Modelos de sistemas mecatrónicos

Ing. Luis Carlos Ruiz Cardenas MsC.

Ingeniería en Mecatrónica

Universidad Militar Nueva Granada – Sede Campus

Cajicá

2024-2

Temario

- Reglas de clase
- Repaso de Ecuaciones Diferenciales
- Transformada de Laplace
- Funciones de transferencia
    - Lazo abierto
    - Lazo cerrado

Reglas de clase

- Entrada a clase hasta 15 minutos después de dar inicio a la clase
- Tendremos por corte:
  - Talleres y tareas 20% (rubrica)
  - Parciales 50%
    - Parcial 1: 22 de Agosto del 2024
    - Parcial 2: 03 de Octubre del 2024
    - Parcial 3: 21 de Noviembre del 2024
  - Laboratorios 30% (rubrica)

Reglas de clase

- Los laboratorios, se entregan al inicio de cada corte y tendrá informe con formato IEEE, la rúbrica se entregará en el aula virtual
  - Laboratorio 1: Modelado de Sistemas Mecánicos 18 de agosto 2024 antes de media noche
  - Laboratorio 2: Respuesta temporal de Sistemas 29 de septiembre del 2024 antes de media noche
  - Laboratorio 3: Identificación de Sistemas 17 de noviembre del 2024 antes de media noche
- Si se identifica igual o mayor al 20% de plagio en los informes haciendo uso de la herramienta turnitin, la nota queda en 0
- Los grupos se conformarán máximo de 3 personas

Ecuaciones diferenciales

- Ecuaciones Diferenciales (ED): Surgen de las ecuaciones con derivadas de una o mas variables respecto a una o mas variables

$$\frac{dv}{dt} = -g \qquad L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{1}{C}q = 0 \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), cuando uno o mas variables dependientes se derivan respecto a una variables independiente.

Ecuaciones diferenciales

- Ecuaciones diferenciales parciales (EDP), son aquellas ecuaciones que involucran una o mas variables dependientes y son derivadas respecto a una o mas variables independientes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ecuaciones diferenciales

- El orden de una ecuación diferencial, se indica por el exponente mayor en la(s) derivadas

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

Orden 1

$$L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{1}{C}q = 0$$

Orden 2

$$\frac{d^n}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$$

Forma generalizada

Ecuaciones diferenciales

- Notación Leibniz

$$dy/dx,\ d^2y/dx^2,\ d^3y/dx^3,\ \ldots$$

- Notación prima

$$y',\ y'',\ y''',\ \ldots$$

- Notación del punto de Newton

$$d^2s/dt^2 = -32 \qquad \ddot{s} = -32.$$

Ecuaciones diferenciales

Como determinar si es lineal?

- Deben de cumplir las propiedades de:
  - Superposición (Aditividad): Si la entrada $x_1(t)$ produce la salida $y_1(t)$ y la entrada $x_2(t)$ produce la salida $y_2(t)$, entonces una entrada combinada $x_1(t) + x_2(t)$ debe producir una salida combinada $y_1(t) + y_2(t)$.
  - Homogeneidad (Escalabilidad): Si la entrada $x(t)$ produce la salida $y(t)$, entonces una entrada escalada $a \cdot x(t)$ debe producir una salida escalada $a \cdot y(t)$ para cualquier constante a.

Ecuaciones diferenciales

Como determinar si es lineal?

- Una ecuación es lineal, cuando tiene tanto la variable dependiente e independiente elevados a la 0 y/o a la 1

- Una ecuación no es lineal, cuando una ecuación tiene operaciones trigonométricas ($sen, \cos, \tan, etc$) o una de las variables se encuentra en algún denominador ($(1+x)/x = y$) o cuando se esta multiplicando las 2 variables ($xy + 3 = 5$)

Ecuaciones diferenciales

Como determinar si es lineal?

- las derivadas de la variable dependiente son de primer grado

- Los coeficientes de la variable dependientes dependen de la variable independiente

- Solo se exigen para las variable dependiente y sus derivadas

Ecuaciones diferenciales

- Problemas del valor inicial: son aquellas funciones solución $y(x)$ de una ecuación diferencial, tal que cumpla una condición prescrita sobre $y(x)$

Resolver:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \dots, y^{n-1}\right)$$

Sujeto a (condiciones iniciales):

$$y(x_0) = y_0, \quad y'^{(x_0)} = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA

Transformada de Laplace

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\dfrac{1}{s}$
2. t	$\dfrac{1}{s^2}$
3. t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, n a positive integer
4. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
5. $t^{1/2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6. t^α	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
7. $\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
8. $\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
9. $\sin^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
10. $\cos^2 kt$	$\dfrac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
11. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
12. $\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
13. $\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
14. $\sinh^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
15. $\cosh^2 kt$	$\dfrac{s^2-2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
16. te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA

Transformada de Laplace

17. $t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$,	n a positive integer
18. $e^{at}\sin kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	
19. $e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
20. $e^{at}\sinh kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$
21. $e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
22. $t\sin kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
23. $t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
24. $\sin kt + kt\cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
25. $\sin kt - kt\cos kt$	$\dfrac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
26. $t\sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
27. $t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$

28. $\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
29. $\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
30. $1-\cos kt$	$\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
31. $kt-\sin kt$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
32. $\dfrac{a\sin bt - b\sin at}{ab(a^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
33. $\dfrac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
34. $\sin kt\sinh kt$	$\dfrac{2k^2s}{s^4+4k^4}$
35. $\sin kt\cosh kt$	$\dfrac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4}$
36. $\cos kt\sinh kt$	$\dfrac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$

36. $\cos kt\sinh kt$ — $\dfrac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$

37. $\cos kt\cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4+4k^4}$
38. $J_0(kt)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+k^2}}$

Transformada de Laplace

- Transformación lineal: corresponde a la transformada de una combinación lineal de funciones que a su vez es una combinación lineal de transformadas.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Transformada Laplace

- Transformada Inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$$

Transformada Laplace

- Transformada Inversa, en estos caso se puede presentar la necesidad de hacer uso de las fracciones parciales, el cual requiere:

$$F(s) = \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \cdots + b_1 s + b_0\right)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$F(s) = \frac{A}{s + a_1} + \frac{B}{s + a_2} + \frac{C}{s + a_3} + \cdots$$

Transformada Laplace

- Transformada Inversa, en estos caso se puede presentar la necesidad de hacer uso de las fracciones parciales, el cual requiere:

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \cdots + b_1 s + b_0 = A(s+a_2)(s+a_3)\ldots + B(s+a_1)(s+a_3)\ldots + C(s+a_1)(s+a_2)$$

Para s^m

$$b_m = A + B + C$$

Para s^{m-1}

$$b_{m-1} = A\left(a_2 + a_3 + \cdots\right) + B\left(a_1 + a_3 + \cdots\right) + C\left(a_1 + a_2 + \cdots\right) + \cdots$$

Para s^0

$$b_0 = A(a_2 * a_3 * \cdots) + B(a_1 * a_3 * \cdots) + C(a_1 * a_2 * \cdots) + \cdots$$

Transformada Laplace

- Transformada Inversa usando fracciones parciales, dependiendo el orden del denominador se puede llegar a tener un sistema de n-ecuaciones y n-variables.
- Pero se puede solucionar evaluando la siguiente ecuación al igualar cada una de las raíces a 0 y asignando los valores a s

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \cdots + b_1 s + b_0 = A(s+a_2)(s+a_3)\ldots + B(s+a_1)(s+a_3)\ldots + C(s+a_1)(s+a_2)\ldots$$

$$s + a_1 = 0$$

$$s + a_2 = 0$$

$$s + a_3 = 0$$

Transformadas de Laplace

- Transformada de una derivada

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

Transformadas de Laplace

- Transformada de una integral

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F[s]}{s}$$

Transformadas de Laplace

- Convolución:

$$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}$$
$$= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]$$
$$= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau\right]$$

$$F_1(s) * F_2(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\}$$

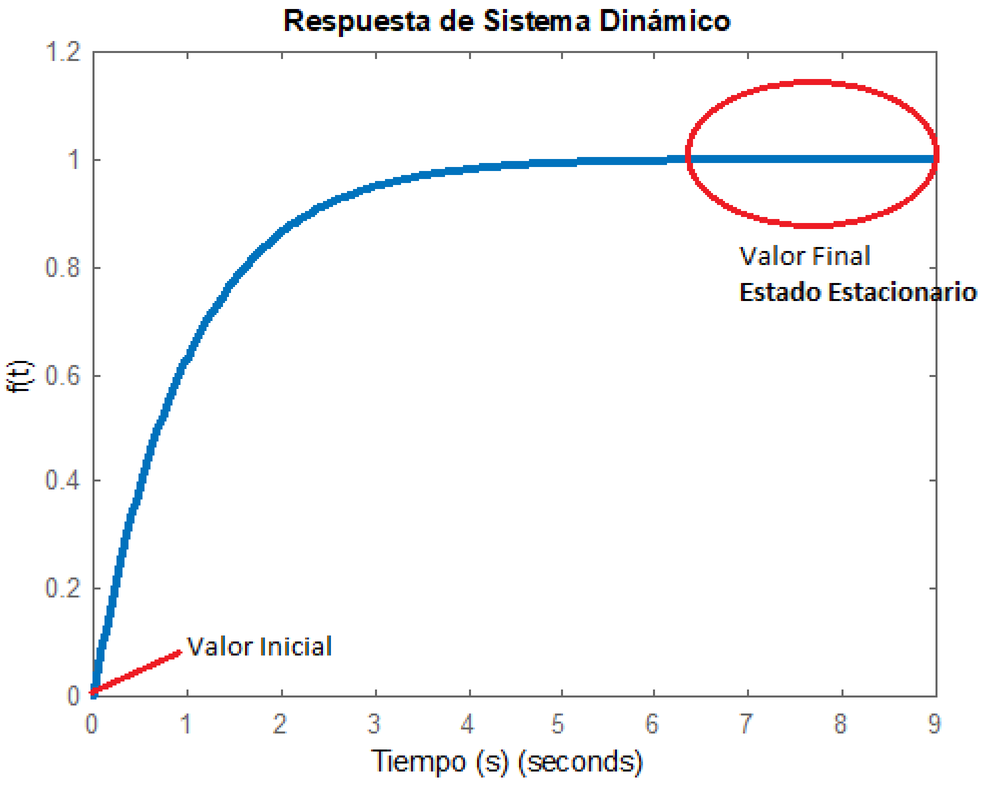
Teorema del valor inicial y final

- Teorema de valor inicial y teorema del valor final: son útiles en el análisis de sistemas y en la teoría de control.

  - TVI: indica las condiciones iniciales en la que parte un sistema dinámico
  - TVF: indica cual es el valor en estado estacionario del sistema dinámico.

- Se pueden aplicar si el sistema es estable

Teorema del valor inicial y final



Teorema del valor inicial y final

Teorema del valor inicial (TVI)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)\, e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt\right] = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0)]$$

Teorema del valor inicial y final

Teorema del valor inicial (TVI)

$$\lim_{s\to\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt\right] = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0)]$$

Como s tiende a infinito, implica que $s > a$, por lo tanto $(s-a) > 0$, lo cual implica $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$

$$0 = \lim_{s\to\infty}[sF(s)] - f(0)$$

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} F(s)$$

Teorema del valor inicial y final

Teorema del valor final (TVF)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{s\to 0}\left[\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt\right] = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)]$$

Teorema del valor inicial y final

Teorema del valor final (TVF)

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \to 0}[sF(s)] - f(0)$$

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty}[f(t)] = \lim_{s \to 0}[sF(s)]$$

Funciones de transferencia (FT)

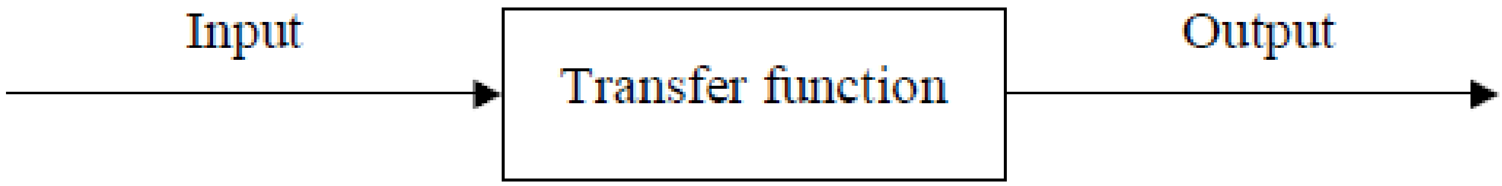
"La función de transferencia es una propiedad exclusiva de los elementos del sistema y no depende de la excitación ni de las condiciones iniciales."[1]

Permite representar el comportamiento dinámico y estacionario de cualquier sistema.

