_i \quad (t \geq 0)$$

Supongamos que  $\theta_i(t)$  es un estímulo constante aplicado en un período limitado y caracterizado por

$$\theta_i(t) = \begin{cases} 3 & (0 \leq t < a) \\ 0 & (t \geq a) \end{cases}$$

determine la respuesta del sistema en el tiempo  $t$  dado que el sistema estaba inicialmente en un estado de reposo. Muestre que la respuesta en el tiempo  $T (> a)$  es

$$-\frac{3}{10}e^{3T} \{ \cos T + 3 \operatorname{sen} T - e^{3a} [\cos(T-a) + 3 \operatorname{sen}(T-a)] \}$$

21 La entrada  $\theta_i(t)$  y la salida  $\theta_o(t)$  de un servomecanismo están relacionadas por la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta}_o + 8\dot{\theta}_o + 16\theta_o = \theta_i \quad (t \geq 0)$$

y inicialmente  $\theta_o(0) = \dot{\theta}_o(0) = 0$ . Para  $\theta_i = f(t)$ , donde

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & (0 < t < 1) \\ 0 & (t \geq 1) \end{cases}$$

muestre que

$$\mathcal{L}\{\theta_o(t)\} = \frac{s-1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

y luego obtenga una expresión para la respuesta del sistema en el tiempo  $t$ .

- 22 Durante el intervalo de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$ , una fuerza constante electromotriz  $e_0$  actúa en el circuito en serie  $RC$  mostrado en la figura 2.33. Supongamos que el circuito inicialmente está en estado de reposo, verifique que la corriente en el circuito en el tiempo  $t$  es

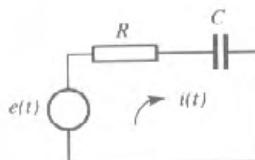


Figura 2.33 Circuito del ejercicio 22.

$$i(t) = \frac{e_0}{R} [e^{-(t-t_1)/RC} H(t-t_1) - e^{-(t-t_2)/RC} H(t-t_2)]$$

Dibújela como una función del tiempo.

- 23 Una función periódica  $f(t)$ , con periodo de 4 unidades, está definida dentro del intervalo  $0 \leq t < 4$  por

$$f(t) = \begin{cases} 3t & (0 \leq t < 2) \\ 6 & (2 \leq t < 4) \end{cases}$$

Dibuje una gráfica de la función para  $0 \leq t < 12$  y obtenga su transformada de Laplace.

- 24 Obtenga la transformada de Laplace de la onda diente de sierra periódica con periodo  $T$  ilustrada en la figura 2.30(b).

## 2.5.8 La función impulso

En muchas aplicaciones en la ingeniería estamos interesados en buscar la respuesta de sistemas a funciones fuerza que son aplicadas de repente pero sólo en un tiempo muy corto. Estas funciones son conocidas como **fuerzas impulsivas**. Matemáticamente, tales funciones de fuerza son idealizadas por la **función impulso**, que es una función cuyo valor total está concentrado en un punto. Para desarrollar una formulación matemática de la función impulso y comprender su interpretación física, consideramos la función de pulso  $\phi(t)$  definida por

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < a - \frac{1}{2}T) \\ A/T & (a - \frac{1}{2}T \leq t < a + \frac{1}{2}T) \\ 0 & (t \geq a + \frac{1}{2}T) \end{cases}$$

Ilustrada en la figura 2.34(a). Como la altura del pulso es  $A/T$  y su duración (o su ancho) es  $T$ , el área debajo del pulso es  $A$ ; esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \int_{a-T/2}^{a+T/2} \frac{A}{T} dt = A$$

Si ahora consideramos el proceso límite en el que la duración del pulso se approxima a cero, de tal manera que el área bajo el pulso siga siendo  $A$ , entonces obtenemos una formulación para la función impulso de magnitud  $A$  que ocurre en el tiempo  $t = a$ . Es importante apreciar que la magnitud de la función impulso está medida por su área.

La función impulso cuya magnitud es unitaria es llamada **función impulso unitario** o **función delta de Dirac**. El impulso unitario que ocurre en el tiempo  $t = a$  es el caso límite del pulso  $\phi(t)$  de la figura 2.34(a) con el valor de  $A$  igual a la unidad. Se denota por  $\delta(t - a)$  y tiene las propiedades

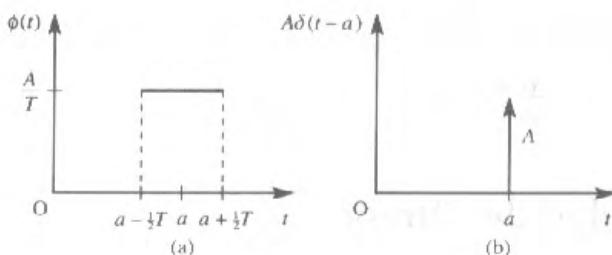


Figura 2.34 Función impulso.

$$\delta(t - a) = 0 \quad (t \neq a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1$$

Igualmente, una función impulso de magnitud  $A$  que ocurre en el tiempo  $t = a$  es denotada por  $A\delta(t - a)$  y puede ser representada como el diagrama de la figura 2.34(b).

Una función impulso no es una función en el sentido usual, pero es un ejemplo de una clase de las llamadas **funciones generalizadas**, que pueden ser analizadas usando la teoría del **cálculo generalizado**. (También puede ser vista matemáticamente como una **distribución** e investigada usando la **teoría de distribuciones**.) Sin embargo, sus propiedades son tales que, usadas con cuidado, pueden conducir a resultados que tienen significado físico o práctico y que en muchos casos no se pueden obtener por ningún otro método. En este contexto, provee a los ingenieros de una herramienta matemática importante. Aunque, claramente, una función impulso no es físicamente realizable, se sigue de la formulación anterior que pueden producirse señales físicas muy parecidas.

Observamos que la magnitud de la función impulso está determinada por el área bajo el pulso que la aproxima. La forma real del pulso que tiende a ella realmente no es importante, siempre que el área contenida bajo ella permanezca constante cuando su duración se aproxime a cero. Por tanto, físicamente, la función impulso unitario en  $t = a$  puede ser vista igualmente como el pulso  $\phi_1(t)$  de la figura 2.35 en el caso límite cuando  $T$  tiende a cero.

En algunas aplicaciones se tiene que considerar una función impulso unitario en el tiempo  $t = 0$ . Esto se denota mediante  $\delta(t)$  y está definido como el caso límite del pulso  $\phi_2(t)$  ilustrado en la figura 2.36 cuando  $T$  tiende a cero. Tiene las propiedades

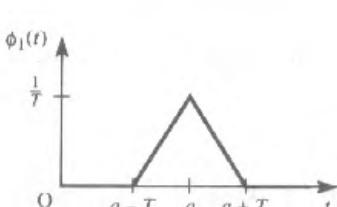


Figura 2.35 Aproximación del pulso unitario.

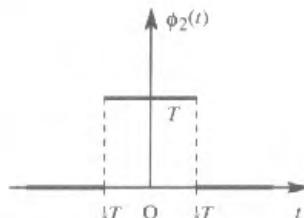


Figura 2.36 Pulso en el origen.

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

### 2.5.9 La propiedad de filtrado

Una propiedad importante de la función impulso unitario que es de significado práctico es la así llamada **propiedad de filtrado**, que establece que si  $f(t)$  es continua en  $t = a$  entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a) \quad (2.48)$$

Esto se conoce como la propiedad de filtrado porque provee un método que permite aislar, o separar, el valor de una función en cualquier punto particular.

Por razones teóricas es conveniente usar límites infinitos en (2.48), aunque en realidad pueden ser sustituidos límites finitos. Esto es cierto ya que para  $\alpha < a < \beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes

$$\int_a^{\beta} f(t) \delta(t-a) dt = f(a) \quad (2.49)$$

Por ejemplo,

$$\int_0^{2\pi} \cos t \delta(t - \frac{1}{3}\pi) dt = \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

### 2.5.10 La transformada de Laplace de las funciones impulsivas

Por la definición de la transformada de Laplace, tenemos que para cualquier  $a > 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt$$

la cual, usando la propiedad de filtrado, da el importante resultado

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \quad (2.50)$$

o, en términos de la transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t-a) \quad (2.51)$$

Como se mencionó antes, en muchas aplicaciones se puede tener una función impulso  $\delta(t)$  en  $t = 0$ , y para poder manejar esta función, se debe especificar cuidadosamente si el límite inferior en la integral de Laplace definida en la sección 2.2.1 es  $0-$  o  $0+$ . Adoptando la notación

$$\mathcal{L}_+\{f(t)\} = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}_-\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

tenemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{0+} f(t) e^{-st} dt + \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Si  $f(t)$  no involucra un función impulso en  $t = 0$  entonces claramente  $\mathcal{L}_+\{f(t)\} = \mathcal{L}_-\{f(t)\}$ . Sin embargo, si  $f(t)$  involucra una función impulso en  $t = 0$  entonces

$$\int_{0-}^{0+} f(t) dt \neq 0$$

y se sigue que

$$\mathcal{L}_+\{f(t)\} \neq \mathcal{L}_-\{f(t)\}$$

En la sección 2.2.1 adoptamos la definición

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}_-\{f(t)\}$$

así que (2.50) y (2.51) se satisfacen para  $a = 0$ , dando

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

así que

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{2.52}$$

o, en la forma inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t) \tag{2.53}$$

**EJEMPLO 2.45** Determine  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^2 + 4}\right\}$ .

**Solución**

Como  $s^2 + 4 = s^2 + 2^2$ , la respuesta es obviamente  $\cos(2t)$ .

$$\frac{s^2}{s^2 + 4} = \frac{s^2 + 4 - 4}{s^2 + 4} = 1 - \frac{4}{s^2 + 4}$$

tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4}\right\}$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^2+4}\right\} = \delta(t) - 2 \operatorname{sen} 2t$$

### EJEMPLO 2.46

Determine la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 1 + \delta(t-4) \quad (2.54)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ .

**Solución** Aplicando la transformada de Laplace en (2.54) se obtiene

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\delta(t-4)\}$$

que, incorporando las condiciones iniciales dadas y usando (2.50), lleva a

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = \frac{1}{s} + e^{-4s}$$

dando

$$X(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+1)} + e^{-4s} \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales, tenemos

$$X(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{2}{s+1} \right) + e^{-4s} \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right)$$

que, aplicando la transformada inversa y usando el resultado (2.45), da la respuesta requerida:

$$x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t} - 2e^{-t}) + (e^{-(t-4)} - e^{-2(t-4)})H(t-4)$$

o, en una forma alternativa,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + e^{-2t} - 2e^{-t}) & (0 \leq t < 4) \\ \frac{1}{2} + (e^4 - 1)e^{-t} - (e^8 - \frac{1}{2})e^{-2t} & (t \geq 4) \end{cases}$$

Observamos que, aunque la respuesta  $x(t)$  es continua en  $t = 4$ , la consecuencia de una entrada impulsiva en  $t = 4$  es un cambio escalonado en la derivada  $\dot{x}(t)$ .

## 2.5.11 Relaciones entre las funciones escalón de Heaviside y de impulso

De las definiciones de  $H(t)$  y  $\delta(t)$  se puede argumentar que

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (2.55)$$

ya que el intervalo de integración contiene al cero si  $t > 0$  pero no si  $t < 0$ . Inversamente, (2.55) puede escribirse como

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} H(t) = H'(t) \quad (2.56)$$

que expresa el hecho de que  $H'(t)$  es cero en todas partes excepto en  $t = 0$ , cuando ocurre el salto en  $H(t)$ .

Mientras este argumento puede bastar en la práctica, ya que estamos tratando con funciones generalizadas, una demostración más formal requiere del desarrollo de algunas propiedades de funciones generalizadas. En particular, necesitamos definir lo que significa que dos funciones generalizadas sean equivalentes.

Un método para tratar el tema consiste en utilizar el concepto de una **función de prueba**  $\theta(t)$ , que es una función continua que tiene derivadas continuas de todos los órdenes y que es cero fuera de un intervalo finito. Una clase de funciones de prueba adoptada por R. R. Gabel y R. A. Roberts (*Signals and Linear Systems*, Wiley, New York, 1973), es

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{-d^2/(d^2-t^2)} & (|t| < d), \text{ donde } d = \text{constante} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para una función generalizada  $g(t)$  se evalúa la integral

$$G(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) g(t) dt$$

Esta integral asigna el número  $G(\theta)$  a cada función  $\theta(t)$ , así que  $G(\theta)$  es una generalización del concepto de función: es una **funcional lineal** en el espacio de las funciones prueba  $\theta(t)$ . Por ejemplo, si  $g(t) = \delta(t)$  entonces

$$G(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) \delta(t) dt = \theta(0)$$

así que en este caso particular, para cada función de prueba  $\theta(t)$ , se asigna el valor  $\theta(0)$  a  $G(\theta)$ .

Ahora podemos usar el concepto de función de prueba para definir lo que significa que dos funciones generalizadas sean equivalentes o 'iguales'.

**DEFINICIÓN 2.2: La propiedad de equivalencia**

Si  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  son dos funciones generalizadas entonces  $g_1(t) = g_2(t)$  si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)g_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)g_2(t) dt$$

para toda función de prueba  $\theta(t)$  para la cual las integrales existen.

La función de prueba puede verse como un ‘dispositivo’ para examinar la función generalizada. Gabel y Roberts mostraron un cierto paralelismo con el papel que tiene el uso de la salida de un instrumento de medición para deducir propiedades de lo que se quiere medir. En tal analogía  $g_1(t) = g_2(t)$  si el instrumento de medición no puede detectar diferencias entre ellos.

Usando el concepto de una función de prueba  $\theta(t)$ , la función delta de Dirac  $\delta(t)$  puede definirse en la forma generalizada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\delta(t) dt = \theta(0)$$

Interpretada como una integral usual, ésta no tiene significado. La integral y la función  $\delta(t)$  están simplemente definidas por el número  $\theta(0)$ . En este sentido podemos manipular  $\delta(t)$  como si fuera una función ordinaria, excepto que nunca hablamos del valor de  $\delta(t)$ ; más bien, hablamos del valor de las integrales que involucran a  $\delta(t)$ .

Usando la propiedad de equivalencia, podemos ahora confirmar el resultado (2.36), es decir, que

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} H(t) = H'(t)$$

Para demostrar esto, debemos comprobar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)H'(t) dt \quad (2.57)$$

Integrando por partes el lado derecho de (2.57), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)H'(t) dt &= [H(t)\theta(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\theta'(t) dt \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(t) dt \quad (\text{por las definiciones de } \theta(t) \text{ y } H(t)) \\ &= -[\theta(t)]_0^\infty = \theta(0) \end{aligned}$$

Como la parte izquierda de (2.57) también es  $\theta(0)$ , la equivalencia de  $\delta(t)$  y  $H'(t)$  está probada.

Igualmente, se puede comprobar que

$$\delta(t-a) = \frac{d}{dt} H(t-a) = H'(t-a) \quad (2.58)$$

Los resultados (2.56) y (2.58) pueden usarse para obtener la derivada generalizada de funciones continuas a pedazos que tienen saltos de discontinuidad  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

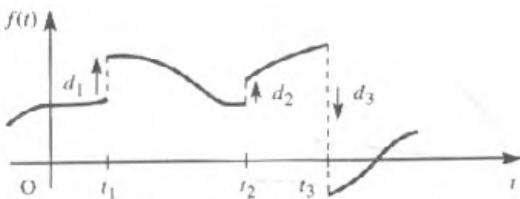


Figura 2.37 Función continua a pedazos con saltos de discontinuidad.

en los tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  respectivamente, como está ilustrado en la figura 2.37. Expresando  $f(t)$  en términos de las funciones escalonadas de Heaviside como en la sección 2.5.1, y al diferenciar con la regla del producto, (2.56) y (2.58) llevan al resultado

$$f'(t) = g'(t) + \sum_{i=1}^n d_i \delta(t - t_i) \quad (2.59)$$

donde  $g'(t)$  denota la derivada usual de  $f(t)$  donde ésta existe. El resultado (2.59) nos dice que la derivada de una función continua a pedazos con saltos de discontinuidad es la derivada común donde ésta existe más la suma de las funciones delta en las discontinuidades multiplicadas por las magnitudes de los saltos respectivos.

La magnitud  $d_i$  de un salto de una función  $f(t)$  en el punto  $t_i$ , significa la diferencia entre los límites laterales derecho e izquierdo de  $f(t)$  en  $t_i$ ; esto es,

$$d_i = f(t_i + 0) - f(t_i - 0)$$

Se sigue que un salto hacia arriba, como  $d_1$  y  $d_2$  en la figura 2.37, es positivo, mientras que el salto hacia abajo, como  $d_3$  es negativo.

El resultado (2.59) nos indica por qué, en sistemas prácticos, el uso de derivadores no se recomienda, ya que la introducción de impulsos significa que las derivadas incrementan los niveles de ruido en la recepción de señales. En contraste, los integradores tienen un efecto suavizante en las señales por lo que son usados ampliamente.

#### EJEMPLO 2.47

Obtenga la derivada generalizada de la función continua a pedazos

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 + 1 & (0 \leq t < 3) \\ t + 4 & (3 \leq t < 5) \\ 4 & (t \geq 5) \end{cases}$$

#### Solución

En la figura 2.38 se describe gráficamente a  $f(t)$ , que tiene saltos de discontinuidad de magnitudes 1, -12 y -5 en los tiempos  $t = 0, 3$  y  $5$  respectivamente. Usando (2.59), la derivada generalizada es

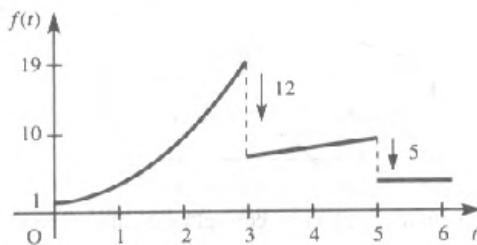


Figura 2.38 Función continua a pedazos del ejemplo 2.47.

$$f'(t) = g'(t) + 1\delta(t) - 12\delta(t-3) - 5\delta(t-5)$$

donde

$$g'(t) = \begin{cases} 4t & (0 \leq t < 3) \\ 1 & (3 \leq t < 5) \\ 0 & (t \geq 5) \end{cases}$$

### EJEMPLO 2.48

Un sistema está caracterizado por el modelo de ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = u + 3 \frac{du}{dt} \quad (2.60)$$

Determine la respuesta del sistema a una función de fuerza  $u(t) = e^{-t}$  aplicada en el tiempo  $t = 0$ , sabiendo que inicialmente está en estado de reposo.

**Solución** Como el sistema está inicialmente en estado de reposo, la ecuación transformada correspondiente a (2.60) es

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = (3s + 1)U(s)$$

dado

$$X(s) = \frac{3s+1}{s^2+5s+6} U(s)$$

En el caso particular, cuando  $u(t) = e^{-t}$ ,  $U(s) = 1/(s+1)$ , así que

$$X(s) = \frac{(3s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3}$$

que, aplicando la transformada inversa, da la respuesta deseada como

$$x(t) = -e^{-t} + 5e^{-2t} - 4e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

Uno puede estar tentado a adoptar un método diferente y sustituir directamente en (2.60)  $u(t)$  antes de aplicar la transformada de Laplace. Esto lleva a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = e^{-t} - 3e^{-t} = -2e^{-t}$$

que aplicando la transformada de Laplace lleva a

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = -\frac{2}{s+1}$$

dando

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

que en la inversión da

$$x(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} - e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

Claramente, con este método llegamos a un resultado diferente y, por tanto, parece llevarnos a una paradoja. Sin embargo, esta paradoja aparente puede resolverse observando que el segundo método es erróneo ya que ignora el hecho importante de que estamos trabajando con funciones causales. Estrictamente hablando

$$u(t) = e^{-t}H(t)$$

y, cuando determinamos  $du/dt$ , debe usarse la regla del producto del cálculo diferencial, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -e^{-t}H(t) + e^{-t}\frac{d}{dt}H(t) \\ &= -e^{-t}H(t) + e^{-t}\delta(t)\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.60) y aplicando la transformada de Laplace llegamos a

$$\begin{aligned}(s^2 + 5s + 6)X(s) &= \frac{1}{s+1} + 3\left(-\frac{1}{s+1} + 1\right) \\ &= \frac{3s+1}{s+1}\end{aligned}$$

Esto es,

$$X(s) = \frac{3s+1}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)}$$

que es la misma respuesta

$$x(t) = -e^{-t} + 5e^{-2t} - 4e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

del primer método anterior.

La ecuación diferencial que se utilizó en el ejemplo 2.48 es de una forma que aparece con frecuencia en la práctica, así que es importante reconocer la naturaleza causal de la función de fuerza.

La derivada  $\delta'(t)$  de la función delta también es una función generalizada, y usando la propiedad de equivalencia se demuestra fácilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t) dt = -f'(0)$$

o, en forma más general,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t-a) dt = -f'(a)$$

suponiendo que  $f'(t)$  es continua en  $t = a$ .

Igualmente, la  $n$ -ésima derivada satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-a) dt = (-1)^n f^{(n)}(a)$$

suponiendo que  $f^{(n)}(t)$  es continua en  $t = a$ .

Usando la definición de la transformada de Laplace, se sigue que

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t-a)\} = s^n e^{-as}$$

y, en particular,

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n \quad (2.61)$$

## 2.5.12 Ejercicios

- 25 Obtenga la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$(a) \frac{2s^2 + 1}{(s+2)(s+3)} \quad (b) \frac{s^2 - 1}{s^2 + 4} \quad (c) \frac{s^2 + 2}{s^2 + 2s + 5}$$

- 26 Resuelva para  $t \geq 0$  las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones iniciales específicas:

$$(a) \frac{d^2x}{dt^2} + 7 \frac{dx}{dt} + 12x = 2 + \delta(t-2)$$

$$\text{sujeta a } x=0 \text{ y } \frac{dx}{dt}=0 \text{ en } t=0$$

$$(b) \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 13x = \delta(t-2\pi)$$

$$\text{sujeta a } x=0 \text{ y } \frac{dx}{dt}=0 \text{ en } t=0$$

$$(c) \frac{d^2x}{dt^2} + 7 \frac{dx}{dt} + 12x = \delta(t-3)$$

$$\text{sujeta a } x=1 \text{ y } \frac{dx}{dt}=1 \text{ en } t=0$$

- 27 Obtenga la derivada generalizada de las siguientes funciones continuas a pedazos:

$$(a) f(t) = \begin{cases} 3t^2 & (0 \leq t < 4) \\ 2t-3 & (4 \leq t < 6) \\ 5 & (t \geq 6) \end{cases}$$

$$(b) g(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < 1) \\ 2-t & (1 \leq t < 2) \\ 0 & (t \geq 2) \end{cases}$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} 2t+5 & (0 \leq t < 2) \\ 9-3t & (2 \leq t < 4) \\ t^2-t & (t \geq 4) \end{cases}$$

- 28 Resuelva para  $t \geq 0$  la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 7 \frac{dx}{dt} + 10x = 2u + 3 \frac{du}{dt}$$

sujeta a  $x=0$  y  $dx/dt=2$  en  $t=0$  y donde  $u(t) = e^{-2t}H(t)$ .

- 29 Una función periódica  $f(t)$  es un tren infinito de impulsos unitarios en  $t=0$  y repetido en intervalos de  $t=T$ . Verifique que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

La respuesta de un oscilador armónico a este estímulo periódico está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t) \quad (t \geq 0)$$

Verifique que

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} H(t - nT) \operatorname{sen} \omega(t - nT) \quad (t \geq 0)$$

y dibuje las respuestas de  $t = 0$  a  $t = 6\pi/\omega$  para los dos casos (a)  $T = \pi/\omega$  y (b)  $T = 2\pi/\omega$ .

- 30 Un impulso de voltaje  $E\delta(t)$  es aplicado en el tiempo  $t = 0$  a un circuito que consiste de una resistencia  $R$ , un capacitor  $C$  y un inductor  $L$  conectados en serie. Antes de aplicar el voltaje, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la carga  $q(t)$  en el capacitor y la corriente resultante  $i(t)$  en el circuito en el tiempo  $t$ .

## 2.5.13 Deformación de vigas

Hasta aquí hemos considerado ejemplos donde se han utilizado los métodos de la transformada de Laplace para resolver problemas con valores iniciales. Estos métodos también pueden usarse para resolver problemas con valores en la frontera y, para ilustrarlo, consideramos en esta sección la aplicación de los métodos de la transformada de Laplace para determinar la deformación transversal de una viga delgada uniforme debido a una carga.

Consideremos una viga delgada uniforme de longitud  $l$  y sea  $y(x)$  su desplazamiento transversal, a una distancia  $x$  medida desde uno de los extremos, de la posición original debido a la carga. En la figura 2.39 está ilustrada esta situación, con el desplazamiento medido hacia arriba. Entonces, de la teoría elemental de las vigas, tenemos

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -W(x) \quad (2.62)$$

donde  $W(x)$  es la fuerza transversal por unidad de longitud, considerando la dirección positiva hacia abajo y  $EI$  es la rigidez de flexión de la viga ( $E$  es el módulo de elasticidad de Young y  $I$  es el momento de inercia de la viga alrededor de su eje central). Se supone que la viga tiene propiedades uniformes de elasticidad y una sección transversal uniforme en toda su longitud, así que tanto  $E$  como  $I$  se toman como constantes.

La ecuación (2.62) se escribe algunas veces como

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = W(x)$$

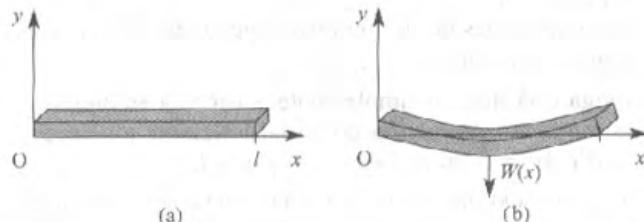


Figura 2.39 Deflexión transversal de una viga: (a) posición inicial; (b) posición desplazada.

donde  $y(x)$  es su desplazamiento transversal medido hacia abajo y no hacia arriba como en (2.62).

En los casos cuando la carga es uniforme a lo largo de toda la longitud de la viga, esto es,  $W(x) = \text{constante}$ , (2.62) se puede resolver fácilmente con las técnicas normales del cálculo integral. Sin embargo, cuando la carga no es uniforme, los métodos de la transformada de Laplace tienen una ventaja importante, ya que haciendo uso de las funciones unitarias de Heaviside y de las funciones impulso, el problema de resolver (2.62) independientemente para varias secciones de la viga puede evitarse.

Aplicando la transformada de Laplace en todo (2.62) se tiene

$$EI[s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y_1(0) - s y_2(0) - y_3(0)] = -W(s) \quad (2.63)$$

donde

$$y_1(0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}, \quad y_2(0) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}, \quad y_3(0) = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$$

y pueden interpretarse físicamente como sigue:

$EIy_3(0)$  es la fuerza cortante en  $x = 0$

$EIy_2(0)$  es el momento de torsión en  $x = 0$

$y_1(0)$  es la pendiente en  $x = 0$

$y(0)$  es la deflexión en  $x = 0$

Resolviendo (2.63) para  $y(s)$  llegamos a

$$Y(s) = -\frac{W(s)}{EI s^4} + \frac{y(0)}{s} + \frac{y_1(0)}{s^2} + \frac{y_2(0)}{s^3} + \frac{y_3(0)}{s^4} \quad (2.64)$$

Así, se necesita encontrar cuatro condiciones de frontera e idealmente deben ser la fuerza cortante, el momento de torsión, la pendiente y la deflexión en  $x = 0$ . Sin embargo, en la práctica estas condiciones de frontera no siempre están disponibles. Mientras que algunas de ellas son conocidas, otras condiciones de frontera están especificadas, en puntos distintos de  $x = 0$  a lo largo de la viga, por ejemplo condiciones en el extremo,  $x = l$ , o condiciones en posibles puntos de soporte a lo largo de la viga. Esto es, nos enfrentamos con problemas con valores en la frontera en vez de problemas con valores iniciales.

Para proceder, las condiciones conocidas en  $x = 0$  son insertadas, mientras que las otras condiciones entre  $y(0)$ ,  $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$  y  $y_3(0)$  que no están especificadas pasan como constantes indeterminadas. Se aplican las transformadas inversas en (2.45) para obtener la deflexión  $y(x)$ , y las constantes indeterminadas pendientes se obtienen usando las condiciones de frontera especificadas en los puntos a lo largo de la viga distintos de  $x = 0$ .

Las condiciones de frontera usualmente están indicadas en condiciones físicas tales como la siguiente:

(a) La viga está libre, o simplemente, sostenida en ambos extremos, indicando que tanto el momento de torsión como la deflexión son cero en ambos extremos, así que  $y = d^2y/dx^2 = 0$  en ambos  $x = 0$  y  $x = l$ .

(b) En ambos extremos la viga está sujetada o construida en una pared. De esta manera, la viga está horizontal en ambos extremos, así que  $y = dy/dx = 0$  en ambos  $x = 0$  y  $x = l$ .

(c) La viga está volada con un extremo libre (esto es, fija horizontalmente en un extremo, con el otro extremo libre). En el extremo fijo (digamos  $x = 0$ )

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0$$

y en el extremo libre ( $x = l$ ), como tanto la fuerza cortante y el momento de torsión son cero,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \quad \text{en } x = l$$

Si la carga no es uniforme a lo largo de toda la viga, se hace uso de las funciones escalón de Heaviside y de las funciones de impulso para especificar  $W(x)$  en (2.62). Por ejemplo, un peso uniforme  $w$  por unidad de longitud sobre la porción de la viga  $x = x_1$  a  $x = x_2$  se especifica como  $wH(x - x_1) - wH(x - x_2)$ , y un peso puntual  $w$  en  $x = x_1$  se especifica como  $w\delta(x - x_1)$ .

### EJEMPLO 2.49

La figura 2.40 ilustra una viga uniforme de longitud  $l$ , soportada libremente en ambos extremos, que se dobla bajo su propio peso  $W$  uniformemente distribuido y una carga concentrada en un punto  $P$  en  $x = \frac{1}{3}l$ . Determine la deflexión transversal  $y(x)$  de la viga.

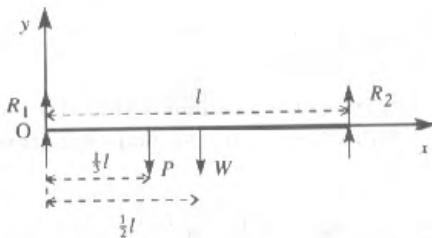


Figura 2.40 Viga con carga del ejemplo 2.49.

### Solución

Como en la figura 2.39, el origen se coloca en el extremo izquierdo de la viga y la deflexión  $y(x)$  se mide hacia arriba desde la horizontal en el nivel de los soportes. La deflexión  $y(x)$  está dada por (2.62), con la función de fuerza  $W(x)$  teniendo contribuciones del peso  $W$ , la carga concentrada  $P$  y las reacciones del soporte  $R_1$  y  $R_2$ . Sin embargo, como estamos interesados en resolver (2.62) para  $0 \leq x \leq l$ , las cargas puntuales o reacciones en el extremo  $x = l$  pueden ser omitidas de la función de fuerza.

Preliminarmente, necesitamos determinar  $R_1$ . Esto se hace aplicando momentos estáticos alrededor del extremo  $x = l$ , suponiendo que el peso  $W$  está concentrado en el centroide  $x = \frac{1}{2}l$ , dando

$$R_1 l = \frac{1}{2}Wl + P \frac{2}{3}l$$

o

$$R_1 = \frac{1}{2}W + \frac{2}{3}P$$

Entonces la función de fuerza  $W(x)$  puede expresarse como

$$W(x) = \frac{W}{l} H(x) + P\delta(x - \frac{1}{3}l) - (\frac{1}{2}W + \frac{2}{3}P)\delta(x)$$

con la transformada de Laplace

$$W(s) = \frac{W}{ls} + P e^{-\frac{ls}{3}} - (\frac{1}{2}W + \frac{2}{3}P)$$

Como la viga está sostenida libremente en los extremos, la deflexión y el momento de torsión son cero en ambos extremos, así que tomando las condiciones de frontera como

$$y = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = l$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = l$$

La ecuación (2.64) transformada se convierte en

$$Y(s) = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{W}{ls^5} + \frac{P}{s^4} e^{-\frac{ls}{3}} - \left( \frac{1}{2}W + \frac{2}{3}P \right) \frac{1}{s^4} \right] + \frac{y_1(0)}{s^2} + \frac{y_3(0)}{s^4}$$

Aplicando la transformada inversa, usando el segundo teorema de traslación (teorema 2.4), se obtiene la deflexión  $y(x)$  como

$$y(x) = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{24} \frac{W}{l} x^4 + \frac{1}{6} P \left( x - \frac{1}{3}l \right)^3 H \left( x - \frac{1}{3}l \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2}W + \frac{2}{3}P \right) x^3 \right] \\ + y_1(0)x + \frac{1}{6} y_3(0)x^3$$

Para obtener los valores de las constantes indeterminadas  $y_1(0)$  y  $y_3(0)$ , utilizamos las condiciones en la frontera en  $x = l$  que no hemos utilizado, a saber  $y(l) = 0$ ;  $y_2(l) = 0$ . Para  $x > \frac{1}{3}l$

$$y(x) = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{24} \frac{W}{l} x^4 + \frac{1}{6} P \left( x - \frac{1}{3}l \right)^3 - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2}W + \frac{2}{3}P \right) x^3 \right] + y_1(0)x + \frac{1}{6} y_3(0)x^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2(x) = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{Wx^2}{2l} + P \left( x - \frac{1}{3}l \right) - \left( \frac{1}{3}W + \frac{2P}{3} \right) x \right] + y_3(0)x$$

Así, tomando  $y_2(l) = 0$  da  $y_3(0) = 0$ , y tomando  $y(l) = 0$  da

$$-\frac{1}{EI} \left( \frac{1}{24} WI^3 + \frac{4}{81} PI^3 - \frac{1}{12} WI^3 - \frac{1}{9} PI^3 \right) + y_1(0)l = 0$$

así que

$$y_1(0) = -\frac{l^2}{EI} \left( \frac{1}{24} W + \frac{5}{81} P \right)$$

Sustituyendo hacia atrás, encontramos que la deflexión  $y(x)$  está dada por

$$y(x) = -\frac{W}{EI} \left( \frac{x^4}{24l} - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{24} l^2 x \right) - \frac{P}{EI} \left( \frac{5}{81} l^2 x - \frac{1}{9} x^3 \right) - \frac{P}{6EI} \left( x - \frac{1}{3}l \right)^3 H \left( x - \frac{1}{3}l \right)$$

o, para las dos secciones de la viga,

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{W}{EI} \left( \frac{x}{24I} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}l^2x \right) - \frac{P}{EI} \left( \frac{5}{81}l^2x - \frac{1}{9}x^3 \right) & (0 < x < \frac{1}{3}l) \\ -\frac{W}{EI} \left( \frac{x^4}{24I} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}l^2x \right) - \frac{P}{EI} \left( \frac{19}{162}l^2x + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{6}x^2l - \frac{1}{162}l^3 \right) & \left( \frac{1}{3}l < x < l \right) \end{cases}$$

## 2.5.14 Ejercicios

31 Encuentre la deflexión de una viga sostenida simplemente en sus extremos  $x = 0$  y  $x = l$ , con un momento de torsión bajo su propio peso  $M$  uniformemente distribuido y una carga  $W$  concentrada en  $x = \frac{1}{2}l$ .

32 Una viga volada con un peso despreciable y de longitud  $l$  está sujetada en el extremo  $x = 0$ . Determine la deflexión de la viga cuando está sometida a una

carga por unidad de longitud,  $w$ , sobre la sección  $x = x_1$  a  $x = x_2$ . ¿Cuál es la máxima deflexión si  $x_1 = 0$  y  $x_2 = l$ ?

33 Una viga volada uniforme de longitud  $l$  está sometida a una carga concentrada  $W$  en el punto que está a una distancia  $b$  del extremo fijo. Determine la deflexión de la viga distinguiendo entre las secciones  $0 < x \leq b$  y  $b < x \leq l$ .

## 2.6

# Funciones de transferencia

### 2.6.1

## Definiciones

La **función de transferencia** de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la razón de la transformada de Laplace de la salida del sistema (o función de respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada del sistema (o función de fuerza), *bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero* (esto es, el sistema está inicialmente en un **estado de reposo**).

Las **funciones de transferencia** se usan frecuentemente en ingeniería para caracterizar las relaciones de entrada-salida de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, y juegan un papel importante en el análisis y diseño de dichos sistemas.

Consideraremos un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u \quad (2.65)$$

donde  $n \geq m$ , las  $a$  y las  $b$  son coeficientes constantes, y  $x(t)$  es la respuesta del sistema o salida correspondiente a la entrada o término de fuerza  $u(t)$  aplicado en el tiempo  $t = 0$ . Aplicando la transformada de Laplace a todo (2.65) llegaremos a la

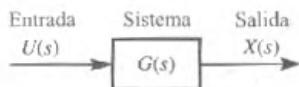


Figura 2.41 Diagrama en bloque de la función de transferencia.

ecuación transformada. Como se supone que todas las condiciones iniciales son cero, vemos de (2.15) que, para obtener la ecuación transformada, simplemente reemplazamos  $d/dt$  por  $s$  obteniendo

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)X(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)U(s)$$

donde  $X(s)$  y  $U(s)$  denotan las transformadas de Laplace de  $x(t)$  y  $u(t)$  respectivamente.

La función de transferencia del sistema  $G(s)$  se define como

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (2.66)$$

y el sistema puede representarse en forma de diagrama por la operación dentro de la caja de la figura 2.41. Esta representación se conoce como el **diagrama en bloque de entrada-salida** del sistema.

Escribiendo

$$P(s) = b_m s^m + \dots + b_0$$

$$Q(s) = a_n s^n + \dots + a_0$$

la función de transferencia puede expresarse como

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

donde, para hacer que el sistema sea físicamente realizable, los grados  $m$  y  $n$  de los polinomios  $P(s)$  y  $Q(s)$  deben ser tales que  $n \geq m$ . Esto se debe a que si  $m > n$ , sigue de (2.61) que la respuesta del sistema  $x(t)$  a una entrada realista  $u(t)$  involucrará impulsos.

La ecuación  $Q(s) = 0$  es llamada la **ecuación característica** del sistema, su orden determina el **orden del sistema** y sus raíces se conocen como los **polos** de la función de transferencia. De la misma manera, las raíces de  $P(s) = 0$  son los **ceros** de la función de transferencia.

Es importante darse cuenta de que, en general, una función de transferencia sólo se usa para caracterizar un sistema lineal invariante en el tiempo. Es una propiedad del propio sistema y es independiente tanto de la entrada como de la salida del sistema.

A pesar de que una función de transferencia caracteriza la dinámica del sistema, no proporciona información concerniente a la estructura física real del sistema, y de hecho sistemas que son físicamente distintos puede tener la misma función de transferencia; por ejemplo, el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 2.12 y el circuito *RLC* de la figura 2.8 tienen ambos la función de transferencia

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\alpha s^2 + \beta s + \gamma}$$

En el sistema masa-resorte-amortiguador,  $X(s)$  determina el desplazamiento  $x(t)$  de la masa y  $U(s)$  representa la fuerza aplicada  $F(t)$ , mientras que  $\alpha$  denota la masa,  $\beta$  el coeficiente de amortiguamiento y  $\gamma$  la constante de resorte. Por otro lado, en el circuito  $RLC$ ,  $X(s)$  determina la carga  $q(t)$  en el capacitor y  $U(s)$  representa la fem  $e(t)$  aplicada, mientras que  $\alpha$  denota la inductancia,  $\beta$  la resistencia y  $\gamma$  la capacitancia.

En la práctica, un sistema completo puede formarse de cierto número de componentes, cada una caracterizada por su propia función de transferencia y relacionadas con una operación en caja. Así que la función de transferencia de entrada-salida del sistema completo se obtiene por las reglas del **álgebra del diagrama de bloque**.

Como  $G(s)$  puede escribirse

$$G(s) = \frac{b_m}{a_m} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

donde  $z_i$ s y  $p_i$ s son los ceros y los polos de la función de transferencia respectivamente, observamos que  $G(s)$  es conocida, excepto por un factor constante, si se conocen las posiciones de todos los polos y los ceros. Por consiguiente, con frecuencia se usa un dibujo de los polos y los ceros de  $G(s)$  como una ayuda en el análisis gráfico de la función de transferencia (una convención común es marcar la posición de un cero mediante un círculo  $\circ$  y la de un polo mediante una cruz  $\times$ ). Como los coeficientes de los polinomios  $P(s)$  y  $Q(s)$  son reales, todas las raíces complejas suceden siempre en pares complejos conjugados, así que el **dibujo polo-cero** es simétrico con respecto del eje real.

### EJEMPLO 2.50

La respuesta  $x(t)$  de un sistema a una función de fuerza  $u(t)$  está determinada por la ecuación diferencial

$$9\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 13x = 2\frac{du}{dt} + 3u$$

- Determine la función de transferencia que caracteriza al sistema.
- Proporcione la ecuación característica del sistema. ¿Cuál es el orden del sistema?
- Determine los polos y los ceros de la función de transferencia e ilústrelos en un diagrama en el plano  $s$ .

### Solución

- Supongamos que todas las condiciones iniciales son cero, aplicando la transformada de Laplace a toda la ecuación diferencial

$$9\frac{d^2X}{dt^2} + 12\frac{dX}{dt} + 13X = 2\frac{DU}{dt} + 3U$$

llegamos a

$$(9s^2 + 12s + 13)X(s) = (2s + 3)U(s)$$

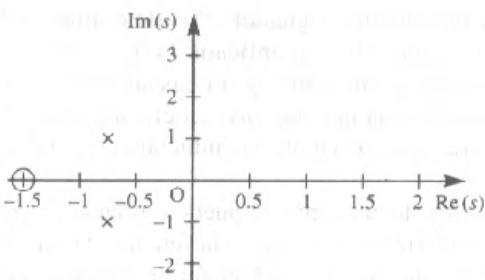


Figura 2.42 Dibujo polo (X)-cero (O) para el ejemplo 2.50.

así la función de transferencia del sistema está dada por

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{9s^2 + 12s + 13}$$

(b) La ecuación característica del sistema es

$$9s^2 + 12s + 13 = 0$$

y el sistema es de orden 2.

(c) Los polos de la función de transferencia son las raíces de la ecuación característica

$$9s^2 + 12s + 13 = 0$$

que son

$$s = \frac{-12 \pm \sqrt{(144 - 468)}}{18} = \frac{-2 \pm j\sqrt{3}}{3}$$

Esto es, la función de transferencia tiene polos simples en

$$s = -\frac{2}{3} + j \quad y \quad s = -\frac{2}{3} - j$$

Los ceros de la función de transferencia están determinados al igualar a cero el polinomio del numerador  $2s + 3$ , dando un cero simple en

$$s = -\frac{3}{2}$$

En la figura 2.42 se muestra el dibujo de polos y ceros que corresponde al plano s.

## 2.6.2 Estabilidad

La estabilidad de un sistema es una propiedad de vital importancia para los ingenieros. De manera intuitiva podemos ver un sistema estable como uno que permanece en reposo a menos que sea excitado por una fuente externa, y retorna al

reposo si se quitan tales influencias externas. Así un sistema estable es uno cuya respuesta, en la ausencia de una entrada, se aproximará a cero conforme el tiempo tiende a infinito. Esto garantiza entonces que cualquier entrada acotada producirá una salida acotada; esta propiedad se toma con frecuencia como la definición de un **sistema lineal estable**.

Es claro que la estabilidad es una propiedad del propio sistema, y no depende del sistema de entrada o de la función de fuerza. Como un sistema puede ser caracterizado en el dominio  $s$  por su función de transferencia  $G(s)$ , será posible usar la función de transferencia para especificar condiciones para que el sistema sea estable.

Considerando la respuesta en el tiempo de

$$X(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

a cualquier entrada  $u(t)$  dada, es necesario factorizar el polinomio del denominador

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

y puede haber varias formas de los factores.

### *Factor simple de la forma $s + \alpha$ , con $\alpha$ real*

Esto corresponde a un polo simple en  $s = -\alpha$ , y en la expansión en fracciones parciales de  $G(s)$  llegará a un término de la forma  $c/(s + \alpha)$  que tiene la respuesta en el tiempo correspondiente  $c e^{-\alpha t} H(t)$ , usando la forma estricta de la inversa dada en (2.12). Si  $\alpha > 0$ , de manera que el polo está en la mitad izquierda del plano  $s$ , la respuesta en el tiempo tenderá a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\alpha < 0$  de manera que el polo está en la mitad derecha del plano  $s$ , la respuesta en el tiempo crecerá sin cota conforme  $t \rightarrow \infty$ . Se sigue que un sistema estable debe tener polos simples con valores reales de  $G(s)$  en la mitad izquierda del plano  $s$ .

$\alpha = 0$  corresponde a un polo simple en el origen teniendo una respuesta en el tiempo correspondiente que es un escalón  $c H(t)$ . Un sistema que tiene tal polo se dice que es **estable marginalmente**; esto no asegura que una entrada acotada llevará a una salida acotada, ya que, por ejemplo, si tal sistema tiene una entrada que es un escalón  $d$  aplicado en el tiempo  $t = 0$  entonces la respuesta será una rampa  $c dt H(t)$ , que no está acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### *Factores simples repetidos de la forma $(s + \alpha)^n$ , con $\alpha$ real*

Esto corresponde a un polo múltiple en  $s = -\alpha$ , y llevará en la expansión en fracciones parciales de  $G(s)$  a un término de la forma  $c/(s + \alpha)^n$  cuya respuesta en el tiempo es  $[c/(n-1)!]t^{n-1} e^{-\alpha t} H(t)$ . De nuevo, la respuesta decaerá a cero conforme  $t \rightarrow \infty$  sólo si  $\alpha > 0$ , esto indicará que un sistema estable debe tener todos los polos repetidos con valores reales de  $G(s)$  en la mitad izquierda del plano  $s$ .

## Factores cuadráticos de la forma $(s + \alpha)^2 + \beta^2$ , con $\alpha$ y $\beta$ reales

Esto corresponde a un par de polos complejos conjugados en  $s = -\alpha + j\beta$ ,  $s = -\alpha - j\beta$ , y llevará en la expansión en fracciones parciales de  $G(s)$  a un término de la forma

$$\frac{c(s + \alpha) + d\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

que tiene la respuesta en el tiempo correspondiente

$$e^{-\alpha t}(c \cos \beta t + d \sin \beta t) = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \gamma)$$

donde  $A = \sqrt{c^2 + d^2}$  y  $\gamma = \tan^{-1}(c/d)$ .

Nuevamente vemos que los polos en la mitad izquierda del plano  $s$  (que corresponden a  $\alpha > 0$ ) tienen respuestas en el tiempo correspondientes que se desvanecen, en la forma de una senoidal exponencialmente amortiguada, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un sistema estable debe tener, por tanto, polos complejos conjugados localizados en la mitad izquierda del plano  $s$ ; esto es, todos los polos complejos deben tener la parte real negativa.

Si  $\alpha = 0$ , la respuesta en el tiempo correspondiente será una senoidal periódica que no se desvanece cuando  $t \rightarrow \infty$ . De nuevo, esta respuesta a un sistema estable marginalmente dará lugar, por ejemplo, a una respuesta que crece sin control conforme  $t \rightarrow \infty$  cuando la entrada es una senoidal con la misma frecuencia  $\beta$ .

En la figura 2.43 aparece un resumen de las respuestas correspondientes a los diversos tipos de polos.

El concepto de estabilidad puede expresarse en la forma de la definición 2.3

### DEFINICIÓN 2.3

Un sistema lineal causal invariante en el tiempo físicamente realizable con función de transferencia  $G(s)$  es estable siempre que todos los polos de  $G(s)$  estén en la mitad izquierda del plano  $s$ .

El requerimiento en la definición de que el sistema sea físicamente realizable, esto es,  $n \geq m$  en la función de transferencia  $G(s)$  de (2.66), evita términos de la forma  $s^{m-n}$  en la expansión en fracciones parciales de  $G(s)$ . Dicho término correspondería a la derivación de orden  $m-n$ , y si se usa una entrada tal como  $\sin \omega t$  para excitar al sistema entonces la respuesta incluirá un término tal como  $\omega^{m-n} \sin \omega t$  o  $\omega^{m-n} \cos \omega t$ , que se puede hacer tan grande como se quiera aumentando la frecuencia de entrada.

En términos de los polos de la función de transferencia  $G(s)$ , su abscisa de convergencia  $\sigma_c$ , corresponde a la parte real del polo más lejano localizado a la derecha en el plano  $s$ . Por ejemplo, si

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+2)}$$

entonces la abscisa de convergencia es  $\sigma_c = -2$ .

Polos de $G(s)$ en la forma $\sigma + j\omega$	Polos en el plano complejo $s$	Respuesta en el tiempo correspondiente	Naturaleza de la respuesta
$\tau = \omega = 0$			Constante
$\sigma = \omega = 0$ (multiplicidad 2)			Rampa
$\sigma < 0, \omega = 0$			Decaimiento exponencial
$\sigma > 0, \omega = 0$			Crecimiento exponencial
$\sigma = 0, \omega > 0$			Senoidal
$\sigma = 0, \omega > 0$ (multiplicidad 2)			Crecimiento senoidal lineal
$\sigma < 0, \omega > 0$			Decaimiento senoidal exponencial
$\sigma > 0, \omega > 0$			Crecimiento senoidal exponencial

Figura 2.43 Relaciones entre los polos de la función de transferencia y el tiempo de respuesta.

Se sigue de la definición 2.3 que la función de transferencia  $G(s)$  de un sistema estable tiene abscisa de convergencia  $\sigma_c = -\alpha$ , con  $\alpha > 0$ . De esta manera, su región de convergencia incluye el eje imaginario, así que  $G(s)$  existe cuando  $s = j\omega$ . Volveremos a este resultado cuando consideremos la relación entre la transformada de Laplace y la transformada de Fourier en la sección 5.4.1.

De acuerdo con la definición 2.3, para comprobar la estabilidad, necesitamos comprobar que todas las raíces de la ecuación característica

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.67)$$

tienen partes reales negativas (esto es, están en la mitad izquierda del plano  $s$ ). Existen varios criterios para comprobar que todas las raíces satisfacen este requerimiento, y no es necesario resolver la ecuación para comprobar la estabilidad. Un criterio ampliamente usado es el **criterio de Routh-Hurwitz**, que se puede enumerar de la siguiente manera:

Una condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (2.67) tengan partes reales negativas es que todos los determinantes  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_n$  sean positivos, donde

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-(2r-1)} & a_{n-2r} & a_{n-2r-1} & a_{n-2r-2} & \dots & a_{n-r} \end{vmatrix} \quad (2.68)$$

entendiendo que en cada determinante todas las  $a$  con subíndice negativo o mayor que  $n$  deben ser reemplazadas por cero.

### EJEMPLO 2.51

Verifique que todas las raíces de la ecuación característica

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + 51s + 26 = 0$$

tienen las partes reales negativas.

**Solución** En este caso  $n = 4$ ,  $a_0 = 26$ ,  $a_1 = 51$ ,  $a_2 = 33$ ,  $a_3 = 9$ ,  $a_4 = 1$  y  $a_r = 0$  ( $r > 4$ ). Los determinantes del criterio de Routh-Hurwitz son

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| = |a_3| = |9| = 9 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 51 & 33 \end{vmatrix} = 246 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 51 & 33 & 9 \\ 0 & 26 & 51 \end{vmatrix} = 10\,440 > 0$$

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-5} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 51 & 33 & 9 & 1 \\ 0 & 26 & 51 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} = 26\Delta_3 > 0\end{aligned}$$

De donde  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$  y  $\Delta_4 > 0$ , así que todas las raíces de la ecuación característica dada tienen partes reales negativas. Esto se puede verificar ya que las raíces son  $-2$ ,  $-1$ ,  $-3 + j2$  y  $-3 - j2$ .

### EJEMPLO 2.52

El movimiento continuo del regulador de una máquina de vapor está modelado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{\eta} + b\dot{\eta} + d\eta - e\omega = 0 \quad (2.69)$$

$$I_0\ddot{\omega} = -f\eta \quad (2.70)$$

donde  $\eta$  es una pequeña fluctuación en el ángulo de inclinación,  $\omega$  es una pequeña fluctuación en la velocidad angular de la rotación y  $m$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  e  $I_0$  son todas constantes positivas. Verifique que el movimiento del regulador es estable siempre que

$$\frac{bd}{m} > \frac{ef}{I_0}$$

**Solución** Al derivar (2.69) se obtiene

$$m\ddot{\eta} + b\dot{\eta} + d\eta - e\omega = 0$$

y, al usar (2.70), llegamos a

$$m\ddot{\eta} + b\dot{\eta} + d\eta + \frac{ef}{I_0}\eta = 0$$

para la cual la ecuación característica correspondiente es

$$ms^3 + bs^2 + ds + \frac{ef}{I_0} = 0$$

Este es un polinomio cúbico, así los parámetros de (2.67) son

$$n = 3, \quad a_0 = \frac{ef}{I_0}, \quad a_1 = d, \quad a_2 = b, \quad a_3 = m \quad (a_r = 0, r > 3)$$

Los determinantes (2.68) del criterio de Routh-Hurwitz son

$$\Delta_1 = |a_2| = b > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & m \\ ef/I_0 & d \end{vmatrix} = bd - \frac{mef}{I_0}$$

(y así  $\Delta_2 > 0$  siempre que  $bd - mef/I_0 > 0$  o  $bd/m > ef/I_0$ ), y

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0\Delta_2 > 0 \quad \text{si } \Delta_2 > 0$$

Así la acción del regulador es estable siempre que  $\Delta_3 > 0$ ; esto es,

$$\frac{bd}{m} > \frac{ef}{I_0}$$

### 2.6.3 Respuesta al impulso

De (2.66) encontramos que para un sistema que tiene función de transferencia  $G(s)$  la respuesta  $x(t)$  del sistema, inicialmente en estado de reposo, a una entrada  $u(t)$  está determinada por la relación en las transformadas

$$X(s) = G(s)U(s)$$

Si la entrada  $u(t)$  es la función impulso unitario  $\delta(t)$  entonces la respuesta del sistema estará determinada por

$$X(s) = G(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = G(s)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace llegamos a la respuesta en el tiempo correspondiente  $h(t)$ , que se llama la **respuesta al impulso** del sistema (algunas veces también es conocida como la **función de peso** del sistema); esto es, la respuesta al impulso está dada por

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \quad (2.7)$$

Por tanto, tenemos la siguiente definición:

#### DEFINICIÓN 2.4: RESPUESTA AL IMPULSO

La respuesta al impulso  $h(t)$  de un sistema lineal invariante en el tiempo es la respuesta del sistema a un impulso unitario aplicado en el tiempo  $t = 0$  cuando todas las condiciones iniciales son cero. Es tal que  $\mathcal{L}\{h(t)\} = G(s)$ , donde  $G(s)$  es la función de transferencia del sistema.

Como la respuesta al impulso es la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia, se sigue que tanto la respuesta al impulso como la función de transferencia llevan la misma información acerca de la dinámica del sistema lineal invariante en el tiempo. Por tanto, en teoría, es posible determinar la información completa acerca del sistema excitándolo con un impulso y midiendo la respuesta. Por esta razón, es una práctica común en ingeniería ver la función de transferencia como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, ya que esto pone gran énfasis en los parámetros del sistema cuando se consideran diseños de sistemas.

En la sección 2.6.2 vimos que como la función de transferencia  $G(s)$  caracteriza por completo un sistema lineal invariante en el tiempo, puede usarse para especificar las condiciones de estabilidad de sistemas, las cuales son que todos los polos de  $G(s)$  estén en la mitad izquierda del plano  $s$ . De manera alternativa, al caracterizar el sistema por su respuesta de impulso, podemos decir que el sistema es estable siempre que su respuesta al impulso decaiga a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ .

### EJEMPLO 2.53

Determine la respuesta al impulso del sistema lineal cuya respuesta  $x(t)$  a una entrada  $u(t)$  está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 5u(t) \quad (2.72)$$

**Solución** La respuesta al impulso  $h(t)$  es la respuesta del sistema a  $u(t) = \delta(t)$  cuando todas las condiciones iniciales son cero. Por tanto, está determinada como la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 5\frac{dh}{dt} + 6h = 5\delta(t) \quad (2.73)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ . Aplicando la transformada de Laplace en (2.73) da

$$(s^2 + 5s + 6)H(s) = 5\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 5$$

así que

$$H(s) = \frac{5}{(s+3)(s+2)} = \frac{5}{s+2} - \frac{5}{s+3}$$

que al invertir da la respuesta al impulso deseada

$$h(t) = 5(e^{-2t} - e^{-3t})$$

De manera alternativa, la función de transferencia  $G(s)$  del sistema determinado por (2.72) es

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 5s + 6}$$

que, como antes  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 5(e^{-2t} - e^{-3t})$ .

*Nota:* Este ejemplo sirve para ilustrar la necesidad de incorporar  $0-$  como el límite inferior en la integral de la transformada de Laplace, a fin de poder aplicar un impulso en  $t = 0$ . El efecto del impulso es provocar un cambio escalonado en  $\dot{x}(t)$  en  $t = 0$ , con la condición inicial considerando lo que pasa en  $0-$ .

## 2.6.4 Teoremas del valor inicial y del valor final

Los teoremas del valor inicial y del valor final son dos teoremas muy útiles que nos permite predecir el comportamiento del sistema conforme  $t \rightarrow 0$  y  $t \rightarrow \infty$  sin invertir la transformada de Laplace.

### TEOREMA 2.6

#### El teorema del valor inicial

Si a  $f(t)$  y  $f'(t)$  se les puede aplicar la transformada de Laplace y si  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  existe entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

**Demostración** De (2.13),

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0-)$$

donde tenemos que destacar el hecho de que el límite inferior es  $0-$ . Ahora

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0-)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} f'(t) e^{-st} dt + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (2.74)$$

Si  $f(t)$  es discontinua en el origen, de manera que  $f(0+) \neq f(0-)$ , entonces, de (2.59),  $f'(t)$  contiene un término de impulso  $[f(0+) - f(0-)]\delta(t)$ , así que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} f'(t) e^{-st} dt = f(0+) - f(0-)$$

Además, como la transformada de Laplace de  $f'(t)$  existe, es de orden exponencial y tenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = 0$$

de manera que (2.74) se convierte en

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0-) = f(0+) - f(0-)$$

dando el resultado requerido:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0+)$$

Si  $f(t)$  es continua en el origen entonces  $f'(t)$  no contiene un término de impulso y el lado derecho de (2.74) es cero, dando

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0-) = f(0+)$$

□

Es importante reconocer que el teorema del valor inicial no da el valor inicial de  $f(0-)$  usado cuando determinamos la transformada de Laplace, sino más bien da el valor de  $f(t)$  conforme  $t \rightarrow 0+$ . Esta diferencia está destacada en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2.54

El circuito de la figura 2.44 está formado por un resistor  $R$  y un capacitor  $C$  conectados en serie a una fuente de voltaje constante  $E$ . Antes de cerrar el interruptor en el tiempo  $t = 0$ , tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la corriente  $i(t)$  en el circuito en el tiempo  $t$  después de cerrar el interruptor e investigue el uso del teorema del valor inicial.

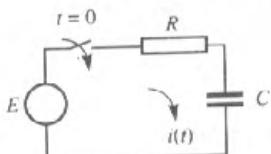


Figura 2.44 Circuito  $RC$  del ejemplo 2.54.

**Solución** Aplicando la ley de Kirchhoff en el circuito de la figura 2.44, tenemos

$$RI + \frac{1}{C} \int i dt = E_0$$

que, aplicando la transformada de Laplace, da la ecuación transformada

$$RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} = \frac{E_0}{s}$$

Por tanto,

$$I(s) = \frac{E_0/R}{s + 1/RC}$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene la corriente  $i(t)$  en  $t \geq 0$  como

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} \quad (2.75)$$

Aplicando el teorema del valor inicial,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} i(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sE_0/R}{s + 1/RC} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{E_0/R}{1 + 1/RCs} = \frac{E_0}{R}\end{aligned}$$

Esto es

$$i(0+) = \frac{E_0}{R}$$

un resultado que se confirma fácilmente permitiendo que  $t \rightarrow 0^+$  en (2.75). Observamos que no es igual al estado inicial  $i(0) = 0$  debido al hecho de que hay un cambio escalonado en  $i(t)$  en  $t = 0$ .

## TEOREMA 2.7

### El teorema del valor final

Si a  $f(t)$  y  $f'(t)$  se les puede aplicar la transformada de Laplace, y si  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

**Demostración** De (2.13),

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0-)$$

Tomando límites, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0-)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f'(t) dt = [f(t)]_{0^-}^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0-)\end{aligned}$$

dando el resultado requerido:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

La restricción de que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  debe existir significa que el teorema no se cumple para funciones tales como  $e^t$ , que tiende a infinito conforme  $t \rightarrow \infty$ , o  $\sin \omega t$ , cuyo límite está indefinido. Como en la práctica el teorema del valor final se usa para obtener el comportamiento de  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  a partir del conocimiento de la transformada.

$F(s)$ , es más común expresar la restricción en términos de las restricciones de  $F(s)$ , las cuales son que  $sF(s)$  debe tener todos sus polos en la mitad izquierda del plano  $s$ ; esto es,  $sF(s)$  debe representar una función de transferencia estable. Es importante usar el teorema con precaución y que la restricción sea plenamente reconocida, ya que la existencia de  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  no implica que  $f(t)$  tenga un valor límite cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**EJEMPLO 2.55**

Investigue la aplicación del teorema del valor final a la función de transferencia

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s-3)} \quad (2.76)$$

**Solución**

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(s+2)(s-3)} = 0$$

así que el uso del teorema del valor final implica que para la función de tiempo  $f(t)$  correspondiente a  $F(s)$  tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

Sin embargo, aplicando la transformada inversa en (2.76) se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{s}(e^{3t} - e^{-2t})$$

implicando que  $f(t)$  tiende a infinito conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esta contradicción surge ya que el teorema no es válido en este caso. A pesar de que  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  existe,  $sF(s)$  tiene un polo en  $s = 3$ , que no está en la mitad izquierda del plano  $s$ .

El teorema del valor final proporciona una herramienta útil para determinar la **ganancia en estado estacionario (GEE)** y los **errores en estado estacionario, o compensación**, en sistemas de control con retroalimentación, los cuales son características importantes en el diseño de los sistemas.

La GEE de un sistema estable es la respuesta del sistema en estado estacionario, esto es, la respuesta cuando  $t \rightarrow \infty$ , a una entrada de escalón unitario. Para un sistema con una función de transferencia  $G(s)$  tenemos, a partir de (2.66), que su respuesta  $x(t)$  está relacionada con la entrada  $u(t)$  por la ecuación transformada

$$X(s) = G(s)U(s)$$

Para una entrada de escalón unitario

$$u(t) = 1H(t) \quad \text{dando} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

así que

$$X(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Por el teorema del valor final, la ganancia en estado estacionario es

$$\text{GEE} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

### EJEMPLO 2.56

Determine la ganancia en estado estacionario de un sistema que tiene función de transferencia

$$G(s) = \frac{20(1 + 3s)}{s^2 + 7s + 10}$$

**Solución** La respuesta  $x(t)$  a una entrada de escalón unitario  $u(t) = 1H(t)$  está dada por la ecuación transformada

$$\begin{aligned} X(s) &= G(s)U(s) \\ &= \frac{20(1 + 3s)}{s^2 + 7s + 10} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor final, la ganancia en estado estacionario está dada por

$$\begin{aligned} \text{GEE} &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20(1 + 3s)}{s^2 + 7s + 10} = 2 \end{aligned}$$

Observamos que para una entrada de escalón de magnitud  $K$ , esto es,  $u(t) = KH(t)$ , la respuesta en estado estacionario será  $\lim_{s \rightarrow 0} sKX(s) = 2K$ ; esto es,

respuesta en estado estacionario a una entrada de escalón = GEE × magnitud del escalón unitario de entrada

Un sistema de control con retroalimentación unitaria que tiene una función de transferencia con trayectoria hacia adelante  $G(s)$ , entrada de referencia o salida deseada  $r(t)$  y una salida real  $x(t)$  está ilustrado en la figura 2.45 con un diagrama de bloques. Definiendo el error como  $e(t) = r(t) - x(t)$ , se sigue que

$$G(s)E(s) = X(s) = R(s) - E(s)$$

dado

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

Así, por el teorema del valor final, el error en estado estacionario (EEE) es

$$\text{GEE} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (2.77)$$

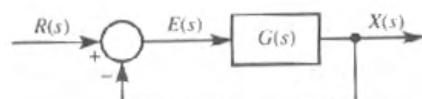


Figura 2.45 Sistema de control con retroalimentación unitaria.

**EJEMPLO 2.57**

Determine el EEE del sistema de la figura 2.45 cuando  $G(s)$  es igual que en el ejemplo 2.56 y  $r(t)$  es un escalón de magnitud  $K$ .

**Solución** Como  $r(t) = KH(t)$ , tenemos  $R(s) = K/s$ , así, usando (2.77),

$$\text{EEE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK/s}{1 + G(s)} = \frac{K}{1 + \text{GEE}}$$

donde  $\text{GEE} = 2$  como está determinado en el ejemplo 2.56. Así

$$\text{EEE} = \frac{1}{3}K$$

Es claro, a partir del ejemplo 2.57, que si queremos reducir el EEE que claramente es deseable en la práctica, entonces es necesario aumentar la GEE. Sin embargo, tal crecimiento puede conducir a una respuesta transitoria indeseable y en el diseño de sistemas debe alcanzarse el equilibrio. Aquí no son consideradas las técnicas detalladas para mitigar estos problemas; para tal discusión el lector puede consultar textos especializados (ver por ejemplo J. Schwarzenbach y K. F. Gill, *System Modelling and Control*, Edward Arnold, Londres, 1984).

## 2.6.5 Ejercicios

- 34 La respuesta  $x(t)$  de un sistema para una función de fuerza  $u(t)$  está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 3\frac{du}{dt} + 2u$$

- (a) Determine la función de transferencia que caracteriza al sistema.  
 (b) Escriba la ecuación característica del sistema.  
 ¿Cuál es el orden del sistema?  
 (c) Determine los polos y los ceros de la función de transferencia e ilústrellos con un diagrama en el plano  $s$ .

- 35 Repita el ejercicio 34 para un sistema cuya respuesta  $x(t)$  a una entrada  $u(t)$  está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 17\frac{dx}{dt} + 13x = \frac{d^2u}{dt^2} + 5\frac{du}{dt} + 6$$

- 36 ¿Cuál de las siguientes funciones de transferencia representa un sistema estable y cuál representa un sistema inestable?

(a)  $\frac{s-1}{(s+2)(s^2+4)}$

(b)  $\frac{(s+2)(s-2)}{(s+1)(s-1)(s+4)}$

(c)  $\frac{s-1}{(s+2)(s+4)}$       (d)  $\frac{6}{(s^2+s+1)(s+1)^2}$   
 (e)  $\frac{5(s+10)}{(s+5)(s^2-s+10)}$

- 37 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones características representan un sistema estable?

- (a)  $s^2 - 4s + 13 = 0$   
 (b)  $5s^3 + 13s^2 + 31s + 15 = 0$   
 (c)  $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$   
 (d)  $24s^4 + 11s^3 + 26s^2 + 45s + 36 = 0$   
 (e)  $s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$

- 38 La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de un sistema masa-resorte-amortiguador con regulador es

$$m\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + K\frac{dx}{dt} + Krx = 0$$

donde  $m$ ,  $c$ ,  $K$  y  $r$  son constantes positivas. Verifique que el movimiento del sistema es estable siempre que  $r < c/m$ .

- 39 El comportamiento de un sistema que tiene un regulador de ganancia está caracterizado por la ecuación característica

$$s^4 + 2s^3 + (K + 2)s^2 + 7s + K = 0$$

donde  $K$  es la ganancia del regulador. Verifique que el sistema es estable siempre que  $K > 2.1$ .

- 40 Un sistema de retroalimentación tiene la ecuación característica

$$s^3 + 15Ks^2 + (2K - 1)s + 5K = 0$$

donde  $K$  es un factor constante de ganancia. Determine el rango de los valores positivos de  $K$  para los cuales el sistema será estable.

- 41 Determine las respuestas al impulso de los sistemas lineales cuya respuesta  $x(t)$  a una entrada  $u(t)$  está determinada por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \frac{d^2x}{dt^2} + 15\frac{dx}{dt} + 56x = 3u(t)$$

$$(b) \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 25x = u(t)$$

$$(c) \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 8x = 4u(t)$$

$$(d) \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 13x = u(t)$$

¿Qué puede decirse acerca de la estabilidad de cada uno de los sistemas?

- 42 La respuesta de un sistema dado a un escalón unitario  $u(t) = 1H(t)$  está dada por

$$x(t) = 1 - \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

¿Cuál es la función de transferencia del sistema?

- 43 Verifique el teorema del valor inicial para las funciones

$$(a) 2 - 3 \cos t \quad (b) (3t - 1)^2$$

$$(c) t + 3 \sin 2t$$

- 44 Verifique el teorema del valor final para las funciones

$$(a) 1 + 3e^{-t} \sin 2t \quad (b) t^2 e^{-2t}$$

$$(c) 3 - 2e^{-3t} + e^{-t} \cos 2t$$

- 45 Use el teorema del valor final para verificar el valor obtenido para  $i_2(t)$  conforme  $t \rightarrow \infty$  para el circuito del ejemplo 2.28.

- 46 Analice si se puede aplicar el teorema del valor final para obtener el valor de  $i_2(t)$  conforme  $t \rightarrow \infty$  para el circuito del ejemplo 2.29.

- 47 Use los teoremas del valor inicial y del valor final para encontrar el salto en  $t = 0$  y el valor límite conforme  $t \rightarrow \infty$  para la solución del problema de valor inicial

$$7\frac{dy}{dt} + 5y = 4 + e^{-t} + 2\delta(t)$$

con  $y(0-) = -1$ .

## 2.6.6 Convolución

La convolución es un concepto que tiene muchas aplicaciones en varios campos de la ingeniería. En la sección 2.6.7 la usaremos para obtener la respuesta de un sistema lineal a cualquier entrada en términos de la respuesta al impulso.

### DEFINICIÓN 2.5: Convolución

Dadas dos funciones continuas a pedazos  $f(t)$  y  $g(t)$ , la **convolución** de  $f(t)$  y  $g(t)$ , denotada por  $f * g(t)$ , está definida como

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

En el caso particular en que  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones causales

$$f(\tau) = g(\tau) = 0 \quad (\tau < 0), \quad g(t - \tau) = 0 \quad (\tau > t)$$

y tenemos

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (2.78)$$

La notación  $f * g(t)$  indica que la convolución  $f * g$  es una función de  $t$ ; esto es, también podría escribirse como  $(f * g)(t)$ . La integral  $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$  se llama la **integral de convolución**. Otros nombres alternativos son la **integral de superposición**, **integral de Duhamel**, **integral envolvente** y la **integral de faltung**.

La convolución puede considerarse como una función generalizada, y como tal tiene muchas de las propiedades de la multiplicación. En particular, satisface la ley conmutativa, así que

$$f * g(t) = g * f(t)$$

o, para funciones causales,

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad (2.79)$$

Esto significa que la convolución puede ser evaluada por traslación en el tiempo de cualquiera de las dos funciones. El resultado (2.79) se prueba fácilmente, ya que haciendo la sustitución  $\tau_1 = t - \tau$  en (2.78) obtenemos

$$f * g(t) = \int_t^0 f(t - \tau_1)g(\tau_1)(-d\tau_1) = \int_0^t f(t - \tau_1)g(\tau_1) d\tau_1 = g * f(t)$$

### EJEMPLO 2.58

Para las dos funciones causales

$$f(t) = tH(t), \quad g(t) = \sin 2t H(t)$$

verifique que  $f * g(t) = g * f(t)$ .

**Solución**

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_0^t \tau \sin 2(t - \tau) d\tau$$

Integrando por partes

$$f * g(t) = [\frac{1}{2}\tau \cos 2(t - \tau) + \frac{1}{4} \sin 2(t - \tau)]_0^t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t$$

$$g * f(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t (t - \tau) \sin 2\tau d\tau$$

$$= [-\frac{1}{2}(t - \tau) \cos 2\tau - \frac{1}{4} \sin 2\tau]_0^t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t$$

así que  $f * g(t) = g * f(t)$ .

La importancia de la convolución en la teoría de la transformada de Laplace es que nos permite obtener la transformada inversa de un producto de dos transformadas. El resultado necesario para hacer esto está contenido en el siguiente teorema.

### TEOREMA 2.8

### El teorema de convolución para transformadas de Laplace

Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son de orden exponencial  $\sigma$ , continuas a pedazos en  $t \geq 0$  y tienen transformadas de Laplace  $F(s)$  y  $G(s)$  respectivamente, entonces, para  $s > \sigma$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)g(t-\tau) dt\right\} = \mathcal{L}\{f*g(t)\} = F(s)G(s)$$

o, en la forma inversa más usual,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g(t) \quad (2.80)$$

**Demostración** Por definición,

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \left[ \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \right] \left[ \int_0^\infty e^{-sy} g(y) dy \right]$$

donde hemos usado, en las integrales, las variables ‘ficticias’  $x$  y  $y$ , en lugar de  $t$ , para evitar confusiones. Ahora, esto puede ser expresado mediante la integral doble

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s(x+y))} f(x)g(y) dx dy = \iint_R e^{-s(x+y)} f(x)g(y) dx dy$$

donde  $R$  es el primer cuadrante en el plano  $(x, y)$ , como se muestra en la figura 2.46(a). Haciendo la sustitución

$$x + y = t, \quad y = \tau$$

la integral doble se transforma en

$$F(s)G(s) = \iint_{R_1} e^{-st} f(t-\tau)g(\tau) dt d\tau$$

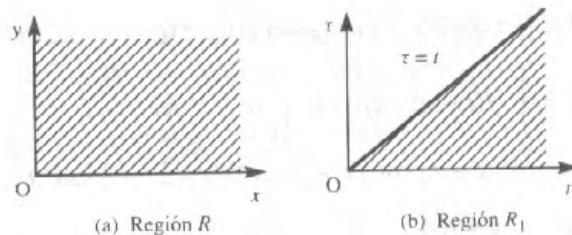


Figura 2.46 Regiones de integración.

donde  $R_1$  es la región semi-infinita en el plano  $(\tau, t)$  acotada por las rectas  $\tau = 0$  y  $\tau = t$ , como se muestra en la figura 2.46(b). Esto puede escribirse como

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} [g * f(t)] dt \\ &= \mathcal{L}\{g * f(t)\} \end{aligned}$$

y como la convolución es conmutativa, podemos escribir

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f * g(t)\}$$

lo cual concluye la demostración.  $\square$

### EJEMPLO 2.59

Usando el teorema de convolución determine  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)^2}\right\}$ .

**Solución** Expresamos  $1/s^2(s+2)^2$  como  $(1/s^2)[1/(s+2)^2]$ ; entonces, como

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\{t e^{-2t}\} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

tomando  $f(t) = t$  y  $g(t) = t e^{-2t}$  en el teorema de convolución da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)^2}\right\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau)\tau e^{-2\tau} d\tau$$

que integrando por partes da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)^2}\right\} &= \left[ -\frac{1}{2}e^{-2t}[(t-\tau)\tau + \frac{1}{2}(t-2\tau) - \frac{1}{2}] \right]_0^t \\ &= \frac{1}{4}[t-1+(t+1)e^{-2t}] \end{aligned}$$

Podemos verificar este resultado expresando primero la transformada dada en la forma de fracciones parciales y después invirtiendo para obtener

$$\frac{1}{s^2(s+2)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{\frac{1}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{4}}{(s+2)^2}$$

así que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)^2}\right\} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} = \frac{1}{4}[t-1+(t+1)e^{-2t}]$$

como antes.

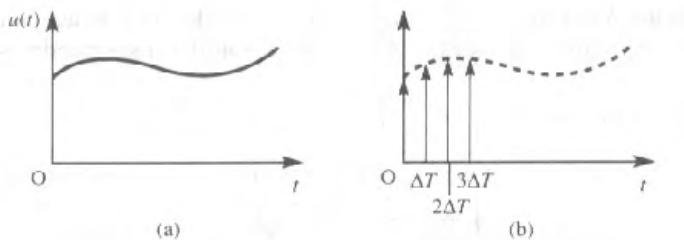


Figura 2.47 Aproximación a una entrada continua.

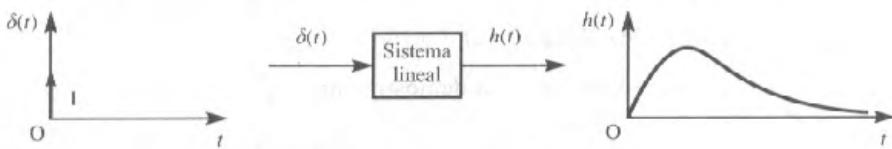


Figura 2.48 Respuesta al impulso de un sistema lineal.

## 2.6.7 Respuesta de un sistema a una entrada arbitraria

La respuesta al impulso de un sistema lineal invariantes en el tiempo es particularmente útil en la práctica ya que nos permite obtener la respuesta del sistema a una entrada arbitraria usando la integral de convolución. Esto provee a los ingenieros de un método útil de análisis de sistemas dinámicos.

Consideremos un sistema lineal caracterizado por su respuesta al impulso  $h(t)$ . Queremos determinar la respuesta  $x(t)$  del sistema a una entrada arbitraria  $u(t)$  como la ilustrada en la figura 2.47(a). Primero aproximamos la función continua  $u(t)$  por una sucesión infinita de impulsos de magnitud  $u(n\Delta T)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , como se muestra en la figura 2.47(b). Esta aproximación de  $u(t)$  puede escribirse como

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n\Delta T)\delta(t - n\Delta T) \Delta T \quad (2.81)$$

Como el sistema es lineal, vale el **principio de superposición**, así que la respuesta del sistema a la suma de impulsos es igual a la suma de las respuestas del sistema a cada uno de los impulsos actuando separadamente. En la figura 2.48 se describe la respuesta del sistema lineal al impulso  $h(t)$ , la respuesta debida a los impulsos individuales que forman la suma en (2.81) está ilustrada en la secuencia de dibujos de la figura 2.49.

Sumando las respuestas individuales, encontramos que la respuesta debida a la suma de impulsos es

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n\Delta T)h(t - n\Delta T) \Delta T \quad (2.82)$$

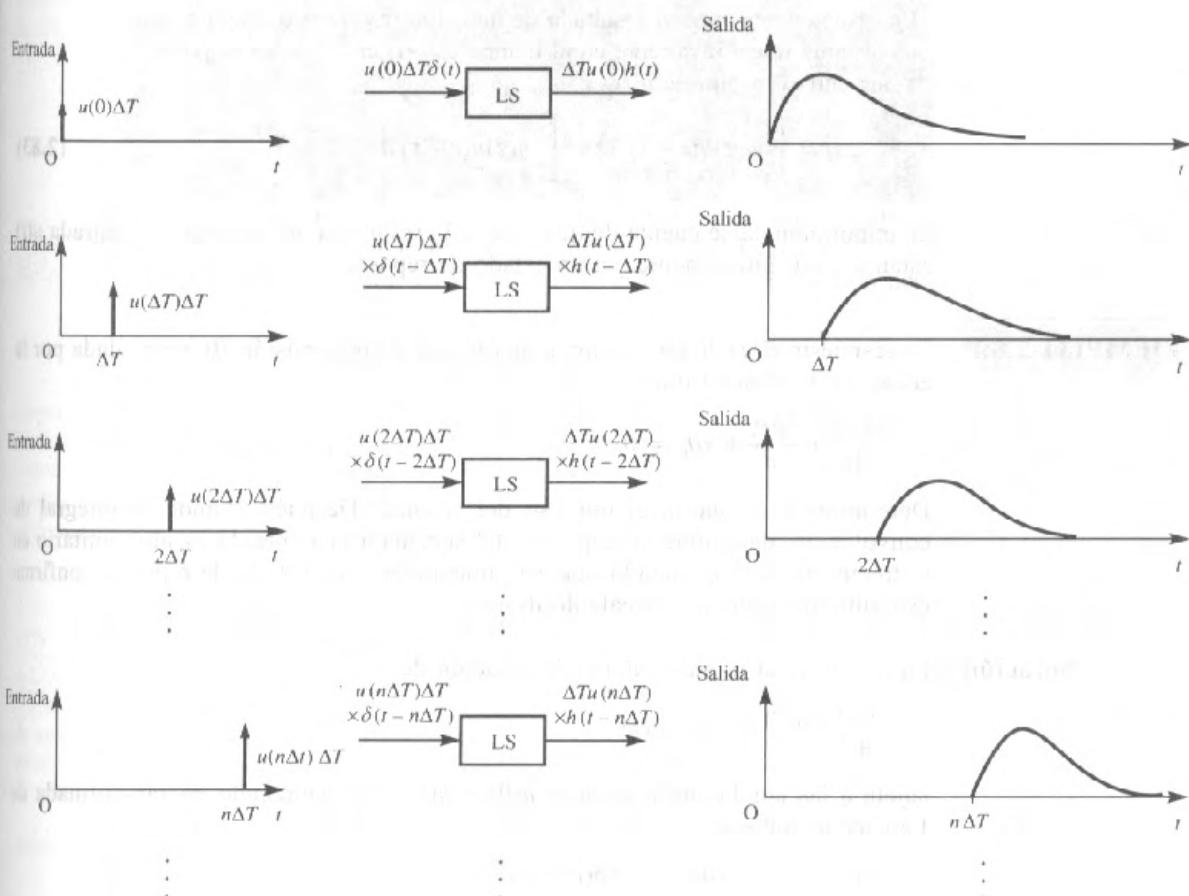


Figura 2.49 Respuestas debidas a los impulsos individuales.

Permitiendo que  $\Delta T \rightarrow 0$ , de manera que  $n \Delta T$  se aproxime a la variable continua  $\tau$ , la suma anterior se aproximará a una integral que será representativa de la respuesta del sistema  $x(t)$  a la entrada continua  $u(t)$ . Así

$$x(t) = \int_0^\infty u(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (\text{ya que } h(t) \text{ es una función causal})$$

Esto es,

$$x(t) = u * h(t)$$

Como la convolución es conmutativa, también podemos escribir

$$x(t) = h * u(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau) d\tau$$

En resumen, tenemos el resultado de que si la respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo es  $h(t)$  entonces su respuesta a una entrada arbitraria  $u(t)$  es

$$x(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (2.83)$$

Es importante darse cuenta de que esta es la respuesta del sistema a la entrada  $u(t)$  estando ésta, inicialmente, en un estado de reposo.

### EJEMPLO 2.60

La respuesta  $\theta_o(t)$  de un sistema a una fuerza de transmisión  $\theta_i(t)$  está dada por la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\frac{d\theta_o}{dt} + 5\theta_o = \theta_i$$

Determine la respuesta al impulso del sistema. Después, usando la integral de convolución, determine la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario en el tiempo  $t = 0$ , suponiendo que está inicialmente en estado de reposo. Confirme este último resultado por cálculo directo.

**Solución** La respuesta al impulso  $h(t)$  es la solución de

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 2\frac{dh}{dt} + 5h = \delta(t)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ . Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$(s^2 + 2s + 5)H(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

así que

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

que, invirtiendo, da la respuesta al impulso como

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

Usando la integral de convolución

$$\theta_o(t) = \int_0^t h(\tau)\theta_i(t-\tau) d\tau$$

con  $\theta_i(t) = 1H(t)$  da la respuesta al escalón unitario como

$$\theta_o(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau$$

Integrando dos veces por partes tenemos

$$\begin{aligned}\theta_o(t) &= -\frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t - e^{-t} \cos 2t + 1 - 2 \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t - e^{-t} \cos 2t + 1 - 4\theta_o(t)\end{aligned}$$

Ahora

$$\theta_o(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t)$$

(Observamos que en este caso, debido a la forma simple de  $\theta_i(t)$ , la integral de convolución  $\int_0^t h(\tau)\theta_i(t-\tau) d\tau$  se prefiere a  $\int_0^t \theta_i(\tau)h(t-\tau) d\tau$ .)

Para obtener directamente la respuesta en escalón necesitaremos resolver para  $t \geq 0$  la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\frac{d\theta_o}{dt} + 5\theta_o = 1$$

sujeta a las condiciones iniciales  $\theta_o(0) = \dot{\theta}_o(0) = 0$ . Aplicando la transformada de Laplace da

$$(s^2 + 2s + 5)\Theta(s) = \frac{1}{s}$$

así que

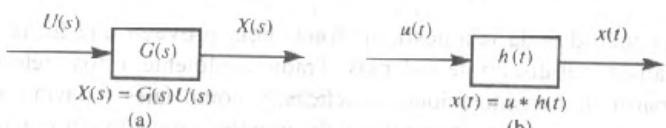
$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \frac{s+2}{(s+1)^2 + 4}\end{aligned}$$

que invirtiendo da

$$\begin{aligned}\theta_o(t) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{5}e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t) \\ &= \frac{1}{5}(1 - e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t)\end{aligned}$$

confirmando el resultado anterior.

Por tanto, vemos que un sistema lineal invariante en el tiempo puede ser caracterizado en el dominio de frecuencia (o dominio  $s$ ) por la función de transferencia  $G(s)$  o en el dominio del tiempo por su respuesta al impulso  $h(t)$ , como está descrito en las figuras 2.50(a) y (b) respectivamente. La respuesta en el dominio de frecuencia es obtenida por multiplicación algebraica, mientras que la respuesta en el dominio del tiempo involucra una convolución. Esta equivalencia de la operación de convolución



**Figura 2.50** Representaciones (a) dominio de frecuencia y (b) dominio de tiempo de un sistema lineal invariante en el tiempo.

en el dominio del tiempo con la multiplicación algebraica en el dominio de frecuencia claramente es un argumento poderoso para el uso de las técnicas en el dominio de frecuencia en el diseño en ingeniería.

## 2.6.8 Ejercicios

- 48 Para los siguientes pares de funciones causales  $f(t)$  y  $g(t)$  verifique que  $f * g(t) = g * f(t)$ :

$$\begin{array}{ll} (a) f(t) = t, & g(t) = \cos 3t \\ (b) f(t) = t + 1, & g(t) = e^{-2t} \\ (c) f(t) = t^2, & g(t) = \sin 2t \\ (d) f(t) = e^{-t}, & g(t) = \sin t \end{array}$$

- 49 Usando el teorema de convolución, determine las siguientes transformadas inversas de Laplace. Verifique los resultados, primero expresando la transformada dada en la forma de fracciones parciales y después invirtiendo usando los resultados usuales

$$\begin{array}{ll} (a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)^3}\right\} & (b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2(s+3)^2}\right\} \\ (c) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+4)}\right\} & \end{array}$$

- 50 Tomando  $f(\lambda) = \lambda$  y  $g(\lambda) = e^{-\lambda}$ , utilice la forma inversa (2.80) del teorema de convolución para comprobar que la solución de la ecuación integral

$$y(t) = \int_0^t \lambda e^{-(t-\lambda)} d\lambda$$

es

$$y(t) = (t - 1) + e^{-t}.$$

- 51 Encuentre la respuesta al impulso del sistema caracterizado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 12x = u(t)$$

posteriormente determine la respuesta del sistema a la entrada de pulso  $u(t) = A[H(t) - H(t - T)]$ , suponiendo que inicialmente está en estado de reposo.

- 52 La respuesta  $\theta_o(t)$  de un servomecanismo a una fuerza de transmisión  $\theta_i(t)$  está dada por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 4\frac{d\theta_o}{dt} + 5\theta_o = \theta_i \quad (t \geq 0)$$

Determine la respuesta al impulso del sistema y después, usando la integral de convolución, obtenga la respuesta del servomecanismo a una fuerza de transmisión escalón unitario, aplicada en el tiempo  $t = 0$ , dado que el sistema está inicialmente en estado de reposo.

Verifique su respuesta resolviendo directamente la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 4\frac{d\theta_o}{dt} + 5\theta_o = 1$$

sujeta a las condiciones iniciales  $\theta_o = \dot{\theta}_o = 0$  cuando  $t = 0$ .

## 2.7

# Aplicación a la ingeniería: respuesta de frecuencia

Los métodos de respuesta de frecuencia proveen una herramienta gráfica para el análisis y el diseño de sistemas. Tradicionalmente, estos métodos se han desarrollado a partir de consideraciones prácticas, y como tales todavía son usados ampliamente por los ingenieros proporcionando grandes conocimientos sobre el comportamiento del sistema. En esta sección ilustraremos cómo la respuesta de frecuencia puede obtenerse fácilmente de la función de transferencia del sistema  $G(s)$  reemplazando  $s$  por  $j\omega$ . También consideraremos métodos gráficos para representarla.

Considere el sistema ilustrado en la figura 2.41 con función de transferencia

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (m \leq n) \quad (2.84)$$

Cuando la entrada es una señal senoidal

$$u(t) = A \operatorname{sen} \omega t$$

aplicada en el tiempo  $t = 0$ , la respuesta del sistema  $x(t)$  para  $t \geq 0$  está determinada por

$$X(s) = G(s) \mathcal{L}\{A \operatorname{sen} \omega t\}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} X(s) &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{KA\omega(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)(s - j\omega)(s + j\omega)} \end{aligned}$$

que, expandiendo en fracciones parciales, da

$$X(s) = \frac{\alpha_1}{s - j\omega} + \frac{\alpha_2}{s + j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s - p_i}$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  son constantes. Aquí los dos primeros términos de la sumatoria son generados por la entrada y determinan la respuesta en estado estacionario, mientras que los términos restantes son generados por la función de transferencia y determinan la respuesta transitoria del sistema.