Funciones de transferencia (FT)

- Para obtener una FT, se podría:
  1. Aplicando la transformada de Laplace a una EDL
  2. Tomando datos de los sensores del proceso

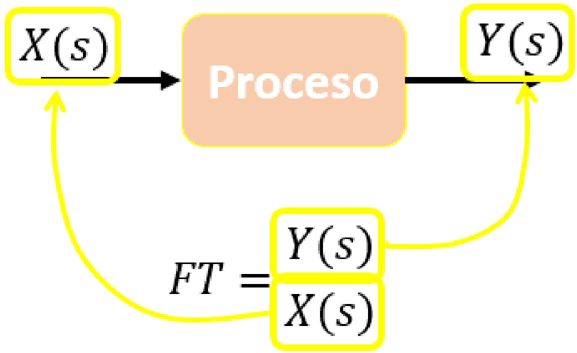
Por lo general se representa en diagrama de bloques



Funciones de transferencia (FT)

- Es la relación entre la señal de entrada y la señal de salida

$$\text{Transfer function} = \frac{\text{Output}}{\text{Input}}$$



- Se hace uso de la transformada de Laplace de una función en el tiempo t como representación de una señal en frecuencia compleja S

$$r(t) = R(s)$$

Funciones de transferencia (FT)

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$$

$$(a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n) Y(s) = (b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \cdots + b_{m-1} S + b_m) X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \cdots + b_{m-1} S + b_m)}{a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n}$$

Funciones de transferencia (FT)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0S^m + b_1S^{m-1} + \cdots + b_{m-1}S + b_m)}{a_0S^n + a_1S^{n-1} + \cdots + a_{n-1}S + a_n}$$

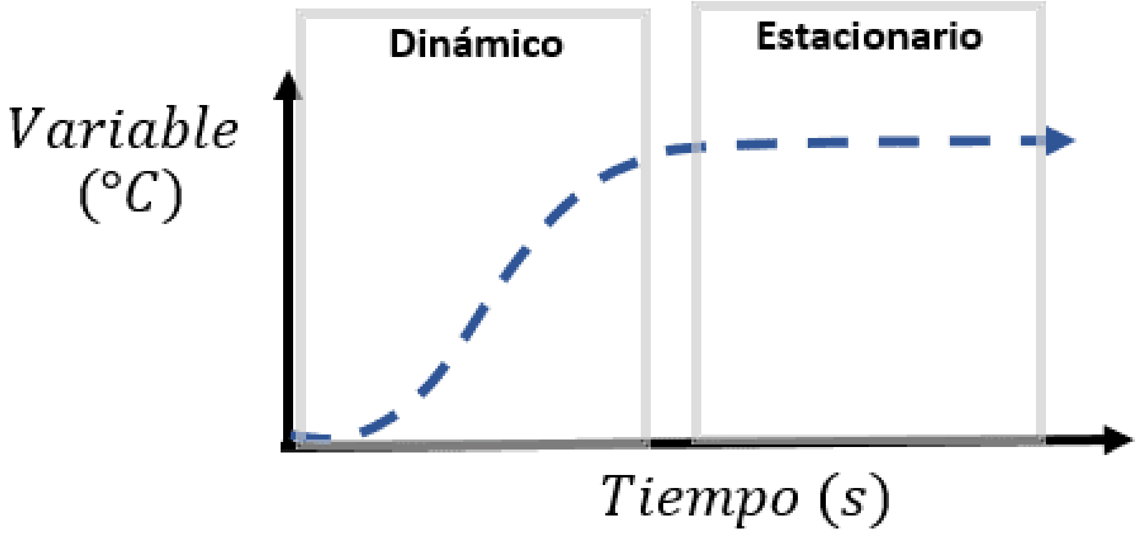
Dada la función, tenemos m-ceros y n-polos, clasificándose como:

- Estrictamente propia: $n > m$
- Propia: $n >= m$
- Bipropia: $n = m$
- Impropia: $n < m$

Teniendo en cuenta que las FT no pueden ser impropias

Funciones de transferencia (FT)

Nos permite interpretar el comportamiento de variables y/o proceso (presión, temperatura, nivel, humedad, velocidad, etc.) en el tiempo, a partir de la variación de los actuadores y sensores.



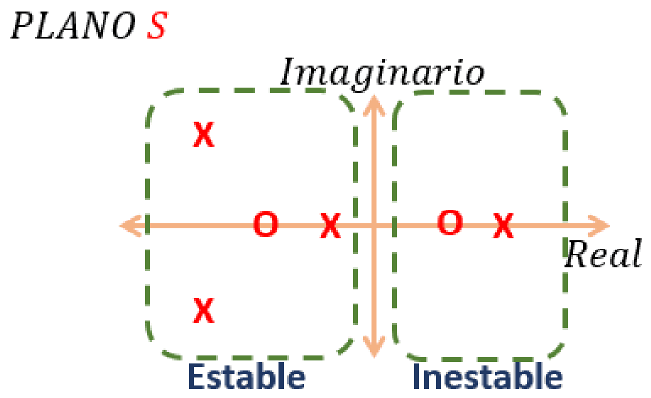
Funciones de transferencia (FT)

- Se encuentran conformados por los ceros del sistema (0 - raíces del numerador) y los polos del sistema (x - raíces del sistema)

$$FT = \frac{Y(s)}{X(s)} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Ceros} \rightarrow Y(s) = 0 \\ \rightarrow \text{Polos} \rightarrow X(s) = 0 \end{array}$$

Funciones de transferencia (FT)

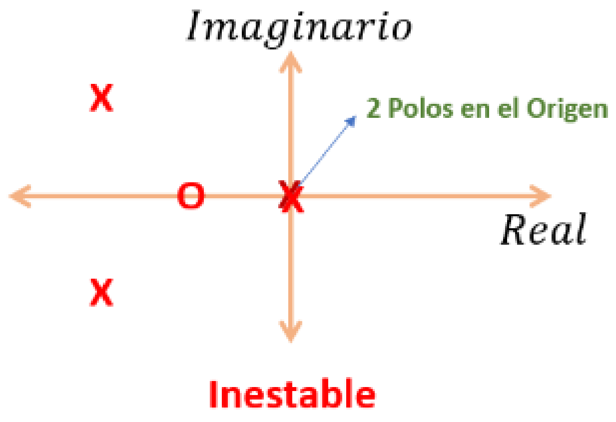
- Para comprender su comportamiento y definir su estabilidad, se colocan los ceros (0) y polos (x) en el "plano complejo S"

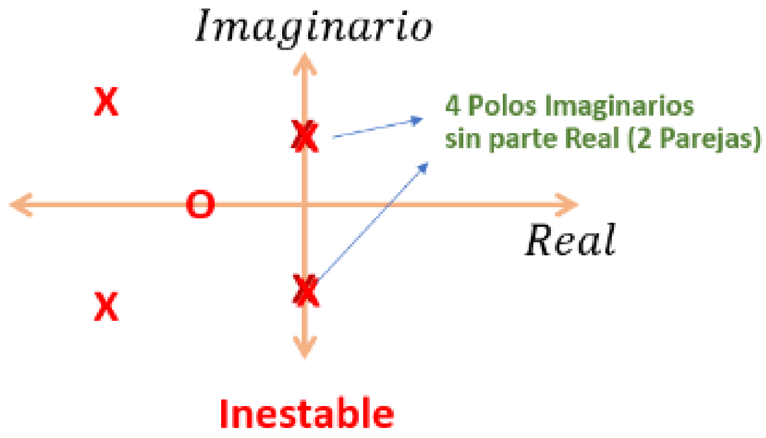


- Si se encuentra algún cero no definirá su estabilidad, solo podrá influir en el comportamiento de la respuesta

Funciones de transferencia (FT)

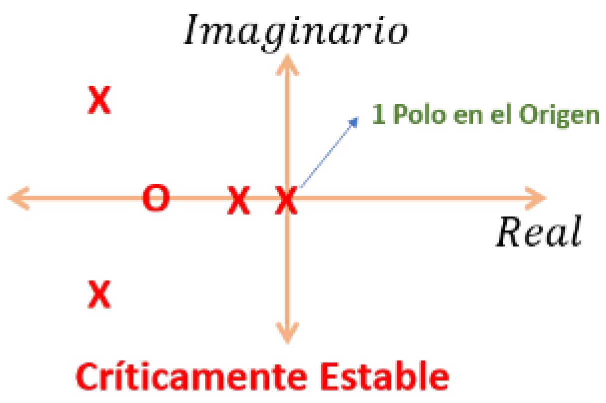
- Si los polos están en el semiplano derecho o mas de un polo en el origen o mas de un polo complejo en el eje imaginario, es inestable





Funciones de transferencia (FT)

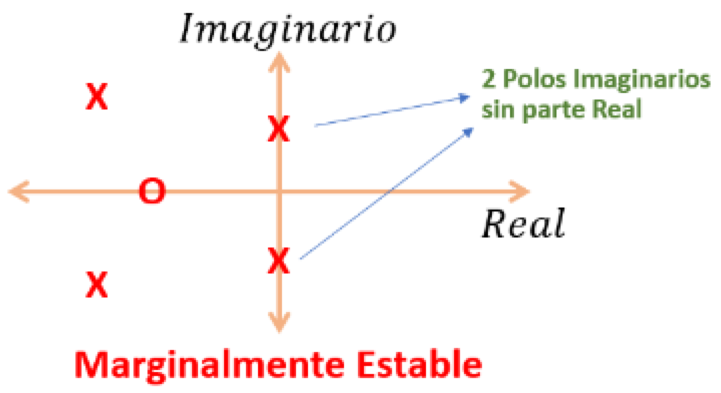
Se pueden presentar unos casos especiales:



- **críticamente estable,** Si encontramos un polo en el origen y los demás en el semiplano negativo

Funciones de transferencia (FT)

- **Marginalmente estable,** Si encontramos una pareja simple de polos complejos conjugados sin multiplicidad sobre el eje imaginario (no tienen componente real) estando el resto de los polos en el semiplano negativo



Funciones de transferencia (FT)

- En MATLAB

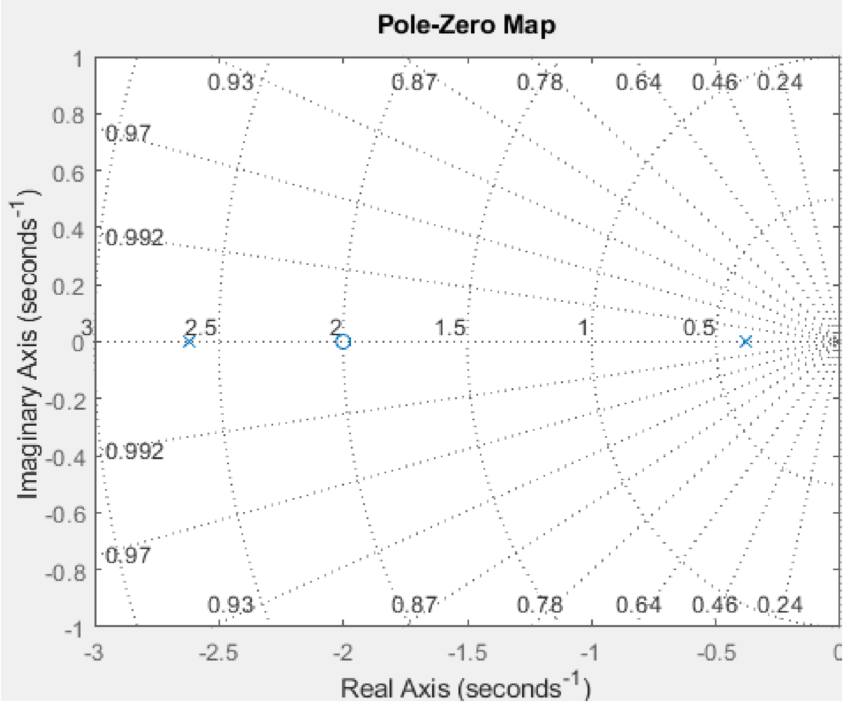
$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1}$$

```
>> numerador = [1 2]

numerador =

     1     2
```

```
>> denominador =[1 3 1]

denominador =

     1     3     1
```

```
>> Gs = tf(numerador, denominador)

Gs =

      s + 2
  -------------
  s^2 + 3 s + 1
```

```
>> figure
>> pzmap(Gs)
```

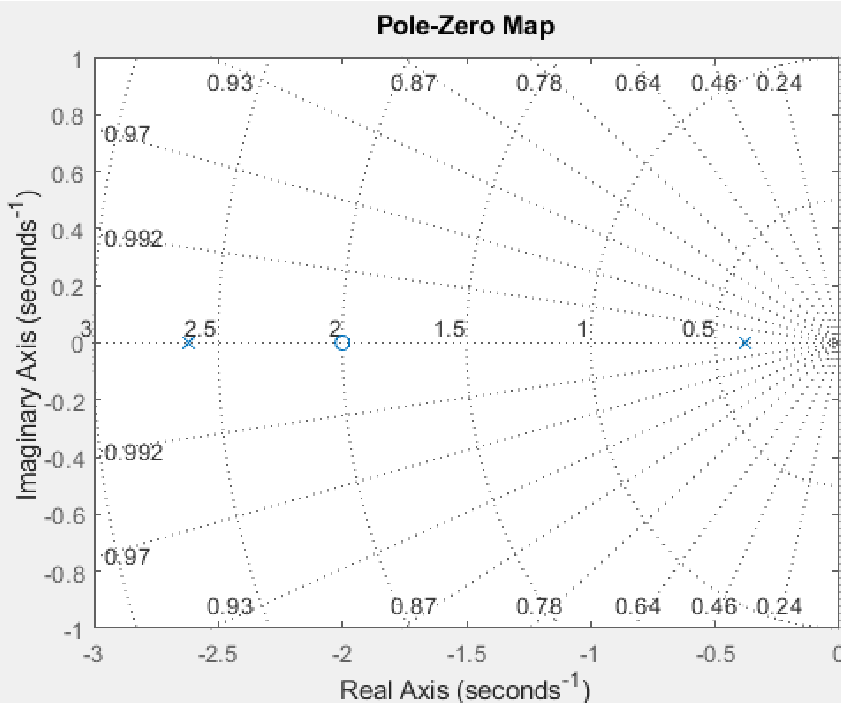


Funciones de transferencia (FT)

- En MATLAB

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1}$$

```
>> ceros = zero(Gs)

ceros =

    -2

>> polos=pole(Gs)

polos =

   -2.6180
   -0.3820
```



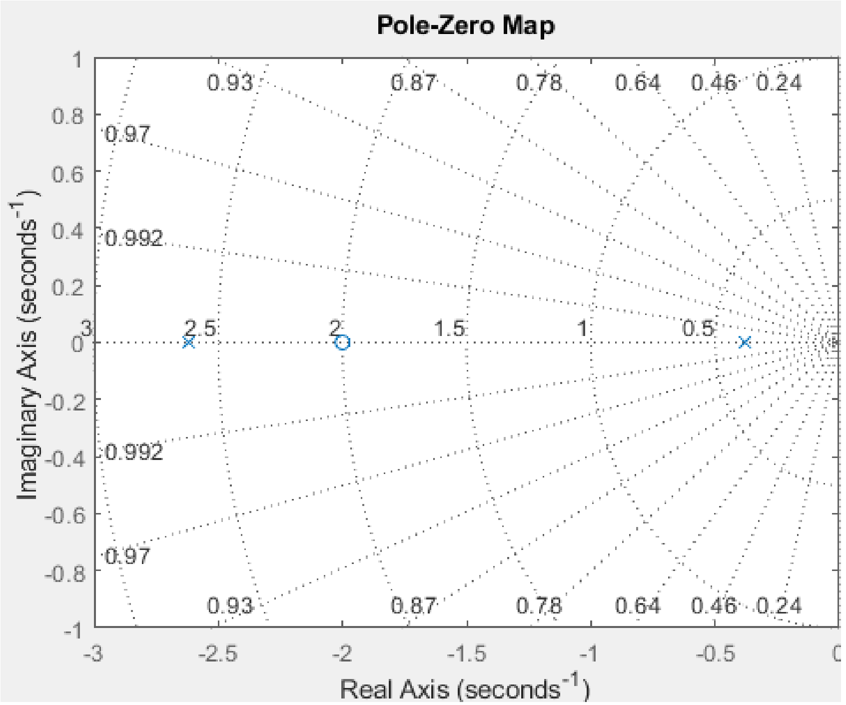
Funciones de transferencia (FT)

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA

- En MATLAB

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 1}$$

```
>> ceros = zero(Gs)

ceros =

    -2

>> polos=pole(Gs)

polos =

   -2.6180
   -0.3820
```




```
>> [numerador, denominador] =zp2tf(ceros, polos, 1)

numerador =

     0     1     2

denominador =

     1     3     1
```

Funciones de transferencia (FT)

- Sistemas multivariable: se pueden ampliar a sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas, haciendo uso de la superposición al ir haciendo cero cada una de las entradas (solo para sistemas lineales)

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{R_j(s)}$$

- y el resultado final se obtiene al realizar las sumas sucesivas de la salida, producto de la actuación individual de cada entrada.

$$Y_i(s) = G_{i1}(s)R_1(s) + G_{i2}(s)R_2(s) + \cdots + G_{ip}(s)R_p(s)$$

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{R}(s)$$

Funciones de transferencia (FT)

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{R}(s)$$

Vector de salida (qx1)

$$\boldsymbol{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix}$$

Vector de entradas (px1)

$$\boldsymbol{R}(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_p(s) \end{bmatrix}$$

Matriz funciones de transferencias (qxp)

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & \dots & G_{qp}(s) \end{bmatrix}$$

Diagrama de bloques

- Es la representación grafica de las funciones realizadas por cada componente del sistema de control y del flujo de señales en un sistema de control

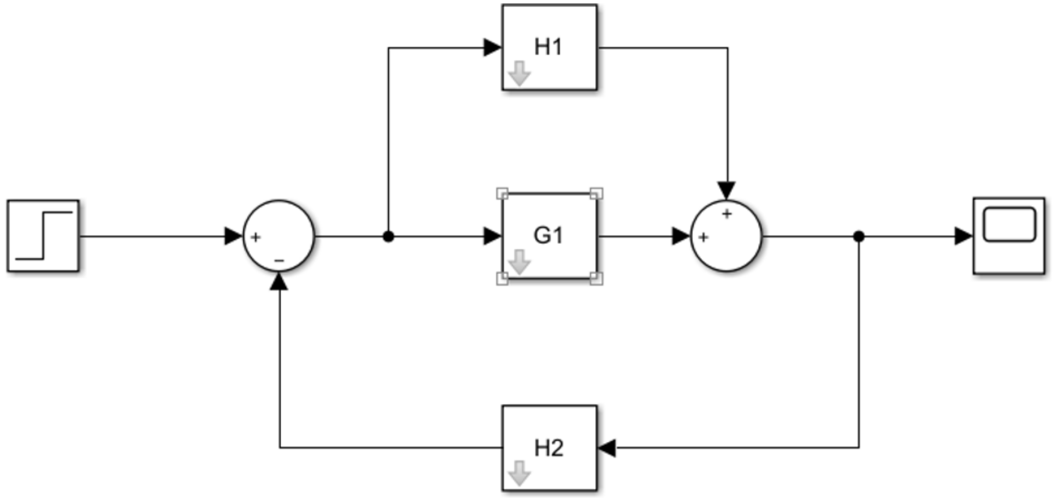
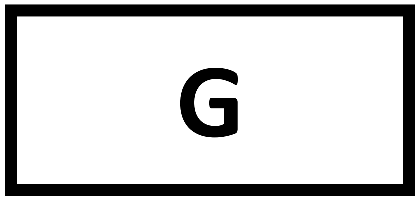


Diagrama de bloques

Señal

Bloque



Sumador

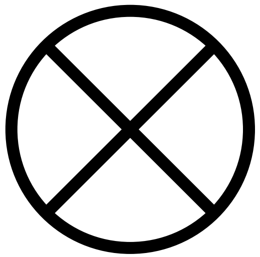
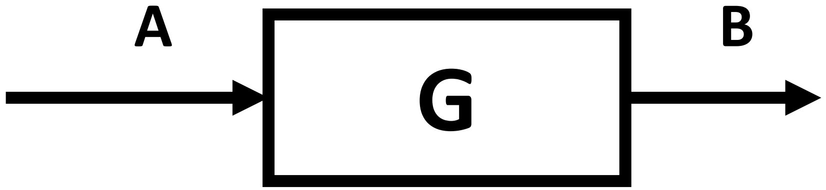


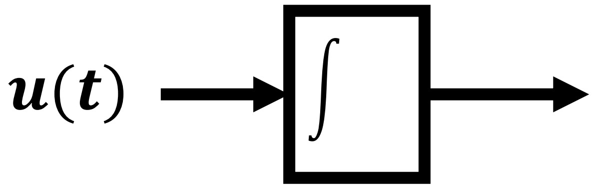
Diagrama de bloques

Multiplicador o Bloque de Ganancia

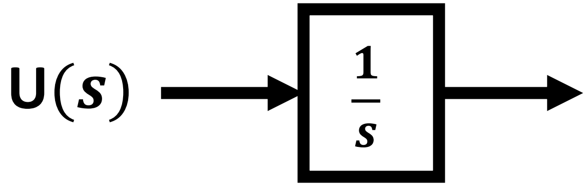


$$B = GA$$

Bloque Integrador

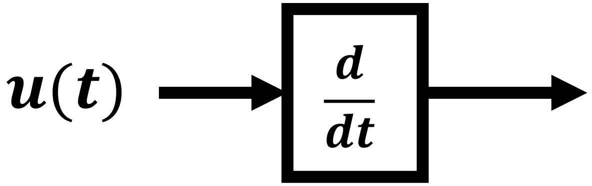


$$y(t) = \int u(t)dt$$

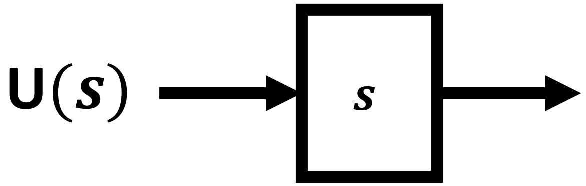


$$Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

Bloque Derivador



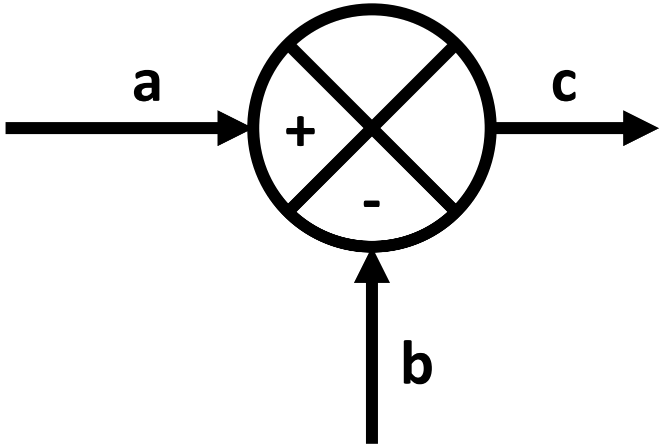
$$y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$