Aplicando la transformada inversa de Laplace, la respuesta del sistema  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , está dada por

$$x(t) = \alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{-j\omega t} + \sum_{i=1}^n \beta_i e^{p_i t} \quad (t \geq 0)$$

En la práctica, en general estamos interesados con sistemas que son estables, para los cuales los polos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , de la función de transferencia  $G(s)$  están en la mitad izquierda del plano  $s$ . En consecuencia, para sistemas prácticos los términos en el dominio del tiempo  $\beta_i e^{p_i t}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , tienden a cero conforme  $t$  crece y no contribuirán a la respuesta en estado estacionario  $x_{ee}(t)$  del sistema. Así para sistemas lineales estables, esta última está determinada por los dos primeros términos como

$$x_{ee}(t) = \alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{-j\omega t}$$

Usando la regla del “encubrimiento” (cover-up) para determinar los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en la expansión en fracciones parciales se obtiene

$$\alpha_1 = \left[ \frac{(s - j\omega)G(s)A\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \right]_{s=j\omega} = \frac{A}{2j} G(j\omega)$$

$$\alpha_2 = \left[ \frac{(s + j\omega)G(s)A\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \right]_{s=-j\omega} = -\frac{A}{2j} G(-j\omega)$$

así que la respuesta en estado estacionario se convierte en

$$x_{ee}(t) = \frac{A}{2j} G(j\omega) e^{j\omega t} - \frac{A}{2j} G(-j\omega) e^{-j\omega t} \quad (2.85)$$

$G(j\omega)$  puede expresarse en la forma polar

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}$$

donde  $|G(j\omega)|$  denota la magnitud (o módulo) de  $G(j\omega)$ . (Observamos que tanto la magnitud como el argumento varían con la frecuencia  $\omega$ .) Entonces, suponiendo que el sistema tiene parámetros reales,

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j \arg G(j\omega)}$$

y la respuesta del estado estacionario (2.85) se convierte en

$$\begin{aligned} x_{ee}(t) &= \frac{A}{2j} [|G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}] e^{j\omega t} - \frac{A}{2j} [|G(j\omega)| e^{-j \arg G(j\omega)}] e^{-j\omega t} \\ &= \frac{A}{2j} |G(j\omega)| [e^{j[\omega t + \arg G(j\omega)]} - e^{-j[\omega t + \arg G(j\omega)]}] \end{aligned}$$

Esto es,

$$x_{ee}(t) = A |G(j\omega)| \operatorname{sen} [\omega t + \arg G(j\omega)] \quad (2.86)$$

Esto indica que si un sistema lineal estable con función de transferencia  $G(s)$  está sujeto a una entrada senoidal, entonces

- (a) la respuesta en estado estacionario también es una senoidal con la misma frecuencia  $\omega$  de entrada;
- (b) la amplitud de esta respuesta es  $|G(j\omega)|$  veces la amplitud  $A$  de la entrada senoidal; se dice que la entrada está **amplificada** si  $|G(j\omega)| > 1$  y **atenuada** si  $|G(j\omega)| < 1$ ;
- (c) el corrimiento de fase (diferencia de fase) entre la entrada y la salida es  $\arg G(j\omega)$ . Se dice que el sistema se **adelanta** si  $\arg G(j\omega) > 0$  y que se **atrasa** si  $\arg G(j\omega) < 0$ .

Las variaciones tanto en la magnitud  $|G(j\omega)|$  como en el argumento  $\arg G(j\omega)$  cuando varía la frecuencia  $\omega$  de la entrada senoidal constituyen la **respuesta de frecuencia del sistema**, la magnitud  $|G(j\omega)|$  representa la **ganancia de amplitud** o **razón de amplitud** del sistema para entrada senoidal con frecuencia  $\omega$ , y el argumento  $\arg G(j\omega)$  representa el **corrimiento de fase**.

El resultado (2.86) implica que la función  $G(j\omega)$  puede encontrarse experimentalmente sometiendo el sistema a excitaciones senoidales y midiendo el aumento de amplitud y el corrimiento de fase entre la entrada y la salida conforme la frecuencia de entrada varía en el rango  $0 < \omega < \infty$ . Por tanto, en principio, las medidas de la respuesta de frecuencia pueden ser usadas para determinar el sistema de la función de transferencia  $G(s)$ .

En los capítulos 4 y 5, al estudiar series de Fourier y transformadas de Fourier, veremos que muchas funciones pueden escribirse como sumas de senoidales, y en consecuencia la respuesta de un sistema lineal de casi cualquier entrada puede deducirse por la forma de la respuesta senoidal correspondiente. Sin embargo, es importante

apreciar que el término ‘respuesta’ en la expresión ‘respuesta de frecuencia’ sólo se relaciona con el comportamiento de la respuesta de estado estacionario del sistema.

La información contenida en la respuesta de frecuencia del sistema puede ser mostrada convenientemente en forma gráfica. En la práctica es usual representarla con dos gráficas: una mostrando cómo varía la amplitud  $|G(j\omega)|$  con la frecuencia y otra mostrando cómo varía el corrimiento de fase  $\arg G(j\omega)$  con la frecuencia.

### EJEMPLO 2.61

Determine la respuesta a la frecuencia del filtro  $RC$  que se muestra en la figura 2.51. Dibuje la amplitud y el corrimiento de fase.

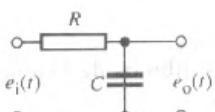


Figura 2.51 Filtro  $RC$ .

#### Solución

La relación entrada-salida está dada por

$$E_o(s) = \frac{1}{RCs + 1} E_i(s)$$

así que el filtro está caracterizado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Así

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{RCj\omega + 1} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{1 + R^2C^2\omega^2} - j \frac{RC\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} \end{aligned}$$

dando las respuestas a la frecuencia características

$$\begin{aligned} \text{ganancia} &= |G(j\omega)| = \sqrt{\left[ \frac{1}{(1 + R^2C^2\omega^2)^2} + \frac{R^2C^2\omega^2}{(1 + R^2C^2\omega^2)^2} \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + R^2C^2\omega^2)}} \end{aligned}$$

defasamiento =  $\arg G(j\omega) = -\tan^{-1}(RC\omega)$

Observemos que para  $\omega = 0$

$$|G(j\omega)| = 1, \quad \arg G(j\omega) = 0$$

y conforme  $\omega \rightarrow \infty$

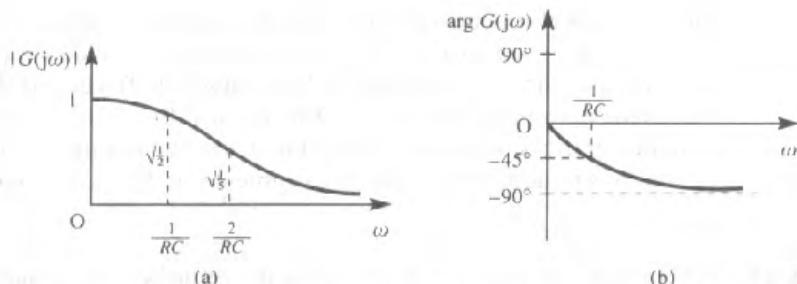


Figura 2.52 Gráficas de la respuesta de frecuencia para el ejemplo 2.61: (a) gráfica de la amplitud; (b) gráfica de corrimiento de fase.

$$|G(j\omega)| \rightarrow 0, \quad \arg G(j\omega) \rightarrow -\frac{1}{2}\pi$$

En las figuras 2.52(a) y (b) se muestran los dibujos de la amplitud y el corrimiento de fase respectivamente.

Para la función de transferencia simple del ejemplo 2.61, fue relativamente fácil dibujar la amplitud y el corrimiento de fase característicos. Para funciones de transferencia de orden superior, puede ser una tarea bastante tediosa y podría ser más eficiente usar un paquete de cómputo apropiado. Sin embargo, para facilitar el uso de las técnicas de respuesta de frecuencia en el diseño de sistemas, los ingenieros adoptan un tratamiento diferente, haciendo uso de las **gráficas de Bode** para visualizar la información relevante. El nombre de este tema se debe a H. W. Bode, que desarrolló las técnicas en los laboratorios Bell al final de la década de 1930. De nuevo, involucra dibujos separados de la amplitud y el corrimiento de fase, pero usando papel semilogarítmico poniendo la frecuencia en el eje logarítmico horizontal y la amplitud o fase en el eje lineal vertical. También es normal expresar la ganancia de amplitud en decibeles (dB); esto es,

$$\text{ganancia de amplitud en dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

y el corrimiento de fase  $\arg G(j\omega)$  en grados. Así la gráfica de Bode consiste en

- (a) el trazo de la amplitud en decibeles contra  $\log \omega$ , y
- (b) el trazo del corrimiento de fase contra  $\log \omega$ .

Observamos que con la ganancia de amplitud medida en decibeles, la señal de entrada será amplificada si la ganancia es mayor que cero y atenuada si es menor que cero.

La ventaja de usar las gráficas de Bode es que la información de la amplitud y la fase se puede obtener a partir de las partes que forman la función de transferencia sumando gráficamente. También es posible hacer aproximaciones simplificadas en las cuales las curvas pueden ser reemplazadas por rectas asintóticas que pueden dibujarse relativamente rápido y proveer suficiente información para dar a un ingeniero una “corazonada” para el comportamiento del sistema. Frecuentemente las características deseables de un sistema son especificadas en términos del comportamiento de la respuesta de frecuencia, y como las gráficas aproximadas de Bode permiten la determinación rápida del efecto al cambio, éstas proporcionan una buena herramienta para el diseño del sistema.

**EJEMPLO 2.62**

Dibuje la gráfica aproximada de Bode correspondiente a la función de transferencia

$$G(s) = \frac{4 \times 10^3 (5+s)}{s(100+s)(20+s)} \quad (2.87)$$

**Solución** Primero expresamos la función de transferencia en lo que conocemos como la **forma estándar**, a saber

$$G(s) = \frac{10(1+0.2s)}{s(1+0.01s)(1+0.05s)}$$

dando

$$G(j\omega) = \frac{10(1+j0.2\omega)}{j\omega(1+j0.01\omega)(1+j0.05\omega)}$$

Aplicando logaritmos base 10,

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log 10 + 20 \log |1 + j0.2\omega| - 20 \log |j\omega| \\ &\quad - 20 \log |1 + j0.01\omega| - 20 \log |1 + j0.05\omega| \\ \arg G(j\omega) &= \arg 10 + \arg(1 + j0.2\omega) - \arg j\omega - \arg(1 + j0.01\omega) \\ &\quad - \arg(1 + j0.05\omega) \end{aligned} \quad (2.88)$$

La función transferencia involucra elementos que son nuevamente un cero simple y polos simples (incluyendo uno en el origen). Ahora ilustraremos cómo la gráfica de Bode puede construirse a partir de estos elementos.

Consideremos primero la gráfica del aumento de amplitud, que es una gráfica de  $20 \log |G(j\omega)|$  contra  $\log \omega$ :

- (a) para una ganancia simple  $k$  la gráfica de  $20 \log k$  es una recta horizontal, que está arriba del eje 0 dB si  $k > 1$  y debajo de él si  $k < 1$ ;
- (b) para un polo simple en el origen la gráfica de  $-20 \log \omega$  es una recta con pendiente -20dB/década y corta al eje 0 dB en  $\omega = 1$ ;
- (c) para un cero o polo simple que no sea el origen vemos que

$$20 \log |1 + j\tau\omega| \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{cuando } \omega \rightarrow 0 \\ 20 \log \tau\omega = 20 \log \omega - 20 \log(1/\tau) & \text{cuando } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Observamos que la gráfica de  $20 \log \tau\omega$  es una recta con pendiente 20dB/década y corta al eje 0 dB en  $\omega = 1/\tau$ . Así la gráfica de  $20 \log |1 + j\tau\omega|$  puede aproximarse por dos rectas: una para  $\omega < 1/\tau$  y otra para  $\omega > 1/\tau$ . La frecuencia en la intersección  $\omega = 1/\tau$  es llamada el **punto de rompimiento** o **frecuencia esquina**; aquí  $|1 + j\tau\omega| = \sqrt{2}$ , que permite indicar la verdadera curva en esta frecuencia. Usando este método, en las figuras 2.53(a) y (b), se muestran las aproximaciones mediante rectas de las gráficas de amplitud de un cero simple y un polo simple, ninguno en cero (también se muestran las gráficas reales).

Usando las gráficas aproximadas de las partes constituyentes, como se indicó antes en (a)–(c), podemos construir el trazo aproximado de la ganancia de frecuencia correspondiente (2.87) a partir de la suma gráfica como indica la figura 2.54.

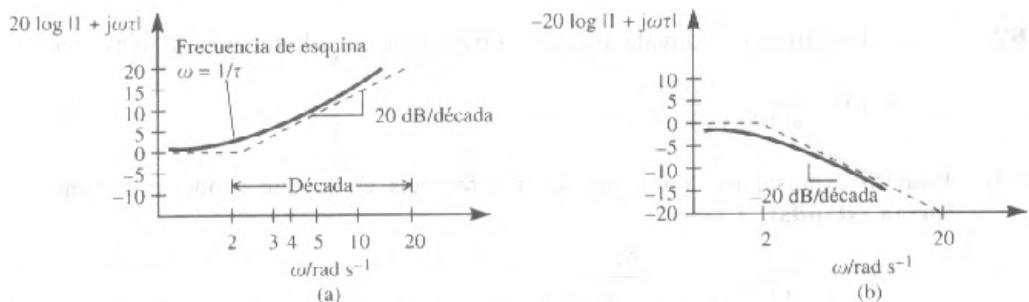


Figura 2.53 Aproximación con rectas de la gráfica de amplitud de Bode: (a) cero simple; (b) polo simple.

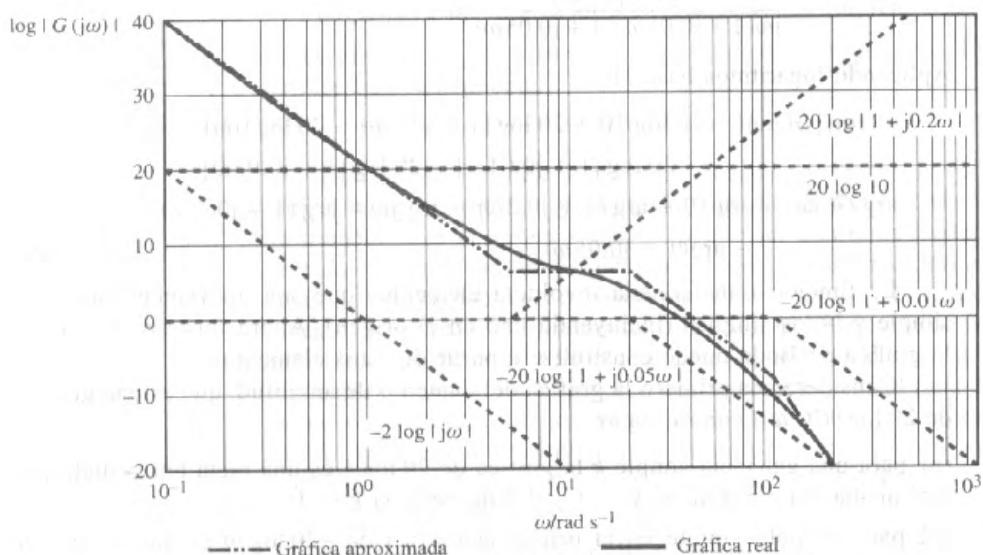


Figura 2.54 Gráfica de amplitud de Bode para la  $G(s)$  del ejemplo 2.62.

También se muestra la gráfica real de la ganancia de amplitud, obtenida usando un paquete de software.

La idea de usar asíntotas también se puede utilizar para dibujar las gráficas de Bode del corrimiento de fase; tomando en cuenta, de nuevo, los efectos acumulados de las componentes individuales que forman la función de transferencia, es decir, que

- el corrimiento de fase asociado con un aumento constante  $k$  es cero;
- el corrimiento de fase asociado con un polo o cero simple en el origen es  $+90^\circ$  o  $-90^\circ$  respectivamente;
- para un polo o cero simple que no está en el origen

$$\tan^{-1}(\omega\tau) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{conforme } \omega \rightarrow 0 \\ 90^\circ & \text{conforme } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\tan^{-1}(\omega\tau) = 45^\circ \text{ cuando } \omega\tau = 1$$

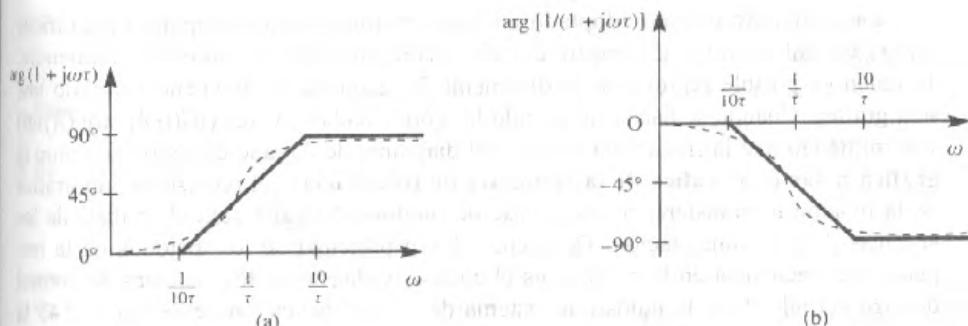
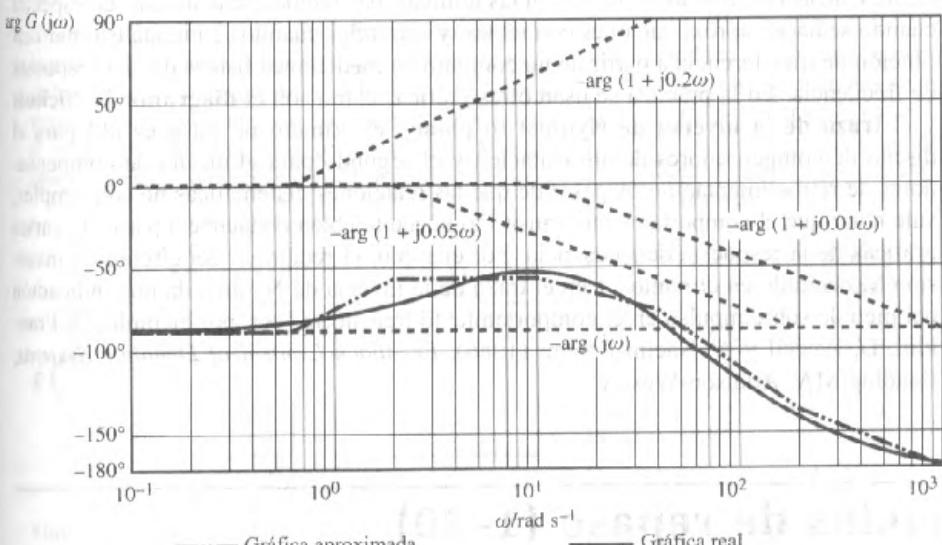


Figura 2.55 Gráfica aproximada de la fase de cambio de Bode: (a) cero simple; (b) polo simple.

Figura 2.56 Gráfica de diferencia de fase de Bode para la  $G(s)$  del ejemplo 2.62.

Con estas observaciones en mente, se hacen las siguientes aproximaciones. Para frecuencias  $\omega$  menores que un décimo de la frecuencia esquina  $\omega = 1/\tau$  (esto es, para  $\omega < 1/10\tau$ ) el corrimiento de fase se supone que es  $0^\circ$ , y para frecuencias mayores que diez veces la frecuencia esquina (esto es, para  $\omega > 10/\tau$ ) el corrimiento de fase se supone que es  $\pm 90^\circ$ . Para frecuencias entre estos límites (esto es, para  $1/10\tau < \omega < 10/\tau$ ) se considera que la gráfica del corrimiento de fase es la recta que pasa por  $0^\circ$  en  $\omega = 1/10\tau$ ,  $\pm 45^\circ$  en  $\omega = 1/\tau$ , y  $\pm 90^\circ$  en  $\omega = 10/\tau$ . En cada caso el signo más está asociado con un cero y el signo menos con un polo. Con estas suposiciones, en la figura 2.55(a) y (b) se muestran las aproximaciones con rectas a los trazos del corrimiento de fase para un cero o polo simple, que no está localizado en el origen, respectivamente (los trazos reales están representados por las curvas puntuadas).

Usando estas aproximaciones, en la figura 2.56 se muestra una aproximación con recta al trazo del corrimiento de fase correspondiente a (2.88). De nuevo, se muestra el trazo real del corrimiento de fase obtenido usando un paquete de software.

En el método gráfico adoptado en esta sección, se han dibujado, las gráficas separadas del aumento de amplitud y el corrimiento de fase contra la frecuencia. También es posible representar gráficamente la respuesta de frecuencia usando una sola gráfica. Cuando se hace esto usando las coordenadas polares ( $|G(j\omega)|$ ,  $\arg G(j\omega)$ ) y permitiendo que la frecuencia  $\omega$  varíe, el diagrama de Argand es conocido como la **gráfica polar** o la **gráfica de la respuesta de frecuencia**. Tal representación gráfica de la función de transferencia es la base del **método Nyquist** para el análisis de los sistemas de retroalimentación. De hecho, el uso principal de los métodos de la respuesta de frecuencia en la práctica es el análisis y diseño de los sistemas de control de lazo cerrado. Para la unidad de sistema de retroalimentación de la figura 2.45 la gráfica de la respuesta de frecuencia de la función de transferencia de trayectoria hacia adelante  $G(s)$  se usa para deducir el comportamiento de todo el sistema de lazo cerrado. Quizás las gráficas de Bode son las gráficas más rápidas de construir, en especial cuando se hacen aproximaciones con rectas, y son útiles cuando se intenta estimar una función de transferencia a partir de un conjunto de mediciones físicas de una respuesta de frecuencia. En la práctica se usan otras gráficas como son el **diagrama de Nichols** y el **trazo de la inversa de Nyquist (o polar)**, el primero de estos es útil para el diseño de compensadores de alimentación y el segundo para el diseño de compensadores de retroalimentación. A pesar de que las relaciones matemáticas no son simples, vale notar que el comportamiento transitorio puede también deducirse a partir de varias gráficas de la respuesta de frecuencia. Por ejemplo, el recíproco del círculo de inversión M centrado en el punto -1 en el trazo de la inversa de Nyquist da una indicación del pico de sobrecimpulso en el comportamiento transitorio (ver, por ejemplo, G. Franklin, D. Powell y A. Naeini-Emami (1986), *Feedback Control of Dynamic Systems*, Reading MA: Addison-Wesley).

## 2.8

## Ejercicios de repaso (1–30)

1 Resuelva, usando la transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 5x = 8 \cos t$$

sujeta a  $x = \frac{dx}{dt} = 0$  en  $t = 0$

$$(b) 5 \frac{d^2x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} - 2x = 6$$

sujeta a  $x = 1$  y  $\frac{dx}{dt} = 1$  en  $t = 0$

2 (a) Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)}$$

(b) Una fuente de voltaje  $V e^{-t} \sin t$  es aplicada a lo largo de un circuito RLC con  $L = 1$ ,  $R = 3$  y  $C = \frac{1}{3}$ . Verifique que la corriente  $i(t)$  en el circuito satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 2i = V e^{-t} \sin t$$

Encuentre la corriente  $i(t)$  en el circuito en el tiempo  $t \geq 0$  si  $i(t)$  satisface la condición inicial  $i(0) = 1$  y  $(di/dt)(0) = 2$ .

3 Use los métodos de la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones diferenciales simultáneas

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + 5 \frac{dy}{dt} = t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4y - 2\frac{dx}{dt} = -2$$

sujeta a  $x = y = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$  en  $t = 0$ .

4 Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = \cos t$$

sujeta a las condiciones iniciales  $x = x_0$  y  $dx/dt = x_1$  en  $t = 0$ . Identifique las secciones en estado estacionario y las soluciones transitorias. Encuentre la amplitud y la fase de cambio de la solución del estado estacionario.

5 Los resistores de  $5$  y  $20\Omega$  están conectados en la primera y la segunda bobinas de un transformador con inductancias como se muestra en la figura 2.57. En el tiempo  $t = 0$ , con flujos no concurrentes, un voltaje  $E = 100\text{ V}$  es aplicado en el primer circuito. Muestre que la corriente subsecuente en el segundo circuito es

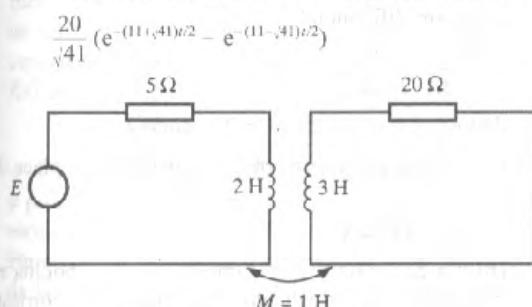


Figura 2.57 Circuito del ejercicio de repaso 5.

6 (a) Encuentre la transformada de Laplace de

- (i)  $\cos(\omega t + \phi)$     (ii)  $e^{\omega t} \sin(\omega t + \phi)$

(b) Usando los métodos de la transformada de Laplace resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = \cos 2t$$

dado que  $x = 2$  y  $dx/dt = 1$  cuando  $t = 0$ .

7 (a) Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$\frac{s-4}{s^2+4s+13}$$

(b) Resuelva usando la transformada de Laplace, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 2(2 + \cos t + 2 \sin t)$$

dado que  $y = -3$  cuando  $t = 0$ .

8 Usando transformadas de Laplace, resuelva las ecuaciones diferenciales simultáneas

$$\frac{dx}{dt} + 5x + 3y = 5 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{cos} t$$

$$\frac{dy}{dt} + 3y + 5x = 6 \operatorname{sen} t - 3 \operatorname{cos} t$$

donde  $x = 1$  y  $y = 0$  cuando  $t = 0$ .

9 La carga  $q$  de un capacitor en un circuito inductivo está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 300\frac{dq}{dt} + 2 \times 10^4 q = 200 \operatorname{sen} 100t$$

también se sabe que ambas  $q$  y  $dq/dt$  son cero cuando  $t = 0$ . Use los métodos de la transformada de Laplace para encontrar  $q$ . ¿Cuál es la diferencia de fase entre la componente del estado estacionario de la corriente  $dq/dt$  y la fém aplicada  $200 \operatorname{sen} 100t$  al medio grado más cercano?

10 Utilice las transformadas de Laplace para encontrar el valor de  $x$  dado que

$$4\frac{dx}{dt} + 6x + y = 2 \operatorname{sen} 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \frac{dy}{dt} = 3e^{-2t}$$

y que  $x = 2$  y  $dx/dt = -2$  cuando  $t = 0$ .

11 (a) Use transformadas de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 8\frac{d\theta}{dt} + 16\theta = \operatorname{sen} 2t$$

dado que  $\theta = 0$  y  $d\theta/dt = 0$  cuando  $t = 0$ .

(b) Usando transformadas de Laplace, resuelva las ecuaciones diferenciales simultáneas

$$\frac{di_1}{dt} + 2i_1 + 6i_2 = 0$$

$$i_1 + \frac{di_2}{dt} - 3i_2 = 0$$

dado que  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = 0$  cuando  $t = 0$ .

12 Las terminales de un generador que produce un voltaje  $V$  son conectadas a través de un alambre de resistencia  $R$  y una bobina de inductancia  $L$  (y con resistencia despreciable). Un capacitor de capacitancia

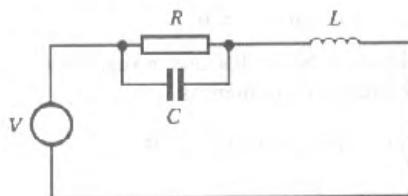


Figura 2.58 Circuito del ejercicio de repaso 12.

$C$  es conectado en paralelo con la resistencia  $R$  como se muestra en la figura 2.58. Verifique que la corriente  $i$  que fluye a través del resistor  $R$  está dada por

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + Ri = V$$

Supongamos que

- (i)  $V = 0$  para  $t < 0$  y  $V = E$  (constante) para  $t \geq 0$
- (ii)  $L = 2R^2C$
- (iii)  $CR = 1/2n$

y verifique que la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2n \frac{di}{dt} + 2n^2 i = 2n^2 \frac{E}{R}$$

Ahora, suponiendo que  $i = 0$  y  $di/dt = 0$  cuando  $t = 0$ , use la transformada de Laplace para obtener una expresión para  $i$  en términos de  $t$ .

- 13 Verifique que las corrientes en los circuitos acoplados de la figura 2.59 están determinadas por las ecuaciones diferenciales simultáneas

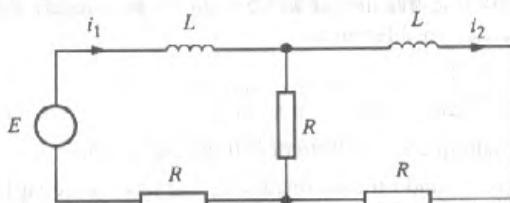


Figura 2.59 Circuito del ejercicio de repaso 13.

$$L \frac{di_1}{dt} + R(i_1 - i_2) + Ri_1 = E$$

$$L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 - R(i_1 - i_2) = 0$$

Encuentre  $i$  en términos de  $t$ ,  $L$ ,  $E$  y  $R$ , dado que  $i_1 = 0$  y  $di_1/dt = E/L$  en  $t = 0$ , y verifique que  $i_1 = \frac{2}{3}E/R$  para  $t$  grandes. ¿A qué tiende  $i_2$  para  $t$  grandes?

- 14 Un sistema consiste en dos masas unitarias que están en una recta sobre una superficie suave y unidas a dos puntos fijos por tres resortes. Cuando se aplica una fuerza senoidal al sistema, los desplazamientos  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de las masas con relación a sus posiciones de equilibrio satisfacen las ecuaciones

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = x_2 - 2x_1 + \operatorname{sen} 2t$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -2x_2 + x_1$$

Dado que el sistema está en reposo inicialmente en la posición de equilibrio ( $x_1 = x_2 = 0$ ). Use el método de la transformada de Laplace para resolver la ecuación  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ .

- 15 (a) Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$(i) \frac{s+4}{s^2+2s+10} \quad (ii) \frac{s-3}{(s-1)^2(s-2)}$$

- (b) Use la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 3t e^{-t}$$

dado que  $y = 4$  y  $dy/dt = 2$  cuando  $t = 0$ .

- 16 (a) Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$\frac{s}{s^2 - 14s + 53}$$

- (b) La ecuación del movimiento de una bobina en movimiento de un galvanómetro cuando una corriente  $i$  pasa a través de ella es de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2K \frac{d\theta}{dt} + n^2 \theta = \frac{n^2 i}{K}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de deflexión desde la posición 'no corriente' y  $n$  y  $K$  son constantes positivas. Dado que  $i$  es una constante y  $\theta = 0 = d\theta/dt$  cuando  $t = 0$ , obtenga una expresión para la transformada de Laplace de  $\theta$ .

En la construcción del galvanómetro, es deseable tenerlo efectivamente amortiguado (esto es,  $n = K$ ). En este caso, se debe usar el método de la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial y luego se debe dibujar la gráfica de  $\theta$  contra  $t$  para los valores positivos de  $t$ .

- 17 (a) Dada una constante positiva  $\alpha$ , use el segundo teorema de traslación para

- (i) comprobar que la transformada de Laplace de  $\operatorname{sen} t H(t - \alpha)$  es

$$e^{-as} \frac{\cos \alpha + s \sin \alpha}{s^2 + 1}$$

(ii) encuentre la transformada inversa de

$$\frac{s e^{-as}}{s^2 + 2s + 5}$$

(b) Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = \sin t - \sin t H(t - \pi)$$

dado que  $y = dy/dt = 0$  cuando  $t = 0$ .

18 Verifique que la transformada de Laplace del voltaje  $v(t)$  con periodo  $T$ , definida por

$$v(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \frac{1}{2}T) \\ -1 & (\frac{1}{2}T \leq t < T) \end{cases} \quad v(t+T) = v(t)$$

es

$$V(s) = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-sT/2}}{1 + e^{-sT/2}}$$

Este voltaje es aplicado a un capacitor de  $100 \mu\text{F}$  y un resistor de  $250 \Omega$  en serie, sin carga inicial en el capacitor. Verifique que la transformada de Laplace  $I(s)$  de la corriente  $i(t)$  que fluye, para  $t \geq 0$ , es

$$I(s) = \frac{1}{250(s+40)} \frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}$$

y proporcione una expresión, usando las funciones escalón de Heaviside, para  $i(t)$  cuando  $0 \leq t \leq 2T$ . Para  $T = 10^{-3}$  s, ¿es ésta una buena representación de la respuesta en estado estacionario del circuito? Dé una razón breve de su respuesta.

19 La respuesta  $x(t)$  de un sistema de control a un término de fuerza  $u(t)$  está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = u(t) \quad (t \geq 0)$$

Determine la respuesta al impulso del sistema y después, usando la integral de convolución, obtenga la respuesta del sistema a un escalón unitario  $u(t) = 1H(t)$  aplicado en  $t = 0$  dado que inicialmente el sistema está en estado de reposo. Verifique el resultado resolviendo directamente la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 1 \quad (t \geq 0)$$

con  $x = dx/dt = 0$  en  $t = 0$ .

20 Una viga horizontal ligera, de longitud 5 m y rigidez de flexión constante  $EI$ , sujetada en el extremo izquierdo  $x = 0$ , está sostenida simplemente en el punto  $x = 4$  m y tiene una carga distribuida con función de densidad

$$W(x) = \begin{cases} 12 \text{ kNm}^{-1} & (0 \leq x \leq 4) \\ 24 \text{ kNm}^{-1} & (4 < x \leq 5) \end{cases}$$

Escriba el problema con valores en la frontera de cuarto orden de la deflexión  $y(x)$ . Resuelva este problema para determinar  $y(x)$  para el caso  $0 \leq x \leq 4$  y  $4 \leq x \leq 5$ . Calcule la reacción final y el momento evaluando las derivadas apropiadas de  $y(x)$  en  $x = 0$ . Verifique en el extremo que sus resultados satisfacen la ecuación de equilibrio para toda la viga.

21 (a) Dibuje la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 1) \\ 1 & (1 \leq t < 2) \\ 0 & (t \geq 2) \end{cases}$$

Expresé  $f(t)$  en términos de funciones escalón de Heaviside y use la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t)$$

dado que  $x = 0$  en  $t = 0$ .

(b) La transformada de Laplace  $I(s)$  de la corriente  $i(t)$  en cierto circuito está dada por

$$I(s) = \frac{E}{s[Ls + R/(1 + Cs)]}$$

donde  $E$ ,  $L$ ,  $R$  y  $C$  son constantes positivas. Determine (i)  $\lim_{t \rightarrow 0} i(t)$  y (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$ .

22 Verifique que la transformada de Laplace de la función semi-rectificada de la onda del seno

$$v(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

de periodo  $2\pi$ , es

$$\frac{1}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})}$$

Este voltaje  $v(t)$  es aplicado a una resistencia de  $1 \Omega$  y a un inductor de  $1 \text{ H}$  conectados en serie. Verifique que la corriente resultante, inicialmente en cero, es  $\sum_{n=0}^{\infty} f(t - n\pi)$ , donde  $f(t) = (\sin t - \cos t + e^{-t})H(t)$ . Dibuje una gráfica de la función  $f(t)$ .

23 (a) Encuentre la transformada inversa de Laplace de  $1/s^2(s+1)^2$ , escriba la expresión en la forma  $(1/s^2)[1/(s+1)^2]$  y utilice el teorema de convolución.

(b) Use el teorema de convolución para resolver la ecuación integral

$$y(t) = t + 2 \int_0^t y(u) \cos(t-u) du$$

y la ecuación integro-diferencial

$$\int_0^t y''(u)y'(t-u) du = y(t)$$

donde  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = y_1$ . Elabore un comentario de la solución de la segunda ecuación.

- 24 Una viga de peso despreciable y longitud  $3l$  carga un peso puntual  $W$  a una distancia  $l$  del extremo izquierdo. Ambos extremos están anclados horizontalmente al mismo nivel. Determine la ecuación que rige la deflexión de la viga. Si, además, la viga está ahora sujeta a un peso  $w$  por unidad de longitud sobre la parte más corta de la viga, ¿cuál es ahora la ecuación diferencial que determina la deflexión?

- 25 (a) Usando la transformada de Laplace, resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 3x = H(t-a) \quad (a > 0)$$

donde  $H(t)$  es la función escalón unitario de Heaviside dado que  $x = 0$  y  $dx/dt = 0$  en  $t = 0$ .

(b) La salida  $x(t)$  de un sistema de control lineal estable con entrada  $\sin \omega t$  y función de transferencia  $G(s)$  está determinada por la relación

$$X(s) = G(s)\mathcal{L}\{\sin \omega t\}$$

donde  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ . Verifique que, después de un tiempo  $t$  grande, la salida se approxima a  $x_s(t)$  donde

$$x_s(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{j\omega t}G(j\omega)}{j}\right)$$

- 26 Considere el sistema con retroalimentación de la figura 2.60 donde  $K$  es una constante de ganancia de retroalimentación.

(a) En la ausencia de retroalimentación (esto es,  $K = 0$ ), ¿es el sistema estable?

(b) Escriba la función de transferencia  $G_s(s)$  para todo el sistema de retroalimentación.

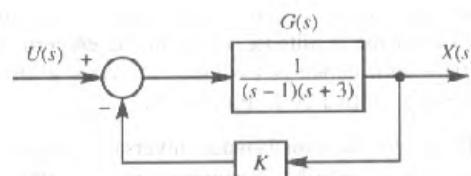


Figura 2.60 Sistema de control de retroalimentación del ejercicio de repaso 26.

- (c) Trace el lugar de los polos de  $G_s(s)$  en el plano  $s$  para ambos valores positivo y negativo de  $K$ .
- (d) Para los trazos en (c), especifique para qué rango de valores de  $K$  el sistema de retroalimentación es estable.

- (e) Confirme su respuesta en (d) usando el criterio de Routh-Hurwitz.

- 27 (a) Para el sistema de retroalimentación de control de la figura 2.61(a), se sabe que la respuesta al impulso es  $h(t) = 2 e^{-2t} \sin t$ . Use esto para determinar el valor del parámetro  $\alpha$ .

- (b) Considere el sistema de control de la figura 2.61(b) que tiene tanto retroalimentación proporcional como de razón. Determine el valor crítico de la ganancia  $K$  para la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

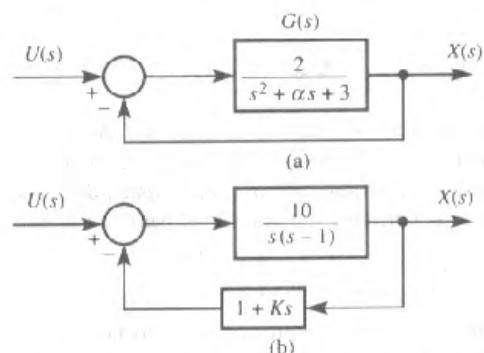


Figura 2.61 Sistema de control de retroalimentación del ejercicio de repaso 27.

- 28 (Un problema extendido) La respuesta transitoria de un sistema de control práctico a una entrada escalón unitario frecuentemente exhibe oscilaciones amortiguadas antes de llegar a un estado estable. Las siguientes propiedades son algunas de las usadas para especificar la respuesta transitoria característica de un sistema no amortiguado:

**tiempo de elevación**, el tiempo requerido para que la respuesta se eleve del 0 al 100% de su valor final.

**tiempo de pico**, el tiempo requerido para que la respuesta llegue al primer pico del sobreimpulso;

**tiempo de estabilidad**, el tiempo requerido para que la curva de respuesta llegue y se quede dentro de un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por un porcentaje absoluto del valor final (generalmente 2% o 5%);

**sobreimpulso máximo**, es el valor del pico máximo de la respuesta medida desde la unidad.

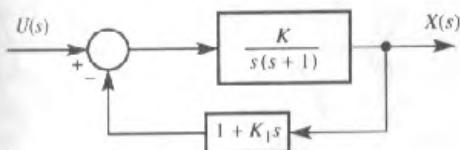


Figura 2.62 Sistema de control de retroalimentación del ejercicio de repaso 28.

Consideramos el sistema de retroalimentación de control de la figura 2.62 teniendo tanto retroalimentación proporcional como en la derivada.

Es deseable elegir los valores de ganancia  $K$  y  $K_1$ , de tal manera que el sistema de respuesta escalón unitario tenga un pico máximo de 0.2 y un tiempo pico de 1 segundo.

- Obtenga la función de transferencia sobre todo el sistema de lazo cerrado.
- Verifique que la respuesta a un escalón unitario del sistema, suponiendo condiciones iniciales iguales a cero, puede escribirse en la forma

$$x(t) = 1 - e^{-\omega_a \xi t} \left[ \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right] \quad (t \geq 0)$$

donde  $\omega_d = \omega_a \sqrt{1-\xi^2}$ ,  $\omega_a^2 = K$  y  $2\omega_a \xi = 1 + KK_1$ .

- Determine los valores de ganancia  $K$  y  $K_1$  de manera que las características deseadas se cumplan.
- Con esos valores de  $K$  y  $K_1$ , determine el tiempo de elevación y el tiempo de estabilidad comparando los criterios de 2% y 5% para este último.

- 29 (Un problema extendido) La masa  $M_1$  del sistema mecánico de la figura 2.63(a) está sujeta a un término de fuerza armónica  $\text{sen } \omega t$ . Determine la respuesta del estado estacionario del sistema.

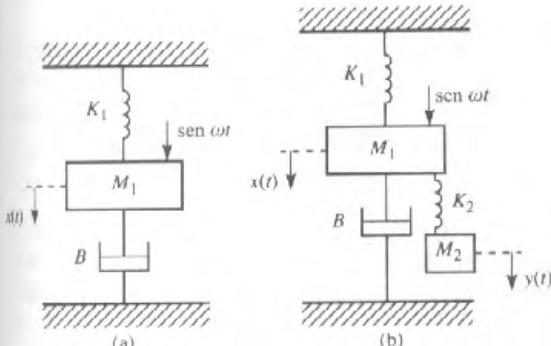


Figura 2.63 Amortiguador de vibración del ejercicio de repaso 29.

Es deseable diseñar un amortiguador de vibraciones que absorba las oscilaciones del sistema, de manera que en el estado estacionario  $x(t) \equiv 0$ . Para alcanzar esto, se sujeta un sistema secundario como se ilustra en la figura 2.63(b).

- Verifique que, con una elección apropiada de  $M_2$  y  $K_2$ , se puede alcanzar el objetivo deseado.
- ¿Cuál es el movimiento correspondiente del estado estacionario de la masa  $M_2$ ?
- Realice un comentario sobre lo práctico de su diseño.

- 30 (Un problema extendido) El amplificador electrónico de la figura 2.64 tiene una función de transferencia  $G(s)$  que es un lazo abierto con las siguientes características: una ganancia de baja frecuencia de 120 dB y polos simples en 1 MHz, 10 MHz y 25 MHz. Puede suponerse que el amplificador es ideal, de manera que  $K/(1+K\beta) = 1/\beta$ , donde  $\beta$  es la ganancia de retroalimentación y  $K$  es la ganancia del estado estacionario asociado con  $G(s)$ .

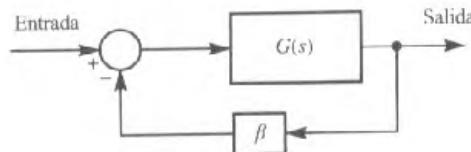


Figura 2.64 Amplificador electrónico del ejercicio de repaso 30.

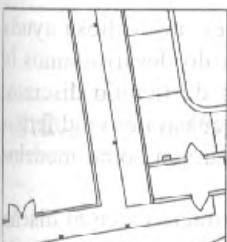
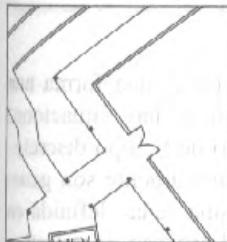
- Construya las gráficas de la magnitud vs el log de la frecuencia y la fase vs el log de la frecuencia (Gráficas de Bode) para el sistema de lazo abierto.
- Determine, a partir de los trazos de Bode si el sistema es o no estable en el caso de retroalimentación unitaria (esto es,  $\beta = 1$ ).
- Determine el valor de  $\beta$  para la estabilidad marginal y del valor correspondiente de aumento de baja frecuencia para el lazo cerrado.
- Ahora se aplica la retroalimentación al amplificador para reducir el aumento del lazo cerrado en la baja frecuencia de 100 dB. Determine la ganancia y la fase correspondientes a esta configuración de lazo cerrado.
- Usando las características dadas, exprese  $G(s)$  en la forma

$$G(s) = \frac{K}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$

y ahora obtenga la función de transferencia de entrada-salida del amplificador.

- Escriba la ecuación característica para el sistema de lazo cerrado y use el criterio de Routh-Hurwitz, considere las partes (b) y (c).





# 3

## La transformada z

### CONTENIDO

- 3.1 Introducción
- 3.2 La transformada z
- 3.3 Propiedades de la transformada z
- 3.4 La transformada z inversa
- 3.5 Sistemas de tiempo discreto y ecuaciones en diferencias
- 3.6 Sistemas lineales discretos: caracterización
- 3.7 La relación entre la transformada de Laplace y la transformada z
- 3.8 Aplicación a la ingeniería: diseño de sistemas de tiempo discreto
- 3.9 Aplicación a la ingeniería: el operador delta y la transformada  $\mathcal{D}$
- 3.10 Ejercicios de repaso (1–16)

### 3.1

## Introducción

En este capítulo enfocaremos nuestra atención en procesos discretos (de tiempo). Con la llegada de las computadoras digitales, rápidas y baratas, se ha renovado el énfasis en el análisis y diseño de sistemas digitales, que representan una clase importante de sistemas en ingeniería. El énfasis principal de este capítulo será en esa dirección. Sin embargo, es un error pensar que las bases matemáticas de esta área de trabajo son así de recientes. El primer texto exhaustivo en inglés que trata las ecuaciones en diferencias fue *The Treatise of the Calculus of Finite Differences* escrito por George Boole y publicado en 1860. Gran parte del ímpetu inicial del **cálculo finito** se debió a la necesidad de llevar a cabo interpolaciones y aproximar derivadas e integrales. Más tarde, se inventaron métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales, muchos de los cuales se basaron en los **métodos de diferencias finitas** al aproximar las derivadas para obtener una **ecuación en diferencias**. La idea fundamental en cada

uno de los casos discutidos hasta ahora consiste en aproximar de alguna forma una función continua o un proceso continuo de tiempo. Sin embargo, hay situaciones donde es más apropiado proponer, desde el principio, un modelo de tiempo discreto.

Los sistemas digitales operan con señales digitales, que generalmente son generadas por **muestreo** de una señal de tiempo continuo, esto es, una señal definida en cada instante en un intervalo de tiempo posiblemente infinito. El proceso de muestreo genera una **señal de tiempo discreto**, definida sólo en los instantes en que el muestreo se lleva a cabo de tal manera que se genera una sucesión digital. Después de procesarla con una computadora, la señal digital de salida puede usarse para construir una nueva señal de tiempo continuo, por ejemplo, utilizando un dispositivo de muestreo y retención, y ésta a su vez, puede usarse para controlar una fábrica o un proceso. Los aparatos de proceso de señales digitales han tenido un gran impacto en muchas áreas de la ingeniería, así como en el hogar. Por ejemplo, muchos lectores habrán escuchado la calidad de reproducción significativamente perfeccionada de los discos compactos de música, los cuales operan usando tecnología digital.

En el capítulo 2 vimos que la transformada de Laplace es una valiosa ayuda en el análisis de sistemas de tiempo continuo, y en este capítulo desarrollaremos la transformada  $z$ , la cual realiza la misma tarea para sistemas de tiempo discreto. Introducimos la transformada en conexión con la solución de ecuaciones en diferencias y después mostramos cómo las ecuaciones en diferencias surgen como modelos de sistemas discretos en el tiempo.

El capítulo incluye dos aplicaciones a la ingeniería. La primera es en el diseño de filtros digitales y destaca una de las principales aplicaciones de los métodos de transformadas como una herramienta de diseño. Puede esperarse que, siempre que esté involucrado el muestreo, aumente la eficiencia si la razón del muestreo crece. Los ingenieros han encontrado que esto no es suficiente y la segunda aplicación trata con algunos de los problemas que han encontrado. Esto nos lleva a la introducción del concepto unificador de la transformada  $\mathcal{Z}$ , la cual unifica las teorías de las transformadas de Laplace y  $z$ .

### 3.2

## La transformada $z$

Como las transformadas  $z$  se relacionan con las sucesiones, primero revisamos la notación asociada con las sucesiones, que fueron consideradas con mayor detalle en el capítulo 7 del libro *Modern Engineering Mathematics*. Una sucesión finita  $\{x_k\}_0^n$  es un conjunto ordenado de  $n + 1$  números reales o complejos

$$\{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Observamos que el conjunto de números está ordenado, así que la posición en la sucesión es importante. La posición está identificada con el índice de posición  $k$ , donde  $k$  es un entero. Si el número de elementos del conjunto es infinito tenemos entonces una **sucesión infinita**

$$\{x_k\}_0^\infty = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

Cuando tratamos con muestras de funciones en el tiempo  $t$ , es necesario contar con medios que nos permitan tener  $t < 0$ . Para hacer esto, permitimos que la sucesión de números se extienda al infinito en ambos sentidos de la posición inicial  $x_0$  y escribimos

$$\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{ \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \}$$

Las sucesiones  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  para las cuales  $x_k = 0$  ( $k < 0$ ) son llamadas **sucesiones causales** por analogía con las funciones causales  $f(t)H(t)$  de tiempo continuo definidas en la sección 2.2.1 como

$$f(t)H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

Mientras que para algunas sucesiones finitas es posible especificar la sucesión haciendo una lista de todos los elementos del conjunto, lo normal es que una sucesión esté especificada por una fórmula de su elemento general  $x_k$ .

### 3.2.1 Definición y notación

La **transformada z** de una sucesión  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  está definida, en general, como

$$\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} \quad (3.1)$$

siempre que exista la sumatoria y donde  $z$  es una variable compleja todavía indefinida.

El proceso de aplicar la transformada  $z$  a una sucesión produce una función de variable compleja  $z$ , cuya forma depende de la propia sucesión. El símbolo  $\mathcal{Z}$  denota el **operador transformada z**, que cuando opera sobre la sucesión  $\{x_k\}$  transforma esta última en la función  $X(z)$  de la variable compleja  $z$ . Es usual referirse a  $\{x_k\}$ ,  $X(z)$  como el **par de transformadas z** que algunas veces se escribe como  $\{x_k\} \leftrightarrow X(z)$ . Observamos la similitud con la obtención de la transformada de Laplace de una función en la sección 2.2.1. En la sección 3.7, estudiaremos la relación entre las transformadas de Laplace y  $z$ .

Para sucesiones  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  que son *causales*, esto es,

$$x_k = 0 \quad (k < 0)$$

la transformada  $z$  dada en (3.1) se reduce a

$$\mathcal{Z}\{x_k\}_0^{\infty} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} \quad (3.2)$$

En este capítulo estaremos interesados en las sucesiones causales y por tanto la definición dada en (3.2) será la que usaremos de aquí en adelante. A partir de ahora usaremos  $\{x_k\}$  para denotar  $\{x_k\}_0^\infty$ . Sin embargo, las sucesiones no causales son de importancia y surgen de manera particular en los campos de procesamiento digital de imágenes entre otros.

### EJEMPLO 3.1

Determine la transformada z de la sucesión

$$\{x_k\} = \{2^k\} \quad (k \geq 0)$$

**Solución** A partir de la definición (3.2),

$$\mathcal{Z}\{2^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

que reconocemos como una serie geométrica, con razón común  $r = 2/z$  entre términos sucesivos. Así la serie converge para  $|z| > 2$ , cuando

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - (2/z)^k}{1 - 2/z} = \frac{1}{1 - 2/z}$$

llegando a

$$\mathcal{Z}\{2^k\} = \frac{z}{z-2} \quad (|z| > 2) \quad (3.3)$$

así que

$$\begin{cases} \{x_k\} = \{2^k\} \\ X(z) = \frac{z}{z-2} \end{cases}$$

es un ejemplo de par de transformadas z.

Del ejemplo 3.1, vemos que la transformada z de la sucesión  $\{2^k\}$  existe si restringimos la variable compleja z de manera que esté fuera del círculo  $|z| = 2$  en el plano z. Desde otro punto de vista, la función

$$X(z) = \frac{z}{z-2} \quad (|z| > 2)$$

puede pensarse como una **función generadora** de la sucesión  $\{2^k\}$ , en el sentido de que el coeficiente de  $z^k$  en la expansión de  $X(z)$  en potencias de  $1/z$  genera el  $k$ -ésimo término de la sucesión  $\{2^k\}$ . Esto se puede verificar fácilmente, ya que

$$\frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2/z} = \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{-1}$$

y puesto que  $|z| > 2$ , podemos expandir como

$$\left(1 - \frac{2}{z}\right)^{-1} = 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{z}\right)^k + \dots$$

y vemos que el coeficiente de  $z^{-k}$  es, en verdad,  $2^k$ , como se esperaba.

Podemos generalizar este resultado (3.3) de una manera obvia para determinar  $\mathcal{Z}\{a^k\}$ , la transformada z de la sucesión  $\{a^k\}$ , donde  $a$  es una constante real o compleja. En seguida

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \frac{1}{1+a/z} \quad (|z| > |a|)$$

así que

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|) \quad (3.4)$$

### EJEMPLO 3.2

Demuestre que

$$\mathcal{Z}\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} = \frac{2z}{2z+1} \quad (|z| > \frac{1}{2})$$

**Solución** Haciendo  $a = -\frac{1}{2}$  en (3.4), tenemos

$$\mathcal{Z}\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{z^k} = \frac{z}{z - \left(-\frac{1}{2}\right)} \quad (|z| > \frac{1}{2})$$

así que

$$\mathcal{Z}\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} = \frac{2z}{2z+1} \quad (|z| > \frac{1}{2})$$

Otros pares de transformadas z pueden obtenerse de (3.4) mediante derivación formal con respecto a  $a$ , que por el momento vemos como un parámetro. Esto da

$$\frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} = \mathcal{Z}\left\{ \frac{da^k}{da} \right\} = \frac{d}{da} \left( \frac{z}{z-a} \right)$$

llegando a

$$\mathcal{Z}\{ka^{k-1}\} = \frac{z}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|) \quad (3.5)$$

En el caso particular  $a = 1$  esto da

$$\mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1) \quad (3.6)$$

**EJEMPLO 3.3**

Encuentre la transformada  $z$  de la sucesión

$$\{2k\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

**Solución** A partir de (3.6),

$$\mathcal{Z}\{k\} = \mathcal{Z}\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z^k} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Usando la definición (3.1),

$$\mathcal{Z}\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = 0 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{6}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \dots = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z^k}$$

así que

$$\mathcal{Z}\{2k\} = 2\mathcal{Z}\{k\} = \frac{2z}{(z-1)^2} \quad (3.7)$$

El ejemplo 3.3 muestra la propiedad de “linealidad” de la transformada  $z$ , que consideraremos más adelante en la sección 3.3.1.

Una sucesión de particular importancia es la sucesión del **pulso unitario o impulso**

$$\{\delta_k\} = \{1\} = \{1, 0, 0, \dots\}$$

Se sigue directamente de la definición (3.4) que

$$\mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1 \quad (3.8)$$

**3.2.2****Muestreo: una primera introducción**

En las aplicaciones a la ingeniería, las sucesiones frecuentemente son generadas por medio del muestreo de señales de tiempo continuo, descritas mediante funciones  $f(t)$  de una variable  $t$  de tiempo continuo. Aquí no discutiremos los métodos de muestreo de una señal, sino que sólo supondremos que esto es posible en una forma idealizada.

La figura 3.1 ilustra el proceso de muestreo idealizado en el cual una señal de tiempo continuo  $f(t)$  es muestreada instantánea y perfectamente en intervalos uniformes  $T$ , el **intervalo de muestreo**. El proceso de muestreo idealizado genera la sucesión

$$\{f(kT)\} = \{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots\} \quad (3.9)$$

Usando la definición (3.1), podemos aplicar la transformada  $z$  a la sucesión (3.9) para obtener

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{z^k} \quad (3.10)$$

siempre que la serie converja. Esta idea es ilustrada simplemente mediante un ejemplo.

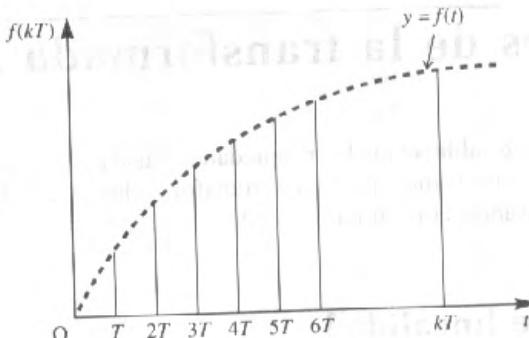


Figura 3.1 Muestreo de una señal en tiempo continuo.

### EJEMPLO 3.4

La señal  $f(t) = e^{-t}H(t)$  es muestreada en intervalos  $T$ . ¿Cuál es la transformada  $z$  de la sucesión resultante del muestreo?

#### Solución

El muestreo de la función causal  $f(t)$  genera la sucesión

$$\begin{aligned}\{f(kT)\} &= \{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots\} \\ &= \{1, e^{-T}, e^{-2T}, e^{-3T}, \dots, e^{-nT}, \dots\}\end{aligned}$$

Entonces, usando (3.1),

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kT}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-T}}{z}\right)^k$$

así que

$$\mathcal{Z}\{e^{-kT}\} = \frac{z}{z - e^{-T}} \quad (|z| > e^{-T}) \quad (3.11)$$

Es importante observar en el ejemplo 3.4 que la región de convergencia depende del intervalo de muestreo  $T$ .

### 3.2.3 Ejercicios

1 Calcule la transformada  $z$  de las siguientes sucesiones, estableciendo, en cada caso, la región de convergencia.

- (a)  $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}$
- (b)  $\{3^k\}$
- (c)  $\{(-2)^k\}$
- (d)  $\{-2^k\}$
- (e)  $\{3k\}$

2 La señal de tiempo continuo  $f(t) = e^{-2at}$ , donde  $a$  es una constante real, es muestreada cuando  $t \geq 0$  en intervalos  $T$ . Escriba el término general de la sucesión de muestreo y calcule la transformada  $z$  de la sucesión.

## 3.3

## Propiedades de la transformada z

En esta sección establecemos las propiedades básicas de la transformada  $z$  que nos permitirán encontrar más pares de transformadas  $z$  sin tener que calcularlas directamente usando la definición.

## 3.3.1 La propiedad de linealidad

Como para la transformada de Laplace, una propiedad fundamental de la transformada  $z$  es su linealidad, que se puede expresar como sigue.

Si  $\{x_k\}$  y  $\{y_k\}$  son sucesiones que tienen transformadas  $z\{x_k\}$  y  $\{y_k\}$  respectivamente y si  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes reales o complejas cualesquiera, entonces

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_k + \beta y_k\} = \alpha \mathcal{Z}\{x_k\} + \beta \mathcal{Z}\{y_k\} = \alpha X(z) + \beta Y(z) \quad (3.12)$$

Como una consecuencia de esta propiedad, decimos que el operador transformada  $z$ ,  $\mathcal{Z}$ , es un **operador lineal**. Una prueba de la propiedad se sigue directamente de la definición (3.4) ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\alpha x_k + \beta y_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha x_k + \beta y_k}{z^k} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} \\ &= \alpha X(z) + \beta Y(z) \end{aligned}$$

La región de existencia de la transformada  $z$ , en el plano  $z$ , de la combinación lineal será la intersección de las regiones de existencia (esto es, la región común de ambas) de las transformadas  $z$  individuales  $X(z)$  y  $Y(z)$ .

## EJEMPLO 3.5

La función de tiempo continuo  $f(t) = \cos \omega t H(t)$ , con  $\omega$  constante, es muestreada en el sentido idealizado en intervalos  $T$  para generar la sucesión  $\{\cos k\omega T\}$ . Determine la transformada  $z$  de la sucesión.

**Solución** Usando el resultado  $\cos k\omega T = \frac{1}{2}(e^{jk\omega T} + e^{-jk\omega T})$  y la propiedad de linealidad, tenemos

$$\mathcal{Z}\{\cos k\omega T\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}e^{jk\omega T} + \frac{1}{2}e^{-jk\omega T}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{jk\omega T}\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{-jk\omega T}\}$$

Usando (3.7) y observando que  $|e^{jk\omega T}| = |e^{-jk\omega T}| = 1$  da

$$\mathcal{Z}\{\cos k\omega T\} = \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \quad (|z| > 1)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z(z - e^{-j\omega T}) + z(z - e^{j\omega T})}{z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z + 1}$$

Llegando al par de transformadas z

$$\mathcal{Z}\{\cos k\omega T\} = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad (|z| > 1) \quad (3.13)$$

De una manera similar al ejemplo 3.5, podemos verificar el par de transformadas z

$$\mathcal{Z}\{\sin k\omega T\} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad (|z| > 1) \quad (3.14)$$

y se deja como ejercicio para el lector (ver el ejercicio 3).

### 3.3.2 La primera propiedad de traslación (retraso)

En esta sección y en la siguiente, introducimos dos propiedades relacionando la transformada z de una sucesión con la transformada z de la versión trasladada de la misma sucesión. En esta sección consideraremos la versión de retraso de la sucesión  $\{x_k\}$ , denotada por  $\{y_k\}$ , con

$$y_k = x_{k-k_0}$$

Aquí  $k_0$  es el número de pasos en el retraso; por ejemplo, si  $k_0 = 2$ , entonces  $y_k = x_{k-2}$ , así que

$$y_0 = x_{-2}, \quad y_1 = x_{-1}, \quad y_2 = x_0, \quad y_3 = x_1$$

y así sucesivamente. Así la sucesión  $\{y_k\}$  es simplemente la sucesión  $\{x_k\}$  movida hacia atrás o retrasada, en dos pasos. A partir de la definición (3.1),

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k-k_0}}{z^k} = \sum_{p=-k_0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p+k_0}}$$

donde hemos escrito  $p = k - k_0$ . Si  $\{x_k\}$  es una sucesión causal, de manera que  $x_p = 0$  ( $p < 0$ ), entonces

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p+k_0}} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = \frac{1}{z^{k_0}} X(z)$$

donde  $X(z)$  es la transformada z de  $\{x_k\}$ .

Por tanto tenemos el resultado

$$\mathcal{Z}\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\} \quad (3.15)$$

que se conoce como la **primera propiedad de traslación** de la transformada z.

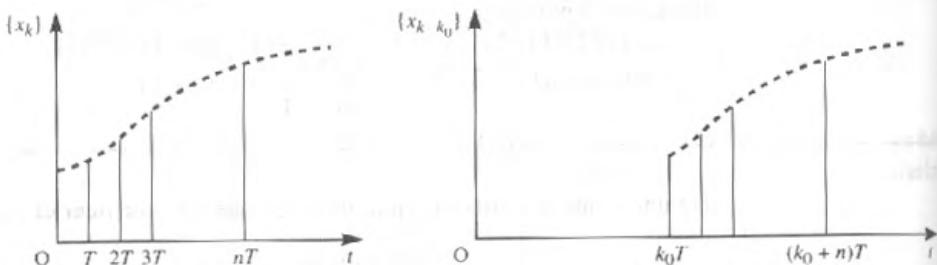


Figura 3.2 Sucesión y su forma recorrida.

Si  $\{x_k\}$  representa la forma muestral, con intervalo de muestreo  $T$ , de la señal continua  $x(t)$  entonces  $\{x_{k-k_0}\}$  representa la forma muestral de la señal continua  $x(t - k_0T)$  que, como se ilustra en la figura 3.2, es la señal  $x(t)$  retrasada por un múltiplo de  $k_0$  del intervalo de muestreo  $T$ . El lector encontrará interesante comparar este resultado con los resultados de las transformadas de Laplace de integrales (2.16).

### EJEMPLO 3.6

La sucesión causal  $\{x_k\}$  está generada por

$$x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (k \geq 0)$$

Determine la transformada  $z$  de la sucesión recorrida ( $\{x_{k-2}\}$ ).

**Solución** Por la primera propiedad de traslación,

$$\mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

la cual, usando (3.4), da

$$\mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{z^2} \frac{2z}{2z - 1} = \frac{2}{z(2z - 1)} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$$

Podemos confirmar este resultado usando directamente la definición (3.1). A partir de esto, y del hecho de que  $\{x_k\}$  es una sucesión causal,

$$\{x_{k-2}\} = \{x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\} = \{0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_{k-2}\} &= 0 + 0 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{4z^4} + \dots = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{z^2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right) = \frac{z}{z(2z - 1)} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

### 3.3.3 La segunda propiedad de traslación (avance)

En esta sección buscamos una relación entre la transformada  $z$  de una versión adelantada de una sucesión y aquella de la sucesión original. Primero consideraremos un adelanto de un solo paso. Si  $\{y_k\}$  es la versión adelantada de un solo paso de la sucesión  $\{x_k\}$  entonces  $\{y_k\}$  está generada por

$$y_k = x_{k+1} \quad (k \geq 0)$$

Entonces

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{z^k} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{z^{k+1}}$$

y haciendo  $p = k + 1$  da

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = z \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} - x_0 \right) = zX(z) - zx_0$$

donde  $X(z)$  es la transformada  $z$  de  $\{x_k\}$ .

Por tanto, tenemos el resultado

$$\mathcal{Z}\{x_{k+1}\} = zX(z) - zx_0 \tag{3.16}$$

De manera similar se prueba fácilmente que para una sucesión con adelanto de dos pasos  $\{x_{k+2}\}$

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2X(z) - zx_0 - zx_1 \tag{3.17}$$

Observamos, por una parte, la similitud de estructura entre (3.16) y (3.17) y aquella para la transformada de Laplace de la primera y segunda derivadas (sección 2.3.1). En general, se prueba fácilmente por inducción que para una sucesión adelantada  $k_0$  pasos  $\{x_{k+k_0}\}$

$$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0}X(z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n z^{k_0-n} \tag{3.18}$$

En la sección 3.5.2 usaremos estos resultados para resolver ecuaciones en diferencias.

### 3.3.4 Algunas propiedades más

En esta sección expondremos algunas propiedades más de la transformada  $z$  dejando su comprobación al lector en los ejercicios 9 y 10.

**(i) Multiplicación por  $a^k$** 

Si  $Z\{x_k\} = X(z)$  entonces para una constante  $a$

$$\mathcal{Z}\{a^k x_k\} = X(a^{-1}z) \quad (3.19)$$

**(ii) Multiplicación por  $k^n$** 

Si  $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$  entonces para un entero positivo  $n$

$$\mathcal{Z}\{k^n x_k\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z) \quad (3.20)$$

Observamos que en (3.20) el operador  $-z d/dz$  significa ‘primero diferenciamos con respecto a  $z$  y después multiplicamos por  $-z$ ’. Elevar a la potencia  $n$  significa ‘repetir la operación  $n$  veces’.

**(iii) Teorema del valor inicial**

Si  $\{x_k\}$  es una sucesión cuya transformada  $z$  es  $X(z)$  entonces el teorema del valor inicial establece que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x_0 \quad (3.21)$$

**(iv) Teorema de valor final**

Si  $\{x_k\}$  es una sucesión con transformada  $z$   $X(z)$  entonces el teorema del valor final establece que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (3.22)$$

siempre que los polos de  $(1 - z^{-1})X(z)$  estén dentro del círculo unitario.

**3.3.5****Tabla de transformadas z**

Para facilitar el uso de los resultados obtenidos hasta ahora, es útil tenerlos en una sola tabla. Este resumen de transformada se muestra en la figura 3.3.

$\{x_k\}$ ( $k \geq 0$ )	$\mathcal{Z}\{x_k\}$	Región de existencia
$x_k = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k > 0) \end{cases}$ (sucesión de pulso unitario)	1	Todo $z$
$x_k = 1$ (sucesión escalón unitario)	$\frac{z}{z - 1}$	$ z  > 1$
$x_k = a^k$ ( $a$ constante)	$\frac{z}{z - a}$	$ z  >  a $
$x_k = k$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	$ z  > 1$
$x_k = ka^{k-1}$ ( $a$ constante)	$\frac{z}{(z - a)^2}$	$ z  > a$
$x_k = e^{-kT}$ ( $T$ constante)	$\frac{z}{z - e^{-T}}$	$ z  > e^{-T}$
$x_k = \cos k\omega T$ ( $\omega, T$ constantes)	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ z  > 1$
$x_k = \sin k\omega T$ ( $\omega, T$ constantes)	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ z  > 1$

Figura 3.3 Tabla breve de las transformadas z.

### 3.3.6 Ejercicios

3 Utilice el método del ejemplo 3.5 para comprobar (3.14), a saber

$$\mathcal{Z}\{\sin k\omega T\} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

donde  $\omega$  y  $T$  son constantes.

4 Utilice la primera propiedad de translación para calcular la transformada z de la sucesión  $\{y_k\}$ , con

$$y_k = \begin{cases} 0 & (k \leq 3) \\ x_k & (k \geq 3) \end{cases}$$

donde  $\{x_k\}$  es causal y  $x_k = (\frac{1}{2})^k$ . Confirme su resultado por evaluación directa de  $\mathcal{Z}\{y_k\}$  usando la definición de la transformada z.

5 Determine la transformada z de las sucesiones

(a)  $\{(-\frac{1}{3})^k\}$     (b)  $\{\cos k\pi\}$

6 Determine  $\mathcal{Z}\{(\frac{1}{2})^k\}$ . Usando (3.6) obtenga la transformada z de la sucesión  $\{k(\frac{1}{2})^k\}$ .

7 Demuestre que para una constante  $\alpha$

$$(a) \mathcal{Z}\{\sinh k\alpha\} = \frac{z \sinh \alpha}{z^2 - 2z \cosh \alpha + 1}$$

$$(b) \mathcal{Z}\{\cosh k\alpha\} = \frac{z^2 + z \cosh \alpha}{z^2 - 2z \cosh \alpha + 1}$$

8 Las sucesiones son generadas por muestreo de señales causales continuas en el tiempo  $u(t)$  ( $t \geq 0$ ) en  $T$  intervalos uniformes. Escriba una expresión para  $u_k$ , el término general de la sucesión, y calcule la transformada z correspondiente cuando  $u(t)$  es

(a)  $e^{-At}$     (b)  $\sin t$     (c)  $\cos 2t$

9 Demuestre los teoremas de valor inicial y final que se indican en (3.21) y (3.22).

10 Pruebe las propiedades de multiplicación dadas en (3.19) y (3.20).

## 3.4 La transformada z inversa

En esta sección consideraremos el problema de recuperar una sucesión causal  $\{x_k\}$  a partir del conocimiento de  $X(z)$ , su transformada z. Como veremos, el trabajo en la inversión de la transformada de Laplace en la sección 2.2.7 será un recurso valioso para esta tarea.

Formalmente el símbolo  $\mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$  indica una sucesión causal  $\{x_k\}$  cuya transformada z es  $X(z)$ ; esto es,

$$\text{si } \mathcal{Z}\{x_k\} = X(z) \text{ entonces } \{x_k\} = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

Esta correspondencia entre  $X(z)$  y  $\{x_k\}$  es llamada la **transformación inversa z**, siendo  $\{x_k\}$  la **transformada inversa** de  $X(z)$ , y  $\mathcal{Z}^{-1}$  el **operador transformación inversa z**.

Como en la sección 2.2.8 para la transformada de Laplace, la forma más obvia de encontrar la transformada inversa de  $X(z)$  es usar una tabla de transformadas como la dada en la figura 3.3. Algunas veces es posible escribir la transformada inversa directamente a partir de la tabla, pero es más frecuente que no, primero es necesario hacer algunas manipulaciones algebraicas sobre  $X(z)$ . En particular, frecuentemente necesitamos determinar la transformada inversa de una expresión racional de la forma  $P(z)/Q(z)$ , donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios en  $z$ . En cada caso el procedimiento, como en el caso de la transformada de Laplace, consiste en desarrollar primero la expresión o una forma corregida de ella en fracciones parciales y después usar la tabla de transformadas. Ahora ilustraremos el procedimiento a través de algunos ejemplos.

### 3.4.1 Técnicas de inversión

#### EJEMPLO 3.7

Encuentre

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

**Solución** En la figura 3.3, vemos que  $z/(z-2)$  es un caso especial de la transformada  $z/(z-a)$ , con  $a = 2$ . Así

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = \{2^k\}$$

#### EJEMPLO 3.8

Encuentre

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right]$$

**Solución** Guiados por nuestro trabajo sobre la transformada de Laplace, debemos intentar descomponer

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

en fracciones parciales. Con este método se llega al resultado correcto, como probaremos después. Sin embargo, observamos que la mayoría de las entradas en la figura 3.3 contienen un factor  $z$  en el numerador de la transformada. Por tanto, resolvemos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

en fracciones parciales, como

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

así que

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

Entonces usando el resultado  $\mathcal{Z}^{-1}[z/(z-a)] = \{a^k\}$  junto con la propiedad de linealidad, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] &= \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right) = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) - \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\ &= \{2^k\} - \{1^k\} \quad (k \geq 0)\end{aligned}$$

así que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right] = \{2^k - 1\} \quad (k \geq 0) \quad (3.23)$$

Supongamos que en el ejemplo 3.8 no pensamos mucho y simplemente resolvimos  $Y(z)$ , en vez de  $Y(z)/z$ , en fracciones parciales. ¿Será el resultado el mismo? La respuesta por supuesto es ‘sí’, como probaremos ahora. Al desarrollar

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

en fracciones parciales da

$$Y(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

lo que puede escribirse como

$$Y(z) = \frac{1}{z} \frac{2z}{z-2} - \frac{1}{z} \frac{z}{z-1}$$

Como

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z}{z-2}\right] = 2\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = 2\{2^k\}$$

se sigue de la primera propiedad de traslación (3.15) que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{2z}{z-2}\right] = \begin{cases} \{2 \cdot 2^{k-1}\} & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \end{cases}$$

De manera similar,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{z}{z-1}\right] = \begin{cases} \{1^{k-1}\} = \{1\} & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \end{cases}$$

Combinando estos dos últimos resultados tenemos

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{2z}{z-2}\right] - \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{z}{z-1}\right]$$

$$= \begin{cases} \{2^k - 1\} & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \end{cases}$$

que, como se esperaba, coincide con la respuesta obtenida en el ejemplo 3.8.

Podemos ver que este último procedimiento, aunque permite llegar al mismo resultado, involucra un mayor esfuerzo en el uso del teorema de traslación. Cuando sea posible, evitaremos esto 'extrayendo' el factor  $z$  como en el ejemplo 3.8, pero por supuesto esto no siempre es posible y debemos recurrir a la propiedad de traslación, como ilustra el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3.9

Encuentre

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}\right]$$

**Solución** En este caso, en el numerador no hay ningún factor  $z$  disponible y entonces debemos desarrollar

$$Y(z) = \frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}$$

en fracciones parciales, con lo que se obtiene

$$Y(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{7}{4} \frac{1}{z-3} = \frac{1}{4} \frac{1}{z} \frac{z}{z+1} + \frac{7}{4} \frac{1}{z} \frac{z}{z-3}$$

Como

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] = \{(-1)^k\} \quad (k \geq 0)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-3}\right] = \{3^k\} \quad (k \geq 0)$$

se sigue a partir de la primera propiedad del corrimiento (3.15) que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{z}{z+1}\right] = \begin{cases} \{(-1)^{k-1}\} & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{z}{z-3}\right] = \begin{cases} 3^{k-1} & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \end{cases}$$

Entonces de la propiedad de linealidad

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{4} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{z}{z+1}\right] + \frac{7}{4} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z} \frac{z}{z-3}\right]$$

dando

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}\right] = \begin{cases} \{\frac{1}{4}(-1)^{k-1} + \frac{7}{4}3^{k-1}\} & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \end{cases}$$

Es frecuente el caso de que la función racional  $P(z)/Q(z)$  que se debe invertir tenga un término cuadrático en el denominador. Por desgracia, en este caso no hay nada parecido al primer teorema de traslación de la transformada de Laplace el cual, como vimos en la sección 2.2.9, resultó tan útil en circunstancias similares. Observando la figura 3.3, las únicas dos transformadas con términos cuadráticos en el denominador son aquellas asociadas con las sucesiones  $\{\cos k\omega T\}$  y  $\{\sin k\omega T\}$ . En la práctica estas son difíciles de aplicar en la forma inversa y es más apropiado un método de ‘principios primarios’. Ilustramos esto con dos ejemplos, demostrando que todo lo que se requiere es la habilidad de manipular los números complejos en la etapa de descomposición en fracciones parciales.

### EJEMPLO 3.10

Invertir la transformada z

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$$

donde  $a$  es una constante real.

**Solución** En vista del factor  $z$  en el numerador, desarrollando  $Y(z)/z$  en fracciones parciales, da

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z + ja)(z - ja)} = \frac{1}{j2a} \frac{1}{z - ja} - \frac{1}{j2a} \frac{1}{z + ja}$$

Esto es

$$Y(z) = \frac{1}{j2a} \left( \frac{z}{z-j\alpha} - \frac{z}{z+j\alpha} \right)$$

Usando el resultado  $\mathcal{Z}^{-1}[z/(z-a)] = \{a^k\}$ , tenemos

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-j\alpha}\right] = \{(j\alpha)^k\} = \{j^k \alpha^k\}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+j\alpha}\right] = \{(-j\alpha)^k\} = \{(-j)^k \alpha^k\}$$

A partir de la relación  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ , tenemos

$$j = e^{j\pi/2}, \quad -j = e^{-j\pi/2}$$

así que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-j\alpha}\right] = \{a^k (e^{j\pi/2})^k\} = \{a^k e^{jk\pi/2}\} = \{a^k (\cos \frac{1}{2}k\pi + j \sin \frac{1}{2}k\pi)\}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+j\alpha}\right] = \{a^k (-j\alpha)^k\} = \{a^k (\cos \frac{1}{2}k\pi - j \sin \frac{1}{2}k\pi)\}$$

Entonces la propiedad de linealidad da

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] &= \left\{ \frac{a^k}{j2a} (\cos \frac{1}{2}k\pi + j \sin \frac{1}{2}k\pi - \cos \frac{1}{2}k\pi - j \sin \frac{1}{2}k\pi) \right\} \\ &= \{a^{k-1} \sin \frac{1}{2}k\pi\} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3.11** Invertir la transformada  $z$

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$$

**Solución** El denominador de la transformada puede factorizarse como

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

En la forma exponencial tenemos  $\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm j\pi/3}$ , así que el denominador puede escribirse como

$$z^2 - z + 1 = (z - e^{j\pi/3})(z - e^{-j\pi/3})$$

Entonces tenemos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z - e^{j\pi/3})(z - e^{-j\pi/3})}$$

la cual puede resolverse en fracciones parciales como

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{e^{j\pi/3} - e^{-j\pi/3}} \frac{1}{z - e^{j\pi/3}} + \frac{1}{e^{-j\pi/3} - e^{j\pi/3}} \frac{1}{z - e^{-j\pi/3}}$$

Observando que  $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/j2$ , esto se reduce a

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{1}{j2 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi} \frac{z}{z - e^{j\pi/3}} - \frac{1}{j2 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi} \frac{z}{z - e^{-j\pi/3}} \\ &= \frac{1}{j\sqrt{3}} \frac{z}{z - e^{j\pi/3}} - \frac{1}{j\sqrt{3}} \frac{z}{z - e^{-j\pi/3}}\end{aligned}$$

Usando el resultado  $\mathcal{Z}^{-1}[z/(z - a)] = \{a^k\}$ , esto da

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{j\sqrt{3}} (e^{jk\pi/3} - e^{-jk\pi/3}) = \left\{ 2 \sqrt{\frac{1}{3}} \operatorname{sen} \frac{1}{3}k\pi \right\}$$

Concluimos esta sección con dos ejemplos más, ilustrando las técnicas de inversión aplicadas a tipos de transformadas que aparecen con frecuencia.

### EJEMPLO 3.12

Encuentre la sucesión cuya transformada z es

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^3}$$

**Solución**  $F(z)$  es distinta de cualquier transformación z vista en los ejemplos anteriores. Sin embargo, puede expandirse en series de potencias en  $z^{-1}$  como

$$F(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}$$

Usando (3.4), entonces es claro que

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \{f_k\} = \{1, 2, 0, 1, 0, 0, \dots\}$$

### EJEMPLO 3.13

Encuentre  $\mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$  donde

$$G(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

y  $a$  y  $T$  son constantes positivas.

**Solución** Desarrollando en fracciones parciales

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-aT}}$$

da

$$G(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-aT}}$$

Usando el resultado  $\mathcal{Z}^{-1}[z/(z-a)] = \{a^k\}$ , tenemos

$$\mathcal{Z}^{-1}[G(z)] = \{(1 - e^{-akT})\} \quad (k \geq 0)$$

En este ejemplo particular,  $G(z)$  es la transformada  $z$  de una sucesión obtenida por muestreo de una señal de tiempo continuo

$$f(t) = 1 - e^{-at}$$

en intervalos  $T$ .

### 3.4.2 Ejercicios

- 11 Invierta las siguientes transformadas  $z$ . En cada caso proporcione el término general de la sucesión.

(a)  $\frac{z}{z-1}$

(b)  $\frac{z}{z+1}$

(c)  $\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$

(d)  $\frac{z}{3z+1}$

(e)  $\frac{z}{z-j}$

(f)  $\frac{z}{z+j\sqrt{2}}$

(g)  $\frac{1}{z-1}$

(h)  $\frac{z+2}{z+1}$

- 12 Resolviendo primero  $Y(z)/z$  en fracciones parciales, encuentre  $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$  cuando  $Y(z)$  está dada por

(a)  $\frac{z}{(z-1)(z+2)}$

(b)  $\frac{z}{(2z+1)(z-3)}$

(c)  $\frac{z^2}{(2z+1)(z-1)}$

(d)  $\frac{2z}{2z^2+z-1}$

(e)  $\frac{z}{z^2+1}$  [Sugerencia:  $z^2+1 = (z+j)(z-j)$ ]

(f)  $\frac{z}{z^2-2\sqrt{3}z+4}$

(g)  $\frac{2z^2-7z}{(z-1)^2(z-3)}$

(h)  $\frac{z^2}{(z-1)^2(z^2-z+1)}$

- 13 Encuentre  $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$  cuando  $Y(z)$  está dada por

(a)  $\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}$

(b)  $1 + \frac{3}{z^2} - \frac{2}{z^9}$

(c)  $\frac{3z+z^2+5z^5}{z^5}$

(d)  $\frac{1+z}{z^3} + \frac{3z}{3z+1}$

(e)  $\frac{2z^3+6z^2+5z+1}{z^2(2z+1)}$

(f)  $\frac{2z^2-7z+7}{(z-1)^2(z-2)}$

(g)  $\frac{z-3}{z^2-3z+2}$

## 3.5

## Sistemas de tiempo discreto y ecuaciones en diferencias

En el capítulo 2 se examinaron las técnicas de la transformada de Laplace, primero como un método para resolver ecuaciones diferenciales, después como una manera de caracterizar un sistema de tiempo continuo. De hecho, mucho pudo deducirse acerca del comportamiento del sistema y sus propiedades examinando su representación en el dominio de la transformación sin buscar para nada respuestas específicas en el dominio del tiempo. En esta sección discutiremos la idea de un sistema lineal de tiempo discreto y su modelo, una **ecuación en diferencias**. Después veremos que la transformada  $z$  juega un papel análogo al de la transformada de Laplace para tales sistemas proveyendo una representación del sistema en el dominio de la transformación.

## 3.5.1

### Ecuaciones en diferencias

Primero ilustramos, por medio de un ejemplo, la motivación para estudiar ecuaciones en diferencias.

Supongamos que la sucesión de observaciones  $\{x_k\}$  está siendo grabada y recibimos la observación  $x_k$  en el paso (tiempo) o índice  $k$ . Podríamos intentar procesar (por ejemplo suavizar o filtrar) esta sucesión de observaciones  $\{x_k\}$  usando el sistema de retroalimentación de tiempo discreto ilustrado en la figura 3.4. En el tiempo  $k$  la observación  $x_k$  entra al sistema como una entrada  $y$ , después de mezclarse con la señal “de retroalimentación” en la unión de suma  $S$ , continúa hacia el bloque  $D$ . Este bloque es un bloque de retardo unitario y su función es mantener su señal de entrada hasta que el “reloj” avance un paso, al paso  $k + 1$ . En este momento la señal de entrada sale sin alteraciones convirtiéndose en la señal  $y_{k+1}$ , el miembro  $k + 1$  de la sucesión de salida  $\{y_k\}$ . Al mismo tiempo esta señal es regresada hacia atrás a través del bloque de escala de amplitud  $\alpha$  a la unión de suma  $S$ . Este proceso es instantáneo y en  $S$  la señal de retroalimentación es restada de la siguiente observación de entrada  $x_{k+1}$  para proveer la siguiente entrada al bloque de retardo  $D$ . El proceso se repite en cada paso del ‘reloj’.

Para analizar el sistema, sea  $\{r_k\}$  la sucesión de señales de entrada a  $D$ ; entonces, debido a la acción de retardo de  $D$ , tenemos

$$y_{k+1} = r_k$$

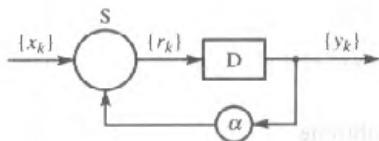


Figura 3.4 Sistema de procesamiento de señales de tiempo discreto.

También, debido a la acción de retroalimentación

$$r_k = x_k - \alpha y_k$$

donde  $\alpha$  es la ganancia de retroalimentación. Combinando estas dos expresiones se obtiene

$$y_{k+1} = x_k - \alpha y_k \quad \text{(3.24)}$$

La ecuación (3.24) es un ejemplo de una ecuación en diferencias de primer orden y relaciona miembros consecutivos de la sucesión  $\{y_k\}$  y la sucesión de entrada  $\{x_k\}$ .

Una solución de la ecuación en diferencias (3.24) es una fórmula para  $y_k$ , el término general de la sucesión de salida  $\{y_k\}$ , y ésta dependerá tanto de  $k$ , la sucesión de entrada  $\{x_k\}$  así como, en este caso, de la ganancia de retroalimentación.

### EJEMPLO 3.14

Encuentre una ecuación en diferencias para representar al sistema que se indica en la figura 3.5, que tiene sucesiones de entrada y salida  $\{x_k\}$  y  $\{y_k\}$  respectivamente, donde  $D$  es el bloque unitario de retardo y  $a$  y  $b$  son ganancias constantes de retroalimentación.

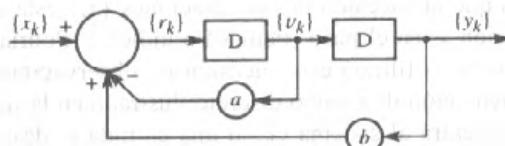


Figura 3.5 El sistema para el ejemplo 3.14.

**Solución** Introduciendo sucesiones intermedias de señales  $\{r_k\}$  y  $\{v_k\}$  como se muestra en la figura 3.5, en cada paso, las salidas de los bloques de retardo son

$$y_{k+1} = v_k \quad \text{(3.25)}$$

$$v_{k+1} = r_k \quad \text{(3.26)}$$

y en la unión de suma

$$r_k = x_k - av_k + by_k \quad \text{(3.27)}$$

De (3.25),

$$y_{k+2} = v_{k+1}$$

que al usar (3.26) da

$$y_{k+2} = r_k$$

Al sustituir  $r_k$  de (3.27) se obtiene

$$y_{k+2} = x_k - av_k + by_k$$

que usando (3.25) se convierte en

$$y_{k+2} = x_k - ay_{k+1} + by_k$$

Reorganizando esto da

$$y_{k+2} + ay_{k+1} - by_k = x_k \quad (3.28)$$

la ecuación en diferencias que representa el sistema.

La ecuación en diferencias (3.28) es un ejemplo de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de segundo orden, y existen fuertes similitudes entre ésta y una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de segundo orden. Es de segundo orden porque el término involucrado en el mayor corrimiento de la sucesión  $\{y_k\}$  es el término en  $y_{k+2}$ , lo que implica un corrimiento de dos pasos. Como se demostró en el ejemplo 3.14, el grado del corrimiento, o el orden de la ecuación, está estrechamente relacionado con el número de bloques de retardo en el diagrama de bloques.

### 3.5.2 La solución de ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias surgen de diferentes maneras, algunas veces del modelado directo de sistemas en tiempo discreto o como una aproximación de una ecuación diferencial que describe el comportamiento de un sistema modelado como un sistema de tiempo continuo. No discutiremos más esto aquí; más bien nos restringiremos a la técnica de solución pero en los ejercicios serán claros los ejemplos de aplicaciones. El método de la transformada  $z$  está basado en la segunda propiedad de traslación (sección 3.3.3), y emerge rápidamente como una técnica casi idéntica al método de la transformada de Laplace para ecuaciones diferenciales ordinarias introducidas en la sección 2.3.3. Introduciremos el método por medio de un ejemplo.

#### EJEMPLO 3.15

Si en el ejemplo 3.14,  $a = 1$ ,  $b = 2$  y la sucesión de entrada  $\{x_k\}$  es la sucesión escalón unitario  $\{1\}$ , resuelva la ecuación en diferencias resultante (3.28).

**Solución** Sustituyendo para  $a$ ,  $b$  y  $\{x_k\}$  en (3.28) llegamos a la ecuación en diferencias

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1 \quad (k \geq 0) \quad (3.29)$$

Aplicando la transformada  $z$  en (3.29) da

$$\mathcal{Z}\{y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k\} = \mathcal{Z}\{1, 1, 1, \dots\}$$

que, usando la propiedad de linealidad y el resultado  $\mathcal{Z}\{1\} = z/(z - 1)$ , puede escribirse como

$$\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} + \mathcal{Z}\{y_{k+1}\} - 2\mathcal{Z}\{y_k\} = \frac{z}{z - 1}$$

Usando (3.16) y (3.17) se obtiene

$$[z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1] + [z Y(z) - z y_0] - 2Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

que al reorganizar es

$$(z^2 + z - 2)Y(z) = \frac{z}{z-1} + z^2 y_0 + z(y_1 + y_0) \quad (3.30)$$

Para seguir adelante necesitamos más información; a saber, el primero y segundo términos  $y_0$  y  $y_1$  de la sucesión solución  $\{y_k\}$ . Sin esta información adicional, no podemos encontrar una solución única. Como vimos en la sección 2.3.3, esto es comparable con el uso del método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, donde se requieren los valores de la solución y su primera derivada en el tiempo  $t = 0$ .