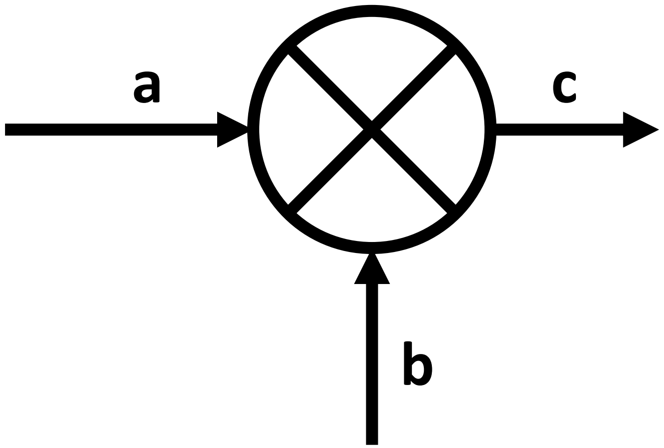
$$Y(s) = sU(s)$$

Diagrama de bloques

Sumador, detector de error o comparador

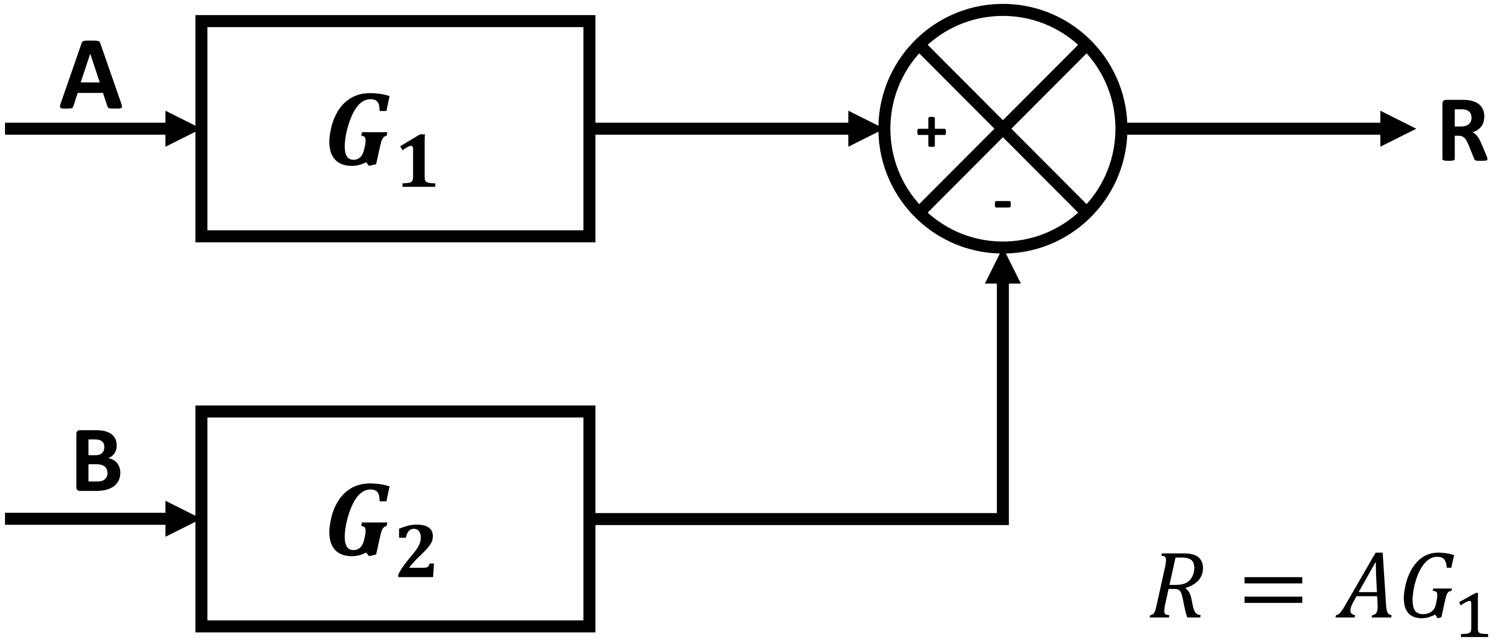


$$c = a - b$$



$$c = a + b$$

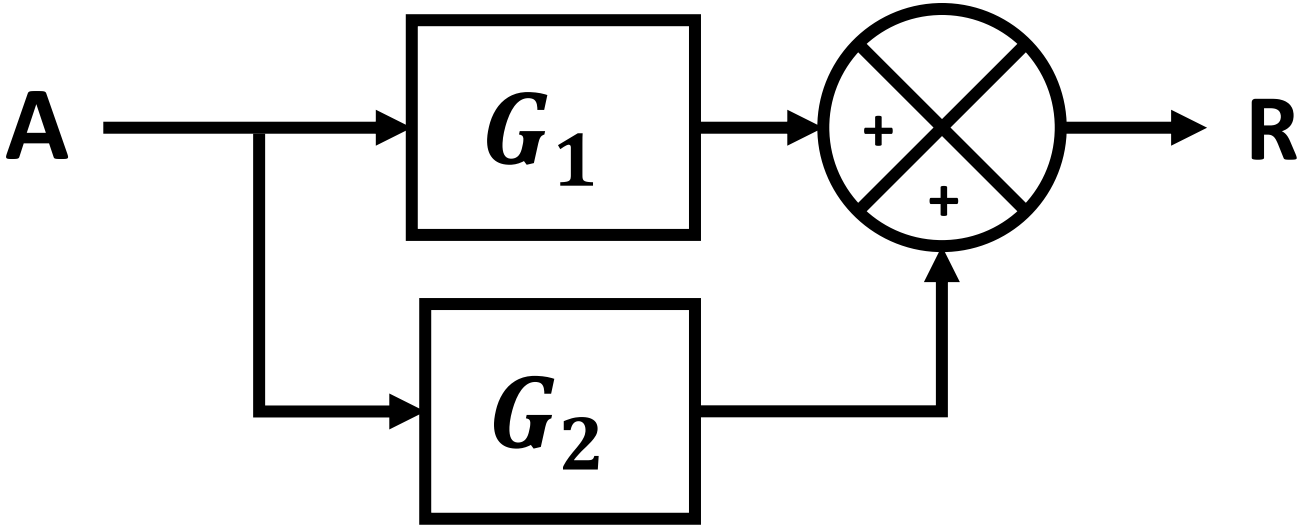
Diagrama de bloques

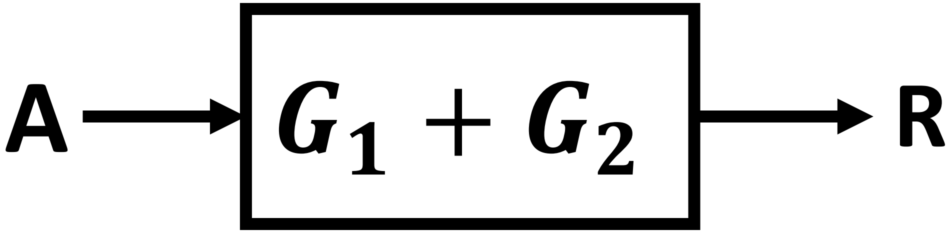


$$R = AG_1 - BG_2$$

Diagrama de bloques

Configuraciones: Bloques en paralelo





$$a_1 = AG_1 \qquad R = a_1 + a_2$$

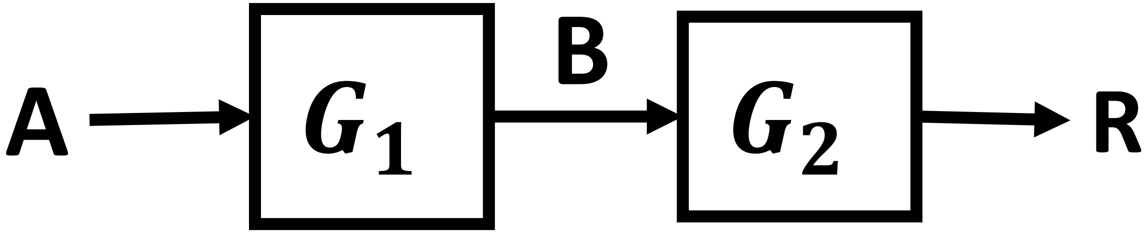
$$a_2 = AG_2$$

$$R = A(G_1 + G_2)$$

Diagrama de bloques

Universidad Militar Nueva Granada

Configuraciones: Bloques en serie



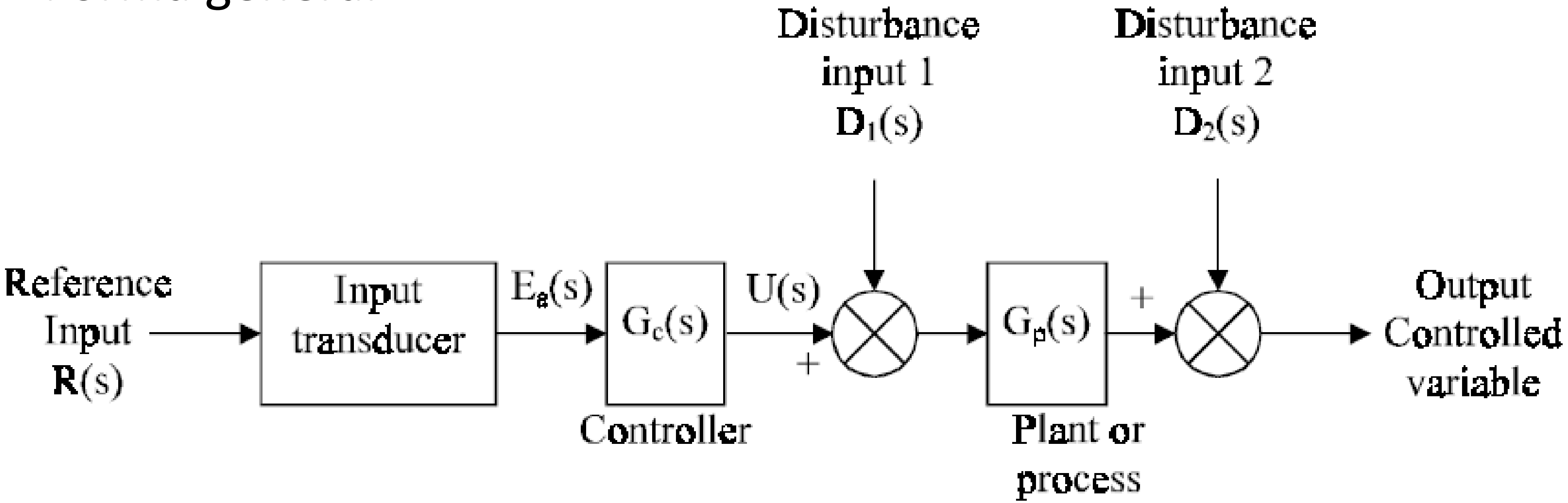
$$B = AG_1 \qquad R = BG_2$$

$$R = AG_1G_2$$

$$R = AG_1G_2$$

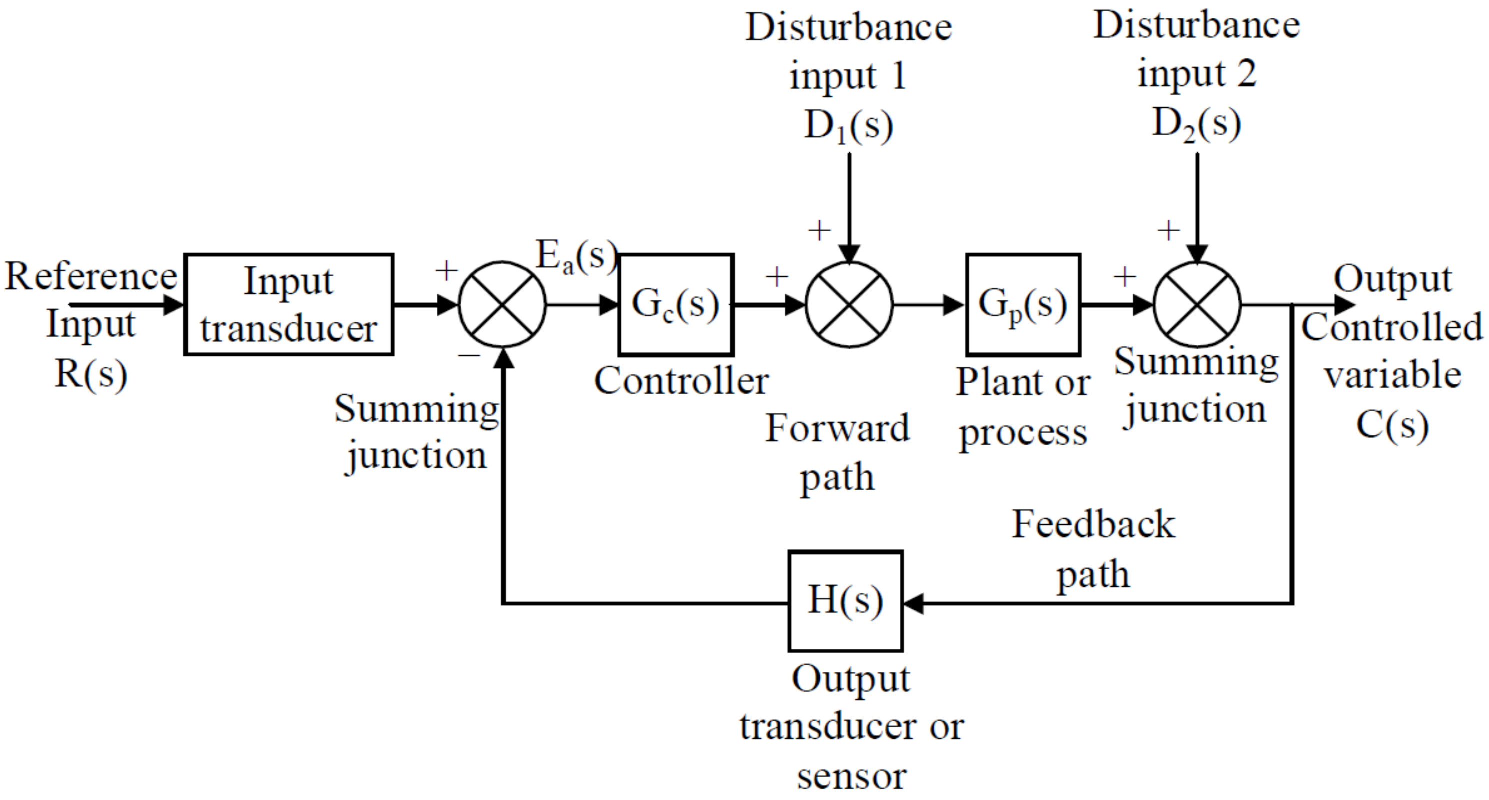
Diagramas de bloque: Lazo Abierto

Forma general

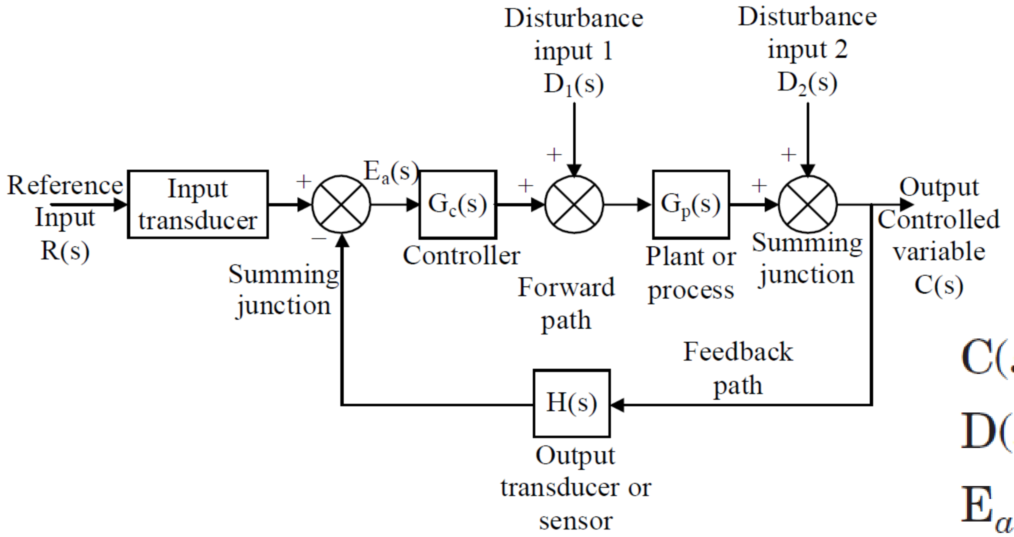


Diagramas de bloque: Lazo Cerrado

Forma general



Diagramas de bloque: Lazo Cerrado



$\mathrm{C}(s)$ controlled output, transfer function of $c(t)$

$\mathrm{D}(s)$ disturbance input, transfer function of $d(t)$

$\mathrm{E}_a(s)$ actuating error, transfer function of $e_a(t)$

$\mathrm{G}_a(s)$ transfer function of the actuator

$\mathrm{G}_c(s)$ transfer function of the controller

$\mathrm{G}_p(s)$ transfer function of the plant or process

$\mathrm{H}(s)$ transfer function of the sensor or output transducer $= \mathrm{G}_s(s)$

$\mathrm{R}(s)$ reference input, transfer function of $r(t)$.