Supongamos que sabemos (o son dados) que

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

Entonces (3.30) se convierte en

$$(z^2 + z - 2)Y(z) = z + \frac{z}{z-1}$$

o

$$(z+2)(z-1)Y(z) = z + \frac{z}{z-1}$$

y resolviendo para  $Y(z)$  da

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)} + \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2} \quad (3.31)$$

Para obtener la sucesión solución  $\{y_k\}$ , debemos tomar la transformada inversa de (3.31). Procediendo como en la sección 3.4, se descompone  $Y(z)/z$  en fracciones parciales como

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{z}{z+2}$$

y así

$$Y(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{z}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+2}$$

Usando los resultados  $\mathcal{Z}^{-1}[z/(z-a)] = \{a^k\}$  y  $\mathcal{Z}^{-1}[z/(z-1)^2] = \{k\}$  de la figura 3.3 obtenemos

$$\{y_k\} = \left\{ \frac{1}{3}k + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}(-2)^k \right\} \quad (k \geq 0)$$

como la sucesión solución para la ecuación en diferencias que satisface las condiciones  $y_0 = 0$  y  $y_1 = 1$ .

El método adoptado en el ejemplo 3.15 se llama el **método de la transformada z para resolver ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes**, y es análogo al método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Para concluir esta sección se dan dos ejemplos más para ayudar a consolidar la comprensión del método.

### EJEMPLO 3.16

Resuelva la ecuación en diferencias

$$8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 9 \quad (k \geq 0)$$

sabiendo que  $y_0 = 1$  y  $y_1 = \frac{3}{2}$ .

**Solución** Aplicando la transformada z

$$8\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} - 6\mathcal{Z}\{y_{k+1}\} + \mathcal{Z}\{y_k\} = 9\mathcal{Z}\{1\}$$

Usando (3.16) y (3.17) y el resultado  $\mathcal{Z}\{1\} = z/(z-1)$  da

$$8[z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1] - 6[zY(z) - zy_0] + Y(z) = \frac{9z}{z-1}$$

que reorganizando llega a

$$(8z^2 - 6z + 1)Y(z) = 8z^2y_0 + 8zy_1 - 6zy_0 + \frac{9z}{z-1}$$

Sabiendo que  $y_0 = 1$  y  $y_1 = \frac{3}{2}$ , así

$$(8z^2 - 6z + 1)Y(z) = 8z^2 + 6z + \frac{9z}{z-1}$$

o

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{8z+6}{(4z-1)(2z-1)} + \frac{9}{(4z-1)(2z-1)(z-1)} \\ &= \frac{z+\frac{3}{4}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} + \frac{\frac{9}{8}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})(z-1)} \end{aligned}$$

Resolviendo en fracciones parciales da

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{5}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{z-\frac{1}{4}} + \frac{6}{z-\frac{1}{4}} - \frac{9}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{z-1} \\ &= \frac{2}{z-\frac{1}{4}} - \frac{4}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{z-1} \end{aligned}$$

y así

$$Y(z) = \frac{2z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3z}{z-1}$$

Usando el resultado  $\mathcal{Z}^{-1}\{z/(z-a)\} = \{a^k\}$  de la figura 3.3, aplicamos la transformada inversa para obtener

$$\{y_k\} = \{2(\frac{1}{4})^k - 4(\frac{1}{2})^k + 3\} \quad (k \geq 0)$$

como la solución requerida.

### EJEMPLO 3.17

Resuelva la ecuación en diferencias

$$y_{k+2} + 2y_k = 0 \quad (k \geq 0)$$

sabiendo que  $y_0 = 1$  y  $y_1 = \sqrt{2}$ .

**Solución** Aplicando la transformada z

$$[z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1] + 2Y(z) = 0$$

y sustituyendo los valores dados de  $y_0$  y  $y_1$  se obtiene

$$z^2 Y(z) - z^2 - \sqrt{2}z + 2Y(z) = 0$$

o

$$(z^2 + 2)Y(z) = z^2 + \sqrt{2}z$$

Resolviendo  $Y(z)/z$  en fracciones parciales da

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z + \sqrt{2}}{z^2 + 2} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z + j\sqrt{2})(z - j\sqrt{2})}$$

Siguiendo el modelo adoptado en el ejemplo 3.13, escribimos

$$j\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{j\pi/2}, \quad -j\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{-j\pi/2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z - \sqrt{2}e^{j\pi/2})(z - \sqrt{2}e^{-j\pi/2})} = \frac{(1+j)/j2}{z - \sqrt{2}e^{j\pi/2}} - \frac{(1-j)/j2}{z - \sqrt{2}e^{-j\pi/2}}$$

Así

$$Y(z) = \frac{1}{j2} \left[ (1+j) \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{j\pi/2}} - (1-j) \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{-j\pi/2}} \right]$$

que aplicando la transformada inversa da

$$\begin{aligned} \{y_k\} &= \left\{ \frac{2^{k/2}}{j2} [(1+j)e^{jk\pi/2} - (1-j)e^{-jk\pi/2}] \right\} \\ &= \{2^{k/2} (\cos \frac{1}{2}k\pi + \sin \frac{1}{2}k\pi)\} \quad (k \geq 0) \end{aligned}$$

como la solución requerida.

La solución encontrada en el ejemplo 3.17 es una sucesión con valores reales, y esto no es una sorpresa ya que la ecuación en diferencias dada y los valores  $y_0$  y  $y_1$  "al empezar" involucran sólo números reales. Esta observación proporciona una verificación útil en el álgebra cuando hay fracciones parciales complejas involucradas.

### 3.5.3 Ejercicios

- 14 Encuentre las ecuaciones en diferencias que representan a los sistemas de tiempo discreto que se muestran en la figura 3.6

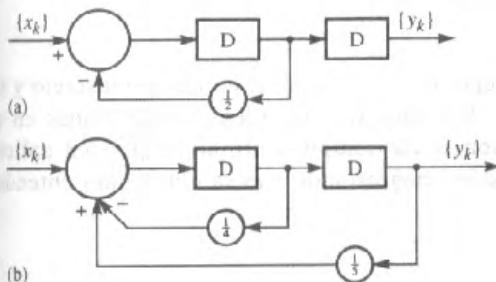


Figura 3.6 El sistema para el ejercicio 14.

- 15 Usando los métodos de la transformada  $z$ , resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias:

- $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0$  sujeta a  $y_0 = 0, y_1 = 1$
- $y_{n+2} - 8y_{n+1} - 9y_n = 0$  sujeta a  $y_0 = 2, y_1 = 1$
- $y_{k+2} + 4y_k = 0$  sujeta a  $y_0 = 0, y_1 = 1$
- $2y_{k+2} - 5y_{k+1} - 3y_k = 0$  sujeta a  $y_0 = 3, y_1 = 2$

- 16 Usando los métodos de la transformada  $z$ , resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias:

- $6y_{k+2} + 5y_{k+1} - y_k = 5$  sujeta a  $y_0 = y_1 = 0$
- $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 5$  sujeta a  $y_0 = 0, y_1 = 1$
- $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = (\frac{1}{2})^n$  sujeta a  $y_0 = y_1 = 0$
- $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n = 1$  sujeta a  $y_0 = 1, y_1 = 0$
- $2y_{n+2} - 3y_{n+1} - 2y_n = 6n + 1$  sujeta a  $y_0 = 1, y_1 = 2$
- $y_{n+2} - 4y_n = 3n - 5$  sujeta a  $y_0 = y_1 = 0$

- 17 El capital inicial y el gasto de una persona durante un año dado  $k$  son denotados por  $C_k$  y  $E_k$  respectivamente, y satisfacen las ecuaciones en diferencias

$$C_{k+1} = 1.5C_k - E_k$$

$$E_{k+1} = 0.21C_k + 0.5E_k$$

- (a) Demuestre que eventualmente el capital de la persona crece al 20% por año.

- (b) Si el capital al principio del año 1 es £6000 y el gasto durante el año 1 es £3720, encuentre el año en el cual el gasto es mínimo y el capital al principio de ese año.

- 18 La dinámica de un sistema de tiempo discreto está determinada por la ecuación en diferencias

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = u_k$$

Determine la respuesta del sistema a la entrada de escalón unitario

$$u_k = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ 1 & (k \geq 0) \end{cases}$$

dado que  $y_0 = y_1 = 1$ .

- 19 Como un primer intento por modelar la economía nacional, se supone que los ingresos nacionales  $I_k$  en el año  $k$  están dados por

$$I_k = C_k + P_k + G_k$$

donde  $C_k$  es el gasto del consumidor,  $P_k$  es la inversión privada y  $G_k$  es el gasto del gobierno. También se supone que el gasto del consumidor es proporcional al ingreso nacional en el año anterior, así que

$$C_k = aI_{k-1} \quad (0 < a \leq 1)$$

También se supone que la inversión privada es proporcional al cambio del gasto del consumidor respecto al año anterior, así que

$$P_k = b(C_k - C_{k-1}) \quad (0 < b \leq 1)$$

Demuestre que bajo estas suposiciones el ingreso nacional  $I_k$  está determinado por la ecuación en diferencias

$$I_{k+2} - a(1+b)I_{k+1} + abI_k = G_{k+2}$$

Si  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ , el gasto del gobierno es constante (esto es,  $G_k = G$  para todo  $k$ ) e  $I_0 = 2G$ ,  $I_1 = 3G$ , demuestre que

$$I_k = 2[1 + (\frac{1}{2})^{k/2} \operatorname{sen} \frac{1}{4} k\pi]G$$

Discuta lo que pasa conforme  $k \rightarrow \infty$ .

- 20 La ecuación en diferencias para la corriente en cierta red de escalera de  $N$  mallas es

$$R_1 i_{n+1} + R_2(i_{n+1} - i_n) + R_2(i_{n+1} - i_{n+2}) = 0 \quad (0 \leq n \leq N-2)$$

donde  $i_n$  es la corriente en el  $(n+1)$ -ésima malla y  $R_1$  y  $R_2$  son resistencias constantes.

- (a) Demuestre que esto puede escribirse como

$$i_{n+2} - 2 \cosh \alpha i_{n+1} + i_n = 0 \quad (0 \leq n \leq N-2)$$

donde

$$\alpha = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right)$$

- (b) Resolviendo la ecuación en (a), demuestre que

$$i_n = \frac{i_1 \operatorname{senh} n\alpha - i_0 \operatorname{senh}(n-1)\alpha}{\operatorname{senh} \alpha} \quad (2 \leq n \leq N)$$

## 3.6

# Sistemas lineales discretos: caracterización

En esta sección examinamos el concepto de sistema lineal en tiempo discreto y su modelo en ecuación en diferencias. Veremos que las ideas desarrolladas en el capítulo 2 para el modelado de sistemas en tiempo continuo se pueden aplicar a sistemas de tiempo discreto, y que la transformada  $z$  es la clave para entender tales sistemas.

### 3.6.1

#### Funciones z de transferencia

En la sección 2.6, cuando consideramos sistemas lineales en tiempo continuo modelados por ecuaciones diferenciales, introducimos el concepto de función de transferencia del sistema (Laplace). Esta es una herramienta poderosa en la descripción de tales sistemas, ya que contiene toda la información sobre la estabilidad del sistema y también provee un método para calcular la respuesta a una señal de entrada arbitraria usando la integral de convolución. En el mismo sentido, podemos identificar la función  $z$  de transferencia para un sistema lineal en tiempo discreto invariante en el tiempo modelado por una ecuación en diferencias, y podemos llegar a resultados análogos a los del capítulo 2.

Consideremos la ecuación en diferencias general lineal con coeficientes constantes, modelo de un sistema lineal invariante en el tiempo, con sucesión de entrada  $\{u_k\}$  y sucesión de salida  $\{y_k\}$ . Ambas  $\{u_k\}$  y  $\{y_k\}$  son sucesiones causales siempre. Tal modelo de ecuación en diferencias toma la forma

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + a_{n-2} y_{k+n-2} + \dots + a_0 y_k \\ = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + b_{m-2} u_{k+m-2} + \dots + b_0 u_k \quad (3.32)$$

donde  $k \geq 0$  y  $n, m$  (con  $n \geq m$ ) son enteros positivos y las  $a_i$  y  $b_j$  son constantes. La ecuación en diferencias (3.32) difiere de los ejemplos considerados en la sección 3.5 en la posibilidad de que también están permitidos términos con retardo en la sucesión de entrada  $\{u_k\}$ . El orden de la ecuación en diferencias es  $n$  si  $a_n \neq 0$ , y para que el sistema sea físicamente realizable  $n \geq m$ .

Suponiendo que el sistema está inicialmente en estado de reposo, aplicamos la transformada  $z$  en todo (3.32) para obtener

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) U(z)$$

donde  $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$  y  $U(z) = \mathcal{Z}\{u_k\}$ . El **sistema discreto** o la **función  $z$  de transferencia**  $G(z)$  está definida como

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3.33)$$

y normalmente se reorganiza (dividiendo el numerador y el denominador entre  $a_n$ ) de manera que el coeficiente de  $z^n$  en el denominador sea 1. Al deducir  $G(z)$  de esta forma, hemos supuesto que el sistema estaba inicialmente en estado de reposo. Esta suposición ciertamente es válida para el sistema (3.32) si

$$y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$$

$$u_0 = u_1 = \dots = u_{m-1} = 0$$

Sin embargo, este no es el fin de la historia, y usaremos el término “reposo” para decir que ningún valor distinto de cero está almacenado en los elementos de retardo antes del tiempo inicial.

Escribiendo

$$P(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0$$

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

la función de transferencia discreta puede expresarse como

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Como en el modelo continuo de la sección 2.6.1, la ecuación  $Q(z) = 0$  es llamada la **ecuación característica** del sistema discreto, su orden  $n$  determina el **orden del sistema** y sus raíces se llaman los **polos** de la función de transferencia discreta. Asimismo, las raíces de  $P(z) = 0$  se conocen como los **ceros** de la función de transferencia discreta.

### EJEMPLO 3.18

Dibuje un diagrama de bloque para representar el sistema modelado por la ecuación en diferencias

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = u_k \quad (3.34)$$

y encuentre la función  $z$  de transferencia correspondiente.

### Solución

La ecuación en diferencias puede pensarse como la relación entre los miembros adyacentes de la sucesión solución  $\{y_k\}$ . Así en cada paso de tiempo  $k$  tenemos, a partir de (3.34),

$$y_{k+2} = -3y_{k+1} + y_k + u_k \quad (3.35)$$

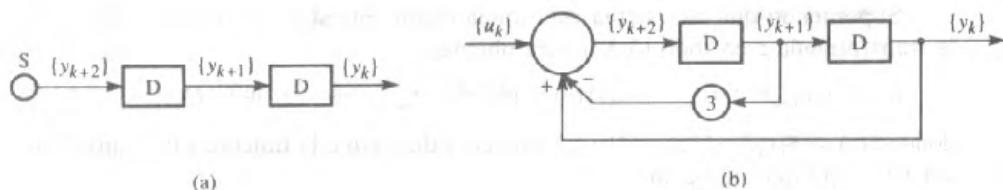


Figura 3.7 (a) Subestructura del diagrama de bloques básico de segundo orden; (b) representación en diagrama de bloques de (3.34).

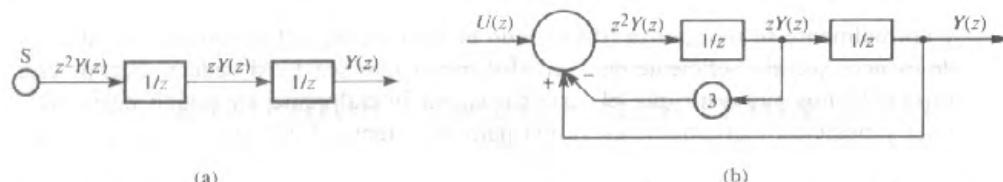


Figura 3.8 (a) Subestructura del diagrama de bloques básico de segundo orden en el dominio de la transformada  $z$ ; (b) representación del diagrama de bloques en el dominio de la transformada  $z$  de (3.34).

la cual provee una fórmula para  $y_{k+2}$  que involucra a  $y_k$ ,  $y_{k+1}$  y la entrada  $u_k$ . La estructura mostrada en la figura 3.7(a) ilustra la generación de la sucesión  $\{y_k\}$  a partir de  $\{y_{k-2}\}$  usando dos bloques de retardo.

Ahora usamos (3.35) como una receta para generar la sucesión  $\{y_{k+2}\}$  y acomodar la combinación correcta de señales que se forman en cada paso  $k$  en la unión de sumas de entrada S de la figura 3.7(a). Esto lleva a la estructura mostrada en la figura 3.7(b) que es el diagrama de bloque requerido.

Por supuesto, podemos elaborar un diagrama de bloque en el dominio de la transformada  $z$  usando un proceso semejante. Aplicando la transformada  $z$  en todo (3.34), bajo la suposición de un estado inicial de reposo, obtenemos

$$z^2Y(z) + 3zY(z) - Y(z) = U(z) \quad (3.36)$$

$$z^2Y(z) = -3zY(z) + Y(z) + U(z) \quad (3.37)$$

En la figura 3.8(a) se muestra que la representación (3.37) es la versión en el dominio de la transformada de (3.35), y la estructura básica en el dominio de la transformada  $z$  correspondiente a la estructura en el dominio de tiempo de la figura 3.7(a).

Los bloques de retardo unitario, que están identificados en la figura 3.7(a) con D, se convierten en elementos “ $1/z$ ” en el diagrama en el dominio de la transformada  $z$ , de acuerdo con la primera propiedad de traslación (3.15) donde un número  $k_0$  de pasos de retardo corresponde a la multiplicación por  $z^{-k_0}$ .

Ahora es cosa sencilla construir la “señal” transformada  $z^2Y(z)$  de (3.37) y acomodarla para que esté disponible en la entrada de la unión de suma S en la figura 3.8(a). En la figura 3.8(b) se muestra el diagrama de bloques resultante.

La función  $z$  de transferencia se obtiene enseguida de (3.36) como

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 3z - 1} \quad (3.38)$$

**EJEMPLO 3.19**

Un sistema está especificado por su función de transferencia  $z$

$$G(z) = \frac{z - 1}{z^2 + 3z + 2}$$

¿Cuál es el orden  $n$  del sistema? ¿Puede ser implementado usando sólo los  $n$  elementos de retardo? Ilustrar esto.

**Solución** Si  $\{u_k\}$  y  $\{y_k\}$  denotan respectivamente las sucesiones de entrada y de salida del sistema entonces

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 1}{z^2 + 3z + 2}$$

así que

$$(z^2 + 3z + 2)Y(z) = (z - 1)U(z)$$

Aplicando la transformada inversa, obtenemos el modelo de la ecuación en diferencias correspondiente suponiendo que el sistema está inicialmente en estado de reposo

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = u_{k+1} - u_k \quad (3.39)$$

La ecuación en diferencias (3.39) tiene el lado derecho más complicado que la ecuación en diferencias (3.34) considerada en el ejemplo 3.18. Esto resulta de la existencia de términos  $z$  en el numerador de la función de transferencia. Por definición el orden de la ecuación en diferencias (3.39) es 2. La realización del sistema con dos bloques de retardo no es obvia, sin embargo, puede conseguirse, como lo ilustraremos a continuación.

Introducimos una sucesión de señales  $\{r_k\}$  nueva tal que

$$(z^2 + 3z + 2)R(z) = U(z) \quad (3.40)$$

donde  $R(z) = \mathcal{Z}\{r_k\}$ . En otras palabras,  $\{r_k\}$  es la salida del sistema cuya función de transferencia es  $1/(z^2 + 3z + 2)$ .

Multiplicando ambos lados de (3.40) por  $z$  obtenemos

$$z(z^2 + 3z + 2)R(z) = zU(z)$$

o

$$(z^2 + 3z + 2)zR(z) = zU(z) \quad (3.41)$$

Restando (3.40) de (3.41) tenemos

$$(z^2 + 3z + 2)zR(z) - (z^2 + 3z + 2)R(z) = zU(z) - U(z)$$

dando

$$(z^2 + 3z + 2)[zR(z) - R(z)] = (z - 1)U(z)$$

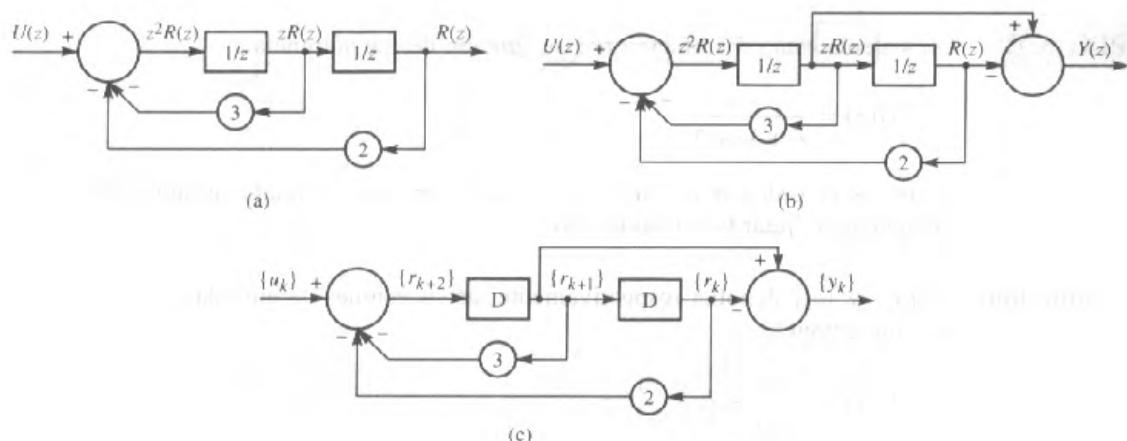


Figura 3.9 Diagramas de bloque de la transformada  $z$  para (a) el sistema (3.40), (b) el sistema (3.39) y (c) la realización en el dominio de tiempo del sistema en el ejemplo 3.19.

Finalmente, eligiendo

$$Y(z) = zR(z) - R(z) \quad (3.42)$$

$$(z^2 + 3z + 2)Y(z) = (z - 1)U(z)$$

que es la realización de la función de transferencia dada.

Para construir una realización del sistema mediante un diagrama de bloques, primero construimos una representación del diagrama de bloque de (3.40) como en la figura 3.9(a). Ahora ‘conectamos’ las señales apropiadas para generar  $Y(z)$  conforme a (3.42) y construir una representación del sistema dado mediante un diagrama de bloques. En la figura 3.9(b) se muestra el diagrama de bloques resultante.

Para implementar el sistema, debemos exhibir una estructura realizable físicamente en el dominio de tiempo, esto es, una que contenga sólo elementos D. Claramente, como la figura 3.9(b) contiene sólo bloques ‘ $1/z$ ’, podemos elaborar inmediatamente una estructura realizable en el dominio de tiempo como se muestra en la figura 3.9(c) donde, como antes, D es un bloque de retardo unitario.

### EJEMPLO 3.20

Un sistema está especificado por su función de transferencia

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02}$$

Dibuje un diagrama de bloque para ilustrar la realización del sistema en el dominio de tiempo. Encuentre una segunda estructura que también implemente el sistema.

**Solución** Sabemos que si  $\mathcal{Z}\{u_k\} = U(z)$  y  $\mathcal{Z}\{y_k\} = Y(z)$  son las transformadas  $z$  de las sucesiones de entrada y de salida respectivamente entonces, por definición,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} \quad (3.43)$$

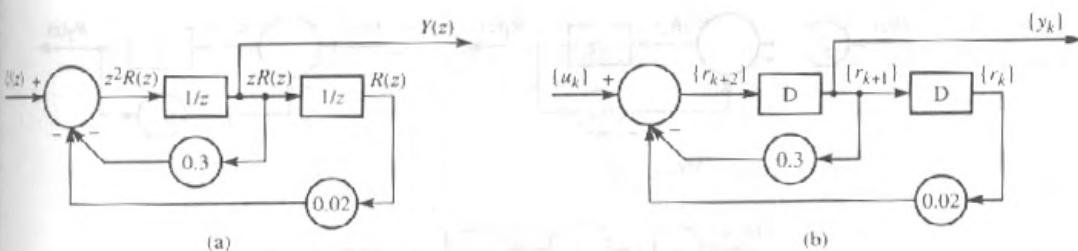


Figura 3.10 (a) El diagrama de bloque de la transformada  $z$  para el sistema del ejemplo 3.20; y (b) la implementación en el dominio de tiempo de (a).

que puede reescribirse como

$$(z^2 + 0.3z + 0.02)Y(z) = zU(z)$$

Observamos la presencia del factor  $z$  en el lado derecho, seguimos el procedimiento del ejemplo 3.19 y consideramos el sistema

$$(z^2 + 0.3z + 0.02)R(z) = U(z) \quad (3.44)$$

Multiplicando ambos lados por  $z$  tenemos

$$(z^2 + 0.3z + 0.02)zR(z) = zU(z)$$

y así, si la salida  $Y(z) = zR(z)$  es extraída del diagrama de bloque correspondiente a (3.44), tenemos la representación del diagrama de bloque del sistema dado (3.43). Esto está ilustrado en la figura 3.10(a), con la implementación correspondiente en el dominio de tiempo mostrada en la figura 3.10(b).

Para descubrir una segunda forma de implementación en el dominio de tiempo, observamos que

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} = \frac{2}{z + 0.2} - \frac{1}{z + 0.1}$$

Por tanto, podemos escribir

$$Y(z) = G(z)U(z) = \left( \frac{2}{z + 0.2} - \frac{1}{z + 0.1} \right)U(z)$$

así que

$$Y(z) = R_1(z) - R_2(z)$$

donde

$$R_1(z) = \frac{2}{z + 0.2}U(z) \quad (3.45a)$$

$$R_2(z) = \frac{1}{z + 0.1}U(z) \quad (3.45b)$$

A partir de (3.45a) tenemos

$$(z + 0.2)R_1(z) = 2U(z)$$

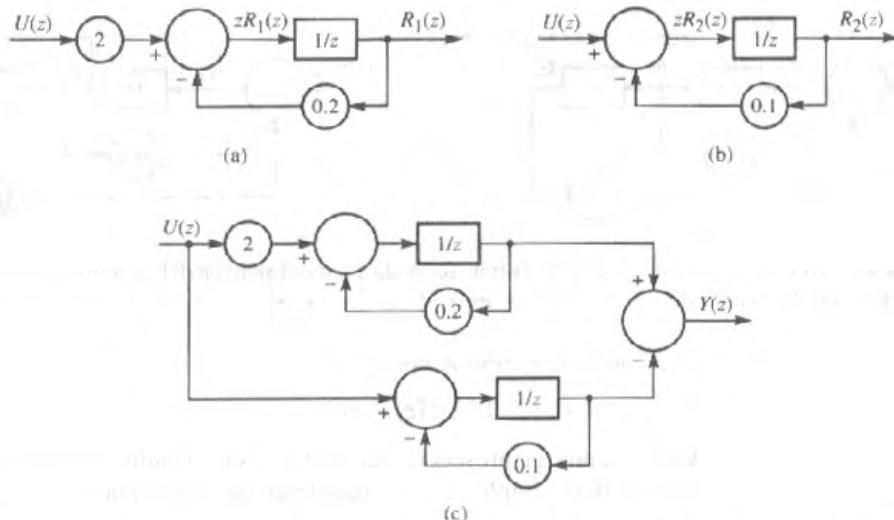


Figura 3.11 Diagramas de bloque para (a) el subsistema (3.45a), (b) el subsistema (3.45b) y (c) un diagrama de bloque alternativo para la transformada z para el sistema del ejemplo 3.20.

que puede ser representada por el diagrama de bloque mostrado en la figura 3.11(a). Asimismo (3.45b) puede ser representada por el diagrama de bloque mostrado en la figura 3.11(b).

Recordando que  $Y(z) = R_1(z) - R_2(z)$ , es claro que el sistema dado puede ser representado y después implementado por el acoplamiento obvio de los dos subsistemas representados por (3.45a, b). En la figura 3.11(c) se muestra el diagrama de bloque resultante de la transformada z. La versión en el dominio de tiempo se obtiene reemplazando los bloques “ $1/z$ ” por D y las transformadas  $U(z)$  y  $Y(z)$  por sus sucesiones correspondientes  $\{u_k\}$  y  $\{y_k\}$  respectivamente.

### 3.6.2 La respuesta al impulso

En el ejemplo 3.20 vimos que fueron posibles dos construcciones bastante diferentes para la misma función de transferencia  $G(z)$ , y otras son posibles. Cualquier construcción que se elija de una función de transferencia, sin embargo, cuando se le aplica la misma sucesión de entrada  $\{u_k\}$ , producirá la misma sucesión de salida  $\{y_k\}$ . Así, identificamos la función de transferencia de un sistema como un concepto clave, en lugar de cualquier implementación particular. Esta idea es reforzada cuando consideramos la sucesión de respuesta al impulso para un sistema lineal en tiempo discreto invariante en el tiempo, y su papel en sumas de convolución.

Considere la sucesión

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\}$$

esto es, la sucesión consiste de un “pulso” simple en  $k = 0$ , seguido de una lista de ceros. Como vimos en la sección 3.2.1, la transformada  $z$  de esta sucesión es fácil de encontrar a partir de la definición (3.1) como

$$\mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1 \quad (3.46)$$

La sucesión  $\{\delta_k\}$  es llamada la **sucesión impulso**, por analogía con la contraparte en el tiempo continuo  $\delta(t)$ , la función de impulso. La analogía es quizás más clara considerando la versión transformada (3.46). En análisis de tiempo continuo, usando los métodos de la transformada de Laplace, observamos que  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ , y (3.46) muestra que la “entidad” con transformada  $z$  igual a la unidad es la sucesión  $\{\delta_k\}$ . De hecho, es la propiedad  $\mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1$  la que hace que la sucesión de impulso sea tan importante.

Consideremos un sistema con función de transferencia  $G(z)$ , tal que la transformada  $z$ ,  $Y(z)$ , de la sucesión de salida  $\{y_k\}$  correspondiente a una sucesión de entrada  $\{u_k\}$  con transformada  $z$ ,  $U(z)$ , es

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (3.47)$$

Si la sucesión de entrada  $\{u_k\}$  es la sucesión de impulso  $\{\delta_k\}$  y si el sistema está inicialmente en reposo, entonces la sucesión de salida  $\{y_{\delta_k}\}$  es llamada la respuesta al impulso del sistema. Aquí

$$\mathcal{Z}\{y_{\delta_k}\} = Y_{\delta}(z) = G(z) \quad (3.48)$$

Esto es, la función de transferencia  $z$  del sistema es la transformada  $z$  de la respuesta al impulso. De manera alternativa, podemos decir que la respuesta al impulso de un sistema es la inversa de la transformada  $z$  de la función de transferencia del sistema. Esto se parece a la definición de la respuesta al impulso para sistemas continuos dada en la sección 2.6.3

Sustituyendo (3.48) en (3.47) tenemos

$$Y(z) = Y_{\delta}(z)U(z) \quad (3.49)$$

Así la transformada  $z$  de la salida del sistema en respuesta a cualquier sucesión de entrada  $\{u_k\}$  es el producto de la transformada de la sucesión de entrada con la transformada de la respuesta al impulso del sistema. El resultado (3.49) muestra la relación fundamental entre los conceptos respuesta al impulso y función de transferencia, y explica porqué la respuesta al impulso (o la función de transferencia) es pensada como una caracterización del sistema. En términos simples, si cualquiera de estas es conocida entonces tenemos toda la información acerca del sistema para cualquier análisis que se deseé hacer.

### EJEMPLO 3.21

Encuentre la respuesta al impulso del sistema con función de transferencia  $z$ ,

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$$

**Solución** Usando (3.48),

$$Y_{\delta}(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+2)(z+1)}$$

Al desarrollar  $Y_\delta(z)/z$  en fracciones parciales da

$$\frac{Y_\delta(z)}{z} = \frac{1}{(z+2)(z+1)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

que al invertir da la sucesión de respuesta al impulso

$$\{Y_{\delta_k}\} = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}\right] = \{(-1)^k - (2^k)\} \quad (k \geq 0)$$

### EJEMPLO 3.22

Un sistema tiene una sucesión de respuesta al impulso

$$\{y_{\delta_k}\} = \{a^k - 0.5^k\}$$

donde  $a > 0$  es una constante real. ¿Cuál es la naturaleza de esta respuesta cuando (a)  $a = 0.4$ , (b)  $a = 1.2$ ? Encuentre la respuesta escalonada del sistema en ambos casos.

**Solución** Cuando  $a = 0.4$

$$\{y_{\delta_k}\} = \{0.4^k - 0.5^k\}$$

y, como ambas  $0.4^k \rightarrow 0$  conforme  $k \rightarrow \infty$  y  $0.5^k \rightarrow 0$  conforme  $k \rightarrow \infty$ , vemos que los términos de la sucesión de la respuesta al impulso tienden a cero conforme  $k \rightarrow \infty$ .

En cambio, cuando  $a = 1.2$ , como  $(1.2)^k \rightarrow \infty$  conforme  $k \rightarrow \infty$ , vemos que en este caso la sucesión de respuesta al impulso no está acotada, lo que implica que el sistema "explota".

Para calcular la respuesta escalonada, primero determinaremos la función de transferencia  $G(z)$  del sistema, usando (3.48), como

$$G(z) = Y_\delta(z) = \mathcal{Z}\{a^k - 0.5^k\}$$

dando

$$G(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5}$$

La respuesta escalonada del sistema es la respuesta del sistema de la sucesión escalón unitario  $\{h_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$  que, de la figura 3.3, tiene transformada z

$$\mathcal{Z}\{h_k\} = \frac{z}{z-1}$$

Ahora, de (3.46), la respuesta escalonada está determinada por

$$Y(z) = G(z)\mathcal{Z}\{h_k\} = \left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5}\right) \frac{z}{z-1}$$

así que

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-1)} - \frac{z}{(z-0.5)(z-1)}$$

$$= \frac{a}{a-1} \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-0.5} + \left(-2 + \frac{1}{1-a}\right) \frac{1}{z-1}$$

dando

$$Y(z) = \frac{a}{a-1} \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5} + \left( -2 + \frac{1}{1-a} \right) \frac{z}{z-1}$$

que al calcular la transformada inversa da la respuesta escalonada como

$$\{y_k\} = \left\{ \frac{a}{a-1} a^k - (0.5)^k + \left( -2 + \frac{1}{1-a} \right) \right\} \quad (3.50)$$

Considerando la sucesión de salida (3.50) vemos que cuando  $a = 0.4$ , como  $(0.4)^k \rightarrow 0$  conforme  $k \rightarrow \infty$  (y  $(0.5)^k \rightarrow 0$  conforme  $k \rightarrow \infty$ ), los términos de la sucesión de salida tienden al valor constante

$$-2 + \frac{1}{1-0.4} = 0.3333$$

En el caso  $a = 1.2$ , como  $(1.2)^k \rightarrow \infty$  conforme  $k \rightarrow \infty$ , la sucesión de salida no está acotada y nuevamente el sistema "explota".

### 3.6.3 Estabilidad

El ejemplo 3.22 ilustró el concepto de estabilidad del sistema para sistemas discretos. Cuando  $a = 0.4$ , la respuesta al impulso decae a cero con  $k$  creciente, y observamos que la respuesta escalonada permanece acotada (de hecho, los términos de la sucesión se aproximan a un valor límite constante). Sin embargo, cuando  $a = 1.2$ , la respuesta al impulso se convierte en no acotada y observamos que la respuesta escalonada también crece sin límite. De hecho, como vimos para sistemas continuos en la sección 2.6.3, un sistema lineal en tiempo discreto con coeficientes constantes es estable siempre que su respuesta al impulso tienda a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ . Como para el caso continuo, podemos relacionar esta definición con los polos de la función de transferencia del sistema

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Como vimos en la sección 3.6.1, los polos del sistema están determinados por las  $n$  raíces de su ecuación característica

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (3.51)$$

Por ejemplo, en el ejemplo 3.19 consideramos un sistema con función de transferencia

$$G(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}$$

cuyos polos están determinados por  $z^2 + 3z + 2 = 0$ , esto es, polos en  $z = -1$  y  $z = -2$ . Como la respuesta al impulso es la transformada inversa de  $G(z)$  esperamos

que este sistema “explote” o, más bien, sea inestable porque su sucesión de respuesta al impulso puede esperarse que contenga términos de la forma  $(-1)^k$  y  $(-2)^k$ , ninguno de los cuales tiende a cero conforme  $k \rightarrow \infty$ . (Observamos que el término en  $(-1)^k$  ni explota ni tiende a cero, simplemente alterna entre +1 y -1; sin embargo,  $(-2)^k$  es no acotada conforme  $k \rightarrow \infty$ .) En cambio, en el ejemplo 3.20 encontramos un sistema con función de transferencia

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02}$$

teniendo polos determinados por

$$Q(z) = z^2 + 0.3z + 0.02 = (z + 0.2)(z + 0.1) = 0$$

que son polos en  $z = -0.2$  and  $z = -0.1$ . Es claro que este sistema es estable, ya que su respuesta al impulso contiene términos en  $(-0.2)^k$  y  $(-0.1)^k$ , ambos de los cuales tienden a cero conforme  $k \rightarrow \infty$ .

Estos dos ejemplos ilustrativos dan lugar a polinomios característicos  $Q(z)$  que son de forma cuadrática y tienen coeficientes reales. En forma más general,  $Q(z) = 0$  da lugar a la ecuación polinomial de orden  $n$  con coeficientes reales. A partir de la teoría de ecuaciones polinomiales sabemos que  $Q(z) = 0$  tiene  $n$  raíces  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) que pueden ser reales o complejas (las raíces complejas se presentan en pares conjugados).

De aquí que la ecuación característica puede escribirse en la forma

$$Q(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = 0 \quad (3.52)$$

El sistema de polos  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) determinados por (3.52) puede expresarse en la forma polar

$$\alpha_i = r_i e^{j\theta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

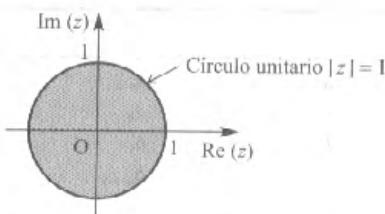
donde  $\theta_i = 0$  o  $\pi$  si  $\alpha_i$  es real. De la interpretación de la respuesta al impulso como la transformada inversa de la función de transferencia  $G(z) = P(z)/Q(z)$ , se sigue que la sucesión de respuesta al impulso del sistema contendrá términos en

$$r_1^k e^{jk\theta_1}, r_2^k e^{jk\theta_2}, \dots, r_n^k e^{jk\theta_n}$$

Ya que, para la estabilidad, los términos de la sucesión de respuesta al impulso deben tender a cero conforme  $k \rightarrow \infty$ , se sigue que un sistema que tiene ecuación característica  $Q(z) = 0$  será estable siempre que

$$r_i < 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Por tanto, un sistema lineal en tiempo discreto de coeficientes constantes con función de transferencia  $G(z)$  es estable si y sólo si todos los polos de  $G(z)$  están dentro del círculo unitario  $|z| < 1$  en el plano complejo  $z$ , como se ilustra en la figura 3.12. Si uno o más polos están fuera del círculo unitario entonces el sistema es inestable. Si uno o más polos distintos están sobre el círculo unitario  $|z| = 1$ , con todos los otros polos dentro, entonces el sistema se dice que es **marginalmente estable**.

Figura 3.12 Región de estabilidad en el plano  $z$ .**EJEMPLO 3.23**

¿Cuáles de los siguientes sistemas, especificados por su función de transferencia  $G(z)$ , son estables?

$$(a) \quad G(z) = \frac{1}{z + 0.25} \quad (b) \quad G(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5} \quad (c) \quad G(z) = \frac{z^2}{z^3 - 3z^2 + 2.5z - 1}$$

- Solución** (a) El polo simple está en  $z = -0.25$ , así  $r_1 = 0.25 < 1$ , y el sistema es estable.  
 (b) El sistema de polos está determinado por

$$z^2 - z + 0.5 = [z - 0.5(1 + j)][z - 0.5(1 - j)] = 0$$

cuyos polos son el par conjugado  $z_1 = 0.5(1 + j)$ ,  $z_2 = 0.5(1 - j)$ . Las magnitudes  $r_1 = r_2 = 0.707 < 1$ , y nuevamente el sistema es estable.

- (c) El sistema de polos está determinado por

$$z^3 - 3z^2 + 2.5z - 1 = (z - 2)[z - 0.5(1 + j)][z - 0.5(1 - j)]$$

cuyos polos son  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 0.5(1 + j)$ ,  $z_3 = 0.5(1 - j)$ , y sus magnitudes son  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = r_3 = 0.707$ . Como  $r_1 > 1$ , se sigue que el sistema es inestable.

De acuerdo con nuestra definición, se sigue que para probar estabilidad debemos probar que todas las raíces de la ecuación característica

$$Q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (3.53)$$

están dentro del círculo unitario  $|z| = 1$  (observamos que por conveniencia hemos arreglado que el coeficiente de  $z^n$  sea unitario en (3.53)). Muchos criterios matemáticos se han desarrollado para probar esta propiedad. Uno de tales métodos, usado ampliamente en la práctica, es el **criterio de estabilidad de Jury** introducido por E. I. Jury en 1963. Este procedimiento da condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación polinomial (3.53) tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario  $|z| = 1$ .

El primer paso en este procedimiento es construir una tabla como la de la figura 3.13 usando información de la ecuación polinomial dada (3.53) y donde

Renglón	$z^n$	$z^{n-1}$	$z^{n-2}$	...	$z^{n-k}$	...	$z^2$	$z^1$	$\frac{1}{z}$
1	1	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_{n-k}$	...	$a_2$	$a_1$	6
2	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_k$	...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	1
3	$\Delta_1 = b_0$	$b_1$	$b_2$	...	$b_k$	...	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	...	$b_{n-1-k}$	...	$b_1$	$b_0$	
5	$\Delta_2 = c_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_k$	...	$c_{n-7}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	...	$c_{n-2-k}$	...	$c_0$		
7	$\Delta_3 = d_0$	$d_1$	$d_2$	...	$d_k$	...			
8	$d_{n-3}$	$d_{n-4}$	$d_{n-5}$	...	$d_{n-3-k}$	...			
⋮									
$2n-5$	$\Delta_{n-3} = s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$					
$2n-4$	$s_1$	$s_2$	$s_1$	$s_0$					
$2n-3$	$\Delta_{n-2} = r_0$	$r_1$	$r_2$						
$2n-2$	$r_2$	$r_1$	$r_0$						
$2n-1$	$\Delta_{n-1} = t_0$								

Figura 3.13 Tabla de estabilidad de Jury para la ecuación polinomial (3.53).

$$b_k = \begin{vmatrix} 1 & a_k \\ a_0 & a_{n-k} \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \dots,$$

$$t_0 = \begin{vmatrix} r_0 & r_2 \\ r_2 & r_0 \end{vmatrix}$$

Observamos que los elementos del renglón  $2j + 2$  son los elementos del renglón  $2j + 1$  escritos en orden inverso para  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ; esto es, los elementos de los renglones pares consisten en los elementos de los renglones impares escritos en orden inverso. Las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación polinomial (3.53) tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario  $|z| = 1$  están dadas por

- (i)  $Q(1) > 0, \quad (-1)^n Q(-1) > 0$  (3.54)  
(ii)  $\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \dots, \quad \Delta_{n-2} > 0, \quad \Delta_{n-1} > 0$

**EJEMPLO 3.24**

Demuestre que todas las raíces de la ecuación polinomial

$$F(z) = z^3 + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{12} = 0$$

están dentro del círculo unitario  $|z| = 1$ .

**Solución** En la figura 3.14 se muestra la tabla de estabilidad de Jury correspondiente. En este caso

$$(i) \quad F(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} > 0$$

$$(-1)^n F(-1) = (-1)^3 (-1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}) > 0$$

$$(ii) \quad \Delta_1 = \frac{143}{144} > 0, \quad \Delta_2 = (\frac{143}{144})^2 - \frac{4}{81} > 0$$

Renglón	$z^3$	$z^2$	$z^1$	$z^0$
1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$
2	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	1
3	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & 1 \end{vmatrix} = \frac{143}{144}$	$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{16}$	$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9}$	
4	$-\frac{2}{9}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{143}{144}$	
5	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{143}{144} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{143}{144} \end{vmatrix} = 0.93678$			

Figura 3.14 Tabla de estabilidad de Jury para el ejemplo 3.24.

Así, por el criterio (3.54), todas las raíces están dentro del círculo unitario. En este caso esto se confirma fácilmente, ya que el polinomio  $F(z)$  puede ser factorizado como

$$F(z) = (z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3}) = 0$$

Así las raíces son  $z_1 = \frac{1}{2}$ ,  $z_2 = -\frac{1}{2}$  y  $z_3 = -\frac{1}{3}$ .

La tabla de estabilidad de Jury también puede usarse para determinar el número de raíces de la ecuación polinomial (3.53) que están fuera del círculo unitario. El número de tales raíces está determinado por el número de cambios de signo en la sucesión

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$$

Demuestre que la ecuación polinomial

$$F(z) = z^3 - 3z^2 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4} = 0$$

tiene raíces que están fuera del círculo unitario  $|z| = 1$ . Determine cuántas de tales raíces hay.

### Solución

En la figura 3.15 se muestra la tabla de estabilidad de Jury correspondiente. Así, en este caso

$$F(z) = 1 - 3 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(-1)^3 F(-1) = (-1)^3 (-1 - 3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = 3$$

Como  $F(1) < 0$ , se sigue de (3.54) que la ecuación polinomial tiene raíces fuera del círculo unitario  $|z| = 1$ . De la figura 3.15, la sucesión  $1, \Delta_1, \Delta_2$  es  $1, \frac{7}{16}, -\frac{15}{16}$ , y como sólo hay un cambio de signo en la sucesión, se sigue que una raíz está fuera del círculo unitario. De nuevo esto se confirma rápidamente, ya que  $F(z)$  puede ser factorizada como

Renglón	$z^1$	$z^2$	$z^1$	$z^2$
1	1	-3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-3	1
3	$\Delta_1 = \frac{1}{16}$	$-\frac{45}{16}$	2	
4	2	$-\frac{45}{16}$	$-\frac{1}{16}$	
5	$\Delta_2 = -\frac{5}{16}$			

Figura 3.15 Tabla de estabilidad de Jury para el ejemplo 3.25.

$$F(z) = (z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})(z - 3) = 0$$

lo que prueba que existe una raíz fuera del círculo unitario en  $z = 3$ .

### 3.6.4 Convolución

Aquí extenderemos brevemente el concepto de convolución introducido en la sección 2.6.6 para sistemas de tiempo discreto. A partir de (3.45), para un sistema que está inicialmente en reposo con sucesión de respuesta al impulso  $\{y_{\delta_k}\}$  con transformada  $z Y_{\delta}(z)$ , la transformada  $z Y(z)$  de la sucesión de salida  $\{y_k\}$  en respuesta a una sucesión de entrada  $\{u_k\}$  con transformada  $z U(z)$  está dada por

$$Y(z) = Y_{\delta}(z)U(z) \quad (3.49)$$

Para resolver un problema particular, la mejor estrategia al determinar  $\{y_k\}$  para una  $\{u_k\}$  dada es invertir el lado derecho de (3.49) como una transformada  $z$  ordinaria sin ninguna consideración particular sobre su estructura. Sin embargo, para entender más acerca de la teoría de sistemas lineales en tiempo discreto, vale la pena explorar un poco más la situación general. Para hacer esto, regresamos al dominio de tiempo.

Supongamos que un sistema lineal en tiempo discreto invariante en el tiempo tiene sucesión de respuesta al impulso  $\{y_{\delta_k}\}$ , y supongamos que queremos encontrar la respuesta del sistema  $\{y_k\}$  a una sucesión de entrada  $\{u_k\}$ , con el sistema inicialmente en estado de reposo. Primero expresamos la sucesión de entrada

$$\{u_k\} = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} \quad (3.55)$$

como

$$\{u_k\} = u_0\{\delta_k\} + u_1\{\delta_{k-1}\} + u_2\{\delta_{k-2}\} + \dots + u_n\{\delta_{k-n}\} + \dots \quad (3.56)$$

donde

$$\delta_{k-j} = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ 1 & (k = j) \end{cases}$$

En otras palabras,  $\{\delta_{k-j}\}$  es simplemente una sucesión de impulso con el pulso de recorrido a  $k = j$ . Así, yendo de (3.55) a (3.56), hemos descompuesto la sucesión

de entrada  $\{u_k\}$  en una suma con carga de sucesiones de impulso recorridas. Bajo la suposición de que el sistema está inicialmente en reposo, la linealidad nos permite expresar la respuesta  $\{y_k\}$  a la sucesión de entrada  $\{u_k\}$  como la suma adecuada con carga de las respuestas al impulso recorridas. Así, como la respuesta de impulso es  $\{y_{\delta_i}\}$ , la respuesta a la sucesión de impulsos recorridos  $\{\delta_{k-j}\}$  será  $\{y_{\delta_{k-j}}\}$ , y la respuesta a la sucesión de impulso con peso  $u_j \{\delta_{k-j}\}$  será simplemente  $u_j \{y_{\delta_{k-j}}\}$ . Sumando las contribuciones de todas las sucesiones en (3.56) obtenemos

$$\{y_k\} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \{y_{\delta_{k-j}}\} \quad (3.57)$$

como la respuesta del sistema a la sucesión de entrada  $\{u_k\}$ . Expandiendo (3.57), tenemos

$$\begin{aligned} \{y_k\} &= u_0 \{y_{\delta_0}\} + u_1 \{y_{\delta_{k-1}}\} + \dots + u_j \{y_{\delta_{k-j}}\} + \dots \\ &= u_0 \{y_{\delta_0}, y_{\delta_1}, y_{\delta_2}, \dots, y_{\delta_h}, \dots\} \\ &\quad + u_1 \{0, y_{\delta_0}, y_{\delta_1}, \dots, y_{\delta_{h-1}}, \dots\} \\ &\quad + u_2 \{0, 0, y_{\delta_0}, \dots, y_{\delta_{h-2}}, \dots\} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + u_h \{0, 0, 0, \dots, 0, y_{\delta_0}, y_{\delta_1}, \dots\} \\ &\quad \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \qquad \qquad \qquad \text{posición } k\text{-ésima} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

A partir de esta expansión, encontramos que el  $k$ -ésimo término de la sucesión de salida está determinado por

$$y_k = \sum_{j=0}^h u_j y_{\delta_{k-j}} \quad (3.58)$$

Esto es,

$$\{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^h u_j y_{\delta_{k-j}} \right\} \quad (3.59)$$

La expresión (3.58) es llamada la **suma de convolución** y el resultado (3.59) es análogo al (2.83) para sistemas continuos.

### EJEMPLO 3.26

Un sistema tiene una transformada  $z$

$$G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

¿Cuál es la respuesta escalonada del sistema? Verifique el resultado usando (3.59).

**Solución** A partir de (3.46), la respuesta escalonada del sistema es

$$Y(z) = G(z)\mathcal{Z}\{h_k\}$$

donde  $\{h_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ . De la figura 3.3  $\mathcal{Z}\{h_k\} = z/(z - 1)$ , así

$$Y(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \frac{z}{z - 1}$$

Al desarrollar  $Y(z)/z$  en fracciones parciales da

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z + \frac{1}{2})(z - 1)} = \frac{2}{3} \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$$

así

$$Y(z) = \frac{2}{3} \frac{z}{z - 1} + \frac{1}{3} \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene la respuesta escalonada como

$$\{y_k\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

Usando (3.59), primero tenemos que encontrar la respuesta al impulso que, de (3.48), está dada por

$$\{y_{\delta_k}\} = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z + \frac{1}{2}}\right]$$

así que

$$\{y_{\delta_k}\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

Aplicando  $\{u_k\}$  como la sucesión escalón unitario  $\{h_k\}$ , donde  $h_k = 1$  ( $k \geq 0$ ), la respuesta escalonada puede determinarse a partir de (3.59) como

$$\begin{aligned} \{y_k\} &= \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \right\} = \left\{ \sum_{j=0}^k 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-j} \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{-j} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k (-2)^j \right\} \end{aligned}$$

Reconociendo la suma como la suma de los  $k+1$  términos de la serie geométrica con razón común  $-2$ , tenemos

$$\{y_k\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1 - (-2)^{k+1}}{1 - (-2)} \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \left( \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2 \right) \right\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

que coincide con la sucesión obtenida por evaluación directa.

El ejemplo 3.26 refuerza el comentario hecho previamente de que el método más fácil para obtener la respuesta es por inversión directa de (3.32). Sin embargo, (3.59), junto con el argumento que conduce a ella, proporciona una gran contribución a

la comprensión sobre cómo se genera la sucesión de respuesta  $\{y_k\}$ . También nos sirve como una "forma cerrada" útil para la salida del sistema, y los lectores pueden consultar textos especializados en señales y sistemas para una discusión plena. (P. Kraniauskas, *Transforms in Signals and Systems*, Addison-Wesley, Wokingham, 1992.)

El lector recordará que empezamos esta sección sugiriendo que trataríamos de estudiar las implicaciones de las relaciones entrada-salida (3.49), a saber

$$Y(z) = Y_\delta(z)U(z)$$

De hecho exploramos la relación entrada-salida en un dominio de tiempo para un sistema lineal, y ahora procedemos a vincular este método con nuestro trabajo en el dominio de la transformada. Por definición,

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = u_0 + \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \dots + \frac{u_k}{z^k} + \dots \\ Y_\delta(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_{\delta_k} z^{-k} = y_{\delta_0} + \frac{y_{\delta_1}}{z} + \frac{y_{\delta_2}}{z^2} + \dots + \frac{y_{\delta_k}}{z^k} + \dots \end{aligned}$$

así

$$Y_\delta(z)U(z) = u_0 y_{\delta_0} + (u_0 y_{\delta_1} + u_1 y_{\delta_0}) \frac{1}{z} + (u_0 y_{\delta_2} + u_1 y_{\delta_1} + u_2 y_{\delta_0}) \frac{1}{z^2} + \dots \quad (3.60)$$

Considerando el  $k$ -ésimo término de (3.60), vemos que el coeficiente de  $z^{-k}$  es simplemente

$$\sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}}$$

Sin embargo, por definición, como  $Y(z) = Y_\delta(z)U(z)$ , esto es también  $y(k)$ , es el  $k$ -ésimo término de la sucesión de salida, así que la última es

$$\{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \right\}$$

como se encontró en (3.59). Así hemos probado que los métodos en el dominio de tiempo y en el dominio de la transformada son equivalentes y, además, hemos establecido la transformada  $z$  de la suma de convolución como

$$\mathcal{Z}\left\{ \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \right\} = U(z)V(z) \quad (3.61)$$

donde

$$\mathcal{Z}\{u_k\} = U(z), \quad \mathcal{Z}\{v_k\} = V(z)$$

Haciendo en (3.61)  $p = k - j$  se prueba que

$$\sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} = \sum_{p=0}^k u_{k-p} v_p \quad (3.62)$$

confirmando que el proceso de convolución es commutativo.

### 3.6.5 Ejercicios

21 Encuentre las funciones de transferencia de cada uno de los siguientes sistemas de tiempo discreto, dado que el sistema está inicialmente en estado de reposo:

- $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = u_k$
- $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = u_{k+1} - u_k$
- $y_{k+3} - y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k - u_k + u_{k-1}$

22 Dibuje una representación en diagrama de bloque del sistema de tiempo discreto

$$y_{k+2} + 0.5y_{k+1} + 0.25y_k = u_k$$

Ahora encuentre una representación en diagrama de bloque del sistema

$$y_{k+2} + 0.5y_{k+1} + 0.25y_k = u_k - 0.6u_{k+1}$$

23 Encuentre la respuesta al impulso para el sistema con función de transferencia  $z$

- |                                     |                                       |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\frac{z}{8z^2 + 6z + 1}$       | (b) $\frac{z^2}{z^2 - 3z + 3}$        |
| (c) $\frac{z^2}{z^2 - 0.2z - 0.08}$ | (d) $\frac{5z^2 - 12z}{z^2 - 6z + 8}$ |

24 Obtenga la respuesta al impulso para los sistemas de los ejercicios 21(a, b).

25 ¿Cuáles de los siguientes sistemas son estables?

- $9y_{k+2} + 9y_{k+1} + 2y_k = u_k$
- $9y_{k+2} - 3y_{k+1} - 2y_k = u_k$
- $2y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - u_k$
- $2y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = u_k$
- $4y_{k+2} - 3y_{k+1} - y_k = u_{k+1} - 2u_k$

26 Utilice el método del ejemplo 3.26 para calcular la respuesta escalonada del sistema con función de transferencia

$$\frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Verifique el resultado con cálculo directo.

27 Un sistema de muestreo de datos descrito por la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} - y_n = u_n$$

es controlado haciendo la entrada  $u_n$  proporcional al error previo de acuerdo con

$$u_n = K\left(\frac{1}{2^n} - y_{n-1}\right)$$

donde  $K$  es una ganancia positiva. Determine el rango de valores de  $K$  para el cual el sistema es estable. Haciendo  $K = \frac{2}{9}$ , determine la respuesta del sistema dando  $y_0 = y_1 = 0$ .

28 Demuestre que el sistema

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = u_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

tiene función de transferencia

$$D(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$$

Demuestre que los polos del sistema son  $z = -1 + j$  y  $z = -1 - j$ . Ahora, demuestre que la respuesta al impulso del sistema está dada por

$$h_n = \mathcal{Z}^{-1}D(z) = 2^{n/2} \operatorname{sen} \frac{3}{4} n\pi$$

### 3.7

## La relación entre la transformada de Laplace y la transformada z

A lo largo de este capítulo hemos procurado destacar las similitudes, donde las hay, entre los resultados en la teoría de la transformada de Laplace y aquellos para la transformada  $z$ . En esta sección veremos con más detenimiento la relación entre estas dos transformadas. En la sección 3.2.2 introducimos la idea del muestreo de una señal de tiempo continuo  $f(t)$  instantáneamente en intervalos uniformes  $T$  para obtener la sucesión

$$\{f(nT)\} = \{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots\} \quad (3.63)$$

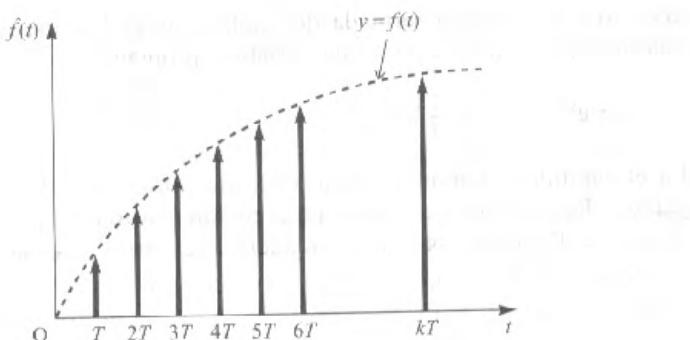


Figura 3.16 Muestreo de la función  $f(t)$ .

Una manera alternativa de representar esta función de muestreo es definir la versión de muestreo de tiempo continuo de  $f(t)$  como  $\hat{f}(t)$  donde

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)\end{aligned}\quad (3.64)$$

La representación (3.64) puede interpretarse como la definición de un lista de impulsos localizados en los puntos de muestreo y pesados con los valores apropiados de muestreo (como se ilustra en la figura 3.16). Aplicando la transformada de Laplace de  $\hat{f}(t)$ , siguiendo los resultados de la sección 2.5.10, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} &= \int_{0-}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \int_{0-}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt\end{aligned}$$

dando

$$\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-ksT}$$

Haciendo el cambio de variable  $z = e^{sT}$  en (3.65), llegamos al resultado

$$\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = F(z) \quad (3.66)$$

donde, como en (3.10),  $F(z)$  denota la transformada  $z$  de la sucesión  $\{f(kT)\}$ . Por tanto, podemos ver la transformada  $z$  de una sucesión de muestreos en tiempo

discreto como la transformada de Laplace de la función de tiempo continuo de muestreo  $\hat{f}(t)$  con un cambio de variable apropiado

$$z = e^{sT} \quad \text{o} \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

En el capítulo 1 vimos que bajo esta transformación el semiplano izquierdo del plano  $s$ ,  $\text{Re}(s) < 0$ , es mapeado en la región dentro del círculo unitario en el plano  $z$ ,  $|z| < 1$ . Esto es consistente con nuestros criterios de estabilidad en los dominios  $s$  y  $z$ .

### 3.8

## Aplicación a la ingeniería: diseño de sistemas de tiempo discreto

Un desarrollo importante en muchas áreas de la ingeniería moderna es el reemplazo de aparatos analógicos por digitales. Quizá el ejemplo más conocido es el reproductor de discos compactos en donde la transcripción mecánica seguida por un procesamiento de señal analógica ha sido sustituida por tecnología óptica y un procesamiento de señal digital. Hay otros ejemplos en muchos campos de la ingeniería, en particular en donde se emplea control automático.

### 3.8.1

#### Filtros analógicos

En el centro de la mayoría de las aplicaciones en el proceso de señales están los **filtros**. Estos tienen el efecto de cambiar el espectro de señales de entrada, esto es, las componentes atenuantes de señales por una cantidad que depende de la frecuencia de la componente. Por ejemplo, un **filtro ideal de paso bajo** analógico pasa sin atenuación todas las componentes de la señal a frecuencias menores que la frecuencia crítica  $\omega = \omega_c$ . La amplitud de la frecuencia de respuesta  $|G(j\omega)|$  (ver sección 2.7) de tal filtro ideal se muestra en la figura 3.17.

Una clase de filtros analógicos cuya frecuencia de respuesta aproxima aquella del filtro ideal de paso bajo comprende aquellos conocidos como los **filtros de Butterworth**. Además de tener características “buenas”, estos pueden implemen-

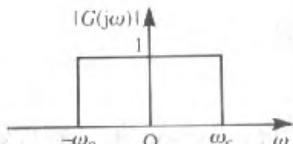


Figura 3.17 Respuesta de amplitud para un filtro ideal de paso bajo.

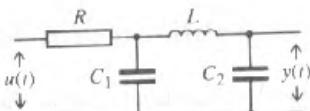


Figura 3.18 Red RLC para implementar un filtro de Butterworth de segundo orden.

tarse usando una red como la ilustrada en la figura 3.18 para un filtro de segundo orden.

Se puede probar (ver M. J. Chapman, D. P. Goodall y N. C. Steele, *Signal Processing in Electronic Communication*, Horwood Publishing, Chichester, 1997) que la función de transferencia  $G_n(s)$  del filtro de orden  $n$  es

$$G_n(s) = \frac{1}{B_n(x)} \quad \text{donde} \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

con

$$x = \frac{s}{\omega_c}, \quad a_k = \prod_{r=1}^k \frac{\cos(r-1)\alpha}{\operatorname{sen} r\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}$$

Usando estas relaciones, se prueba fácilmente que

$$G_2(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} \quad (3.67)$$

$$G_3(s) = \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3} \quad (3.68)$$

y así sucesivamente. Haciendo una gráfica de las amplitudes de las frecuencias de respuesta  $G_n(j\omega)$ , se ve claramente que al incrementar  $n$  se mejora la aproximación de la respuesta del filtro ideal de paso bajo de la figura 3.17.

### 3.8.2

## Diseño de un filtro digital de reemplazo

Supongamos que ahora queremos diseñar un sistema de tiempo discreto que funcione en muestreos tomados de una señal de entrada, esto funcionará de manera similar al filtro de Butterworth. Supondremos que la señal de entrada  $u(t)$  y la señal de salida  $y(t)$  de un filtro analógico son muestreadas ambas en los mismos intervalos  $T$  para generar la sucesión de entrada  $\{u(kT)\}$  y la sucesión de salida  $\{y(kT)\}$  respectivamente. Es claro que necesitamos especificar qué significa "funciona de manera similar". En este caso, elegiremos como nuestra estrategia de diseño un método que aparezca la sucesión de respuesta al impulso del diseño digital con una sucesión de muestreo, elegida en los instantes apropiados  $T$  de la respuesta al impulso de un "prototipo" analógico. Elegiremos como prototipo uno de los filtros de Butterworth estudiados en la sección 3.8.1, aunque hay otras muchas posibilidades.

Seleccionamos como nuestro prototipo el filtro de primer orden, con frecuencia de corte  $\omega_c$ . El primer paso es calcular la respuesta al impulso de este filtro. La función de transferencia de Laplace del filtro es

$$G(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Así, a partir de (2.71), la respuesta al impulso se obtiene fácilmente como

$$h(t) = \omega_c e^{-\omega_c t} \quad (t \geq 0) \quad (3.69)$$

Después, hacemos el muestreo de esta respuesta a intervalos  $T$  para generar la sucesión

$$\{h(kT)\} = \{\omega_c e^{-\omega_c kT}\}$$

la cual, aplicando la transformada  $z$ , da

$$\mathcal{Z}\{h(kT)\} = H(z) = \omega_c \frac{z}{z - e^{-\omega_c T}}$$

Finalmente, elegimos  $H(z)$  como la función de transferencia de nuestro sistema digital. Esto significa simplemente que la relación entrada-salida para el diseño del sistema digital será

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

donde  $Y(z)$  y  $U(z)$  son las transformadas  $z$  de las sucesiones de entrada y salida  $\{y(kT)\}$  y  $\{u(kT)\}$  respectivamente. Así, tenemos

$$Y(z) = \omega_c \frac{z}{z - e^{-\omega_c T}} U(z) \quad (3.70)$$

Ahora está definido nuestro sistema digital y podemos construir fácilmente el modelo de ecuación en diferencias para el sistema como

$$(z - e^{-\omega_c T})Y(z) = \omega_c z U(z)$$

esto es

$$zY(z) - e^{-\omega_c T} Y(z) = \omega_c z U(z)$$

Bajo el supuesto de condiciones iniciales cero, podemos tomar las transformadas inversas para obtener el modelo de ecuación en diferencias de primer orden

$$y(k+1) - e^{-\omega_c T} y(k) = \omega_c u(k+1) \quad (3.71)$$

En la figura 3.19 se muestra la elaboración de un diagrama de bloques de (3.71).

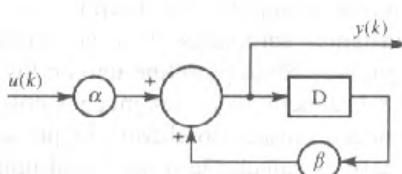


Figura 3.19 Diagrama de bloques para el filtro de reemplazo digital,  $\alpha = k\omega_c$ ,  $\beta = e^{-\omega_c t}$ .

### 3.8.3 Desarrollos posibles

El método de diseño que hemos considerado es llamado la **técnica de impulso invariante** y es sólo una de muchas técnicas disponibles. El lector interesado puede ampliar este estudio de varias maneras:

- (1) Escriba un programa de computadora para evaluar la sucesión generada por (3.71) con  $\omega_c = 1$ , y compárela con los valores obtenidos en los instantes de muestreo de la respuesta al impulso (3.69) del filtro prototípico analógico.
- (2) Repita el proceso de diseño para el filtro de segundo orden de Butterworth.
- (3) Al hacer  $s = j\omega$  en la función de transferencia de Laplace del prototípico, y  $z = e^{j\omega T}$  en la función de transferencia  $z$  del diseño digital, compare la amplitud de las respuestas de frecuencia en ambos casos. Para un explicación de los resultados obtenidos vea el capítulo 5.
- (4) Una estrategia de diseño alternativo es reemplazar  $s$  en la función de transferencia de Laplace con

$$\frac{2z - 1}{Tz + 1}$$

(este es un proceso que utiliza el método de trapecios para aproximar integrales). Diseñe filtros digitales alternativos usando esta técnica.

- (5) Demuestre que los filtros diseñados usando cualquiera de estas técnicas serán estables siempre que el diseño del prototípico sea a su vez estable.

## 3.9

# Aplicación a la ingeniería: el operador delta y la transformada $\mathcal{D}$

### 3.9.1

## Introducción

En años recientes, la razón de muestreo para sistemas digitales ha crecido mucho y las formulaciones de modelos tradicionales basados en la transformada  $z$  han producido resultados poco satisfactorios en algunas aplicaciones. Está más allá de este texto describir esta situación en detalle pero es posible dar una introducción breve al problema y sugerir un método para la solución. Para más detalles ver R. M. Middleton y G. C. Goodwin, *Digital Control and Estimation. A Unified Approach* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990) o W. Forsythe y R. M. Goodall, *Digital*

*Control* (Macmillan, Londres, 1991). La contribución de Colin Paterson al desarrollo de esta aplicación es reconocida gratamente.

### 3.9.2 El operador q u operador de corrimiento y el operador $\delta$

En el dominio de tiempo definimos el operador de corrimiento q en términos de su efecto en la sucesión  $\{x_k\}$  como

$$q\{x_k\} = \{x_{k+1}\}$$

Esto es, el efecto del operador de corrimiento es mover la sucesión una posición, para que el  $k$ -ésimo término de la nueva sucesión sea el  $(k + 1)$ -ésimo término de la sucesión original. Entonces es posible escribir la ecuación en diferencias

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} + 5y_k = u_{k+1} - u_k$$

como

$$q^2y_k + 2qy_k + 5y_k = qu_k - u_k$$

o

$$(q^2 + 2q + 5)y_k = (q - 1)u_k \quad (3.72)$$

Observamos que si hubiéramos aplicado la transformada z de la ecuación en diferencias del sistema inicialmente en reposo, habríamos obtenido

$$(z^2 + 2z + 5)Y(z) = (z - 1)U(z)$$

Vemos enseguida la correspondencia entre el operador q en el dominio de tiempo y el operador transformada z,  $\mathcal{Z}$ .

El siguiente paso es introducir el operador  $\delta$  definido como

$$\delta = \frac{q - 1}{\Delta}$$

donde  $\Delta$  tiene las dimensiones de tiempo y se elige frecuentemente como el periodo de muestreo  $T$ . Observamos que

$$\delta y_k = \frac{(q - 1)y_k}{\Delta} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta}$$

en consecuencia si  $\Delta = T$  entonces en el límite del muestreo rápido

$$\delta y_k \approx \frac{dy}{dt}$$

Resolviendo para q vemos que

$$q = 1 + \Delta\delta$$

La ecuación en diferencias (3.72) puede escribirse entonces como

$$((1 + \Delta\delta)^2 + 2(1 + \Delta\delta) + 5)y_k = [(1 + \Delta\delta) - 1]u_k$$

o

$$[(\Delta\delta)^2 + 4\Delta\delta + 8]y_k = \Delta\delta u_k$$

o, finalmente, como

$$\left(\delta^2 + \frac{4\delta}{\Delta} + \frac{8}{\Delta^2}\right)y_k = \frac{\delta}{\Delta}u_k$$

### 3.9.3 Construcción de un modelo de sistema en tiempo discreto

Hasta aquí, hemos demostrado simplemente un método de volver a escribir una ecuación en diferencias en una forma alternativa. Ahora examinaremos las posibles ventajas de construir modelos de sistemas en tiempo discreto usando el operador  $\delta$ . Para hacer esto, consideraremos un ejemplo particular, en el cual obtenemos dos formas en tiempo discreto distintas de un filtro de Butterworth de segundo orden, ambas basadas en el método de transformada bilineal, conocido algunas veces como el **método de Tustin**. Este método tienen sus orígenes en la aproximación con trapecios del proceso de integración; los detalles completos se dan en M. J. Chapman, D. P. Goodall y N. C. Steele, *Signal Processing in Electronic Communication* (Horwood Publishing Chichester, 1997).

El filtro de Butterworth de segundo orden de tiempo continuo con frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  se modela, como está indicado por (3.67), por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 1.41421 \frac{dy}{dt} + y = u(t) \quad (3.73)$$

donde  $u(t)$  es la entrada y  $y(t)$  es la respuesta del filtro. Aplicando a todo la transformada de Laplace, bajo la suposición de condiciones iniciales de reposo, esto es,  $y(0) = (dy/dt)(0) = 0$ , obtenemos la ecuación transformada

$$(s^2 + 1.41421s + 1)Y(s) = U(s) \quad (3.74)$$

Esto representa un sistema estable, ya que los polos del sistema, dados por

$$s^2 + 1.41421s + 1 = 0$$

están localizados en  $s = -0.70710 \pm j0.70710$  y, por tanto, están en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ .

Ahora buscamos una versión en tiempo discreto de la ecuación diferencial (3.73). Para hacer esto, primero transformamos (3.74) en el dominio  $z$  usando el **método de la transformada bilineal** reemplazando  $s$  por

$$\frac{2z-1}{Tz+1}$$

La ecuación (3.74) se convierte entonces en

$$\left[ \frac{4}{T^2} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 1.41421 \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + 1 \right] Y(z) = U(z)$$

o

$$\begin{aligned} & [(\frac{1}{4} T^2 + 1.41421 \times \frac{1}{2} T + 4) z^2 + (\frac{1}{2} T^2 - 8) z + \frac{1}{4} T^2 - 1.41421 \times \frac{1}{2} T + 4] Y(z) \\ &= \frac{1}{4} T^2 (z^2 + 2z + 1) U(z) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ahora podemos invertir esta ecuación transformada para obtener el modelo en el dominio de tiempo

$$\begin{aligned} & (\frac{1}{4} T^2 + 1.41421 \times \frac{1}{2} T + 4) y_{k+2} + (\frac{1}{2} T^2 - 8) y_{k+1} + (\frac{1}{4} T^2 - 1.41421 \times \frac{1}{2} T + 4) y_k \\ &= \frac{1}{4} T^2 (u_{k+2} + 2u_{k+1} + u_k) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Para fines ilustrativos, ponemos  $T = 0.1\text{s}$  en (3.76) para obtener

$$4.07321 y_{k+2} - 7.99500 y_{k+1} + 3.93179 y_k = 0.02500 (u_{k+2} + 2u_{k+1} + u_k)$$

Observamos que las raíces de la ecuación característica tienen módulo cercano a 0.9825, y así están bastante cerca de la frontera de estabilidad.

Cuando  $T = 0.01\text{s}$ , (3.76) vale

$$4.00710 y_{k+2} - 7.99995 y_{k+1} + 3.99295 y_k = 0.00003 (u_{k+2} + 2u_{k+1} + u_k)$$

En este caso las raíces tienen módulo de casi 0.9982, y vemos que al aumentar la razón de muestreo se han movido muy cerca de la frontera de estabilidad y es necesario tener una *alta precisión en los coeficientes*, aumentando el costo de ejecución.

Un método alternativo de procesamiento implica evitar el paso intermedio de la obtención del modelo en el dominio  $z$  (3.75) y proceder directamente a una representación en tiempo discreto a partir de (3.73), usando la transformación

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{q-1}{q+1}$$

llegando al mismo resultado que en (3.76). Usando el operador  $\delta$  en lugar del operador de corrimiento  $q$ , observando que  $q = 1 + \Delta\delta$ , hacemos la transformación

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{\Delta\delta}{2 + \Delta\delta}$$

o, si  $T = \Delta$ , la transformación

$$s \rightarrow \frac{2\delta}{2 + \Delta\delta}$$

en (3.74), la cual llega a ser

$$[\delta^2 + 1.41421 \times \frac{1}{2} \delta (2 + \Delta\delta) + \frac{1}{4} (2 + \Delta\delta)^2] y_k = \frac{1}{4} (2 + \Delta\delta)^2 u_k$$

Observamos que en esta forma es fácil ver que en el límite, conforme  $\Delta \rightarrow 0$  (esto es, cuando el muestreo se hace muy rápido) recobramos la ecuación diferencial del modelo original. Reorganizando esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} & \left[ \delta^2 + \frac{(1.41421 + \Delta)}{(1 + 1.41421 \times \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}\Delta^2)} \delta + \frac{1}{(1 + 1.41421 \times \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}\Delta^2)} \right] y_k \\ &= \frac{(2 + \Delta\delta)^2}{4(1 + 1.41421 \times \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}\Delta^2)} u_k \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para fijar la estabilidad es útil introducir una variable de transformación  $\gamma$  asociada con el operador  $\delta$ . Esto se logra definiendo  $\gamma$  en términos de  $z$  como

$$\gamma = \frac{z - 1}{\Delta}$$

La región de estabilidad en el plano  $z$   $|z| < 1$ , así se llega a

$$|1 + \Delta\gamma| < 1$$

o

$$\left| \frac{1}{\Delta} + \gamma \right| < \frac{1}{\Delta} \quad (3.78)$$

Esto corresponde a un círculo en el dominio  $\gamma$  con centro en  $(-1/\Delta, 0)$  y radio  $1/\Delta$ . Conforme  $\Delta \rightarrow 0$ , vemos que el círculo se expande de tal manera que la región de estabilidad es todo el semiplano abierto izquierdo, y coincide con la región de estabilidad para sistemas de tiempo continuo.

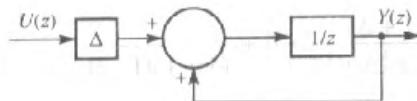
Examinemos la localización de los polos para los dos casos considerados previamente, a saber  $T = 0.1$  y  $T = 0.01$ . Con  $\Delta = T = 0.1$ , la ecuación característica tiene la forma

$$\gamma^2 + 1.41092\gamma + 0.93178 = 0$$

con raíces, que corresponden a los polos del sistema en  $-0.70546 \pm j0.65887$ . El centro de la región circular de estabilidad está ahora en  $-1/0.1 = -10$ , con radio 10, y estas raíces se encuentran a una distancia radial de alrededor de 9.3178 del centro. Observemos que la distancia de los polos a la frontera de estabilidad es ligeramente menor que 0.7. Los polos del modelo original en tiempo continuo también estaban casi a esa distancia de la frontera apropiada, y observamos el gran contraste con nuestro primer modelo discreto, cuando el proceso de discretización, él mismo movió la localización de los polos muy cerca de la frontera de estabilidad. En ese modelo la situación se volvió crítica cuando la razón de muestreo se incrementó a  $T = 0.01$ , y los polos se movieron más cerca de la frontera. Haciendo  $T = 0.01$  en la nueva formulación encontramos que la ecuación característica se convierte en

$$\gamma^2 + 1.41413\gamma + 0.99295 = 0$$

con raíces en  $-0.70706 \pm j0.70214$ . El círculo de estabilidad está ahora centrado en  $-100$ , con radio 100, y la distancia radial de los polos es de alrededor de 99.2954. Así la distancia a la frontera sigue siendo de alrededor de 0.7. Claramente, en el límite conforme  $\Delta \rightarrow 0$ , la localización de los polos se convierte en aquella del modelo de tiempo continuo con el círculo de estabilidad aumentando hasta llegar a todo el semiplano izquierdo del plano complejo  $\gamma$ .

Figura 3.20 El bloque  $\delta^{-1}$ .

### 3.9.4 Realización del diseño

La discusión que hemos realizado sirve para demostrar la utilidad de la formulación del operador  $\delta$  pero el problema de la implementación del diseño aún continúa. Es posible construir un bloque  $\delta^{-1}$  basado en los bloques de retardo o de  $1/z$ , como se muestra en la figura 3.20. Los sistemas pueden ser realizados usando estas estructuras en cascada, que mediante estudios de simulación se ha visto que se obtienen resultados exitosos. Un método alternativo es hacer uso de la **forma espacio-estado** del modelo del sistema. Demostramos este método nuevamente para el caso  $T = 0.01$  cuando, con  $T = \Delta = 0.01$ , (3.77) se convierte en

$$(\delta^2 + 1.41413\delta + 0.99295)y_k = (0.00002\delta^2 + 0.00930\delta + 0.99295)u_k \quad (3.79a)$$

Basados en (3.79a) llegamos a la ecuación

$$(\delta^2 + 1.41413\delta + 0.99295)p_k = u_k \quad (3.79b)$$

Definiendo las variables de estado

$$x_{1,k} = p_k, \quad x_{2,k} = \delta p_k$$

la ecuación (3.79b) puede ser representada mediante el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \delta x_{1,k} &= x_{2,k} \\ \delta x_{2,k} &= -0.99295x_{1,k} - 1.41413x_{2,k} + u_k \end{aligned}$$

Eligiendo

$$y_k = 0.99295p_k + 0.00930\delta p_k + 0.000002\delta^2 p_k \quad (3.79c)$$

las ecuaciones (3.79b) y (3.79c) son equivalentes a (3.79a). En términos de las variables de estado vemos que

$$y_k = 0.99293x_{1,k} + 0.00972x_{2,k} + 0.00002u_k$$

Definiendo los vectores  $x_k = [x_{1,k} \quad x_{2,k}]^T$  y  $\delta x_k = [\delta x_{1,k} \quad \delta x_{2,k}]^T$ , la ecuación (3.79a) puede representarse en la forma matricial como

$$\delta x_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.99295 & -1.41413 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (3.80a)$$

con

$$y_k = [0.992 \ 93 \ 0.009 \ 72]x_k + 0.000 \ 02u_k \quad (3.80b)$$

Ahora volvemos a la forma  $q$  para implementar el sistema. Recordando que  $\delta = (q - 1)/\Delta$ , (3.80a) se convierte en

$$qx_k = x_{k+1} = x_k + \Delta \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.992 \ 95 & -1.414 \ 13 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \right) \quad (3.81)$$

quedando (3.80b) igual y donde  $\Delta = 0.01$ , en este caso. Las ecuaciones (3.81) y (3.80b) pueden ser expresadas en la forma de matriz–vector

$$x_{k+1} = x_k + \Delta [\mathbf{A}(\Delta)x_k + bu_k]$$

$$y = c^T(\Delta)x_k + d(\Delta)u_k$$

Esta ecuación diferencial matricial puede implementarse ahora sin dificultad usando bloques de retardo estándares, y tiene una forma similar al resultado de aplicar una discretización de Euler simple al modelo original de tiempo continuo expresado en la forma espacio-estado.

### 3.9.5 La transformada $\mathcal{D}$

En la sección 3.9.3 introducimos una variable transformada

$$\gamma = \frac{z - 1}{\Delta}$$

El propósito de esto fue permitirnos el análisis de la estabilidad de los sistemas descritos en la forma  $\delta$ . Ahora definimos una transformada en términos de la transformada  $z$  usando la notación dada por R. M. Middleton y G. C. Goodwin, *Digital Control and Estimation. A Unified Approach* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990). Sea  $\{f_k\}$  la sucesión que tiene la transformada  $z$ ,  $F(z)$ ; entonces la nueva transformada está dada por

$$\begin{aligned} F'_\Delta(\gamma) &= F(z)|_{z=\Delta\gamma+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{(1 + \Delta\gamma)^k} \end{aligned}$$

La transformada  $\mathcal{D}$  está definida formalmente como una pequeña modificación de esta forma, como

$$\mathcal{D}(f_k) = F_\Delta(\gamma) = \Delta F'_\Delta(\gamma) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{(1 + \Delta\gamma)^k}$$

El propósito de esta modificación es permitir la construcción de una *teoría unificada de transformadas* que abarca ambos modelos de tiempo continuo y discreto

en la misma estructura. Estos desarrollos están más allá de los objetivos de este texto pero los lectores interesados pueden seguirlos en la referencia antes dada. Concluimos la discusión con un ejemplo para ilustrar las ideas. La sucesión rampa  $\{u_k\} = \{k\Delta\}$  puede obtenerse por muestreo de la función en tiempo continuo  $f(t) = t$  en los intervalos  $\Delta$ . Esta sucesión tiene transformada z

$$U(z) = \frac{\Delta z}{(z - 1)^2}$$

y la transformada D correspondiente es entonces

$$\Delta U'_\Delta(\gamma) = \frac{1 + \Delta\gamma}{\gamma^2}$$

Observamos que poniendo  $\Delta = 0$  y  $\gamma = s$  se recupera la transformada de Laplace de  $f(t)$ .

### 3.9.6 Ejercicios

- 29 Un sistema de tiempo continuo que tiene entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$  está definido por su función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Usando los métodos descritos anteriormente, encuentre las formas  $q$  y  $\delta$  del modelo del sistema de tiempo discreto obtenido usando la transformación

$$s \rightarrow \frac{2}{\Delta} \frac{z-1}{z+1}$$

donde  $\Delta$  es el intervalo de muestreo. Examine la estabilidad del sistema original y la de los sistemas de tiempo discreto cuando  $\Delta = 0.1$  y  $\Delta = 0.01$ .

- 30 Use la fórmula de la ecuación (3.68) para obtener la función de transferencia del filtro de Butterworth de tercer orden con  $\omega_c = 1$ , y obtenga la forma  $\delta$  correspondiente del sistema de tiempo discreto cuando  $T = \Delta$ .

- 31 Realice la sustitución

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

en el ejercicio 29 para obtener la forma espacio-estado del modelo de sistema,

$$t(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

**La técnica de discretización de Euler** reemplaza  $\dot{x}(t)$  por

$$\frac{x((k+1)\Delta) - x(k\Delta)}{\Delta}$$

Demuestre que esto corresponde al modelo obtenido previamente con  $A = A(0)$ ,  $c = c(0)$  y  $d = d(0)$ .

- 32 El procedimiento de discretización usado en la sección 3.9.3 estuvo basado en el método de la transformada bilineal derivado de la aproximación con trapezios del proceso de integración. Una aproximación alternativa es el procedimiento de Adams-Basforth, y se puede demostrar que esto significa que podemos hacer la transformación

$$s \rightarrow \frac{12}{\Delta} \frac{z^2 - z}{5z^2 + 8z - 1}$$

donde  $\Delta$  es el intervalo de muestreo (ver W. Forsythe y R. M. Goodall, *Digital Control*, Macmillan, Londres, 1991). Use esta transformación para discretizar el sistema dado por

$$H(s) = \frac{s}{s+1}$$

cuando  $\Delta = 0.1$  en

- (a) la forma z, y
- (b) la forma  $\gamma$ .

## 3.10 Ejercicios de repaso (1-16)

1 La señal  $f(t) = t$  es muestreada en intervalos  $T$  para generar la sucesión  $\{f(kT)\}$ . Demuestre que

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

2 Demuestre que

$$\mathcal{Z}\{a^k \operatorname{sen} k\omega\} = \frac{az \operatorname{sen} \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2} \quad (a > 0)$$

3 Demuestre que

$$\mathcal{Z}\{k^n\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

4 Encuentre la respuesta al impulso para el sistema con función de transferencia

$$H(z) = \frac{(3z^2 - z)}{z^2 - 2z + 1}$$

5 Calcule la respuesta escalonada para el sistema con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$

6 Un proceso con función de transferencia de Laplace  $H(s) = 1/(s+1)$  está en cascada con un aparato de sostenimiento de orden cero con función de transferencia de Laplace  $G(s) = (1 - e^{-sT})/s$ . Entonces la función de transferencia completa es

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)}$$

Escriba  $F(s) = 1/s(s+1)$ , y encuentre  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ . Muestree  $f(t)$  en intervalos  $T$  para producir la sucesión  $\{f(kT)\}$  y encuentre  $\tilde{F}(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\}$ . Deduzca que

$$e^{-sT}F(s) \rightarrow \frac{1}{z}\tilde{F}(z)$$

y ahora demuestre que la función de transferencia  $z$  total para el proceso y el aparato de orden cero es

$$\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

7 Un sistema tiene función de transferencia de Laplace

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Calcule la respuesta al impulso y obtenga la transformada  $z$  de esta respuesta cuando se muestrea en intervalos  $T$ .

8 Puede establecerse que si  $X(z)$  es la transformada  $z$  de la sucesión  $\{x_n\}$  entonces el término general de esa sucesión está dado por

$$x_n = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

donde  $C$  es cualquier contorno cerrado que contiene todas las singularidades de  $X(z)$ . Si suponemos que todas las singularidades de  $X(z)$  son polos localizados dentro del círculo de radio finito, entonces una aplicación fácil del teorema del residuo es probar que

$$x_n = \sum [\text{residuos de } X(z)z^{n-1} \text{ en polos de } X(z)]$$

(a) Sea  $X(z) = z/(z-a)(z-b)$ , con  $a$  y  $b$  reales. ¿Dónde están los polos de  $X(z)$ ? Calcule los residuos de  $z^{n-1}X(z)$ , y ahora invierta la transformada para obtener  $\{x_n\}$ .

(b) Use el método del residuo para encontrar

$$(i) \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-3)^2}\right\} \quad (ii) \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2-z+1}\right\}$$

9 La respuesta al impulso de cierto sistema de tiempo discreto es  $\{(-1)^k - 2^k\}$ . ¿Cuál es la respuesta al escalón?

10 Un sistema de tiempo discreto tiene una función de transferencia

$$H(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

Encuentre la respuesta de la sucesión  $\{1, -1, 0, 0, \dots\}$

11 Demuestre que la respuesta del sistema de segundo orden con función de transferencia

$$\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

con la entrada  $\{1, -(\alpha+\beta), \alpha\beta, 0, 0, 0, \dots\}$  es

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\}$$

Deduzca que la respuesta del sistema

$$\frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

a la misma entrada será

$$\{\delta_{k-1}\} = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$$

- 12 Un sistema está especificado por su función de transferencia de Laplace

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Calcule la respuesta al impulso  $y_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ , y demuestre que si esta respuesta es muestrada en intervalos  $T$  para generar la sucesión  $\{y_\delta(nT)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) entonces

$$D(z) = \mathcal{Z}\{y_\delta(nT)\} = \frac{2z}{z - e^{-2T}} - \frac{z}{z - e^{-T}}$$

Ahora se construye un sistema de tiempo discreto de manera que

$$Y(z) = TD(z)X(z)$$

donde  $X(z)$  es la transformada  $z$  de la sucesión de entrada  $\{x_n\}$  y  $Y(z)$  es la sucesión de salida  $\{y_n\}$ , con  $x_n = x(nT)$  y  $y_n = y(nT)$ . Demuestre que si  $T = 0.5s$  entonces la ecuación en diferencias que gobierna al sistema es

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 0.9744y_{n+1} + 0.2231y_n \\ = 0.5x_{n+2} - 0.4226x_{n+1} \end{aligned}$$

Dibuje un diagrama de bloque para el sistema de tiempo discreto modelado por la ecuación en diferencias

$$p_{n+2} - 0.9744p_{n+1} + 0.2231p_n = x_n$$

y verifique que la señal  $y_n$ , como se definió antes, está generada al tomar  $y_n = 0.5p_{n+2} - 0.4226p_{n+1}$  como salida.

- 13 En un sistema de tiempo discreto de control de posición, la posición  $y_n$  satisface la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = y_n + av_n \quad (a \text{ constante})$$

donde  $v_n$  y  $u_n$  satisfacen las ecuaciones en diferencias

$$v_{n+1} = v_n + bu_n \quad (b \text{ constante})$$

$$u_n = k_1(x_n - y_n) - k_2v_n \quad (k_1, k_2 \text{ constantes})$$

- (a) Demuestre que si  $k_1 = 1/4ab$  y  $k_2 = 1/b$  entonces la función de transferencia  $z$  del sistema es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1-2z)^2}$$

donde  $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$  y  $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ .

- (b) Si también  $x_n = A$  (donde  $A$  es una constante), determine la sucesión de respuesta  $\{y_n\}$  dado que  $y_0 = y_1 = 0$ .

- 14 La respuesta escalonada de un sistema de tiempo continuo está modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 \quad (t \geq 0)$$

con  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Use la aproximación en diferencias hacia atrás

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{y_k - y_{k-1}}{T} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &\approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2} \end{aligned}$$

para probar que esta ecuación en diferencias puede aproximarse por

$$\frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2} + 3\frac{y_k - y_{k-1}}{T} + 2y_k = 1$$

Aplique la transformada  $z$  a esta ecuación en diferencias y demuestre que los polos del sistema están en

$$z = \frac{1}{1+T}, \quad \bar{z} = \frac{1}{1+2T}$$

Deduzca así que la solución general es

$$y_k = \alpha \left(\frac{1}{1+T}\right)^k + \beta \left(\frac{1}{1+2T}\right)^k + \gamma$$

Demuestre que  $\gamma = \frac{1}{2}$  y, observando que las condiciones iniciales  $y(0) = 0$  y  $\dot{y}(0) = 0$  implican  $y_0 = y_1 = 0$ , deduzca que

$$y_k = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{1+2T}\right)^k - 2 \left(\frac{1}{1+T}\right)^k + 1 \right]$$

Observe que el método de la transformada  $z$  puede ser usado para obtener este resultado si redefinimos  $\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j/z^j)$ , con las modificaciones apropiadas para las fórmulas  $\mathcal{Z}\{y_{k+1}\}$  y  $\mathcal{Z}\{y_{k+2}\}$ .

Explique por qué el procedimiento de cálculo siempre es estable en teoría, pero observe la localización de los polos para  $T$  muy pequeña.

Por último, verifique que la solución de la ecuación diferencial es

$$y(t) = \frac{1}{2} (e^{-2t} - 2e^{-t} + 1)$$

y trace las gráficas de las soluciones exacta y aproximada cuando  $T = 0.1s$  y  $T = 0.05s$ .

- 15 Considere de nuevo la respuesta escalonada del sistema modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 \quad (t \geq 0)$$

con  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Luego discretice mediante el método de la transformada bilineal, esto es, aplicando la transformada de Laplace y haciendo la transformación

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

donde  $T$  es el intervalo de muestreo. Demuestre que los polos de la función de transferencia  $z$  están en

$$z = \frac{1-T}{1+T}, \quad z = \frac{2-T}{2+T}$$

Deduzca entonces que la ecuación general es

$$y_k = \alpha \left( \frac{1-T}{1+T} \right)^k + \beta \left( \frac{2-T}{2+T} \right)^k + \gamma$$

Deduzca que  $\gamma = \frac{1}{2}$  y, usando las condiciones  $y_0 = y_{-1} = 0$ , demuestre que

$$y_k = \frac{1}{2} \left[ (1-T) \left( \frac{1-T}{1+T} \right)^k - (2-T) \left( \frac{2-T}{2+T} \right)^k + 1 \right]$$

Dibuje las gráficas para ilustrar la solución exacta y la solución aproximada cuando  $T = 0.1\text{s}$  y  $T = 0.05\text{s}$ .

- 16** Demuestre que la transformada  $z$  de la versión de muestreo de la señal  $f(t) = t^2$  es

$$F(z) = \frac{z(z+1)\Delta^2}{(z-1)^3}$$

donde  $\Delta$  es el intervalo de muestreo. Verifique entonces que la transformada  $\mathcal{Z}$  es

$$\frac{(1+\Delta\nu)(2+\Delta\nu)}{\nu^3}$$



# 4

## Series de Fourier

### CONTENIDO

- 4.1 Introducción
- 4.2 Expansión en serie de Fourier
- 4.3 Funciones definidas sobre un intervalo finito
- 4.4 Derivación e integración de series de Fourier
- 4.5 Aplicación a la ingeniería: respuesta a la frecuencia y sistemas oscilatorios
- 4.6 Forma compleja de las series de Fourier
- 4.7 Funciones ortogonales
- 4.8 Aplicación a la ingeniería: funciones descriptivas
- 4.9 Ejercicios de repaso (1–20)

### 4.1

## Introducción

La representación de una función en la forma de una serie es una práctica bastante común en matemáticas. Probablemente las expansiones más familiares son las series de potencias de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

en donde el **conjunto base** se compone de las funciones potencia

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

Por ejemplo, recordemos que la función exponencial puede ser representada por la serie infinita

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Con bastante frecuencia hay ventajas al expandir una función en tales series, ya que es fácil trabajar con unos pocos de los primeros términos para una buena aproximación. Por ejemplo puede aplicarse integración o derivación término a término o se pueden hacer aproximaciones adecuadas.

Las funciones potencia son sólo un ejemplo de un conjunto base para la expansión de funciones: se pueden utilizar muchos otros conjuntos base. En particular, una **serie de Fourier** es una expansión de una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T = 2\pi/\omega$  en la que el conjunto base es el conjunto de funciones seno, obteniéndose una representación expandida de la forma

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

A pesar de que la idea de expandir una función en la forma de una serie de este tipo fue usada por Bernoulli, D'Alembert y Euler (1750) para resolver problemas asociados con la vibración de un resorte, fue Joseph Fourier (1768–1830) quien desarrolló el método hasta un nivel en el que es útil en casos más generales. Fourier, un físico francés estaba interesado en los problemas de flujo de calor: dada una temperatura inicial en todos los puntos de una región, está interesado en determinar el cambio en la disminución de la temperatura a través del tiempo. Cuando Fourier postuló en 1807 que una función arbitraria  $f(t)$  puede ser representada por una serie trigonométrica de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx)$$

el resultado fue considerado tan sorprendente que encontró oposición considerable de los principales matemáticos de su tiempo, principalmente de Laplace, Poisson y, especialmente, de Lagrange, a quien se considera como uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos. Cuestionaban su trabajo por su falta de rigor y probablemente fue esta oposición la que retrasó la publicación del trabajo de Fourier, su texto clásico *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoría analítica del calor) no apareció hasta 1822. Este texto se convirtió desde entonces en la fuente para los métodos modernos de solución de problemas prácticos asociados con ecuaciones diferenciales parciales sujetas a condiciones de frontera dadas. Además del flujo de calor, esta clase de problema incluye vibraciones estructurales, propagación de ondas y difusión. La tarea de dar al trabajo de Fourier un mayor rigor matemático fue emprendida más tarde por Dirichlet (1830) y subsecuentemente por Riemann, su sucesor en la Universidad de Göttingen.

Además de su uso en la solución de problemas con valores en la frontera asociados con ecuaciones diferenciales parciales, el análisis de las series de Fourier es central en muchas otras aplicaciones en ingeniería. En el capítulo 2 se vio cómo determinar fácilmente la respuesta de frecuencia de un sistema dinámico modelado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y el papel que juega tanto en el análisis del sistema como en su diseño. En tales casos la respuesta de frecuencia que es la respuesta en estado estacionario de una señal de entrada senoidal  $A \operatorname{sen} \omega t$  también es una senoide que tiene la misma frecuencia que la señal de entrada. Con

se mencionó en la sección 2.5.6, las funciones periódicas, que no son senoidales puras, aparecen con frecuencia en las señales de entrada de las aplicaciones en ingeniería, en particular en ingeniería eléctrica, ya que muchas fuentes eléctricas de importancia práctica, como son los rectificadores electrónicos, generan ondas periódicas no senoidales. Las series de Fourier proporcionan la herramienta ideal para analizar la respuesta en estado estacionario para tales señales periódicas de entrada, ya que nos permiten representar las señales como sumas infinitas de senoides. Entonces la respuesta en estado estacionario debida a cada senoide puede ser determinada como en la sección 2.7 y, debido al carácter lineal del sistema, la respuesta en estado estacionario deseada puede determinarse como la suma de respuestas individuales. Como la expansión en serie de Fourier consistirá de senoides con frecuencias  $n\omega$  que son múltiplos de la frecuencia  $\omega$  de la señal de entrada, la respuesta en estado estacionario también tendrá componentes con tales frecuencias. Si alguna de las múltiples frecuencias  $n\omega$  está cerca en valor a la frecuencia natural osculatoria del sistema, entonces resonará con el sistema y la componente con esa frecuencia dominará la respuesta en estado estacionario. Una distinción significativa de interés práctico entre una señal de entrada periódica no senoidal y una senoidal es que a pesar de que la señal puede tener una frecuencia considerablemente más baja que la frecuencia natural del sistema, pueden presentarse problemas serios debido a la resonancia. El análisis de las series de Fourier ayuda a identificar tal posibilidad.

En el capítulo 5 ilustraremos cómo el análisis de las series de Fourier puede extenderse a funciones no periódicas mediante el uso de las transformadas de Fourier. Las versiones discretas de tales transformadas proporcionan uno de los métodos más avanzados para el análisis de señales discretas, y son ampliamente usadas en campos tales como la teoría de las comunicaciones y el procesamiento de imágenes y de voz.

## 4.2 Expansión en serie de Fourier

En esta sección desarrollamos la expansión en serie de Fourier de funciones periódicas y discutimos qué tan bien aproxima a las funciones. También indicamos cómo las propiedades de simetría de las funciones pueden ayudar a reducir la cantidad de manipulación matemática involucrada en la determinación de las series de Fourier.

### 4.2.1 Funciones periódicas

Una función  $f(t)$  se dice que es **periódica** si sus imágenes se repiten en intervalos regulares en su dominio. Así la gráfica de una función periódica puede dividirse en “tiras verticales” que son réplicas una de la otra, como se ilustra en la figura 4.1.

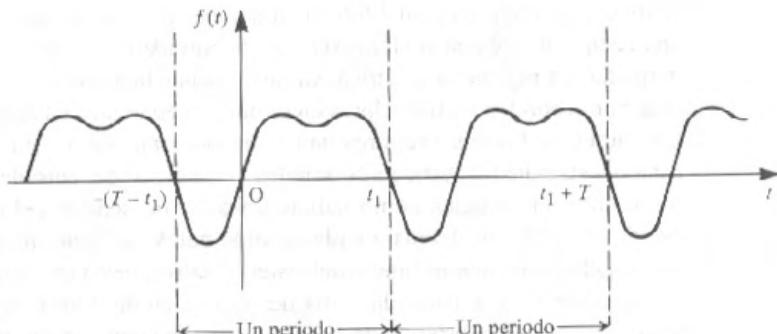


Figura 4.1 Una función periódica con periodo  $T$ .

El intervalo entre dos réplicas sucesivas se llama el **periodo** de la función. Por tanto, decimos que una función  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$  si, para todos los valores  $t$  de su dominio,

$$f(t + mT) = f(t)$$

para cualquier entero  $m$ .

Para dar una medida del número de repeticiones por unidad de  $t$ , definimos la **frecuencia** de una función periódica como el recíproco de su periodo, así que

$$\text{frecuencia} = \frac{1}{\text{periodo}} = \frac{1}{T}$$

El término **frecuencia circular** también se usa en ingeniería y está definido por

$$\text{frecuencia circular} = 2\pi \times \text{frecuencia} = \frac{2\pi}{T}$$

y se mide en radianes por segundo. Es común eliminar el término 'circular' y referirse a ella simplemente como la frecuencia cuando el contexto es claro.

#### 4.2.2 Teorema de Fourier

Este teorema afirma que una función periódica que satisface ciertas condiciones puede expresarse como la suma de un número de funciones seno de diferentes amplitudes, fases y períodos. Esto es, si  $f(t)$  es una función periódica con periodo  $T$  entonces

$$f(t) = A_0 + A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) + A_2 \operatorname{sen}(2\omega t + \phi_2) + \dots + A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) + \dots \quad (4)$$

donde las  $A$  y las  $\phi$  son constantes y  $\omega = 2\pi/T$  es la frecuencia de  $f(t)$ . El término  $A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1)$  se llama la **primera armónica o modo fundamental** y tiene la misma frecuencia  $\omega$  que la función padre  $f(t)$ . El término  $A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)$  se llama la  **$n$ -ésima armónica** y tiene frecuencia  $n\omega$  que es  $n$  veces la del modo fundamental.  $A_n$  denota la **amplitud** de la  $n$ -ésima armónica y  $\phi_n$  es su **ángulo fase** que mide el retraso o adelanto de la  $n$ -ésima armónica con referencia a una onda de seno pura de la misma frecuencia.

Como

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) &\equiv (A_n \cos \phi_n) \operatorname{sen} n\omega t + (A_n \operatorname{sen} \phi_n) \cos n\omega t \\ &\equiv b_n \operatorname{sen} n\omega t + a_n \cos n\omega t \end{aligned}$$

donde

$$b_n = A_n \cos \phi_n, \quad a_n = A_n \operatorname{sen} \phi_n \quad (4.2)$$

la expansión (4.1) puede escribirse como

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t \quad \text{Ingeniería} \quad (4.3)$$

donde  $a_0 = 2A_0$  (veremos más tarde que es más conveniente llamar  $\frac{1}{2}a_0$  al primer término en lugar de  $a_0$  ya que nos permite hacer que  $a_0$  se ajuste a un resultado general). La expansión (4.3) se llama la **expansión en serie de Fourier** de la función  $f(t)$ , y las  $a$  y  $b$  se llaman los **coeficientes de Fourier**. En ingeniería eléctrica es una práctica común referirse a  $a_n$  y  $b_n$  respectivamente como las **componentes en fase** y en **cuadratura de fase** de la  $n$ -ésima armónica, esta terminología surge del uso de la notación fasorial  $e^{jn\omega t} = \cos n\omega t + j \operatorname{sen} n\omega t$ . Es claro que (4.1) es una representación alternativa de la serie de Fourier con la amplitud y la fase de la  $n$ -ésima armónica determinadas a partir de (4.2) como

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

teniendo cuidado sobre la elección del cuadrante.

#### 4.2.3 Los coeficientes de Fourier

Antes de proceder a evaluar los coeficientes de Fourier, enunciamos las siguientes integrales, en las cuales  $T = 2\pi/\omega$ :

$$\int_d^{d+T} \cos n\omega t dt = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ T & (n = 0) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\int_d^{d+T} \sin n\omega t dt = 0 \quad (\text{toda } n) \quad (4.5)$$

$$\int_d^{d+T} \sin m\omega t \sin n\omega t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}T & (m = n \neq 0) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\int_d^{d+T} \cos m\omega t \cos n\omega t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}T & (m = n \neq 0) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\int_d^{d+T} \cos m\omega t \sin n\omega t dt = 0 \quad (\text{toda } m \text{ y } n) \quad (4.8)$$

Los resultados (4.4)–(4.8) constituyen las **relaciones de ortogonalidad** para las funciones seno y coseno y prueban que el conjunto de funciones

$$\{1, \cos \omega t, \cos 2\omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin \omega t, \sin 2\omega t, \dots, \sin n\omega t\}$$

es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo  $d \leq t \leq d + T$ . La elección de  $d$  es arbitraria en estos resultados y sólo es necesario integrar sobre un periodo de duración  $T$ .

Al integrar la serie (4.3) con respecto a  $t$  sobre el periodo  $t = d$  a  $t = d + T$ , y usando (4.4) y (4.5), encontramos que cada término del lado derecho es cero excepto el término que involucra a  $a_0$ ; esto es, tenemos

$$\begin{aligned} \int_d^{d+T} f(t) dt &= \frac{1}{2}a_0 \int_d^{d+T} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_d^{d+T} \cos n\omega t dt + b_n \int_d^{d+T} \sin n\omega t dt \right) \\ &= \frac{1}{2}a_0(T) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(0) + b_n(0)] \\ &= \frac{1}{2}Ta_0 \end{aligned}$$

Así

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) dt$$

y podemos ver que el término constante  $\frac{1}{2}a_0$  en la expansión en serie de Fourier representa el valor promedio de la función  $f(t)$  sobre un periodo. Para una señal eléctrica, representa el nivel de referencia o la componente de CD (corriente directa). Así

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) dt \quad (4.9)$$

Para obtener este resultado, hemos supuesto que es posible integrar término a término de la serie (4.3). Esto es así debido a las propiedades de convergencia de la serie, su validez es discutida con detalle en textos más avanzados.

Para obtener el coeficiente de Fourier  $a_n$  ( $n \neq 0$ ), multiplicamos (4.3) término a término por  $\cos m\omega t$  e integramos con respecto a  $t$  sobre el periodo  $t = d$  a  $t = d + T$  obteniendo

$$\int_d^{d+T} f(t) \cos m\omega t dt = \frac{1}{2}a_0 \int_d^{d+T} \cos m\omega t dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_d^{d+T} \cos n\omega t \cos m\omega t dt \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_d^{d+T} \cos m\omega t \sin n\omega t dt$$

Suponiendo que se puede integrar término a término y usando (4.4), (4.7) y (4.8) encontramos que cuando  $m \neq 0$  la única integral distinta de cero del lado derecho es la que aparece en la primera sumatoria cuando  $n = m$ . Esto es, tenemos

$$\int_d^{d+T} f(t) \cos m\omega t dt = a_m \int_d^{d+T} \cos m\omega t \cos m\omega t dt = \frac{1}{2}a_m T$$

obteniendo

$$a_m = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos m\omega t dt$$

que, reemplazando  $m$  por  $n$ , da

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos n\omega t dt \quad (4.10)$$

El valor de  $a_0$  dado en (4.9) puede obtenerse tomando  $n = 0$  en (4.10), de manera que podemos escribir

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos m\omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.11)$$

Esto explica por qué el término constante en la expansión en serie de Fourier se toma como  $\frac{1}{2}a_0$  y no como  $a_0$ , ya que esto garantiza la compatibilidad de los resultados (4.9) y (4.10). Aunque  $a_0$  y  $a_n$  satisfacen la misma fórmula, es más seguro calcularlas por separado.

Finalmente, para obtener el coeficiente de Fourier  $b_n$ , multiplicamos todo (4.3) por  $\sin m\omega t$  e integramos con respecto a  $t$  sobre el periodo  $t = d$  a  $t = d + T$ , obteniendo

$$\int_d^{d+T} f(t) \sin m\omega t dt = \frac{1}{2}a_0 \int_d^{d+T} \sin m\omega t dt \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_d^{d+T} \sin m\omega t \cos n\omega t dt + b_n \int_d^{d+T} \sin m\omega t \sin n\omega t dt \right)$$

Suponiendo que se puede integrar término a término y usando (4.5), (4.6) y (4.8) encontramos que la única integral distinta de cero del lado derecho es la que aparece en la segunda sumatoria cuando  $m = n$ . Esto es, tenemos

$$\int_d^{d+T} f(t) \sin m\omega t dt = b_m \int_d^{d+T} \sin m\omega t \sin m\omega t dt = \frac{1}{2}b_m T$$

reemplazando  $m$  por  $n$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.12)$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) que dan los coeficientes de Fourier se conocen como las **fórmulas de Euler**.

## Resumen

En resumen, hemos probado que si una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T = 2\pi/\omega$  puede expresarse como una serie de Fourier entonces esa serie está dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t \quad (4.3)$$

donde los coeficientes están dados por las fórmulas de Euler

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.11)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.12)$$

Los límites de integración en las fórmulas de Euler pueden ser especificados sobre cualquier periodo, de manera que la elección de  $d$  sea arbitraria y puede ser hecha de tal manera que puede ayudar en el cálculo de  $a_n$  y  $b_n$ . En la práctica es común especificar  $f(t)$  sobre cualquiera de los periodos  $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$  o  $0 < t < T$ , llevando a los límites de integración  $-\frac{1}{2}T$  y  $\frac{1}{2}T$  (esto es,  $d = -\frac{1}{2}T$ ) o  $0$  y  $T$  (esto es,  $d = 0$ ), respectivamente.

También vale la pena observar que un método alternativo puede simplificar los cálculos de  $a_n$  y  $b_n$ . Usando la fórmula

$$e^{jn\omega t} = \cos n\omega t + j \operatorname{sen} n\omega t$$

tenemos

$$a_n + jb_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{jn\omega t} \, dt \quad (4.13)$$

Evaluando esta integral e igualando las partes real e imaginaria de cada lado se obtienen los valores de  $a_n$  y  $b_n$ . El método es particularmente útil cuando se requiere sólo la amplitud  $|a_n + jb_n|$  de la  $n$ -ésima armónica.

## 4.2.4

Funciones de periodo  $2\pi$ 

Si el periodo  $T$  de una función periódica  $f(t)$  es  $2\pi$  entonces  $\omega = 1$ , y la serie (4.3) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \quad (4.14)$$

con los coeficientes dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.15)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

Aunque en la práctica rara vez se encuentra una frecuencia unitaria, la consideración de este caso particular reduce la cantidad de manipulación matemática involucrada para la determinación de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ . Además, no hay pérdida de generalidad al considerar este caso, ya que si tenemos una función  $f(t)$  de periodo  $T$ , podemos escribir  $t_1 = 2\pi t/T$  de manera que

$$f(t) \equiv f\left(\frac{Tt_1}{2\pi}\right) \equiv F(t_1)$$

donde  $F(t_1)$  es una función de periodo  $2\pi$ . Esto es, con un simple cambio de variable una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$  puede ser transformada en una función periódica  $F(t_1)$  de periodo  $2\pi$ . Así, para desarrollar una comprensión inicial y discutir algunas de las propiedades de las series de Fourier, primero consideraremos funciones de periodo  $2\pi$ , volviendo en la sección 4.2.10 a funciones de periodo distinto de  $2\pi$ .

## EJEMPLO 4.1

Obtener la expansión en serie de Fourier de la función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  definida por

$$f(t) = t \quad (0 < t < 2\pi), \quad f(t) = f(t + 2\pi)$$

## Solución

En la figura 4.2 se muestra la gráfica de la función  $f(t)$  sobre el intervalo  $-4\pi < t < 4\pi$ . Como la función es periódica sólo necesitamos dibujar un periodo, el patrón se repetirá en otros períodos. Usando (4.15) para evaluar los coeficientes de Fourier  $a_0$  y  $a_n$  se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

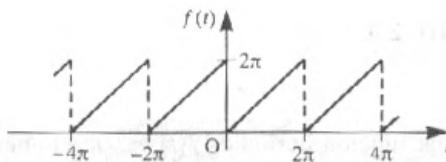


Figura 4.2 Onda diente de sierra del ejemplo 4.1

y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n = 1, 2, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos nt dt \end{aligned}$$

que, al integrar por parte, da

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ t \frac{\sin nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2\pi}{n} \sin 2n\pi + \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi - \frac{\cos 0}{n^2} \right) = 0$$

ya que  $\sin 2n\pi = 0$  y  $\cos 2n\pi = \cos 0 = 1$ . Observamos, en este caso, la necesidad de resolver  $a_0$  separadamente de  $a_n$ . La fórmula (4.16) para  $b_n$  da

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin nt dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{t}{n} \cos nt + \frac{\sin nt}{n^2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{2\pi}{n} \cos 2n\pi \right) \quad (\text{ya que } \sin 2n\pi = \sin 0 = 0) \\ &= -\frac{2}{n} \quad (\text{ya que } \cos 2n\pi = 1) \end{aligned}$$

Así que, de (4.14) la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (\sin nt)$$

o, en la forma expandida,

$$f(t) = \pi - 2 \left( \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots + \frac{\sin nt}{n} + \dots \right)$$

**EJEMPLO 4.2**

Una función periódica  $f(t)$  con periodo  $2\pi$  está definida por

$$f(t) = t^2 + t \quad (-\pi < t < \pi), \quad f(t) = f(t + 2\pi)$$

Dibuje una gráfica de la función  $f(t)$  para los valores de  $t$  desde  $t = -3\pi$  hasta  $t = 3\pi$  y obtenga la expansión en serie de Fourier de la función

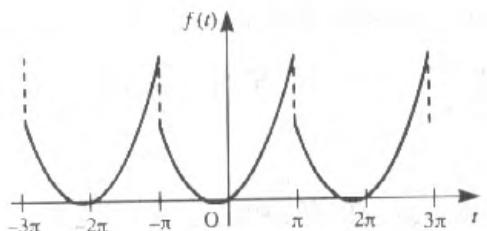


Figura 4.3 Gráfica de la función  $f(t)$  del ejemplo 4.2.

**Solución**

En la figura 4.3 se muestra una gráfica de la función  $f(t)$  para  $-3\pi < t < 3\pi$ . Por (4.15) tenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t) dt = \frac{2}{3}\pi^2$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t) \cos nt dt \end{aligned}$$

la cual, integrando por partes, da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{n} \operatorname{sen} nt + \frac{2t}{n^2} \cos nt - \frac{2}{n^3} \operatorname{sen} nt + \frac{t}{n} \operatorname{sen} nt + \frac{1}{n^2} \cos nt \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{4\pi}{n^2} \cos n\pi \quad \left( \text{ya que } \operatorname{sen} n\pi = 0 \text{ y } \left[ \frac{1}{n^2} \cos nt \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \right) \\ &= \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad (\text{ya que } \cos n\pi = (-1)^n) \end{aligned}$$

Por (4.16)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t) \operatorname{sen} nt dt \end{aligned}$$

la cual, integrando por partes, da

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{t^2}{n} \cos nt + \frac{2t}{n^2} \sin nt + \frac{2}{n^3} \cos nt - \frac{t}{n} \cos nt + \frac{1}{n^2} \sin nt \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = -\frac{2}{n} (-1)^n \quad (\text{ya que } \cos n\pi = (-1)^n) \end{aligned}$$

Así que, de (4.14) la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^n \sin nt$$

o, en la forma expandida,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \cos t + \frac{\cos 2t}{2^2} - \frac{\cos 3t}{3^2} + \dots \\ &\quad + 2 \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} \dots \end{aligned}$$

Para ilustrar el método alternativo, usando (4.13) se obtiene

$$\begin{aligned} a_n + jb_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{jnt} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t) e^{jnt} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{t^2 + t}{jn} e^{jnt} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2t + 1}{jn} e^{jnt} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2 + t}{jn} e^{jnt} - \frac{2t + 1}{(jn)^2} e^{jnt} + \frac{2}{(jn)^3} \right]_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

Como

$$e^{jnn\pi} = \cos n\pi + j \sin n\pi = (-1)^n$$

$$e^{-jnn\pi} = \cos n\pi - j \sin n\pi = (-1)^n$$

y

$$1/j = -j$$

$$\begin{aligned} a_n + jb_n &= \frac{(-1)^n}{\pi} - j \frac{\pi^2 + \pi}{n} + \frac{2\pi + 1}{n^2} + j \frac{2}{n^3} + j \frac{\pi^2 - \pi}{n} - \frac{1 - 2\pi}{n^2} - j \frac{2}{n^3} \\ &= (-1)^n \left( \frac{4}{n^2} - j \frac{2}{n} \right) \end{aligned}$$

Igualando las partes real e imaginaria se llega, como antes,

$$a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n, \quad b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

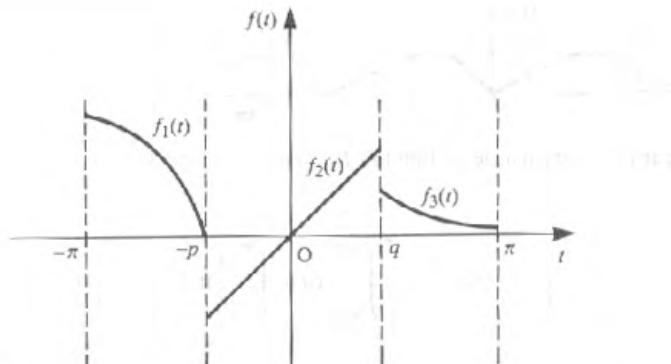


Figura 4.4 Función continua a pedazos sobre un periodo.

Una función periódica  $f(t)$  puede estar especificada a pedazos sobre un periodo o, inclusive, puede que sea continua a pedazos sobre un periodo como se ilustra en la figura 4.4. Para calcular los coeficientes de Fourier en tales casos, es necesario partir el rango de integración en las fórmulas de Euler para que correspondan a las distintas componentes de la función. Por ejemplo, para la función de la figura 4.4,  $f(t)$  está definida en el intervalo  $-\pi < t < \pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & (-\pi < t < -p) \\ f_2(t) & (-p < t < q) \\ f_3(t) & (q < t < \pi) \end{cases}$$

y es periódica con periodo  $2\pi$ . Las fórmulas de Euler (4.15) y (4.16) para los coeficientes de Fourier se convierten en

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-p} f_1(t) \cos nt dt + \int_{-p}^q f_2(t) \cos nt dt + \int_q^{\pi} f_3(t) \cos nt dt \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-p} f_1(t) \sin nt dt + \int_{-p}^q f_2(t) \sin nt dt + \int_q^{\pi} f_3(t) \sin nt dt \right]$$

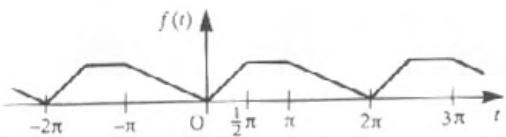
### EJEMPLO 4.3

Una función periódica  $f(t)$  con periodo  $2\pi$  está definida dentro del periodo  $0 \leq t \leq 2\pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi) \\ \frac{1}{2}\pi & (\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi) \\ \pi - \frac{1}{2}t & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de la función  $f(t)$  para  $-2\pi \leq t \leq 3\pi$  y encuentre la expansión en serie de Fourier de ella.

**Solución** En la figura 4.5 se muestra una gráfica de la función  $f(t)$  para  $-2\pi \leq t \leq 3\pi$ . Por (4.15)

Figura 4.5 Gráfica de la función  $f(t)$  del ejemplo 4.3.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} t dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\pi dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\pi - \frac{1}{2}t\right) dt \right] = \frac{5}{8}\pi$$

y

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} t \cos nt dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\pi \cos nt dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\pi - \frac{1}{2}t\right) \cos nt dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin nt + \frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^{\pi/2} + \left[ \frac{\pi}{2n} \sin nt \right]_{\pi/2}^{\pi} + \left[ \frac{2\pi - t}{2} \frac{\sin nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2} \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2n} \sin \frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2} \cos \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2} - \frac{\pi}{2n} \sin \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} \cos n\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2} (2 \cos \frac{1}{2}n\pi - 3 + \cos n\pi)$$

esto es,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi n^2} [(-1)^{n/2} - 1] & (\text{par } n) \\ -\frac{2}{\pi n^2} & (\text{impar } n) \end{cases}$$

Por (4.16),

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} t \sin nt dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\pi \sin nt dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\pi - \frac{1}{2}t\right) \sin nt dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{t}{n} \cos nt + \frac{1}{n^2} \sin nt \right]_0^{\pi/2} + \left[ -\frac{\pi}{2n} \cos nt \right]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$+ \left[ \frac{t - 2\pi}{2n} \cos nt - \frac{1}{2n^2} \sin nt \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{2n} \cos \frac{1}{2} n\pi + \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{2} n\pi - \frac{\pi}{2n} \cos n\pi + \frac{\pi}{2n} \cos \frac{1}{2} n\pi + \frac{\pi}{2n} \cos n\pi \\
 &= \frac{1}{\pi n^2} \sin \frac{1}{2} n\pi \\
 &= \begin{cases} 0 & (\text{par } n) \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n^2} & (\text{impar } n) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ahora por (4.14) la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$\begin{aligned}
 f(t) = & \frac{5}{16}\pi - \frac{2}{\pi} \left( \cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right) \\
 & - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 6t}{6^2} + \frac{\cos 10t}{10^2} + \dots \right) \\
 & + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin 3t}{3^2} - \frac{\sin 5t}{5^2} + \frac{\sin 7t}{7^2} - \dots \right)
 \end{aligned}$$

#### 4.2.5 Funciones pares e impares

Observar que una función particular posee ciertas propiedades de simetría nos permite tanto decir cuáles términos están ausentes en la expansión en serie de Fourier de la función como simplificar las expresiones que determinan los coeficientes restantes. En esta sección consideraremos las simetrías de las funciones pares e impares mientras que en la sección 4.2.6 consideraremos la simetría debida a las armónicas pares e impares.

Primero consideraremos las propiedades de las funciones pares o impares que son útiles para determinar los coeficientes de Fourier. Si  $f(t)$  es una función par entonces  $f(t) = f(-t)$  para todo  $t$ , y la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje vertical como se muestra en la figura 4.6(a). De la definición de integración se sigue que si  $f(t)$  es una función par entonces

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

Si  $f(t)$  es una función impar entonces  $f(t) = -f(-t)$  para todo  $t$ , y la gráfica de la función es simétrica con respecto al origen, esto es, hay una simetría de cuadrante opuesto, como se ilustra en la figura 4.6(b). Se sigue que si  $f(t)$  es una función impar entonces

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

Las siguientes propiedades de las funciones pares e impares son útiles para nuestros propósitos:

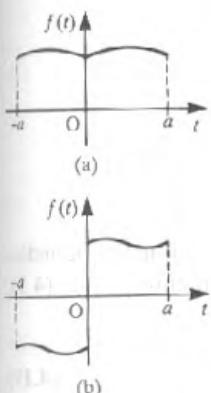


Figura 4.6 Gráfica de (a) una función par y (b) una función impar.

- (a) la *suma* de dos (o más) funciones *impares* es una función *impar*;
- (b) el *producto* de dos funciones *pares* es una función *par*;
- (c) el *producto* de dos funciones *impares* es una función *par*;
- (d) el *producto* de una función *impar* y una *par* es una función *impar*;
- (e) la *derivada* de una función *par* es una función *impar*;
- (f) la *derivada* de una función *impar* es una función *par*.

(Observe que  $t^{\text{par}}$  es par y  $t^{\text{impar}}$  es impar nos ayuda a recordar (a)–(f).)

Usando estas propiedades y haciendo  $d = -\frac{1}{2}T$  en (4.11) y (4.12) tenemos lo siguiente:

- (i) Si  $f(t)$  es una función periódica *par* de periodo  $T$  entonces

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt$$

usando la propiedad (b), y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt = 0,$$

usando la propiedad (d). Así la expansión en serie de Fourier de una función periódica par  $f(t)$  con periodo  $T$  consiste de términos con cosenos solamente y, por (4.3), está dada por

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \quad (4.17)$$

con

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.18)$$

- (ii) Si  $f(t)$  es una función periódica *impar* de periodo  $T$  entonces

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt = 0$$

usando la propiedad (d), y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

usando la propiedad (c). Así la expansión en serie de Fourier de una función periódica impar  $f(t)$  con periodo  $T$  consiste de términos con senos solamente y, por (4.3), está dada por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (4.19)$$

con

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.20)$$

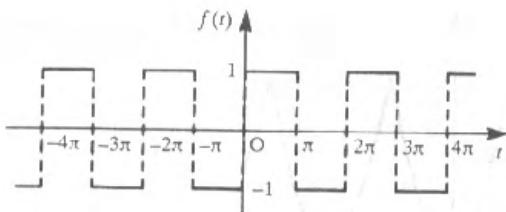


Figura 4.7 Onda cuadrada del ejemplo 4.4.

**EJEMPLO 4.4**

Una función periódica  $f(t)$  con periodo  $2\pi$  está definida dentro del periodo  $-\pi < t < \pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

Encuentre su expansión en serie de Fourier.

**Solución**

En la figura 4.7 se muestra la gráfica de la función  $f(t)$  sobre el intervalo  $-4\pi < t < 4\pi$ . Es claro que  $f(t)$  es una función impar de  $t$ , así que su expansión en la serie de Fourier consiste de los términos con seno solamente. Haciendo  $T = 2\pi$ , esto es  $\omega = 1$ , en (4.19) y (4.20) la expansión en serie de Fourier está dada por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

con

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \operatorname{sen} nt dt = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nt \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} 4/n\pi & (\text{impar } n) \\ 0 & (\text{par } n) \end{cases} \end{aligned}$$

Así la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

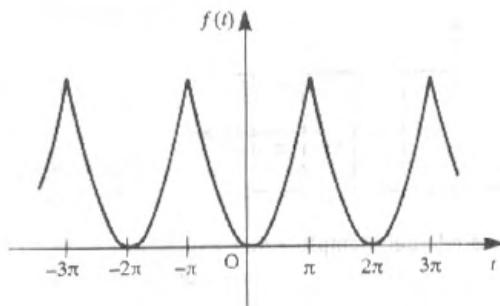
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen} t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5t + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1} \quad (4.21)$$

**EJEMPLO 4.5**

Una función periódica  $f(t)$  con periodo  $2\pi$  está definida como

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi < t < \pi), \quad f(t) = f(t + 2\pi)$$

Obtener la expansión en serie de Fourier de ella.

Figura 4.8 La función  $f(t)$  del ejemplo 4.5.

**Solución** En la figura 4.8 se muestra la gráfica de la función  $f(t)$  sobre el intervalo  $-3\pi \leq t \leq 3\pi$ . Es claro que  $f(t)$  es una función par de  $t$ , así que su expansión en serie de Fourier consiste de los términos con coseno solamente. Haciendo  $T = 2\pi$ , esto es  $\omega = 1$ , en (4.17) y (4.18) la expansión en serie de Fourier está dada por

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

con

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{2}{3} \pi^2$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{t^2}{n} \sin nt + \frac{2t}{n^2} \cos nt - \frac{2}{n^3} \sin nt \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

ya que  $\sin n\pi = 0$  y  $\cos n\pi = (-1)^n$ . Así la expansión en serie de Fourier de  $f(t) = t^2$  es

$$f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt \quad (4.22)$$

o, desarrollando los primeros términos,

$$f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 - 4 \cos t + \cos 2t - \frac{4}{9} \cos 3t + \dots$$

## 4.2.6 Armónicas pares e impares

En esta sección consideraremos los tipos de simetría que pueden ser identificados para eliminar los términos de la expansión en serie de Fourier que tengan valores pares de  $n$  (incluyendo  $n = 0$ ) o valores impares de  $n$ .

(a) Si  $f(t)$  es una función periódica tal que

$$f(t + \frac{1}{2}T) = f(t)$$

entonces tiene periodo  $T/2$  y frecuencia  $\omega = 2(2\pi/T)$  y sólo las armónicas pares están presentes en su expansión en serie de Fourier. Para  $n$  par tenemos

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad (4.23)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad (4.24)$$

En la figura 4.9(a) se da un ejemplo de una función de este tipo.

(b) Si una función periódica  $f(t)$  con periodo  $T$  es tal que

$$f(t + \frac{1}{2}T) = -f(t)$$

entonces sólo las armónicas impares están presentes en su expansión en serie de Fourier. Para  $n$  impar

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad (4.25)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad (4.26)$$

En la figura 4.9(a) se muestra un ejemplo de una función de este tipo.

La onda cuadrada del ejemplo 4.4 es tal que  $f(t + \pi) = -f(t)$ , así que, de (b), su expansión en serie de Fourier consiste solamente de las armónicas impares. Como también es una función impar se sigue que su expansión en serie de Fourier consiste solamente de términos armónicos impares en seno, lo cual es confirmado por el resultado (4.21).

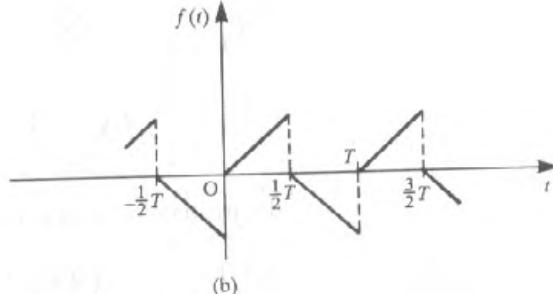
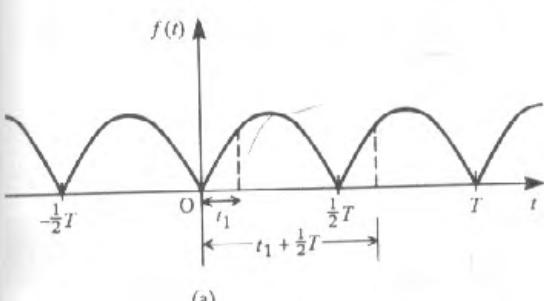
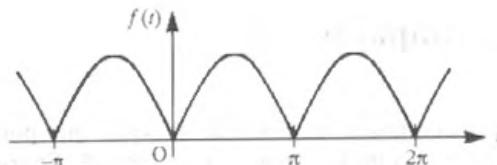


Figura 4.9 Funciones que tienen serie de Fourier con (a) sólo armónicas pares y (b) sólo armónicas impares.

Figura 4.10 Onda rectificada  $f(t) = |\sin t|$ .**EJEMPLO 4.6**

Obtener la expansión en serie de Fourier de la onda seno rectificada

$$f(t) = |\sin t|$$

**Solución**

En la figura 4.10 se muestra una gráfica de la onda sobre el intervalo  $-\pi < t < 2\pi$ . Es claro que  $f(t + \pi) = f(t)$  de manera que sólo las armónicas pares están presentes en la expansión en serie de Fourier. Como la función es también una función par de  $t$ , se sigue que la expansión en serie de Fourier consistirá sólo de los términos armónicos pares en coseno. Haciendo  $T = 2\pi$ , esto es  $\omega = 1$ , en (4.23) los coeficientes de las armónicas pares están dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \quad (\text{par } n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(n+1)t - \sin(n-1)t] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(n+1)t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \right]_0^\pi \end{aligned}$$

Como ambos  $n+1$  y  $n-1$  son impares cuando  $n$  es par,

$$\cos(n+1)\pi = \cos(n-1)\pi = -1$$

así que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) - \left( -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) \right] = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}$$

Así la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \cos nt \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nt \end{aligned}$$

o, desarrollando los primeros términos,

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 2t + \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t + \dots \right)$$

## 4.2.7 Propiedad de linealidad

La propiedad de linealidad aplicada a la serie de Fourier puede ser formulada mediante el siguiente teorema.

### TEOREMA 4.1

Si  $f(t) = lg(t) + mh(t)$ , donde  $g(t)$  y  $h(t)$  son funciones periódicas de periodo  $T$ ,  $l$  y  $m$  son constantes arbitrarias, entonces  $f(t)$  tiene expansión en serie de Fourier en donde los coeficientes son las sumas de los coeficientes de las expansiones de las series de Fourier de  $g(t)$  y  $h(t)$  multiplicados por  $l$  y  $m$  respectivamente.

#### Demostración

Es claro que  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$ . Si las expansiones de las series de Fourier de  $g(t)$  y  $h(t)$  son

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t$$

$$h(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} n\omega t$$

entonces, usando (4.11) y (4.12), los coeficientes de Fourier en la expansión de  $f(t)$  son

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} [lg(t) + mh(t)] \cos n\omega t \, dt \\ &= \frac{2l}{T} \int_d^{d+T} g(t) \cos n\omega t \, dt + \frac{2m}{T} \int_d^{d+T} h(t) \cos n\omega t \, dt \\ &= la_n + m\alpha_n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt = \frac{2l}{T} \int_d^{d+T} g(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt + \frac{2m}{T} \int_d^{d+T} h(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt \\ &= lb_n + m\beta_n \end{aligned}$$

confirmando que la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \frac{1}{2}(la_0 + m\alpha_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (la_n + m\alpha_n) \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} (lb_n + m\beta_n) \operatorname{sen} n\omega t$$

### EJEMPLO 4.7

Supongamos que  $g(t)$  y  $h(t)$  son funciones periódicas de periodo  $2\pi$  y están definidas dentro del periodo  $-\pi < t < \pi$  por

$$g(t) = t^2, \quad h(t) = t$$

Determine las expansiones en series de Fourier de ambas  $g(t)$  y  $h(t)$  y utilice la propiedad de linealidad para confirmar la expansión obtenida en el ejemplo 4.2 de la función periódica  $f(t)$  definida dentro del periodo  $-\pi < t < \pi$  por  $f(t) = t^2 + t$ .

**Solución** La serie de Fourier de  $g(t)$  está dada por (4.22) como

$$g(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$$

Reconociendo que  $h(t) = t$  es una función impar de  $t$  encontramos, haciendo  $T = 2\pi$  y  $\omega = 1$  en (4.19) y (4.20), que la expansión en serie de Fourier es

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(t) \operatorname{sen} nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} nt dt = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{t}{n} \cos nt + \frac{\operatorname{sen} nt}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} (-1)^n \end{aligned}$$

reconociendo nuevamente que  $\cos n\pi = (-1)^n$  y  $\operatorname{sen} n\pi = 0$ . Así que la expansión en serie de Fourier de  $h(t) = t$  es

$$h(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nt \quad (4.27)$$

Usando la propiedad de linealidad encontramos, combinando (4.12) y (4.27), que la expansión en serie de Fourier de  $f(t) = g(t) + h(t) = t^2 + t$  es

$$f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nt$$

lo cual confirma la serie obtenida en el ejemplo 4.2.

#### 4.2.8

#### Convergencia de las series de Fourier

Hasta aquí hemos concentrado nuestra atención en determinar la expansión en serie de Fourier correspondiente a una función periódica  $f(t)$  dada. En realidad, este es un ejercicio de integración, ya que sólo hay que calcular los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  usando las fórmulas de Euler (4.11) y (4.12) y después sustituir estos

valores en (4.3). No hemos considerado todavía la pregunta de si es o no la serie de Fourier así obtenida una representación válida de la función periódica  $f(t)$ . No se debe suponer que la existencia de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  por sí misma implica que la serie asociada converge a la función  $f(t)$ .

Una discusión completa de la convergencia de la serie de Fourier está más allá del alcance de este libro y nos limitaremos a simplemente establecer un conjunto de condiciones que nos aseguren que  $f(t)$  tiene una expansión en serie de Fourier convergente. Estas condiciones, conocidas como las **condiciones de Dirichlet**, pueden expresarse en la forma del teorema 4.2.

## TEOREMA 4.2

### Las condiciones de Dirichlet

Si  $f(t)$  es una función periódica acotada que en cualquier periodo tiene

- (a) un número finito de máximos y mínimos aislados, y
- (b) un número finito de puntos de discontinuidad finita

entonces la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  converge a  $f(t)$  en todos los puntos donde  $f(t)$  es continua y al promedio de los límites por la derecha y por la izquierda de  $f(t)$  en los puntos donde  $f(t)$  es discontinua (esto es, al promedio de la discontinuidad). □

## EJEMPLO 4.8

Dar las razones por las cuales las funciones

$$(a) \frac{1}{3-t} \quad (b) \sin\left(\frac{1}{t-2}\right)$$

no satisfacen las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $0 < t < 2\pi$ .

### Solución

- (a) La función  $f(t) = 1/(3-t)$  tiene una discontinuidad infinita en  $t = 3$ , que está dentro del intervalo, y por tanto no satisface la condición de que  $f(t)$  debe tener sólo discontinuidades *finitas* dentro de un periodo (c.d. está acotada).
- (b) La función  $f(t) = \sin[1/(t-2)]$  tiene un número infinito de máximos y mínimos en una vecindad de  $t = 2$ , que está dentro del intervalo, y por tanto no satisface el requisito de que  $f(t)$  debe tener sólo un número finito de máximos y mínimos aislados dentro de un periodo.

Las condiciones del teorema 4.2 son suficientes para asegurar que una expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  existe. Sin embargo, no son condiciones necesarias para la convergencia, y no se puede concluir que una representación en serie de Fourier no existe si no se satisfacen estas condiciones. De hecho, las condiciones necesarias en  $f(t)$  para la existencia de una serie de Fourier convergente no se conocen aún. En la práctica, esto no causa ningún problema, ya que para casi todas las aplicaciones prácticas concebibles las funciones que están involucradas satisfacen las condiciones del teorema 4.2 y, por tanto, tienen representación en serie de Fourier.

Otro punto importante en las aplicaciones prácticas es la razón de convergencia de una serie de Fourier, ya que esto es una indicación de cuántos términos de la

expansión deben considerarse para obtener una aproximación realista de la función  $f(t)$  que representa. Es obvio que esto está determinado por los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de la serie de Fourier y la manera en que estos decrecen conforme  $n$  crece.

En un ejemplo, como el 4.1, en el que la función  $f(t)$  es sólo continua a pedazos, con discontinuidades de salto, los coeficientes de Fourier decrecen conforme  $1/n$ , y puede ser necesario incluir un gran número de términos para obtener una aproximación adecuada de  $f(t)$ . En un ejemplo como el 4.3, en el que la función es una función continua pero tiene primeras derivadas discontinuas (debido a los picos), los coeficientes de Fourier decrecen como  $1/n^2$ , y así uno esperaría que la serie converja más rápidamente. Más aún, este argumento se aplica en general y lo podemos resumir de la siguiente manera:

- (a) Si  $f(t)$  es sólo continua a pedazos entonces los coeficientes en su representación en serie de Fourier decrecen conforme  $1/n$ ;
- (b) Si  $f(t)$  es continua en todos lados pero tiene primeras derivadas discontinuas entonces los coeficientes en su representación en serie de Fourier decrecen conforme  $1/n^2$ ;
- (c) Si  $f(t)$  y todas sus derivadas hasta de  $r$ -ésimo orden son continuas pero la  $(r+1)$ -ésima derivada es discontinua entonces los coeficientes de su representación en serie de Fourier decrecen como  $1/n^{r+2}$ .

Estas observaciones no son sorprendentes, ya que sólo nos dicen que conforme más suave es la función, más rápidamente converge su representación en serie de Fourier.

Para ilustrar algunos de estos temas relacionados con la convergencia volvemos al ejemplo 4.4, en el cual la serie de Fourier (4.21) fue obtenida como una representación de la onda cuadrada de la figura 4.7.

Como (4.21) es una serie infinita, es claro que no es posible dibujar la gráfica del resultado. Sin embargo, considerando sumas parciales finitas, es posible dibujar las gráficas de las aproximaciones de las series. Denotando con  $f_N(t)$  la suma de los  $N$  primeros términos de la serie infinita, esto es,

$$f_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \quad (4.28)$$

las gráficas de  $f_N(t)$  para  $N = 1, 2, 3$  y  $20$  son como se muestran en la figura 4.11. Se puede ver que en los puntos donde  $f(t)$  es continua la aproximación de  $f(t)$  por  $f_N(t)$  mejora conforme  $N$  crece, confirmando que la serie converge a  $f(t)$  en todos esos puntos. También se puede ver que en los puntos de discontinuidad de  $f(t)$  que son  $t = \pm n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), la serie converge al promedio de la discontinuidad, que en este ejemplo particular es  $\frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$ . Consecuentemente, el signo de igualdad en (4.21) debe ser interpretado con cuidado. A pesar de que tal uso puede ser aceptado, en el sentido de que la serie converge a  $f(t)$  para los valores de  $t$  donde  $f(t)$  es continua, esto no es así en los puntos de discontinuidad. Para superar este problema, se usa frecuentemente el símbolo  $\sim$  (se lee como "se comporta como" o "está representada por") en lugar del  $=$  en la representación en serie de Fourier de una función  $f(t)$ , así que (4.21) se escribe frecuentemente como

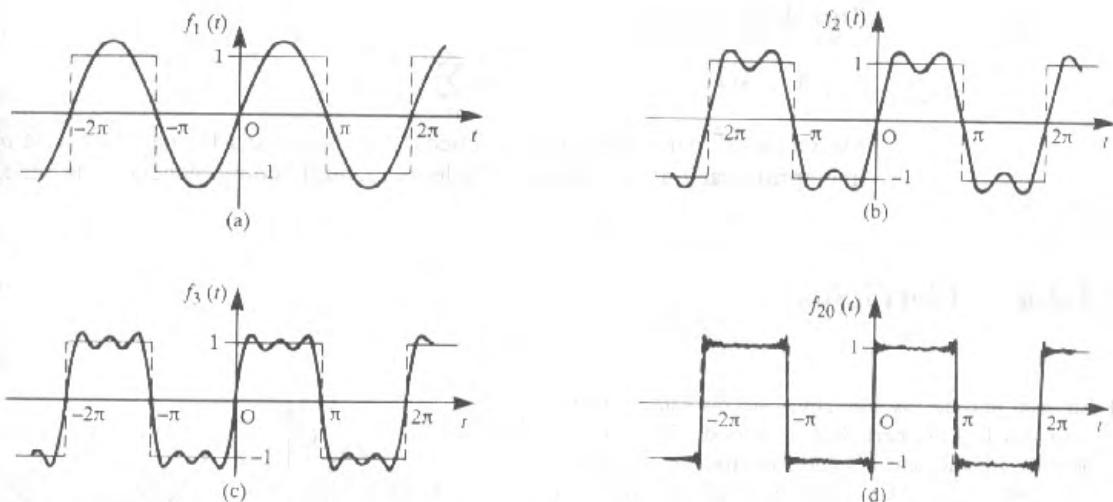


Figura 4.11 Trazos de  $f_N(t)$  para una onda cuadrada; (a)  $N = 1$ ; (b) 2; (c) 3; (d) 20.

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

En la sección 4.7.3 se prueba que la serie de Fourier converge a  $f(t)$  en el sentido de que la integral del cuadrado de la diferencia entre  $f(t)$  y  $f_N(t)$  es minimizada y tiende a cero conforme  $N \rightarrow \infty$ .

Observamos que la convergencia de la serie de Fourier es más lenta cerca de un punto de discontinuidad, tal como lo que sucede en  $t = 0$ . A pesar de que la serie converge al valor promedio de la discontinuidad (a saber, cero) en  $t = 0$ , hay, como se indica en la figura 4.11(d), un salto hacia abajo en  $t = 0-$  (esto es, justo a la izquierda de  $t = 0$ ) y un salto hacia arriba en  $t = 0+$  (esto es, justo a la derecha de  $t = 0$ ). Esta convergencia no suave de la serie de Fourier es debido al incidente de un salto hacia abajo y uno hacia arriba en los puntos de discontinuidad de  $f(t)$  es una característica de todas las series de Fourier que representan funciones discontinuas, no sólo de la onda cuadrada del ejemplo 4.4, y se conoce como el **fenómeno de Gibbs** debido al físico norteamericano J. W. Gibbs (1839–1903). La magnitud de los saltos hacia arriba/abajo no disminuye conforme  $N \rightarrow \infty$  en (4.28), sino que se vuelve más y más ‘puntiaguda’ tiendiendo a un pico. En general, la magnitud del salto hacia arriba y hacia abajo juntos es de alrededor del 18% de la magnitud de la discontinuidad (esto es, la diferencia en los valores de la función  $f(t)$  a la derecha y a la izquierda de la discontinuidad). Es importante reconocer la existencia de este fenómeno ya que en ciertas aplicaciones prácticas estos picos en las discontinuidades tienen que ser suprimidos usando factores suavizantes apropiados.

En teoría, podemos utilizar la serie (4.21) para obtener una aproximación de  $\pi$ . Esto se logra tomando  $t = \frac{1}{2}\pi$ , donde  $f(t) = 1$ ; entonces (4.21) da

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2}(2n-1)\pi}{2n-1}$$

llegando a

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Sin embargo, para propósitos prácticos, ésta no es una buena manera de obtener una aproximación de  $\pi$  debido a la lenta razón de convergencia de la serie.

### 4.2.9 Ejercicios

- 1 En cada uno de los siguientes incisos está especificada una función periódica de periodo  $2\pi$  sobre un periodo. En cada caso, dibuje la gráfica de la función para  $-4\pi \leq t \leq 4\pi$  y obtenga la representación en serie de Fourier de la función.

(a)  $f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < t < 0) \\ t & (0 < t < \pi) \end{cases}$

(b)  $f(t) = \begin{cases} t + \pi & (-\pi < t < 0) \\ 0 & (0 < t < \pi) \end{cases}$

(c)  $f(t) = 1 - \frac{t}{\pi} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

(d)  $f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t \leq -\frac{1}{2}\pi) \\ 2 \cos t & (-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi) \\ 0 & (\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi) \end{cases}$

(e)  $f(t) = \cos \frac{1}{2}t \quad (-\pi < t < \pi)$

(f)  $f(t) = |t| \quad (-\pi < t < \pi)$

(g)  $f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t \leq 0) \\ 2t - \pi & (0 < t \leq \pi) \end{cases}$

(h)  $f(t) = \begin{cases} -t + e^t & (-\pi \leq t < 0) \\ t + e^t & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$

- 2 Obtenga la expansión en serie de Fourier de la función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  definida sobre el periodo  $0 \leq t \leq 2\pi$  por

$$f(t) = (\pi - t)^2 \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Utilice la serie de Fourier para probar que

$$\frac{1}{12}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

- 3 En la figura 4.12 se muestra la carga  $q(t)$  sobre las placas de un capacitor en el tiempo  $t$ . Exprese  $q(t)$  como una expansión en serie de Fourier.

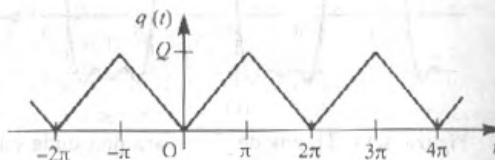


Figura 4.12 Trazo de la carga  $q(t)$  del ejercicio 3.

- 4 La respuesta recortada de un rectificador de media onda es la función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  definida sobre el periodo  $0 \leq t \leq 2\pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} 5 \sin t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Exprese  $f(t)$  como una expansión en serie de Fourier.

- 5 Pruebe que la serie de Fourier que representa la función periódica  $f(t)$  donde

$$f(t) = \begin{cases} \pi^2 & (-\pi < t < 0) \\ (t - \pi)^2 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

es

$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{n^2} \cos nt + \frac{(-1)^n}{n} \pi \operatorname{sen} nt \right] - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{(2n-1)^3}$$

Utilice este resultado para probar que

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2 \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2$$

- 6 Una función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  está definida dentro del dominio  $0 \leq t \leq \pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi) \\ \pi - t & (\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de  $f(t)$  para  $-2\pi < t < 4\pi$  en ambos casos donde

- (a)  $f(t)$  es una función par
- (b)  $f(t)$  es una función impar.

Encuentre la expansión en serie de Fourier que representa la función par para todo valor de  $t$ , y úsela para probar que

$$\frac{1}{8}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

- 7 Una función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  está definida dentro del periodo  $0 \leq t \leq 2\pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t/\pi & (0 \leq t \leq \pi) \\ t/\pi & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de la función para  $-4\pi \leq t \leq 4\pi$  y obtenga su expansión en serie de Fourier.

Reemplazando  $t$  por  $t - \frac{1}{2}\pi$  en la respuesta, pruebe que la función periódica  $f(t - \frac{1}{2}\pi) - \frac{3}{2}$  está representada por una serie de senos de armónicas impares.

## 4.2.10 Funciones de periodo $T$

Aún cuando todos los resultados han sido relacionados con funciones periódicas que tienen periodo  $T$ , todos los ejemplos que hemos considerado hasta aquí han involucrado funciones periódicas de periodo  $2\pi$ . Esto fue hecho principalmente para facilitar la manipulación en la determinación de los coeficientes de Fourier mientras se familiarizan con las series de Fourier. Como se mencionó en la sección 4.2.4, las funciones que tienen frecuencia unitaria (esto es, de periodo  $2\pi$ ) se encuentran raramente en la práctica, y en esta sección consideraremos ejemplos de funciones periódicas que tienen periodos distintos de  $2\pi$ .

### EJEMPLO 4.9

Una función periódica  $f(t)$  de periodo 4 (esto es,  $f(t+4) = f(t)$ ) está definida en el rango  $-2 < t < 2$  por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-2 < t < 0) \\ 1 & (0 < t < 2) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de  $f(t)$  para  $-6 \leq t \leq 6$  y obtenga la expansión en serie de Fourier de la función.

#### Solución

En la figura 4.13 se muestra la gráfica de  $f(t)$  para  $-6 \leq t \leq 6$ . Tomando  $T = 4$  en (4.11) y (4.12) tenemos

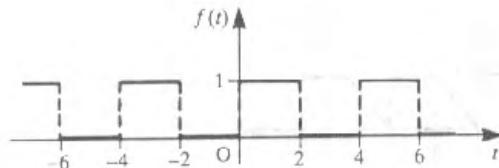


Figura 4.13 La función  $f(t)$  del ejemplo 4.9.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 0 dt + \int_0^2 1 dt \right) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \cos \frac{1}{2}n\pi t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 0 dt + \int_0^2 \cos \frac{1}{2}n\pi t dt \right) = 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \sin \frac{1}{2}n\pi t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dt + \int_0^2 \sin \frac{1}{2}n\pi t dt = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ 2/n\pi & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Así, por (4.10), la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin \frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}\pi t + \frac{1}{5} \sin \frac{5}{2}\pi t + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{1}{2}(2n-1)\pi t$$

### EJEMPLO 4.10

Una función periódica  $f(t)$  de periodo 2 está definida por

$$f(t) = \begin{cases} 3t & (0 < t < 1) \\ 3 & (1 < t < 2) \end{cases}$$

$$f(t+2) = f(t)$$

Dibuje la gráfica de  $f(t)$  para  $-4 \leq t \leq 4$  y determine la expansión en serie de Fourier de la función.

### Solución

En la figura 4.14 se muestra la gráfica de  $f(t)$  para  $-4 \leq t \leq 4$ . Tomando  $T = 2$  en (4.11) y (4.12) tenemos

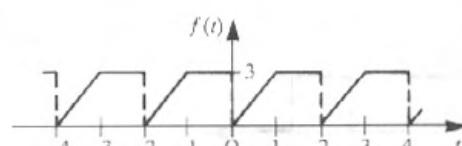


Figura 4.14 La función  $f(t)$  del ejemplo 4.10.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 3t dt + \int_1^2 3 dt = \frac{9}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \cos \frac{n\pi t}{1} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \int_0^1 3t \cos n\pi t dt + \int_1^2 3 \cos n\pi t dt$$

$$= \left[ \frac{3t \operatorname{sen} n\pi t}{n\pi} + \frac{3 \cos n\pi t}{(n\pi)^2} \right]_0^1 + \left[ \frac{3 \operatorname{sen} n\pi t}{n\pi} \right]_1^2$$

$$= \frac{3}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ -6/(n\pi)^2 & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

y

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{1} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \int_0^1 3t \operatorname{sen} n\pi t dt + \int_1^2 3 \operatorname{sen} n\pi t dt$$

$$= \left[ -\frac{3 \cos n\pi t}{n\pi} + \frac{3 \operatorname{sen} n\pi t}{(n\pi)^2} \right]_0^1 + \left[ -\frac{3 \cos n\pi t}{n\pi} \right]_1^2$$

$$= -\frac{3}{n\pi} \cos 2n\pi = -\frac{3}{n\pi}$$

Así, por (4.10), la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \frac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2} \left( \cos \pi t + \frac{1}{9} \cos 3\pi t + \frac{1}{25} \cos 5\pi t + \dots \right)$$

$$- \frac{3}{\pi} \left( \operatorname{sen} \pi t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\pi t + \dots \right)$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n}$$

### 4.2.11 Ejercicios

- 8 Encuentre la expansión en serie de Fourier de la función periódica

$$f(t) = t \quad (-l < t < l)$$

$$f(t + 2l) = f(t)$$

- 9 Una función periódica  $f(t)$  de periodo  $2l$  está definida sobre un período por

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{K}{l}(l+t) & (-l < t < 0) \\ \frac{K}{l}(l-t) & (0 < t < l) \end{cases}$$

Determine su expansión en serie de Fourier e ilustre gráficamente para  $-3l < t < 3l$ .

- 10 Una función periódica de periodo 10 está definida dentro del período  $-5 < t < 5$  por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-5 < t < 0) \\ 3 & (0 < t < 5) \end{cases}$$

Determine su expansión en serie de Fourier e ilustre gráficamente para  $-12 < t < 12$ .

- 11 Al pasar un voltaje senoidal  $A \operatorname{sen} \omega t$  a través de un rectificador de media onda produce una onda como la

que se indica en la figura 4.15. Determine la expansión en serie de Fourier de la onda rectificada.

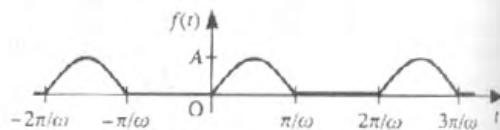


Figura 4.15 La onda rectificada del seno del ejercicio 11.

- 12 Obtenga la expansión en serie de Fourier de la función periódica

$$f(t) = t^2 \quad (-T < t < T)$$

$$f(t + 2T) = f(t)$$

e ilustre gráficamente para  $-3T < t < 3T$ .

- 13 Determine la serie de Fourier que representa el voltaje periódico  $e(t)$  mostrado en la figura 4.16.

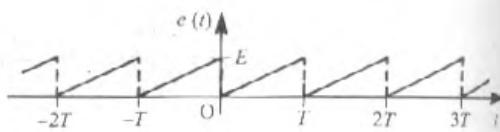


Figura 4.16 Voltaje  $e(t)$  del ejercicio 13.

## 4.3 Funciones definidas sobre un intervalo finito

Uno de los requerimientos del teorema de Fourier es que la función que se desea expandir debe ser periódica. Por tanto, una función  $f(t)$  que no es periódica no puede tener una representación en serie de Fourier que converja a ella para todo valor de  $t$ . Sin embargo, podemos obtener una expansión en serie de Fourier que represente a una función *no periódica*  $f(t)$  que esté definida sólo sobre un intervalo de tiempo finito  $0 \leq t \leq \tau$ . Esta es una destreza que se utiliza con cierta frecuencia para resolver problemas en la práctica, en particular problemas con valores en la frontera que involucran ecuaciones diferenciales parciales, tales como la consideración del flujo de calor a lo largo de una barra o la vibración de un resorte. Son posibles varias representaciones en serie de Fourier de  $f(t)$ , válidas sólo en el intervalo  $0 \leq t \leq \tau$ , incluyendo series que consistan sólo de términos con cosenos o series que consistan sólo de términos con senos. Para obtener estos, se formulan varias extensiones periódicas de  $f(t)$ .

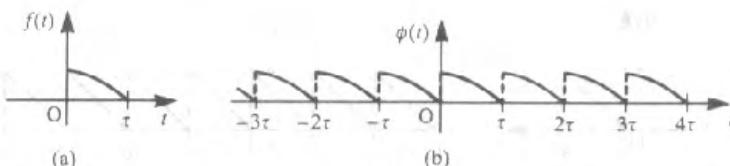


Figura 4.17 Gráficas de una función definida sólo sobre (a) un intervalo finito \$0 \leq t \leq \tau\$ y (b) una extensión periódica.

### 4.3.1 Series de recorrido completo

Supongamos que la función \$f(t)\$ dada está definida sólo en el intervalo finito de tiempo \$0 \leq t \leq \tau\$. Entonces para obtener una representación en serie de Fourier de recorrido completo de \$f(t)\$ (esto es, una serie que consiste en términos con coseno y con seno) definimos la **extensión periódica** \$\phi(t)\$ de \$f(t)\$ por

$$\phi(t) = f(t) \quad (0 < t < \tau)$$

$$\phi(t + \tau) = \phi(t)$$

En las figuras 4.17(a) y (b) se muestran las gráficas de una \$f(t)\$ posible y su extensión periódica \$\phi(t)\$ respectivamente.

Suponiendo que \$f(t)\$ satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo \$0 \leq t \leq \tau\$, la nueva función \$\phi(t)\$ de periodo \$\tau\$ tendrá una expansión en serie de Fourier convergente. Como dentro del período particular \$0 < t < \tau\$, \$\phi(t)\$ es idéntica a \$f(t)\$, se sigue que esta expansión en serie de Fourier de \$\phi(t)\$ será representativa de \$f(t)\$ dentro de ese intervalo.

#### EJEMPLO 4.11

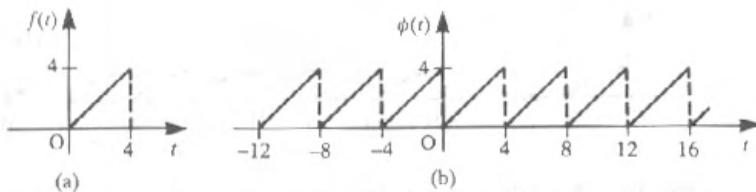
Encuentre la expansión en serie de Fourier de recorrido completo de \$f(t) = t\$ válida en el intervalo finito \$0 < t < 4\$. Dibuje las gráficas de \$f(t)\$ y de la función periódica representada por la serie de Fourier obtenida.

**Solución** Definimos la función periódica \$\phi(t)\$ por

$$\phi(t) = f(t) = t \quad (0 < t < 4)$$

$$\phi(t + 4) = \phi(t)$$

Entonces en las figuras 4.18(a) y (b) se muestran las gráficas de \$f(t)\$ y su extensión periódica \$\phi(t)\$ respectivamente. Como \$\phi(t)\$ es una función periódica de periodo 4, tiene una expansión en serie de Fourier convergente. Tomando \$T = 4\$ en (4.11) y (4.12), los coeficientes de Fourier están determinados como

Figura 4.18 Las funciones  $f(t)$  y  $\phi(t)$  del ejemplo 4.11.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 t dt = 4$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) \cos \frac{1}{2} n\pi t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 t \cos \frac{1}{2} n\pi t dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{2t}{n\pi} \sin \frac{1}{2} n\pi t + \frac{4}{(n\pi)^2} \cos \frac{1}{2} n\pi t \right]_0^4 = 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) \sin \frac{1}{2} n\pi t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 t \sin \frac{1}{2} n\pi t dt = \frac{1}{2} \left[ -\frac{2t}{n\pi} \cos \frac{1}{2} n\pi t + \frac{4}{(n\pi)^2} \sin \frac{1}{2} n\pi t \right]_0^4 = -\frac{4}{n\pi}$$

Así, por (4.10), la expansión en serie de Fourier de  $\phi(t)$  es

$$\phi(t) = 2 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{1}{2} \pi t + \frac{1}{2} \sin \pi t + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2} \pi t + \frac{1}{4} \sin 2\pi t + \frac{1}{5} \sin \frac{5}{2} \pi t + \dots$$

$$= 2 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{2} n\pi t$$

Como  $\phi(t) = f(t)$  para  $0 < t < 4$ , se sigue que esta serie de Fourier es representativa de  $f(t)$  dentro de este intervalo, así que

$$f(t) = t = 2 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{2} n\pi t \quad (0 < t < 4) \quad (4.29)$$

Es importante apreciar que esta serie converge para  $t$  sólo dentro del intervalo  $0 < t < 4$ . Para valores de  $t$  fuera del intervalo, converge a la función periódica extendida  $\phi(t)$ . De nuevo, la convergencia debe interpretarse en el sentido del teorema 4.2, así que en los puntos extremos  $t = 0$  y  $t = 4$  la serie no converge a  $t$ , pero sí el promedio de la discontinuidad en  $\phi(t)$ , a saber el valor 2.

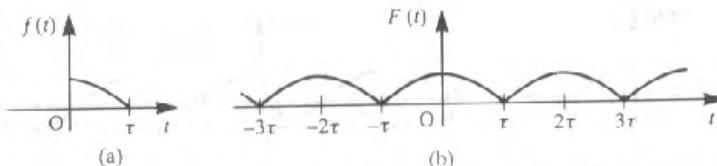


Figura 4.19 (a) Una función  $f(t)$ ; (b) su extensión periódica par  $F(t)$ .

### 4.3.2 Series del seno y del coseno de medio recorrido

En vez de desarrollar la extensión periódica  $\phi(t)$  de  $f(t)$  como en la sección 4.3.1, es posible formular extensiones periódicas que sean funciones pares o impares, de manera que la serie de Fourier resultante de las funciones periódicas extendidas consistan sólo de términos con senos o de términos con cosenos.

Para una función  $f(t)$  definida sólo sobre un intervalo finito  $0 \leq t \leq \tau$  su **extensión periódica par**  $F(t)$  es la función periódica par definida por

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & (0 < t < \tau) \\ f(-t) & (-\tau < t < 0) \end{cases}$$

$$F(t + 2\tau) = f(t)$$

Como una ilustración, la extensión periódica par  $F(t)$  de la función  $f(t)$  mostrada en la figura 4.17(a) (que se volvió a dibujar en la figura 4.19a) se muestra en la figura 4.19(b).

Suponiendo que  $f(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $0 < t < \tau$ , como es una función par de periodo  $2\tau$ , se sigue de la sección 4.2.5 que la extensión periódica par  $F(t)$  tendrá una representación convergente en serie de Fourier que consiste sólo de términos coseno y dada por

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{\tau} \quad (4.30)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos \frac{n\pi t}{\tau} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.31)$$

Como, dentro del intervalo particular  $0 < t < \tau$ ,  $F(t)$  es idéntica a  $f(t)$ , se sigue que la serie (4.30) también converge a  $f(t)$  dentro de este intervalo.

Para una función  $f(t)$  definida sólo sobre el intervalo finito  $0 \leq t \leq \tau$ , su **extensión periódica impar**  $G(t)$  es la función periódica impar definida por

$$G(t) = \begin{cases} f(t) & (0 < t < \tau) \\ -f(-t) & (-\tau < t < 0) \end{cases}$$

$$G(t + 2\tau) = G(t)$$

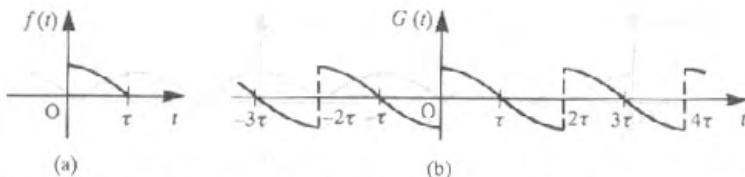


Figura 4.20 (a) Una función  $f(t)$ ; (b) su extensión periódica impar  $G(t)$ .

De nuevo, como una ilustración, la extensión periódica impar  $G(t)$  de la función  $f(t)$  mostrada en la figura 4.17(a) (que se volvió a dibujar en la figura 4.20a) se muestra en la figura 4.20(b).

Suponiendo que  $f(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $0 < t < \tau$ , como es una función impar de periodo  $2\tau$ , se sigue de la sección 4.2.5 que la extensión periódica impar  $G(t)$  tendrá una representación convergente en serie de Fourier que consiste sólo de términos seno y dada por

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{\tau} \quad (4.32)$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{\tau} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.33)$$

De nuevo, como dentro del intervalo particular  $0 < t < \tau$ ,  $G(t)$  es idéntica a  $f(t)$ , se sigue que la serie (4.32) también converge a  $f(t)$  dentro de este intervalo.

Observamos que ambas extensiones periódicas  $F(t)$  y  $G(t)$  par e impar son de periodo  $2\tau$ , que es dos veces la longitud del intervalo sobre el cual está definida  $f(t)$ . Sin embargo, las series de Fourier resultantes (4.30) y (4.32) están basadas sólo en la función  $f(t)$ , y por esta razón son llamadas la **expansión en serie de Fourier de medio recorrido** de  $f(t)$ . En particular, la expansión par de medio recorrido  $F(t)$ , (4.30), es llamada la **expansión en serie de medio recorrido en cosenos** de  $f(t)$ , mientras que la expansión impar de medio recorrido  $G(t)$ , (4.32), es llamada la **expansión en serie de medio recorrido en senos** de  $f(t)$ .

### EJEMPLO 4.12

Para la función  $f(t) = t$  definida sólo en el intervalo  $0 < t < 4$ , y considerada en el ejemplo 4.11, obtener

- (a) una expansión en serie de medio recorrido en cosenos
- (b) una expansión en serie de medio recorrido en senos.

Dibuje las gráficas de  $f(t)$  y de las funciones periódicas representadas por las dos series obtenidas para  $-20 < t < 20$ .

**Solución** (a) *Serie de medio recorrido en cosenos.* Definimos la función periódica  $F(t)$  por

$$F(t) = \begin{cases} f(t) = t & (0 < t < 4) \\ f(-t) = -t & (-4 < t < 0) \end{cases}$$

$$F(t+8) = F(t)$$

Entonces, como  $F(t)$  es una función periódica par con periodo 8, tiene una expansión en serie de Fourier convergente dada por (4.30). Tomando  $\tau = 4$  en (4.31) tenemos

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 t dt = 4$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \cos \frac{1}{4} n\pi t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 t \cos \frac{1}{4} n\pi t dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{4t}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{4} n\pi t + \frac{16}{(n\pi)^2} \cos \frac{1}{4} n\pi t \right]_0^4$$

$$= \frac{8}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & (n \text{ par}) \\ -16/(n\pi)^2 & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

Entonces, por (4.30), la expansión en serie de Fourier de  $F(t)$  es

$$F(t) = 2 - \frac{16}{\pi^2} \left( \cos \frac{1}{4} \pi t + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3}{4} \pi t + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5}{4} \pi t + \dots \right)$$

o

$$F(t) = 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{1}{4} (2n-1)\pi t$$

Como  $F(t) = f(t)$  para  $0 < t < 4$ , se sigue que esta serie de Fourier es representativa de  $f(t)$  dentro de este intervalo. Así la expansión en serie de medio recorrido en cosenos de  $f(t)$  es

$$f(t) = t = 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{1}{4} (2n-1)\pi t \quad (0 < t < 4) \quad (4.34)$$

(b) *Serie de medio recorrido en senos.* Definimos la función periódica  $G(t)$  por

$$G(t) = \begin{cases} f(t) = t & (0 < t < 4) \\ -f(-t) = -t & (-4 < t < 0) \end{cases}$$

$$G(t+8) = G(t)$$

Entonces, como  $G(t)$  es una función periódica impar con periodo 8, tiene una expansión en serie de Fourier convergente dada por (4.32). Tomando  $\tau = 4$  en (4.33) tenemos

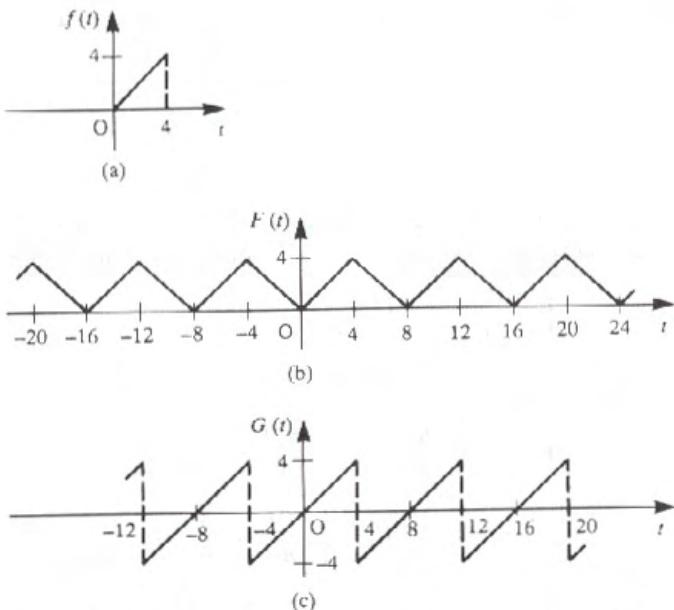


Figura 4.21 Las funciones  $f(t)$ ,  $F(t)$  y  $G(t)$  del ejemplo 4.12.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \sin \frac{1}{4} n\pi t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 t \sin \frac{1}{4} n\pi t dt = \frac{1}{2} \left[ -\frac{4t}{n\pi} \cos \frac{1}{4} n\pi t + \frac{16}{(n\pi)^2} \sin \frac{1}{4} n\pi t \right]_0^4 \\ &= -\frac{8}{n\pi} \cos n\pi = -\frac{8}{n\pi} (-1)^n \end{aligned}$$

Así, por (4.32), la expansión en serie de Fourier de  $G(t)$  es

$$G(t) = \frac{8}{\pi} \left( \sin \frac{1}{4} \pi t - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \pi t + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{4} \pi t - \dots \right)$$

O

$$G(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{1}{4} n\pi t$$

Como  $G(t) = f(t)$  para  $0 < t < 4$ , se sigue que esta serie de Fourier es representativa de  $f(t)$  dentro de este intervalo. Así la expansión en serie de medio recomido en senos de  $f(t)$  es

$$f(t) = t = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{1}{4} n\pi t \quad (0 < t < 4) \quad (4.35)$$

En las figuras 4.21(a), (b) y (c) se dan las gráficas de la función  $f(t)$  y de las expansiones periódicas par e impar  $F(t)$  y  $G(t)$  respectivamente.

Es importante darse cuenta de que las tres representaciones en serie de Fourier (4.29), (4.34) y (4.35) son representativas de la función  $f(t) = t$  sólo dentro del intervalo definido  $0 < t < 4$ . Fuera de este intervalo las tres series de Fourier convergen a tres funciones diferentes  $\phi(t)$ ,  $F(t)$  y  $G(t)$ , ilustradas en las figuras 4.18(b), 4.21(b) y 4.21(c) respectivamente.

### 4.3.3 Ejercicios

- 14 Pruebe que la expansión en serie de Fourier de medio recorrido en senos de  $f(t) = 1$ , válida para  $0 < t < \pi$ , es

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \quad (0 < t < \pi)$$

Dibuja las gráficas de  $f(t)$  y de la función periódica representada por la expansión en serie para  $-3\pi < t < 3\pi$ .

- 15 Determine la expansión en serie de Fourier de medio recorrido en senos de la función  $f(t) = 2t - 1$ , válida para  $0 < t < 1$ . Dibuja las gráficas de  $f(t)$  y de la función periódica representada por la expansión en serie para  $-2 < t < 2$ .

- 16 La función  $f(t) = 1 - t^2$  es representada por la expansión en serie de Fourier sobre el intervalo finito  $0 < t < 1$ . Obtenga una conveniente

- (a) expansión en serie de recorrido completo,
- (b) expansión en serie de medio recorrido en senos,
- (c) expansión en serie de medio recorrido en cosenos.

Dibuja las gráficas de  $f(t)$  y de las funciones periódicas representadas por cada una de las tres series para  $-4 < t < 4$ .

- 17 Una función  $f(t)$  está definida por

$$f(t) = \pi t - t^2 \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

y está representada por una serie de Fourier de medio recorrido en senos o por una serie de Fourier de medio recorrido en cosenos. Encuentre ambas series y dibuja las gráficas de las funciones representadas por ellas para  $-2\pi < t < 2\pi$ .

- 18 Una cuerda uniforme y flexible está firmemente estirada y tiene sus extremos fijos en los puntos  $x = 0$  y  $x = l$ . El punto medio de la cuerda está desplazado

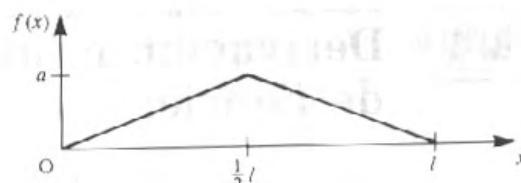


Figura 4.22 Cuerda desplazada del ejercicio 18.

a una distancia  $a$  como se muestra en la figura 4.22. Si  $f(x)$  denota el perfil de desplazamiento de la cuerda, exprese  $f(x)$  como una expansión en la serie de Fourier que solamente está formada por términos con senos.

- 19 Repita el ejercicio 18 para el caso donde el perfil de desplazamiento de la cuerda es como se muestra en la figura 4.23.

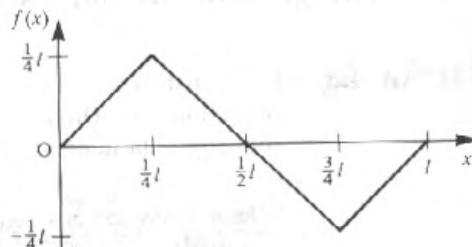


Figura 4.23 Cuerda desplazada del ejercicio 19.

- 20 Una función  $f(t)$  está definida sobre  $0 \leq t \leq \pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leq t < \frac{1}{2}\pi) \\ 0 & (\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

Encuentre la expansión en serie de Fourier de medio recorrido en senos en este intervalo. Dibuja una gráfica de la función representada por la serie para  $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ .

- 21 Una función  $f(t)$  está definida en el intervalo  $-l \leq x \leq l$  por

$$f(x) = \frac{A}{l}(|x| - l)$$

Obtenga la expansión en serie de Fourier de  $f(x)$  y dibuje una gráfica de la función representada por la serie para  $-3l \leq x \leq 3l$ .

- 22 La distribución de temperatura  $T(x)$  a una distancia  $x$ , medida desde un extremo, a lo largo de una barra de longitud  $L$  está dada por

$$T(x) = Kx(L - x) \quad (0 \leq x \leq L), \quad K = \text{constante}$$

Expresé  $T(x)$  como una expansión en la serie de Fourier que consista sólo de términos con senos.

- 23 Encuentre la expansión en serie de Fourier de la función  $f(t)$  válida para  $-1 < t < 1$ , donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (-1 < t < 0) \\ \cos \pi t & (0 < t < 1) \end{cases}$$

¿A qué valor converge esta serie cuando  $t = 1$ ?

## 4.4

# Derivación e integración de series de Fourier

Es inevitable que el deseo de obtener la derivada o la integral de una serie de Fourier surja en algunas aplicaciones. Como los efectos suavizantes del proceso de integración tienden a eliminar discontinuidades, mientras que el proceso de derivación tiene el efecto opuesto, no es sorprendente que sea más probable la posibilidad de integrar una serie de Fourier que realizar su derivación. Aquí no profundizaremos en la teoría; más bien expondremos dos teoremas, sin demostración, relacionados con la integración y derivación término a término de una serie de Fourier y hacemos algunas observaciones sobre sus usos.

### 4.4.1 Integración de series de Fourier

#### TEOREMA 4.3

Una expansión en serie de Fourier de una función periódica  $f(t)$  que satisface las condiciones de Dirichlet puede integrarse término a término, y la serie integrada converge a la integral de la función  $f(t)$ .  $\square$

De acuerdo con este teorema, si  $f(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $-\pi \leq t \leq \pi$  y tiene una expansión en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

entonces para  $-\pi \leq t_1 < t \leq \pi$

$$\int_{t_1}^t f(t) dt = \int_{t_1}^t \frac{1}{2}a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^t (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt$$

$$= \frac{1}{2}a_0(t - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{b_n}{n} (\cos nt_1 - \cos nt) + \frac{a_n}{n} (\sin nt - \sin nt_1) \right]$$

Debido a la presencia del término  $\frac{1}{2}a_0t$  en el lado derecho, ésta claramente no es una expansión en serie de Fourier de la integral del lado izquierdo. Sin embargo, el resultado puede reorganizarse para que sea una expansión en serie de Fourier de la función

$$g(t) = \int_{t_1}^t f(t) dt - \frac{1}{2}a_0t$$

El ejemplo 4.13 sirve para ilustrar este proceso. Observamos también que los coeficientes de Fourier en la nueva serie de Fourier son  $-b_n/n$  y  $a_n/n$ , así, de las observaciones hechas en la sección 4.2.8, la serie integrada converge más rápido que la serie original de  $f(t)$ . Si la función dada  $f(t)$  es continua a pedazos, en lugar de continua, sobre el intervalo  $-\pi \leq t \leq \pi$  entonces hay que tener cuidado de asegurar que el proceso de integración se lleve a cabo adecuadamente sobre los diversos subintervalos. De nuevo, el ejemplo 4.14 sirve para ilustrar este punto.

### EJEMPLO 4.13

Del ejemplo 4.5, la expansión en serie de Fourier de la función

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi \leq t \leq \pi), \quad f(t + 2\pi) = f(\pi)$$

es

$$t^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

Integrando este resultado entre los límites  $-\pi$  y  $t$  se obtiene

$$\int_{-\pi}^t t^2 dt = \int_{-\pi}^t \frac{1}{3}\pi^2 dt + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^t \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2} dt$$

esto es,

$$\frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\pi^2 t + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

Debido al término  $\frac{1}{3}\pi^2 t$  en el lado derecho, ésta claramente no es una expansión en serie de Fourier. Sin embargo, reorganizando tenemos

$$t^3 - \pi^2 t = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

y ahora el lado derecho puede tomarse como la expansión en serie de Fourier de la función

$$g(t) = t^3 - \pi^2 t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

$$g(t + 2\pi) = g(t)$$

**EJEMPLO 4.14**

Integrar término a término la expansión en serie de Fourier obtenida en el ejemplo 4.4 para la onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

ilustrada en la figura 4.7.

**Solución** Por (4.21) la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

Ahora necesitamos integrar entre los límites  $-\pi$  y  $t$  y debido a la discontinuidad de  $f(t)$ , en  $t = 0$ , debemos considerar por separado los valores de  $t$  en los intervalos  $-\pi < t < 0$  y  $0 \leq t \leq \pi$ .

*Caso (i), intervalo  $-\pi < t < 0$ .* Integrando (4.21) término a término tenemos

$$\int_{-\pi}^t (-1) dt = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^t \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)} dt$$

esto es,

$$\begin{aligned} -(t + \pi) &= -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} \right]_{-\pi}^t \\ &= -\frac{4}{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \right] \end{aligned}$$

Se puede probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2$$

(véase el ejercicio 6), así que la expresión anterior se simplifica a

$$-t = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} \quad (-\pi < t < 0) \quad (4.36)$$

*Caso (ii), intervalo  $0 < t < \pi$ .* Integrando (4.21) término a término tenemos

$$\int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^t 1 dt = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^t \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)} dt$$

obteniendo,

$$t = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} \quad (0 < t < \pi) \quad (4.37)$$

Tomando juntos (4.36) y (4.37) encontramos que la función

$$g(t) = |t| = \begin{cases} -t & (-\pi < t < 0) \\ t & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$g(t + 2\pi) = g(t)$$

tiene la expansión en serie de Fourier

$$g(t) = |t| = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

#### 4.4.2 Derivación de series de Fourier

##### TEOREMA 4.4

Si  $f(t)$  es una función periódica que satisface las condiciones de Dirichlet entonces su derivada  $f'(t)$ , siempre que exista, puede encontrarse por derivación término a término de la serie de Fourier de  $f(t)$  si y sólo si la función  $f(t)$  es continua en todas partes y la función  $f'(t)$  tiene expansión en serie de Fourier (esto es,  $f'(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet).  $\square$

Se sigue del teorema 4.4 que si la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es derivable término a término entonces  $f(t)$  debe ser periódica en los puntos extremos de un periodo (debido a la condición de que  $f(t)$  debe ser continua en todas partes). Así, por ejemplo, si estamos tratando con una función  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  y definida en un rango  $-\pi < t < \pi$  entonces debemos tener  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Para ilustrar este punto, consideraremos la expansión en serie de Fourier de la función

$$f(t) = t \quad (-\pi < t < \pi)$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

la cual, del ejemplo 4.7, está dada por

$$f(t) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \dots\right)$$

Al derivar término a término tenemos

$$f'(t) = 2(\cos t - \cos 2t + \cos 3t - \cos 4t + \dots)$$

Si este proceso de derivación es válido entonces  $f'(t)$  debe ser igual a la unidad para  $-\pi < t < \pi$ . Es claro que este no es el caso, ya que la serie del lado derecho no converge para ningún valor de  $t$ . Esto se sigue ya que el  $n$ -ésimo término de la serie es  $2(-1)^{n+1} \cos nt$  y no tiende a cero conforme  $n \rightarrow \infty$ .