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA

Diagrama de bloques

Obtener la función de transferencia:

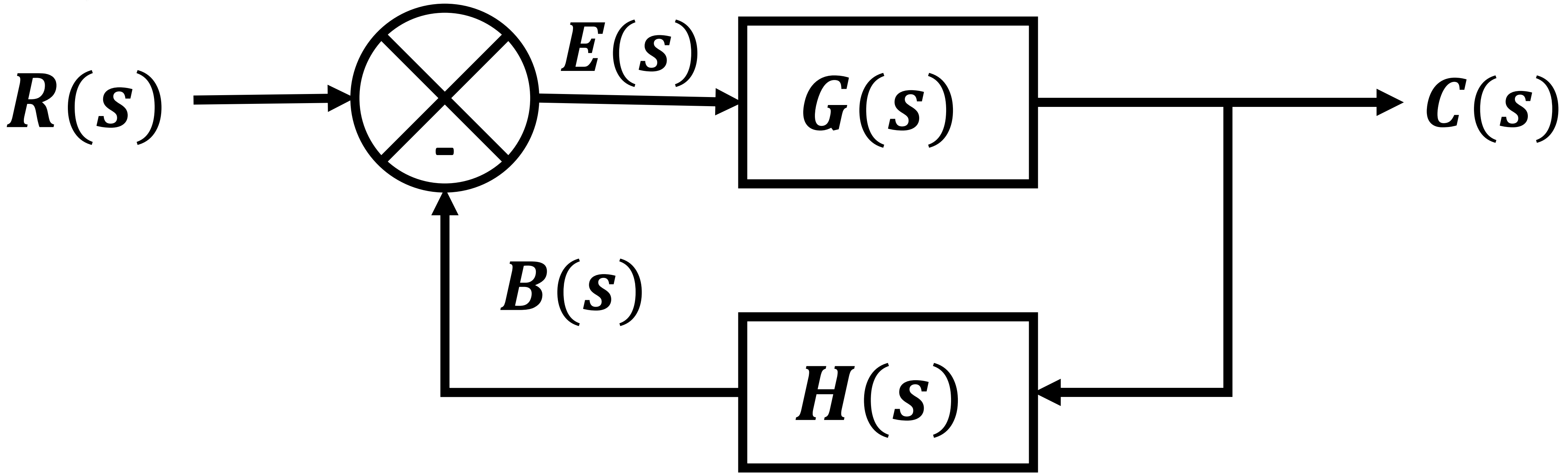
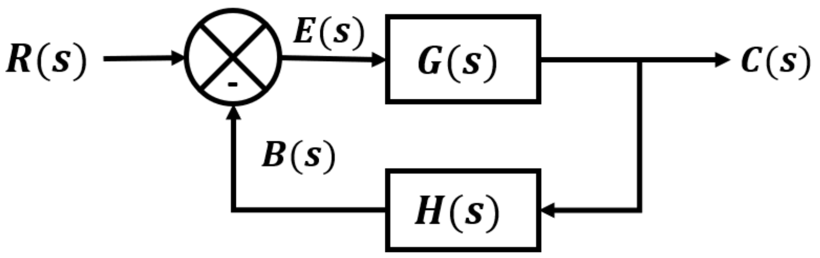


Diagrama de bloques

Obtener la función de transferencia:



Análisis (FT) del bloque $G(s)$

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} \Rightarrow C(s) = G(s)E(s)$$

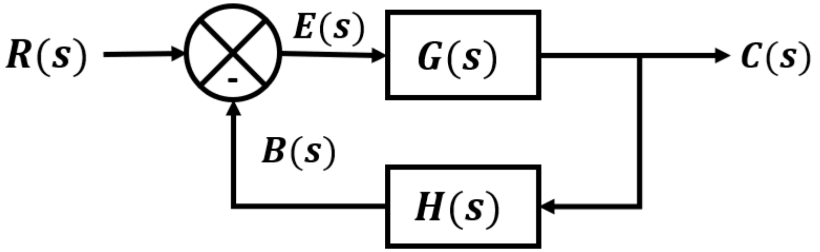
Análisis (FT) del comparador

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$C(s) = G(s)[R(s) - B(s)]$$

Diagrama de bloques

Obtener la función de transferencia:



Análisis (FT) del bloque $H(s)$

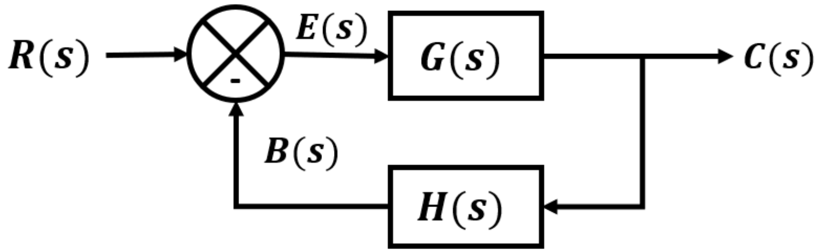
$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} \Rightarrow B(s) = H(s)C(s)$$

Por tanto:

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

Diagrama de bloques

Obtener la función de transferencia:



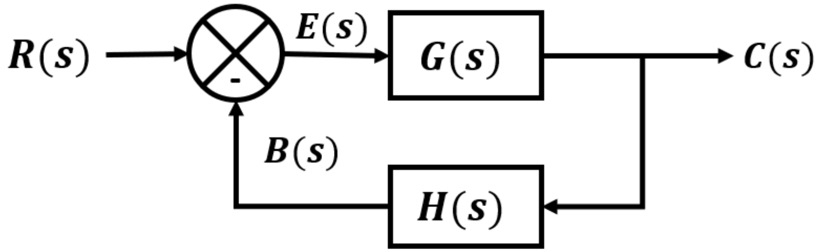
$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

Como el objetivo es hallar la FT entre $C(s)$ y $R(s)$, entonces:

$$C(s) = G(s)\,R(s) - G(s)H(s)C(s)$$

$$C(s) + G(s)H(s)C(s) = G(s)\,R(s)$$

Diagrama de bloques



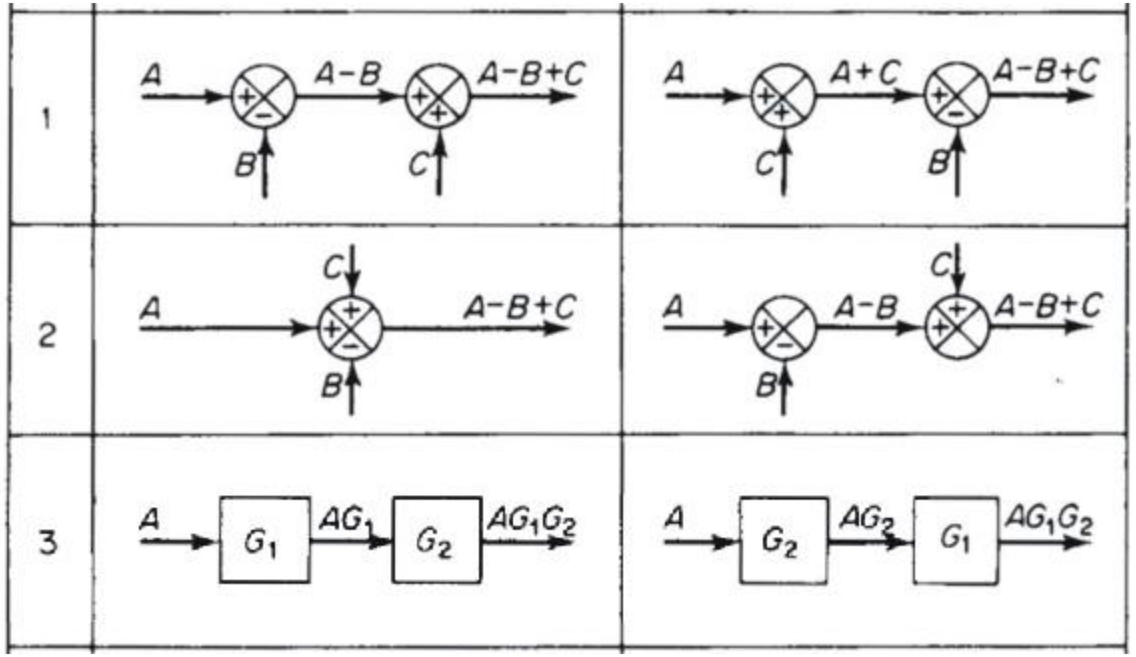
$$C(s) + G(s)H(s)C(s) = G(s)\,R(s)$$

$$C(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)\,R(s)$$

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Diagrama de bloques

Reglas para reducción de diagramas de bloques



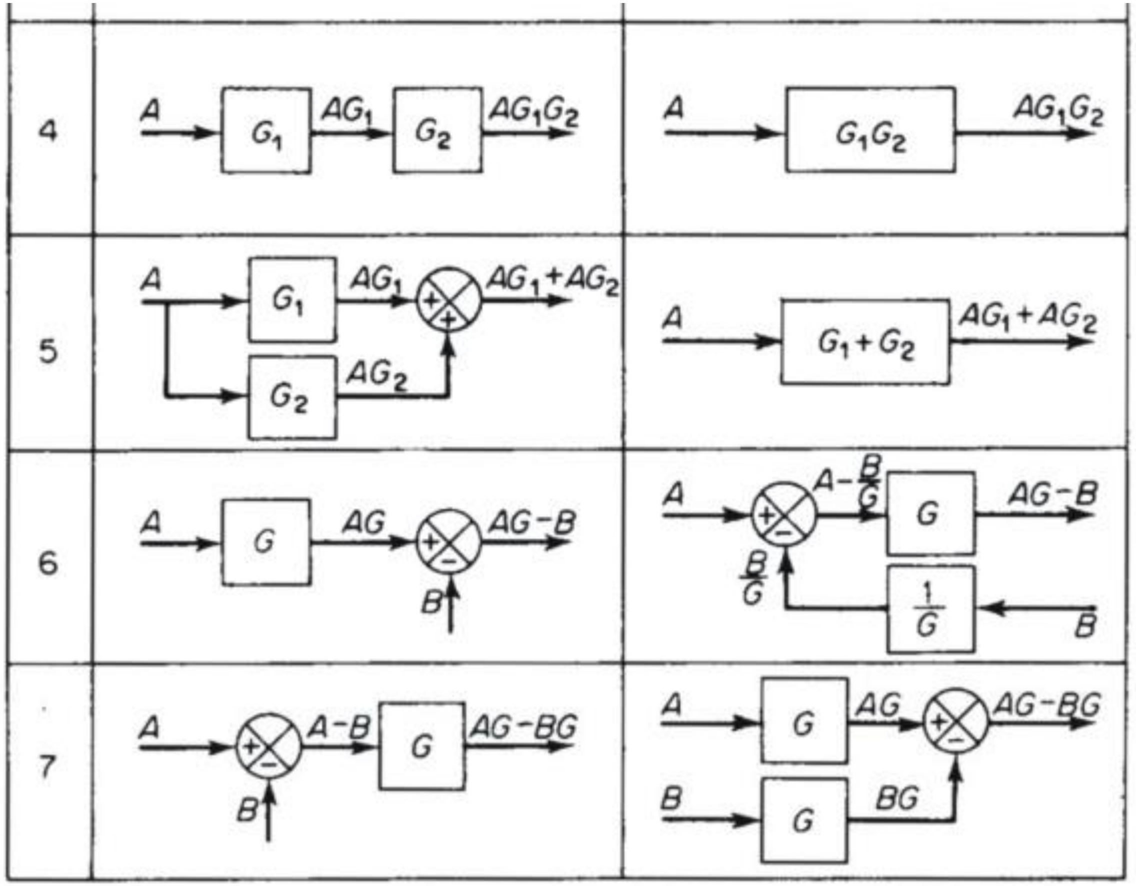
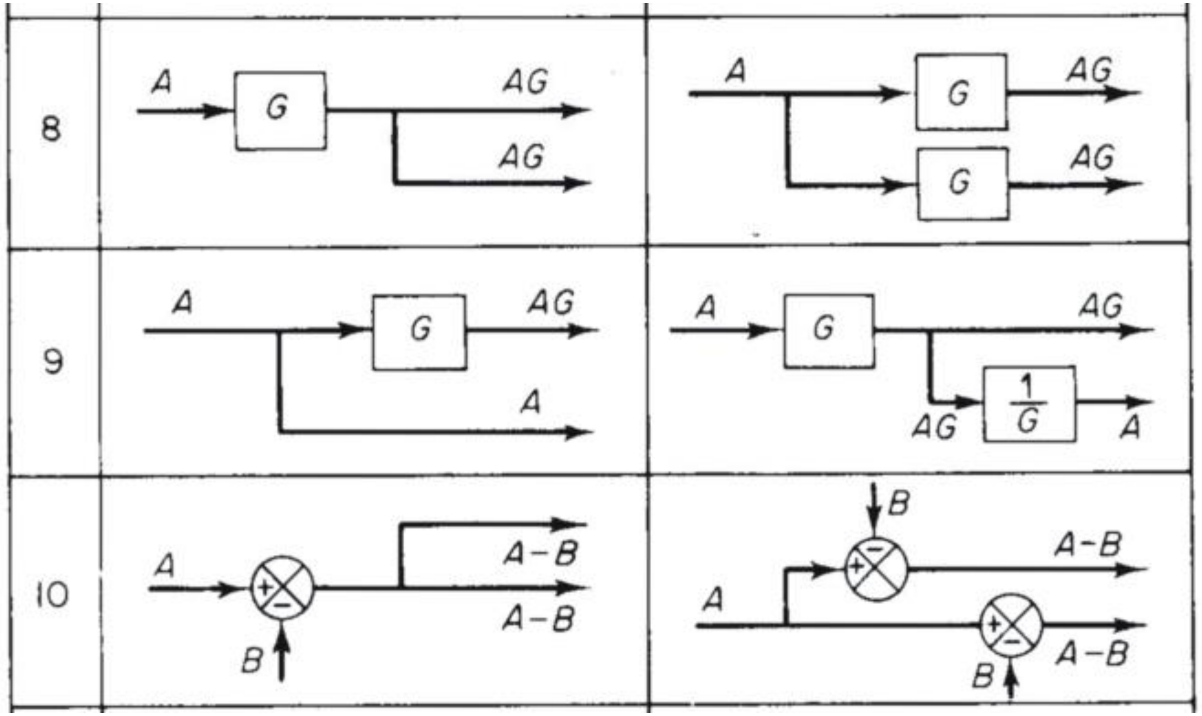