Si  $f(t)$  es continua en todas partes y tiene una expansión en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

entonces por el teorema 4.4, si  $f'(t)$  satisface las condiciones requeridas, su expansión en serie de Fourier es

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

En este caso los coeficientes de Fourier de la expansión derivada son  $nb_n$  y  $na_n$ , así, en contraste con la serie integrada, la serie derivada convergerá más lentamente que la expansión en serie original para  $f(t)$ .

### EJEMPLO 4.15

Considere el proceso de derivación término a término de la expansión en serie de Fourier de la función

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi \leq t \leq \pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t)$$

**Solución** Del ejemplo 4.5, la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$t^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

Como  $f(t)$  es continua dentro y en los extremos del intervalo  $-\pi \leq t \leq \pi$ , podemos aplicar el teorema 4.4 para obtener

$$t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nt}{n} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

que coincide con la expansión en serie de Fourier obtenida de la función

$$f(t) = t \quad (-\pi < t < \pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t)$$

en el ejemplo 4.7.

#### 4.4.3

### Coeficientes en términos de las discontinuidades de salto

Para funciones periódicas que, dentro de un periodo, son polinomiales a pedazos y muestran discontinuidades de salto, los coeficientes de Fourier pueden ser determinados en términos de la magnitud de los saltos y aquellas magnitudes de las funciones derivadas. Este método es útil para determinar funciones descriptivas (véase la sección 4.8) para características no lineales en ingeniería de control, donde sólo es importante la componente fundamental de la serie de Fourier; esto se aplica particularmente en el caso de no linealidades multivaluadas.

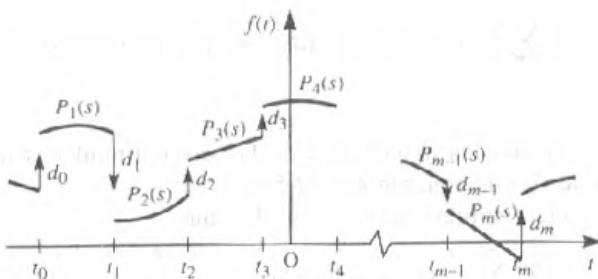


Figura 4.24 Función polinomial a pedazos periódica con discontinuidades de salto.

Consideremos una función periódica  $f(t)$ , de período  $T$ , que tiene dentro del intervalo  $-\frac{1}{2}T \leq t \leq \frac{1}{2}T$  un número finito ( $m + 1$ ) de discontinuidades de salto  $d_0, d_1, \dots, d_m$  en tiempos  $t_0, t_1, \dots, t_m$ , con  $t_0 = -\frac{1}{2}T$  y  $t_m = \frac{1}{2}T$ . Más aún, dentro del intervalo  $t_{s-1} < t < t_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ )  $f(t)$  está representada por funciones polinomiales  $P_s(t)$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ), como se ilustra en la figura 4.24. Si se desea desarrollar  $f(t)$  en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t$$

entonces de (4.11),

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{s=1}^m \int_{t_{s-1}}^{t_s} P_s(t) \cos n\omega t \, dt$$

Definiendo las magnitudes de las discontinuidades de salto como en la sección 2.5.11, a saber,

$$d_s = f(t_s + 0) - f(t_s - 0)$$

y observando que  $t_0 = -\frac{1}{2}T$  y  $t_m = \frac{1}{2}T$ , la integración por partes y la sumatoria dan

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \sum_{s=1}^m \left[ d_s \operatorname{sen} n\omega t_s + \int_{t_{s-1}}^{t_s} P_s^{(1)}(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt \right] \quad (4.38)$$

donde  $P_s^{(1)}(t)$  denota las componentes a pedazos de la derivada  $f^{(1)}(t) = f'(t)$  en el sentido generalizado de (2.59).

De una manera similar los términos integrales de (4.38) pueden expresarse como

$$\sum_{s=1}^m \int_{t_{s-1}}^{t_s} P_s^{(1)}(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt = \frac{1}{n\omega} \sum_{s=1}^m \left[ d_s^{(1)} \cos n\omega t_s + \int_{t_{s-1}}^{t_s} P_s^{(2)}(t) \cos n\omega t \, dt \right]$$

donde  $d_s^{(1)}$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) denota las magnitudes de las discontinuidades de salto en la derivada  $f^{(1)}(t)$ .

Continuando de esta forma, se pueden obtener las integrales que involucran derivadas superiores. Sin embargo, como todas las  $P_s(t)$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) son polinomios, se llega a un momento en que todas las integrales valen cero. Si el grado de  $P_s(t)$  es menor o igual que  $N$  para  $s = 1, 2, \dots, m$  entonces

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} (n\omega)^{-2r} [d_s^{(2r)} \operatorname{sen} n\omega t_s + (n\omega)^{-1} d_s^{(2r+1)} \cos n\omega t_s] \quad (n \neq 0) \quad (4.39)$$

donde  $d_s^{(r)}$  denota las magnitudes de las discontinuidades de salto en la  $r$ -ésima derivada de  $f(t)$  de acuerdo con (2.59).

De manera similar, se puede probar que

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^N (-1)^r (n\omega)^{-2r} [d_s^{(2r)} \cos n\omega t_s - (n\omega)^{-1} d_s^{(2r+1)} \operatorname{sen} n\omega t_s] \quad (4.40)$$

y el coeficiente  $a_0$  se encuentra por integración directa de la fórmula de Euler correspondiente

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (4.41)$$

### EJEMPLO 3.16

Usando (4.39)–(4.41) obtenga la expansión en la serie de Fourier de la función periódica  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & (-\pi < t < 0) \\ -2 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

#### Solución

En este caso  $N = 2$ , y en la figura 4.25 se muestran las gráficas de  $f(t)$  junto con las de sus dos primeras derivadas.

Las discontinuidades de salto ocurren en  $t = -\pi$ ,  $0$  y  $\pi$ , de donde  $m = 2$ . Los polinomios a pedazos involucrados y las discontinuidades de salto correspondientes son:

$$(a) P_1(t) = t^2, \quad P_2(t) = -2 \\ d_1 = -2, \quad d_2 = \pi^2 + 2$$

$$(b) P_1^{(1)}(t) = 2t, \quad P_2^{(1)}(t) = 0 \\ d_1^{(1)} = 0, \quad d_2^{(1)} = -2\pi$$

$$(c) P_1^{(2)}(t) = 2, \quad P_2^{(2)}(t) = 0 \\ d_1^{(2)} = -2, \quad d_2^{(2)} = 2$$

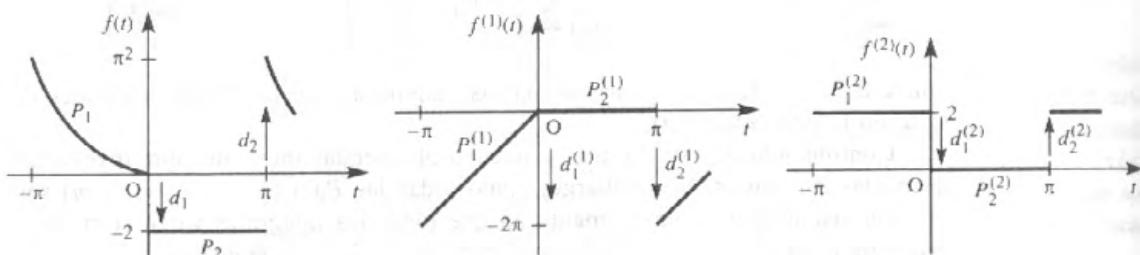


Figura 4.25  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $f''(t)$  del ejemplo 4.16.

con  $d_1^{(r)} = d_2^{(r)} = 0$  para  $r \geq 2$ .

Al hacer  $\omega = 1$  en (4.39) (ya que  $T = 2\pi$ ) se obtiene

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left( -\sum_{s=1}^2 d_s \sin nt_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^2 d_s^{(1)} \cos nt_s + \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^2 d_s^{(2)} \sin nt_s \right)$$

Como  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \pi$ ,  $\sin 0 = \sin n\pi = 0$ ,  $\cos 0 = 1$  y  $\cos n\pi = (-1)^n$ , tenemos

$$a_n = \frac{2}{n^2} (-1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Asimismo, de (4.40),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} \left( \sum_{s=1}^2 d_s \cos nt_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^2 d_s^{(1)} \sin nt_s - \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^2 d_s^{(2)} \cos nt_s \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ -2 + (\pi^2 + 2)(-1)^n - \frac{1}{n^2} [-2 + 2(-1)^n] \right\} \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \left( \frac{2}{n^2} - 2 \right) [1 - (-1)^n] + \pi^2 (-1)^n \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

y, de (4.41),

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 t^2 dt + \int_0^\pi (-2) dt \right] = \frac{1}{3}\pi^2 - 2$$

Así la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$\begin{aligned} f(t) &= \left( \frac{1}{6}\pi^2 - 1 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^n \cos nt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left\{ \left( \frac{2}{n^2} - 2 \right) [1 - (-1)^n] + \pi^2 (-1)^n \right\} \sin nt \end{aligned}$$

#### 4.4.4 Ejercicios

24 Pruebe que la función periódica

$$f(t) = t \quad (-T < t < T)$$

$$f(t + 2T) = f(t)$$

tiene la expansión en serie de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2T}{\pi} \left( \sin \frac{\pi t}{T} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{T} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi t}{T} + \dots \right) \end{aligned}$$

Integrando término a término esta serie, pruebe que la función periódica

$$g(t) = t^2 \quad (-T < t < T)$$

$$g(t + 2T) = g(t)$$

tiene la expansión en serie de Fourier

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{3}T^2 - \frac{4T^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi t}{T} - \frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi t}{T} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi t}{T} - \frac{1}{4^2} \cos \frac{4\pi t}{T} + \dots \right) \end{aligned}$$

(Sugerencia: se debe introducir una constante de integración; puede evaluarse como el valor medio sobre un periodo.)

### 25 La función periódica

$$h(t) = \pi^2 - t^2 \quad (-\pi < t < \pi)$$

$$h(t + 2\pi) = h(t)$$

tiene la expansión en serie de Fourier

$$h(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\left(\cos t - \frac{1}{2^2} \cos 2t + \frac{1}{3^2} \cos 3t \dots\right)$$

Al derivar término a término esta serie, corrobore la serie obtenida para  $f(t)$  en el ejercicio 24 para el caso en que  $T = \pi$ .

### 26 (a) Supongamos que la derivada $f'(t)$ de una función periódica $f(t)$ de periodo $2\pi$ tiene la expansión en serie de Fourier

$$f'(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nt$$

Pruebe que

$$A_0 = \frac{1}{\pi} [f(\pi_-) - f(-\pi_+)]$$

$$A_n = (-1)^n A_0 + nb_n$$

$$B_n = -na_n$$

donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier de la función  $f(t)$

(b) En el ejemplo 4.7 vimos que la función periódica

$$f(t) = t^2 + t \quad (-\pi < t < \pi)$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

tiene la expansión en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nt$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^n \sin nt$$

Derive término a término esta serie, y explique por qué no es una expansión en serie de Fourier de la función periódica

$$g(t) = 2t + 1 \quad (-\pi < t < \pi)$$

$$g(t + 2\pi) = g(t)$$

(c) Utilice los resultados de (a) para obtener la expansión en serie de Fourier de  $g(t)$  y confirmar la solución por evaluación directa de los coeficientes usando las fórmulas de Euler.

### 27 Usando (4.39)–(4.41) confirme las siguientes expansiones en serie de Fourier:

(a) (4.21) para la onda cuadrada del ejemplo 4.4;

(b) la expansión obtenida en el ejemplo 4.1 para la onda diente de sierra;

(c) la expansión obtenida de la función continua a pedazos  $f(t)$  del ejemplo 4.3.

### 28 Considere la función periódica

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t < -\frac{1}{2}\pi) \\ \pi + 2t & (-\frac{1}{2}\pi < t < 0) \\ \pi - 2t & (0 < t < \frac{1}{2}\pi) \\ 0 & (\frac{1}{2}\pi < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

(a) Dibuje la gráfica de la función para  $-4\pi < t < 4\pi$ .

(b) Utilice (4.39)–(4.41) para obtener la expansión en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{4}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \cos \frac{1}{2}n\pi - 1 \right) \cos nt$$

y escriba los primeros 10 términos de esta serie. (Nota: aún cuando la función  $f(t)$  no tiene discontinuidades de salto, se puede usar el método ya que la derivada tiene discontinuidades de salto.)

### 29 Utilice el método de la sección 4.4.3 para obtener las expansiones en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas:

$$(a) f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t < 0) \\ t^2 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} 2 & (-\pi < t < -\frac{1}{2}\pi) \\ t^2 & (-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi) \\ -2 & (\frac{1}{2}\pi < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} t & (0 < t < 1) \\ 1-t & (1 < t < 2) \end{cases}$$

$$f(t + 2) = f(t)$$

$$(d) f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + t & (-\frac{1}{2} < t < 0) \\ \frac{1}{2} - t & (0 < t < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$f(t + 1) = f(t)$$

## 4.5

# Aplicación a la ingeniería: respuesta a la frecuencia y sistemas oscilatorios

## 4.5.1

## Respuesta a una entrada periódica

En la sección 2.7 se verificó que la respuesta de frecuencia, definida como la respuesta en estado estacionario a una entrada senoidal  $A \operatorname{sen} \omega t$ , de un sistema lineal estable que tiene una función de transferencia  $G(s)$  está dada por (2.86) como

$$x_{\text{es}}(t) = A|G(j\omega)| \operatorname{sen} [\omega t + \arg G(j\omega)] \quad (4.42)$$

Empleando una expansión en serie de Fourier, podemos usar este resultado para determinar la respuesta en estado estacionario de un sistema lineal estable de una entrada periódica no senoidal. Para un sistema lineal estable que tiene una función de transferencia  $G(s)$ , sea la entrada una función  $P(t)$  periódica de periodo  $2T$  (esto es, una que tenga frecuencia  $\omega = \pi/T$  en rad s<sup>-1</sup>). Por (4.21),  $P(t)$  puede expresarse en la forma de una expansión en serie de Fourier

$$P(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) \quad (4.43)$$

donde  $A_n$  y  $\phi_n$  están definidos como en la sección 4.2.1. La respuesta en estado estacionario de cada término en la expansión en serie (4.43) puede obtenerse usando (4.42). Como el sistema es lineal, se cumple el principio de superposición, así que la respuesta en estado estacionario a la entrada periódica  $P(t)$  puede obtenerse como la suma de las respuestas en estado estacionario de las senoidales individuales incluidas en la suma en (4.43). Así la respuesta en estado estacionario a la entrada  $P(t)$  es

$$x_{\text{es}}(t) = \frac{1}{2}a_0 G(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |G(j\omega n)| \operatorname{sen}[n\omega t + \phi_n + \arg G(j\omega n)] \quad (4.44)$$

Hay dos aspectos relacionados con la respuesta en estado estacionario que son dignos de una observación.

- (a) Para sistemas prácticos  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$  conforme  $\omega \rightarrow \infty$ , así que en (4.44)  $|G(j\omega n)| \rightarrow 0$  conforme  $n \rightarrow \infty$ . Como consecuencia, la representación en serie de Fourier de la respuesta en estado estacionario  $x_{\text{es}}(t)$  converge más rápidamente que la representación en serie de Fourier de la entrada periódica  $P(t)$ . Desde un punto de vista práctico, esto no es sorprendente, ya que es consecuencia de la acción suavizante del sistema (esto es, como se indicó en la sección 4.4, la integración es una operación “suavizante”).
- (b) Hay una diferencia significativa entre la respuesta en estado estacionario (4.44) a una entrada periódica no senoidal de frecuencia  $\omega$  y la respuesta en estado estacionario (4.41) a una senoidal pura con la misma frecuencia. Como se indicó en (4.42), en el caso de una entrada senoidal de frecuencia  $\omega$  la respuesta en estado

estacionario también es una senoidal con la misma frecuencia  $\omega$ . Sin embargo, para una entrada periódica no senoidal  $P(t)$  de frecuencia  $\omega$  la respuesta en estado estacionario (4.44) ya no está en la misma frecuencia; más bien, consta de una suma infinita de senoides que tienen frecuencias  $n\omega$  que son múltiplos enteros de la frecuencia de entrada  $\omega$ . Esto tiene aplicaciones prácticas importantes, en particular cuando se consideran las respuestas de sistemas oscilatorios o vibratorios. Si en (4.44) la frecuencia  $n\omega$  de una de las armónicas está cerca de la frecuencia de oscilación natural de un sistema no amortiguado entonces surgirá el fenómeno de **resonancia**.

Para alguien que no está familiarizado con la teoría, puede parecer sorprendente que un sistema práctico pueda resonar a una frecuencia mucho mayor que la de la entrada. Como se indicó en el ejemplo 2.30, el fenómeno de resonancia es importante en la práctica y por tanto es importante que los ingenieros tengan algunos conocimientos de la teoría asociada con las series de Fourier, de manera que la posible dominancia de la respuesta de un sistema por una de las armónicas superiores en lugar de la fundamental pueda ser interpretada adecuadamente.

### EJEMPLO 4.17

El sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 4.26(a) está inicialmente en reposo en una posición de equilibrio. Determine la respuesta en estado estacionario del sistema cuando la masa está sometida a una fuerza periódica  $P(t)$  aplicada externamente que tiene la forma de la onda cuadrada mostrada en la figura 4.26(b)

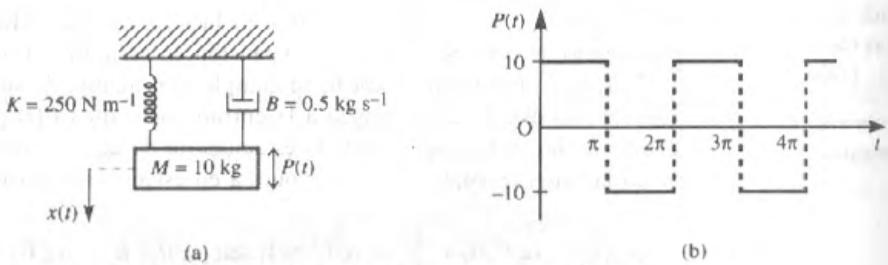


Figura 4.26 (a) Sistema y (b) entrada para el ejemplo 4.17.

**Solución** Por la ley de Newton, el desplazamiento  $x(t)$  de la masa en el tiempo  $t$  está dado por

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = P(t) \quad (4.45)$$

de manera que el sistema puede ser representado por el diagrama de bloque de la figura 4.27. Así la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (4.46)$$

Del ejemplo 4.4, la expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada  $P(t)$  es

$$P(t) = \frac{40}{\pi} \left[ \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots + \frac{\sin (2n-1)t}{2n-1} + \dots \right]$$

Figura 4.27 Diagrama de bloque para el sistema de la figura 4.26.

esto es,

$$P(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots + u_n(t) + \dots \quad (4.47)$$

donde

$$u_n(t) = \frac{40}{\pi} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \quad (4.48)$$

Sustituyendo los valores dados de  $M$ ,  $B$  y  $K$ , la función de transferencia (4.46) se convierte en

$$G(s) = \frac{1}{10s^2 + 0.5s + 250}$$

Así

$$G(j\omega) = \frac{1}{-10\omega^2 + 0.5j\omega + 250} = \frac{250 - 10\omega^2}{D} - j \frac{0.5\omega}{D}$$

donde  $D = (250 - 10\omega^2)^2 + 0.25\omega^2$ , de manera que

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{\left[ \frac{(250 - 10\omega^2)^2 + 0.25\omega^2}{D^2} \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(250 - 10\omega^2)^2 + 0.25\omega^2}} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\arg G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{0.5\omega}{250 - 10\omega^2}\right) \quad (4.50)$$

Usando (4.42), la respuesta en estado estacionario del sistema de la  $n$ -ésima armónica  $u_n(t)$  dada por (4.48) es

$$x_{cen}(t) = \frac{40}{\pi(2n-1)} |G(j(2n-1))| \sin[(2n-1)t + \arg G(j(2n-1))] \quad (4.51)$$

donde  $|G(j\omega)|$  y  $\arg G(j\omega)$  están dadas por (4.49) y (4.50) respectivamente. La respuesta en estado estacionario  $x_{ce}(t)$  del sistema a la entrada  $P(t)$  de onda cuadrada es determinada entonces como la suma de las respuestas en estado estacionario a las armónicas individuales en (4.47); esto es,

$$x_{ce}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{cen}(t) \quad (4.52)$$

donde  $x_{cen}(t)$  está dada por (4.51)

Evaluando los primeros términos de la respuesta (4.52) tenemos

$$\begin{aligned} x_{cen}(t) &= \frac{40}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(250 - 10)^2 + 0.25}} \sin\left[t - \tan^{-1}\left(\frac{0.5}{240}\right)\right] \\ &= 0.053 \sin(t - 0.003) \end{aligned}$$

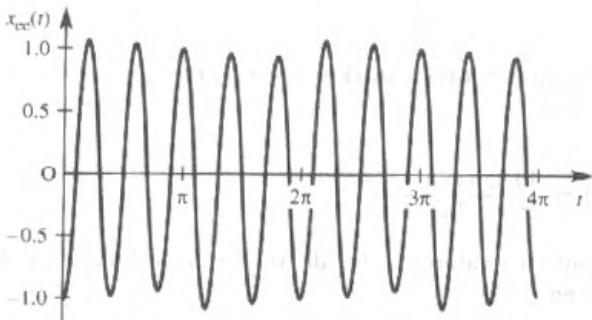


Figura 4.28 Respuesta en estado estacionario del sistema de la figura 4.26.

$$\begin{aligned}
 x_{ee2}(t) &= \frac{40}{3\pi} \frac{1}{\sqrt{(250-90)^2 + 2.25}} \sin \left[ 3t - \tan^{-1} \left( \frac{1.5}{160} \right) \right] \\
 &= 0.027 \sin (3t - 0.009) \\
 x_{ee3}(t) &= \frac{40}{5\pi} \frac{1}{\sqrt{6.25}} \sin \left[ 5t - \tan^{-1} \left( \frac{2.5}{0} \right) \right] \\
 &= 1.02 \sin (5t - \frac{1}{2}\pi) \\
 x_{ee4}(t) &= \frac{40}{7\pi} \frac{1}{\sqrt{(250-490)^2 + 12.25}} \sin \left[ 7t - \tan^{-1} \left( \frac{3.5}{-240} \right) \right] \\
 &= 0.0076 \sin (7t - 3.127)
 \end{aligned}$$

Así una buena aproximación de la respuesta en estado estacionario (4.52) es

$$x_{ee}(t) \approx 0.053 \sin (t - 0.003) + 0.027 \sin (3t - 0.54) + 1.02 \sin (5t - \frac{1}{2}\pi) + 0.0076 \sin (7t - 3.127) \quad (4.53)$$

En la figura 4.28 se muestra la gráfica del desplazamiento y se ve en ésta que la respuesta tiene una frecuencia de alrededor de cinco veces la de la entrada. Esto es porque el término  $1.02 \sin (5t - \frac{1}{2}\pi)$  domina en la respuesta (4.53); esto es una consecuencia del hecho de que la frecuencia natural de oscilación del sistema es  $\sqrt{K/M} = 5 \text{ rad s}^{-1}$ , así que está en resonancia con esta armónica particular.

En conclusión, debe observarse que no es esencial introducir las funciones de transferencia para resolver este problema. De manera alternativa, determinando la integral particular de la ecuación diferencial (4.45), la respuesta en estado estacionario a una entrada  $A \sin \omega t$  está determinada como

$$x_{ee}(t) = \frac{A \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{[(K - M\omega^2)^2 + B^2\omega^2]}}, \quad \tan \alpha = \frac{\omega B}{K - M\omega^2} \quad (4.46)$$

dando  $x_{ee}(t)$  como en (4.52). Entonces la solución procede como antes.

## 4.5.2 Ejercicios

- 30 Determine la corriente en estado estacionario en el circuito de la figura 4.29(a) como resultado de la aplicación del voltaje periódico mostrado en la figura 4.29(b).

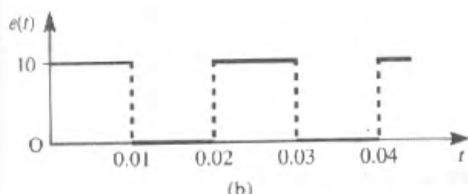
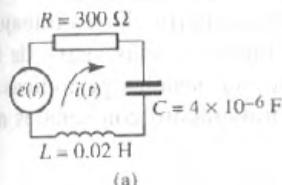


Figura 4.29 (a) Circuito del ejercicio 30; (b) voltaje aplicado.

- 31 Determine la respuesta en estado estacionario del sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 4.30(a) cuando la masa se somete a la fuerza periódica  $f(t)$  aplicada externamente mostrada en la figura 4.30(b).

¿Qué frecuencia domina la respuesta y por qué?

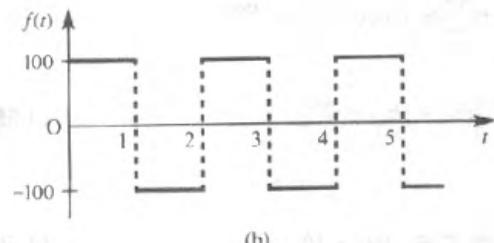
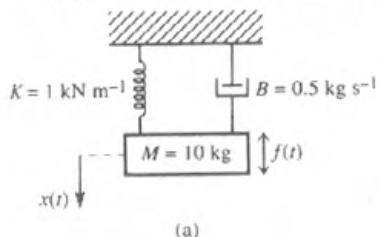


Figura 4.30 (a) Sistema masa-resorte-amortiguador del ejercicio 31; (b) fuerza aplicada.

- 32 Determine el movimiento en estado estacionario de la masa de la figura 4.31(a) cuando está sujeta a la fuerza aplicada externamente de la figura 4.31(b).

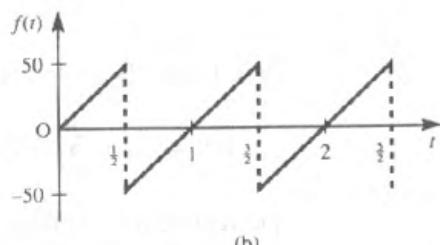
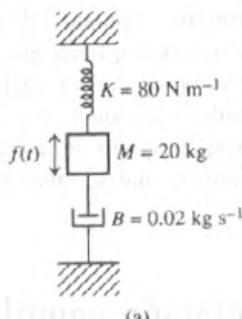


Figura 4.31 (a) Sistema masa-resorte-amortiguador del ejercicio 32; (b) fuerza aplicada.

- 33 Determine la corriente en estado estacionario en el circuito que se indica en la figura 4.32(a) cuando el voltaje aplicado es de la forma mostrada en la figura 4.32(b).

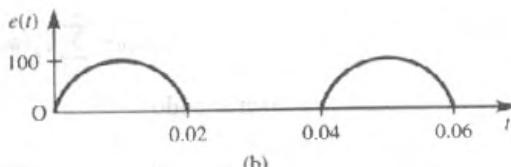
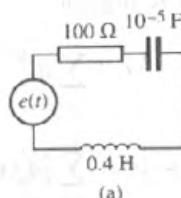


Figura 4.32 (a) Circuito del ejercicio 33; (b) voltaje aplicado.

## 4.6

## Forma compleja de la serie de Fourier

Una alternativa a la forma trigonométrica de la serie de Fourier considerada hasta aquí es la forma compleja o exponencial. Como resultado de las propiedades de la función exponencial, esta forma es matemáticamente fácil de manipular. En la práctica es ampliamente usada por los ingenieros, de manera particular en trabajos relacionados con el análisis de señales, y provee una transición más suave de la consideración de la serie de Fourier para el tratamiento con señales periódicas a la consideración de la transformada de Fourier para el tratamiento con señales no periódicas que se analizarán en el capítulo 5.

## 4.6.1

## Representación compleja

Para desarrollar la forma compleja de la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (4.54)$$

que representa una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$ , procedemos como sigue. Sustituyendo los resultados

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t})$$

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t})$$

en (4.54) se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_n(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{j}{2}b_n(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega t}] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Escribiendo

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (4.56)$$

(4.55) se convierte en

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}, \quad \text{ya que } c_0 e^0 = c_0 \end{aligned}$$

Así la serie de Fourier (4.54) se convierte simplemente en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad (4.57)$$

que se conoce como la **forma compleja o exponencial** de la expansión en serie de Fourier de la función  $f(t)$ .

Para poder aplicar este resultado directamente, es necesario obtener una fórmula para calcular los coeficientes complejos  $c_n$ . Para hacer esto, incorporamos las fórmulas de Euler (4.11) y (4.12) en las definiciones dadas en (4.56), llegando a

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) dt \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \left[ \int_d^{d+T} f(t) \cos n\omega t dt - j \int_d^{d+T} f(t) \sin n\omega t dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) (\cos n\omega t - j \sin n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) (\cos n\omega t + j \sin n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{jn\omega t} dt \end{aligned} \quad (4.60)$$

De (4.58)–(4.60), se puede ver fácilmente que para todos los valores de  $n$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (4.61)$$

En resumen, la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de una función periódica  $f(t)$ , de periodo  $T$ , es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad (4.57)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.61)$$

En general los coeficientes  $c_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) son complejos y pueden expresarse en la forma

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$$

donde  $|c_n|$ , la magnitud de  $c_n$ , se obtiene de la definición (4.56) por

$$|c_n| = \sqrt{[(\frac{1}{2}a_n)^2 + (\frac{1}{2}b_n)^2]} = \frac{1}{2}\sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$$

así que  $2|c_n|$  es la amplitud de la  $n$ -ésima armónica. El argumento  $\phi_n$  de  $c_n$  está relacionado con la fase de la  $n$ -ésima armónica.

### EJEMPLO 4.18

Encuentre la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de la función periódica  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \cos \frac{1}{2}t \quad (-\pi < t < \pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t)$$

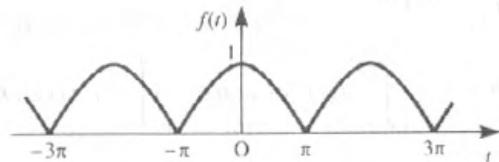


Figura 4.33 Función  $f(t)$  del ejemplo 4.18.

**Solución** En la figura 4.33 se muestra una gráfica de la función  $f(t)$  sobre el intervalo  $-3\pi \leq t \leq 3\pi$ . Aquí el periodo  $T$  es  $2\pi$ , así de (4.61) los coeficientes complejos  $c_n$  están dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{1}{2}t e^{-jnt} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{j\pi/2} + e^{-j\pi/2}) e^{-jnt} dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-j(n-1/2)t} + e^{-j(n+1/2)t}) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{-2e^{-j(2n-1)t/2}}{j(2n-1)} - \frac{2e^{-j(2n+1)t/2}}{j(2n+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{j}{2\pi} \left[ \left( \frac{e^{-j\pi n} e^{j\pi/2}}{2n-1} + \frac{e^{-j\pi n} e^{-j\pi/2}}{2n+1} \right) - \left( \frac{e^{j\pi n} e^{-j\pi/2}}{2n-1} + \frac{e^{j\pi n} e^{j\pi/2}}{2n+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Ahora  $e^{j\pi/2} = \cos \frac{1}{2}\pi + j \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = j$ ,  $e^{-j\pi/2} = -j$  y  $e^{j\pi n} = e^{-j\pi n} = \cos n\pi = (-1)^n$ , así que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{j}{2\pi} \left( \frac{j}{2n-1} - \frac{j}{2n+1} + \frac{j}{2n-1} - \frac{j}{2n+1} \right) (-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{-2(-1)^n}{(4n^2-1)\pi} \end{aligned}$$

Observemos que en este caso  $c_n$  es real, lo cual se esperaba, ya que la función  $f(t)$  es una función par de  $t$ .

De (4.57), la expansión en serie de Fourier compleja de  $f(t)$  es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)\pi} e^{jnt}$$

Esto se puede regresar fácilmente a la forma trigonométrica ya que, por la definición (4.56),

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = j(c_n - c_n^*)$$

de manera que en este caso particular

$$a_0 = \frac{4}{\pi}, \quad a_n = 2 \left[ \frac{2}{\pi} \frac{(-2)^{n+1}}{4n^2 + 1} \right] = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}, \quad b_n = 0$$

Así la forma trigonométrica de la serie de Fourier es

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos nt$$

que corresponde a la solución del ejercicio 1(e).

### EJEMPLO 4.19

Obtener la forma compleja de la serie de Fourier de la función diente de sierra  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \frac{2t}{T} \quad (0 < t < 2T), \quad f(t + 2T) = f(t)$$

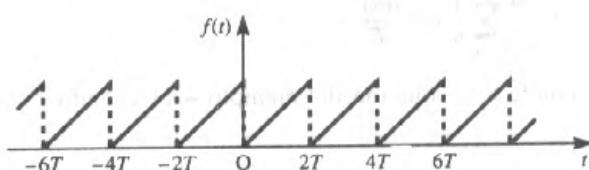


Figura 4.34 Función  $f(t)$  del ejemplo 4.19.

### Solución

En la figura 4.34 se muestra una gráfica de la función  $f(t)$  sobre el intervalo  $-6T < t < 6T$ . Aquí el periodo es  $2T$ , esto es,  $\omega = \pi/T$ , así de (4.61) los coeficientes complejos  $c_n$  están dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} f(t) e^{-jnt/T} dt = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \frac{2}{T} t e^{-jnt/T} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \left[ \frac{Tt}{-jn\pi} e^{-jnt/T} - \frac{T^2}{(jn\pi)^2} e^{-jnt/T} \right]_0^{2T} \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

Ahora  $e^{-jn2\pi} = e^{-j0} = 1$ , así

$$c_n = \frac{1}{T^2} \left[ \frac{2T^2}{-jn\pi} + \frac{T^2}{(n\pi)^2} - \frac{T^2}{(n\pi)^2} \right] = \frac{j2}{n\pi} \quad (n \neq 0)$$

En el caso particular  $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} f(t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \frac{2t}{T} dt = \frac{1}{T^2} \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2T} = 2$$

Así de (4.57) la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = 2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{j2}{n\pi} e^{jn\pi t/T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j2}{n\pi} e^{jn\pi t/T} = 2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{j2}{n\pi} e^{jn\pi t/T}$$

Observando que  $j = e^{j\pi/2}$ , este resultado también se puede escribir en la forma

$$f(t) = 2 + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j(n\pi t/T + \pi/2)}$$

Como en el ejemplo 4.18, los coeficientes de Euler en la serie trigonométrica correspondiente son

$$a_0 = 2c_0 = 4, \quad a_n = c_n + c_n^* = 0, \quad b_n = j(c_n + c_n^*) = j\left(\frac{2j}{n\pi} + \frac{2j}{n\pi}\right) = -\frac{4}{n\pi}$$

así que la correspondiente expansión en serie de Fourier trigonométrica de  $f(t)$  es

$$f(t) = 2 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi t}{T}$$

que corresponde a la solución del ejemplo 4.11 cuando  $T = 2$ .

## 4.6.2 El teorema de la multiplicación y el teorema de Parseval

Dos resultados útiles, en particular en la aplicación de las series de Fourier al análisis de señales, son el **teorema de la multiplicación** y el **teorema de Parseval**. El teorema de la multiplicación nos permite escribir el valor medio del producto de dos funciones periódicas sobre un periodo en términos de los coeficientes de sus expansiones en series de Fourier, mientras que el teorema de Parseval nos permite escribir el cuadrado del valor medio de una función periódica, que como veremos en la sección 4.6.4 determina el espectro de potencia de la función.

**TEOREMA 4.5****El teorema de la multiplicación**

Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son dos funciones periódicas que tienen el mismo periodo  $T$  entonces

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)g(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n^* \quad (4.62)$$

donde  $c_n$  y  $d_n$  son los coeficientes en las expansiones en series de Fourier complejas de  $f(t)$  y  $g(t)$  respectivamente.

**Demostración** Sean  $f(t)$  y  $g(t)$  con series de Fourier complejas dadas por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi t/T} \quad (4.63a)$$

con

$$c_n = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) e^{-jn2\pi t/T} dt \quad (4.63b)$$

y

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn2\pi t/T} \quad (4.64a)$$

con

$$d_n = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} g(t) e^{-jn2\pi t/T} dt \quad (4.64b)$$

Entonces

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)g(t) dt = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi t/T} \right) g(t) dt \quad \text{usando (4.63a)}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[ \frac{1}{T} \int_c^{c+T} g(t) e^{jn2\pi t/T} dt \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n \end{aligned}$$

Suponer que es posible la integración término a término usando (4.64b)

Como  $d_{-n} = d_n^*$ , el conjugado complejo de  $d_n$ , esto se reduce al resultado requerido:

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)g(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n^* \quad \square$$

En términos de los coeficientes reales  $a_n$ ,  $b_n$  y  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ , las expansiones en serie de Fourier trigonométricas que corresponden a  $f(t)$  y  $g(t)$  son

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)$$

y usando las definiciones (4.56), el resultado (4.62) del teorema de la multiplicación se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)g(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}d_n + c_0d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_nd_{-n} \\ &= \frac{1}{4}\alpha_0a_0 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n)(\alpha_n + jb_n) \\ &\quad + (a_n + jb_n)(\alpha_n - jb_n)] \end{aligned}$$

dando

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)g(t) dt = \frac{1}{4}\alpha_0a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

## TEOREMA 4.6 El teorema de Parseval

Si  $f(t)$  es una función periódica con periodo  $T$  entonces

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_nc_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4.65)$$

donde los  $c_n$  son los coeficientes en la expansión en serie de Fourier compleja de  $f(t)$ .

### Demostración

Este resultado se sigue del teorema de la multiplicación, ya que tomando  $g(t) = f(t)$  en (4.62) obtenemos

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_nc_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Usando (4.60), el teorema de Parseval puede escribirse en términos de los coeficientes reales  $a_n$  y  $b_n$  de la expansión en serie de Fourier trigonométrica de la función  $f(t)$  como

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.66)$$

El valor  $f_{\text{RCM}}$ , **raíz cuadrática media (RCM)** de una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$ , está definido por

$$f_{\text{RCM}}^2 = \frac{1}{T} \int_{-c}^{c+1} [f(t)]^2 dt$$

por tanto puede ser expresado en términos de los coeficientes de Fourier usando (4.65) o (4.66).

### EJEMPLO 4.20

Aplique el teorema de Parseval a la función

$$f(t) = \frac{2t}{T} \quad (0 < t < T), \quad f(t + 2T) = f(t)$$

considerada en el ejemplo 4.19 y demuestre que

$$\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

**Solución** Por el ejemplo 4.19 los coeficientes de la expansión en serie de Fourier compleja de  $f(t)$  son

$$c_0 = 2, \quad c_n = \frac{j2}{n\pi} \quad (n \neq 0)$$

Así al aplicar el resultado (4.65) del teorema de Parseval, y observar que el periodo es  $2T$ , obtenemos

$$\frac{1}{2T} \int_0^{2T} [f(t)]^2 dt = c_0^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

dando

$$\frac{1}{2T} \int_0^{2T} \frac{4t^2}{T^2} dt = 4 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n\pi} \right)^2$$

que se reduce a

$$\frac{16}{3} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2}$$

llegando al resultado requerido

$$\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

### 4.6.3 Espectro de frecuencia discreta

Al expresar una función periódica  $f(t)$  mediante su expansión en serie de Fourier estamos descomponiendo a la función en sus **componentes armónicas** o de **frecuencia**. Hemos visto que si  $f(t)$  tiene periodo  $T$  entonces tiene componentes de frecuencia a las frecuencias

$$\omega_n = \frac{n2\pi}{T} = n\omega_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.67)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia de la función padre  $f(t)$ . (Aquí todas las frecuencias son medidas en rad s<sup>-1</sup>.)

Por tanto, una serie de Fourier puede ser interpretada como el **espectro de frecuencias** de la función periódica  $f(t)$ , y proporciona una representación alternativa de la función en su forma de onda en el dominio de tiempo. Este espectro de frecuencia se representa dibujando las gráficas de las amplitudes y las fases de las diversas componentes armónicas contra la frecuencia angular  $\omega_n$ . Un dibujo de la amplitud contra la frecuencia angular se denomina **espectro de amplitud** mientras que la gráfica de fase contra frecuencia angular se conoce como **espectro de fase**. Para una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$  las componentes armónicas sólo aparecen en frecuencias discretas  $\omega_n$ , que están determinadas por (4.67), así que estos espectros se conocen como **espectros de frecuencias discretas** o **espectros de línea**. En el capítulo 5 usaremos las transformadas de Fourier para definir espectros continuos de funciones no periódicas. Con el aumento en la habilidad para procesar señales digitales, la representación de señales por sus espectros correspondientes es un método que se utiliza ampliamente en casi todas las ramas de la ingeniería, especialmente en la ingeniería eléctrica, cuando se consideran tópicos tales como el filtrado y la modulación. Un ejemplo del uso de una representación de un espectro discreto de una función periódica es en la medición de la distorsión en amplificadores, donde el contenido armónico de la salida, medido digitalmente, es una entrada senoidal que proporciona una medida de la distorsión.

Si la expansión en serie de Fourier de una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$  se obtuvo en la forma trigonométrica

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)$$

entonces, como se indicó en la sección 4.2.2, esto puede expresarse en términos de sus distintas componentes armónicas como

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T} + \phi_n\right) \quad (4.68)$$

donde

$$A_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$$

y las  $\phi_n$  están determinadas por

$$\sin \phi_n = \frac{b_n}{A_n}, \quad \cos \phi_n = \frac{a_n}{A_n}$$

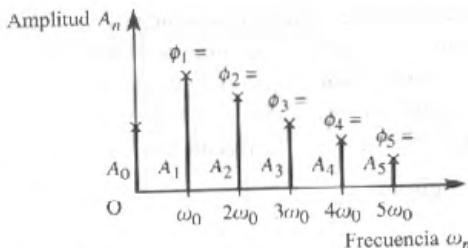


Figura 4.35 Espectro de frecuencia discreta real.

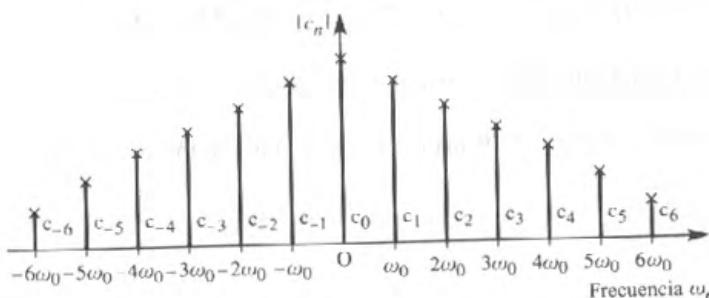


Figura 4.36 Forma compleja del espectro de amplitud.

En este caso el dibujo de  $A_n$  contra la frecuencia angular  $\omega_n$ , constituirá el espectro de amplitud y el de  $\phi_n$  contra  $\omega_n$  el espectro de fase. Estos pueden incorporarse en la misma gráfica al indicar las diversas fases en el espectro de amplitud como se ilustra en la figura 4.35. Puede verse que el espectro de amplitud consiste de una serie de rectas verticales equidistantes cuyas longitudes son proporcionales a las amplitudes de las diversas componentes armónicas que integran a la función  $f(t)$ . Es claro que la forma trigonométrica de la serie de Fourier en general no conduce al trazo del espectro de frecuencia discreto, y primero tienen que determinarse las amplitudes  $A_n$  y las fases  $\phi_n$  a partir los valores de  $a_n$  y  $b_n$  previamente determinados.

Al trabajar en análisis de señales es más común usar la forma compleja de la serie de Fourier. Para una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$ , ésta está dada por (4.37) con los coeficientes complejos dados por

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

donde  $|c_n|$  y  $\phi_n$  denotan la magnitud y el argumento de  $c_n$  respectivamente. Como en general  $c_n$  es una cantidad compleja, necesitamos dos espectros de línea para determinar el espectro de frecuencia discreto; el espectro de amplitud es el trazo de  $|c_n|$  contra  $\omega_n$  y el espectro de fase, aquel de  $\phi_n$  contra  $\omega_n$ . En los casos donde  $c_n$  es real se puede usar un solo espectro para representar la función  $f(t)$ . Como  $|c_{-n}| = |c_n^*| = |c_n|$ , el espectro de amplitud será simétrico con respecto al eje vertical como está ilustrado en la figura 4.36.

Se observa que en la forma compleja del espectro de frecuencia discreto tenemos componentes de frecuencias discretas  $0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$ ; esto es, están involu-

cradas ambas frecuencias discretas positivas y negativas. Es claro que las señales con frecuencias negativas no son viables físicamente, y han sido introducidas por razones matemáticas. En la frecuencia  $n\omega_0$  tenemos la componente  $e^{jn\omega_0 t}$ , que ella misma no es una señal física; para obtener una señal física debemos considerar ésta junto con la componente correspondiente  $e^{-jn\omega_0 t}$  a la frecuencia  $-n\omega_0$ , ya que entonces tenemos

$$e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} = 2 \cos n\omega_0 t \quad (4.69)$$

### EJEMPLO 4.21

Dibuje los espectros de amplitud y fase de la función periódica

$$f(t) = \frac{2t}{T} \quad (0 < t < 2T), \quad f(t + 2T) = f(t)$$

del ejemplo 4.19. Consideré ambas formas compleja y real.

**Solución** En el ejemplo 4.19 los coeficientes complejos fueron determinados como

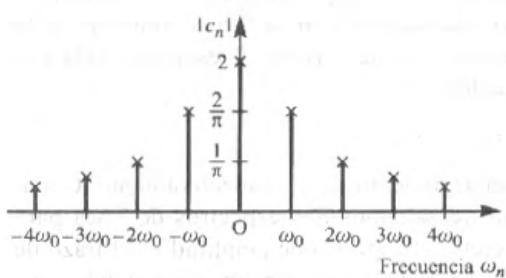
$$c_0 = 2, \quad c_n = \frac{j2}{n\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Así

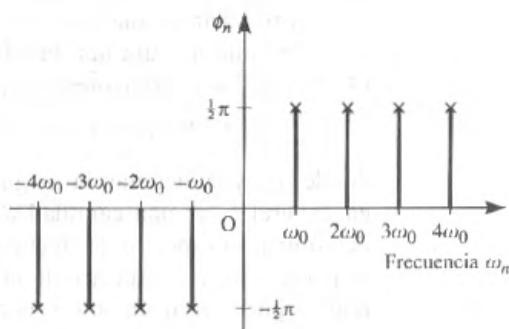
$$|c_n| = \begin{cases} 2/n\pi & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ -2/n\pi & (n = -1, -2, -3, \dots) \end{cases}$$

$$\phi_n = \arg c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ -\frac{1}{2}\pi & (n = -1, -2, -3, \dots) \end{cases}$$

En la figura 4.37(a) y (b) se muestran los espectros de amplitud y fase correspondientes.



(a)



(b)

Figura 4.37 Espectros de frecuencia discreta compleja para el ejemplo 4.21, con  $\omega_0 = \pi/T$ : (a) espectro de amplitud; (b) espectro de fase.

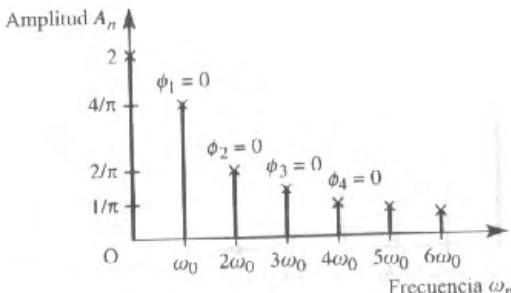


Figura 4.38 Espectro de frecuencia real discreta para el ejemplo 4.21 (correspondiente a la expansión senoidal).

En el ejemplo 4.19 vimos que los coeficientes de la forma trigonométrica de la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  son

$$a_0 = 4, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{4}{n\pi}$$

de manera que la amplitud de los coeficientes en (4.67) son

$$A_0 = 2, \quad A_n = \frac{4}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

llegando al espectro de frecuencia real discreto de la figura 4.38.

Como  $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}A_n$ , las líneas del espectro de amplitud en la forma compleja (figura 4.37) son, como se esperaba, la mitad de la amplitud relativa de aquellas en la representación real (figura 4.38), la otra mitad del valor se asigna a las frecuencias negativas correspondientes. En la representación compleja las fases a frecuencias negativas (figura 4.37b) son las negativas de las correspondientes frecuencias positivas. En nuestra representación particular (4.68) de la forma real las fases de las frecuencias positivas difieren en  $\frac{1}{2}\pi$  entre la forma real y la compleja. De nuevo, esto no es sorprendente, ya que de (4.69) vimos que combinando frecuencias positivas y negativas en la forma compleja llegamos a una cosenoide en esa frecuencia en lugar de una senoide. Para mantener la igualdad de las fases en frecuencias positivas entre las representaciones real y compleja, una expansión cosenoidal

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T} + \phi_n\right) \quad (4.70)$$

de la serie de Fourier real, se adopta frecuentemente como una alternativa de la expansión en serie senoidal (4.68). Tomando (4.70), el espectro de amplitud quedará como para (4.68), pero el espectro de fase será determinado por

$$\operatorname{sen} \phi_n = -\frac{b_n}{A_n}, \quad \cos \phi_n = \frac{a_n}{A_n}$$

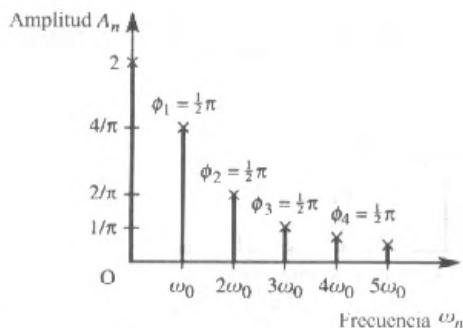


Figura 4.39 Espectro de frecuencia discreta real para el ejemplo 4.21 (correspondiente a la expansión cosenoidal).

mostrando un corrimiento de fase de  $\frac{1}{2}\pi$  de la de (4.68). Adoptando la representación real (4.70), el espectro de frecuencia real discreto correspondiente para la función  $f(t)$  del ejemplo 4.21 está ilustrado en la figura 4.39.

### EJEMPLO 4.22

Determine la forma compleja de la expansión en serie de Fourier del tren infinito periódico (periodo  $2T$ ) de pulsos rectangulares idénticos de magnitud  $A$  y duración  $2d$  ilustrados en la figura 4.40. Dibuje el espectro de frecuencia discreta en el caso particular cuando  $d = \frac{1}{10}$  y  $T = \frac{1}{2}$ .

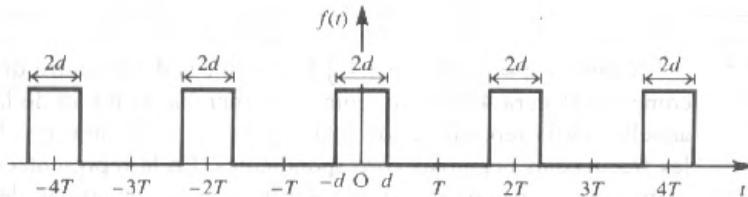


Figura 4.40 Tren infinito de pulsos rectangulares del ejemplo 4.22.

**Solución** Sobre un periodo  $-T < t < T$  la función  $f(t)$  que representa el tren está expresada como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-T < t < -d) \\ A & (-d < t < d) \\ 0 & (d < t < T) \end{cases}$$

De (4.61), los coeficientes complejos  $c_n$  están dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-j n \pi t / T} dt = \frac{1}{2T} \int_{-d}^d A e^{-j n \pi t / T} dt = \frac{A}{2T} \left[ \frac{-T}{j n \pi} e^{-j n \pi t / T} \right]_{-d}^d \quad (n \neq 0) \\ &= \frac{A}{n \pi} \frac{e^{j n \pi d / T} - e^{-j n \pi d / T}}{j 2} = \frac{A}{n \pi} \sin\left(\frac{n \pi d}{T}\right) = \frac{Ad \sin(n \pi d / T)}{n \pi d / T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

En el caso particular cuando  $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-d}^d A dt = \frac{Ad}{T}$$

así que

$$c_n = \frac{Ad}{T} \operatorname{senc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

donde la función **senc** está definida por

$$\operatorname{senc} t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$$

Así de (4.57) la expansión en serie de Fourier compleja para el tren infinito de pulsos  $f(t)$  es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Ad}{T} \operatorname{senc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right) e^{j n \pi t / T}$$

Como se esperaba, como  $f(t)$  es una función par,  $c_n$  es real, entonces sólo necesitamos dibujar el espectro de amplitud discreto para representar  $f(t)$ . Como el espectro de amplitud es un trazo de  $|c_n|$  contra la frecuencia  $n\omega_0$ , con  $\omega_0 = \pi/T$ , sólo tomará valores en los valores de frecuencia discreta

$$0, \pm \frac{\pi}{T}, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{3\pi}{T}, \dots$$

En el caso particular  $d = \frac{1}{10}$ ,  $T = \frac{1}{2}$ ,  $\omega_0 = 2\pi$  el espectro de amplitud existirá sólo en los valores de frecuencia

$$0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

Como en este caso

$$c_n = \frac{1}{5} A \operatorname{senc}\left(\frac{1}{5} n\pi\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

observamos que  $\operatorname{senc}\left(\frac{1}{5} n\pi\right) = 0$  cuando  $\frac{1}{5} n\pi = m\pi$  o  $n = 5m$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), el espectro se muestra en la figura 4.41.

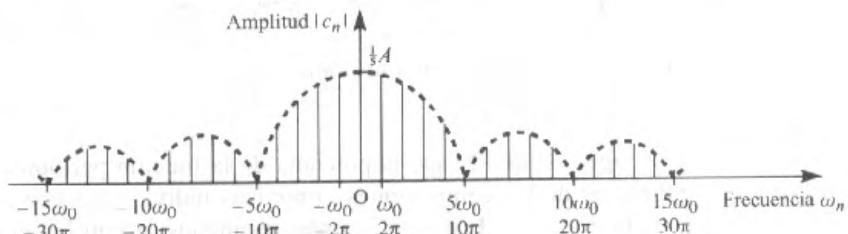
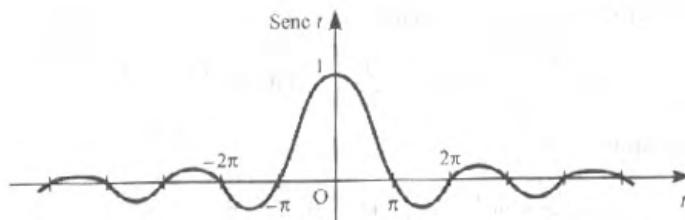


Figura 4.41 Espectro discreto de amplitud para un tren infinito de pulsos cuando  $d = \frac{1}{10}$  y  $T = \frac{1}{2}$ .

Figura 4.42 Gráfica de  $\text{senc } t$ .

Como veremos en el capítulo 5, la función  $\text{senc } t = (\sin t)/t$  juega un papel importante en el análisis de señales y algunas veces se le conoce como **función de muestreo**. En la figura 4.42 se muestra una gráfica de  $\text{senc } t$ , y es claro que la función oscila sobre intervalos de longitud  $2\pi$  y decrece en amplitud cuando  $t$  crece. Observamos también que la función tiene ceros en  $t = \pm n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

#### 4.6.4 Espectro de potencia

La **potencia promedio**  $P$  asociada con una señal periódica  $f(t)$  de periodo  $T$  está definida como el valor cuadrático medio; esto es,

$$P = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} [f(t)]^2 dt \quad (4.71)$$

Por ejemplo, si  $f(t)$  representa un voltaje que se aplica a un resistor, entonces  $P$  representa la potencia promedio, medida en watts, que disipa un resistor de  $1 \Omega$ .

Por el teorema de Parseval (teorema 4.6)

$$P = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.72)$$

Como

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} \left[ a_n \cos \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) \right]^2 dt = \frac{1}{2}a_n^2, \quad \frac{1}{T} \int_d^{d+T} \left[ b_n \cos \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) \right]^2 dt = \frac{1}{2}b_n^2$$

la potencia en la  $n$ -ésima armónica es

$$P_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) \quad (4.73)$$

y se sigue de (4.72) que la potencia de la función periódica  $f(t)$  es la suma de las potencias de las componentes armónicas individuales contenidas en  $f(t)$ .

En términos de los coeficientes complejos de Fourier, el teorema de Parseval da

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4.74)$$

Como se discutió en la sección 4.6.3, la componente  $e^{jn\omega_0 t}$  en la frecuencia  $\omega_n = n\omega_0$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ , debe ser considerada junto con la componente  $e^{-jn\omega_0 t}$  a la frecuencia negativa correspondiente  $-\omega_n$  para formar la  $n$ -ésima componente de la armónica nueva de la función  $f(t)$ . Como  $|c_{-n}|^2 = |c_n^*|^2 = |c_n|^2$ , se sigue que la potencia asociada con la  $n$ -ésima armónica es la suma de las potencias asociadas con  $e^{jn\omega_0 t}$  y  $e^{-jn\omega_0 t}$ ; esto es,

$$P_n = 2|c_n|^2 \quad (4.75)$$

que, como  $|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$ , corresponde a (4.73). Así en la forma compleja la mitad de la potencia de la  $n$ -ésima armónica está asociada con la frecuencia positiva y la otra mitad con la frecuencia negativa.

Como la potencia total de una señal periódica es la suma de las potencias asociadas con cada una de las armónicas de las cuales está compuesta la señal, de nuevo es útil considerar la representación espectral, y un trazo de  $|c_n|^2$  contra la frecuencia angular  $\omega_n$  es llamado el **espectro de potencia** de la función  $f(t)$ . Es claro que tal espectro es deducido fácilmente del espectro de amplitud discreto de  $|c_n|$  contra la frecuencia angular  $\omega_n$ .

### EJEMPLO 4.23

Para el espectro del tren infinito de pulsos rectangulares mostrado en la figura 4.40, determine el porcentaje de la potencia total contenido dentro de la banda de frecuencia hasta el primer valor cero (llamado el **cruce en cero** del espectro) a  $10\pi \text{ rad s}^{-1}$ .

#### Solución

De (4.71), la potencia total asociada con el tren infinito de pulsos rectangulares  $f(t)$  es

$$P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2T} \int_{-d}^d A^2 dt$$

que en el caso particular en que  $d = \frac{1}{10}$  y  $T = \frac{1}{2}$  se convierte en

$$P = \int_{-1/10}^{1/10} A^2 dt = \frac{1}{5} A^2$$

La potencia contenida en la banda de frecuencia hasta el primer cruce cero a  $10\pi \text{ rad s}^{-1}$  es

$$P_1 = c_0^2 + 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{5} A \operatorname{senc} \frac{1}{5}n\pi$$

Esto es,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{25}A^2 + \frac{2}{25}A^2 \operatorname{senc}^2 \frac{1}{5}\pi + \operatorname{senc}^2 \frac{2}{5}\pi + \operatorname{senc}^2 \frac{3}{5}\pi + \operatorname{senc}^2 \frac{4}{5}\pi \\ &= \frac{1}{25}A^2 [1 + 2(0.875 + 0.756 + 0.255 + 0.055)] \\ &= \frac{1}{5}A^2(0.976) \end{aligned}$$

Así  $P_1 = 0.976P$ , de manera que aproximadamente el 97.6% de la potencia total asociada con  $f(t)$  está contenida en la banda de frecuencia hasta el primer cruce cero a  $10\pi \text{ rad s}^{-1}$ .

Supongamos que al aplicar un voltaje periódico  $v(t)$  de periodo  $T$  a un circuito lineal se obtiene una corriente  $i(t)$  del mismo periodo  $T$ . Entonces, dada la representación en serie de Fourier, el voltaje y la corriente en un par de terminales, podemos usar el teorema de la multiplicación (teorema 4.5) para obtener una expresión para la potencia promedio  $P$  en las terminales. Así, dando

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2n\pi t/T}, \quad i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j2n\pi t/T}$$

la potencia instantánea en las terminales es  $vi$  y la potencia promedio es

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} vi dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n^*$$

o, en términos de los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  y  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  de la serie de Fourier trigonométrica correspondiente

$$P = \frac{1}{4} \alpha_0 \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$$

## 4.6.5 Ejercicios

34 Pruebe que la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de la función periódica

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \quad (-\pi < t < \pi) \\ f(t+2\pi) &= f(t) \end{aligned}$$

es

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^n e^{jnt}$$

Usando (4.56) obtenga la serie trigonométrica correspondiente y verifique con las series obtenidas en el ejemplo 4.5.

35 Obtenga la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-2 < t < 0) \\ 1 & (0 < t < 2) \end{cases}$$

$$f(t+4) = f(t)$$

Usando (4.56) obtenga la serie trigonométrica correspondiente y verifique con las series obtenidas en el ejemplo 4.9.

36 Obtenga la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas.

$$(a) f(t) = \begin{cases} \pi & (-\pi < t < 0) \\ t & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} a \operatorname{sen} \omega t & (0 < t < \frac{1}{2}T) \\ 0 & (\frac{1}{2}T < t < T) \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t), \quad T = 2\pi/\omega$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} 2 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

$$(d) f(t) = |\operatorname{sen} t| \quad (-\pi < t < \pi)$$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

37 Una función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  está definida dentro del periodo  $-\pi < t < \pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

Usando los coeficientes de Fourier de  $f(t)$ , junto con el teorema de Parseval, pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2$$

(Nota: Los coeficientes de Fourier se pueden deducir del ejemplo 4.9 o del ejercicio 35.)

- 38 (a) Pruebe que la expansión en serie de Fourier de la función periódica

$$f(t) = 500\pi t \quad (0 < t < \frac{1}{50})$$

$$f(t + \frac{1}{50}) = f(t)$$

puede expresarse como

$$f(t) = 5\pi - 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 100n\pi t$$

- (b) Usando (4.66), estime el valor RCM de  $f(t)$

(i) usando los primeros cuatro términos de la serie de Fourier;

(ii) usando los primeros ocho términos de la serie de Fourier.

(c) Obtenga el valor RCM verdadero de  $f(t)$  y luego determine el porcentaje de error en los valores estimados obtenidos en (b).

- 39 Un voltaje periódico  $v(t)$  (en V) de periodo 5 ms y especificado por

$$v(t) = \begin{cases} 60 & (0 < t < 1.25 \text{ ms}) \\ 0 & (1.25 \text{ ms} < t < 5 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$v(t + 5 \text{ ms}) = v(t)$$

se aplica entre las terminales de un resistor de  $15 \Omega$ .

(a) Obtenga las expresiones de los coeficientes de Fourier  $c_n$  de la representación en serie de Fourier compleja de  $v(t)$ , y escriba los valores de los primeros cinco términos distintos de cero.

(b) Calcule la potencia asociada con cada uno de los cinco términos distintos de cero de la expansión en serie de Fourier.

(c) Calcule la energía total que disipa el resistor de  $15 \Omega$ .

(d) ¿Cuál es el porcentaje de la potencia total que disipa el resistor por los cinco términos distintos de cero de la serie de Fourier?

## 4.7

# Funciones ortogonales

Como observamos en la sección 4.2.3, el hecho de que el conjunto de funciones  $\{1, \cos \omega t, \sin \omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin n\omega t, \dots\}$  es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo  $d \leq t \leq d + T$  es crucial en la evaluación de los coeficientes en la expansión en serie de Fourier de una función  $f(t)$ . Es natural preguntar cuándo es posible expresar  $f(t)$  como una expansión en serie de otros conjuntos de funciones. En el caso de funciones periódicas  $f(t)$  no existe una alternativa natural, pero si estamos interesados en representar una función  $f(t)$  sólo en un intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  entonces existen muchas otras posibilidades. Estas posibilidades están tomadas de una clase de funciones llamada **funciones ortogonales**, de las cuales el conjunto trigonométrico  $\{1, \cos \omega t, \sin \omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin n\omega t\}$  es un ejemplo particular.

### 4.7.1 Definiciones

Dos funciones reales  $f(t)$  y  $g(t)$  que son continuas a pedazos en el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  se dice que son **ortogonales** en el intervalo si

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t) dt = 0$$

Un conjunto de funciones reales  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots = \{\phi_n(t)\}$ , cada una de las cuales es continua a pedazos en  $t_1 \leq t \leq t_2$ , se dice que es un **conjunto ortogonal** en este intervalo si  $\phi_n(t)$  y  $\phi_m(t)$  son ortogonales para cada par de índices distintos  $n, m$ ; esto es, si

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m(t) dt = 0 \quad (n \neq m) \quad (4.76)$$

También supondremos que ningún miembro del conjunto  $\{\phi_n(t)\}$  es idénticamente cero excepto en un número finito de puntos, de manera que

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_m^2(t) dt = \gamma_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.77)$$

dónde  $\gamma_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) son todas constantes distintas de cero.

Un conjunto ortogonal  $\{\phi_n(t)\}$  se dice que es **ortonormal** si cada una de sus componentes también está normalizada; esto es,  $\gamma_m = 1$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ). Observamos que cualquier conjunto ortogonal  $\{\phi_n(t)\}$  puede convertirse en un conjunto ortonormal dividiendo cada miembro  $\phi_m(t)$  del conjunto entre  $\sqrt{\gamma_m}$ .

#### EJEMPLO 4.24

Como se cumplen (4.4)–(4.8),

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt\}$$

es un conjunto ortogonal en el intervalo  $d \leq t \leq d + 2\pi$ , mientras que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

forma un conjunto ortonormal en el mismo intervalo.

Lo anterior se sigue ya que

$$\begin{aligned} \int_d^{d+2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \right]^2 dt &= 1 \\ \int_d^{d+2\pi} \left( \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dt &= \int_d^{d+2\pi} \left( \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dt = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

La definición de ortogonalidad considerada hasta aquí se aplica a funciones reales y tiene que ser corregida un poco si los miembros del conjunto  $\{\phi_n(t)\}$  son funciones complejas en la variable real  $t$ . En tal caso el conjunto  $\{\phi_n(t)\}$  se dice que es un conjunto ortogonal en el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  si

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \gamma & (n = m) \end{cases} \quad (4.78)$$

donde  $\phi_m^*(t)$  denota la conjugada compleja de  $\phi(t)$ .

### EJEMPLO 4.25

Verifique que el conjunto de funciones exponenciales complejas

$$\{e^{jnt/T}\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

usado en la representación compleja de la serie de Fourier es un conjunto ortogonal en el intervalo  $0 \leq t \leq 2T$ .

**Solución** Primero,

$$\int_0^{2T} e^{jn\pi t/T} 1 dt = \left[ \frac{T}{jn\pi} e^{jn\pi t/T} \right]_0^{2T} = 0 \quad (n \neq 0)$$

ya que  $e^{j2n\pi} = e^0 = 1$ . Segundo,

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} e^{jn\pi t/T} (e^{jm\pi t/T})^* dt &= \int_0^{2T} e^{j(n-m)\pi t/T} dt \\ &= \left[ \frac{T}{j(n-m)\pi} e^{j(n-m)\pi t/T} \right]_0^{2T} = 0 \quad (n \neq m) \end{aligned}$$

y, cuando  $n = m$ ,

$$\int_0^{2T} e^{jn\pi t/T} (e^{jn\pi t/T})^* dt = \int_0^{2T} 1 dt = 2T$$

Así

$$\int_0^{2T} e^{jn\pi t/T} 1 dt = 0 \quad (n \neq 0)$$

$$\int_0^{2T} e^{jn\pi t/T} (e^{jn\pi t/T})^* dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 2T & (n = m) \end{cases}$$

y, de (4.78), el conjunto es un conjunto ortogonal en el intervalo  $0 \leq t \leq 2T$ .

Los conjuntos trigonométricos y exponenciales son ejemplos de conjuntos ortogonales que ya hemos usado en el desarrollo del trabajo sobre series de Fourier. Ejemplos de otros conjuntos de funciones ortogonales que se usan en la práctica son los polinomios de Legendre, las funciones de Bessel, los polinomios de Hermite, los polinomios de Lagurre, los polinomios de Jacobi, los polinomios de Tchebyshev (algunas veces escrito como Chebyshev) y las funciones de Walsh.

## 4.7.2 Series generalizadas de Fourier

Sea  $\{\phi_n(t)\}$  un conjunto ortogonal en el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  y supongamos que queremos representar la función continua a pedazos  $f(t)$  en términos de este conjunto dentro de este intervalo. Siguiendo el desarrollo en serie de Fourier, suponemos que es posible expresar  $f(t)$  como una expansión en serie de la forma

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \quad (4.79)$$

Ahora queremos determinar los coeficientes  $c_n$ , y para hacer eso de nuevo seguimos el desarrollo en serie de Fourier. Multiplicando todo (4.79) por  $\phi_m(t)$  e integrando término a término obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_m(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{t_1}^{t_2} \phi_m(t) \phi_n(t) dt$$

que, usando (4.76) y (4.77), se reduce a

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_n(t) dt = c_n \gamma_n$$

dando

$$c_n = \frac{1}{\gamma_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_n(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.80)$$

Resumiendo, si  $f(t)$  es una función continua a pedazos en el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  y  $\{\phi_n(t)\}$  es un conjunto ortogonal en ese intervalo entonces la serie

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

se conoce como **serie generalizada de Fourier** de  $f(t)$  con respecto al conjunto base  $\{\phi_n(t)\}$ , y los coeficientes  $c_n$ , dados por (4.80), son llamados los **coeficientes generalizados de Fourier** con respecto al mismo conjunto base.

Se puede hacer un paralelismo entre una expansión en serie generalizada de Fourier de una función  $f(t)$  con respecto a un conjunto base ortogonal de funciones  $\{\phi_n(t)\}$  y la representación de un vector  $f$  en términos de un conjunto base ortogonal de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  como

$$f = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

donde

$$\alpha_i = \frac{f \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} = \frac{f \cdot v_i}{|v_i|^2}$$

Hay una clara similitud entre este par de resultados y el par (4.79)–(4.80).

### 4.7.3 Convergencia de la serie generalizada de Fourier

Como en el caso de la expansión en serie de Fourier, se pueden considerar las sumas parciales de la forma

$$F_N(t) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(t) \quad (4.81)$$

y deseamos que esta representación sea, en algún sentido, una “aproximación cercana” a la función original  $f(t)$ . La pregunta que surge al considerar dicha suma parcial es si elegir los coeficientes  $c_n$  como los coeficientes generalizados de Fourier (4.80) es la “mejor” aproximación. Definimos el **error cuadrático medio**  $E_N$  entre el valor verdadero de  $f(t)$  y la aproximación  $F_N(t)$  como

$$E_N = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - F_N(t)]^2 dt$$

se puede probar que  $E_N$  es minimizada para todo  $N$  cuando los coeficientes  $c_n$  se eligen de acuerdo a (4.80). En este sentido, la serie generalizada de Fourier finita da la mejor aproximación.

Para verificar este resultado, suponemos, por conveniencia, que el conjunto  $\{\phi_n(t)\}$  es ortonormal y consideramos la  $N$ -ésima suma parcial

$$F_N(t) = \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \phi_n(t)$$

donde los  $\tilde{c}_n$  son elegidos de manera que minimicen el error cuadrático medio  $E_N$ . Ahora

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1) E_N &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ f(t) - \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \phi_n(t) \right]^2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - 2 \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_n(t) dt + \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n^2 \int_{t_1}^{t_2} \phi_n^2(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - 2 \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n c_n + \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n^2 \end{aligned}$$

ya que  $\{\phi_n(t)\}$  es un conjunto ortonormal. Esto es,

$$(t_2 - t_1) E_N = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{n=1}^N c_n^2 + \sum_{n=1}^N (\tilde{c}_n - c_n)^2 \quad (4.82)$$

que es minimizado cuando  $\tilde{c}_n = c_n$ .

Haciendo  $\tilde{c}_n = c_n$  en (4.82), el error cuadrático medio  $E_N$  al aproximar  $f(t)$  por  $F_N(t)$  de (4.77) está dado por

$$E_N = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{n=1}^N c_n^2 \right]$$

si el conjunto  $\{\phi_n(t)\}$  es ortonormal, y está dado por

$$E_N = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{n=1}^N \gamma_n c_n^2 \right] \quad (4.83)$$

si el conjunto  $\{\phi_n(t)\}$  es ortogonal.

Como por definición  $E_N$  es no negativo, se sigue de (4.83) que

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt \geq \sum_{n=1}^N \gamma_n c_n^2 \quad (4.84)$$

un resultado conocido como la **desigualdad de Bessel**. La pregunta que surge en la práctica es de un modo u otro si  $E_N \rightarrow 0$  conforme  $N \rightarrow \infty$ , esto indica que la suma

$$\sum_{n=1}^N c_n \phi_n(t)$$

converge a la función  $f(t)$ . Si éste fuera el caso entonces, de (4.83),

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n c_n^2 \quad (4.85)$$

que es la **forma generalizada del teorema de Parseval**, y el conjunto  $\{\phi_n(t)\}$  se dice que es completo. Estrictamente hablando, el hecho de que el teorema de Parseval se cumpla asegura que la suma parcial  $F_N(t)$  converge en la media a la función original  $f(t)$  conforme  $N \rightarrow \infty$ , y esto no garantiza necesariamente la convergencia en cualquier punto particular. Sin embargo, en las aplicaciones en la ingeniería la distinción se puede pasar por alto, ya que para las funciones encontradas en la práctica la convergencia en la media también garantiza la convergencia puntual en puntos donde  $f(t)$  es convergente, y la convergencia a la media de la discontinuidad en los puntos donde  $f(t)$  es discontinua.

### EJEMPLO 4.26

El conjunto  $\{1, \cos t, \operatorname{sen} t, \dots, \cos nt, \operatorname{sen} nt\}$  es un conjunto ortogonal completo en el intervalo  $d \leq t \leq d + 2\pi$ . Siguiendo el mismo argumento que antes, se prueba que para una función  $f(t)$  que es continua a pedazos en  $d \leq t \leq d + 2\pi$  el error cuadrático medio entre  $f(t)$  y la serie de Fourier finita

$$F_N(t) = \frac{1}{2} \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^N \tilde{a}_n \cos nt + \sum_{n=1}^N \tilde{b}_n \operatorname{sen} nt$$

es minimizada cuando  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n$  y  $\tilde{b}_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) son iguales a los coeficientes de Fourier  $a_0, a_n$  y  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) correspondientes que se determinaron al usar (4.11) y (4.12). En este caso el error cuadrático medio  $E_N$  está dado por

$$E_N = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_d^{d+2\pi} f^2(t) dt - \pi \left[ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right] \right]$$

La desigualdad de Bessel (4.84) se convierte en

$$\int_d^{d+2\pi} f^2(t) dt \geq \pi \left[ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

y el teorema de Parseval (4.85) se reduce a

$$\frac{1}{2\pi} \int_d^{d+2\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

que se ajusta con (4.66). Como en este caso el conjunto base es completo, el teorema de Parseval se cumple y la serie de Fourier converge a  $f(t)$  en el sentido discutido antes.

#### 4.7.4 Ejercicios

- 40 La expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada periódica

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

es

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)t$$

Determine el error cuadrático medio que corresponde a las aproximaciones de  $f(t)$  al usar un término, dos términos y tres términos respectivamente en la expansión en serie.

- 41 Los polinomios de Legendre  $P_n(t)$  son generados por la fórmula

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y satisfacen la relación de recurrencia

$$nP_n(t) = (2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t)$$

- (a) Deduzca que

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

- (b) Pruebe que los polinomios forman un conjunto ortogonal en el intervalo  $(-1, 1)$  y, en particular, que

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 2/(2n+1) & (n = m; m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

- (c) Dado que la función

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-1 < t < 0) \\ 0 & (t = 0) \\ 1 & (0 < t < 1) \end{cases}$$

está expresada como una expansión en serie de Fourier-Legendre

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r P_r(t)$$

determine los valores de  $c_0, c_1, c_2$  y  $c_3$ .

- (d) Dibuje las gráficas para ilustrar la convergencia de las series obtenidas en (c) y compare el error cuadrático medio con el de la expansión en serie de Fourier correspondiente.

- 42 Repita las partes (c) y (d) del ejercicio 41 para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 < x < 0) \\ x & (0 < x < 1) \end{cases}$$

- 43 Los polinomios de Laguerre  $L_n(t)$  están generados por la fórmula

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y satisfacen la relación de recurrencia

$$L_n(t) = (2n - 1 - t)L_{n-1}(t) - (n - 1)^2 L_{n-2}(t) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Estos polinomios son ortogonales en el intervalo  $0 \leq t < \infty$  con respecto a la función de peso  $e^{-t}$ , de manera que

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ (n!)^2 & (n = m) \end{cases}$$

(a) Deduzca que

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = 1 - t$$

$$L_2(t) = 2 - 4t + t^2$$

$$L_3(t) = 6 - 18t + 9t^2 - t^3$$

(b) Confirme el resultado de ortogonalidad anterior en el caso de  $L_0, L_1, L_2$  y  $L_3$ .

(c) Dado que la función  $f(t)$  está siendo aproximada en el intervalo  $0 \leq t < \infty$  por

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r L_r(t)$$

pruebe que

$$c_r = \frac{1}{(r!)^2} \int_0^\infty f(t) e^{-t} L_r(t) dt \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

(Nota: los polinomios de Laguerre son de particular importancia en ingeniería ya que pueden ser generados como las respuestas al impulso de circuitos relativamente simples.)

44 Los polinomios de Hermite  $H_n(t)$  están generados por la fórmula

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y satisfacen la relación de recurrencia

$$H_n(t) = t H_{n-1}(t) - (n - 1) H_{n-2}(t) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Estos polinomios son ortogonales en el intervalo  $-\infty < t < \infty$  con respecto a la función de peso  $e^{-t^2/2}$ , de manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} H_n(t) H_m(t) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \sqrt{(2\pi)n!} & (n = m) \end{cases}$$

(a) Deduzca que

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = t$$

$$H_2(t) = t^2 - 1 \quad H_3(t) = t^3 - 3t$$

$$H_4(t) = t^4 - 6t^2 + 3$$

(b) Confirme el resultado de ortogonalidad anterior en el caso de  $H_0, H_1, H_2$  y  $H_3$ .

(c) Dado que la función  $f(t)$  está siendo aproximada en el intervalo  $-\infty < t < \infty$  por

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r H_r(t)$$

pruebe que

$$c_r = \frac{1}{r! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} f(t) H_r(t) dt \quad (r = 0, 1, \dots)$$

45 Los polinomios de Tchebyshev  $T_n(t)$  están generados por la fórmula

$$T_n(t) = \cos(n \cos^{-1} t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

o

$$T_n(t) = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \frac{n!}{(2r)!(n-2r)!} (1-t^2)^r t^{n-2r} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

donde

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2 & (n \text{ par}) \\ (n-1)/2 & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

También satisfacen la relación de recurrencia

$$T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

y son ortogonales en el intervalo  $-1 \leq t \leq 1$  con respecto a la función de peso  $1/\sqrt{1-t^2}$ , de manera que

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}\pi & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0) \end{cases}$$

(a) Deduzca que

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1, \quad T_3(t) = 4t^3 - 3t$$

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

$$T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

(b) Confirme el resultado de ortogonalidad anterior para  $T_0, T_1, T_2$  y  $T_3$ .

(c) Dado que la función  $f(t)$  está siendo aproximada en el intervalo  $-1 \leq t \leq 1$  por

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r T_r(t)$$

pruebe que

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) T_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$c_r = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (r = 1, 2, \dots)$$

46 Con el desarrollo de las técnicas digitales, en la práctica las funciones de Walsh  $W_n(t)$  adquirieron una importancia considerable, ya que son fácilmente generadas por circuitos digitales lógicos. Las primeras cuatro funciones de Walsh pueden definirse en el intervalo  $0 \leq t \leq T$  por

$$W_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$W_1(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & (0 \leq t < \frac{1}{2}T) \\ -1/\sqrt{T} & (\frac{1}{2}T < t \leq T) \end{cases}$$

$$W_2(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & (0 \leq t < \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T < t \leq T) \\ -1/\sqrt{T} & (\frac{1}{4}T < t < \frac{3}{4}T) \end{cases}$$

$$W_3(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & (0 \leq t < \frac{1}{8}T, \frac{1}{8}T < t < \frac{5}{8}T, \frac{7}{8}T < t \leq T) \\ -1/\sqrt{T} & (\frac{1}{8}T < t < \frac{3}{8}T, \frac{5}{8}T < t < \frac{7}{8}T) \end{cases}$$

(a) Dibuje las gráficas de las funciones  $W_0(t)$ ,  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$  y  $W_3(t)$ , y pruebe que son ortonormales en el intervalo  $0 \leq t \leq T$ . Escriba una expresión para  $W_n(t)$ .

(b) Las funciones de Walsh pueden usarse para obtener una expansión en serie de Fourier-Walsh para una función  $f(t)$ , sobre el intervalo  $0 \leq t \leq T$ , en la forma

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r W_r(t)$$

Ilustre esto para la onda cuadrada del ejercicio 40. ¿Cuál es el error cuadrático medio? Comente la respuesta.

## 4.8

# Aplicación a la ingeniería: funciones descriptivas

Muchos sistemas de control que contienen un elemento no lineal pueden representarse mediante el diagrama de bloques de la figura 4.43. En la práctica las técnicas de la función descriptiva se usan para analizar y diseñar tales sistemas de control. Esencialmente, el método consiste en reemplazar la no linealidad por una ganancia  $N$  equivalente y después usa las técnicas desarrolladas para los sistemas lineales, tales como los métodos de respuesta de frecuencia de la sección 2.7. Si el elemento no lineal es sometido a una entrada senoidal  $e(t) = X \operatorname{sen} \omega t$  entonces su salida  $z(t)$  puede representarse por la expansión en serie de Fourier

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) \end{aligned}$$

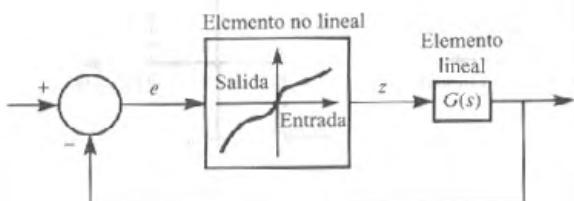


Figura 4.43 Sistema de control no lineal.

con  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  y  $\phi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$ .

La función descriptiva  $N(X)$  del elemento no lineal está definida entonces como la razón compleja de la componente fundamental de la salida entre la entrada; esto es,

$$N(X) = \frac{A_1}{X} e^{j\phi_1}$$

con  $N(X)$  independiente de la frecuencia de entrada  $\omega$  si el elemento no lineal no tiene memoria.

Una vez determinada la función descriptiva, el comportamiento del sistema de lazo cerrado está determinado por la ecuación característica

$$1 + N(X)G(j\omega) = 0$$

Si se puede encontrar una combinación de  $X$  y  $\omega$  de manera que satisfaga esta ecuación entonces el sistema es capaz de sostener oscilaciones en esa frecuencia y magnitud; esto es, el sistema exhibe un **comportamiento al ciclo límite**. En general, se puede encontrar más de una combinación y la oscilación resultante puede ser un ciclo límite estable o inestable.

Normalmente la ecuación característica se investiga gráficamente dibujando  $G(j\omega)$  y  $-1/N(X)$ , para todos los valores de  $X$  en el mismo diagrama polar. Entonces el ciclo límite sucede a frecuencias y amplitudes que corresponden a los puntos de intersección de las curvas. Algunas veces los dibujos se pueden evitar calculando el valor máximo de  $N(X)$  y el valor de la ganancia asociada con  $G(s)$  que provocará que suceda el ciclo límite.

Usando esta información como antecedente, la siguiente investigación se deja como un ejercicio para que el lector lo desarrolle.

- (a) Pruebe que las funciones descriptivas  $N_1(X)$  y  $N_2(X)$  que corresponden respectivamente al relevador (encendido-apagado no lineal) de la figura 4.44(a) y al relevador con zona muerta de la figura 4.44(b) son

$$N_1(X) = \frac{4L}{\pi X}, \quad N_2(X) = \frac{4L}{\pi X} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2\right]}$$

- (b) Para el sistema de la figura 4.45 demuestre que existe el ciclo límite cuando la no linealidad es el relevador de la figura 4.44(a) con  $L = 1$ . Determine la amplitud y la frecuencia del ciclo límite.

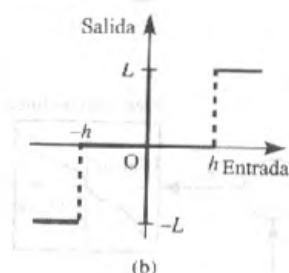
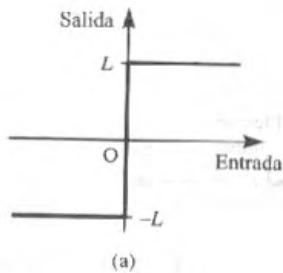


Figura 4.44 (a) Relevador; (b) Relevador con zona muerta.

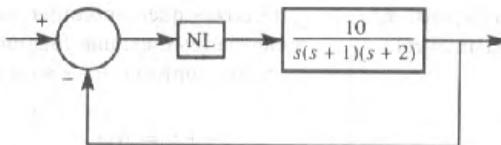


Figura 4.45 Sistema no lineal del ejercicio.

En un intento por eliminar la oscilación de ciclo límite, el relevador se sustituye por el relevador con zona muerta que se muestra en la figura 4.44(b), de nuevo con  $L = 1$ . Pruebe que esto permite alcanzar nuestro objetivo siempre que  $h > 10/3\pi$ .

## 4.9 Ejercicios de repaso (1-20)

- 1 Una función periódica  $f(t)$  está definida por

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & (0 \leq t < \pi) \\ 0 & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

Obtenga la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  y deduzca que

$$\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$$

- 2 Determine la expansión en serie de Fourier de recorrido completo de la función par  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t & (0 \leq t \leq \frac{1}{3}\pi) \\ \frac{1}{3}(\pi - t) & (\frac{1}{3}\pi \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

¿Para qué valores converge la serie en  $t = \frac{1}{3}\pi$ ?

- 3 Una función  $f(t)$  está definida para  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}T$  por

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \frac{1}{4}T) \\ \frac{1}{2}T - t & (\frac{1}{4}T \leq t \leq \frac{1}{2}T) \end{cases}$$

Dibuje las funciones par e impar que tienen periodo  $T$  y son iguales a  $f(t)$  para  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}T$ .

- (a) Encuentre la serie de Fourier de medio recorrido en senos de  $f(t)$ .  
 (b) ¿A qué valor convergerá la serie para  $t = -\frac{1}{4}T$ ?  
 (c) ¿Cuál es la suma de la siguiente serie?

$$S = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^2}$$

- 4 Pruebe que si  $g(x)$  es una función impar y  $f(x)$  es una función par de  $x$ , el producto  $g(x)[c + f(x)]$  es una función impar si  $c$  es una constante.

Un función periódica con periodo  $2\pi$  está definida por

$$F(\theta) = \frac{1}{12}\theta(\pi^2 - \theta^2)$$

en el intervalo  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Pruebe que la representación en serie de Fourier de la función es

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin n\theta$$

- 5 Una onda repetida de periodo  $2\pi$  está definida por

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & (-\pi \leq t \leq -\frac{1}{2}\pi) \\ -t & (-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi) \\ t - \pi & (\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

Dibuje la onda sobre el rango  $t = -2\pi$  a  $t = 2\pi$  y encuentre la representación en serie de Fourier de  $f(t)$ , utilice cualquiera de las propiedades de la onda que se puedan identificar antes de realizar cualquier integración.

- 6 Una función está definida en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & (-\varepsilon < x < \varepsilon) \\ 0 & (1 \leq x < -\varepsilon; \varepsilon < x \leq 1) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de  $f(x)$  y pruebe que la expansión en serie de Fourier de  $f(x)$  válida en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \cos n\pi x$$

- 7 Pruebe que la serie de Fourier de medio recorrido en senos de la función

$$f(t) = \left(1 - \frac{t}{\pi}\right)^2 \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

es

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left\{ 1 - \frac{2}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] \right\} \sin nt$$

- 8 Encuentre las series de Fourier de medio recorrido en senos y cosenos para  $f(x)$  válidas en el intervalo  $0 < x < \pi$  cuando  $f(x)$  está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi) \\ \pi - x & (\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de las series de Fourier obtenidas para  $-2\pi < x \leq 2\pi$ .

- 9 Una función  $f(x)$  es periódica de periodo  $2\pi$  y está definida por  $f(x) = e^x$  ( $-\pi < x < \pi$ ). Dibuje la gráfica de  $f(x)$  desde  $x = -2\pi$  hasta  $x = 2\pi$  y demuestre que

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) \right]$$

- 10 Una función  $f(t)$  está definida en  $0 < t < \pi$  por

$$f(t) = \pi - t$$

Encuentre

- (a) una serie de Fourier de medio recorrido en senos, y  
 (b) una serie de Fourier de medio recorrido en cosenos para  $f(t)$  válida para  $0 < t < \pi$ .

Dibuje las gráficas de las funciones representadas por cada una de las series para  $-2\pi < t < 2\pi$ .

- 11 Pruebe que la serie de Fourier

$$\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

representa la función  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  dada por

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \pi) \\ -t & (-\pi \leq t \leq 0) \end{cases}$$

Deduzca que, sin contar con una componente transitoria (esto es, una función complementaria que se muere conforme  $t \rightarrow \infty$ ), la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t)$$

tiene la solución

$$x = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t + (2n-1)\operatorname{sen}(2n-1)t}{(2n-1)^2[1+(2n-1)^2]}$$

- 12 Pruebe que si  $f(t)$  es una función periódica de periodo  $2\pi$  y

$$f(t) = \begin{cases} t/\pi & (0 < t < \pi) \\ (2\pi-t)/\pi & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

entonces

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$

Pruebe también que cuando  $\omega$  no es un entero,

$$y = \frac{1}{2\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t - \cos \omega t}{(2n+1)^2[\omega^2 - (2n+1)^2]}$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $y = dy/dt = 0$  en  $t = 0$ .

- 13 (a) Una función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  está definida en  $-\pi \leq t \leq \pi$  por

$$f(t) = \begin{cases} -t & (-\pi \leq t \leq 0) \\ t & (0 \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

Obtenga la expansión en serie de Fourier para  $f(t)$ , y, a partir de ella y usando el teorema de Parseval, deduzca que

$$\frac{1}{96}\pi^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

- (b) Usando derivación formal en la serie obtenida en (a), obtenga la expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada

$$g(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t < 0) \\ 0 & (t = 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$g(t+2\pi) = g(t)$$

Verifique la validez del resultado obtenido determinando directamente la expansión en serie de Fourier de  $g(t)$ .

- 14 Una función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  está definida en el rango  $-\pi < t < \pi$  por

$$f(t) = \sin \frac{1}{2}t$$

Pruebe que la forma compleja de la expansión en serie de Fourier para  $f(t)$  es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j 4n(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)} e^{jnt}$$

- 15 (a) Encuentre la expansión en serie de Fourier del voltaje  $v(t)$  representado por la función seno rectificada de media onda

$$v(t) = \begin{cases} 10 \sin(2\pi t/T) & (0 < t < \frac{1}{2}T) \\ 0 & (\frac{1}{2}T < t < T) \end{cases}$$

$$v(t+T) = v(t)$$

- (b) Si el voltaje  $v(t)$  en (a) es aplicado a un resistor de  $10\Omega$ , ¿cuál es el porcentaje de la potencia total que disipa el resistor? ¿Qué porcentaje de la potencia total lleva la segunda componente armónica del voltaje?

- 16 En la figura 4.46 se muestra la onda periódica  $f(t)$  que puede escribirse como

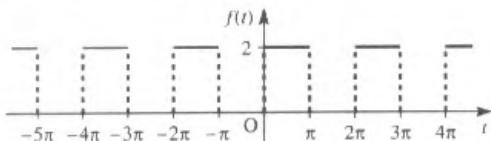


Figura 4.46 Forma de onda  $f(t)$  del ejercicio de repaso 16.

$$f(t) = 1 + g(t)$$

donde  $g(t)$  representa una función impar.

- (a) Dibuje la gráfica de  $g(t)$ .  
 (b) Obtenga la expansión en serie de Fourier para  $g(t)$  y ahora escriba la expansión en serie de Fourier para  $f(t)$ .

- 17 Pruebe que la expansión en serie de Fourier compleja de la función periódica

$$f(t) = t \quad (0 < t < 2\pi)$$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

es

$$f(t) = \pi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j e^{jnt}}{n} \quad n \neq 0$$

- 18 (a) Un voltaje  $v(t)$  de onda cuadrada de periodo  $T$  está definido por

$$v(t) = \begin{cases} -1 & (-\frac{1}{2}T < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \frac{1}{2}T) \end{cases}$$

$$v(t+T) = v(t)$$

Pruebe que la expansión en serie de Fourier está dada por

$$v(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(4n-2)\pi t/T]}{2n-1}$$

- (b) Encuentre la respuesta en estado estacionario del circuito de la figura 4.47 para el voltaje senoidal de entrada

$$v_m(t) = \sin \omega t$$

y ahora escriba la expansión en serie de Fourier de la respuesta en estado estacionario del circuito al voltaje  $v(t)$  de onda cuadrada en el inciso (a).

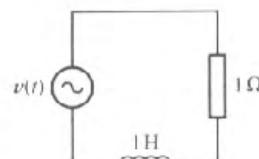


Figura 4.47 Circuito del ejercicio de repaso 18.

- 19 (a) Si definimos el  $n$ -ésimo polinomio de Tchebychev por

$$T_n(t) = \cos(n \cos^{-1} t)$$

utilice la fórmula de Euler  $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$  para obtener las expansiones de  $t^{2k}$  y  $t^{2k+1}$  en polinomios de Tchebyshev, donde  $k$  es un entero positivo.

- (b) Establezca la relación de recurrencia

$$T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t)$$

- (c) Escriba los valores de  $T_0(t)$  y  $T_1(t)$  de la definición, y entonces utilice (b) para encontrar  $T_2(t)$  y  $T_3(t)$ .

- (d) Exprese  $t^5 - 5t^4 + 7t^3 + 6t - 8$  en polinomios de Tchebyshev.

- (e) Encuentre el polinomio cúbico que aproxima a

$$t^5 - 5t^4 + 7t^3 + 6t - 8$$

en el intervalo  $(-1, 1)$  con el menor error máximo. De una cota superior para este error. ¿Hay un valor de  $t$  para el cual esta cota superior se alcanza?

- 20 En la figura 4.48 se muestra la relación entre la entrada y la salida de un relevador con zona muerta  $\Delta$  y sin histéresis. Pruebe que la función descriptiva es

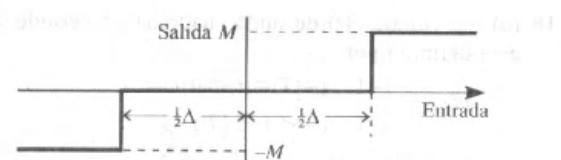


Figura 4.48 Relevador con zona muerta del ejercicio de repaso 20.

$$N(x_i) = \frac{4M}{\pi x_i} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta}{2x_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

para una entrada de amplitud  $x_i$ .

Si el relevador se usa en la trayectoria hacia delante del sistema de control posicional encendido-apagado que se muestra en la figura 4.49, donde la función de transferencia

$$N(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



se obtiene el resultado de la ecuación 4.49.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene

$$\dot{x}_i = \omega_0$$

que es menor que el punto de corte de la curva de respuesta. Por lo tanto, el sistema permanece en el modo de apagado.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene

$$\dot{x}_i = -\omega_0$$

que es menor que el punto de corte de la curva de respuesta. Por lo tanto, el sistema permanece en el modo de apagado.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene

$$\dot{x}_i = \omega_0$$

que es menor que el punto de corte de la curva de respuesta. Por lo tanto, el sistema permanece en el modo de apagado.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene

$$\dot{x}_i = -\omega_0$$

que es menor que el punto de corte de la curva de respuesta. Por lo tanto, el sistema permanece en el modo de apagado.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene

$$\dot{x}_i = \omega_0$$

que es menor que el punto de corte de la curva de respuesta. Por lo tanto, el sistema permanece en el modo de apagado.

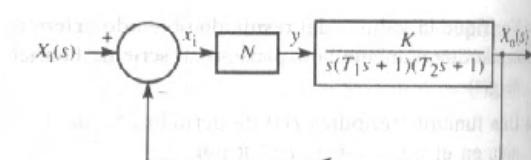


Figura 4.49 Sistema de control de posición del ejercicio de repaso 20.

caracteriza la constante de tiempo del servomotor y la inercia y el amortiguamiento viscoso de la carga, pruebe que una oscilación del ciclo límite no sucede siempre que la zona muerta en el relevador es tal que

$$\Delta > \frac{4MK}{\pi} \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

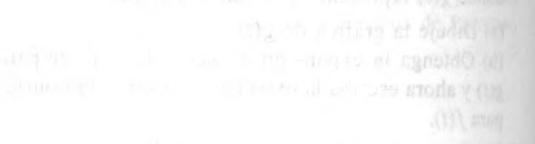
en donde  $M$  es la amplitud de la señal de control,  $K$  es la constante de ganancia del motor,  $T_1$  y  $T_2$  son las constantes de tiempo del sistema de control y  $\Delta$  es la amplitud de la señal de control.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene



que es menor que el punto de corte de la curva de respuesta. Por lo tanto, el sistema permanece en el modo de apagado.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene



que es menor que el punto de corte de la curva de respuesta. Por lo tanto, el sistema permanece en el modo de apagado.

Si el sistema se pone en marcha con una velocidad constante de  $\omega_0$ , se obtiene

$$\frac{2}{\pi} + \pi = (1)$$

# 5

## La transformada de Fourier

### CONTENIDO

- 5.1 Introducción
- 5.2 La transformada de Fourier
- 5.3 Propiedades de la transformada de Fourier
- 5.4 La respuesta de frecuencia
- 5.5 Transformadas de las funciones escalón e impulso
- 5.6 La transformada de Fourier en tiempo discreto
- 5.7 Aplicación a la ingeniería: el diseño de filtros analógicos
- 5.8 Aplicación a la ingeniería: modulación, demodulación y filtrado en el dominio de la frecuencia
- 5.9 Ejercicios de repaso (1–25)

### 5.1

## Introducción

En el capítulo 4 se vio que las series de Fourier proporcionan una herramienta para analizar la respuesta de estado estacionario de sistemas para una señal de entrada periódica. En este capítulo extendemos las ideas del análisis de Fourier para tratar con funciones no periódicas. Hacemos esto introduciendo la transformada de Fourier. Conforme se desarrolle la teoría veremos cómo la forma exponencial compleja de la representación en serie de Fourier de una función periódica surge como un caso especial de la transformada de Fourier. También se destacarán las similitudes entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace que se analizó en el capítulo 2.

Mientras las transformadas de Fourier encontraron en un principio la mayoría de sus aplicaciones en la solución de ecuaciones diferenciales parciales, probablemente

es válido decir que hoy en día los métodos de la transformada de Fourier se usan fuertemente en el análisis de señales y sistemas. Por tanto, este capítulo se escribió con tales aplicaciones en mente y su principal mira es desarrollar una comprensión de las bases matemáticas como una preparación para un estudio especializado de las áreas de aplicación en distintas ramas de la ingeniería.

A lo largo de este libro hemos llamado la atención al impacto de las computadoras digitales en ingeniería y por lo tanto en las matemáticas requeridas para entender los conceptos en ingeniería. Mientras que gran parte del trabajo inicial en análisis de señales se implementó usando dispositivos analógicos, la mayor parte del equipo moderno utiliza tecnología digital. En el capítulo 2 desarrollamos la transformada de Laplace como una ayuda para el análisis y diseño de sistemas en tiempo continuo, mientras que en el capítulo 3 introducimos las transformadas  $z$  y  $\mathcal{D}$  para ayudar al análisis y diseño de sistemas en tiempo discreto. En este capítulo se consolida el análisis en el dominio de la frecuencia introducido en el capítulo 2 y se extiende para proveer una herramienta para la descripción en el dominio de la frecuencia de sistemas en tiempo discreto mediante la introducción de la transformada discreta de Fourier. Esta transformada discreta proporciona uno de los métodos más avanzados para el análisis de señales discretas, y se utiliza ampliamente en campos como la teoría de la comunicación y el proceso de voz e imágenes. En la práctica, los aspectos computacionales tienen gran importancia y el uso de algoritmos computacionales apropiados para el cálculo de la transformada discreta de Fourier es esencial. Por esta razón hemos incluido una introducción al algoritmo de la transformada rápida de Fourier basada en el trabajo pionero de J. W. Cooley y J. W. Tukey publicado en 1965, que esperamos le ayude al lector a comprender el desarrollo de aplicaciones especializadas de ingeniería.

## 5.2

# La transformada de Fourier

### 5.2.1

## La integral de Fourier

En el capítulo 4 vimos cómo los métodos de series de Fourier proporcionan una técnica para la representación en el dominio de la frecuencia de funciones periódicas. Como se indicó en la sección 4.6.3, al expresar una función como su expansión en serie de Fourier se descompone la función en sus componentes armónicas o de frecuencia. Así una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T'$  tiene componentes de frecuencia en frecuencias discretas

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T'} = n\omega_0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia fundamental, esto es, la frecuencia de la función original  $f(t)$ . En consecuencia, podemos interpretar una serie de Fourier como constituida por un **espectro de frecuencia discreta** de una función periódica  $f(t)$ , proporcionando así

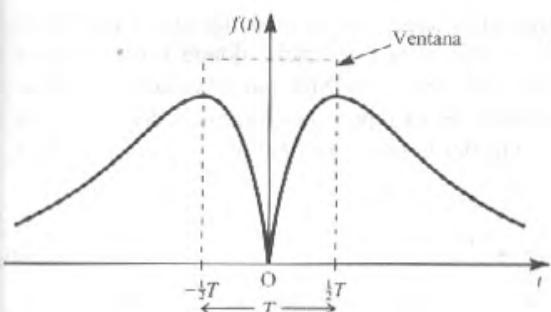


Figura 5.1 La vista de  $f(t)$  a través de una ventana de longitud  $T$ .

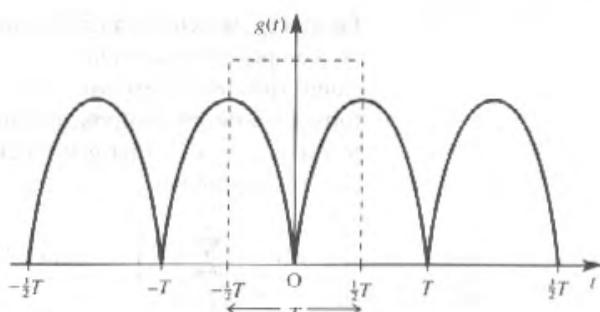


Figura 5.2 La función periódica  $g(t)$  basada en la visión de  $f(t)$  a través de la "ventana".

una representación alternativa en el dominio de la frecuencia de la función para su forma de onda en el dominio del tiempo. Sin embargo, no todas las funciones son periódicas así que necesitamos desarrollar un método que dé una representación similar para funciones no periódicas definidas en  $-\infty < t < \infty$ . Una manera de alcanzar esto es observar una porción de una función no periódica  $f(t)$  sobre un intervalo  $T$ , imaginando que estamos viendo una gráfica de  $f(t)$  a través de una "ventana" de longitud  $T$ , y después considerar lo que pasa conforme  $T$  se alarga.

En la figura 5.1 se describe esta situación con la ventana colocada simétricamente alrededor del origen. Nos concentraremos sólo en la "vista a través de la ventana" y llevaremos a cabo un desarrollo en serie de Fourier basado exclusivamente en la porción de  $f(t)$ . Cualquiera que sea el comportamiento de  $f(t)$  fuera de la ventana, la serie de Fourier así generada representará la función periódica definida por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & (|t| < \frac{1}{2}T) \\ f(t - nT) & (\frac{1}{2}(2n-1)T < |t| < \frac{1}{2}(2n+1)T) \end{cases}$$

La figura 5.2 ilustra  $g(t)$  y podemos ver que las gráficas de  $f(t)$  y  $g(t)$  coinciden en el intervalo  $(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$ . Observamos que este método corresponde al adoptado en la sección 4.3 para obtener la expansión en serie de Fourier de funciones definidas sobre un intervalo finito.

Usando la forma compleja o exponencial de la expansión en serie de Fourier tenemos de (4.57) y (4.61) que

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} \quad (5.1)$$

con

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5.2)$$

y donde

$$\omega_0 = 2\pi/T \quad (5.3)$$

En efecto, la ecuación (5.2) transforma la función  $g(t)$  en el dominio del tiempo en las componentes asociadas  $G_n$  con dominio en la frecuencia, donde  $n$  es cualquier entero (positivo, negativo o cero). La ecuación (5.1) también puede verse como transformación de las componentes discretas  $G_n$  en la representación en el dominio de la frecuencia en la forma  $g(t)$  en el dominio del tiempo. Al sustituir por  $G_n$  en (5.1) y usar (5.2) se obtiene

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} \quad (5.4)$$

La frecuencia del término general en la expansión (5.4) es

$$\frac{2\pi n}{T} = n\omega_0 = \omega_n$$

y así la diferencia en la frecuencia entre términos sucesivos es

$$\frac{2\pi}{T}[(n+1) - n] = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$$

Ya que  $\Delta\omega = \omega_0$ , podemos expresar (5.4) como

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} \Delta\omega \quad (5.5)$$

Definiendo  $G(j\omega)$  como

$$G(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.6)$$

tenemos

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} G(j\omega_n) \Delta\omega \quad (5.7)$$

Conforme  $T \rightarrow \infty$ , nuestra ventana se ensancha, de manera que  $g(t) = f(t)$  en todos lados y  $\Delta\omega \rightarrow 0$ . Como también tenemos

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} G(j\omega_n) \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} G(j\omega) d\omega$$

se sigue de (5.7) y (5.6) que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega \quad (5.8)$$

El resultado (5.8) se conoce como la **representación en integral de Fourier** de  $f(t)$ . Un conjunto de condiciones que son suficientes para la existencia de la integral de Fourier es una forma corregida de las condiciones de Dirichlet para las series de Fourier contenidas en el teorema 4.2. Estas condiciones pueden establecerse en la forma del teorema 5.1.

**TEOREMA 5.1****Las condiciones de Dirichlet para la integral de Fourier**

Si la función  $f(t)$  es tal que

- (a) es absolutamente integrable, de manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

(esto es, la integral es finita), y

- (b) tiene a lo más un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito, entonces la representación en integral de Fourier de  $f(t)$  dada en (5.8) converge a  $f(t)$  en todo punto donde  $f(t)$  es continua y al promedio de los límites derecho e izquierdo de  $f(t)$  donde  $f(t)$  es discontinua (esto es, a la media de la discontinuidad).

Como se indicó en la sección 4.2.8 para la serie de Fourier, el uso del signo de igualdad en (5.8) debe interpretarse con cuidado debido a la no convergencia de  $f(t)$  en los puntos de discontinuidad. De nuevo el símbolo  $\sim$  (que se lee como "comportarse como" o "representado por") en lugar de  $=$  es usado frecuentemente.

La condición (a) de absolutamente integrable del teorema 5.1 implica que el área absoluta debajo de la gráfica de  $y = f(t)$  es finita. Claramente esto es así si  $f(t)$  decresce suficientemente rápido con el tiempo. Sin embargo, parece implicar en general una firme restricción en la naturaleza de  $f(t)$ , ya que claramente las funciones de la forma  $f(t) = \text{constante}$ ,  $f(t) = e^{at}$ ,  $f(t) = e^{-at}$ ,  $f(t) = \sin \omega t$ , y así sucesivamente, definidas para  $-\infty < t < \infty$ , no reúnen este requerimiento. En la práctica, sin embargo, las señales usualmente son causales y no duran para siempre (esto es, existen sólo por un tiempo finito). También, en la práctica ninguna amplitud de señal tiende a infinito, así en consecuencia ninguna señal práctica  $f(t)$  puede tener un área infinita bajo su gráfica  $y = f(t)$ . Por tanto, para señales prácticas la integral en (5.8) existe.

Para obtener la forma trigonométrica (o real) de la integral de Fourier sustituimos

$$e^{-j\omega(\tau-t)} = \cos \omega(\tau - t) - j \sin \omega(\tau - t)$$

en (5.8) para obtener

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [\cos \omega(\tau - t) - j \sin \omega(\tau - t)] d\tau d\omega$$

Como  $\sin \omega(\tau - t)$  es una función impar de  $\omega$  esto se reduce a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau d\omega$$

que observando que el integrando es una función par de  $\omega$  se reduce a

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau \quad (5.9)$$

Entonces la representación (5.9) es la forma trigonométrica requerida de la integral de Fourier.

Si  $f(t)$  es una función impar o una función par entonces son posibles más simplificaciones de (5.9). Los detalles de cálculo se dejan como ejercicio para el lector y nosotros sólo citaremos los resultados.

(a) Si  $f(t)$  es una función par entonces (5.9) se reduce a

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau \cos \omega t \, d\tau \, d\omega \quad (5.10)$$

que se conoce como la **integral de Fourier en cosenos**.

(b) Si  $f(t)$  es una función impar entonces (5.9) se reduce a

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau \sin \omega t \, d\tau \, d\omega \quad (5.11)$$

que se conoce como la **integral de Fourier en senos**.

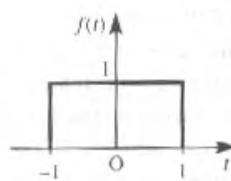


Figura 5.3 Pulso rectangular

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

En el caso de la representación en serie de Fourier de una función periódica tenía cierto interés el determinar qué tan bien representan a la función los primeros términos de la expansión. El problema correspondiente en el caso no periódico implica investigar qué tan bien representa la integral de Fourier a la función cuando sólo se toman en cuenta las componentes en la parte baja del rango de frecuencias (continuo). Para ilustrar, consideremos el pulso rectangular de la figura 5.3 dado por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

Esta claramente es una función par, así de (5.10) su integral de Fourier es

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 1 \cos \omega \tau \cos \omega t \, d\tau \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t \sin \omega}{\omega} \, d\omega$$

No es posible una evaluación elemental de esta integral, de modo que consideramos las frecuencias  $\omega < \omega_0$ , cuando

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\cos \omega t \sin \omega}{\omega} \, d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega(t+1)}{\omega} \, d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega(t-1)}{\omega} \, d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0(t+1)} \frac{\sin u}{u} \, du - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0(t-1)} \frac{\sin u}{u} \, du \end{aligned}$$

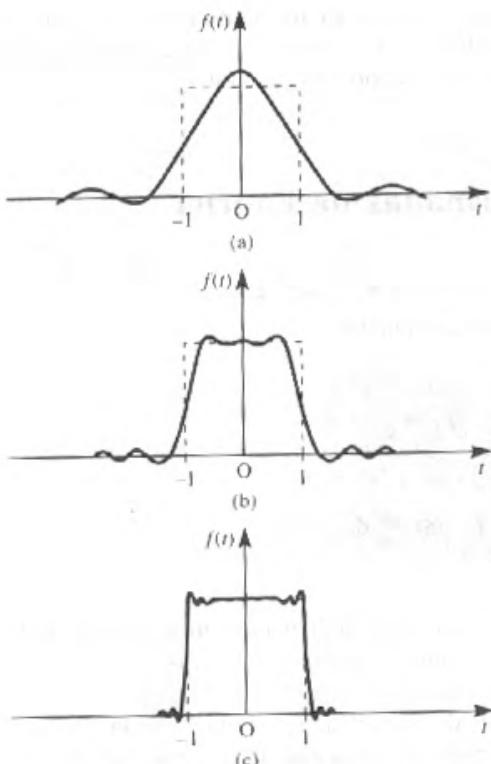


Figura 5.4 Gráfica de (5.12): (a)  $\omega_0 = 4$ ; (b)  $\omega_0 = 8$ ; (c)  $\omega_0 = 16$ .

La integral

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du \quad (x \geq 0)$$

ocurre con frecuencia, y se puede probar que

$$\text{Si}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Sus valores se han tabulado (ver por ejemplo, L. Rade y B. Westergren, *Beta Mathematics Handbook*, Chartwell-Bratt Ltd., 1990). Así

$$f(t) = \text{Si}(\omega_0(t+1)) - \text{Si}(\omega_0(t-1)) \quad (5.12)$$

Esto se ha dibujado para  $\omega_0 = 4, 8$  y  $16$ , y las respuestas se muestran en la figura 5.4(a), (b) y (c) respectivamente. Físicamente estas respuestas describen la salida de un filtro ideal de paso de bajas que recorta todas las frecuencias  $\omega > \omega_0$ , cuando

la señal de entrada es el pulso rectangular de la figura 5.3. El lector sin duda notará las similitudes con las series de Fourier discutidas en la sección 4.2.8 y la existencia continua del fenómeno de Gibbs.

### 5.2.2

## El par de transformadas de Fourier

Observamos de (5.6) y (5.7) que la integral de Fourier (5.8) puede escribirse en la forma del par de ecuaciones

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.13)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.14)$$

$F(j\omega)$  definida como en (5.13) se llama la **transformada de Fourier** de  $f(t)$  y proporciona una representación en el dominio de la frecuencia de una función no periódica  $f(t)$ , siempre que exista la integral en (5.13). Observamos que usamos la notación  $F(j\omega)$  para la transformada de Fourier de  $f(t)$  en lugar de la alternativa  $F(\omega)$  que también es de uso común. La razón para esta elección es una consecuencia de la relación entre las transformadas de Fourier y de Laplace que surgirá más adelante en la sección 5.4.1. Hacemos hincapié en que esta es una *elección* que nosotros hicimos pero el lector no debe tener dificultades en utilizar cualquiera de las formas, una vez hecha la elección se debe ser consistente. Entonces la ecuación (5.14) nos proporciona una manera de construir  $f(t)$  si conocemos la transformada de Fourier  $F(j\omega)$ .

Aquí hay que hacer algunas observaciones sobre el factor de escala  $1/2\pi$  en (5.14). A pesar de que la convención que hemos adoptado es bastante universal, algunos autores asocian el factor  $1/2\pi$  con (5.13) en lugar de con (5.14), mientras otros asocian un factor de  $(2\pi)^{-1/2}$  con cada (5.13) y (5.14). En todos los casos el par combinado da la integral de Fourier (5.8). Podemos superar esta posible confusión midiendo la frecuencia en ciclos por segundo o hertz en lugar de radianes por segundo, esto se puede llevar a cabo usando la sustitución  $f = \omega/2\pi$ , donde  $f$  está en hertz y  $\omega$  en radianes por segundo. No hemos adoptado este método ya que  $\omega$  es usada ampliamente por los ingenieros.

De acuerdo con nuestra notación para las transformadas de Laplace en el capítulo 2, se utilizó el símbolo  $\mathcal{F}$  para denotar el operador transformada de Fourier. Entonces a partir de (5.13) la transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  de una función  $f(t)$  se define como

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.15)$$

siempre que exista la integral. De manera similar, usando (5.14) definimos la transformada inversa de Fourier de  $G(j\omega)$  como

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\} = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.16)$$

siempre que exista la integral. Las relaciones (5.15) y (5.16) juntas constituyen el **par de transformadas de Fourier**, y proporcionan una trayectoria entre las representaciones del dominio del tiempo y de la frecuencia de una función. La ecuación (5.15) expresa  $f(t)$  en el dominio de la frecuencia, y es análogo resolverla en las componentes armónicas con una frecuencia  $\omega$  que varía continuamente. Esto contrasta con la representación en serie de Fourier de una función periódica donde las frecuencias resultantes toman valores discretos.

Las condiciones para la existencia de la transformada de Fourier  $F(j\omega)$  de una función  $f(t)$  son las condiciones de Dirichlet (teorema 5.1). Las formas trigonométricas que corresponden al par de transformadas de Fourier pueden escribirse a partir de (5.9), (5.10) y (5.11).

### EJEMPLO 5.1

¿Tiene la función

$$f(t) = 1 \quad (-\infty < t < \infty)$$

una representación en transformada de Fourier?

#### Solución

Como el área bajo la curva de  $y = f(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) es infinita, se sigue que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  no está acotada, de manera que las condiciones del teorema 5.1 no se satisfacen. Podemos confirmar que la transformada de Fourier no existe a partir de la definición (5.15). Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j\omega t} dt &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\alpha} - e^{j\omega\alpha}) \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \omega\alpha}{\omega} \end{aligned}$$

Como este último límite no existe concluimos que  $f(t) = 1$  ( $-\infty < t < \infty$ ) no tiene una representación en la transformada de Fourier.

Claro está, al utilizar la integración por partes, que  $f(t) = t$  ( $-\infty < t < \infty$ ) no tiene transformada de Fourier ni tampoco  $f(t) = t^n$  ( $n > 1$ , un entero;  $-\infty < t < \infty$ ).

Mientras que ni  $e^{at}$  ni  $e^{-at}$  ( $a > 0$ ) tienen transformada de Fourier, cuando consideramos la señal causal  $f(t) = H(t) e^{-at}$  ( $a > 0$ ), sí debemos obtener una transformada.

**EJEMPLO 5.2**

Encuentre la transformada de Fourier de la función exponencial de un lado

$$f(t) = H(t) e^{-at} \quad (a > 0)$$

donde  $f(t)$  es la función escalón unitario de Heaviside.

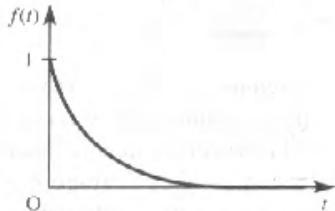


Figura 5.5 La función exponencial de "un lado" de  $f(t) = H(t) e^{-at}$  ( $a > 0$ ).

**Solución** En la figura 5.5 se muestra la gráfica de  $f(t)$  y podemos probar que el área bajo la gráfica está acotada. Así, por el teorema 5.1, existe una transformada de Fourier. Usando la definición (5.15) tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-at} e^{-j\omega t} dt \quad (a > 0) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \right]_0^{\infty}\end{aligned}$$

de manera que

$$\mathcal{F}\{H(t) e^{-at}\} = \frac{1}{a + j\omega} \quad (5.17)$$

**EJEMPLO 5.3**

Calcule la transformada de Fourier del pulso rectangular

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

**Solución** En la figura 5.6 se muestra la gráfica de  $f(t)$  y como el área bajo la gráfica es finita, existe una transformada de Fourier. De la definición (5.15) tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-T}^T A e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \left[ -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-T}^T & \omega \neq 0 \\ 2A & \omega = 0 \end{cases} \\ &= \frac{2A}{\omega} \operatorname{senc} \omega T = 2AT \operatorname{senc} \omega T\end{aligned}$$

donde  $\operatorname{senc} x$  está definida como en el ejemplo 4.22 por

$$\operatorname{senc} x = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

Figura 5.6 El pulso rectangular

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
$e^{-at} H(t) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$t e^{-at} H(t) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\begin{cases} A & ( t  \leq T) \\ 0 & ( t  > T) \end{cases}$	$2AT \operatorname{sinc} \omega T$
$e^{-at} t \quad (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Figura 5.7 Tabla breve de transformadas de Fourier.

Usando directamente la definición (5.15) podemos, como en los ejemplos 5.2 y 5.3, determinar las transformadas de Fourier de algunas funciones usuales. En la figura 5.7 se da una tabla concisa de algunas transformadas.

### 5.2.3 El espectro de Fourier continuo

De la figura 5.7, es claro que las transformadas de Fourier generalmente son funciones de valores complejos de la variable real de frecuencia  $\omega$ . Si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$  es la transformada de Fourier de la señal  $f(t)$  entonces a  $F(j\omega)$  también se le conoce como el **espectro de frecuencia (compleja)** de  $f(t)$ . Al escribir  $F(j\omega)$  en la forma exponencial

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j \arg F(j\omega)}$$

las gráficas de  $|F(j\omega)|$  y  $\arg F(j\omega)$ , las cuales son funciones de variable real  $\omega$ , se llaman los **espectros de amplitud** y de **fase** respectivamente de la señal  $f(t)$ . Estos dos espectros representan el **retrato en el dominio de la frecuencia** de la señal  $f(t)$ . En contraste con la situación cuando  $f(t)$  era periódica, donde (como se mostró en la sección 4.6.3) los espectros de amplitud y de fase se definieron sólo en valores discretos de  $\omega$ , ahora vemos que ambos espectros se definen para todos los valores de la variable continua  $\omega$ .

#### EJEMPLO 5.4

Determine los espectros de amplitud y de fase de la señal causal

$$f(t) = e^{-at} H(t) \quad (a > 0)$$

y dibuje sus gráficas.

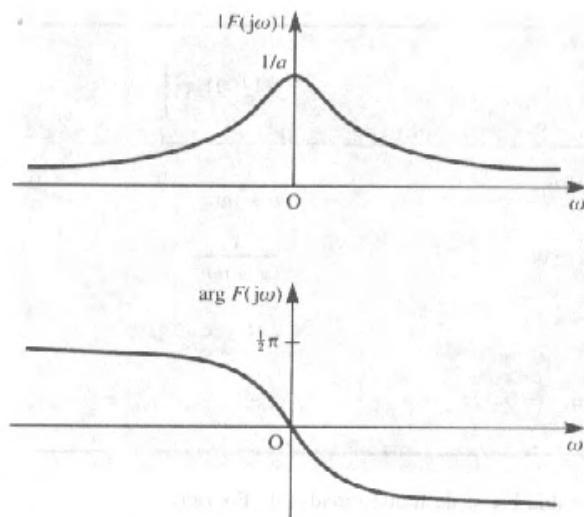


Figura 5.8 Los espectros de amplitud y de fase de la función exponencial de un lado  $f(t) = e^{-at}H(t)$  ( $a > 0$ ).

**Solución** De (5.17),

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Así la amplitud y el argumento de  $F(j\omega)$  son

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + \omega^2)}} \quad (5.18)$$

$$\arg F(j\omega) = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.19)$$

Estos son los espectros de amplitud y de fase de  $f(t)$  y están dibujados en la figura 5.8.

Generalmente, como hemos observado, la transformada de Fourier y por tanto el espectro de frecuencia son valores complejos. En algunos casos, como en el ejemplo 5.3, el espectro es completamente real. En el ejemplo 5.3 encontramos que la transformada del pulso que se muestra en la figura 5.6 era

$$F(j\omega) = 2AT \operatorname{senc} \omega T$$

donde

$$\operatorname{senc} \omega T = \begin{cases} \frac{\sin \omega T}{\omega T} & (\omega \neq 0) \\ 1 & (\omega = 0) \end{cases}$$

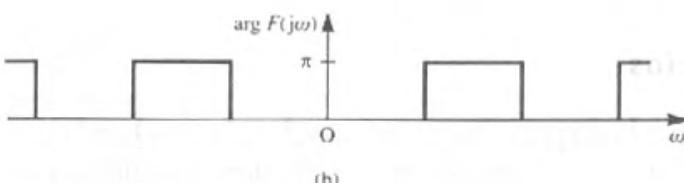
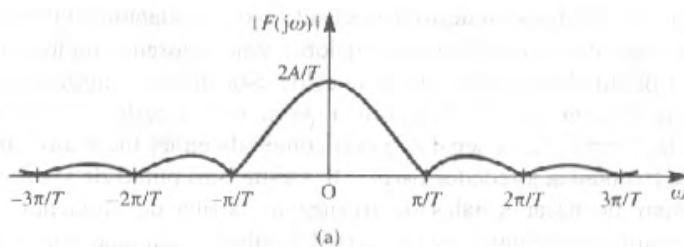


Figura 5.9 (a) Amplitud y (b) espectro del pulso  $f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$ .

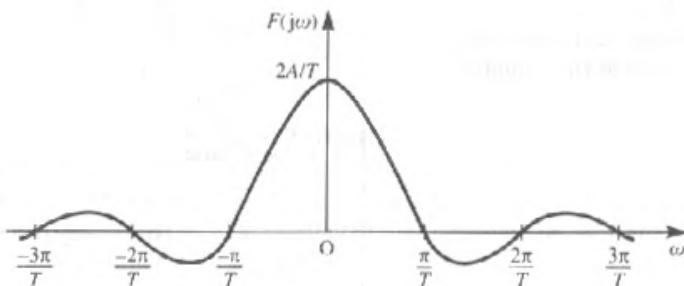


Figura 5.10 Espectro de frecuencia (de valores reales) del pulso  $f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$ .

es una función par de  $\omega$  tomando tanto valores positivos como negativos. En este caso los espectros de amplitud y de fase son

$$|F(j\omega)| = 2AT |\operatorname{senc} \omega T| \quad (5.20)$$

$$\arg F(j\omega) = \begin{cases} 0 & (\operatorname{senc} \omega T \geq 0) \\ \pi & (\operatorname{senc} \omega T < 0) \end{cases} \quad (5.21)$$

con las gráficas correspondientes que se indican en la figura 5.9.

De hecho, cuando la transformada de Fourier es una función de valores completamente reales, podemos dibujar toda la información en un solo espectro de frecuencia de  $F(j\omega)$  contra  $\omega$ . Para el pulso rectangular de la figura 5.6 la gráfica resultante se muestra en la figura 5.10.

De la figura 5.7 podemos ver que las transformadas de Fourier discutidas hasta aquí tienen dos propiedades en común. Primero, los espectros de amplitud son funciones pares de frecuencia variable  $\omega$ . Este siempre es el caso cuando la señal de tiempo  $f(t)$  es real, esto es, hablando ligeramente, una consecuencia del hecho de

que hemos descompuesto o analizado  $f(t)$ , en relación a las exponenciales complejas en lugar de en relación a las funciones seno y coseno con los valores reales. El segundo punto de observación es que los espectros de amplitud decrecen rápidamente conforme  $\omega$  crece. Esto significa que la mayor parte de la información concerniente a la "forma" de la señal  $f(t)$  está contenida en un intervalo bastante pequeño del eje de frecuencia alrededor de  $\omega = 0$ . Desde otro punto de vista, vemos que un aparato capaz de pasar señales de frecuencias arriba de alrededor  $\omega = 3\pi/T$  pasará una versión razonablemente correcta del pulso rectangular del ejemplo 5.3.

## 5.2.4 Ejercicios

- 1 Calcule la transformada de Fourier del pulso exponencial bilateral dado por

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & (t \leq 0) \\ e^{-at} & (t > 0) \end{cases} \quad (a > 0)$$

- 2 Determine la transformada de Fourier del pulso "encendido-apagado" mostrado en la figura 5.11.

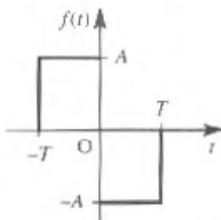


Figura 5.11 El pulso "encender-apagar".

- 3 Un pulso triangular está definido por

$$f(t) = \begin{cases} (A/T)t + A & (-T \leq t \leq 0) \\ (-A/T)t + A & (0 < t \leq T) \end{cases}$$

Dibuja  $f(t)$  y determine su transformada de Fourier. ¿Cuál es la relación entre este pulso y el del ejercicio 2?

- 4 Determine la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 2K & (|t| \leq 2) \\ 0 & (|t| > 2) \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} K & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

Dibuja la función  $h(t) = f(t) - g(t)$  y determine su transformada de Fourier.

- 5 Calcule la transformada de Fourier del pulso "encendido-apagado"  $f(t)$  definido por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -2) \\ -1 & (-2 \leq t < -1) \\ 1 & (-1 \leq t \leq 1) \\ -1 & (1 < t \leq 2) \\ 0 & (t > 2) \end{cases}$$

- 6 Demuestre que la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} \sin at & (|t| \leq \pi/a) \\ 0 & (|t| > \pi/a) \end{cases}$$

es

$$\frac{j2a \operatorname{scn}(\pi\omega/a)}{\omega^2 - a^2}$$

- 7 Calcule la transformada de Fourier de

$$f(t) = e^{-at} \sin \omega_0 t H(t)$$

- 8 Basado en (5.10) y (5.11) defina la **transformada de Fourier seno** como

$$F_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin xt dt$$

y la **transformada de Fourier coseno** como

$$F_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos xt dt$$

Pruebe que

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \cos at & (0 \leq t \leq a) \\ 0 & (t > a) \end{cases}$$

tiene transformada de Fourier coseno

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(1+x)a}{1+x} + \frac{\sin(1-x)a}{1-x} \right]$$

- 9 Pruebe que las transformadas de Fourier en seno y coseno de

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leq t \leq a) \\ 0 & (t > a) \end{cases}$$

son

$$\frac{1 - \cos xa}{x}, \quad \frac{\sin xa}{x}$$

respectivamente.

- 10 Encuentre las transformadas de Fourier en seno y coseno de  $f(t) = e^{-at} H(t)$  ( $a > 0$ ).

## 5.3 Propiedades de las transformadas de Fourier

En esta sección establecemos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier que permiten usarla como una herramienta práctica en el análisis y diseño de los sistemas.

### 5.3.1 La propiedad de linealidad

La linealidad es una propiedad fundamental de la transformada de Fourier y se puede enunciar de la siguiente manera.

Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones cuyas transformadas de Fourier son  $F(j\omega)$  y  $G(j\omega)$  respectivamente, y si  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes entonces

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\} = \alpha F(j\omega) + \beta G(j\omega) \quad (5.22)$$

Como una consecuencia de esto, decimos que el operador transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es un **operador lineal**. La prueba de esta propiedad se sigue de manera inmediata de la definición (5.15) ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha F(j\omega) + \beta G(j\omega) \end{aligned}$$

Es claro que la propiedad de linealidad también se aplica al operador transformada inversa  $\mathcal{F}^{-1}$ .

### 5.3.2 Propiedad de derivación con respecto al tiempo

Si la función  $f(t)$  tiene transformada de Fourier  $F(j\omega)$  entonces, por (5.16),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Al derivar con respecto a  $t$  se obtiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [F(j\omega) e^{j\omega t}] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

lo que implica que la señal de tiempo  $F(j\omega)$  es la transformada de Fourier inversa de  $(j\omega)F(j\omega)$ . En otras palabras

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = (j\omega)F(j\omega)$$

Repetiendo el argumento  $n$  veces, se sigue que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(j\omega) \quad (5.23)$$

El resultado (5.23) se conoce como la **propiedad de derivación con respecto al tiempo** y puede usarse para obtener las representaciones en el dominio de la frecuencia de ecuaciones diferenciales.

#### EJEMPLO 5.5

Pruebe que las señales en el tiempo  $y(t)$  y  $u(t)$  tienen transformadas de Fourier  $Y(j\omega)$  y  $U(j\omega)$  respectivamente, y si

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \quad (5.24)$$

entonces  $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$  para alguna función  $G(j\omega)$ .

**Solución** Aplicando la transformada de Fourier a todo (5.24) tenemos

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{3\frac{du(t)}{dt} + 2u(t)\right\}$$

la cual, usando la propiedad de linealidad (5.22), se reduce a

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 3\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 7\mathcal{F}\{y(t)\} = 3\mathcal{F}\left\{\frac{du(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{F}\{u(t)\}$$

Entonces, a partir de (5.23),

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 3(j\omega)Y(j\omega) + 7Y(j\omega) = 3(j\omega)U(j\omega) + 2U(j\omega)$$

esto es,

$$(-\omega^2 + j3\omega + 7)Y(j\omega) = (j3\omega + 2)U(j\omega)$$

dando

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

donde

$$G(j\omega) = \frac{2 + j3\omega}{7 - \omega^2 + j3\omega}$$

En esta etapa el lector puede estar temeroso de que estemos a punto de proponer todavía *otro* método para resolver ecuaciones diferenciales. ¡Esta no es la idea! Más bien probaremos que la transformada de Fourier proporciona una herramienta esencial para el análisis (y la síntesis) de sistemas lineales desde el punto de vista del dominio de la frecuencia.

### 5.3.3 La propiedad de corrimiento con respecto al tiempo

Si una función tiene transformada de Fourier  $F(j\omega)$  entonces, ¿cuál es la transformada de Fourier de la versión recorrida de  $f(t)$  definida por  $g(t) = f(t - \tau)$ ? De la definición (5.15),

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

Haciendo la sustitución  $x = t - \tau$ , tenemos

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+\tau)} dx = e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega\tau} F(j\omega)$$

esto es,

$$\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} F(j\omega) \quad (5.25)$$

El resultado (5.25) se conoce como la **propiedad de corrimiento con respecto al tiempo**, e implica que al retrasar una señal un tiempo  $\tau$  se produce que la transformada de Fourier se multiplique por  $e^{-j\omega\tau}$ .

Como

$$|e^{-j\omega\tau}| = |\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau| = \sqrt{(\cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau)} = 1$$

tenemos que

$$|e^{-j\omega\tau} F(j\omega)| = |F(j\omega)|$$

lo que indica que el espectro de amplitud de  $f(t - \tau)$  sea idéntico al de  $f(t)$ . Sin embargo,

$$\arg [e^{-j\omega\tau} F(j\omega)] = \arg F(j\omega) - \arg e^{j\omega\tau} = \arg F(j\omega) - \omega\tau$$

lo que indica que cada componente de la frecuencia está recorrida una cantidad proporcional a su frecuencia  $\omega$ .

### EJEMPLO 5.6

Determine la transformada de Fourier del pulso rectangular  $f(t)$  que se muestra en la figura 5.12.

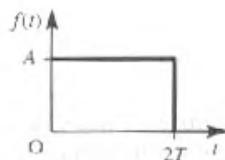


Figura 5.12 Pulso rectangular del ejemplo 5.6.

**Solución** Este es precisamente el pulso del ejemplo 5.3 (que se muestra en la figura 5.6) con retraso  $T$ . El pulso del ejemplo 5.3 tenía una transformada de Fourier  $2AT \operatorname{senc} \omega T$ , así que usando la propiedad (5.25) con  $\tau = T$ , tenemos

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = e^{-j\omega T} 2AT \operatorname{senc} \omega T = 2AT e^{-j\omega T} \operatorname{senc} \omega T$$

### 5.3.4 Propiedad de corrimiento con respecto a la frecuencia

Supongamos que una función  $f(t)$  tiene transformada de Fourier  $F(j\omega)$ . Entonces, de la definición (5.15), la transformada de Fourier de la función relacionada  $g(t) = e^{j\omega_0 t} f(t)$  es

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \text{donde } \hat{\omega} = \omega - \omega_0 \\ &= F(j\hat{\omega}), \quad \text{por definición}\end{aligned}$$

Así

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(j(\omega - \omega_0)) \tag{5.26}$$

El resultado (5.26) se conoce como la **propiedad de corrimiento con respecto a la frecuencia**, e indica que la multiplicación por  $e^{j\omega_0 t}$  sólo recorre el espectro de  $f(t)$  de manera que quede centrado en el punto  $\omega = \omega_0$  en el dominio de la frecuencia. Este fenómeno es el fundamento matemático para el proceso de **modulación** en la teoría de las comunicaciones, ilustrado en el ejemplo 5.7.

**EJEMPLO 5.7**

Determine el espectro de frecuencia de la señal  $g(t) = f(t) \cos \omega_c t$ .

**Solución**

Como  $\cos \omega_c t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$ , se sigue, usando la propiedad de linealidad (5.22), que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}f(t)(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_c t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{-j\omega_c t}\}\end{aligned}$$

Si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$  entonces, usando (5.26),

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_c t\} = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{2}F(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2}F(j(\omega + \omega_c))$$

El efecto de multiplicar la señal  $f(t)$  por la **señal portadora**  $\cos \omega_c t$  produce una señal cuyo espectro consiste de dos versiones (a escala) de  $F(j\omega)$ , el espectro de  $f(t)$ ; una versión centrada en  $\omega = \omega_c$  y la otra en  $\omega = -\omega_c$ . La señal portadora  $\cos \omega_c t$  se dice que está modulada por la señal  $f(t)$ .

La demodulación se considera en el ejercicio 5, sección 5.9, y las ideas de modulación y demodulación se desarrollan en la sección 5.8.

### 5.3.5 La propiedad de simetría

De la definición del par de transformadas (5.15) y (5.16) es claro que hay alguna simetría de estructura en relación a las variables  $t$  y  $\omega$ . Podemos establecer la forma exacta de esta simetría como sigue. De (5.16),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

o, de manera equivalente, cambiando la variable “muda” en la integración

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jy) e^{jyt} dy$$

de manera que

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jy) e^{-jyt} dy$$

o, reemplazando  $t$  por  $\omega$ ,

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jy) e^{-jy\omega} dy \quad (5.27)$$

El lado derecho de (5.27) es sólo la definición (5.15) de la transformada de Fourier de  $F(jt)$ , con la variable de integración  $t$  reemplazada por  $y$ . Por tanto, concluimos que

$$\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega) \quad (5.28a)$$

dado que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) \quad (5.28b)$$

Lo que nos dice (5.28) es que si  $f(t)$  y  $F(j\omega)$  forman un par de transformadas de Fourier entonces  $F(jt)$  y  $2\pi f(-\omega)$  también forman un par de transformadas de Fourier. Esta propiedad se conoce como la **propiedad de simetría de la transformada de Fourier**. También se le conoce como la **propiedad de dualidad**.

### EJEMPLO 5.8

Determine la transformada de Fourier de la señal

$$g(t) = C \operatorname{senc} at = \begin{cases} \frac{C \operatorname{senc} at}{at} & (t \neq 0) \\ C & (t = 0) \end{cases} \quad (5.29)$$

**Solución** Del ejemplo 5.3 sabemos que si

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases} \quad (5.30)$$

entonces

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = 2AT \operatorname{senc} \omega T$$

Así, por la propiedad de simetría (5.28),  $F(jt)$  y  $2\pi f(-\omega)$  también son un par de transformadas de Fourier. En este caso

$$F(jt) = 2AT \operatorname{senc} jtT$$

y así, eligiendo  $T = a$  y  $A = C/2a$  para corresponder a (5.29), vemos que

$$F(jt) = C \operatorname{senc} at = g(t)$$

tiene transformada de Fourier  $2\pi f(-\omega)$ . Volviendo a escribir (5.30) encontramos que como  $|\omega| = |-\omega|$ ,

$$\mathcal{F}\{C \operatorname{senc} at\} = \begin{cases} 2\pi C/2a & (|\omega| \leq a) \\ 0 & (|\omega| > a) \end{cases} = \begin{cases} \pi C/a & (|\omega| \leq a) \\ 0 & (|\omega| > a) \end{cases}$$

En la figura 5.13 se muestran una gráfica de  $g(t)$  y su transformada de Fourier  $G(j\omega) = 2\pi f(-\omega)$ .

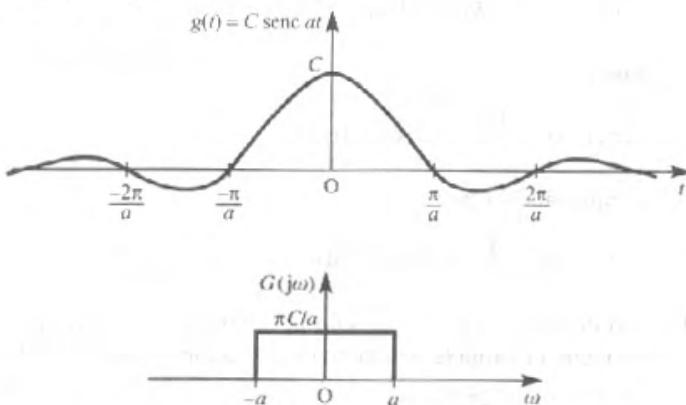


Figura 5.13 El par de transformadas de Fourier  $g(t)$  y  $G(j\omega)$  del ejemplo 5.8.

### 5.3.6 Ejercicios

11 Utilice la propiedad de linealidad para verificar el resultado del ejercicio 4.

12 Si  $y(t)$  y  $u(t)$  son señales con transformadas de Fourier  $Y(j\omega)$  y  $U(j\omega)$  respectivamente, y

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

pruebe que  $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$  para alguna función  $H(j\omega)$ . ¿Qué es  $H(j\omega)$ ?

13 Utilice la propiedad de corrimiento con respecto al tiempo para calcular la transformada de Fourier del pulso doble definido por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (1 \leq |t| \leq 2) \\ 0 & (\text{en otro caso}) \end{cases}$$

14 Calcule la transformada de Fourier de la función coseno en una ventana

$$f(t) = \cos \omega_0 t [H(t + \frac{1}{2}T) - H(t - \frac{1}{2}T)]$$

15 Encuentre la transformada de Fourier de la forma recorrida de la función coseno en una ventana

$$g(t) = \cos \omega_0 t [H(t) - H(t - T)]$$

16 Calcule la transformada de Fourier de la función seno en una ventana

$$f(t) = \sin 2t [H(t + 1) - H(t - 1)]$$

## 5.4 La respuesta de frecuencia

En esta sección consideraremos primero la relación entre las transformadas de Fourier y de Laplace, y después proseguimos considerando la respuesta de frecuencia en términos de la transformada de Fourier.

### 5.4.1 Relación entre las transformadas de Fourier y de Laplace

Las diferencias entre las transformadas de Fourier y de Laplace son muy sutiles. A primera vista parece que para obtener la transformada de Fourier de la transformada de Laplace sólo debe escribirse  $j\omega$  en lugar de  $s$ , y que ahí termina la diferencia. Esto es cierto en algunos casos pero no en todos. Estrictamente, las transformadas de Fourier y de Laplace son distintas, y ninguna es una generalización de la otra.

Escribiendo las integrales definidas tenemos

#### *La transformada de Fourier*

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.31)$$

***La transformada bilateral de Laplace***

$$\mathcal{L}_B\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (5.32)$$

***La transformada unilateral de Laplace***

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (5.33)$$

Hay una similitud estructural obvia entre (5.31) y (5.32), mientras que la conexión con (5.33) no es tan clara en vista del límite inferior de integración. Recordemos que en las definiciones de la transformada de Laplace, la  $s$  es una variable compleja y puede escribirse como

$$s = \sigma + j\omega \quad (5.34)$$

donde  $\sigma$  y  $\omega$  son variables reales. Entonces podemos interpretar (5.13), la transformada de Fourier de  $f(t)$ , como un caso especial de (5.32) cuando,  $\sigma = 0$ , suponiendo que la transformada de Laplace existe cuando  $\sigma = 0$ , o equivalentemente cuando  $s = j\omega$  (esto es,  $s$  describe el eje imaginario en el plano  $s$ ). Si restringimos nuestra atención a las funciones causales, esto es, funciones (o señales) que son cero siempre que  $t < 0$ , la transformada bilateral de Laplace (5.32) es idéntica a la transformada unilateral de Laplace (5.33). Entonces la transformada de Fourier puede verse como un caso especial de la transformada unilateral de Laplace para funciones causales, suponiendo de nuevo que la transformada unilateral de Laplace existe en el eje imaginario  $s = j\omega$ .

La siguiente parte de la historia se refiere a una clase de señales de tiempo  $f(t)$  cuya transformada de Laplace existe en el eje imaginario  $s = j\omega$ . Recordemos de (2.71) que un sistema lineal causal invariante en el tiempo con función de transferencia de Laplace  $G(s)$  tiene una respuesta al impulso  $h(t)$  dada por

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)H(t), \quad \text{digamos} \quad (5.35)$$

Aún más, si el sistema es estable entonces todos los polos de  $G(s)$  están en el semiplano izquierdo, lo que implica que  $g(t)H(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Sean las localizaciones de los polos de  $G(s)$

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

donde

$$p_k = -a_k^2 + j b_k$$

en los cuales  $a_k, b_k$  son reales y  $a_k \neq 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . En la figura 5.14 se ilustran ejemplos de tales polos donde debemos suponer que  $G(s)$  es la función de transferencia de un sistema real de manera que los polos que no están en el eje real aparecen en pares conjugados. Como se indicó en la sección 2.2.3, la función de transferencia de Laplace  $G(s)$  existirá en la región sombreada de la figura 5.14 definida por

$$\operatorname{Re}(s) > -c^2$$

donde  $-c^2$  es la abscisa de convergencia y es tal que

$$0 < c^2 < \min a_k^2$$

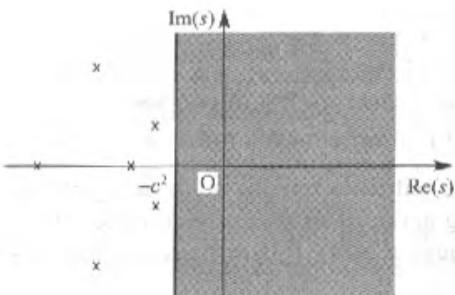


Figura 5.14 Localización de polos para  $G(s)$  y la región de existencia de  $G(s)$ .

La conclusión importante es que para tales sistemas  $G(s)$  siempre existe en el eje imaginario  $s = j\omega$ , y así  $h(t) = g(t)H(t)$  siempre tiene una transformada de Fourier. En otras palabras, hemos demostrado que la función de respuesta al impulso  $h(t)$  de un sistema lineal causal estable invariante en el tiempo siempre tiene una transformada de Fourier. Más aún, hemos demostrado que ésta se puede encontrar evaluando la transformada de Laplace en el eje imaginario, esto es, sustituyendo  $s = j\omega$  en la transformada de Laplace. Así establecimos que las transformadas de Fourier existen para una clase significativa de señales usuales; este conocimiento será requerido en la sección 5.4.2.

### EJEMPLO 5.9

¿Cuáles de los siguientes sistemas causales invariantes en el tiempo tienen respuestas al impulso que posean transformadas de Fourier? Encuentre estas últimas cuando existan.

$$(a) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

$$(b) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2y(t) = u(t)$$

$$(c) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2u(t) + \frac{du(t)}{dt}$$

**Solución** Suponiendo que los sistemas están inicialmente en reposo cuando  $t < 0$ , aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$(a) Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} U(s) = G_1(s)U(s)$$

$$(b) Y(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} U(s) = G_2(s)U(s)$$

$$(c) Y(s) = \frac{s+2}{s^2 + s + 1} U(s) = G_3(s)U(s)$$

En el caso (a) los polos de  $G_1(s)$  están en  $s = -1$  y  $s = -2$ , de manera que el sistema es estable y la respuesta al impulso tiene una transformada de Fourier dada por

$$\begin{aligned} G_1(j\omega) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{2 - \omega^2 + j3\omega} \\ &= \frac{2 - \omega^2 - j3\omega}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = \frac{(2 - \omega^2) - j3\omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} \end{aligned}$$

En el caso (b) encontramos que los polos de  $G_2(s)$  están en  $s = j\omega$  y  $s = -j\omega$ , esto es, en el eje imaginario. El sistema no es estable (observamos que la respuesta al impulso no disminuye a cero), y la respuesta al impulso no tiene una transformada de Fourier.

En el caso (c) los polos de  $G_3(s)$  están en  $s = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}$  y  $s = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Como estos están en el semiplano izquierdo  $\text{Re}(s) < 0$ , concluimos que el sistema es estable. La transformada de Fourier de la respuesta al impulso es entonces

$$G_3(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

## 5.4.2 La respuesta de frecuencia

Para un sistema lineal invariante en el tiempo, inicialmente en estado de reposo, que tiene función de transferencia de Laplace  $G(s)$ , la respuesta  $y(t)$  a una entrada  $u(t)$  está dada en (2.66) como

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (5.36)$$

donde  $Y(s)$  y  $U(s)$  son las transformadas de Laplace de  $y(t)$  y  $u(t)$  respectivamente. En la sección 2.7 vimos que, sujeta a que el sistema sea estable, la respuesta en estado estacionario  $y_{ee}(t)$  a una entrada senoidal  $u(t) = A \sin \omega t$  está dada por (2.86) como

$$y_{ee}(t) = A |G(j\omega)| \sin [\omega t + \arg G(j\omega)] \quad (5.37)$$

Esto es, la respuesta en estado estacionario también es senoidal, con la misma frecuencia que la señal de entrada pero teniendo una ganancia de amplitud  $|G(j\omega)|$  y un desfasamiento  $\arg G(j\omega)$ .

En forma más general, se pudo tomar la entrada como una señal senoidal compleja

$$u(t) = A e^{j\omega t}$$

y, sujetos a los requerimientos de estabilidad, se comprobó que la respuesta en estado estacionario es

$$y_{ee}(t) = A G(j\omega) e^{j\omega t} \quad (5.38)$$

O

$$y_{ee}(t) = A |G(j\omega)| e^{j[\omega t + \arg G(j\omega)]} \quad (5.39)$$

Como antes,  $|G(j\omega)|$  y  $\arg G(j\omega)$  se llaman la ganancia de amplitud y el desfasamiento respectivamente. Ambas son funciones de la variable real de frecuencia  $\omega$ , y sus gráficas contra  $\omega$  constituyen la **respuesta de frecuencia del sistema** que, como vimos

en la sección 2.7, caracteriza el comportamiento del sistema. Observamos que tomando las partes imaginarias en todo (5.39) llegamos a la respuesta senoidal (5.37).

Se observa que la respuesta en estado estacionario (5.38) es sólo la señal de entrada  $Ae^{j\omega t}$  multiplicada por la transformada de Fourier  $G(j\omega)$  de la respuesta al impulso del sistema. En consecuencia  $G(j\omega)$  se llama la **función de transferencia de frecuencia** del sistema. Por tanto, si el sistema representado en (5.36) es estable, de manera que  $G(j\omega)$  exista como la transformada de Fourier de su respuesta al impulso, y la entrada  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  tiene transformada de Fourier  $U(j\omega)$  entonces podemos representar el sistema en términos de la función de transferencia de frecuencia como

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) \quad (5.40)$$

Así, la ecuación (5.40) determina la transformada de Fourier del sistema de salida y puede usarse para determinar el espectro de frecuencia de la salida a partir del de la entrada. Esto significa que el espectro de amplitud y el de fase de la salida son viables, ya que

$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)| |U(j\omega)| \quad (5.41a)$$

$$\arg Y(j\omega) = \arg G(j\omega) + \arg U(j\omega) \quad (5.41b)$$

Consideraremos ahora un ejemplo que delineará juntas estas ideas y algunas ideas previas que sirven para ilustrar la relevancia de este material en la industria de las comunicaciones.

**EJEMPLO 5.10** Una señal  $f(t)$  consiste de dos componentes:

- (a) un pulso rectangular simétrico de duración  $2\pi$  (véase el ejemplo 5.3) y
- (b) un segundo pulso, también de duración  $2\pi$  (que es una copia de (a)), modulando una señal con frecuencia portadora  $\omega_0 = 3$  (el proceso de modulación se introdujo en la sección 5.3.4).

Escriba una expresión para  $f(t)$  e ilustre su espectro de amplitud. Describa el espectro de amplitud de la señal de salida si  $f(t)$  es aplicada a un sistema causal estable con la función de transferencia de Laplace

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

**Solución** Denotando el pulso del ejemplo 5.3, con  $T = \pi$ , por  $P_\pi(t)$ , y observando el uso del término ‘señal portadora’ en el ejemplo 5.7, tenemos

$$f(t) = P_\pi(t) + (\cos 3t)P_\pi(t)$$

Del ejemplo 5.3

$$\mathcal{F}\{P_\pi(t)\} = 2\pi \operatorname{sinc} \omega\pi$$

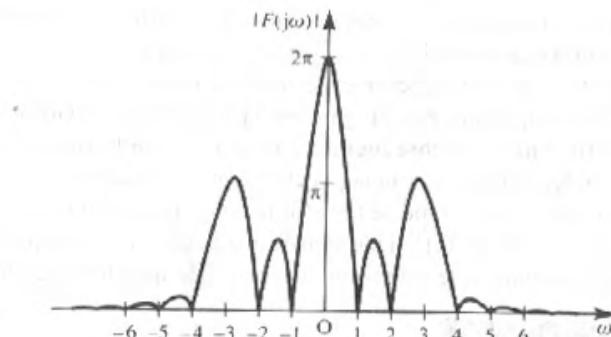


Figura 5.15 Espectro de amplitud de la señal  $P_\pi(t) + (\cos 3t)P_\pi(t)$ .

así, usando el resultado del ejemplo 5.7 tenemos

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = 2\pi \operatorname{senc} \omega\pi + \frac{1}{2}[2\pi \operatorname{senc}(\omega - 3)\pi + 2\pi \operatorname{senc}(\omega + 3)\pi]$$

En la figura 5.15 se muestra el espectro de amplitud correspondiente trazando  $|F(j\omega)|$  contra  $\omega$ .

Como el sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

es estable y causal, tiene función de transferencia a la frecuencia

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\sqrt{2}\omega}$$

de manera que su ganancia de amplitud es

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 + 1)}}$$

El espectro de amplitud de la señal de salida  $|Y(j\omega)|$  cuando la entrada es  $f(t)$  se obtiene entonces de (5.41a) como el producto de  $|F(j\omega)|$  y  $|G(j\omega)|$ . En la figura 5.16(a) y (b) se muestran las gráficas del espectro de ganancia de amplitud  $|G(j\omega)|$  y el espectro de amplitud de salida  $|Y(j\omega)|$  respectivamente. Observamos en la figura 5.16(b) que tenemos una copia razonablemente buena del espectro de amplitud de  $P_\pi(t)$  (ver la figura 5.8a). Sin embargo, el segundo elemento de  $f(t)$  ha desaparecido. Nuestro sistema ha “filtrado” esta última componente mientras “dejó pasar” una versión casi intacta de la primera. Un examen de la respuesta en el dominio del tiempo mostrará que la primera componente de hecho experimenta alguna “suavidad”, que hablando burdamente consiste en un redondeo de los picos. El sistema considerado aquí es un filtro de segundo orden “pasa bajas” de Butterworth (introducido en la sección 3.8.1).

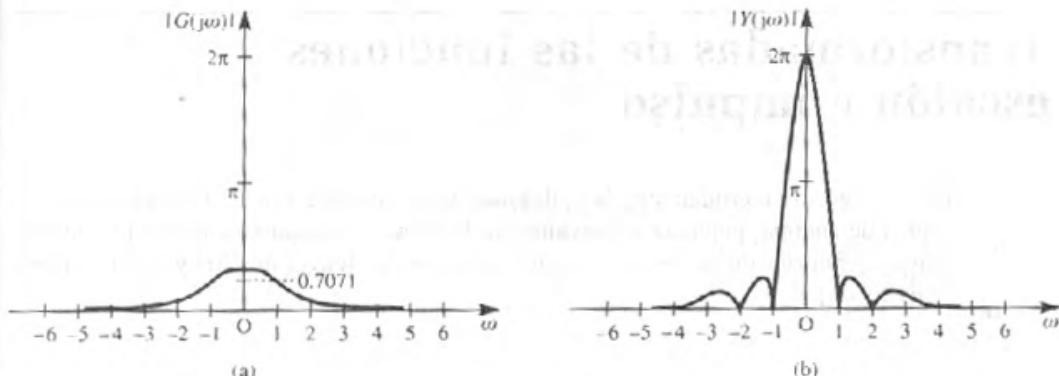


Figura 5.16 (a) Espectro de amplitud del sistema con  $G(s) = 1/(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$ ; (b) espectro de amplitud de la señal de salida  $|Y(j\omega)|$  del ejemplo 5.10.

### 5.4.3 Ejercicios

17 Encuentre la respuesta al impulso de los sistemas (a) y (c) del ejemplo 5.9. Calcule la transformada de Fourier de cada uno usando la definición (5.15), y verifique los resultados dados en el ejemplo 5.9.

18 Utilice la propiedad de corrimiento en el tiempo para calcular la transformada de Fourier del pulso rectangular doble  $f(t)$  ilustrado en la figura 5.17.

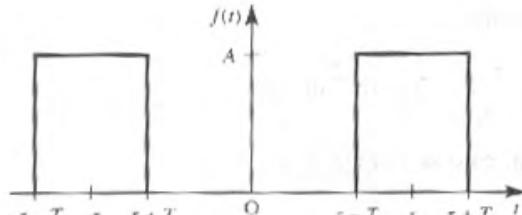


Figura 5.17 El pulso rectangular doble del ejercicio 18.

19 El sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

se discutió en el ejemplo 5.10. Realice una transformación

$$s \rightarrow \frac{1}{s'}$$

y escriba  $G(s')$ . Examine la respuesta de frecuencia de un sistema con función de transferencia  $G(s')$  y en particular encuentre la amplitud de la respuesta cuando  $\omega = 0$  y conforme  $\omega \rightarrow \infty$ . ¿Cómo describiría tal sistema?

20 Utilice la propiedad de simetría y el resultado del ejercicio 1 para calcular la transformada de Fourier de

$$f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

Dibuje  $f(t)$  y su transformada (que es real).

21 Utilice los resultados de los ejemplos 5.3 y 5.7 para calcular la transformada de Fourier de la señal de pulso modulado

$$f(t) = P_T(t) \cos \omega_0 t$$

donde

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

es un pulso de duración  $2T$ .

## 5.5

## Transformadas de las funciones escalón e impulso

En esta sección consideramos la aplicación de la transformada de Fourier a los conceptos de energía, potencia y convolución. Haciendo esto introduciremos la transformada de Fourier de la función escalón unitario de Heaviside  $H(t)$  y de la función impulso  $\delta(t)$ .

### 5.5.1 Energía y potencia

En la sección 4.6.4 introducimos el concepto del espectro de potencia de una señal periódica y encontramos que nos permite deducir información útil relacionada con la última. En esta sección definimos dos cantidades asociadas con la señal en el tiempo  $f(t)$  definida para  $-\infty < t < \infty$ , a saber la energía de la señal y la potencia de la señal. Estas cantidades son importantes no solamente por si mismas, sino que, como veremos, juegan un papel importante en la caracterización de los tipos de señales.

La **energía** total asociada a la señal  $f(t)$  está definida como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \quad (5.42)$$

Si  $f(t)$  tiene transformada de Fourier  $F(j\omega)$ , de manera que, de (5.16)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

entonces (5.42) puede expresarse como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

Cambiando el orden de integración, esto se convierte en

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \quad (5.43)$$

De la integral definida (5.15) para  $F(j\omega)$ , reconocemos la parte del integrando dentro de los paréntesis cuadrados como  $F(-j\omega)$ , que, si  $f(t)$  es real, es tal que  $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ , donde  $F^*(j\omega)$  es la conjugada compleja de  $F(j\omega)$ . Así (5.43) se convierte en

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega) d\omega$$

de manera que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.44)$$

La ecuación (5.44) relaciona la energía total de la señal  $f(t)$  con la integral sobre todas las frecuencias de  $|F(j\omega)|^2$ . Por esta razón  $|F(j\omega)|^2$  se llama **densidad de energía espectral**, y una gráfica de  $|F(j\omega)|^2$  contra  $\omega$  se llama el **spectro de energía** de la señal  $f(t)$ . El resultado (5.44) se llama el **teorema de Parseval** y es una extensión del resultado contenido en el teorema 4.6 para señales periódicas.

### EJEMPLO 5.11

Determine las densidades de energía espectral de

- (a) la función exponencial de un lado  $f(t) = e^{-at}H(t)$  ( $a > 0$ ),
- (b) el pulso rectangular de la figura 5.6.

**Solución** (a) De (5.17), la transformada de Fourier de  $f(t)$  es

$$F(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Por tanto, la densidad de energía espectral de la función es

$$|F(j\omega)|^2 = F(j\omega)F^*(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \cdot \frac{a + j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

esto es,

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$$

(b) Del ejemplo 5.3, la transformada de Fourier  $F(j\omega)$  del pulso rectangular es

$$F(j\omega) = 2AT \operatorname{senc} \omega T$$

Así la densidad de energía espectral del pulso es

$$|F(j\omega)|^2 = 4A^2 T^2 \operatorname{senc}^2 \omega T$$

Hay señales importantes  $f(t)$ , definidas en general para  $-\infty < t < \infty$ , para las cuales la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt$  en (5.42) es o no acotada (esto es, se vuelve infinita) o no converge a un límite finito; por ejemplo,  $\operatorname{sen} t$ . Para tales señales, en lugar de considerar la energía, consideraremos la potencia promedio  $P$ , frecuentemente conocida como la **potencia** de la señal. Ésta está definida por

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \quad (5.45)$$

Observemos que para señales que satisfacen las condiciones de Dirichlet (teorema 5.1) la integral en (5.42) existe y, como en (5.45) dividimos entre la duración de la señal, se sigue que tales señales tienen potencia cero asociada con ellas.

Ahora nos preguntamos: ‘¿Existen otras señales que posean transformadas de Fourier?’ Como se podía esperar, la respuesta es ‘Sí’ aunque la manera de obtener las transformadas será diferente de nuestro procedimiento hasta ahora. Veremos que las transformadas así obtenidas, usando la integral inversa (5.16) producen algunas señales ‘ordinarias’ hasta ahora excluidas de nuestra discusión.

Empezamos por considerar la transformada de Fourier de la función generalizada  $\delta(t)$ , la función delta de Dirac introducida en la sección 2.5.8. Recordemos de (2.49) que  $\delta(t)$  satisface la propiedad del corrimiento; esto es, para una función continua  $g(t)$

$$\int_a^b g(t)\delta(t-c) dt = \begin{cases} g(c) & (a < c < b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Usando la integral definida (5.15), obtenemos las siguientes dos transformadas de Fourier:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (5.46)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \quad (5.47)$$

Estas dos transformadas son, por ahora, intrascendentes y notando que  $|e^{-j\omega t_0}| = 1$ , en la figura 5.18 ilustramos las señales y sus espectros.

Ahora nos alejamos de la definición de la transformada de Fourier dada en (5.15) y buscamos pares de transformadas basados en (5.46) y (5.47). Usando la propiedad de simetría (dualidad) de la sección 5.3.5, deducimos de (5.46) que

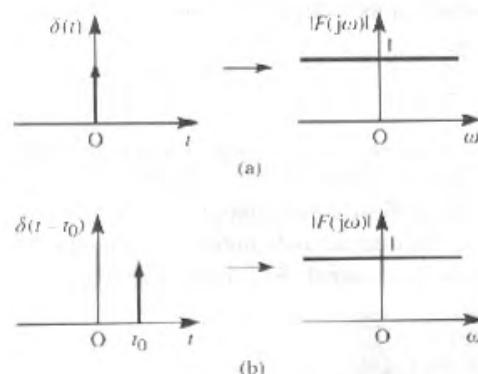


Figura 5.18 (a)  $\delta(t)$  y su espectro de amplitud; (b)  $\delta(t - t_0)$  y su espectro de amplitud.

$$1 \quad y \quad 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (5.48)$$

es otro par de transformadas de Fourier. De manera análoga, de (5.47) deducimos que

$$e^{-j\omega_0 t} \quad y \quad 2\pi\delta(-\omega - \omega_0)$$

también es un par de transformadas de Fourier. Sustituyendo  $t_0 = -\omega_0$  en la última tenemos

$$e^{j\omega_0 t} \quad y \quad 2\pi\delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5.49)$$

como otro par de transformadas de Fourier.

Así afirmamos en (5.48) y (5.49) que  $f_1(t) = 1$  y  $f_2(t) = e^{j\omega_0 t}$ , no tienen transformadas de Fourier "ordinarias" como la definida en (5.15), realmente tienen **transformadas de Fourier "generalizadas"** dadas por

$$F_1(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (5.50)$$

$$F_2(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5.51)$$

respectivamente.

Usamos el término "generalizadas" porque las dos transformadas contienen las funciones generalizadas  $\delta(\omega)$  y  $\delta(\omega - \omega_0)$ . Ahora probaremos nuestra conjectura de que (5.50) y (5.51) son transformadas de Fourier de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  respectivamente. Si (5.50) y (5.51) son verdaderamente transformadas de Fourier entonces sus imágenes en el dominio del tiempo  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  respectivamente deberían reaparecer vía la transformada inversa (5.16). Sustituyendo  $F_1(j\omega)$  de (5.50) en (5.16) tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

así se recupera  $f_1(t) = 1$ .

De manera similar, usando (5.51) tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_2(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

así que  $f_2(t) = e^{j\omega_0 t}$  también se recupera.

Por consiguiente, nuestro método tiene éxito y verdaderamente tenemos un camino para generar nuevos pares de transformadas. Por tanto, usaremos el método para encontrar transformadas de Fourier generalizadas para las señales

$$f_3(t) = \cos \omega_0 t, \quad f_4(t) = \sin \omega_0 t$$

Como

$$f_3(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

la propiedad de linealidad (5.22) da

$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}$$

que, usando (5.49), conduce al par de transformadas de Fourier generalizadas

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (5.52)$$

De manera análoga, deducimos el par de transformadas de Fourier generalizadas

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (5.53)$$

El desarrollo de (5.53) y la verificación de que (5.52) y (5.53) se invierten correctamente usando la transformada inversa (5.16) se deja como un ejercicio para el lector.

Vale la pena observar en esta etapa que definir la transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  de  $f(t)$  en (5.15) como

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

siempre que la integral exista no impide la existencia de otras transformadas de Fourier, tal como la generalizada que acabamos de introducir definida por otros medios.

Es claro que la energía total

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \omega_0 t dt.$$

asociada con la señal  $f_3(t) = \cos \omega_0 t$  no está acotada. Sin embargo, de (5.45) podemos calcular la potencia asociada con la señal como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \omega_0 t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ t + \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{2}$$

Así, mientras la señal  $f_3(t) = \cos \omega_0 t$  tiene energía no acotada asociada con ella, su potencia contenida es  $\frac{1}{2}$ . Las señales cuya energía asociada es finita, por ejemplo  $f(t) = e^{-at} H(t)$ , ( $a > 0$ ), algunas veces son llamadas **señales de energía**, mientras aquellas cuya energía asociada no está acotada pero cuya potencia total es finita se conocen como **señales de potencia**. Los conceptos de señales de potencia y densidad de potencia spectral son importantes en el análisis de señales aleatorias y el lector interesado puede consultar textos especializados.

### EJEMPLO 5.12

Supongamos que una función periódica  $f(t)$  definida en  $-\infty < t < \infty$ , puede desarrollarse en una serie de Fourier cuya forma exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

¿Cuál es la transformada de Fourier (generalizada) de  $f(t)$ ?

**Solución** De la definición

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

que, usando (5.49), da

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)$$

Esto es,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

donde  $F_n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) son los coeficientes de la forma exponencial de la representación de la serie de Fourier de  $f(t)$ .

### EJEMPLO 5.13

Utilice el resultado del ejemplo 5.12 para verificar la transformada de Fourier de  $f(t) = \cos \omega_0 t$  dada en (5.52).

**Solución** Como

$$f(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

las  $F_n$  del ejemplo 5.12 son

$$F_{-1} = F_1 = \frac{1}{2}$$

$$F_n = 0 \quad (n \neq \pm 1)$$

Así, al usar el resultado

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= 2\pi F_{-1} \delta(\omega + \omega_0) + 2\pi F_1 \delta(\omega - \omega_0) \\ &= \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

de acuerdo con (5.52).

### EJEMPLO 5.14

Determine la transformada de Fourier (generalizada) de la función periódica "diente de sierra" definida por

$$f(t) = \frac{2t}{T} \quad (0 < t < 2T)$$

$$f(t + 2T) = f(t)$$

**Solución**

En el ejemplo 4.19 vimos que la forma exponencial de la representación en serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

con

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

$$F_0 = 2$$

$$F_n = \frac{j2}{n\pi} \quad (n \neq 0)$$

Se sigue del ejemplo 5.12 que la transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= F(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} j\frac{4}{n}\delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 4\pi\delta(\omega) + j4 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n}\delta\left(\omega - \frac{n\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

Así vemos que el espectro de amplitud consiste únicamente de los pulsos localizados en los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental  $\omega_0 = \pi/T$ . El espectro discreto obtenido vía la forma exponencial de la serie de Fourier para esta función periódica se reproduce ahora con un factor de escala de  $2\pi$ .

### EJEMPLO 5.15

Determine la transformada de Fourier (generalizada) del tren de impulso unitario  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  que se muestra simbólicamente en la figura 5.19.

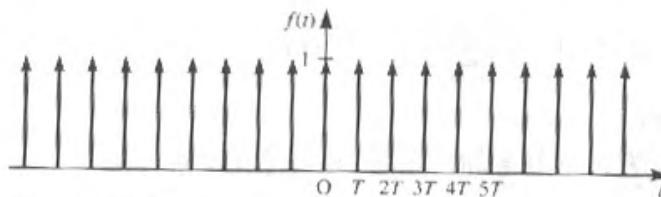


Figura 5.19 Tren de impulsos unitarios  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ .

#### Solución

A pesar de que  $f(t)$  es una función generalizada y no una función en el sentido ordinario, se sigue que como

$$\begin{aligned} f(t + kT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + (k - n)T) \quad (\text{siendo } k \text{ un entero}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (m = n - k) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

es periódica con periodo  $T$ . Más aún, podemos expandir  $f(t)$  formalmente como una serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \left( \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

con

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \quad \text{para toda } n$$

Se sigue del ejemplo 5.12 que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Así probamos que

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right\} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (5.54)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Esto es, el tren de impulso en el dominio del tiempo tiene como su transformada otro tren de impulso. Veremos en la sección 5.6.4 que este resultado es de particular importancia en el tratamiento del muestreo de señales en el tiempo.

Nuestra pesquisa exitosa de transformaciones de Fourier generalizadas nos conduce a considerar la posibilidad de que la función escalón unitario de Heaviside  $H(t)$  definida en la sección 2.5.1 pueda tener una transformada en este sentido. Recordemos de (2.56) que si

$$f(t) = H(t)$$

entonces

$$\frac{df(t)}{dt} = \delta(t)$$

De la propiedad de derivación con respecto al tiempo (5.23) podemos esperar que si

$$\mathcal{F}\{H(t)\} = \tilde{H}(j\omega)$$

entonces

$$(j\omega)\tilde{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad (5.55)$$

La ecuación (5.55) sugiere que un candidato para  $\tilde{H}(j\omega)$  puede ser  $1/j\omega$ , pero éste no es el caso, ya que la inversión usando (5.16) no regresa a  $H(t)$ . Usando (5.16) y las técnicas de variable compleja, se puede probar que

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -\frac{1}{2} & (t < 0) \end{cases} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

donde  $\operatorname{sgn}(t)$  es la **función signo** definida por

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$

Sin embargo, observamos que (5.55) también lo satisface

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + c\delta(\omega) \quad (5.56)$$

donde  $c$  es una constante. Esto se sigue de la propiedad de equivalencia (véase la definición 2.2)  $f(\omega)\delta(\omega) = f(0)\delta(\omega)$  con  $f(\omega) = j\omega$ , que da

$$(j\omega)\tilde{H}(j\omega) = 1 + (j\omega)c\delta(\omega) = 1$$

Invirtiendo (5.56) usando (5.16) tenemos

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega} + c\delta(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{j\omega} + c\delta(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \begin{cases} c/2\pi + \frac{1}{2} & (t > 0) \\ c/2\pi & (t = 0) \\ c/2\pi - \frac{1}{2} & (t < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

y eligiendo  $c = \pi$  tenemos

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \frac{1}{2} & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

Así (casi) recuperamos la función escalón  $H(t)$ . Aquí  $g(t)$  toma el valor  $\frac{1}{2}$  en  $t = 0$ , pero esto no es sorprendente debido a la convergencia de la integral de Fourier en los puntos de discontinuidad como los dados en el teorema 5.1. Con esta previsión probamos que

$$\tilde{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{H(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (5.57)$$

Debemos reconocer que hicimos una conjectura acerca de añadir un término adicional en (5.56) para obtener la transformada de Fourier (5.57). En cambio, podríamos haber elegido  $c\delta(k\omega)$  con  $k$  siendo una constante como término adicional. Aunque es posible probar que esto no lleva a un resultado diferente, la prueba de unicidad no es trivial y se sale del alcance de este libro.

## 5.5.2 Convolución

En la sección 2.6.6 vimos que la integral de convolución, junto con la transformada de Laplace, proporcionan una herramienta útil para la *discusión* de la naturaleza de la solución de una ecuación diferencial, a pesar de que quizás no sea la manera más

eficiente para evaluar la solución de un problema particular. Como el lector esperaría, en vista de la dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia, hay dos resultados de convoluciones involucrados en la transformada de Fourier.

## Convolución en el tiempo

Supongamos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u(t)\} &= U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \\ \mathcal{F}\{v(t)\} &= V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

entonces la transformada de Fourier de la convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau) d\tau = u(t) * v(t) \quad (5.58)$$

es

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{y(t)\} &= Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v(t - \tau) dt \right] d\tau\end{aligned}$$

Introducimos los cambios de variable  $z \rightarrow t - \tau$ ,  $\tau \rightarrow \tau$  y siguiendo el procedimiento de cambio de variable de la sección 2.6.6, la transformada se puede expresar como

$$\begin{aligned}Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(z) e^{-j\omega(z+\tau)} dz \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} v(z) e^{-j\omega z} dz\end{aligned}$$

de manera que

$$Y(j\omega) = U(j\omega)V(j\omega) \quad (5.59)$$

Esto es,

$$\mathcal{F}\{u(t)*v(t)\} = \mathcal{F}\{v(t)*u(t)\} = U(j\omega)V(j\omega) \quad (5.60)$$

lo que indica que una convolución en el dominio del tiempo se transforma en un producto en el dominio de la frecuencia.

## Convolución en la frecuencia

Si

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = U(j\omega), \quad \text{con } u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\mathcal{F}\{v(t)\} = V(j\omega), \quad \text{con } v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

entonces la transformada inversa de la convolución

$$U(j\omega) * V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(jy) V(j(\omega - y)) dy$$

está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega) * V(j\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} U(jy) V(j(\omega - y)) dy \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jy) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} V(j(\omega - y)) e^{j\omega t} d\omega \right] dy \end{aligned}$$

Un cambio de variable  $z \rightarrow \omega - y$ ,  $\omega \rightarrow \omega$  lleva a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega) * V(j\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jy) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} V(jz) e^{j(z-y)t} dz \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jy) e^{jyt} dy \int_{-\infty}^{\infty} V(jz) e^{jzt} dz \\ &= 2\pi u(t)v(t) \end{aligned}$$

Esto es,

$$\mathcal{F}\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} U(j\omega) * V(j\omega) \tag{5.61}$$

y esta multiplicación en el dominio del tiempo corresponde a la convolución en el dominio de la frecuencia (sujeta al factor de escala  $1/(2\pi)$ ).

### EJEMPLO 5.16

Supongamos que  $f(t)$  tiene una transformada de Fourier  $F(j\omega)$ . Encuentre una expresión para la transformada de Fourier de  $g(t)$  donde

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

**Solución** Como

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & (\tau \leq t) \\ 0 & (\tau > t) \end{cases}$$

podemos escribir

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) H(t - \tau) d\tau = f(t) * H(t)$$

la convolución de  $g(t)$  y  $H(t)$ . Entonces, al usar (5.60)

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(j\omega) = F(j\omega)\bar{H}(j\omega)$$

la cual, al usar la expresión para  $\bar{H}(j\omega)$  de (5.57), da

$$G(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

de manera que

$$G(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (5.62)$$

### 5.5.3 Ejercicios

22 Verifique que  $\mathcal{F}^{-1}\{\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\} = \cos \omega_0 t$ .

23 Pruebe que  $\mathcal{F}\{\operatorname{sen} \omega_0 t\} = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ . Utilice (5.16) para verificar que

$$\mathcal{F}^{-1}\{j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]\} = \operatorname{sen} \omega_0 t$$

24 Suponga que  $f(t)$  y  $g(t)$  tienen transformadas de Fourier  $F(j\omega)$  y  $G(j\omega)$  respectivamente, definidas en el sentido "ordinario" (esto es, usando (5.15)), y pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(jt) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt)g(t) dt$$

Este resultado se conoce como la **fórmula de Parseval**.

25 Utilice el resultado del ejercicio 24 y la propiedad de simetría para probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)G(-j\omega) d\omega$$

26 Utilice el resultado de convolución en el dominio de la frecuencia para obtener  $\mathcal{F}\{H(t) \operatorname{sen} \omega_0 t\}$ .

27 Calcule la forma exponencial de la serie de Fourier para el tren de pulsos periódicos que se muestra en la figura 5.20. Ahora pruebe que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2\pi A d}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{senc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

( $\omega_0 = 2\pi/T$ ), y  $A$  es la altura del pulso.

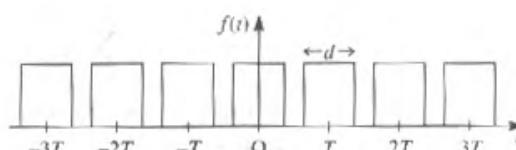


Figura 5.20 Tren de pulsos periódicos del ejercicio 27.

**5.6****La transformada de Fourier en tiempo discreto****5.6.1****Introducción**

En las secciones anteriores de este capítulo se analizó la transformada de Fourier de señales definidas como funciones de la variable  $t$  continua en el tiempo. Vimos que un área importante de aplicación es el análisis de señales en el dominio de la frecuencia llegando al concepto de respuesta de frecuencia de un sistema lineal. En el capítulo 4 consideramos señales definidas en instantes de tiempo discreto junto con sistemas lineales modelados por ecuaciones diferenciales. Ahí encontramos que en el análisis de sistemas la transformada  $z$  juega un papel semejante al de la transformada de Laplace para sistemas continuos en el tiempo. Ahora pretendemos desarrollar una teoría del análisis de Fourier para completar la de sistemas de tiempo continuo, y después considerar el problema de estimación de la transformada de Fourier de tiempo continuo en una forma conveniente para ejecutar en computadoras.

**5.6.2****La transformada de Fourier para sucesiones**

Primero regresamos a nuestro trabajo sobre series de Fourier y escribimos la forma exponencial de la representación en serie de Fourier para la función periódica  $F(e^{j\theta})$  de periodo  $2\pi$ . Escribimos  $\theta = \omega t$ , para deducir de (4.57) y (4.61) que

$$F(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\theta} \quad (5.63)$$

donde

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\theta}) e^{-jn\theta} d\theta \quad (5.64)$$

Así la operación generó una sucesión de números  $\{f_n\}$  a partir de la función periódica  $F(e^{j\theta})$  de la variable continua  $\theta$ . Invertimos el proceso e imaginemos que *empezamos* con una sucesión  $\{g_k\}$  y usamos (5.63) para *definir* una función periódica  $\tilde{G}'(e^{j\theta})$  tal que

$$\tilde{G}'(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{jn\theta} \quad (5.65)$$

Así definimos una transformación de la sucesión  $\{g_k\}$  a  $\tilde{G}'(e^{j\theta})$ . Esta transformación se puede invertir, ya que, de (5.64),

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}'(e^{j\theta}) e^{-jk\theta} d\theta \quad (5.66)$$

y recuperar los términos de la sucesión  $\{g_k\}$  de  $\hat{G}'(e^{j\theta})$ .

Es conveniente para nuestro trabajo futuro modificar la definición ligeramente, definiendo la transformada de Fourier de una sucesión  $\{g_k\}$  como

$$\mathcal{F}\{g_k\} = G(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\theta} \quad (5.67)$$

siempre que la serie converja. Entonces la transformada inversa está dada a partir de (5.66) por

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\theta}) e^{jk\theta} d\theta \quad (5.68)$$

Así los resultados (5.67) y (5.68) constituyen el par de transformadas de Fourier para la sucesión  $\{g_k\}$ . Observamos que  $G(e^{j\theta})$  es una función de la variable continua  $\theta$ , y como es una función  $e^{j\theta}$  es periódica (con un periodo de  $2\pi$ ) independiente de si la sucesión  $\{g_k\}$  es o no periódica.

Cabe indicar que adoptamos la notación  $G(e^{j\theta})$  en lugar de  $G(\theta)$  para la transformada de Fourier similar a nuestro uso de  $F(j\omega)$  en lugar de  $F(\omega)$  en el caso de señales en tiempo continuo. En este caso estaremos interesados en relacionarla con la transformada  $z$  del capítulo 3, donde  $z = r e^{j\theta}$ , y el significado de nuestra elección pronto surgirá.

**EJEMPLO 5.17** Encuentre la transformada de la sucesión  $\{g_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ , donde  $g_0 = 2$ ,  $g_2 = g_{-2} = 1$  y  $g_k = g_{-k} = 0$  para  $k \neq 0$  o  $2$ .

### Solución

De la definición (5.67),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g_k\} &= G(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\theta} \\ &= g_{-2} e^{j2\theta} + g_0 1 + g_2 e^{-j2\theta} = e^{j2\theta} + 2 + e^{-j2\theta} \\ &= 2(1 + \cos 2\theta) = 4 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

En este caso particular la transformada es periódica de periodo  $\pi$  en lugar de  $2\pi$ . Esto se debe a que  $g_1 = g_{-1} = 0$ , de manera que  $\cos \theta$  no aparece en la transformada. Como  $G(e^{j\theta})$  es real puro, podemos dibujar la transformada como en la figura 5.21.