Diagrama de bloques

- Reglas para reducción de diagramas de bloques



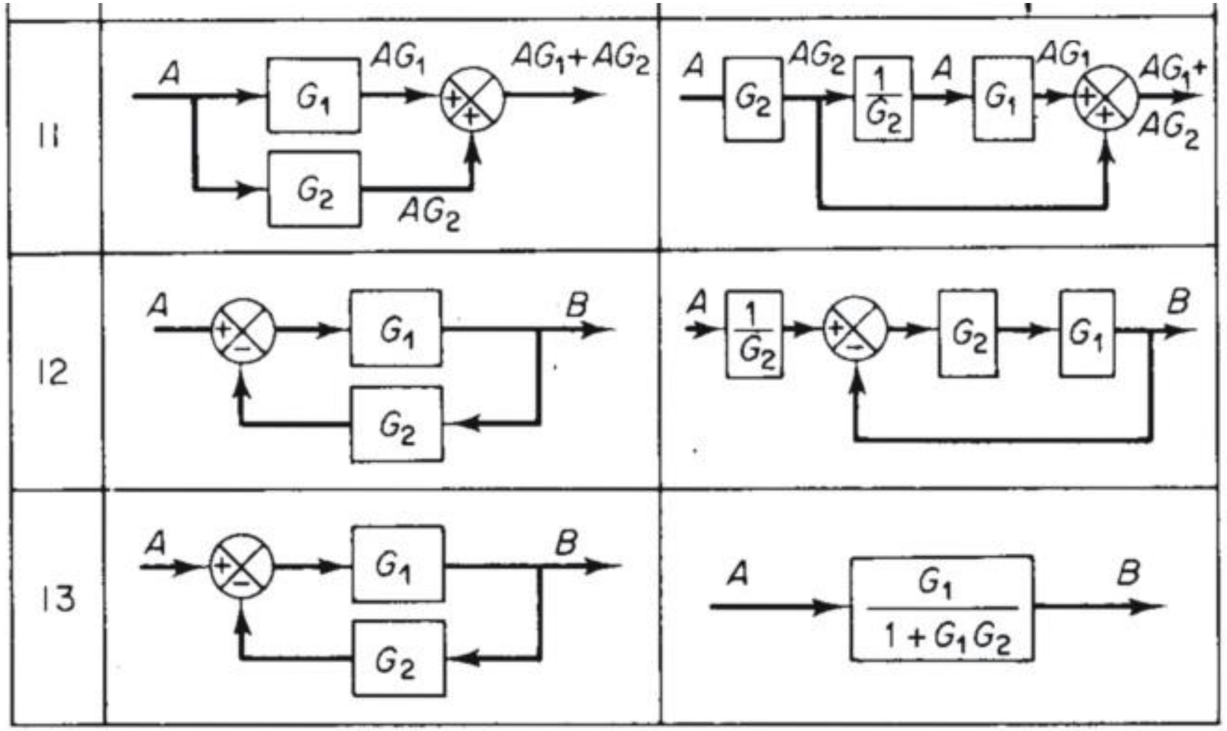


Diagrama de bloques

Reducción de diagramas de bloques: se consigue mediante reordenamiento y sustituciones, logra reducir el análisis matemático subsecuente

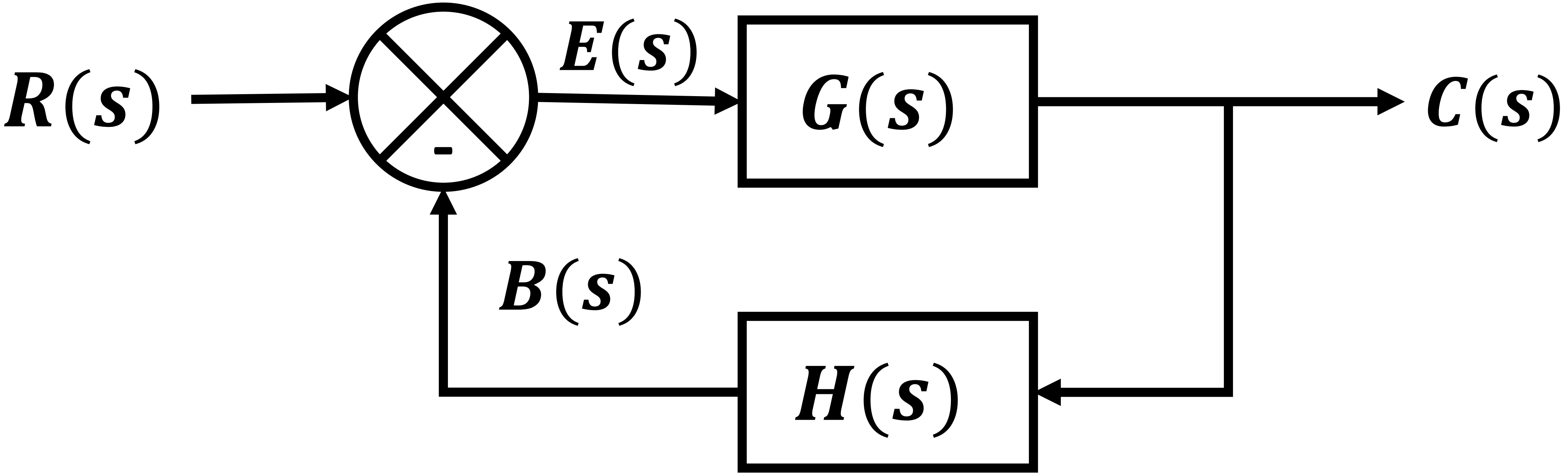


Diagrama de Flujos de Señal

- Signal-Flow Diagram o reogramas, se puede considerar una versión simplificada de los diagrama de bloques
- Se considera que tiene mayor restricción matemática
- Es un medio grafico que se encarga de retratar las relaciones de entrada-salida entre las variables de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales

$$salida = \sum ganancia\ x\ entrada$$

Diagrama de Flujos de Señal

- En caso que la ecuación tenga términos integro-diferenciales, se debe de transformar al domino de la frecuencia (s, transformada de laplace), reflejándose en la siguiente ecuación

$$Y_j(s) = \sum_{k=1}^{N} G_{kj}(s) Y_k(s) \qquad j = 1,2,\ldots,N$$

Diagrama de Flujos de Señal

Transmitancia: Esta conformado por los puntos de unión o nodos, los cuales representas las variables. Su conexión se da entre segmentos de línea considerados ramas, los cuales tiene ganancias y direcciones asociadas

$$y_1 \xrightarrow{a_{12}} y_2$$

$$y_2 = a_{12}\, y_1$$

Diagrama de Flujos de Señal

- Nodos de entrada o fuente: son aquellos que solo tienen ramas de salida y corresponde con entradas al sistema

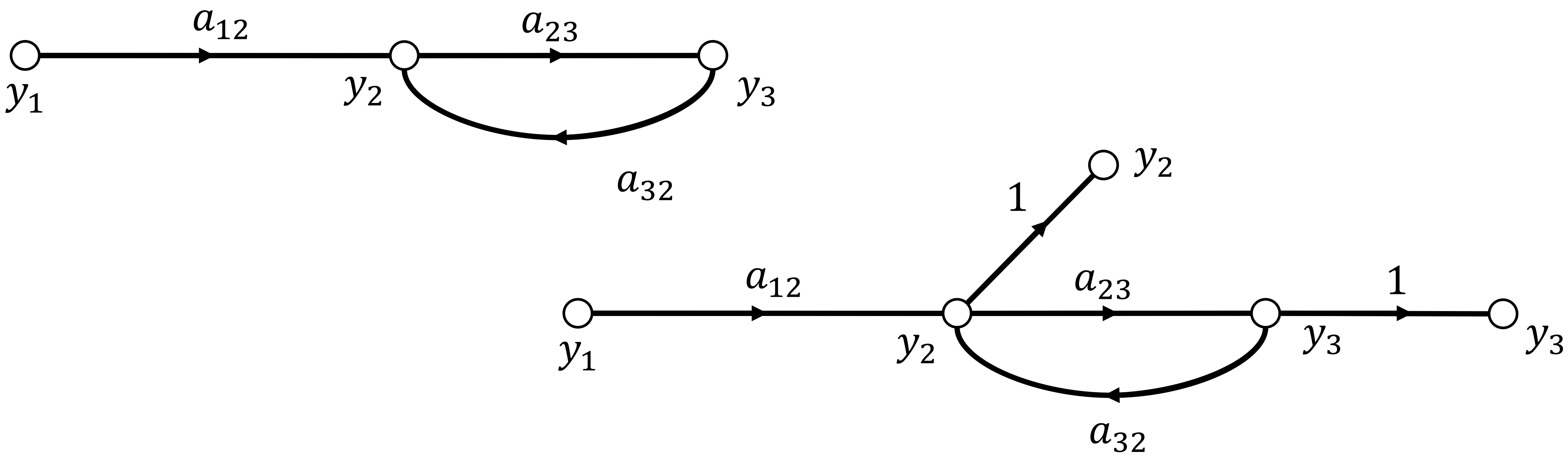


Diagrama de Flujos de Señal

- Nodos de salida o sumidero: son aquellos que solo tiene ramas de entrada o que llegan ramas
- Nodos mixto: al que entran y salen ramas, representan variables intermedias

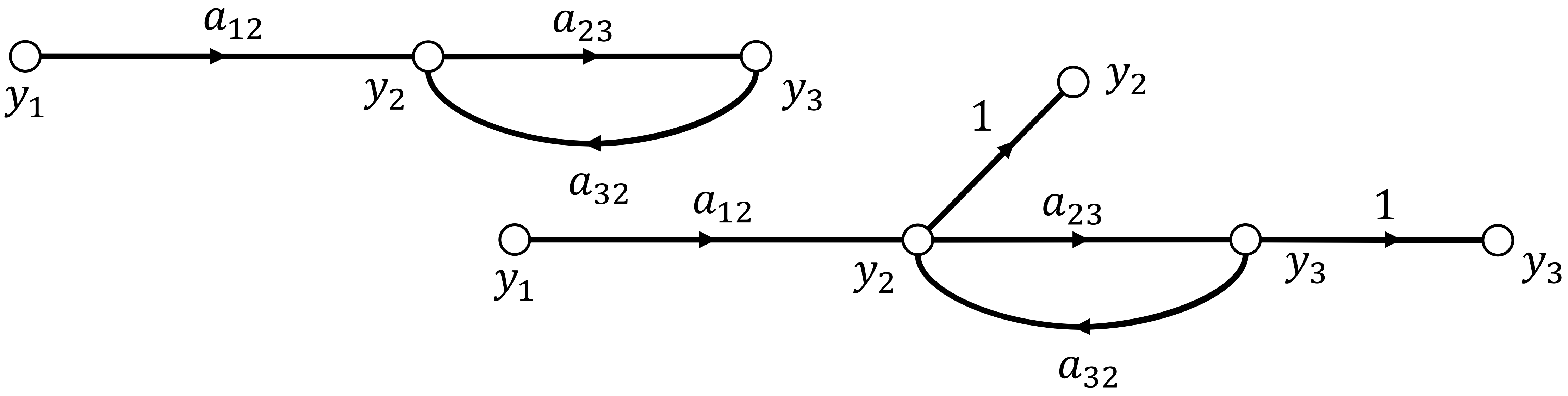


Diagrama de Flujos de Señal

- Trayectoria: es una colección de una sucesión continua de ramas que están en la misma dirección.

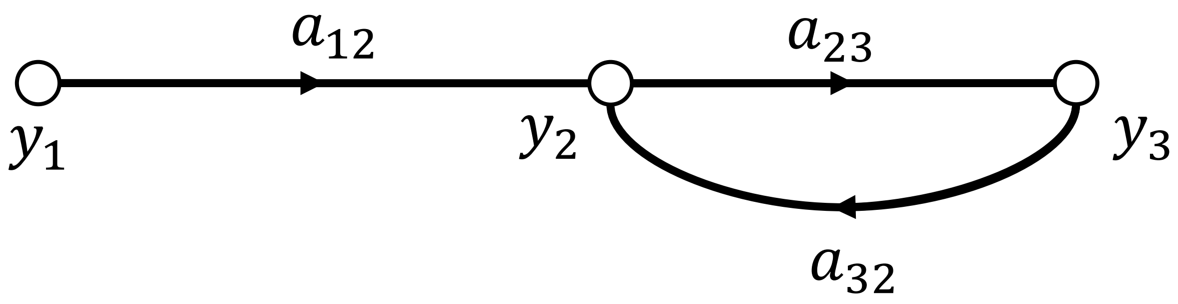
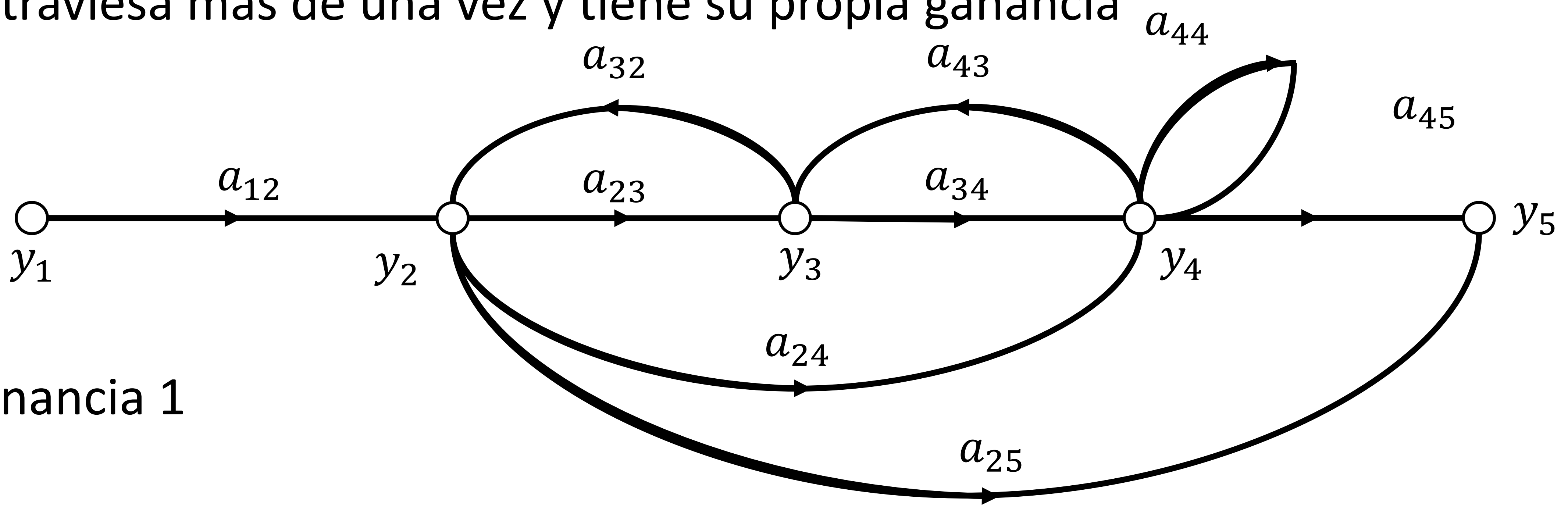


Diagrama de Flujos de Señal

- Trayectoria directa: es aquella que empieza en un nodo de entrada y termina en un nodo de salida a lo largo de la cual ningún nodo se atraviesa mas de una vez y tiene su propia ganancia

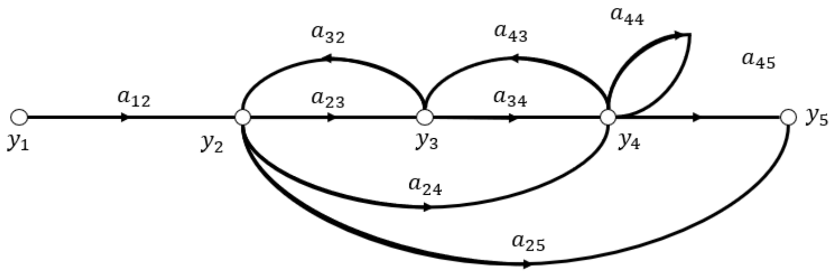


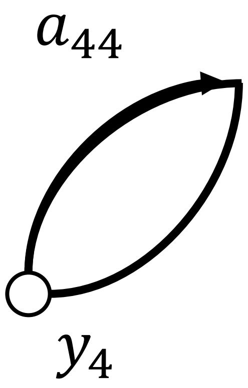
Ganancia 1

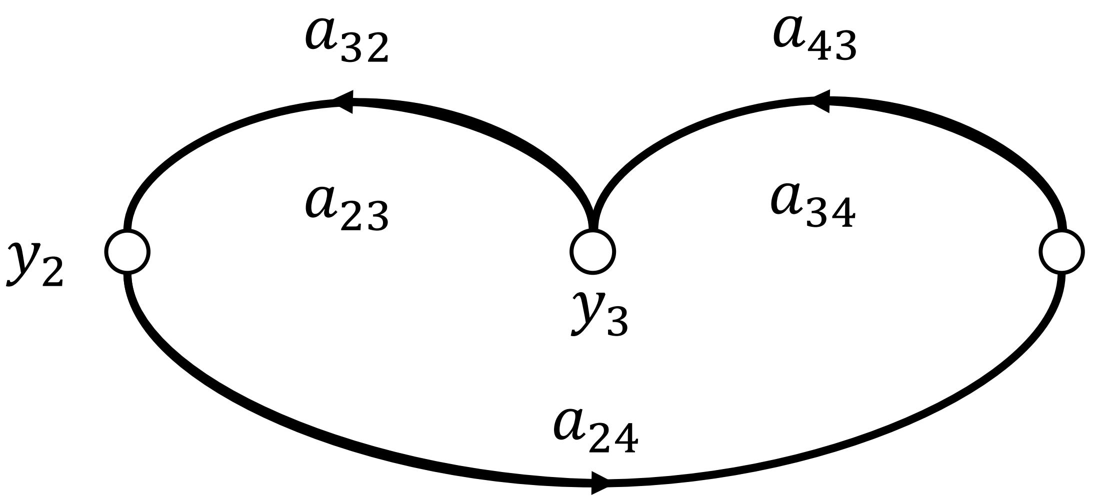
$$y_1 - y_2 - y_3 - y_4;\ a_{12}\, a_{23}\, a_{34}$$

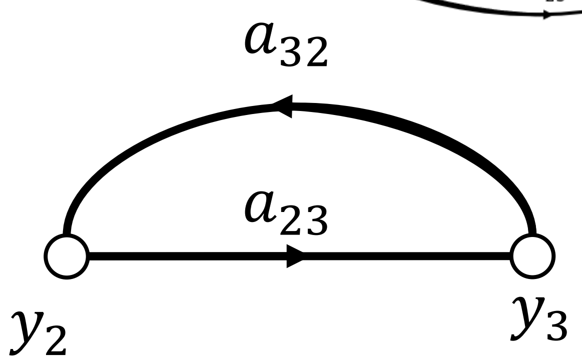
Diagrama de Flujos de Señal

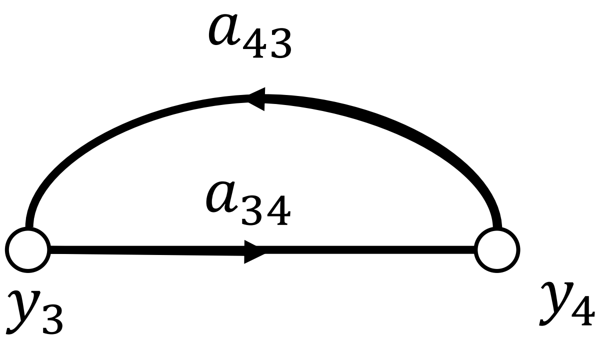
- Malla: es una trayectoria que se origina y termina en el mismo nodo y en donde ningún otro nodo no se encuentra se encuentra mas de una vez y tiene su propia ganancia









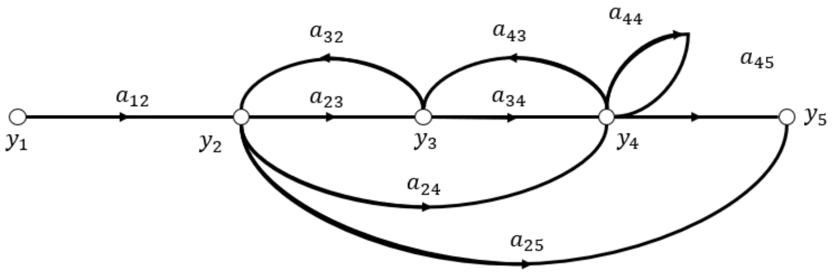


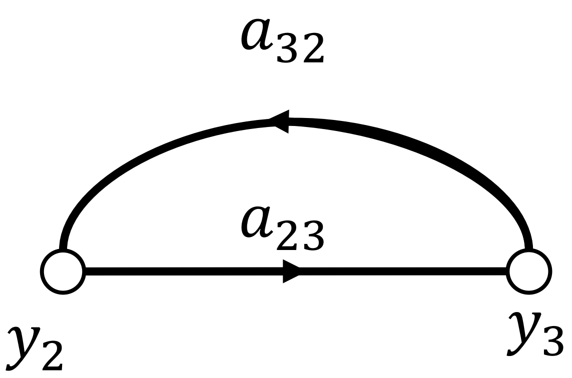
Ganancia 1:

$$y_2 - y_4 - y_3 - y_2;\ a_{24}\, a_{43}\, a_{32}$$

Diagrama de Flujos de Señal

- Malla que no se tocan: son aquellas que no comparten un nodo en común





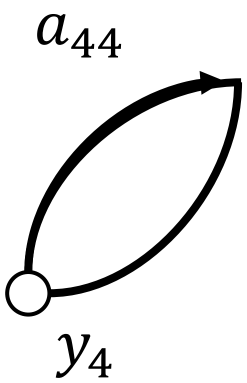
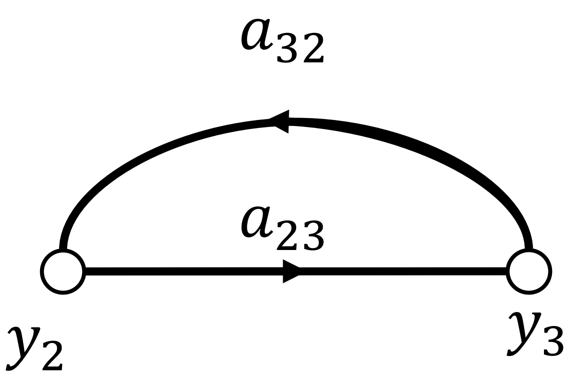


Diagrama de Flujos de Señal

- Ganancia de un camino: producto de las ganancias que se presentan en un trayecto
- Lazo o bucle: trayecto que parte y termina en el mismo nodo sin pasar dos veces por ningún otro nodo
- Auto bucle: es una rama que sale y llega al mismo nodo



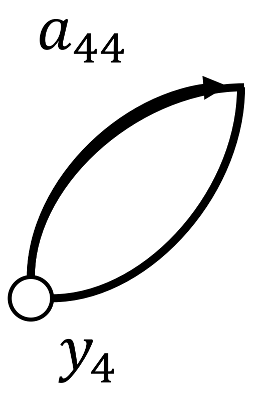
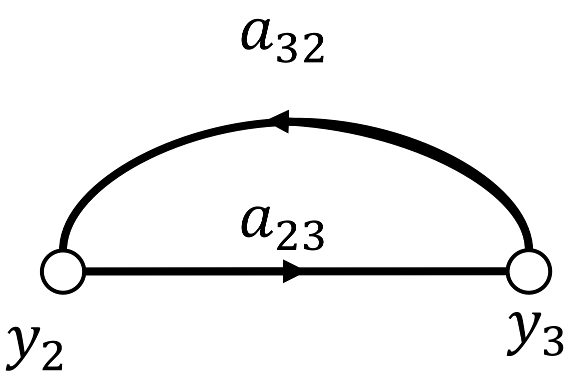


Diagrama de Flujos de Señal

Propiedades:

- Transmision: cualquier nodo transmite su valor a las ramas que parten de él
- Adicion: el valor de la variable de un nodo es la suma de los productos de ganancia por variables de los nodos de las ramas que llegan a él
- Convertibilidad de un nodo mixto: cualquier variable de un nodo mixto se puede convertir en sumidero o fuente (de otro grafo) con una rama de valor 1



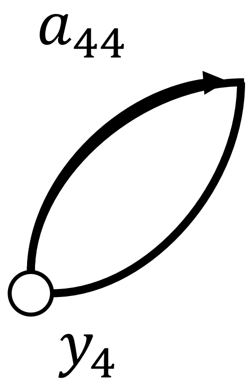
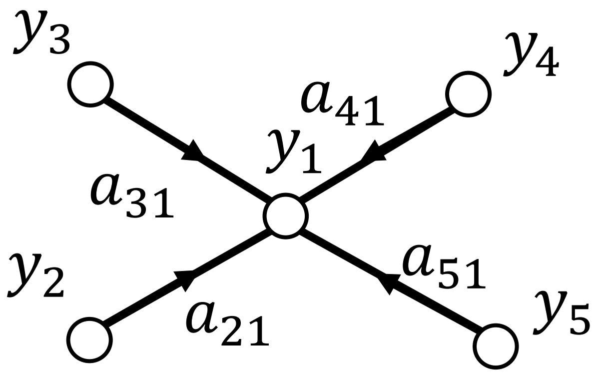


Diagrama de Flujos de Señal

Algebra de SFG

1. El valor de la variable representada por un nodo, es igual a la suma de todas las señales entrantes al nodo

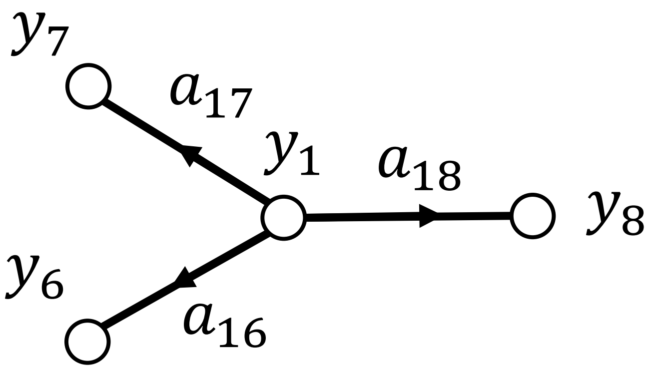


$$y_1 = a_{21}\, y_2 + a_{31}\, y_3 + a_{41}\, y_4 + a_{51}\, y_5$$

Diagrama de Flujos de Señal

Algebra de SFG

2. El valor de la variable representada por un nodo, se transmite a todas las ramas que dejan el nodo



$$y_6 = a_{16}\, y_1$$

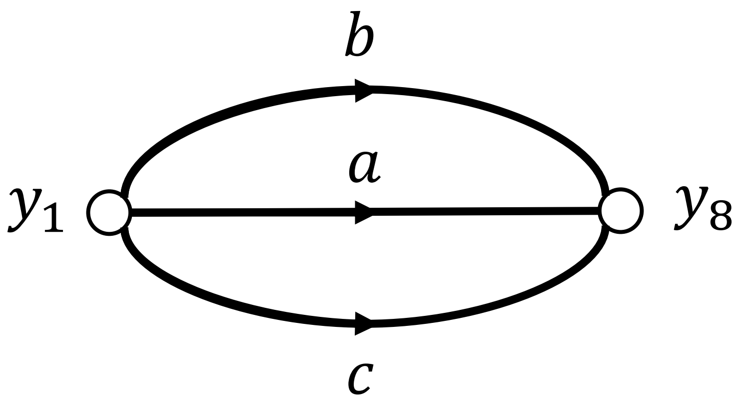
$$y_7 = a_{17}\, y_1$$

$$y_8 = a_{18}\, y_1$$

Diagrama de Flujos de Señal

Algebra de SFG

3. Las ramas paralelas con la misma dirección que conectan dos nodos se pueden reemplazar por una sola rama y la ganancia es igual a la suma de las ganancias de las ramas paralelas



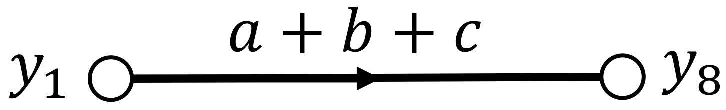
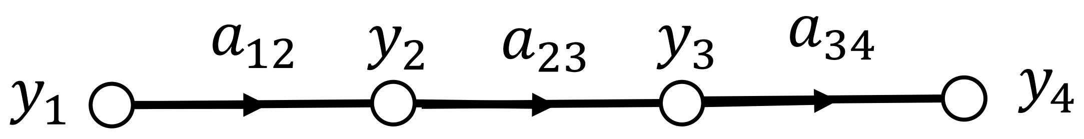