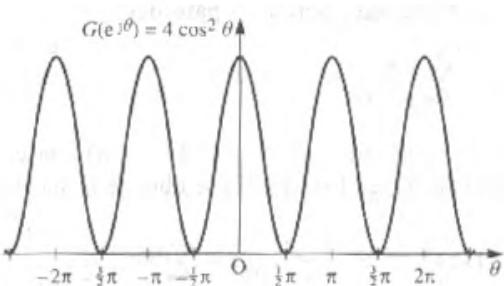


Figura 5.21 Transformada de la sucesión del ejemplo 5.17.

Habiendo definido una transformada de Fourier para sucesiones, ahora queremos vincularla con la respuesta de frecuencia de sistemas en tiempo discreto. En la sección 5.4.2 el eslabón entre las respuestas de frecuencia y las transformadas de Fourier de sistemas en tiempo continuo se establece usando la transformada de Laplace. Por tanto, sospechamos que la transformada  $z$  proporcionará el eslabón necesario para sistemas de tiempo discreto. De hecho, el argumento sigue muy de cerca a aquél de la sección 5.4.2.

Para un sistema causal de tiempo discreto invariante en el tiempo con una función de transferencia  $z$ ,  $G(z)$  la relación entre la sucesión de entrada  $\{u_k\}$  y la sucesión de salida  $\{y_k\}$  en el dominio transformado está indicada en la sección 3.6.1 por

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (5.69)$$

donde  $U(z) = \mathcal{Z}\{u_k\}$  y  $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$ .

Para investigar la respuesta de frecuencia del sistema buscamos la sucesión de salida correspondiente a la sucesión de entrada

$$\{u_k\} = \{A e^{j\omega kT}\} = \{A e^{jk\theta}\}, \quad \theta = \omega T \quad (5.70)$$

que representa muestras dibujadas en intervalos iguales  $T$ , a partir de la señal senoidal compleja de tiempo continuo  $e^{j\omega t}$ .

Entonces la respuesta de frecuencia del sistema de tiempo discreto es su respuesta en estado estacionario a la sucesión  $\{u_k\}$  dada en (5.70). Como para el caso de tiempo continuo (sección 5.4.2), la forma compleja  $e^{j\omega t}$  se usa para simplificar el álgebra y la respuesta senoidal en estado estacionario es fácil de recuperar tomando las partes imaginarias si es necesario.

De la figura 3.3 se observa que

$$\mathcal{Z}\{A e^{jk\theta}\} = \mathcal{Z}\{A(e^{j\theta})^k\} = \frac{Az}{z - e^{j\theta}}$$

así de (5.69) la respuesta del sistema a la sucesión de entrada (5.70) está determinada por

$$Y(z) = G(z) \frac{Az}{z - e^{j\theta}} \quad (5.71)$$

Haciendo que el sistema sea de orden  $n$  y bajo las suposiciones de que los  $n$  polos  $p_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) de  $G(z)$  son distintos y ninguno es igual a  $e^{j\theta}$ , podemos desarrollar  $Y(z)/z$  en fracciones parciales para dar

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{c}{z - e^{j\theta}} + \sum_{r=1}^n \frac{c_r}{z - p_r} \quad (5.72)$$

donde, en general, las constantes  $c_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) son complejas. Tomando la inversa de la transformada  $z$  en todo (5.72) se obtiene la sucesión de respuesta como

$$\{y_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zc}{z - e^{j\theta}}\right\} + \sum_{r=1}^n \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zc_r}{z - p_r}\right\}$$

esto es,

$$\{y_k\} = c\{e^{jk\theta}\} + \sum_{r=1}^n c_r\{p_r^k\} \quad (5.73)$$

Si la función de transferencia  $G(z)$  corresponde a un sistema estable en tiempo discreto entonces todos sus polos  $p_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) están dentro del círculo unitario  $|z| < 1$ , de manera que todos los términos bajo el signo de la sumatoria en (5.73) tienden a cero conforme  $k \rightarrow \infty$ . Esto se ve claramente expresando  $p_r$  en la forma  $p_r = |p_r| e^{j\phi_r}$  y observamos que si  $|p_r| < 1$  entonces  $|p_r|^k \rightarrow 0$  conforme  $k \rightarrow \infty$ . En consecuencia, para sistemas estables la respuesta en estado estacionario correspondiente a (5.73) es

$$\{y_{k_{ee}}\} = c\{e^{jk\theta}\}$$

Usando la regla de "cubrir" para fracciones parciales la constante  $c$  está determinada a partir de (5.71) como

$$c = AG(e^{j\theta})$$

de manera que la respuesta en estado estacionario se convierte en

$$\{y_{k_{ee}}\} = AG(e^{j\theta})\{e^{jk\theta}\} \quad (5.74)$$

Supusimos que los polos de  $G(z)$  son distintos para simplificar el álgebra. Extendiendo el desarrollo para ajustarlo a polos múltiples se logra fácilmente, llegando a la misma respuesta en estado estacionario como la dada en (5.74).

El resultado (5.74) corresponde a (5.38) para sistemas de tiempo continuo, e indica que la sucesión de respuesta en estado estacionario es simplemente la sucesión de entrada con cada término multiplicado por  $G(e^{j\theta})$ . En consecuencia,  $G(e^{j\theta})$  se llama la **función de transferencia de la frecuencia** del sistema de tiempo discreto y, como para el caso continuo, caracteriza la respuesta de frecuencia del sistema. Es claro que  $G(e^{j\theta})$  es simplemente  $G(z)$ , la función  $z$  de transferencia, con  $z = e^{j\theta}$ , y así sólo estamos evaluando la función  $z$  de transferencia alrededor del círculo unitario  $|z| = 1$ . La función  $z$  de transferencia  $G(z)$  existirá en  $|z| = 1$  si y sólo si el sistema es estable y así el resultado es el análogo exacto del resultado para sistemas de tiempo continuo de la sección 5.4.2, donde se evaluó la función de transferencia de Laplace a lo largo del eje imaginario para llegar a la respuesta de frecuencia de un sistema lineal estable en tiempo continuo.

Para completar la analogía con los sistemas de tiempo continuo necesitamos un resultado más amplio. De la sección 3.6.2, la respuesta al impulso del sistema lineal causal de tiempo discreto con la función  $z$  de transferencia  $G(z)$  es

$$\{y_{k_\delta}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \{g_k\}_{k=0}^\infty, \quad \text{digamos}$$

Aplicando transformadas inversas entonces se obtiene

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k z^{-k}$$

como  $g_k = 0$  ( $k < 0$ ) para un sistema causal. Así

$$G(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-jk\theta}$$

y concluimos de (5.67) que  $G(e^{j\theta})$  es simplemente la transformada de Fourier de la sucesión  $\{g_k\}$ . Por tanto, la función de transferencia de frecuencia en tiempo discreto  $G(e^{j\theta})$  es la transformada de Fourier de la sucesión de respuesta al impulso.

### EJEMPLO 5.18

Determine la función de transferencia de la frecuencia del sistema causal en tiempo discreto que se muestra en la figura 5.22 y dibuje su espectro de amplitud.

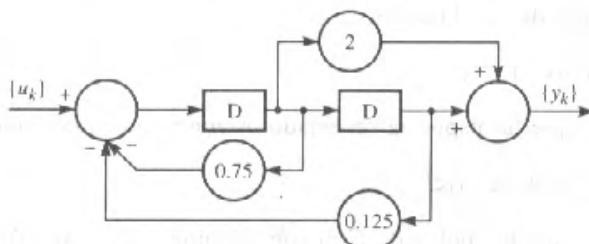


Figura 5.22 Sistema en tiempo discreto del ejemplo 5.18.

### Solución

Al usar los métodos de la sección 3.6.1, se obtiene fácilmente la función  $z$  de transferencia como

$$G(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + 0.75z + 0.125}$$

Después verificamos la estabilidad del sistema. Como  $z^2 + 0.75z + 0.125 = (z + 0.5)(z + 0.25)$ , los polos de  $G(z)$  están en  $p_1 = -0.5$  y  $p_2 = -0.25$ , y como ambos están dentro del círculo unitario  $|z| = 1$ , el sistema es estable. Entonces la función de transferencia de la frecuencia puede obtenerse como  $G(e^{j\theta})$ , donde

$$G(e^{j\theta}) = \frac{2e^{j\theta} + 1}{e^{j2\theta} + 0.75e^{j\theta} + 0.125}$$

Para determinar el espectro de amplitud, evaluamos  $|G(e^{j\theta})|$  como

$$\begin{aligned}|G(e^{j\theta})| &= \frac{|2e^{j\theta} + 1|}{|e^{j2\theta} + 0.75e^{j\theta} + 0.125|} \\&= \frac{\sqrt{(5 + 4 \cos \theta)}}{\sqrt{(1.578 + 1.688 \cos \theta + 0.25 \cos 2\theta)}}$$

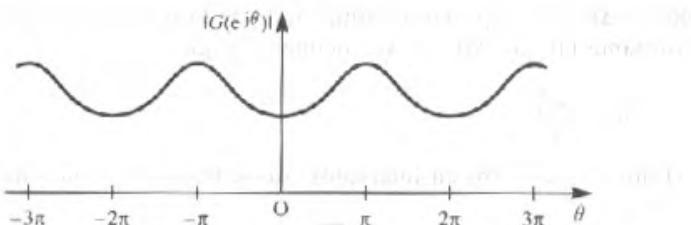


Figura 5.23 Espectro de amplitud del sistema del ejemplo 5.18.

Una gráfica de  $|G(e^{j\theta})|$  contra  $\theta$  entonces conduce al espectro de amplitud de la figura 5.23.

En el ejemplo 5.18 observamos el comportamiento periódico del espectro de amplitud, el cual es ineludible cuando están involucrados sistemas y señales en tiempo discreto. Sin embargo, observamos que la periodicidad es en la variable  $\theta = \omega T$  y debemos tener control sobre la elección de  $T$ , el tiempo entre las muestras de nuestra señal de entrada.

### 5.6.3 La transformada de Fourier discreta

La transformada de Fourier de sucesiones discutida en la sección 5.6.2 transforma una sucesión  $\{g_k\}$  en una función continua  $G(e^{j\theta})$  de una variable de frecuencia  $\theta$ , donde  $\theta = \omega T$  y  $T$  es el tiempo entre señales muestrales. En esta sección, con un ojo puesto en los requerimientos computacionales, observamos las implicaciones del muestreo  $G(e^{j\theta})$ . La operación completa empezará con muestras de una señal en el tiempo  $\{g_k\}$  y seguirá vía el proceso de transformación de Fourier, finalmente se obtendrá una sucesión  $\{G_k\}$  de muestras obtenidas a partir de la imagen en el dominio de la frecuencia  $G(e^{j\theta})$  de  $\{g_k\}$ .

Supongamos que tenemos una sucesión  $\{g_k\}$  de  $N$  muestras obtenidas a partir de una señal de tiempo continuo  $g(t)$  en intervalos iguales  $T$ , esto es

$$\{g_k\} = \{g(kT)\}_{k=0}^{N-1}$$

Al usar (5.67) la transformada de Fourier de esta sucesión es

$$\mathcal{F}\{g_k\} = G(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\theta} \quad (5.75)$$

donde  $g_k = 0$  ( $k \notin [0, N-1]$ ). Entonces, con  $\theta = \omega T$ , podemos escribir (5.75) como

$$G(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jn\omega T} \quad (5.76)$$

Ahora muestreamos esta transformación  $G(e^{j\omega T})$  en intervalos  $\Delta\omega$  para crear  $N$  muestras igualmente repartidas sobre el intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , esto es, sobre un periodo de la función periódica  $G(e^{j\theta})$ . Entonces tenemos

$$N \Delta\theta = 2\pi$$

donde  $\Delta\theta$  es el espaciado normalizado de la frecuencia. Como  $\theta = \omega T$  y  $T$  es una constante tal que  $\Delta\theta = T\Delta\omega$ , deducimos que

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT} \quad (5.77)$$

Al muestrear (5.76) en intervalos  $\Delta\omega$  se produce la sucesión

$$\{G_k\}_{k=0}^{N-1}, \quad \text{donde} \quad G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jn\Delta\omega T} \quad (5.78)$$

Como

$$\begin{aligned} G_{k+N} &= \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jn(k+N)\Delta\omega T} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jn\Delta\omega T} e^{-jn2\pi}, \quad \text{usando (5.77)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jn\Delta\omega T} = G_k \end{aligned}$$

se sigue que la sucesión  $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$  es periódica con periodo  $N$ . Por tanto, generamos una sucesión de muestras en el dominio de la frecuencia que en cierto sentido representa al espectro de la señal fundamental en tiempo continuo. Pospondremos, por el momento, la pregunta de la naturaleza exacta de esta representación, pero como el lector habrá adivinado, es crucial para el propósito de esta sección. Primero, consideraremos la pregunta de si, a partir del conocimiento de la sucesión  $\{G_k\}_{k=0}^{N-1}$  de (5.78), podemos recuperar la sucesión original  $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$ . Para ver cómo se puede alcanzar esto, consideraremos una suma de la forma

$$S_r = \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{-jkr\Delta\omega T}, \quad (N-1) \leq r \leq 0 \quad (5.79)$$

Sustituimos  $G_k$  con (5.78) para obtener

$$S_r = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{N-1} g_m e^{-jm\Delta\omega T} \right) e^{-jkr\Delta\omega T} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} g_m e^{-jk\Delta\omega(m+r)T}$$

Esto es, intercambiando el orden de integración

$$S_r = \sum_{m=0}^{N-1} g_m \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Delta\omega(m+r)T} \quad (5.80)$$

Ahora

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Delta\omega(m+r)T}$$

es una progresión geométrica con el primer término  $e^0 = 1$  y la razón común  $e^{-j\Delta\omega(m+r)T}$ , y así la suma de los  $N$  términos es

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Delta\omega(m+r)T} = \frac{1 - e^{-j\Delta\omega(m+r)NT}}{1 - e^{-j\Delta\omega(m+r)T}} = \frac{1 - e^{-j(m+r)2\pi}}{1 - e^{-j\Delta\omega(m+r)T}} = 0 \quad (m \neq -r + nN)$$

Cuando  $m = -r$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Delta\omega(m+r)T} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

Así

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\Delta\omega(m+r)T} = N\delta_{m,-r} \quad (5.81)$$

donde  $\delta_y$  es la delta de Kronecker definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

Sustituyendo (5.81) en (5.80) tenemos

$$S_r = N \sum_{m=0}^{N-1} g_m \delta_{m,-r} = Ng_{-r}$$

Regresando a (5.79) y sustituyendo para  $S_r$  vemos que

$$g_{-r} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{-jkr\Delta\omega T}$$

que haciendo  $n = -r$  da

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jkn\Delta\omega T} \quad (5.82)$$

Así (5.82) nos permite determinar el miembro de la sucesión

$$\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$$

esto es, nos permite recuperar *exactamente* las muestras en el dominio del tiempo a partir de las muestras en el dominio de la frecuencia.

Las relaciones

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jnk\Delta\omega T} \quad (5.78)$$

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jnk\Delta\omega T} \quad (5.82)$$

con  $\Delta\omega = 2\pi/NT$ , entre las sucesiones en el dominio del tiempo y el de la frecuencia  $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$  y  $\{G_k\}_{k=0}^{N-1}$  definen el par de **transformadas de Fourier discretas (TFD)**. El par proporciona una trayectoria entre los dominios del tiempo y de la frecuencia para señales en tiempo discreto en exactamente el mismo sentido que (5.15) y (5.16) definen trayectorias similares para señales de tiempo continuo. Debe enfatizarse de nuevo que cualesquiera que sean las propiedades de las sucesiones  $\{g_n\}$  y  $\{G_k\}$  en el lado derecho de (5.78) y (5.82), la sucesión generada en el lado izquierdo será periódica con periodo  $N$ .

**EJEMPLO 5.19**

La sucesión  $\{g_k\}_{k=0}^2 = \{1, 2, 1\}$  es generada muestreando una señal en el tiempo  $g(t)$  en intervalos con  $T = 1$ . Determine la transformada de Fourier discreta de la sucesión y verifique que la sucesión puede recuperarse exactamente a partir de su transformada.

**Solución**

De (5.78) la sucesión de la transformada de Fourier discreta  $\{G_k\}_{k=0}^2$  es generada por

$$G_k = \sum_{n=0}^2 g_n e^{-jn\pi\Delta\omega T} \quad (k = 0, 1, 2)$$

En este caso,  $T = 1$  y con  $N = 3$  (5.77) da

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{3 \times 1} = \frac{2}{3}\pi$$

Así

$$G_0 = \sum_{n=0}^2 g_n e^{-jn\pi\Delta\omega T} = \sum_{n=0}^2 g_n = g_0 + g_1 + g_2 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \sum_{n=0}^2 g_n e^{-jn\pi\Delta\omega T} = g_0 e^{j0\pi} + g_1 e^{-j2\pi/3} + g_2 e^{-j4\pi/3} = 1 + 2e^{-j2\pi/3} + 1e^{-j4\pi/3} \\ &= e^{-j2\pi/3} (e^{j2\pi/3} + 2 + e^{-j2\pi/3}) = 2e^{-j2\pi/3} (1 + \cos \frac{2}{3}\pi) = e^{-j2\pi/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{n=0}^2 g_n e^{-jn\pi\Delta\omega T} = \sum_{n=0}^2 g_n e^{-jn4\pi/3} = g_0 e^{j0\pi} + g_1 e^{-j4\pi/3} + g_2 e^{-j8\pi/3} \\ &= e^{-j4\pi/3} [e^{j4\pi/3} + 2 + e^{-j4\pi/3}] = 2e^{-j4\pi/3} (1 + \cos \frac{4}{3}\pi) = e^{-j4\pi/3} \end{aligned}$$

Así

$$\{G_k\}_{k=0}^2 = \{4, e^{-j2\pi/3}, e^{-j4\pi/3}\}$$

Ahora debemos probar que el uso de (5.82) recuperará la sucesión original  $\{g_k\}_{k=0}^2$ . De (5.82) la transformada inversa de  $\{G_k\}_{k=0}^2$  está dada por

$$\tilde{g}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jk\pi\Delta\omega T}$$

de nuevo, con  $T = 1$ ,  $\Delta\omega = \frac{2}{3}\pi$  y  $N = 3$ . Así

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k e^{jk\pi\Delta\omega T} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k = \frac{1}{3} (4 + e^{-j2\pi/3} + e^{-j4\pi/3}) \\ &= \frac{1}{3} [4 + e^{-jn}(e^{jn/3} + e^{-jn/3})] = \frac{1}{3} (4 - 2 \cos \frac{1}{3}\pi) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k e^{jk\pi\Delta\omega T} = \frac{1}{3} (G_0 + G_1 e^{j2\pi/3} + G_2 e^{j4\pi/3}) \\ &= \frac{1}{3} (4 + 1 + 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2 &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k e^{jk\pi\Delta\omega T} = \frac{1}{3} (G_0 + G_1 e^{-j4\pi/3} + G_2 e^{-j8\pi/3}) \\ &= \frac{1}{3} [4 + e^{jn}(e^{jn/3} + e^{-jn/3})] = \frac{1}{3} (4 - 2 \cos \frac{1}{3}\pi) = 1 \end{aligned}$$

Esto es,

$$\{\tilde{g}_n\}_{n=0}^2 = \{1, 2, 1\} = \{g_k\}_{k=0}^2$$

y así recuperamos exactamente la sucesión original a partir de su transformada.

Vemos del ejemplo 5.19 que la operación de calcular  $N$  términos de la sucesión transformada involucra  $N \times N = N^2$  multiplicaciones y  $N(N - 1)$  sumas, en general todas son operaciones que involucran números complejos. El cálculo de la transformada de Fourier discreta de esta manera directa se dice que es un cálculo de complejidad  $N^2$ . Estos cálculos se vuelven imposibles conforme  $N$  crece debido al tiempo requerido para su ejecución.

## 5.6.4 Estimación de la transformada de Fourier continua

Vimos en la sección 5.4.2 que la transformada de Fourier continua proporciona un medio para examinar la respuesta de frecuencia de un sistema lineal estable invariante en el tiempo, en tiempo *continuo*. De manera similar, vimos en la sección 5.6.2 cómo es que una transformada de Fourier de tiempo discreto puede desarrollarse de manera que permita examinar la respuesta de frecuencia de un sistema lineal estable invariante en el tiempo, en tiempo *discreto*. Al muestrear esta última transformada desarrollamos la transformada de Fourier discreta. ¿Por qué hicimos esto? Primero encontramos una manera (por lo menos en teoría) de involucrar la computadora en nuestros esfuerzos. Segundo, como probaremos ahora, podemos usar la transformada de Fourier discreta para estimar la transformada de Fourier continua de una señal en tiempo continuo. Para ver cómo se hace esto, primero examinemos lo que pasa cuando muestreamos una señal en tiempo continuo.

Supongamos que  $f(t)$  es una señal no periódica en tiempo continuo, de la que se muestra una porción en la figura 5.24(a). Muestreamos la señal en intervalos iguales  $T$  para generar la sucesión

$$\{f(0), f(T), \dots, f(nT), \dots\}$$

como se muestra en la figura 5.24(b). Ahora supongamos que cada una de estas muestras se presentan por turno, en el instante apropiado, como la entrada a un sistema lineal continuo invariante en el tiempo con respuesta al impulso  $h(t)$ . Entonces la salida será, debido a la sección 2.6.6,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(0) \delta(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(T) \delta(\tau - T) d\tau \\ &\quad + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(nT) \delta(\tau - nT) d\tau + \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(\tau - kT) d\tau \end{aligned}$$

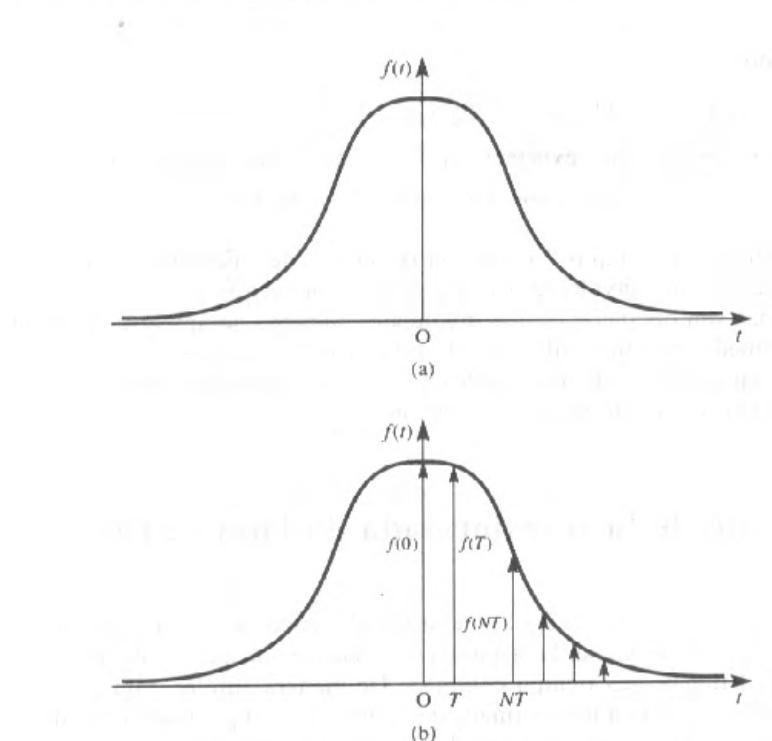


Figura 5.24 (a) Señal en tiempo continuo  $f(t)$ ; (b) muestras obtenidas de  $f(t)$ .

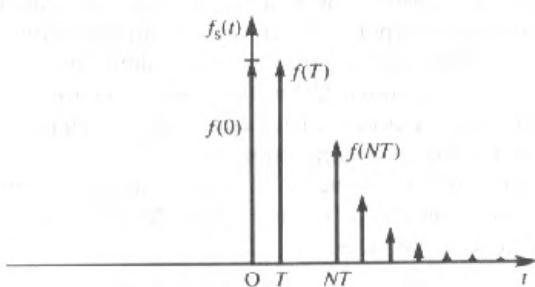


Figura 5.25 Visualización de  $f_s(t)$  definida en (5.84).

Así

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f_s(\tau) d\tau \quad (5.83)$$

donde

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (5.84)$$

la cual identificamos como una representación “en tiempo continuo” de la versión de muestreo de  $f(t)$ . Así, estamos espaciando verticalmente la imagen de  $f_s(t)$  como en la figura 5.25.

Para admitir la posibilidad de señales que no son cero para  $t < 0$ , podemos generalizar ligeramente (5.84) permitiendo que

$$f_s(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (5.85)$$

Ahora usamos convolución para encontrar la transformada de Fourier  $F_s(j\omega)$  de  $f_s(t)$ . Al usar la representación (5.85) para  $f_s(t)$  tenemos

$$F_s(j\omega) = \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\}$$

que al usar (5.61) conduce a

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\} \quad (5.86)$$

donde

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$$

De (5.54),

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

de manera que, suponiendo que es posible intercambiar el orden de integración y la suma, (5.86) se convierte en

$$\begin{aligned} F_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(j[\omega - \omega']) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega' - \frac{2\pi k}{T}\right) d\omega' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(j[\omega - \omega']) \delta\left(\omega' - \frac{2\pi k}{T}\right) d\omega' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \end{aligned}$$

Así

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j[\omega - k\omega_0]), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (5.87)$$

Al examinar (5.87) vemos que el espectro  $F_s(j\omega)$  de la versión de muestreo  $f_s(t)$  de  $f(t)$  consiste en repeticiones del espectro  $F(j\omega)$  de  $f(t)$  multiplicado por un factor  $1/T$ ; estas repeticiones están separadas en intervalos  $\omega_0 = 2\pi/T$ . La figura 5.26(a)

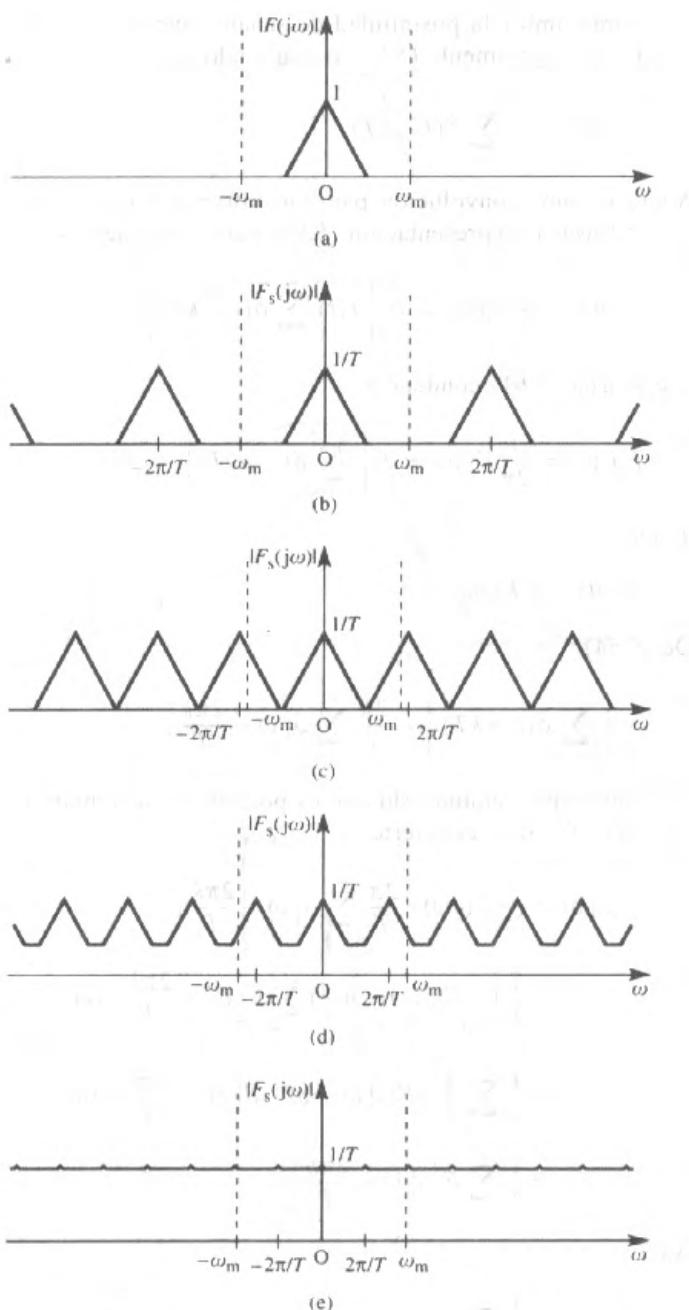


Figura 5.26 (a) Espectro de amplitud de una señal de banda limitada  $f(t)$ . (b)–(e) Espectro de amplitud  $|F_s(j\omega)|$  de  $f_s(t)$ , que muestra repeticiones periódicas de  $|F_s(j\omega)|$  y efectos de interacción conforme  $T$  crece.

muestra el espectro de amplitud  $|F(j\omega)|$  de una señal de banda limitada  $f(t)$ , esto es, una señal cuyo espectro es cero para  $|\omega| > \omega_m$ . Las figuras 5.26(b-e) muestran el espectro de amplitud  $|F_s(j\omega)|$  de la versión de muestreo para valores crecientes del intervalo de muestreo  $T$ . Es claro que conforme  $T$  crece, el espectro de  $F(j\omega)$ , como se observa al usar  $|F_s(j\omega)|$  en  $-\omega_m < \omega < \omega_m$ , se vuelve cada vez más engañoso debido a la "interacción" de las copias adyacentes.

Como vimos en la sección 5.6.2, la periodicidad en el espectro de amplitud  $|F_s(j\omega)|$  de  $f_s(t)$  es inevitable como una consecuencia del proceso de muestreo y se necesitan encontrar caminos para minimizar los problemas que provoca. La interacción que se observa en la figura 5.26 entre las repeticiones periódicas se conoce como **error de aliasamiento**, y es esencial para minimizar este efecto. Esto puede alcanzarse de manera obvia si la señal original sin muestreo  $f(t)$  es de banda limitada como en la figura 5.26(a). Es evidente que debemos lograr que las repeticiones periódicas de  $|F(j\omega)|$  estén suficientemente alejadas para evitar la interacción entre las copias. Esto implica que tenemos

$$\omega_0 \geq 2\omega_m$$

en un mínimo absoluto (¡e impráctico!). Como  $\omega_0 = 2\pi/T$ , la restricción implica que

$$T \leq \pi/\omega_m$$

donde  $T$  es el intervalo entre las muestras. El mínimo intervalo de tiempo permitido es

$$T_{\min} = \pi/\omega_m$$

que se conoce como el **intervalo de Nyquist** y de hecho dedujimos una forma del **teorema de muestreo de Nyquist-Shannon**. Si  $T < T_{\min}$  entonces las "copias" de  $F(j\omega)$  están aisladas unas de otras, y podemos fijarnos sólo en una copia tanto para el propósito de reconstruir la señal como para los propósitos de estimación de la misma  $F(j\omega)$ . Aquí sólo estamos interesados con el último problema. Básicamente, establecemos una condición bajo la cual el espectro de las muestras de la señal de banda limitada  $f(t)$ , esto es, el espectro de  $f_s(t)$ , puede usarse para estimar  $F(j\omega)$ .

Supongamos que dibujamos  $N$  muestras de una señal continua  $f(t)$  a intervalos  $T$  de acuerdo con el criterio de Nyquist, como en la figura 5.27. Entonces consideramos

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t - kT)$$

o de manera equivalente, la sucesión

$$\{f_k\}_{k=0}^{N-1}, \quad \text{donde } f_k = f(kT)$$

Observamos que

$$f_s(t) = 0 \quad (t > (N-1)T)$$

de manera que

$$f_k = 0 \quad (k > N-1)$$

La transformada de Fourier de  $f_s(t)$  es

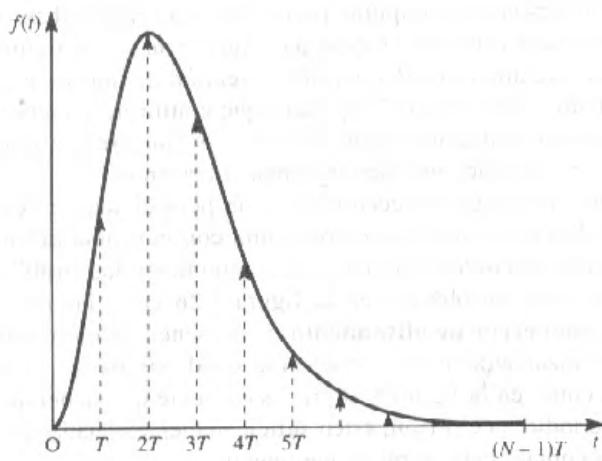


Figura 5.27 Muestreo de una señal en tiempo continuo

$$\begin{aligned}
 F_s(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jk\omega kT} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jk\omega kT}
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

La transformada en (5.88) es una función de la variable continua  $\omega$ , así, como en (5.78), ahora podemos muestrear el espectro continuo  $F_s(j\omega)$  para permitir la evaluación con computadora.

Elegimos  $N$  muestras para representar  $f(t)$  en el dominio del tiempo, y por esta razón también elegimos  $N$  muestras en el dominio de la frecuencia para representar  $F(j\omega)$ . Así muestreamos (5.88) en intervalos  $\Delta\omega$ , para generar la sucesión

$$\{F_s(jn\Delta\omega)\}_{n=0}^{N-1} \tag{5.89a}$$

donde

$$F_s(jn\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jk\omega kT} \tag{5.89b}$$

Ahora debemos elegir el intervalo de muestreo en el dominio de la frecuencia  $\Delta\omega$ . Para ver cómo hacer esto recordamos que el espectro de la muestra  $F_s(j\omega)$  consiste en repeticiones de  $F(j\omega)$ , espaciadas en intervalos  $2\pi/T$ . Así, para muestrear una sola copia íntegramente debemos elegir

$$N\Delta\omega = 2\pi/T$$

0

$$\Delta\omega = 2\pi/NT \quad (5.90)$$

Observamos que la sucesión resultante, definida fuera de  $0 \leq n \leq N - 1$ , es periódica, como era de esperarse. Sin embargo, observamos también que, siguiendo con nuestro análisis de la sección 5.6, el proceso de recuperar una señal en el tiempo a partir del muestreo de su espectro producirá una onda periódica sin importar la naturaleza de la señal en el tiempo original. No nos debe sorprender esto ya que está de acuerdo con nuestra discusión introductoria de la sección 5.1.

En vista del factor de escala  $1/T$  en (5.87), nuestra estimación de la transformada de Fourier  $F(j\omega)$  de  $f(t)$  sobre el intervalo

$$0 \leq t \leq (N - 1)T$$

será a partir de (5.89) la sucesión de muestreo

$$\{TF_s(jn\Delta\omega)\}_{n=0}^{N-1}$$

donde

$$TF_s(jn\Delta\omega) = T \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jkn\Delta\omega T}$$

que, de la definición de la transformada de Fourier discreta en (5.78), da

$$TF_s(jn\Delta\omega) = T \times \text{DFT}\{f_k\}$$

donde  $\text{TDF}\{f_k\}$  es la transformada de Fourier discreta de la sucesión  $\{f_k\}$ . Ilustramos el uso de esta estimación en el ejemplo 5.20.

### EJEMPLO 5.20

En la figura 5.28 se muestra un pulso triangular con retraso  $f(t)$ . Estime su transformada de Fourier usando 10 muestras y compare con los valores exactos.

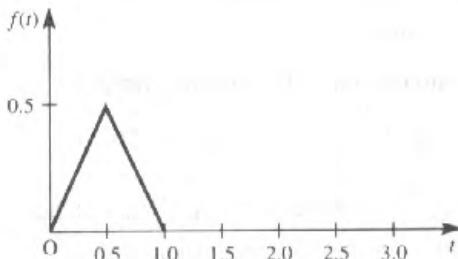


Figura 5.28 El pulso triangular con retraso.

**Solución** Al usar  $N = 10$  muestras a intervalos  $T = 0.2\text{s}$ , generamos la sucesión

$$\{f_k\}_{k=0}^9 = \{f(0), f(0.2), f(0.4), f(0.6), f(0.8), f(1.0), f(1.2), f(1.4), f(1.6), f(1.8)\}$$

Es claro, a partir de la figura 5.28, que podemos expresar la función continua  $f(t)$  como

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 0.5) \\ 1-t & (0.5 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t \geq 1) \end{cases}$$

y así

$$\{f_k\}_{k=0}^9 = \{0, 0.2, 0.4, 0.4, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

Usando (5.78) la transformada de Fourier discreta  $\{F_n\}_{n=0}^9$  de la sucesión  $\{f_k\}_{k=0}^9$  es generada por

$$F_n = \sum_{k=0}^9 f_k e^{-jkn\Delta\omega T} \quad \text{donde } \Delta\omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{10 \times 0.2} = \pi$$

Esto es,

$$F_n = \sum_{k=0}^9 f_k e^{-jkn(0.2\pi)}$$

o, como  $f_0 = f_5 = f_6 = f_7 = f_8 = f_9 = 0$ ,

$$F_n = \sum_{k=1}^4 f_k e^{-jkn(0.2\pi)}$$

La estimación de la transformada de Fourier también basada en  $N = 10$  muestras es la sucesión

$$\{TF_n\}_{n=0}^9 = \{0.2F_n\}_{n=0}^9$$

Así tenemos 10 valores representando la transformada de Fourier en

$$\omega = n\Delta\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 9)$$

o como  $\Delta\omega = 2\pi/NT$

$$\omega = 0, \pi, 2\pi, \dots, 9\pi$$

En  $\omega = \pi$ , que corresponde a  $n = 1$ , nuestra estimación es

$$\begin{aligned} 0.2F_1 &= 0.2 \sum_{k=1}^4 f_k e^{-jk(0.2\pi)} \\ &= 0.2[0.2 e^{-j(0.2\pi)} + 0.4(e^{-j(0.4\pi)} + e^{-j(0.6\pi)}) + 0.2 e^{-j(0.8\pi)}] \\ &= -0.1992j \end{aligned}$$

En  $\omega = 2\pi$ , que corresponde a  $n = 2$ , nuestra estimación es

$$\begin{aligned} 0.2F_2 &= 0.2 \sum_{k=1}^4 f_k e^{-jk(0.4\pi)} \\ &= 0.2[0.2 e^{-j(0.4\pi)} + 0.4(e^{-j(0.8\pi)} + e^{-j(1.2\pi)}) + 0.2 e^{-j(1.6\pi)}] \\ &= -0.1047 \end{aligned}$$

$\omega$	Exacto $F(j\omega)$	TFD estimada	$ F(j\omega) $	$ TFD estimada $	% error
0	0.2500	0.2400	0.2500	0.2400	4%
$\pi$	-0.2026j	-0.1992j	0.2026	0.1992	1.7%
$2\pi$	-0.1013	-0.1047	0.1013	0.1047	3.2%
$3\pi$	0.0225j	0.0180j	0.0225	0.0180	20%
$4\pi$	0	-0.0153	0	0.0153	-
$5\pi$	-0.0081j	0	0.0081	0	-
$6\pi$	-0.0113	-0.0153	0.0113	0.0153	-
$7\pi$	0.0041	-0.0180j	0.0041	0.0180	-
$8\pi$	0	-0.1047	0	0.1047	-
$9\pi$	-0.0025j	0.1992j	0.0025	0.1992	-

Figura 5.29 Comparación de los resultados exactos y la TFD estimada para el espectro de amplitud de la señal del ejemplo 5.20.

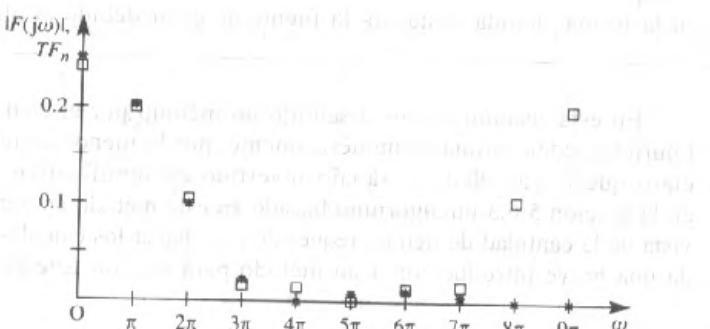


Figura 5.30 Resultado exacto  $|F(j\omega)|$  (\*) y la TFD estimada  $TF_n$  (□) de la transformada de Fourier del ejemplo 5.20.

Continuando de esta manera calculamos la sucesión

$$\{0.2F_0, 0.2F_1, \dots, 0.2F_n\}$$

como

$$\{0.2400, -0.1992j, -0.1047, 0.0180j, -0.0153, 0, -0.0153, -0.0180j, \\ -0.1047, 0.1992j\}$$

Entonces esto representa la estimación de la transformada de Fourier de la función continua  $f(t)$ . El valor exacto de la transformada de Fourier de  $f(t)$  se calcula fácilmente a partir de la definición (5.15) como

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{4} e^{-j\omega/2} \operatorname{senc}^2 \frac{1}{4} \omega$$

que podemos usar para examinar la validez de nuestro resultado. En la figura 5.29 se muestra la comparación y en la figura 5.30 se ilustra gráficamente.

A partir del teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, con  $T = 0.2$  s, deducimos que nuestros resultados serán exactos si la señal original  $f(t)$  es de banda limitada con espectro cero para  $|\omega| > |\omega_m| = 5\pi$ . Nuestra señal no es estrictamente

de banda limitada de esta manera, y así esperamos observar algún error en nuestros resultados, en particular cerca de  $\omega = 5\pi$ , debido a los efectos de alisamiento. La estimación obtenida es satisfactoria en  $\omega = 0, \pi, 2\pi$ , pero empieza a perder exactitud en  $\omega = 3\pi$ . Los resultados obtenidos más allá de  $\omega = 5\pi$  se ven como las imágenes de los obtenidos para valores abajo de  $\omega = 5\pi$  y era de esperarse debido a la periodicidad de TFD. En nuestros cálculos la sucesión TFD será periódica con periodo  $N = 10$ ; así por ejemplo

$$|TF_7| = |TF_{7-10}| = |TF_{-3}| = T|F_{-3}|$$

Como vimos muchas veces, para una señal real el espectro de amplitud es simétrico alrededor de  $\omega = 0$ . De ese modo  $|F_{-3}| = |F_3|$ ,  $|F_{-5}| = |F_5|$ , y así sucesivamente, y los efectos de la simetría son evidentes en la figura 5.29. Quizá vale la pena observar que si calculamos (digamos)  $\{TF_{-4}, TF_{-3}, \dots, TF_0, TF_1, \dots, TF_5\}$ , obtendríamos una gráfica "convencional" con una porción derecha, debajo de  $\omega = 5\pi$ , trasladada a la izquierda del origen. Sin embargo, usando la gráfica del espectro de amplitud en la forma elegida destacará la fuente de error debido al alisamiento.

En esta sección hemos discutido un método por el cual las transformadas de Fourier pueden estimarse numéricamente, por lo menos en teoría. Sin embargo, es claro que la cantidad de trabajo invertido es significativo, y como observamos en la sección 5.6.3 un algoritmo basado en este método en general es prohibitivo en vista de la cantidad de tiempo requerido para hacer los cálculos. La siguiente sección da una breve introducción a un método para superar este problema.

## 5.6.5 La transformada rápida de Fourier

Los cálculos de una transformada de Fourier discreta basada en  $N$  valores muestrales requiere, como hemos visto,  $N^2$  multiplicaciones complejas y  $N(N - 1)$  sumas. Para señales reales se puede explotar la simetría, pero para  $N$  grandes  $\frac{1}{2}N^2$  no representa, para los propósitos de cálculo, un avance significativo sobre  $N^2$ . De hecho, se requiere de una formulación del problema totalmente nueva antes de que la transformada de Fourier discreta se convierta en una herramienta práctica para la ingeniería. En 1965, Cooley y Tukey introdujeron la **transformada rápida de Fourier (TRF)** para reducir la complejidad computacional (J. W. Cooley y J. W. Tukey, An algorithm for the machine computation of complex Fourier series, *Mathematics of Computation* 19 (1965) 297–301). En esta sección introduciremos brevemente este método; para una discusión completa ver E. E. Brigham, *The Fast Fourier Transform* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974), que la trata de manera similar a la adoptada aquí.

Nos restringiremos al caso donde  $N = 2^\gamma$  para algún entero  $\gamma$ , y en lugar de examinar el caso general nos enfocaremos a un valor particular de  $\gamma$ . Procediendo de esta manera la idea debe ser clara y la extensión a otros valores de  $\gamma$  es creíble. Podemos resumir el método a tres etapas:

- (a) formulación matricial;  
 (b) factorización matricial, y, por último,  
 (c) reorganización.

Primero consideraremos la formulación matricial de la TFD. A partir de (5.78), la sucesión transformada de Fourier  $\{G_k\}_{k=0}^{N-1}$  de la sucesión  $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$  está generada por

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi nk/N} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (5.91)$$

Consideramos el caso particular cuando  $\gamma = 2$  (esto es,  $N = 2^2 = 4$ ), y definimos

$$W = e^{-j2\pi/N} = e^{-j\pi/2}$$

de manera que (5.91) se convierte en

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n W^{nk} = \sum_{n=0}^3 g_n W^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Desarrollando los términos de la sucesión transformada tenemos

$$G_0 = g_0 W^0 + g_1 W^0 + g_2 W^0 + g_3 W^0$$

$$G_1 = g_0 W^0 + g_1 W^1 + g_2 W^2 + g_3 W^3$$

$$G_2 = g_0 W^0 + g_1 W^2 + g_2 W^4 + g_3 W^6$$

$$G_3 = g_0 W^0 + g_1 W^3 + g_2 W^6 + g_3 W^9$$

que se puede expresar en la forma matriz–vector

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

o, más generalmente, como

$$G_k = \mathbf{W}^{nk} \mathbf{g}_n$$

donde los vectores  $G_k$  y  $\mathbf{g}_n$  y la matriz cuadrada  $\mathbf{W}^{nk}$  se definen como en (5.92). El siguiente paso está relacionado con las propiedades especiales de las entradas de la matriz  $\mathbf{W}^{nk}$ . Observamos que  $W^{nk} = W^{nk+pN}$ , donde  $p$  es un entero y así

$$W^4 = W^0 = 1$$

$$W^6 = W^2$$

$$W^9 = W^1$$

De donde (5.92) se convierte en

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

La ecuación (5.93) es el final de la primera etapa del desarrollo. De hecho, hasta aquí sólo hemos usado las propiedades de las raíces  $N$ -ésimas de la unidad. La etapa dos involucra la factorización de una matriz cuyos detalles se explicarán más adelante.

Observamos que

$$\begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

donde usamos  $W^5 = W^1$  y  $W^0 = 1$  (en el primer renglón). La matriz en el lado derecho de (5.94) es la matriz de coeficientes de (5.93), pero con los renglones 2 y 3 intercambiados. Así podemos escribir (5.93) como

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Ahora definimos un vector  $\mathbf{g}'$  como

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} g'_0 \\ g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

Entonces se sigue de (5.96) que

$$g'_0 = g_0 + W^0 g_2$$

$$g'_1 = g_1 + W^0 g_3$$

de manera que  $g'_0$  y  $g'_1$  están calculadas cada una mediante una multiplicación compleja y una adición. Por supuesto, en este caso especial, como  $W^0 = 1$ , la multiplicación no es necesaria pero estamos intentando inferir la situación general. Por esta razón no se reemplazó  $W^0$  por 1.

También, se sigue de (5.96) que

$$g'_2 = g_0 + W^2 g_2$$

$$g'_3 = g_1 + W^2 g_3$$

y, como  $W^2 = -W^0$ , el cálculo del par  $g'_2$  y  $g'_3$  puede hacerse usando los cálculos de  $W^0 g_2$  y  $W^0 g_3$ , con una suma más en cada caso. Así el vector  $\mathbf{g}'$  está determinado por un total de cuatro sumas complejas y dos multiplicaciones complejas.

Para completar el cálculo de la transformada regresamos a (5.95) y la volvemos a escribir en la forma

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_0 \\ g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

Entonces se sigue de (5.97) que

$$G_0 = g'_0 + W^0 g'_1$$

$$G_2 = g'_0 + W^2 g'_1$$

y vemos que  $G_0$  está determinado por una multiplicación compleja y una suma compleja. Más aún,  $W^2 = -W^0$ ,  $G_2$  sigue después de una suma compleja más.

De manera similar, se sigue de (5.97) que

$$G_1 = g'_2 + W^1 g'_3$$

$$G_3 = g'_2 + W^3 g'_3$$

y, como  $W^3 = -W^1$ , se requiere un total de una multiplicación compleja y dos sumas más para obtener el vector transformado reordenado

$$[G_0 \quad G_2 \quad G_1 \quad G_3]^T$$

Así el número total de operaciones requerido para generar la transformada (reordenada) es de cuatro multiplicaciones complejas y ocho sumas complejas. El cálculo directo hubiera requerido de  $N^2 = 16$  multiplicaciones complejas y  $N(N - 1) = 12$  sumas complejas. Aún con un valor pequeño de  $N$  estos ahorros son significativos, y si interpretamos los requerimientos de tiempo de cómputo como proporcionales al número de multiplicaciones complejas involucradas es fácil ver porqué el algoritmo de la TRF se volvió una herramienta indispensable para los cálculos en el análisis de Fourier. Cuando  $N = 2^y$ , el algoritmo de la TRF es, en efecto, un procedimiento para producir  $\gamma N \times N$  matrices de la forma (5.94). Al extender nuestras ideas, es posible ver que en general el algoritmo de la TRF, cuando  $N = 2^y$ , requerirá  $\frac{1}{2}N\gamma$  (cuatro cuando  $N = 2^2 = 4$ ) multiplicaciones complejas y  $N\gamma$  (ocho cuando  $N = 4$ ) sumas complejas. Como

$$\gamma = \log_2 N$$

las demandas del algoritmo de la TRF en términos del tiempo de cómputo estimado con base al número de multiplicaciones complejas se da muchas veces aproximadamente como  $N \log_2 N$ , en contraposición a  $N^2$  para la evaluación directa de la transformada. Esto completa la segunda etapa de nuestra tarea y sólo nos queda el problema de reorganizar nuestro vector transformado en un orden "natural".

Los medios para alcanzar esto son más elegantes. En lugar de enlistar  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  en la forma decimal se usa una notación binaria alternativa y  $[G_0 \quad G_1 \quad G_2 \quad G_3]^T$  se convierte en

$$[G_{00} \quad G_{01} \quad G_{10} \quad G_{11}]^T$$

El proceso de “inversión de bits” significa volver a escribir un número binario con sus bits o dígitos en orden inverso. Al aplicar este proceso a  $[G_{00} \ G_{01} \ G_{10} \ G_{11}]^T$  nos lleva a

$$[G_{00} \ G_{10} \ G_{01} \ G_{11}]^T = [G_0 \ G_2 \ G_1 \ G_3]^T$$

con etiquetado decimal. Esta última forma es exactamente la obtenida al final del cálculo de la TRF y podemos ver que el orden natural se puede recuperar fácilmente reorganizando la salida en la base de inversión de bits de la versión de índices binarios.

Hemos completado así nuestra introducción a la transformada rápida de Fourier. Ahora consideraremos un ejemplo para ilustrar las ideas aquí discutidas. Entonces concluiremos considerando el gran detalle del proceso de factorización matricial que utilizamos en la segunda etapa.

### EJEMPLO 5.21

Utilice el algoritmo de la TRF para calcular la transformada de Fourier de la sucesión

$$\{g_n\}_{n=0}^3 = \{1, 2, 1, 0\}$$

#### Solución

En este caso  $N = 4 = 2^2$ , y empezamos por calcular el vector  $\mathbf{g}'_n = [g'_0 \ g'_1 \ g'_2 \ g'_3]^T$ , que a partir de (5.96) está dado por

$$\mathbf{g}'_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

Para  $N = 4$

$$W^n = (\mathrm{e}^{-j2\pi n/4})^n = \mathrm{e}^{-jn\pi/2}$$

y así

$$\mathbf{g}'_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego calculamos el orden de “inversión de bits” en el vector transformado  $\mathbf{G}'$ , el cual a partir de (5.97) está dado por

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_0 \\ g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{bmatrix}$$

o en este caso particular

$$G' = \begin{bmatrix} G_{00} \\ G_{10} \\ G_{01} \\ G_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2j \\ 2j \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

Finalmente recuperamos el vector transformado  $\mathbf{G} = [G_0 \quad G_1 \quad G_2 \quad G_3]^T$  como

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2j \\ 0 \\ 2j \end{bmatrix}$$

y así establecemos la transformada de Fourier de la sucesión  $\{1, 2, 1, 0\}$  como la sucesión

$$\{4, -2j, 0, 2j\}$$

Es interesante comparar el trabajo invertido en estos cálculos con el del ejemplo 5.19.

Para concluir esta sección reconsideraremos la operación de factorización matricial que está en el centro del proceso de calcular la transformada rápida de Fourier. En un libro de esta naturaleza no es apropiado reproducir una prueba de validez del algoritmo para cualquier  $N$  de la forma  $N = 2^y$ . Más bien, ilustraremos cómo se obtiene la factorización que introdujimos en (5.94). La forma factorizada de la matriz no será generada en cualquier cálculo; lo que realmente sucede es que las distintas sumas se realizan usando sus propiedades estructurales.

A partir de (5.91), con  $W = e^{-j2\pi N}$ , queremos calcular las sumas

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n W^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.99)$$

En el caso  $N = 4$ ,  $y = 2$  vemos que  $k$  y  $n$  toman sólo los valores 0, 1, 2 y 3, de manera que podemos representar a ambos  $k$  y  $n$  usando números binarios de dos dígitos; en general se requerirán números binarios con  $y$  dígitos.

Escribimos  $k = k_1 k_0$  y  $n = n_1 n_0$ , donde  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $n_0$  y  $n_1$  pueden sólo tomar los valores 0 o 1. Por ejemplo,  $k = 3$  se convierte en  $k = 11$  y  $n = 2$  se convierte en  $n = 10$ . La forma decimal siempre puede recuperarse fácilmente como  $k = 2k_1 + k_0$  y  $n = 2n_1 + n_0$ .

Al utilizar la notación binaria, podemos escribir (5.99) como

$$G_{k_1 k_0} = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 g_{n_1 n_0} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (5.100)$$

La única suma de (5.99) ahora se reemplaza por dos sumas cuando  $y = 2$ . De nuevo vemos que para el caso más general cuando  $N = 2^y$  un total de  $y$  sumas reemplazan a la única suma de (5.99).

La operación de factorización matricial con la cual estamos interesados la alcanzamos al considerar el término

$$W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$$

en (5.100). Al expandir se obtiene

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= W^{(2k_1+k_0)2n_1} W^{(2k_1+k_0)n_0} \\ &= W^{4n_1 k_1} W^{2n_1 k_0} W^{(2k_1+k_0)n_0} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Como en este caso  $W = e^{-j2\pi/N}$ , y  $N = 4$ , el término principal en (5.101) se convierte en

$$\begin{aligned} W^{4n_1 k_1} &= (e^{-j2\pi/4})^{4n_1 k_1} = (e^{-j2\pi})^{n_1 k_1} \\ &= 1^{n_1 k_1} = 1 \end{aligned}$$

De nuevo observamos que en el caso más general este factor siempre aparecerá. Así podemos escribir (5.101) como

$$W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} = W^{2n_1 k_0} W^{(2k_1+k_0)n_0}$$

de manera que (5.100) se convierte en

$$G_{k_1 k_0} = \sum_{n_0=0}^1 \left[ \sum_{n_1=0}^1 g_{n_1 n_0} W^{2n_1 k_0} \right] W^{(2k_1+k_0)n_0} \quad (5.102)$$

que es la factorización matricial requerida. Esto se puede ver al escribir

$$g'_{k_0 n_0} = \sum_{n_1=0}^1 g_{n_1 n_0} W^{2n_1 k_0} \quad (5.103)$$

de manera que la suma en los paréntesis cuadrados en (5.102) define las cuatro relaciones

$$\left. \begin{aligned} g'_{00} &= g_{00} W^{2 \cdot 0 \cdot 0} + g_{10} W^{2 \cdot 1 \cdot 0} = g_{00} + g_{10} W^0 \\ g'_{01} &= g_{01} W^{2 \cdot 0 \cdot 0} + g_{11} W^{2 \cdot 1 \cdot 0} = g_{01} + g_{11} W^0 \\ g'_{10} &= g_{00} W^{2 \cdot 0 \cdot 1} + g_{10} W^{2 \cdot 1 \cdot 1} = g_{00} + g_{10} W^2 \\ g'_{11} &= g_{01} W^{2 \cdot 0 \cdot 1} + g_{11} W^{2 \cdot 1 \cdot 1} = g_{01} + g_{11} W^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.104)$$

que en la forma matricial se convierten en

$$\begin{bmatrix} g'_{00} \\ g'_{01} \\ g'_{10} \\ g'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{00} \\ g_{01} \\ g_{10} \\ g_{11} \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

y vemos que restablecimos el sistema de ecuaciones (5.96), esta vez con índices binarios. Observamos que en (5.104) y (5.105) distinguimos entre los términos en  $W^0$  dependiendo de cómo está generado el cero. Cuando el cero está generado por el valor

del índice de la suma (esto es, cuando  $n_1 = 0$  y así un cero siempre será generado cualquiera que sea el valor de  $\gamma$ ) reemplazamos  $W^0$  por 1. Cuando el índice es cero debido al valor de  $k_0$ , mantenemos  $W^0$  como una ayuda para la generalización.

La etapa final de la factorización aparece cuando escribimos la suma exterior de (5.102) como

$$G'_{k_0 k_1} = \sum_{n_0=0}^1 g'_{k_0 n_0} W^{(2k_1+k_0)n_0} \quad (5.106)$$

que al escribirla por completo da

$$G'_{00} = g'_{00} W^{0,0} + g'_{01} W^{0,1} = g'_{00} + g'_{01} W^0$$

$$G'_{01} = g'_{00} W^{2,0} + g'_{01} W^{2,1} = g'_{00} + g'_{01} W^2$$

$$G'_{10} = g'_{10} W^{1,0} + g'_{11} W^{1,1} = g'_{10} + g'_{11} W^1$$

$$G'_{11} = g'_{10} W^{3,0} + g'_{11} W^{3,1} = g'_{10} + g'_{11} W^3$$

o en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} G'_{00} \\ G'_{01} \\ G'_{10} \\ G'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_{00} \\ g'_{01} \\ g'_{10} \\ g'_{11} \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

La matriz en (5.107) es exactamente la de (5.97), y completamos así el proceso de factorización como lo queríamos. Finalmente, para obtener la transformada en un orden natural, debemos llevar a cabo la operación de inversión de bits. A partir de (5.102) y (5.105) logramos esto al escribir

$$G_{k_1 k_0} = G'_{k_0 k_1} \quad (5.108)$$

Por tanto, podemos resumir el algoritmo de Cooley-Tukey para la transformada rápida de Fourier para el caso  $N = 4$  con las tres relaciones (5.103), (5.106) y (5.108), esto es,

$$g'_{k_0 n_0} = \sum_{n_1=0}^1 g_{n_1 n_0} W^{2n_1 k_0}$$

$$G'_{k_0 k_1} = \sum_{n_0=0}^1 g'_{k_0 n_0} W^{(2k_1+k_0)n_0}$$

$$G_{k_1 k_0} = G'_{k_0 k_1}$$

La evaluación de estas tres relaciones es equivalente al proceso de factorización de la matriz junto con el procedimiento de inversión de bits antes discutido.

La transformada rápida de Fourier es un algoritmo orientado a computadoras y codificaciones muy eficientes están disponibles en las bibliotecas de software, es usual

que para su ejecución tengan que llamar a una subrutina. El lector interesado que prefiera producir la codificación "hecha en casa" puede encontrar listados en el libro de texto de Brigham citado al principio de esta sección, así como en otras partes.

### 5.6.6 Ejercicios

- 28 Calcule directamente la transformada discreta de Fourier de la sucesión

$$\{1, 0, 1, 0\}$$

usando los métodos de la sección 5.6.3 (ver ejemplo 5.19).

- 29 Utilice el método de la transformada rápida de Fourier para calcular la transformada de la sucesión del ejercicio 28 (seguir el ejemplo 5.21).

- 30 Utilice el algoritmo de la TRF implementado en una computadora para mejorar el experimento con la estimación del espectro de la señal del ejemplo 5.20.

- 31 Obtenga un algoritmo TRF para  $N = 2^3 = 8$  puntos. Trabaje a partir de (5.99), escribiendo

$$k = 4k_2 + 2k_1 + k_0, \quad k_i = 0 \text{ o } 1 \quad \text{para todo } i$$

$$n = 4n_2 + 2n_1 + n_0, \quad n_i = 0 \text{ o } 1 \quad \text{para todo } i$$

para probar que

$$g'_{k_0 n_1 n_0} = \sum_{n_2=0}^1 g_{n_2 n_1 n_0} W^{4k_0 n_2}$$

$$g''_{k_0 k_1 n_0} = \sum_{n_1=0}^1 g'_{k_0 n_1 n_0} W^{(2k_1+k_0)2n_1}$$

$$G'_{k_2 k_1 k_0} = \sum_{n_0=0}^1 g''_{k_0 k_1 n_0} W^{(4k_2+2k_1+k_0)n_0}$$

$$G_{k_2 k_1 k_0} = G'_{k_0 k_1 k_2}$$

## 5.7 Aplicación a la ingeniería: el diseño de filtros analógicos

En esta sección exploramos las ideas de diseño o síntesis matemáticas. Expresaremos en forma matemática el comportamiento deseado de un sistema y utilizando las ideas desarrolladas produciremos un diseño del sistema.

En este capítulo nos interesó la representación en el dominio de la frecuencia de señales y de sistemas, y el sistema que diseñaremos operará con señales de entrada para producir señales de salida con propiedades específicas en el dominio de la frecuencia. En la figura 5.31 ilustramos la respuesta en amplitud de un filtro ideal pasa bajas. Este filtro pasa perfectamente las señales o componentes de señales a frecuencias menores que la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Arriba de  $\omega_c$ , la atenuación es perfecta, lo que significa que esas señales cuya frecuencia está arriba de esta frecuencia de corte no pasan por este filtro.

La respuesta en amplitud de este aparato ideal está dada por

$$|H'(j\omega)| = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases}$$

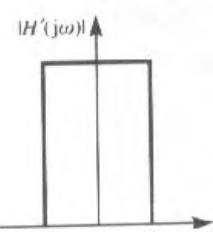


Figura 5.31 Respuesta de amplitud de un filtro ideal pasa bajas.

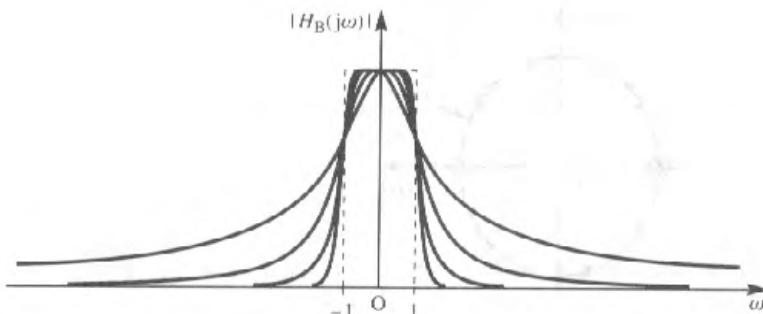


Figura 5.32 Respuesta de amplitud del filtro de Butterworth.

Tal respuesta ideal no puede lograrse mediante un aparato real analógico y nuestro problema de diseño es aproximar esta respuesta a un grado aceptable usando un sistema que pueda construirse. Una clase de funciones cuyas gráficas se parecen a las de la figura 5.31 es el conjunto

$$|H_B(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 + (\omega/\omega_c)^{2n}]}}$$

y vemos de la figura 5.32, que corresponde a  $\omega_c = 1$ , que conforme  $n$  crece la gráfica se acerca a la respuesta ideal. Esta aproximación particular se conoce como la **aproximación de Butterworth**, y sólo es una de muchas posibilidades.

Para explorar más este acercamiento, nos tenemos que hacer la pregunta de si tal respuesta puede obtenerse como la respuesta de frecuencia de un sistema lineal estable realizable. Supondremos que se puede, aunque si nuestra investigación llega a la conclusión opuesta entonces tendremos que abandonar este método y buscar otro. Si  $H_B(j\omega)$  es la respuesta de frecuencia de tal sistema entonces se puede obtener al reemplazar  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia de Laplace del sistema. Esto es al menos posible ya que por hipótesis estamos tratando con un sistema estable. Ahora

$$|H_B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2n}}$$

donde  $|H_B(j\omega)|^2 = H_B(j\omega)H_B^*(j\omega)$ . Si  $H_B(s)$  tiene coeficientes reales, y así es realizable, entonces debemos tener  $H_B^*(j\omega) = H(-j\omega)$ . Así

$$H_B(j\omega)H_B(-j\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2n}}$$

y vemos que la respuesta puede obtenerse haciendo  $s = j\omega$  en

$$H_B(s)H_B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2n}}$$

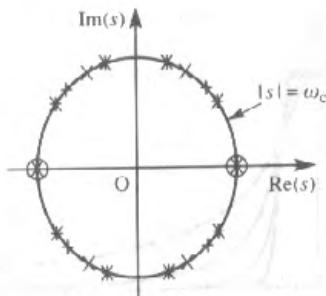


Figura 5.33 Localización de los polos para el filtro de Butterworth: (○)  $n = 1$ ; (+)  $n = 2$ ; (×)  $n = 3$ ; (\*)  $n = 5$ .

Nuestra tarea es ahora intentar separar  $H_B(s)$  de  $H_B(-s)$  de tal manera que  $H_B(s)$  represente la función de transferencia de un sistema estable. Para hacer esto, resolvemos la ecuación

$$1 + (s/j\omega_c)^{2n} = 0$$

para dar los polos de  $H_B(s)H_B(-s)$  como

$$s = \omega_c e^{j[(2k+1)\pi/2n+\pi/2]} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (5.109)$$

La figura 5.33 muestra la localización de los polos para los casos  $n = 1, 2, 3$  y  $5$ . Las observaciones importantes que podemos hacer en esta figura son que en cada caso hay  $2n$  polos alrededor del círculo de radio  $\omega_c$  igualmente espaciados en el diagrama de Argand, y que no hay polos en el eje imaginario. Si  $s = s_1$  es un polo de  $H_B(s)H_B(-s)$  entonces también lo es  $s = -s_1$ , y así podemos seleccionar como polos de la función de transferencia  $H_B(s)$  aquellos que se encuentran en el semiplano izquierdo. Los polos restantes son aquellos de  $H_B(-s)$ . Por este procedimiento generamos una función de transferencia estable  $H_B(s)$  para nuestro diseño de filtro.

La función de transferencia que generamos a partir de las especificaciones en el dominio de la frecuencia del comportamiento del sistema deben relacionarse con el sistema real, y este es el siguiente paso en el proceso de diseño. La forma de la función de transferencia para el filtro de orden  $n$  puede probarse que es

$$H_B(s) = \frac{\omega_c^n}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}$$

donde  $s_1, s_2, \dots, s_n$  son los polos estables generados por (5.109). Se invita al lector a probar que el filtro de Butterworth de segundo orden tiene función de transferencia

$$H_B(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

Al escribir  $Y(s) = H_B(s)U(s)$ , con  $H_B(s)$  como antes, obtenemos

$$Y(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} U(s)$$

$$(s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2)Y(s) = \omega_c^2 U(s) \quad (5.110)$$

Si suponemos que todas las condiciones iniciales son cero entonces (5.110) representa la transformada de Laplace de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\omega_c \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c^2 y(t) = \omega_c^2 u(t) \quad (5.111)$$

Este paso completa el aspecto matemático del ejercicio de diseño. Es posible probar que un sistema cuyo comportamiento está modelado por esta ecuación diferencial puede construirse usando componentes elementales de circuitos, y las especificaciones de tales circuitos completarán el diseño. El lector interesado en un estudio completo de este tema puede consultar M. J. Chapman, D. P. Goodall y N. C. Steele, *Signal Processing in Electronic Communications*, Horwood Publishing, Chichester, 1997.

Para apreciar el funcionamiento de este filtro, se recomienda el uso de un paquete de simulación dinámica. Después de poner, por ejemplo, en 4 la frecuencia de corte  $\omega_c$ , la salida del sistema  $y(t)$  correspondiente a una señal de entrada  $u(t) = \sin t + \sin 10t$  probará la transmisión casi perfecta del término de baja frecuencia ( $\omega = 1$ ), con una atenuación casi total de la señal de alta frecuencia ( $\omega = 10$ ). Como una extensión de este ejercicio, se puede obtener la ecuación diferencial que representa a los filtros de tercer y cuarto orden, para luego comparar las respuestas. Es posible investigar, usando un paquete de simulación y una codificación de la TRF, el funcionamiento de tales aparatos desde el punto de vista del dominio de la frecuencia al examinar el espectro de ejemplos dibujados de las señales de entrada y salida.

## 5.8

# Aplicación a la ingeniería: modulación, demodulación y filtrado en el dominio de la frecuencia

### 5.8.1

#### Introducción

En esta sección demostraremos la ejecución práctica de la modulación, la demodulación y el filtrado en el dominio de la frecuencia. Estos son los procesos por los cuales una señal portadora de información puede combinarse con otras señales para transmisión a lo largo de un canal, y luego recuperarla de tal manera que la información transmitida pueda extraerse. Cuando varias señales tienen que ser transmitidas al mismo tiempo, a lo largo de un solo canal, una solución es el uso del método de la **modulación de amplitud** descrita en la sección 5.3.4. Suponemos que el canal es “ruidoso”, de manera que la señal recibida tiene ruido, así que esta señal debe limpiarse y demodularse

utilizando las técnicas de **filtrado en el dominio de la frecuencia**. Esta idea se describe y se implementa fácilmente pero usualmente no se puede ejecutar en línea debido a los fuertes requerimientos computacionales. Nuestras operaciones de filtrado se llevan a cabo en la versión en el dominio de la frecuencia de la señal, y esto se lleva a cabo usando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier. Se utiliza el **paquete MATLAB** que se ha convertido en una herramienta usual para los ingenieros y está disponible en una versión para estudiantes. (*The Student Edition of MATLAB*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992). En la figura 5.34 se muestra un archivo MATLAB-M con un filtro en el dominio de la frecuencia. Se puede usar con las versiones vigentes del paquete. (Observemos que en esta figura se usa  $i$  en lugar de  $j$  para representar  $\sqrt{-1}$ . Los lectores que no tengan acceso a MATLAB podrían interpretar este archivo para producir su propio código.

```
% Demostración del filtrado en el dominio de la frecuencia usando la TRF.
%
%
% Un poco de limpieza con MATLAB para prevenir problemas de memoria.
clear
clc
%
%
% Seleccionar un valor de N para el número de muestras que se harán.
% Haga una selección añadiendo o quitando los símbolos %.
% N tiene que ser una potencia de 2.
%N = 512;
N = 1024;
%N = 2048;
%N = 4096;
%N = 8192;
%
%
% T es el intervalo de muestreo y la elección de N determina el
% intervalo sobre el cual se procesa la señal. También, si son
% procesados N valores en el dominio de la frecuencia la resolución está
% determinada.
T = 0.001;
t = 0:T:(N - 1)*T;
delw = 2*pi/(T*N);
%
%
% Generación de la "información"
f = t .*exp(-t/2);
%
%
% Fijar la frecuencia de las portadoras, wc es la portadora que
% será modulada.
wc = 2*pi*50;
wca = 2*pi*120;
%
%
% Realizar la modulación ...
```

Figura 5.34 Archivo “MATLAB” M que demuestra el filtrado en el dominio de la frecuencia usando la transformada rápida de Fourier.

```

x = f.*cos(wc*t) + cos(wca*t);
%
% ... y añada ruido en el canal
nfac = 0.2;
rand('normal');
x = x + nfac*rand(t);
%
% Dibuja la señal de tiempo "recibida"
plot(t,x)
title('The time signal, modulated carrier and noise if added')
xlabel('time, t')
ylabel['x(t)']
pause
%
% Calcule la TFD usando el algoritmo TRF ...
y = fft(x);
z = T*abs(y);
w = 0:delw:(N - 1)*delw;
%
% ... y dibuje el espectro de amplitud.
plot(w,z)
title('The amplitude spectrum. Spikes at frequencies of carriers')
xlabel('frequency, w')
ylabel('amplitude')
pause
%
% Construya un filtro para aislar la portadora de la información.
%
% 2*hwind+1 es la longitud de la "ventana" del filtro.
% Fije ffac a un valor menor que 1,0 ffac = 0.5 da un filtro de la
% mitad de la longitud wc/2 donde wc es la frecuencia de la
% portadora. ¡No exceder un valor de 0.95!
ffac = 0.5;
hwind = round(ffac*wc/delw);
l = 2*hwind + 1;
%
% Ponga el centro de la ventana en el pico correspondiente a wc.
% Verifique que esto está bien, haciendo l = 1
l1 = round(wc/delw) - hwind;
%
% ¡Recuerde que debemos tener ambos extremos del filtro!
mask = [zeros(1,l1),ones(1,l),zeros(1,N - (2*l + 2*l1 - 1)),ones(1,l),zeros(1,l1 - 1)];
%
% Realice el filtrado en el dominio de la frecuencia...
zz = mask.*y;
%
% ... y calcule la inversa de la TFD
yya = ifft(zz);
%
% Elimine los errores de redondeo ... ¡es cierto!
yy = 0.5*(yya + conj(yya));
%

```

Figura 5.34 continuación

```

% Dibuja el espectro "limpio" con sólo las portadoras menores,
plot(w,T*abs(zz))
title('Upper carrier eliminated and noise reduced')
xlabel('frequency, w')
ylabel('amplitude')
pause
%
% Ahora la señal está limpia pero necesita demodulación de manera
% que hay que hacer el producto 2*señal portadora ...
dem = yy.*cos(wc*t);
dom = 2*dem;
%
% ... y aplique la TFD.
demft = fft(dom);
%
% Utilice un filtro pasa bajas en el resultado, la longitud es llp.
% Se usa el mismo factor que antes.
llp = round(ffac*wc/delw);
masklp = [ones(1,llp),zeros(1,N-(2*llp-1)),ones(1,llp-1)];
%
% Realice el filtrado...
op = masklp.*demft;
%
% ... y dibuje la TFD de la señal filtrada.
plot(w,T*abs(op))
title('Result of demodulation and low-pass filtering')
xlabel('frequency, w')
ylabel('amplitude')
pause
%
% Regresar al dominio de tiempo...
opta = ifft(op);
opt = 0.5*(opta + conj(opta));
act = f;
vp = N;
%
% ... y finalmente dibuje la señal obtenida contra la original.
plot(t(1:vp),opt(1:vp),'-' ,t(1:vp),act(1:vp),':')
title('The extracted signal, with original')
xlabel('time, t')
ylabel('f(t)')
pause
%
% Limpiar ...
clc
clear
%
% ... pero responsablemente.
i = sqrt(-1);
home

```

Figura 5.34 continuación.

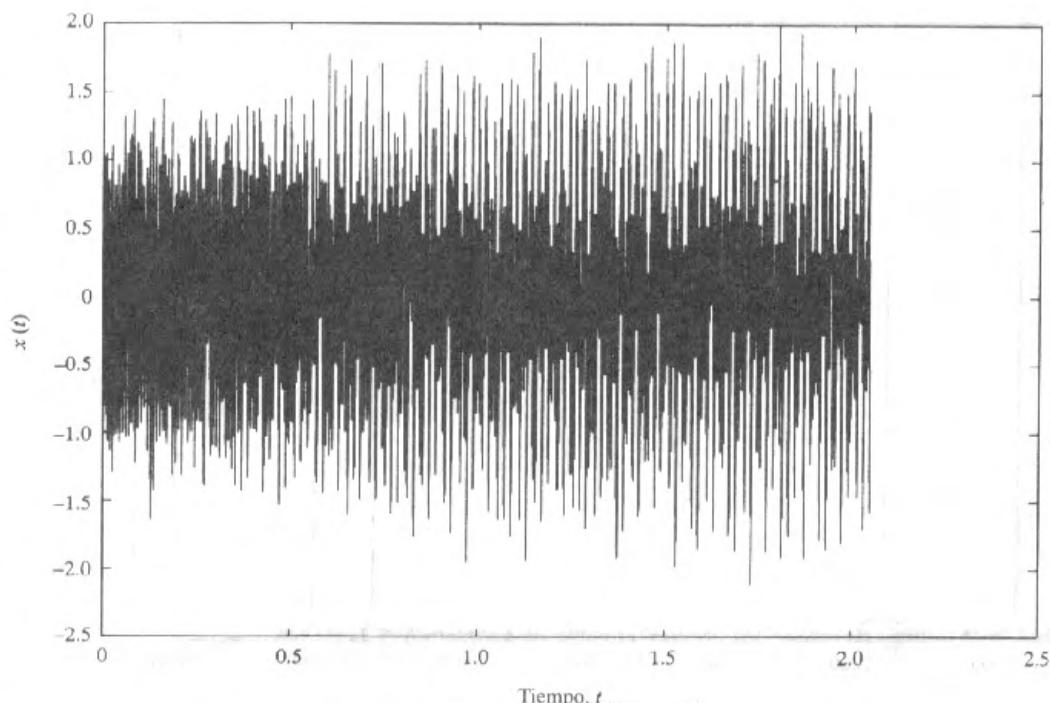


Figura 5.35 Versión en el dominio del tiempo de una señal ruidosa.

### 5.8.2 Modulación y transmisión

Supongamos que nuestra “información” está integrada por muestras del sistema  $f(t) = t e^{-t/2}$ , tomados en intervalos  $T = 0.001$  s. Usaremos esta señal, o mejor dicho, esta sucesión de datos para modular la señal portadora  $\cos(50 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)$ . Una segunda señal portadora está dada por  $\cos(120 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)$ , y esta se puede pensar como la portadora de la señal  $f(t) = 1$ . Combinamos estas dos señales y añadimos “ruido blanco” para representar la acción del canal. Esta parte del ejercicio corresponde a la generación de la señal y la parte de transmisión de todo el proceso, y la figura 5.35 muestra la versión en el dominio del tiempo de la señal resultante.

### 5.8.3 Identificación y aislamiento de la señal portadora de información

Aquí empezamos con las operaciones del procesamiento de señales. La clave de esto es el análisis de Fourier y usaremos el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para realizar las transformadas necesarias y sus inversas. Primero examinamos el

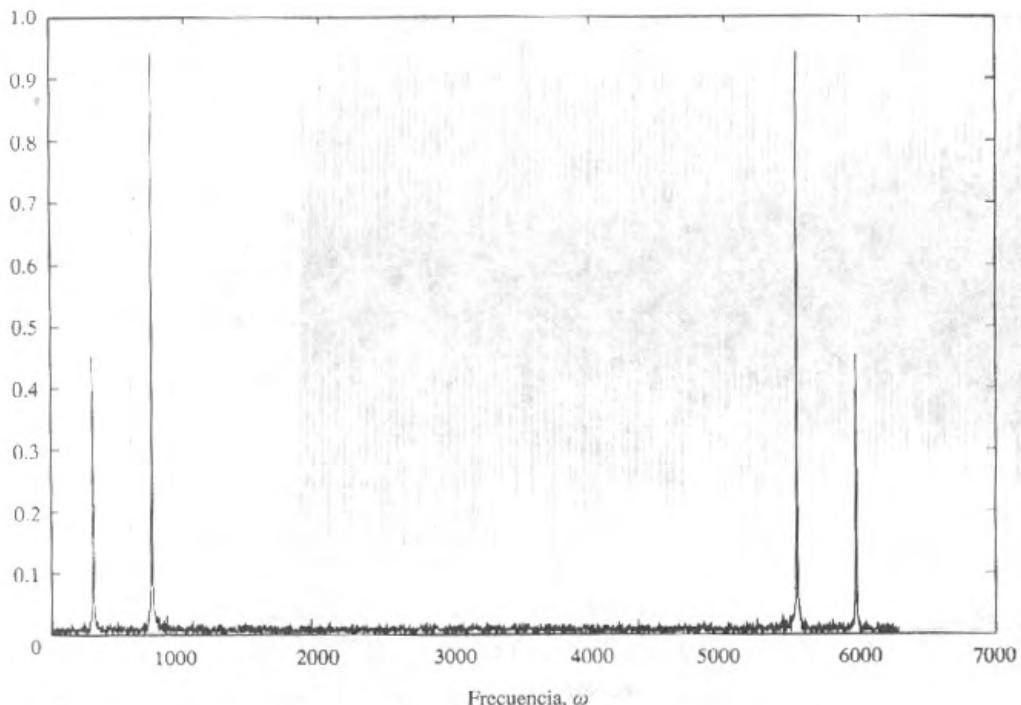


Figura 5.36 Espectro de la señal recibida. Picos y frecuencias de las portadoras.

espectro de la señal recibida, que se muestra en la figura 5.36. Inmediatamente vemos dos picos que corresponden a las señales portadoras y sabemos que la más baja porta la señal que deseamos extraer. Debemos diseñar un filtro adecuado que funcione en el dominio de la frecuencia para aislar la onda portadora seleccionada antes de usar la operación de demodulación para extraer la información. Para hacer esto enmascaramos la señal transformada multiplicando por 1 aquellas componentes que queremos que pasen y por 0 aquellas que queremos rechazar. Obviamente queremos que pase la componente de la onda portadora de frecuencia, pero debemos recordar que el espectro de la señal de información está centrado en esta frecuencia, y así debemos dejar pasar una banda de frecuencias alrededor de esta frecuencia central. Nuevamente se construye un filtro en el dominio de la frecuencia. Entonces debemos construir un filtro de pasa banda para un ancho de banda conveniente para lograr esto, y más aún, ¡debemos recordar que incluir la mitad derecha del filtro! Aquí no hay problemas con la frecuencia Nyquist, a primera vista simplemente necesitamos evitar captar la segunda onda portadora. Sin embargo, mientras más grande sea el ancho de banda que seleccionemos, mayor será el ruido que dejaremos pasar, y así necesitamos encontrar un equilibrio entre el ancho necesario para recuperar una buena señal y la eliminación del ruido. Obviamente, como en este caso *conocemos* el ancho de banda de nuestra señal de información, podemos hacer nuestra elección basados en este conocimiento. Sin embargo, esto puede ser trámoso porque usualmente la naturaleza exacta de la información transmitida no se conoce de antemano; si así fuera, no tendría caso mandarla. En el archivo M pusimos la mitad de la longitud del filtro como una fracción

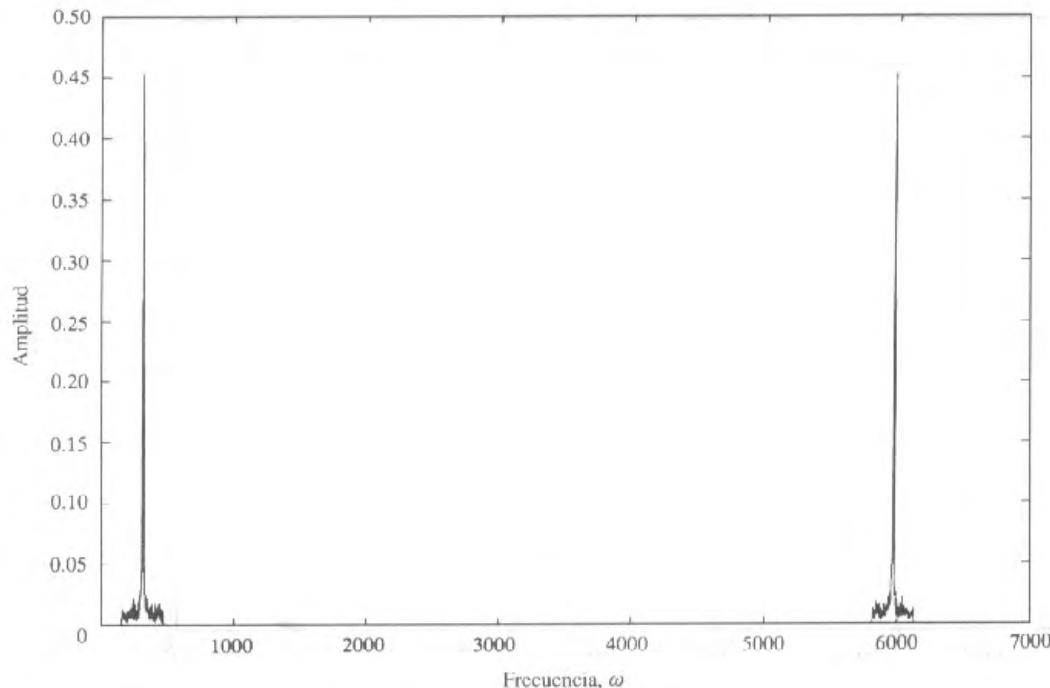


Figura 5.37 Espectro después de la aplicación de un filtro de banda.

de la frecuencia portadora. La frecuencia portadora  $\omega_c$  representa el ancho de banda máximo posible del canal, y en la práctica un canal tendrá un ancho de banda máximo específico asociado con él. La figura 5.37 muestra el espectro resultante después de la aplicación del filtro pasa banda con un ancho de banda menor que  $\omega_c$ .

### 5.8.4 Estado de demodulación

El propósito de esta operación es extraer la información de una onda portadora y se puede probar que la multiplicación de la señal en el tiempo por  $\cos \omega_c T$ , donde  $\omega_c$  es la frecuencia de la onda portadora, tiene el efecto de correr el espectro de la señal modulada de manera que nuevamente esté centrada en el origen. Para realizar la operación de multiplicación debemos regresar al dominio del tiempo y esto es posible utilizando el algoritmo de la TRF inversa. En la representación en el dominio de la frecuencia de la señal demodulada también hay copias del espectro de la señal modulada que están centradas a frecuencias más altas ( $2\omega_c$ ,  $4\omega_c$ ), y así debemos realizar una operación de filtrado pasa bajas en la señal demodulada. Para hacer esto, regresamos al dominio de la frecuencia usando nuevamente el algoritmo de la TRF. En la figura 5.38 se muestra el resultado de las operaciones de demodulación y de filtrado pasa bajas.

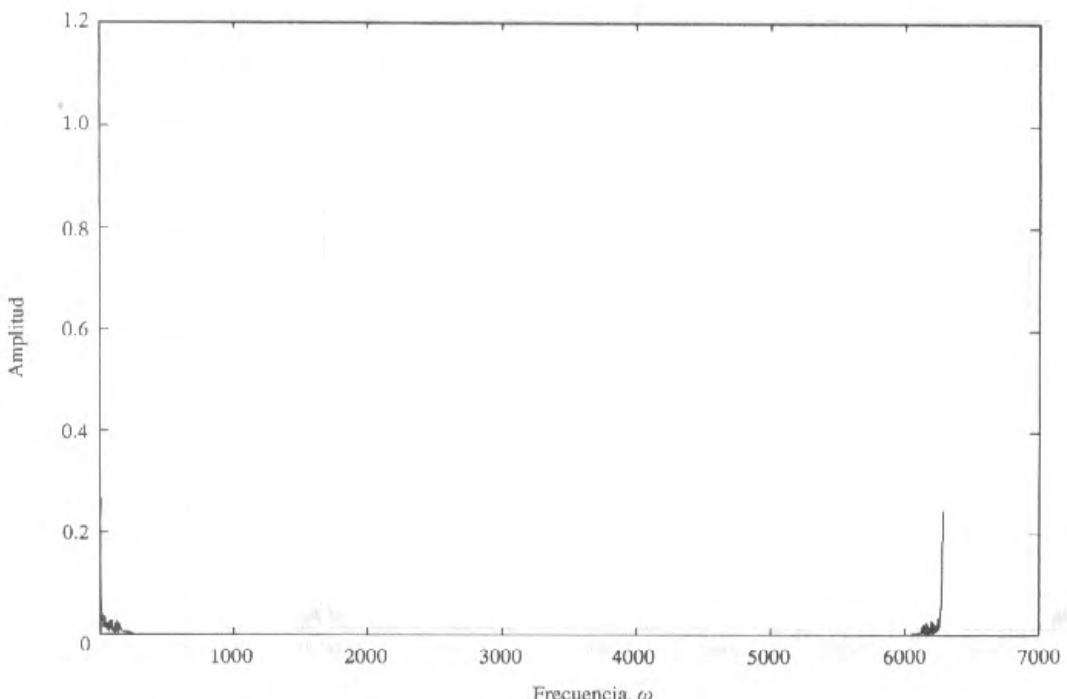


Figura 5.38 Resultado de las operaciones de demodulación y filtrado pasa bajas.

### 5.8.5 Recuperación de señales finales

La última operación que debemos realizar es volver al dominio del tiempo para examinar lo que hemos conseguido. Después de llamar a la rutina TRF inversa, la señal extraída se dibuja junto con la original para compararlas. En la figura 5.39 se muestran los resultados con valores bastante bajos del ruido agregado. Si el proceso se lleva a cabo en ausencia de ruido, se logra una excelente recuperación de la señal, excepto por los característicos “zumbidos” debidos a los picos de los filtros.

### 5.8.6 Más desarrollos

Se invita a los lectores a desarrollar este caso de estudio para incrementar su comprensión. Tratar de agregar una segunda señal de información modulando la segunda onda portadora y extraer ambas señales después de la “transmisión”. También añadir más ondas portadoras y modular las señales e investigar la señal recuperada. Si los anchos de banda de las señales de información están limitados a un valor fijo, ¿cuántas

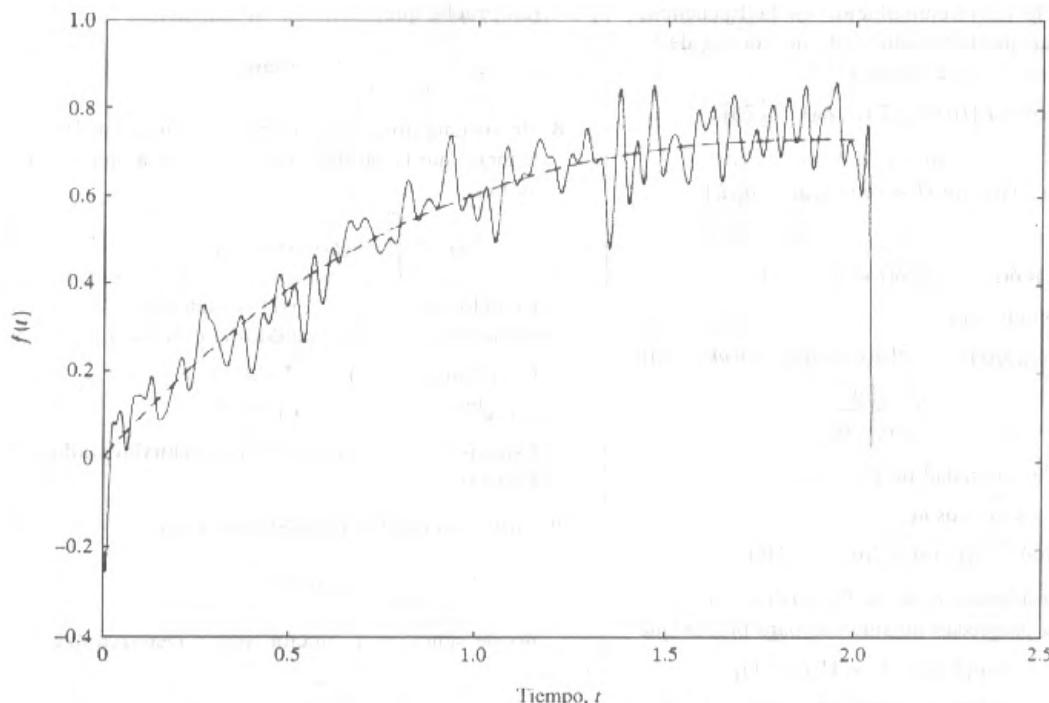


Figura 5.39 Señal obtenida que se muestra con la señal original.

señales pueden ser transmitidas y recuperadas satisfactoriamente? ¿Qué sucede si  $T$  es alterada? ¿Puede reducirse el efecto de “zumbido” suavizando la transmisión de las hileras de unos a la hileras de ceros en las máscaras del filtro? Buscar las referencias a varias **funciones ventana** en los textos de procesamiento de señales para ayudar a resolver esta pregunta.

## 5.9 Ejercicios de repaso (1-25)

- 1 Calcule la transformada de Fourier en senos de la función causal  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 1 & (1 < t \leq 2) \\ 0 & (t > 2) \end{cases}$$

- 2 Pruebe que si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$  entonces  $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$ . También pruebe que

$$\mathcal{F}\{f(-t - a)\} = e^{ja\omega}F(-j\omega)$$

donde  $a$  es real y positivo.

Encuentre  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  cuando

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi & (t < -2) \\ \frac{1}{4}\pi t & (-2 \leq t \leq 2) \\ \frac{1}{2}\pi & (t > 2) \end{cases}$$

- 3 Utilice el resultado

$$\mathcal{F}[H(t + \frac{1}{2}T) - H(t - \frac{1}{2}T)] = T \operatorname{sinc} \frac{1}{2} \omega T$$

y el resultado de la convolución en la frecuencia para verificar que la transformada de Fourier de la función coseno en una ventana

$$f(t) = \cos \omega_0 t [H(t + \frac{1}{2}T) - H(t - \frac{1}{2}T)]$$

es

$$\frac{1}{2}T [\operatorname{senc} \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)T + \operatorname{senc} \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)T]$$

4 Pruebe que

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - (t_1 + t_2))$$

y después pruebe que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t H(t)\} &= \frac{1}{2}\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ &\quad + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

5 Establezca la propiedad de demodulación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t\} \\ = \frac{1}{2}F(j\omega) + \frac{1}{4}[F(j\omega + 2j\omega_0) + F(j\omega - 2j\omega_0)] \end{aligned}$$

6 Utilice el resultado  $\mathcal{F}\{H(t + T) - H(t - T)\} = 2T \operatorname{senc} \omega T$  y la propiedad de simetría para probar que

$$\mathcal{F}\{\operatorname{senc} t\} = \pi[H(\omega + 1) - H(\omega - 1)]$$

Verifique su resultado usando la integral de inversión.

7 Para una clase amplia donde la transformada de Laplace aparece con frecuencia, es posible deducir una integral inversa basada en la integral inversa de Fourier. Si una transformada es  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  tenemos

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

donde  $\operatorname{Re}(s) = \gamma$ , con  $\gamma$  real, define una recta en el plano  $s$  a la derecha de todos los polos de  $X(s)$ . Usualmente la integral puede evaluarse usando el teorema del residuo y entonces tenemos

$x(t) = \sum$  residuos de  $X(s) e^{st}$  en todos los polos de  $X(s)$

(a) Escriba los polos para la transformada

$$X(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

donde  $a$  y  $b$  son reales. Calcule los residuos de  $X(s) e^{st}$  en estos polos e invierta la transformada.

(b) Calcule

$$(i) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} \quad (ii) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$$

(c) Pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = t \operatorname{senc} t$$

8 Un sistema lineal tiene respuesta al impulso  $h(t)$ , de manera que la salida correspondiente a una entrada  $u(t)$  es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Cuando  $u(t) = \cos \omega_0 t$ ,  $y(t) = -\operatorname{senc} \omega_0 t (\omega_0 \geq 0)$ .

Encuentre la salida cuando  $u(t)$  está dada por

- (a)  $\cos \omega_0 t + \frac{1}{4}\pi$       (b)  $\sin \omega_0 t$   
 (c)  $e^{j\omega_0 t}$       (d)  $e^{-j\omega_0 t}$

Este sistema se conoce como un **transformador de Hilbert**.

9 En la sección 5.5.1 establecimos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega}\right\} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

donde  $\operatorname{sgn}(t)$  es la función signo. Deduzca que

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

y utilice el resultado de simetría para demostrar que

$$\mathcal{F}\left\{-\frac{1}{\pi t}\right\} = j \operatorname{sgn}(\omega)$$

10 La **transformada de Hilbert** de una señal  $f(t)$  está definida por

$$F_H(x) = \mathcal{H}\{f(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-x} d\tau$$

Pruebe que la operación de aplicar la transformada de Hilbert es equivalente a la convolución

$$-\frac{1}{\pi t} * f(t)$$

y deduzca entonces que la señal transformada de Hilbert tiene un espectro de amplitud  $F_H(j\omega)$  idéntico con  $f(t)$ . Pruebe además que la fase de la señal transformada cambia en  $\pm \frac{1}{2}\pi$ , dependiendo del signo de  $\omega$ .

11 Pruebe que

$$\begin{aligned} &\frac{t}{(t^2+a^2)(t-x)} \\ &= \frac{1}{x^2+a^2} \left( \frac{a^2}{t^2+a^2} + \frac{x}{t-x} - \frac{xt}{t^2+a^2} \right) \end{aligned}$$

Después pruebe que la transformada de Hilbert de

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

es

$$\frac{a}{x^2 + a^2}$$

- 12 Si  $F_{\text{Hi}}(x) = \mathcal{H}\{f(t)\}$  es la transformada de Hilbert de  $f(t)$  establezca las siguientes propiedades:

- (a)  $\mathcal{H}\{f(a+t)\} = F_{\text{Hi}}(x+a)$
- (b)  $\mathcal{H}\{f(at)\} = F_{\text{Hi}}(ax) \quad (a > 0)$
- (c)  $\mathcal{H}\{f(-at)\} = -F_{\text{Hi}}(-ax) \quad (a > 0)$
- (d)  $\mathcal{H}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \frac{d}{dx} F_{\text{Hi}}(x)$

$$(e) \mathcal{H}\{tf(t)\} = xF_{\text{Hi}}(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

- 13 Pruebe que

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\text{Hi}}(x)}{x-t} dx$$

- 14 Defina la **señal analítica** asociada con la señal real  $f(t)$  como

$$f_a(t) = f(t) - jF_{\text{Hi}}(t)$$

donde  $F_{\text{Hi}}(t)$  es la transformada de Hilbert de  $f(t)$ . Utilice el método del ejercicio de repaso 3 para probar que

$$\mathcal{F}\{f_a(t)\} = F_a(j\omega) = \begin{cases} 2F(j\omega) & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega < 0) \end{cases}$$

- 15 Utilice el resultado  $\mathcal{F}\{H(t)\} = 1/j\omega + \pi\delta(\omega)$  y la propiedad de la simetría para probar que

$$\mathcal{F}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}$$

(Sugerencia:  $H(-\omega) = 1 - H(\omega)$ )

Después pruebe que si  $f(t)$  está definida por  $\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = 2H(\omega)F(j\omega)$  entonces  $\hat{f}(t) = f(t) - F_{\text{Hi}}(t)$ , la señal analítica asociada con  $f(t)$ , donde  $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  y  $F_{\text{Hi}}(t) = \mathcal{H}\{f(t)\}$ .

Si  $f(t) = \cos \omega_0 t$  ( $\omega_0 > 0$ ), encuentre  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  y después  $\hat{f}(t)$ . Deduzca que

$$\mathcal{H}\{\cos \omega_0 t\} = -\sin \omega_0 t$$

Considerando la señal  $g(t) = \sin \omega_0 t$  ( $\omega_0 > 0$ ), pruebe que

$$\mathcal{H}\{\sin \omega_0 t\} = \cos \omega_0 t$$

- 16 Un sistema causal tiene respuesta al impulso  $\tilde{h}(t)$ , donde  $\tilde{h}(t) = 0$  ( $t < 0$ ). Defina la parte par  $\tilde{h}_e(t)$  de  $\tilde{h}(t)$  como

$$\tilde{h}_e(t) = \frac{1}{2} [\tilde{h}(t) + \tilde{h}(-t)]$$

y la parte impar  $\tilde{h}_o(t)$  como

$$\tilde{h}_o(t) = \frac{1}{2} [\tilde{h}(t) - \tilde{h}(-t)]$$

Deduzca que si  $\tilde{h}(t) = 0$  ( $t < 0$ ) entonces

$$\tilde{h}_o(t) = \text{sgn}(t)\tilde{h}_e(t)$$

y que

$$\tilde{h}(t) = \tilde{h}_e(t) + \text{sgn}(t)\tilde{h}_o(t) \quad \text{para todo } t$$

Verifique este resultado para  $\tilde{h}(t) = \sin t H(t)$ . Aplique la transformada de Fourier de este resultado para establecer que

$$\tilde{H}(j\omega) = \tilde{H}_e(j\omega) + j\mathcal{H}\{\tilde{H}_e(j\omega)\}$$

Sea  $\tilde{h}(t) = e^{-at}H(t)$  tal respuesta al impulso causal. Aplique la transformada de Fourier para deducir el par de transformadas de Hilbert

$$\mathcal{H}\left\{\frac{a}{a^2 + t^2}\right\} = -\frac{x}{a^2 + x^2}$$

Utilice el resultado

$$\mathcal{H}\{tf(t)\} = x\mathcal{H}\{f(t)\} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

para probar que

$$\mathcal{H}\left\{\frac{t}{a^2 + t^2}\right\} = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

- 17 La **transformada de Hartley** está definida como

$$F_H(s) = \mathcal{H}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi st dt$$

donde  $\cos t = \cos t + \sin t$ . Encuentre la transformada de Hartley de las funciones

$$(a) f(t) = e^{-at}H(t) \quad (a > 0)$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} 0 & (|t| > T) \\ 1 & (|t| \leq T) \end{cases}$$

- 18 Una forma alternativa del par de transformadas de Fourier está dada por

$$F(jp) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi pt} dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(jp) e^{j2\pi pt} dt$$

donde ahora la frecuencia  $p$  está medida en hertz. Defina la parte par de la transformada de Hartley como

$$E(s) = \frac{1}{2} [F_H(s) + F_H(-s)]$$

y la parte impar como

$$O(s) = \frac{1}{2} [F_H(s) - F_H(-s)]$$

Pruebe que la transformada de Fourier de  $f(t)$  está dada por

$$F(jp) = E(p) - jO(p)$$

y confirme su resultado para  $f(t) = e^{-jt}H(t)$ .

- 19 Verifique el resultado de corrimiento de tiempo** para la transformada de Hartley en la forma

$$F_H\{f(t-T)\} = \operatorname{sen} 2\pi T F_H(-s) + \cos 2\pi T F_H(s)$$

- 20 Utilizando la forma alternativa de la transformada de Fourier que se indicó en el ejercicio de repaso 18, se puede probar que la transformada de Fourier de la función escalón de Heaviside es**

$$\mathcal{F}\{H(t)\} = \frac{1}{jp\pi} + \frac{1}{2}\delta(p)$$

Pruebe que la transformada de Hartley de  $H(t)$  es entonces

$$\frac{1}{2}\delta(s) + \frac{1}{js\pi}$$

y deduzca que la transformada de Hartley de  $H(t - \frac{1}{2})$  es

$$\frac{1}{2}\delta(s) + \frac{\cos \pi s - \operatorname{sen} \pi s}{s\pi}$$

- 21 Pruebe que**  $F_H\{\delta(t)\} = 1$  y deduzca que  $F_H\{1\} = \delta(s)$ . También pruebe que  $F_H\{\delta(t-t_0)\} = \operatorname{cas} 2\pi s_0 t_0$  y que

$$\begin{aligned} F_H\{\operatorname{cas} 2\pi s_0 t\} &= F_H\{\cos 2\pi s_0 t\} + F_H\{\operatorname{sen} 2\pi s_0 t\} \\ &= \delta(s-s_0) \end{aligned}$$

- 22 Pruebe el teorema de modulación** de la transformada de Hartley en la forma

$$F_H\{f(t) \cos 2\pi s_0 t\} = \frac{1}{2} F_H(s-s_0) + \frac{1}{2} F_H(s+s_0)$$

Después pruebe que

$$F_H\{\cos 2\pi s_0 t\} = \frac{1}{2} [\delta(s-s_0) + \delta(s+s_0)]$$

$$F_H\{\operatorname{sen} 2\pi s_0 t\} = \frac{1}{2} [\delta(s-s_0) - \delta(s+s_0)]$$

- 23 Pruebe que**

$$\mathcal{F}\{\tan^{-1} t\} = \frac{\pi e^{-|s|}}{j\omega}$$

*Sugerencia* Consideré  $\int_{-\infty}^t (1+t^2)^{-1} dt$ .

- 24 Pruebe que**

$$x(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega_0 t)[H(t + \frac{1}{2}T) - H(t - \frac{1}{2}T)]$$

tiene una transformada de Fourier

$$T[\operatorname{senc} \omega + \frac{1}{2} \operatorname{senc}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \operatorname{senc}(\omega + \omega_0)]$$

- 25 La transformada de Hartley discreta** de la sucesión  $\{f(r)\}_{r=0}^{N-1}$  está definida por

$$H(v) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f(r) \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi v r}{N}\right) \quad (v = 0, 1, \dots, N-1)$$

La transformada inversa es

$$f(r) = \sum_{v=0}^{N-1} H(v) \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi v r}{N}\right) \quad (r = 0, \dots, N-1)$$

Pruebe que en el caso  $N = 4$

$$H = Tf$$

$$H = [H(0) \quad H(1) \quad H(2) \quad H(3)]^T$$

$$f = [f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3)]^T$$

$$T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Después calcule la transformada de Hartley discreta de la sucesión  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Pruebe que  $T^2 = \frac{1}{4}I$  y entonces que  $T^{-1} = 4T$ , y verifique que aplicando el operador  $T^{-1}$  se recupera la sucesión original.

# Respuestas a ejercicios

## CAPÍTULO 1

### Ejercicios

1 (a)  $y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}$

(b)  $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

2  $z = 2, \frac{1}{2}\pi$

3  $u = 6v$

6 Franja semi-infinita  $v > 0, |u| < 1$

7 (a)  $u = v\sqrt{3} - 4$

(b)  $v = -u\sqrt{3}$

(c)  $(u+1)^2 + (v-\sqrt{3})^2 = 4$

(d)  $u^2 + v^2 = 8$

8 (a)  $\alpha = \frac{1}{3}(-2+j), \beta = \frac{3}{5}(1+2j)$

(b)  $u + 2v < 3$

(c)  $(5u-3)^2 + (5v-6)^2 < 20$

(d)  $\frac{3}{10}(1+3j)$

9 Interior del círculo, centro  $(0, -1/2c)$ , radio  $1/2c$ ; semiplano  $v \leq 0$ ; región fuera del círculo, centro  $(0, -1/2c)$ , radio  $1/2c$

10 Círculo, centro  $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$ , radio  $\frac{7}{6}$

11  $\operatorname{Re}(w) = 1/2a$ , semiplano  $\operatorname{Re}(w) > 1/2a$

12  $w = \frac{z+1}{jz-j}$ ,

$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{const}(k)$  a círculos

$$u^2 + \left(v - \frac{k}{1-k}\right)^2 = \frac{1}{(1-k)^2} \text{ más } v = -1 \quad (k=1)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{const}(l) \text{ a círculos } \left(u + \frac{1}{l}\right)^2 + (v+1)^2 = \frac{1}{l^2}$$

más  $u = 0 \quad (l=0)$

13 (a)  $1+j, j, \infty$

(b)  $|w| > \sqrt{2}$

(c)  $v = 0, (u-1)^2 + v^2 = 1$

(d)  $\pm 2^{1/4} e^{j\pi/8}$

14 Segmento del eje imaginario  $|v| \geq 1$

15 (a) Segmento superior del círculo, centro  $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ , radio  $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ , cortado por la línea  $u - 3v = 1$

16 Círculo, centro  $(\frac{5}{3}, 0)$ , radio  $\frac{4}{3}$

17  $z_0 = j, \theta_0 = \pi$

18  $|w-1| < 1; |w - \frac{4}{3}| > \frac{2}{3}$

19  $w = e^{j\theta_0} \frac{z - z_0}{z_0^* z - 1}$ , donde  $\theta_0$  es cualquier número real

20 Región encerrada por la parábola invertida  $v = 2 - (u^2/8)$  y el eje real

21  $u = 0, 2mu = (1-m^2)v$

23  $u = x + \frac{x}{x^2+y^2}, v = y - \frac{y}{x^2+y^2}; v = 0$ ; elipses  
 $u^2 + v^2 = r^2$  y  $x^2 + y^2 = r^2, r$  grande

24 (a)  $e^z(z+1)$  (b)  $4 \cos 4z$  (d)  $-2 \sin 2z$

25  $a = -1, b = 1$

$w = z^2 + jz^2, dw/dz = 2(1+j)z$

26  $v = 2y + x^2 - y^2$

27  $e^z(x \sin y + y \cos y), z e^z$

28  $\cos x \operatorname{senh} y, \operatorname{sen} z$

29 (a)  $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \beta$

(b)  $2e^{-ix} \operatorname{sen} y + x^2 - y^2 = \beta$

30 (a)  $(x^2 - y^2) \cos 2x - 2xy \operatorname{sen} 2y + j[2xy \cos 2x + (x^2 - y^2) \operatorname{sen} 2y]$

(b)  $\operatorname{sen} 2x \operatorname{cosh} 2y + j \operatorname{cos} 2x \operatorname{senh} 2y$

31  $u = \cos^{-1}$

$\{2y^2[x^2 + y^2 - 1 + \sqrt{[(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2]}\}] \}$

$v = \operatorname{senh}^{-1}$

$\sqrt{\{\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) + \frac{1}{2}\sqrt{[(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2]}\}}$

33 (a) 0

(b) 3, 4

(c)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(-1+j\sqrt{3}), \frac{1}{4}(-1-j\sqrt{3})$

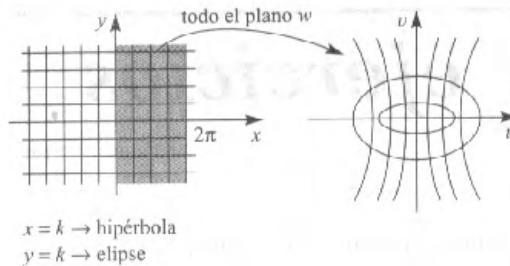
34  $z = \pm j$

35 (a) región fuera del círculo unitario

(b)  $1 \leq u^2 + v^2 < e^2, 0 \leq v \leq u \tan 1$

(c) fuera del círculo unitario,  $u$  y  $v$  de signos opuestos

36



37 4a, elipse centrada en el origen, dado que los ejes

$$\text{son } \frac{b}{a^2 + b^2} \text{ y } \frac{b}{|b^2 - a^2|}$$

$$38 \text{ (a) } j + z - jz^2 - z^3 + jz^4 + \dots$$

$$\text{(b) } \frac{1}{z} + \frac{j}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{j}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \dots$$

$$\text{(c) } 1 - (z - 1 - j) + (z - 1 - j)^2 - (z - 1 - j)^3 + \dots$$

$$39 \text{ (a) } 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \dots$$

$$\text{(b) } 1 - 3z^2 + 6z^4 - 10z^6 + \dots$$

$$40 \text{ (a) } \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z - 1) + \frac{1}{8}(z - 1)^2 - \frac{1}{16}(z - 1)^3; 2$$

$$\text{(b) } \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(z - 2j)^2 + \frac{1}{64}(z - 2j)^4 - \frac{1}{256}(z - 2j)^6; 2$$

$$\text{(c) } -\frac{1}{2}j + \frac{1}{2}(1 + j)(z - 1 - j) + \frac{1}{4}(z - 1 - j)^2$$

$$+ \frac{1}{2}(j - 1)(z - 1 - j)^3; \sqrt{2}$$

$$41 \text{ } 1 - z + z^2 + \dots$$

$$42 \text{ } 1, \sqrt{5}; f \text{ es singular en } z = j$$

$$43 \text{ } z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^5 + \dots; \frac{1}{2}\pi$$

$$44 \text{ (a) } \frac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + \dots (0 < |z| < 1)$$

$$\text{(b) } \frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{z - 1} + 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - \dots \\ (0 < |z - 1| < 1)$$

$$45 \text{ (a) } \dots + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{3!z} + z$$

$$\text{(b) } z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots 952$$

$$\text{(c) } a^2 \operatorname{sen} \frac{1}{a} + zf''(a) + \dots$$

$$46 \text{ (a) } +\frac{1}{2}z + \frac{3}{4}z^2 + \frac{7}{8}z^3 + \frac{15}{16}z^4 + \dots$$

$$\text{(b) } \dots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}z^3 - \dots$$

$$\text{(c) } \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{7}{z^3} + \frac{15}{z^4} + \dots$$

$$\text{(d) } \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} + \dots$$

$$\text{(e) } -1 + \frac{2}{z-2} + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3 + (z-2)^4 - \dots$$

$$47 \text{ (a) } z = 0, \text{ polo doble}$$

$$\text{(b) } z = j, \text{ polo simple; } z = -j, \text{ polo doble}$$

$$\text{(c) } z = \pm 1, \pm j, \text{ polos simples}$$

$$\text{(d) } z = j\pi n \text{ (n un entero), polos simples}$$

$$\text{(e) } z = \pm j\pi, \text{ polos simples}$$

$$\text{(f) } z = 1, \text{ singularidad esencial}$$

$$\text{(g) Cero simple en } z = 1 \text{ y polos simples en } z = \pm j$$

$$\text{(h) Cero simple en } z = -j, \text{ polo simple en } z = 3 \text{ y polo de orden 3 en } z = -2$$

$$\text{(i) Cero simple en } z = 2 + j, 2 - j \text{ y un polo de orden 2 en } z = 0$$

$$48 \text{ (a) } \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \text{ (singularidad removible)}$$

$$\text{(b) } \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{4!} + \frac{z^7}{5!} + \dots \text{ (polo de orden 3)}$$

$$\text{(c) } \frac{1}{z} + \frac{1}{2iz^3} + \frac{1}{4iz^5} - \dots \text{ (singularidad esencial)}$$

$$\text{(d) } \tan^{-1} 2 + \frac{2}{5}z - \frac{6}{25}z^2 + \dots \text{ (punto analítico)}$$

$$50 \text{ (a) Polos simples en } z = -1, 2; \text{ residuos } \frac{1}{3}, \frac{5}{3}$$

$$\text{(b) Polo simple en } z = 1, \text{ polo doble en } z = 0; \text{ residuos } -1, 1$$

$$\text{(c) Polos simples en } z = 1, 3j, -3j; \text{ residuos } \frac{1}{2}, \frac{5}{12}(3 - j), \frac{5}{12}(3 + j)$$

$$\text{(d) Polos simples en } z = 0, 2j, -2j; \text{ residuos } -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8} + \frac{3}{4}j, -\frac{3}{8} - \frac{3}{4}j$$

$$\text{(e) Polo de orden 5 en } z = 1, \text{ residuo 19}$$

$$\text{(f) Polo de orden 2 en } z = 1, \text{ residuo 4}$$

$$\text{(g) Polo simple en } z = -3, \text{ polo doble en } z = 1; \text{ residuos } -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$$

$$\text{(h) Polos simples en } z = 0, -2, -1; \text{ residuos } \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 1$$

$$51 \text{ (a) } 1 \text{ (polo simple)}$$

$$\text{(b) } -\frac{1}{12}(3 + j\sqrt{3}) \operatorname{sen} [\frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3})] \text{ (polo simple)}$$

$$\text{(c) } \frac{1}{4}(1 + j)\sqrt{2} \text{ (polo simple)}$$

$$\text{(d) } -\pi \text{ (polo simple)} \quad \text{(e) } -j\frac{1}{4} \text{ (polo doble)}$$

$$52 \text{ (a) } -\frac{1}{2} \text{ (polo triple)} \quad \text{(b) } -\frac{14}{25} \text{ (polo doble)}$$

$$\text{(c) } e^{in\pi} \text{ (polo doble)}$$

$$53 \text{ } -\frac{44}{3} - j\frac{8}{3}, \text{ todos los casos}$$

$$54 \text{ } 0, \text{ todos los casos}$$

56  $0, 2\pi j$

57  $\frac{4}{3}\pi j, \frac{12}{3}\pi j$

58  $\frac{4}{17}\pi(9+j2), 0$

59 (a)  $-\frac{3}{8}\pi j$  (b) 0

60 (a) 0 (b)  $2\pi j$

61 (a)  $-\frac{4}{9}\pi j$  (b)  $2\pi j$

62  $z = j, -\frac{3}{10}j; z = -j, \frac{3}{10}j; z = j\sqrt{6}, \frac{2}{15}j\sqrt{6}; z = -j\sqrt{6}, -\frac{2}{15}j\sqrt{6}$

(a) 0, (b)  $\frac{1}{3}\pi$ , (c) 0

63 (a) 0 (b) 0

64 (a)  $2\pi j, \frac{3}{2}\pi j$

(b)  $\frac{2}{7}\pi(25-j39)$

(c)  $0, \frac{19}{108}\pi j, -\frac{19}{108}\pi j$

(d)  $0 - \frac{487}{162}\pi j, -3\pi j$

65 (a)  $2\pi/\sqrt{3}$  (b)  $\frac{1}{2}\pi$  (c)  $\frac{5}{288}\pi$  (d)  $\frac{1}{12}\pi$

(e)  $\frac{8}{3}\pi$  (f)  $\frac{7}{10}\pi$  (g)  $\pi$  (h)  $\pi/2\sqrt{2}$

(i)  $\frac{1}{2}\pi$  (j)  $\pi(1 - 3/\sqrt{5})$

66  $2axV_0/(x^2 + y^2)$

67 (a)  $(0, 0), (0, 1), (0, 7), (7, 0)$

(b)  $v = 0$  (c)  $u = 0$

68  $H(x, y) = 2y - y^2 + x^2;$

$W = 2z - jz^2$

70 (a)  $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$

(b)  $u = 0$  (c)  $v = 0$

## 1.9 Ejercicios de repaso

1 (a)  $3j$  (b)  $7 + j4$  (c) 1 (d)  $j2$

2  $y = 2x$  da  $3u + v = 3$ ,  $u + 2v = 3$  y  $3v - u = 1$  respectivamente

$x + y = 1$  da  $v = 1$ ,  $v - u = 3$  y  $u = 1$  respectivamente

3 (a)  $\alpha = -\frac{1}{8}(3+j4)$ ,  $\beta = 3+j$

(b)  $|3j| \leqslant 3u + 4v$

(c)  $|w - 3 - j| \leqslant 1$

(d)  $\frac{1}{4}(7-j)$

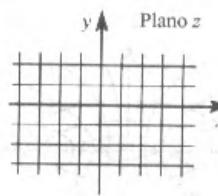
4 (a)  $u^2 + v^2 + u - v = 0$

(b)  $u = 3v$

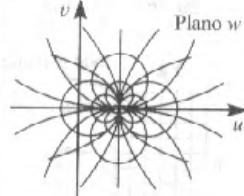
(c)  $u^2 + v^2 + u - 2v = 0$

(d)  $4(u^2 + v^2) = u$

5 Mano izquierda



Mano derecha



$x = k \rightarrow \left(u - \frac{k}{k-1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(k-1)^2}$

$y = l \rightarrow (u-1)^2 + \left(v + \frac{l}{l}\right)^2 = \frac{1}{l^2}$

Puntos fijos:  $1 \pm \sqrt{2}$ 

6 Puntos fijos  $z = \pm\sqrt{2}i$

$r = 1 \Rightarrow u = 0$

7  $u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3$

8  $(z \operatorname{sen} z) v = y \operatorname{sen} x \cosh y + x \cos x \operatorname{senh} y$

9  $w = 1/z$

10 La elipse es dada por  $\frac{x^2}{(R+a^2/4k)^2} + \frac{y^2}{(R-a^2/4k)^2} = 1$

11  $1 - z^3 + z^6 - z^9 + z^{12} - \dots ;$   
 $1 - 2z^3 + 3z^6 - 4z^9 + \dots$

12 (a)  $1 - 2z + 2z^2 - 2z^3, 1$

(b)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{4}(z-1)^2 - \frac{1}{6}(z-1)^4 ; \sqrt{2}$

(c)  $\frac{1}{2}(1+j) + \frac{1}{2}j(z-j) - \frac{1}{4}(1+j)(z-j)^2 - \frac{1}{8}(z-j)^3 ; \sqrt{2}$

13  $1, 1, 1, \frac{1}{2}\sqrt{5}, 2\sqrt{2}$  respectivamente

14 (a)  $\frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots (0 \leq |z| < 1)$

(b)  $\frac{1}{2} - (z-1) + \frac{1}{4}(z-1)^2 + \dots (|z-1| < 1)$

15 (a) Series de Taylor

(b) y (c) son singularidades esenciales, las partes principales son infinitas

16 (a)  $\frac{1}{2}(e^{2x} \cos 2y - 1) + j\frac{1}{2}e^{2x} \sin 2y$

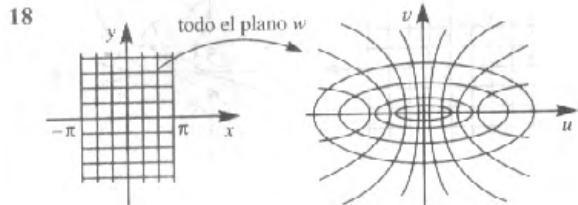
(b)  $\cos 2x \cosh 2y - j \sin 2x \operatorname{senh} 2y$

(c)

$x \operatorname{sen} x \cosh y + y \cos x \operatorname{senh} y + j(x \cos x \operatorname{senh} y - y \operatorname{sen} x \cosh y)$

(d)  $\frac{\tan x(1 - \tanh^2 y) + j \tanh y(1 + \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x \tanh^2 y}$

- 17 (a) Conforme (b)  $j, -1-j$   
 (c)  $\pm 0.465, \pm j 0.465$



$$x = k \rightarrow \text{hipérbolas}, \frac{u^2}{\cos^2 k} - \frac{v^2}{\sin^2 k} = 1$$

$$y = l \rightarrow \text{elipses}, \frac{u^2}{\cosh^2 l} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 l} = 1$$

- 19 (a) Polo simple en  $z = 0$   
 (b) Polos dobles en  $z = 2, 2e^{2\pi j/3}, 2e^{4\pi j/3}$   
 (c) Polos simples en  $z = +1, \pm j$ , singularidad removible en  $z = -1$   
 (d) Polos simples en  $z = \frac{1}{2}(2n+1)\pi j$   
 $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$   
 (e) Sin singularidades en el plano (entero)  
 (f) Singularidad esencial en  $z = 0$   
 (g) Singularidad esencial (no aislada) en  $z = 0$

- 20 (a)  $2e^{-2}$  (b) 0 (c) 0 (d) 0

21 Ceros:  $\pm 1, -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}j\sqrt{11}$

Polos:  $0, e^{xj/4}, e^{3\pi j/4}, e^{5\pi j/4}, e^{7\pi j/4}$

Residuos (respectivamente)  $-5, \frac{6+3\sqrt{2}}{4}-j,$

$\frac{6-3\sqrt{2}}{4}+\frac{j}{4}, \frac{6-3\sqrt{2}}{4}-\frac{j}{4}, \frac{6+3\sqrt{2}}{4}+\frac{j}{4}$

22  $-204 - 324j$

- 23 (a)  $-\frac{7}{5}\pi j$  (b) 0 (c) (i) 0, (ii)  $3\pi j$  (d) 0, 0  
 (e)  $-\pi$  (f)  $j\frac{\pi}{6}, -\frac{4\pi}{3}j$

- 24 (a)  $\frac{7}{50}\pi$  (b)  $\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$  (c)  $-\frac{11\pi}{24}$  (d)  $\frac{19\pi}{12}$

## CAPÍTULO 2

### Ejercicios

- 1 (a)  $\frac{s}{s^2-4}, \operatorname{Re}(s) > 2$  (b)  $\frac{2}{s^3}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (c)  $\frac{3s+1}{s^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$  (d)  $\frac{1}{(s+1)^2}, \operatorname{Re}(s) > -1$

- 2 (a) 5 (b)  $-3$  (c) 0 (d) 3 (e) 2  
 (f) 0 (g) 0 (h) 0 (i) 2 (j) 3

- 3 (a)  $\frac{5s-3}{s^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (b)  $\frac{42}{s^4} - \frac{6}{s^2+9}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (c)  $\frac{3s-2}{s^2} + \frac{4s}{s^2+4}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (d)  $\frac{s}{s^2-9}, \operatorname{Re}(s) > 3$   
 (e)  $\frac{2}{s^2-4}, \operatorname{Re}(s) > 2$   
 (f)  $\frac{5}{s+2} + \frac{3}{s} - \frac{2s}{s^2+4}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (g)  $\frac{4}{(s+2)^2}, \operatorname{Re}(s) > -2$   
 (h)  $\frac{4}{s^2+6s+13}, \operatorname{Re}(s) > -3$   
 (i)  $\frac{2}{(s+4)^3}, \operatorname{Re}(s) > -4$   
 (j)  $\frac{36-6s+4s^2-2s^3}{s^4}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (k)  $\frac{2s+15}{s^2+9}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (l)  $\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (m)  $\frac{18s^7-54}{(s^2+9)^3}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (n)  $\frac{2}{s^3} - \frac{3s}{s^2+16}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 (o)  $\frac{2}{(s+2)^3} + \frac{s+1}{s^2+2s+5} + \frac{3}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$   
 4 (a)  $\frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-7t})$  (b)  $-e^{-t} + 2e^{3t}$   
 (c)  $\frac{4}{9} - \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}e^{-3t}$  (d)  $2 \cos 2t + 3 \sin 2t$   
 (e)  $\frac{1}{64}(4t - \sin 4t)$  (f)  $e^{-2t}(\cos t + 6 \sin t)$   
 (g)  $\frac{1}{8}(1 - e^{-2t}) \cos 2t + 3e^{-2t} \sin 2t$   
 (h)  $e^t - e^{-t} + 2te^{-t}$   
 (i)  $e^{-t}(\cos 2t + 3 \sin 2t)$  (j)  $\frac{1}{2}e^t - 3e^{2t} + \frac{11}{2}e^{3t}$   
 (k)  $-2e^{-3t} + 2 \cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)$   
 (l)  $\frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-t}(\cos t - 3 \sin t)$   
 (m)  $e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$  (n)  $\frac{1}{2}e^{2t} - 2e^{3t} + \frac{3}{2}e^{-4t}$   
 (o)  $-e^t + \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$   
 (p)  $4 - \frac{9}{2} \cos t + \frac{1}{2} \cos 3t$

(q)  $9e^{-2t} - e^{-3t/2}[7\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}t)]$   
(r)  $\frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{10}e^{-2t} - \frac{1}{90}e^{-t}(\cos 3t + 3 \sin 3t)$

- 5 (a)  $x(t) = e^{-2t} + e^{-3t}$   
(b)  $x(t) = \frac{15}{78}e^{4t/3} - \frac{3}{26}(\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t)$   
(c)  $x(t) = \frac{1}{5}(1 - e^{-t})\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$   
(d)  $y(t) = \frac{1}{25}(12e^{-t} + 30t e^{-t} - 12\cos 2t + 16\sin 2t)$   
(e)  $x(t) = -\frac{7}{5}e^t + \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{1}{15}e^{-4t}$   
(f)  $x(t) = e^{-2t}(\cos t + \sin t + 3)$   
(g)  $x(t) = \frac{13}{12}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^t(\cos 2t - 3\sin 2t)$   
(h)  $y(t) = -\frac{2}{3}t + t + \frac{2}{3}e^{-t}[\cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{\frac{1}{2}}\sin(\sqrt{2}t)]$   
(i)  $x(t) = (\frac{1}{8} + \frac{3}{4}t)e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2$   
(j)  $x(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-2t/3}(\cos \frac{1}{3}t + 2\sin \frac{1}{3}t)$   
(k)  $x(t) = t e^{-4t} - \frac{1}{2}\cos 4t$   
(l)  $y(t) = e^{-t} + 2t e^{-2t/3}$   
(m)  $x(t) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t - e^t + \frac{5}{12}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}$   
(n)  $x(t) = \frac{29}{20}e^{-t} - \frac{7}{16}\cos t + \frac{25}{16}\sin t - \frac{1}{80}\cos 3t - \frac{3}{80}\sin 3t$

- 6 (a)  $x(t) = \frac{1}{4}(\frac{15}{4}e^{3t} - \frac{11}{4}e^t - e^{-2t})$ ,  $y(t) = \frac{1}{8}(3e^{3t} - e^t)$   
(b)  $x(t) = 5\sin t + 5\cos t - e^t - e^{-2t} - 3$   
 $y(t) = 2e^t - 5\sin t + e^{2t} - 3$   
(c)  $x(t) = 3\sin t - 2\cos t + e^{-2t}$   
 $y(t) = -\frac{7}{2}\sin t + \frac{9}{2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-3t}$   
(d)  $x(t) = \frac{3}{2}e^{t/3} - \frac{1}{2}e^t$ ,  $y(t) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{t/3}$   
(e)  $x(t) = 2e^t + \sin t - 2\cos t$   
 $y(t) = \cos t - 2\sin t - 2e^t$   
(f)  $x(t) = -3 + e^t + 3e^{-t/3}$   
 $y(t) = t - 1 - \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t/3}$   
(g)  $x(t) = 2t - e^t + e^{-2t}$ ,  $y(t) = t - \frac{7}{2} + 3e^t + \frac{1}{2}e^{-2t}$   
(h)  $x(t) = 3\cos t + \cos(\sqrt{3}t)$   
 $y(t) = 3\cos t - \cos(\sqrt{3}t)$   
(i)  $x(t) = \cos(\sqrt{\frac{3}{10}}t) + \frac{3}{4}\cos(\sqrt{6}t)$   
 $y(t) = \frac{5}{4}\cos(\sqrt{\frac{3}{10}}t) - \frac{1}{4}\cos(\sqrt{6}t)$   
(j)  $x(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t$   
 $y(t) = \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\sin 2t$

7  $I_1(s) = \frac{E_1(50+s)s}{(s^2+10^4)(s+100)^2}$   
 $I_2(s) = \frac{Es^2}{(s^2+10^4)(s+100)^2}$

$i_2(t) = E(-\frac{1}{200}e^{-100t} + \frac{1}{2}t e^{-100t} + \frac{1}{200}\cos 100t)$

9  $i_1(t) = 20\sqrt{\frac{1}{7}}e^{-t/2}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}t)$

10  $x_1(t) = -\frac{3}{10}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{7}{10}\cos(\sqrt{13}t)$   
 $x_2(t) = -\frac{1}{10}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{21}{10}\cos(\sqrt{13}t)$ ,  $\sqrt{3}, \sqrt{13}$

13  $f(t) = tH(t) - tH(t-1)$

14 (a)  $f(t) = 3t^2 - [3(t-4)^2 + 22(t-4) + 43]H(t-4) - [2(t-6) + 4]H(t-6)$

$F(s) = \frac{6}{s^3} - \left(\frac{6}{s^3} + \frac{22}{s^2} + \frac{43}{s}\right)e^{-4s} - \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s}\right)e^{-6s}$

(b)  $f(t) = t - 2(t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2)$

$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}e^s + \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

15 (a)  $\frac{1}{6}(t-5)^3e^{2(t-5)}H(t-5)$

(b)  $\frac{3}{2}[e^{-(t-2)} - e^{-3(t-2)}]H(t-2)$

(c)  $[t - \cos(t-1) - \sin(t-1)]H(t-1)$

(d)  $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(t-\pi)/2}[\sqrt{3}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}(t-\pi)) + \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}(t-\pi))]H(t-\pi)$

(e)  $H(t-\frac{4}{3}\pi)\cos 5t$

(f)  $[t - \cos(t-1) - \sin(t-1)]H(t-1)$

16  $x(t) = e^{-t} + (t-1)[1 - H(t-1)]$

17  $x(t) = 2e^{-t/2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) + t - 1 - 2H(t-1)$

$\{t-2 + e^{-(t-1)/2}\{\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}(t-1))\}$

$- \sqrt{\frac{1}{3}}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}(t-1))\}$

$+ H(t-2)\{t-3 + e^{-(t-2)/2}\}$

$\{\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}(t-2)) - \sqrt{\frac{1}{3}}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}(t-2))\}$

18  $x(t) = e^{-t} + \frac{1}{10}(\sin t - 3\cos t + 4e^\pi e^{-2t}$

$- 5e^{\pi/2}e^{-t})H(t - \frac{1}{2}\pi)$

19  $f(t) = 3 + 2(t-4)H(t-4)$

$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}e^{-4s}$

$x(t) = 3 - 2\cos t + 2[t-4 - \sin(t-4)]H(t-4)$

20  $\theta_0(t) = \frac{1}{10}(1 - e^{-3t})\cos t - 3e^{-3t}\sin t$

$- \frac{3}{10}[1 - e^{3a}e^{-3t}\cos(t-a)]$

$- 3e^{3a}e^{-3t}\sin(t-a)]H(t-a)$

21  $\theta_0(t) = \frac{1}{32}(3 - 2t - 3e^{-4t} - 10te^{-4t})$

$+ \frac{1}{32}[2t-3 + (2t-1)e^{-4(t-1)}]H(t-1)$

23  $\frac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}}{s^2(1 - e^{-4s})}$

24  $\frac{K}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{K}{s} \frac{e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}$

25 (a)  $2\delta(t) + 9e^{-2t} - 19e^{-3t}$

(b)  $\delta(t) - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2t$

(c)  $\delta(t) - e^{-t}(2 \cos 2t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t)$

26 (a)  $x(t) = (\frac{1}{6} - \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-4t}) + (e^{3(t-2)} - e^{4(t-2)})H(t-2)$

(b)  $x(t) = \frac{1}{2}e^{6\pi}e^{-3t}H(t-2\pi) \operatorname{sen} 2t$

(c)  $x(t) = 5e^{3t} - 4e^{-4t} + (e^{-3(t-3)} - e^{-4(t-3)})H(t-3)$

27 (a)  $f'(t) = g'(t) - 43\delta(t-4) - 4\delta(t-6)$

$$g'(t) = \begin{cases} 6t & (0 \leq t < 4) \\ 2 & (4 \leq t < 6) \\ 0 & (t \geq 6) \end{cases}$$

$$(b) g'(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1) \\ -1 & (1 \leq t < 2) \\ 0 & (t \geq 2) \end{cases}$$

(c)  $f'(t) = g'(t) + 5\delta(t) - 6\delta(t-2) + 15\delta(t-4)$

$$g'(t) = \begin{cases} 2 & (0 \leq t < 2) \\ -3 & (2 \leq t < 4) \\ 2t-1 & (t \geq 4) \end{cases}$$

28  $x(t) = -\frac{19}{9}e^{-5t} + \frac{19}{9}e^{-2t} - \frac{4}{3}t e^{-2t}$

30  $q(t) = \frac{E}{Ln} e^{-\mu t} \operatorname{sen} nt, n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}, \mu = \frac{R}{2L}$

$i(t) = \frac{E}{Ln} e^{-\mu t} (n \cos nt - \mu \operatorname{sen} nt)$

31  $y(x) = \frac{1}{48EI} [2Mx^4/l + 8W(x - \frac{l}{2})^3 H(x - \frac{l}{2}) - 4(M + W)x^3 + (2M + 3W)l^2x]$

32  $y(x) = \frac{w(x_2^2 - x_1^2)x^2}{4EI} - \frac{w(x_2 - x_1)x^3}{6EI} + \frac{w}{24EI} [(x - x_1)^4 H(x - x_1) - (x - x_2)^4 H(x - x_2)]$

$y_{\max} = wl^4/8EI$

33  $y(x) = \frac{W}{EI} [\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}(x-b)^3 H(x-b) - \frac{1}{2}bx^2]$

$$= \begin{cases} -\frac{Wx^2}{6EI}(3b-x) & (0 < x \leq b) \\ -\frac{Wb^2}{6EI}(3x-b) & (b < x \leq l) \end{cases}$$

34 (a)  $\frac{3s+2}{s^2+2s+5}$

(b)  $s^2 + 2s + 5 = 0$ , orden 2

(c) Polos  $-1 \pm j2$ ; cero  $-\frac{2}{3}$

35  $\frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 5s^2 + 17s + 13}, s^3 + 5s^2 + 17s + 13 = 0$

orden 3, ceros  $-3, -2$ , polos  $-1, -2 \pm j3$

36 (a) Ligeramente estable (b) Inestable

(c) Estable (d) Estable (e) Inestable

37 (a) Inestable

(b) Estable

(c) Ligeramente estable

(d) Estable

(e) Estable

40  $K > \frac{2}{3}$

41 (a)  $3e^{-7t} - 3e^{-8t}$  (b)  $\frac{1}{3}e^{-4t} \operatorname{sen} 3t$

(c)  $\frac{2}{3}(e^{4t} - e^{-2t})$  (d)  $\frac{1}{3}e^{2t} \operatorname{sen} 3t$

42  $\frac{s+8}{(s+1)(s+2)(s+4)}$

47  $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}$

49 (a)  $\frac{1}{54}[2 - e^{-3t}(9t^2 + 6t + 2)]$

(b)  $\frac{1}{125}[e^{-3t}(5t+2) + e^{2t}(5t-2)]$

(c)  $\frac{1}{16}(4t-1 + e^{-4t})$

51  $e^{-3t} - e^{-4t}$

$x(t) = \frac{1}{12}A[1 - 4e^{-3t} + 3e^{-4t} - (1 - 4e^{-3(t-T)}) + 3e^{-4(t-T)}]H(t-T)]$

52  $e^{-2t} \operatorname{sen} t, \frac{1}{3}[1 - e^{-2t}(\cos t + 2 \operatorname{sen} t)]$

## 2.8 Ejercicios de repaso

1 (a)  $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t - e^{-2t}(\cos t + 3 \operatorname{sen} t)$

(b)  $x(t) = -3 + \frac{13}{7}e^t + \frac{15}{7}e^{-2t}e^{5t}$

2 (a)  $e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$

(b)  $i(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$

+  $V[e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)]$

3  $x(t) = -t + 5 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen} 2t,$

$y(t) = 1 - 2 \cos t + \cos 2t$

4  $\frac{1}{5}(\cos t + 2 \operatorname{sen} t)$

$e^t[(x_0 - \frac{1}{4}) \cos t + (x_1 + x_0 - \frac{3}{5}) \operatorname{sen} t]$   
 $\sqrt{5}, 63.4^\circ \text{ lag}$

6 (a) (i)  $\frac{s \cos \phi - \omega \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$

(ii)  $\frac{s \sin \phi + \omega(\cos \phi + \sin \phi)}{s^2 + 2\omega s + 2\omega^2}$

(b)

$$\frac{1}{20}(\cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t) + \frac{1}{20}e^{-2t}(39 \cos 2t + 47 \operatorname{sen} 2t)$$

7 (a)  $e^{-2t}(\cos 3t - 2 \operatorname{sen} 3t)$

(b)  $y(t) = 2 + 2 \operatorname{sen} t - 5e^{-2t}$

8  $x(t) = e^{-8t} + \operatorname{sen} t, y(t) = e^{-8t} - \cos t$

9  $q(t) = \frac{1}{500}(5e^{-100t} - 2e^{-200t})$

$$-\frac{1}{500}(3 \cos 100t - \operatorname{sen} 100t),$$

corriente adelanta aproximadamente por  $18.5^\circ$

10  $x(t) = \frac{29}{20}e^{-t} + \frac{445}{1212}e^{-t/5} + \frac{1}{3}e^{-2t}$   
 $- \frac{1}{505}(76 \cos 2t - 48 \operatorname{sen} 2t)$

11 (a)  $\theta = \frac{1}{100}(4e^{-4t} + 10t e^{-4t} - 4 \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t)$

(b)  $i_1 = \frac{1}{7}(e^{4t} + 6e^{-3t}), i_2 = \frac{1}{7}(e^{-3t} - e^{4t})$

12  $i = \frac{E}{R}[1 - e^{-nt}(\cos nt + \operatorname{sen} nt)]$

13  $i_1 = \frac{E(4 - 3e^{-Rt/L} - e^{-3Rt/L})}{6R}, i_2 \rightarrow E/3R$

14  $x_1(t) = \frac{1}{3}[\operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen} 2t + \sqrt{3} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t)]$

$$x_2(t) = \frac{1}{3}[\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t - \sqrt{3} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t)]$$

15 (a) (i)  $e^{-t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$

(ii)  $e^t - e^{2t} + 2t e^t$

(b)  $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(8 + 12t + t^3)$

16 (a)  $\frac{5}{2}e^{-7t} \operatorname{sen} 2t$

(b)  $\frac{n^2 t}{Ks(s^2 + 2Ks + n^2)}, \theta(t) = \frac{i}{K}(1 - e^{-Kt}) - it e^{-Kt}$

17 (a) (ii)  $e^{-(t-\alpha)}[\cos 2(t-\alpha) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2(t-\alpha)]H(t-\alpha)$

(b)  $y(t) = \frac{1}{10}[e^{-t}(\cos 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t) + 2 \operatorname{sen} t - \cos t]$   
 $+ \frac{1}{10}[e^{-(t-\pi)}(\cos 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t) + \cos t - 2 \operatorname{sen} t]H(t-\pi)$

18  $i(t) = \frac{1}{250}[e^{-40t} - 2H(1 - \frac{1}{2}T)e^{-40(t-T/2)}$   
 $+ 2H(t-T)e^{-40(t-T)}$   
 $- 2H(t - \frac{3}{2}T)e^{-40(t-3T/2)} + \dots]$

Si, dado que el tiempo constante es grande comparado con  $T$

19  $e^{-t} \operatorname{sen} t, \frac{1}{2}[1 - e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)]$

20  $EI \frac{d^4y}{dx^4} = 12 + 12H(x-4) - R\delta(x-4),$

$$y(0) = y'(0) = y(4) = y''(5) = y'''(0) = 0 \\ y(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^4 - 4.25x^3 + 9x^2 & (0 \leq x \leq 4) \\ \frac{1}{2}x^4 - 4.25x^3 + 9x^2 + \frac{1}{2}(x-4)^4 - 7.75(x-4)^3 & (4 \leq x \leq 5) \end{cases}$$

$$25.5 \text{ kN}, 18 \text{ kN m}$$

21 (a)  $f(t) = H(t-1) - H(t-2)$

$$x(t) = H(t-1)(1 - e^{-(t-1)}) \\ - H(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$$

(b) 0,  $E/R$

23 (a)  $t - 2 + (t+2)e^{-t}$

(b)  $y = t + 2 - 2e^t + 2te^t, y(t) = \frac{1}{2}t^2 + y_1$

24  $EIy = -\frac{2}{9}Wlx^2 + \frac{10}{81}Wx^3 - \frac{W(x-l)^3}{6}H(x-l)$

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -W\delta(x-l) - w[H(x) - H(x-l)]$$

25 (a)  $x(t) = \frac{1}{6}\{1 + e^{3(t-a)/2}[\sqrt{3} \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) - \cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}t)]H(t-a)\}$

26 (a) No (b)  $\frac{1}{s^2 + 2s + (K-3)}$  (d)  $K > 3$

27 (a) 4 (b)  $\frac{1}{10}$

28 (a)  $\frac{K}{s^2 + (1 + KK_1)s + K}$

(c)  $K = 12.5, K_1 = 0.178$

(d) 0.65 s, 2.48 s, 1.86 s

29 (a)  $K_2 = M_2 \omega^2$

30 (b) Inestable (c)  $\beta = 2.5 \times 10^{-5}, 92 \text{ dB}$

(d)  $-8 \text{ dB}, 24^\circ$

(e)  $K = 10^6, \tau_1 = 10^{-6}, \tau_2 = 10^{-7}, \tau_3 = 4 \times 10^{-8}$

(f)  $s^3 + 36 \times 10^6 s^2 + 285 \times 10^{12}s + 25 \times 10^{16}(1 + 10^7 \beta) = 0$

## CAPÍTULO 3

### Ejercicios

1 (a)  $\frac{4}{4z+1}, |z| > \frac{1}{4}$  (b)  $\frac{z}{z-3}, |z| > 3$

(c)  $\frac{z}{z+2}, |z| > 2$  (d)  $\frac{-z}{z-2}, |z| > 2$

(e)  $3 \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$

2  $e^{-2mkT} \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-2mT}}$

4  $\frac{1}{z^3} \frac{2z}{2z-1} = \frac{2}{z^2(2z-1)}$

5 (a)  $\frac{5z}{5z+1}$  (b)  $\frac{z}{z+1}$

6  $\frac{2z}{2z-1}, \quad \frac{2z}{(2z-1)^2}$

8 (a)  $\{e^{4kT}\} \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-4T}}$

(b)  $\{\sin kT\} \leftrightarrow \frac{z \sin T}{z^2 - 2z \cos T + 1}$

(c)  $\{\cos 2kT\} \leftrightarrow \frac{z(z - \cos 2T)}{z^2 - 2z \cos 2T + 1}$

- 11 (a) 1 (b)  $(-1)^k$  (c)  $(\frac{1}{2})^k$  (d)  $\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^k$   
 (e)  $j^k$  (f)  $(-j\sqrt{2})^k$   
 (g) 0 ( $k = 0$ ), 1 ( $k > 0$ )  
 (h) 1 ( $k = 0$ ),  $(-1)^{k+1}$  ( $k > 0$ )

- 12 (a)  $\frac{1}{3}[1 - (-2)^k]$  (b)  $\frac{1}{3}[3^k - (-\frac{1}{3})^k]$   
 (c)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k$  (d)  $\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^k + \frac{2}{3}(-1)^{k+1}$   
 (e)  $\sin \frac{1}{2}k\pi$  (f)  $2^k \sin \frac{1}{6}k\pi$   
 (g)  $\frac{5}{2}k + \frac{1}{4}(1 - 3^k)$   
 (h)  $k + 2\sqrt[3]{3} \cos(\frac{1}{3}k - \frac{3}{2}\pi)$

- 13 (a)  $\{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2\}$   
 (b)  $\{1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2\}$   
 (c)  $\{0, 5, 0, 1, 3\}$   
 (d)  $\{0, 0, 1, 1\} + \{(-\frac{1}{3})^k\}$   
 (e) 1 ( $k = 0$ ),  $\frac{5}{2}(k=1)$ ,  $\frac{5}{4}(k=2)$ ,  $-\frac{1}{8}(-\frac{1}{2})^{k-3}$  ( $k \geq 3$ )  
 (f)  $\begin{cases} 0 & (k=0) \\ 3-2k+2^{k-1} & (k \geq 1) \end{cases}$   
 (g)  $\begin{cases} 0 & (k=0) \\ 2-2^{k-1} & (k \geq 1) \end{cases}$

14  $y_{k+2} + \frac{1}{2}y_{k+1} = x_k, \quad y_{k+2} + \frac{1}{4}y_{k+1} - \frac{1}{3}y_k = x_k$

- 15 (a)  $y_k = k$  (b)  $y_k = \frac{3}{10}(9^k) + \frac{17}{10}(-1)^k$   
 (c)  $2^{k-1} \sin \frac{1}{2}k\pi$  (d)  $2(-\frac{1}{2})^k + 3^k$

- 16 (a)  $y_k = \frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^k - \frac{9}{10}(\frac{1}{3})^k + \frac{1}{2}$   
 (b)  $y_k = \frac{2}{3}(3^k) - 6(2^k) + \frac{5}{2}$   
 (c)  $y_n = \frac{2}{5}(3^n) - \frac{2}{3}(2^n) + \frac{4}{15}(\frac{1}{2})^n$   
 (d)  $y_n = 2(3^{n-1}) \sin \frac{1}{6}n\pi + 1$   
 (e)  $y_n = \frac{18}{5}(-\frac{1}{2})^n - \frac{6}{5}(-2)^n - 2n - 1$   
 (f)  $y_n = -\frac{1}{2}[2^n + (-2)^n] + 1 - n$

17 (b) 7, £4841

18  $y_k = 2^k - \frac{1}{2}(3^k) + \frac{1}{2}$

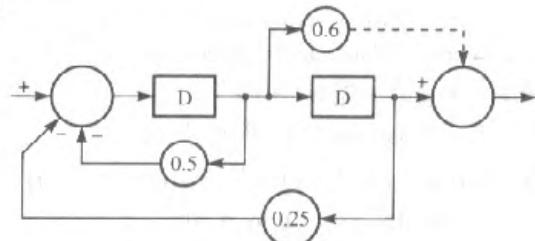
19 Cuando  $k \rightarrow \infty$ ,  $I_k \rightarrow 2G$  como una oscilación amortiguada

21 (a)  $\frac{1}{z^2 - 3z + 2}$

(b)  $\frac{z-1}{z^2 - 3z + 1}$

(c)  $\frac{z+1}{z^3 - z^2 + 2z + 1}$

22



23 (a)  $\frac{1}{2}\{(-\frac{1}{4})^k - (-\frac{1}{2})^k\}$

(b)  $2(3^k) \sin \frac{1}{6}(k+1)\pi$

(c)  $\frac{2}{3}(0.4)^k + \frac{1}{3}(-0.2)^k$

(d)  $4^{k+1} + 2^k$

24  $\begin{cases} 0 & (k=0) \\ 2^{k-1} - 1 & (k \geq 1) \end{cases}$

$\begin{cases} 0 & (k=0) \\ 2^{k-1} & (k \geq 1) \end{cases}$

25 (a), (b) y (c) son estables; (d) es inestable; (e) es ligeramente estable

26  $2 - (\frac{1}{2})^k$

27  $y_n = -4(\frac{1}{2})^n + 2(\frac{1}{3})^n + 2(\frac{2}{3})^n$

29 forma  $q$ :

$$(Aq^2 + Bq + C)y_k = \Delta^2(q^2 + 2q + 1)u_k$$

forma  $\delta$ :

$$[A\Delta^2\delta^2 + (2\Delta A + \Delta B)\delta + (A + B + C)]y_k = \Delta^2(4 + 4\Delta\delta + \Delta^2\delta^2)u_k$$

$$A = 2\Delta^2 + 6\Delta + 4$$

$$B = 4\Delta^2 - 8$$

$$C = 2\Delta^2 - 6\Delta + 4$$

30  $\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$

$$[(\Delta^3 + 4\Delta^2 + 8\Delta + 8)\delta^3 + (6\Delta^2 + 16\Delta + 16)\delta^2 + (12\Delta + 16)\delta + 8]y_k = (2 + T\delta)^3 u_k$$

$$32 \quad \frac{12(z^2 - z)}{(12 + 5\Delta)z^2 + (8\Delta - 12)z - \Delta} \\ \frac{12\gamma(1 + \Delta\gamma)}{\Delta(12 + 5\Delta)\gamma^2 + (8\Delta - 12)\gamma + 12}$$

### 3.10 Ejercicios de repaso

4  $3 + 2k$

5  $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}(-2)^k - \frac{1}{2}(-1)^k$

7  $\frac{2z}{(z - e)^{3T}} - \frac{z}{z - e^{-2T}}$

8 (a)  $\left\{ \frac{1}{a-b}(a^n - b^n) \right\}$

(b) (i)  $3^{k-1}k$       (ii)  $2\sqrt[3]{3} \sin \frac{1}{3}k\pi$

9  $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k - 2^k$

10  $(-1)^k$

13  $\frac{1}{2}A[2 - 2(\frac{1}{2})^k - k(\frac{1}{2})^{k-1}]$

## CAPÍTULO 4

### Ejercicios

1 (a)  $f(t) = -\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3 \sin(2n-1)t}{2n-1} - \frac{\sin 2nt}{2n} \right]$$

(b)  $f(t) = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$

(c)  $f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$

(d)  $f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos 2nt}{4n^2 - 1}$

(e)  $f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nt}{4n^2 - 1}$

(f)  $f(t) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$

(g)  $f(t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{n}$

(h)  $f(t) = \left( \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{\pi} \operatorname{senh} \pi \right)$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2} + \frac{(-1)^n \operatorname{senh} \pi}{n^2 + 1} \right] \cos nt \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1} \operatorname{senh} \pi \operatorname{sen} nt$$

2  $f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$

Tomando  $t = \pi$  da el resultado requerido.

3  $q(t) = Q \left[ \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} \right]$

4  $f(t) = \frac{5}{\pi} + \frac{5}{2} \operatorname{sen} t - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$

5 Tomando  $t = 0$  y  $t = \pi$  da las respuestas requeridas.

6  $f(t) = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n-2)t}{(2n-1)^2}$

Tomando  $t = 0$  da la serie requerida.

7  $f(t) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$

Reemplazando  $t$  por  $t - \frac{1}{2}\pi$  se obtiene la siguiente serie seno de armónicas impares:

$$f\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) - \frac{3}{2} = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

8  $f(t) = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{l}$

9  $f(t) = \frac{2K}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{l}$

10  $f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi t}{5}$

11  $v(t) = \frac{A}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega t - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{4n^2 - 1} \right)$

12  $f(t) = \frac{1}{3}T^2 + \frac{4T^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{T}$

13  $e(t) = \frac{E}{2} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} \right)$

15  $f(t) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi t$

16 (a)  $f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi t + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\pi t$

(b)  $f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\pi t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n-1} + \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \right] \times \sin(2n-1)\pi t$

(c)  $f(t) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi t$

17  $f(t) = \frac{1}{6}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nt$

$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)t$

18  $f(x) = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}$

19  $f(x) = \frac{2I}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2(2n-1)\pi x}{l}$

20  $f(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \sin 2nt$

21  $f(x) = -\frac{1}{2}A - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$

22  $T(x) = \frac{8KL^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}$

23  $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi t + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \sin 2n\pi t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi t$

24 (c)  $1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$

25 (a)  $\frac{1}{6}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\pi^2}{n} (-1)^n + \frac{2}{n^3} (-1)^n - \frac{2}{n^3} \right] \sin nt$

(b)  $a_n = 0$   
 $b_n = \frac{4}{n\pi} \left( \cos n\pi - \cos \frac{1}{2}n\pi \right) + 2 \left( \frac{3\pi}{4n^2} \sin \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi^2}{8n} \cos \frac{1}{2}n\pi + \frac{3}{n^3} \cos \frac{1}{2}n\pi - \frac{6}{\pi n^4} \sin \frac{1}{2}n\pi \right)$   
 $\frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{3}{2}\pi^2 - 16 \right) \sin t + \frac{1}{8}(32 + \pi^3 - 6\pi) \sin 2t - \frac{1}{3} \left( \frac{32}{9} + \frac{1}{2}\pi^2 \right) \sin 3t + \dots \right]$

(c)  $-\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)}$

(d)  $\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos 2(2n-1)\pi t$

30  $e(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)100\pi t$

$i_{ss}(t) = 0.008 \cos(100\pi t - 1.96) + 0.005 \cos(300\pi t - 0.33)$

31  $f(t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$

$x_{ss}(t) \approx 0.14 \sin(\pi t - 0.1) + 0.379 \sin(3\pi t - 2.415) + 0.017 \sin(5\pi t - 2.83)$

32  $f(t) = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2\pi nt$

$x_{ss}(t) = 0.044 \sin(2\pi t - 3.13) - 0.0052 \sin(4\pi t - 3.14)$

33  $e(t) = \frac{100}{\pi} + 50 \sin 50\pi t + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 100\pi nt}{4n^2-1}$

$i_{ss}(t) = 0.78 \cos(50\pi t + (-0.17)) - 0.01 \sin(100\pi t + (-0.48))$

35  $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j}{2n\pi} [(-1)^n - 1] e^{jn\pi t/2}$

36 (a)  $\frac{3}{4}\pi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{j\pi}{n} - \frac{1}{n^2} [1 + (-1)^n] \right\} e^{jn\pi t}$

(b)  $\frac{a}{2} \sin \omega t - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi(n^2-1)} [(-1)^n + 1] e^{jn\omega t}$

(c)  $\frac{3}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j}{2\pi n} [1 - (-1)^n] e^{jn\pi t}$

(d)  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} e^{2jn\pi t}$

38 (b) (i) 17.74, (ii) 17.95

(c) 18.14; (i) 2.20%, (ii) 1.05%

39 (a)  $c_0 = 15$ ,  $c_n = \frac{30}{jn\pi}(1 - e^{-jn\pi/2})$ 

$$15, \frac{30}{\pi}(1-j), -\frac{30}{\pi}j, -\frac{10}{\pi}(1+j), 0, \frac{6}{\pi}(1-j)$$

(b) 15 W, 24.30 W, 12.16 W, 2.70 W, 0.97 W

(c) 60 W

(d) 91.9%

40 0.19, 0.10, 0.0675

41 (c)  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = \frac{3}{2}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -\frac{7}{8}$ 42 (c)  $c_0 = \frac{1}{4}$ ,  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{5}{16}$ ,  $c_3 = 0$ 46 (b)  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \sqrt{2\pi}$ ,  $c_3 = 0$ , MSE = 0

## 4.9 Ejercicios de repaso

$$1 f(t) = \frac{1}{6}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^n \cos nt \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\pi}{2n-1} - \frac{4}{\pi(2n-1)} \right] \sin(2n-1)t \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n} \sin 2nt$$

Tomando  $T = \pi$  da la suma requerida

$$2 f(t) = \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \cos \frac{1}{3}n\pi - \frac{1}{3}[2 + (-1)^n] \right\} \cos nt, \\ \text{ para } \frac{2}{3}\pi$$

$$3 \text{ (a) } f(t) = \frac{2T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2(2n-1)\pi t}{T}$$

$$\text{ (b) } -\frac{1}{4}T; \quad \text{ (c) Tomando } t = \frac{1}{4}T \text{ da } S = \frac{1}{8}\pi^2$$

$$5 f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

$$8 f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$10 \text{ (a) } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nt$$

$$\text{ (b) } f(t) = \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$$

$$13 \text{ (a) } f(t) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$$

$$\text{ (b) } g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

$$15 \text{ (a) } v(t) = \frac{10}{\pi} + 5 \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos \frac{4n\pi t}{T}$$

(b) 2.5 W, 9.01%

$$16 g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

$$f(t) = 1 + g(t)$$

$$18 \text{ (b) } \frac{\sin \omega t - \omega \cos \omega t}{1 + \omega^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha t - \alpha \cos \alpha t}{(2n-1)(1+\alpha^2)}$$

$$\alpha = (4n-2)\pi/T$$

$$19 \text{ (c) } T_0 = 1, T_1 = t_1, T_2 = 2t^2 - 1, T_3 = 4t^3 - 3t$$

$$\text{ (d) } \frac{1}{16}T_5 - \frac{5}{8}T_4 + \frac{33}{16}T_3 - \frac{5}{2}T_2 + \frac{95}{3}T_1 - \frac{79}{8}T_0$$

$$\text{ (e) } \frac{33}{4}t^3 - 5t^2 + \frac{91}{16}t - \frac{59}{8}, t = -1$$

## CAPÍTULO 5

### Ejercicios

$$1 \frac{2a}{a^2 + \alpha^2}$$

$$2 AT^2 j\omega \operatorname{senc}^2 \frac{\omega T}{2}$$

$$3 AT \operatorname{senc}^2 \frac{\omega t}{2}$$

$$4 8K \operatorname{senc} 2\omega, 2K \operatorname{senc} \omega, 2K(4 \operatorname{senc} 2\omega - \operatorname{senc} \omega)$$

$$5 4 \operatorname{senc} \omega - 4 \operatorname{senc} 2\omega$$

$$7 \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

$$10 F_s = \frac{x}{x^2 + a^2}, F_c = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

$$12 \frac{1}{(1 - \omega^2) + 3j\omega}$$

$$13 4 \operatorname{senc} 2\omega - 2 \operatorname{senc} \omega$$

$$14 \frac{1}{2}T[\operatorname{senc} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)T + \operatorname{senc} \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)T]$$

$$15 \frac{1}{2}Te^{-j\omega T/2} [e^{j\omega_0 T/2} \operatorname{senc} \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)T \\ + e^{-j\omega_0 T/2} \operatorname{senc} \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)T]$$

16  $j[\operatorname{senc}(\omega + 2) - \operatorname{senc}(\omega - 2)]$

18  $4AT \cos \omega T \operatorname{senc} \omega T$

19 Filtro de paso alto

20  $\pi e^{-\alpha|\omega|}$

21  $T[\operatorname{senc}(\omega - \omega_0)T + \operatorname{senc}(\omega + \omega_0)T]$

26  $\frac{1}{2}\pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] - \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

28 {2, 0, 2, 0}

29 {2, 0, 2, 0}

## 5.9 Ejercicios de repaso

1  $\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos 2\omega}{\omega}$

2  $-\frac{\pi j}{\omega} \operatorname{senc} 2\omega$

7 (a)  $\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})H(t)$   
 (b) (i)  $te^{2t}H(t)$       (ii)  $(t-1+e^{-t})H(t)$

8 (a)  $-\operatorname{sen} \omega_0(t + \frac{1}{4}\pi)$       (b)  $\cos \omega_0 t$   
 (c)  $je^{j\omega_0 t}$       (d)  $-je^{-j\omega_0 t}$

17 (a)  $\frac{a + 2\pi s}{a^2 + 4\pi^2 s^2}$   
 (b)  $\frac{1}{2\pi s}(\operatorname{sen} 2\pi sT - \cos 2\pi sT + 1)$

# Índice

## A

- abscisa de convergencia, 106
- Adams-Bashforth, método de, 274
- admitancia, 85, 87
- aerodinámica, 2
- álgebra de diagramas de bloque, 179
- algoritmo de Cooley-Tukey, 425
- amplitud,
  - de la  $n$ -ésima armónica, 283
  - espectro de, 338, 371
- ganancia de, 204
- modulación de, 429
- radio de, 204
- análisis de Fourier, analítica,
  - función, 29, 75
  - señal, 439
- Ángulo fase, 283
- aproximación de Butterworth, 427
- aproximación de diferencias hacia atrás, 276
- argumento  $\theta$ , 6
- armónicas, 283
  - impares, 297
  - pares, 297
  - primeras, 283

## B

- Bernoulli, 280
- bilineal,
  - mapeo, 18, 22, 37, 86
  - método de transformada, 269, 276
  - transformación, 23

## C

- cálculo finito, 217
- cálculo generalizado, 163
- capacitancia, 85
- cas  $t$ , 439

## Cauchy,

- teorema de, 69, 70, 72, 78
- teorema integral de, 75, 77
- cero,
  - de una función analítica, 56
  - de una función de transferencia, 178, 245
- circuito eléctrico, 85, 130
- círculo, 14
- coeficientes de Fourier, 283, 286, 350
- coeficiente de Fourier generalizado, 350
- componente en fase de la  $n$ -ésima armónica, 283
- componentes de fase de cuadratura, 283
- comportamiento de ciclos límite, 356
- condensadores, 130
- condición de Dirichlet para una serie de Fourier, 301
  - para una integral de Fourier, 365
- conforme, 41, 95
- conjuga armónica, 89, 90
- conjunto base, 279
- conjunto imagen, 2
- convolución, 194, 258, 396, 397, 398
- corriente, 130
- criterio de estabilidad de Jury, 255
- criterio de la razón de D'Alambert, 43, 45, 49
- criterio de Routh-Hurwitz, 184
- cruce cero, 245
- curvas imagen, 11

## D

- D'Alambert, 280
- deformación de contorno, 70
- delta de Kronecker, 407
  - la delta de Kronecker, 407
  - demodulación, 429, 438  $\delta_{ij}$
  - derivación de Nichols, 210
  - derivación compleja, 28
  - derivación de una serie de Fourier, 319
  - derivada, 119
    - generalizada, 168, 169
    - derivada de una transformada, 111, 241

desigualdad de Bessel, 352  
 diagrama de Argand, 3, 7, 28  
 diagrama de bloques, 178  
 dinámica de fluidos, 1  
 disco agujerado, 52  
 discretización de Euler, 273  
 distribución, 163  
 dominio, 2  
 dominio de la frecuencia, 399

**E**

ecuación característica, 123, 178, 245  
 ecuación diferencial, 121, 152  
     transformada de Laplace, 121  
     simultáneas, 126  
 ecuación en diferencias, 237, 238, 239, 241  
 ecuación integro-diferencial, 12  
 ecuaciones de Cauchy-Riemann, 29, 31, 34,  
     36, 38, 70  
 ecuaciones polinomiales  
     criterio de estabilidad de Jury, 255  
     criterio de Routh-Hurwitz, 184  
 elasticidad, 2  
 energía, 388, 392  
     de densidad espectral, 389  
     espectro de, 389  
 error de alisamiento, 413  
 error de mínimos cuadrados, 351  
 errores del estado estacionario, 191  
 espectro de fase, 338  
     spectros de fases, 371  
 espectro de potencia, 344, 345  
 espectros de frecuencia, 338, 362, 371  
 espectros lineales, 338  
 estabilidad, 180  
     criterio de estabilidad de Jury, 255  
     criterio de Routh-Hurwitz, 184  
     para sistemas discretos, 253  
     región de, 255  
     sistemas lineales, 181  
 estado de reposo, 177  
 Euler, 280  
 expansión de la serie de Laurent, 62, 78  
 expansión en serie de Fourier, 283  
     de periodo  $2\pi$ , 287  
     de periodo T, 286, 305  
     sobre un intervalo finito, 308  
 expansión en serie de Taylor, 46, 47, 60  
 expansión en serie en senos de medio  
     rango, 312  
 expansión en serie en senos de medio rango,  
     312  
 extensión periódica de  $f(t)$ , 309

extensión periódica par, 311  
 extensiones periódicas impares, 311

**F**

fase de corrimiento, 204  
     hacia adelante, 204  
     hacia atrás, 204  
 fenómeno de Gibbs, 303  
 filtrado del dominio de la frecuencia, 430  
 filtro, 264, 265, 269, 426  
     analógico, 264, 426  
     de Butterworth, 264, 265, 269, 386  
     digital de reemplazo, 265  
     ideal de paso bajo, 264, 367, 426  
 forma exponencial de la expansión de la  
     serie de Fourier, 331, 363  
 forma generalizada del teorema de Parseval,  
     352  
 formas polares, 31  
 fórmula de Parseval, 399  
 fórmulas de Euler, 286, 331  
 frecuencia, 100, 282  
     de respuesta de un sistema, 204  
     de una función periódica, 282  
 frecuencia circular, 282  
 frecuencia compleja, 98, 371  
 frecuencia de función de transferencia, 385,  
     404  
 fuerzas impulsivas, 162  
 función, 2, 42, 122, 287  
     analítica, 29, 75  
     armónica, 34, 87, 88  
     causal, 101  
     circular, 33  
     compleja, 3, 41, 42, 47  
     complementaria, 122  
     conjugada, 34  
     conjugada armónica, 34  
     continua a pedazos, 141, 169, 320  
     coseno en una ventana, 381  
     de diente de sierra, 333  
     de impulso, 162, 250  
     de impulso unitaria, 162  
     de muestreo, 344  
     de orden exponencial, 105  
     de paso unitario, 141  
     de paso unitario de Heaviside, 141, 395  
         relación con la función de impulso,  
         167  
     de peso, 186  
     de transferencia, 177, 266, 428  
         ceros de la, 178  
         polos de la, 178

de transferencia discreta, 245  
 de transferencia  $z$ , 244  
 de Walsh, 355  
 describiendo una, 355  
 descriptiva, 320, 355, 359  
 diente de sierra, 288  
 discreta de transferencia, 245  
 expansión en la serie de Taylor, 47  
 exponencial, 32, 49  
 generada, 220  
 generalizada, 163  
 impulso, 141, 162, 251  
 lineal, 5  
 meromorfa, 57  
 par, 293  
 periódica, 282  
 periódica impar, 294  
 periódica par, 294  
 prueba, 167  
 rectangular, 29  
 sinc, 343  
 seno en una ventana, 381  
 signo, 395  
 sombrero de copa, 142, 145  
 unitaria escalonada, 141  
 ventana, 437  
 funcional lineal, 167  
 funciones armónicas conjugadas, 34  
 funciones circulares, 33  
 funciones definidas sobre un intervalo finito, 308  
 funciones enteras, 49  
 funciones impares, 293  
 funciones ortogonales, 347  
 funciones periódicas, 281

**G**

ganancia del estado estacionario, 191  
 gráficas de Bode, 206  
 frecuencia esquina, 207  
 puntos de corte, 207

**H**

holomorfa, 29

**I**

impulso de respuesta, 186, 250, 383  
 impulso unitario, 222

independencia lineal, 449  
 inductores, 130  
 ingenieros aeronáuticos, 39  
 integración de contorno, 65, 82  
 integral, 65, 66, 81, 194  
 de Duhamel, 195  
 de inversión de Fourier, 438  
 Faltung, 195  
 Folding, 195  
 superposición, 195  
 integral de contorno, 66  
 integral de convolución, 195, 512  
 integral de Fourier, 364  
 condiciones de Dirichlet para la, 365  
 representación de  $f(t)$ , 364  
 integral de Fourier en cosenos, 366  
 integral de Fourier en senos, 366  
 integral de línea, 65  
 integral particular, 122  
 intervalo de muestreo, 222  
 intervalo de Nyquist, 413  
 inversión de bits, 422

**J**

Joseph Fourier, 280

**L**

la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ , 407  
 Lagrange, 280  
 Ley de Hooke, 135  
 Ley de Kirchhoff, 130, 132, 134  
 Ley del movimiento de Newton, 135  
 línea recta, 14

**M**

mapeo, 2, 37  
 amplificación, 8  
 bilineal, 18  
 complejo, 3  
 conforme, 37  
 de inversión, 13  
 degenerado, 5  
 determinante de, 19  
 exponencial, 25  
 identidad, 15  
 inversión, 13  
 inverso, 5, 6  
 lineal, 5

polinomial, 25  
 real, 2  
 rotación, 8  
 traslación, 8  
 marginalmente estable, 181, 254  
 media onda rectificada, 160  
 método de Tustin, 269  
 métodos en diferencias finitas, 218  
 modo fundamental, 283  
 modulación, 378, 385, 429  
 muestreo, 218, 222

**N**

*n*-ésima armónica, 283  
 notación exponencial, 283  
 núcleo, 100

**O**

Oliver Heaviside, 97  
 onda  
 cuadrada, 157, 295, 302  
 diente de sierra, 157, 288  
 onda rectificada del seno, 298  
 onda senoidal recortada, 308  
 operador  $\delta$ , 268  
 operador de la transformada de Fourier, 368  
 operador de la transformada de Laplace, 100, 114  
 operador de retraso, 147  
 operador de transformada inversa, 114, 230  
 operador delta, 267  
 operador lineal, 108, 224, 375  
 orden exponencial, 105

**P**

paquete MATLAB, 430  
 par de transformadas de Fourier, 368, 369, 439  
 par de transformadas de Hilbert, 439  
 par de transformadas de Laplace, 100  
 parte principal de la serie de Laurent, 51  
 periodo, 282  
 pico máximo, 214  
 Pierre Simon Laplace, 98  
 polinomio de Hermite, 354  
 polinomio de Tchebyshev, 354, 359  
 polinomios de Lagurre, 353

polinomios de Legendre, 353  
 polo, 56, 76, 178, 245  
 polos de una función de transferencia, 178  
 potencia, 389, 392  
 potencia promedio, 344  
 primer teorema del corrimiento, 109  
 primera armónica, 283  
 principio de superposición, 198, 325  
 problemas con valores en la frontera, 173  
 propiedad de corrimiento, 164  
 propiedad de dualidad, 380  
 propiedad de equivalencia, 168  
 propiedad del corrimiento de frecuencia, 378  
 pulso diente de sierra, 147  
 punto al infinito, 51  
 punto fijo en un mapeo, 5, 12  
 punto regular de una función compleja, 56

**R**

radio de convergencia, 43  
 raíz cuadrada media, 337  
 rango, 2  
 razón cruzada, 23  
 región, 43  
 regla de L'Hôpital, 61  
 relaciones de ortogonalidad para, 284  
 representación de estado-espacio, 272  
 residuo, 59, 78, 84, 275, 438  
 resistencias, 130  
 resonancia, 138, 326  
 respuesta de la frecuencia, 202, 325, 381, 384  
 retraso, 146  
 retraso de la *n*-ésima armónica, 283  
 retrato del dominio de la frecuencia, 371  
 Riemann, 50, 280

**S**

saltos en discontinuidades, 320  
 Se(x), 367  
 senoidal amortiguado, 111  
 señal de banda limitada, 413  
 señal de tiempo discreta, 218  
 señal portadora, 379  
 señal práctica, 365  
 serie de Fourier en cosenos, 312  
 serie de Fourier en senos, 312  
 series, 47  
 series binomiales, 45  
 de  $f(t)$ , 350

- series de Fourier, 280, 36, 400  
     convergencia, 300, 351  
     de  $f(t)$ , 350  
     derivación, 319  
     fenómeno de Gibbs, 303  
     forma compleja, 331, 363, 400  
     forma exponencial, 331  
     integración, 316  
     medio rango, 309  
     propiedad de linealidad, 299  
     sumas parciales finitas, 302  
 series de Laurent, 51, 64  
     parte principal de la, 51  
 series de Maclaurin, 47  
 series de potencias, 42  
     complejas, 42  
     criterio de la razón de D'Alambert, 43  
     expansión en serie de Taylor, 47  
     radio de convergencia, 43  
     región de convergencia, 43  
     series de Maclaurin, 47  
 series geométricas, 220  
 singularidad, 44, 51, 56, 71, 78  
     esencial, 56  
     removible, 56  
 sistema, 98, 99  
     control de retroalimentación, 192  
     de tiempo discreto, 99, 237, 264, 269  
     entrada, 122  
     estable, 181  
     función de transferencia, 178  
     orden de, 178  
     representación esquemática, 99  
     respuesta, 122  
     respuesta a una entrada arbitraria, 198  
     respuesta de frecuencia, 202  
     respuesta de impulso, 186  
     respuesta transitoria, 214  
         pico máximo, 214  
         tiempo de levantamiento, 214  
         tiempo establecido, 214  
         tiempo pico, 214  
     salida, 122  
     sin anticipación, 100  
 sistema lineal discreto, 244, 245, 250  
     estabilidad, 253  
 sistema lineal invariante en el tiempo, 122  
     solución ordinaria de ecuación diferencial  
         lineal, 121  
     sucesión, 218  
         causal, 219  
         de impulso, 222, 251, 258  
         infinita, 218  
     no causal, 220  
     notación, 218  
     suma de convolución, 259
- T**
- tabla de estabilidad de Jury, 256  
 técnica de impulso invariante, 267  
 teorema  
     Cauchy-Goursat, 70  
     Cayley-Hamilton, 492  
     convolución, 196  
     de Cauchy, 69  
     de Green, 69  
     del residuo, 78, 275  
     del segundo corrimiento, 146  
     integral de Cauchy, 75  
     multiplicación, 334  
     primer corrimiento, 109  
     retraso, 146, 150  
     valor final, 188, 190, 228  
     valor inicial, 188, 228  
 teorema de convolución para la transformada de Laplace, 196  
 teorema de Fourier, 282  
 teorema de modulación exponencial, 109  
 teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, 413, 417  
 teorema de multiplicación, 378, 385, 429  
 teorema de Parseval, 334, 336, 389  
     forma generalizada del, 352  
 teorema fundamental de integración compleja, 70  
 teoría de campo electromagnético y electrostático, 1  
 teoría unificada de transformadas, 273  
 tiempo de levantamiento, 214  
 tiempo establecido, 214  
 tiempo pico, 214  
 torsión de una viga, 173  
 transformada bilateral de Laplace, 101  
 transformada  $\mathcal{D}$ , 273  
 transformada de Fourier, 362, 368, 380, 381, 391, 399, 400, 418  
     discreta, 405  
 transformada de Fourier en cosenos, 374  
 transformada de Fourier en senos, 374  
 transformada de Fourier generalizada, 391  
 transformada de Hartley, 439, 440  
 transformada de Hilbert, 438

- transformada de Laplace, **99, 102, 105, 107, 109, 111, 113, 114, 121, 149, 156, 159, 164, 237, 251m, 269**  
 bilateral, **101, 382**  
 de función continua a pedazos, **145**  
 de función de paso unitario, **144**  
 de un lado, **101**  
 de dos lados, **101**  
 la transformada de Laplace bilateral, **382**  
 relación con la transformada de Fourier, **381**  
 relación con la transformada  $z$ , **262**  
 teorema de convolución para, **196**  
 transformada inversa, **114**  
 unilateral, **101, 382**  
 transformada integral, **98**  
 transformada inversa, **114, 115, 230**  
 transformada rápida de Fourier (TRF), **418**  
 transformada unilateral de Laplace, **101, 382**  
 transformada  $z$ , **219** **222, 224**  
 notación, **219**  
 inversa, **230**  
 operador, **219**  
 par de, **219, 225**  
 propiedades,  
     linealidad, **224**  
 multiplicación por  $a^k$ , **228**  
 multiplicación por  $k'$ , **228**  
 primer corrimiento, **225**  
 segundo corrimiento, **227**
- teorema del valor final, **228**  
 teorema del valor inicial, **228**  
 relación con las transformadas de Laplace, **262**  
 solución de ecuaciones en diferencias, **239**  
 tabla de, **228**  
 técnicas de la inversa, **230**  
 trayectoria de integración, **68**  
 trazo de la respuesta de la frecuencia, **210**  
 trazo de Nyquist, **210**  
 inversa, **210**  
 trazo polar, **210**  
 trazo polo-cero, **179**
- V**
- valor propio, **442**  
 variable aleatoria, **2**  
 variable compleja, **2, 3, 28**  
 variable dependiente, **2, 3**  
 variable independiente, **3**  
 vector propio, **442**  
 vibración mecánica, **130, 135**  
 amortiguadores, **135**  
 desplazamiento, **135**  
 fuerza, **135**  
 masas, **135**  
 voltaje, **130**

# MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

**James**

Todas las ramas de la ingeniería dependen de las matemáticas para su descripción y ha habido un continuo flujo de ideas y problemas de ingeniería que, a su vez, han estimulado y a veces iniciado ciertas ramas de las matemáticas. Así que es vital que los estudiantes de ingeniería reciban bases sólidas en matemáticas, con tratamientos relacionados con sus intereses y problemas. Ésta ha sido la motivación para la producción de este libro.

Reconociendo la creciente importancia de la modelación matemática en la práctica de la ingeniería, cada capítulo contiene secciones específicas de aplicaciones a la ingeniería y estudios de casos.

Los estudios de casos ayudan a reforzar las habilidades en la modelación matemática, esenciales para atacar sistemas cada vez más complejos y cuyo análisis y diseño constituyen la misión del ingeniero.

El capítulo 1 está diseñado para desarrollar una comprensión de las técnicas usuales asociadas con funciones de una variable compleja, componente importante de la "caja de herramientas" matemáticas del ingeniero.

Los capítulos 2 y 3 se dedican a las transformadas de Laplace y  $z$ , que proveen los fundamentos matemáticos necesarios para el análisis del dominio de la frecuencia y el diseño de sistemas continuos y de tiempo discreto, respectivamente.

Los capítulos 4 y 5 tienen que ver con el análisis de Fourier, que es central para muchas aplicaciones de la ingeniería, en particular el análisis de señales y sistemas. Las transformadas discretas de Fourier proveen uno de los métodos clave para el análisis de señales discretas y son utilizadas ampliamente en campos tales como la teoría de la comunicación y el procesamiento del lenguaje e imágenes.

El libro contiene una gran cantidad de ejemplos totalmente resueltos y ejercicios propuestos, además de respuestas a todas las preguntas propuestas.

La mayor parte de los ejercicios pueden verificarse con la ayuda del paquete de software adecuado. Se recomienda fuertemente que se haga esto siempre que sea posible, no sólo para aumentar la confianza del alumno, sino para que entienda mejor el uso y la capacidad de dichos paquetes. Para mostrar cómo modelar problemas utilizando las computadoras se incluyeron algoritmos escritos en pseudocódigo y, por tanto, son fácilmente traducibles por el usuario a cualquier lenguaje específico.

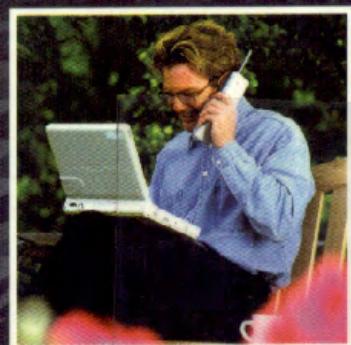
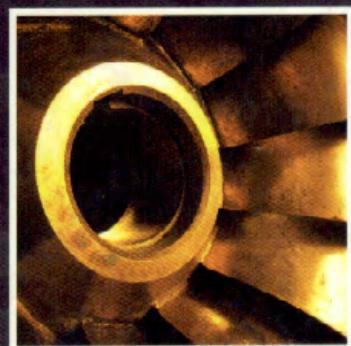
## OTRAS OBRAS DE INTERÉS PUBLICADAS POR PEARSON

**EDWARDS y PENNEY:** *Ecuaciones diferenciales, cuarta edición*

**GERALD y WHEATLEY:** *Análisis numérico con aplicaciones, sexta edición*

**MARSDEN y TROMBA:** *Cálculo vectorial, cuarta edición*

**THOMAS y FINNEY:** *Cálculo, Volumen I, Una variable; Volumen II, Varias variables, novena edición*



ISBN 970-26-0209-2

9 789702 602095

Pearson  
Educación

®

[www.pearsonedlatino.com](http://www.pearsonedlatino.com)