Diagrama de Flujos de Señal

Algebra de SFG

4. Una conexión de ramas unidireccionales, se puede reemplazar por una sola rama, cuya ganancia es igual al producto de las ganancias de las ramas



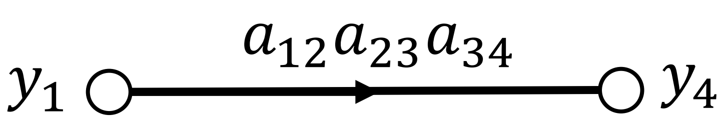
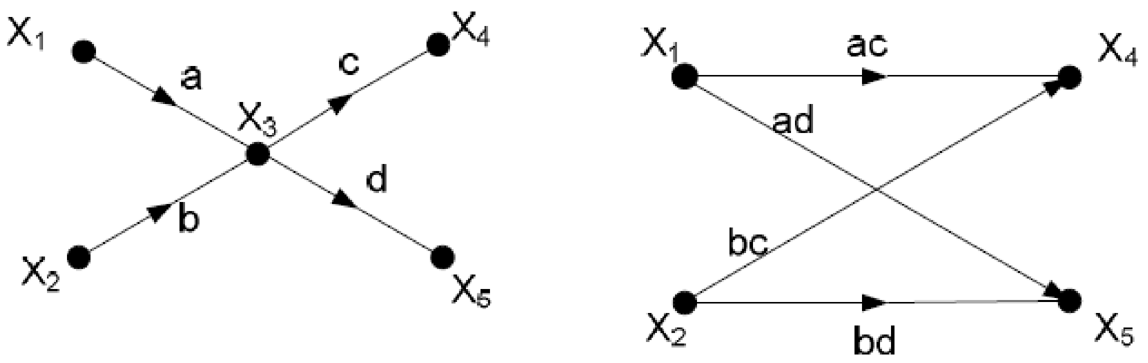


Diagrama de Flujos de Señal

Simplificación:

- nudos mixtos serie-paralelo: se puede suprimir un nodo utilizando las ecuaciones

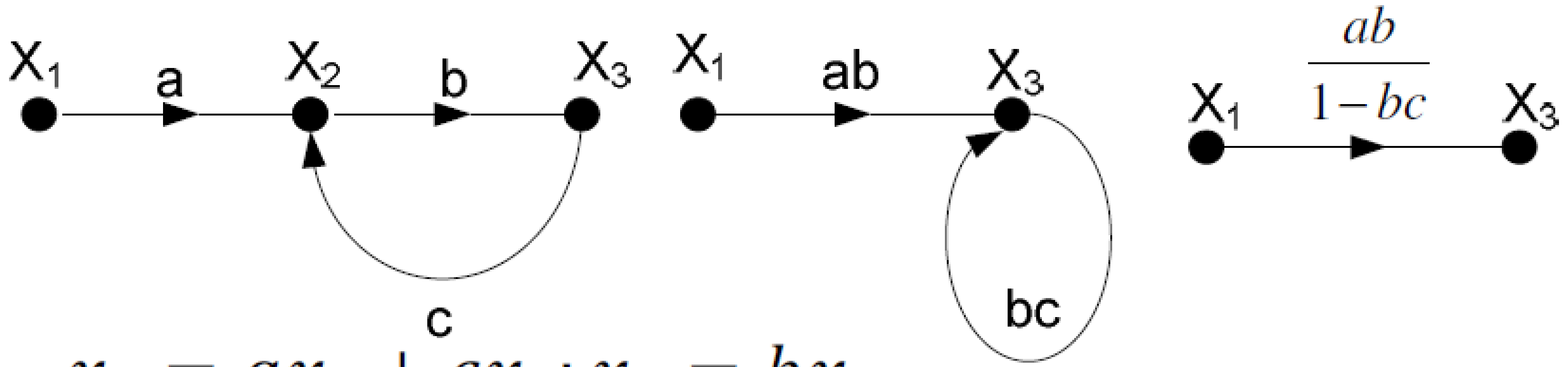


- $x_3 = ax_1 + bx_2;\ x_4 = cx_3;\ x_5 = dx_3$
- $x_4 = cax_1 + cbx_2; x_5 = dax_1 + dbx_2$

Diagrama de Flujos de Señal

Simplificación

- Ramas en bucle cerrado: se sustituye por una rama con la fórmula de realimentación

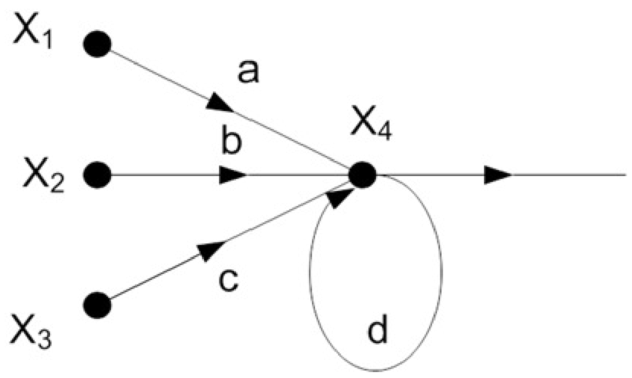


- $x_2 = ax_1 + cx_3; x_3 = bx_2$
- $x_3 = abx_1 + bcx_3 \Rightarrow (1 - bc)x_3 = abx_1$

Diagrama de Flujos de Señal

Simplificación

- Ramas en auto bucle: se puede eliminar dividiendo cada rama que entra en el nodo con auto bucle por $(1 - G_{auto})$
  - $x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$
  - $x_4 = \frac{ax_1+bx_2+cx_3}{1-d} = \frac{a}{1-d}x_1 + \frac{b}{1-d}x_2 + \frac{c}{1-d}x_3$



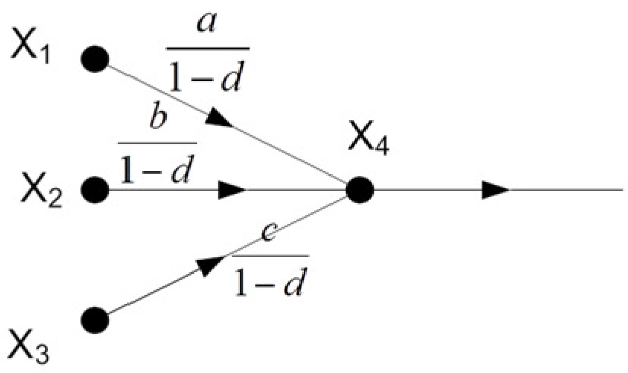
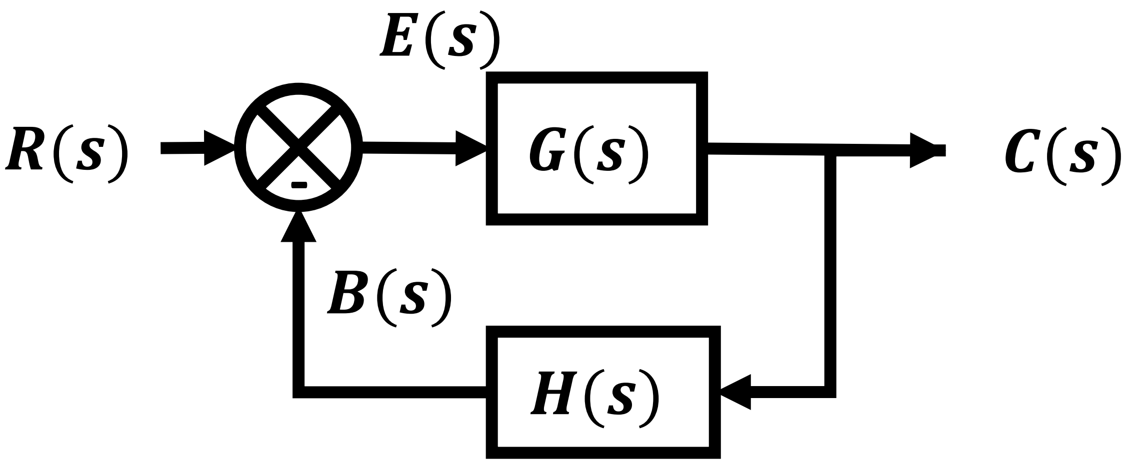
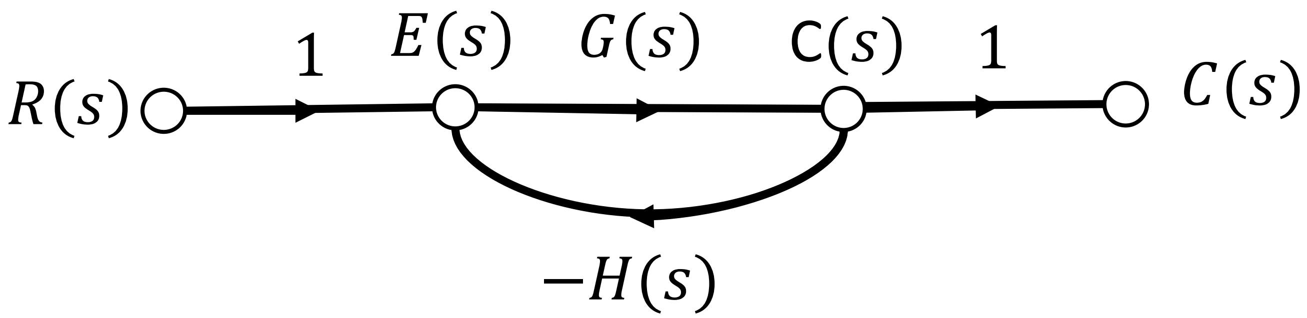


Diagrama de Flujos de Señal

SFG con lazo realimentado





$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Diagrama de Flujos de Señal

SFG a partir de un diagrama de bloques

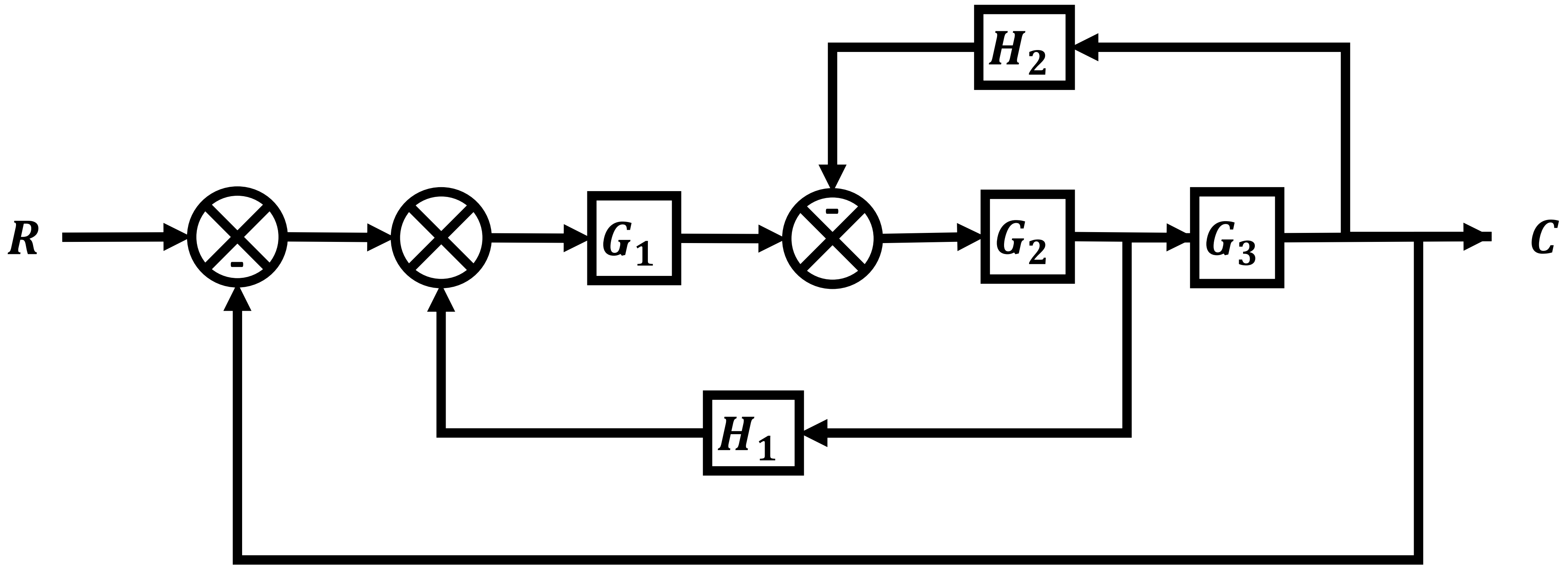
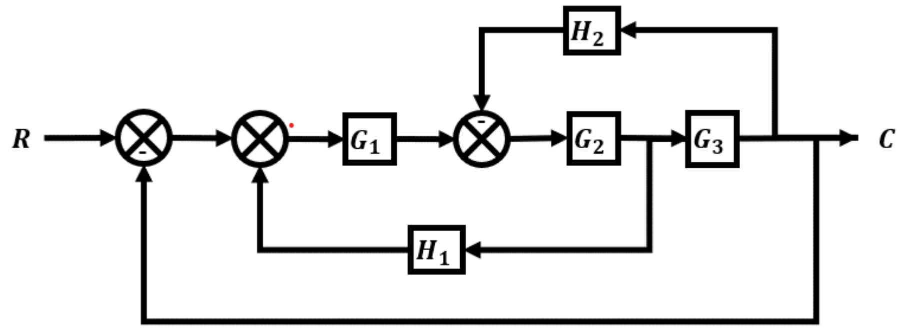


Diagrama de Flujos de Señal

SFG a partir de un diagrama de bloques



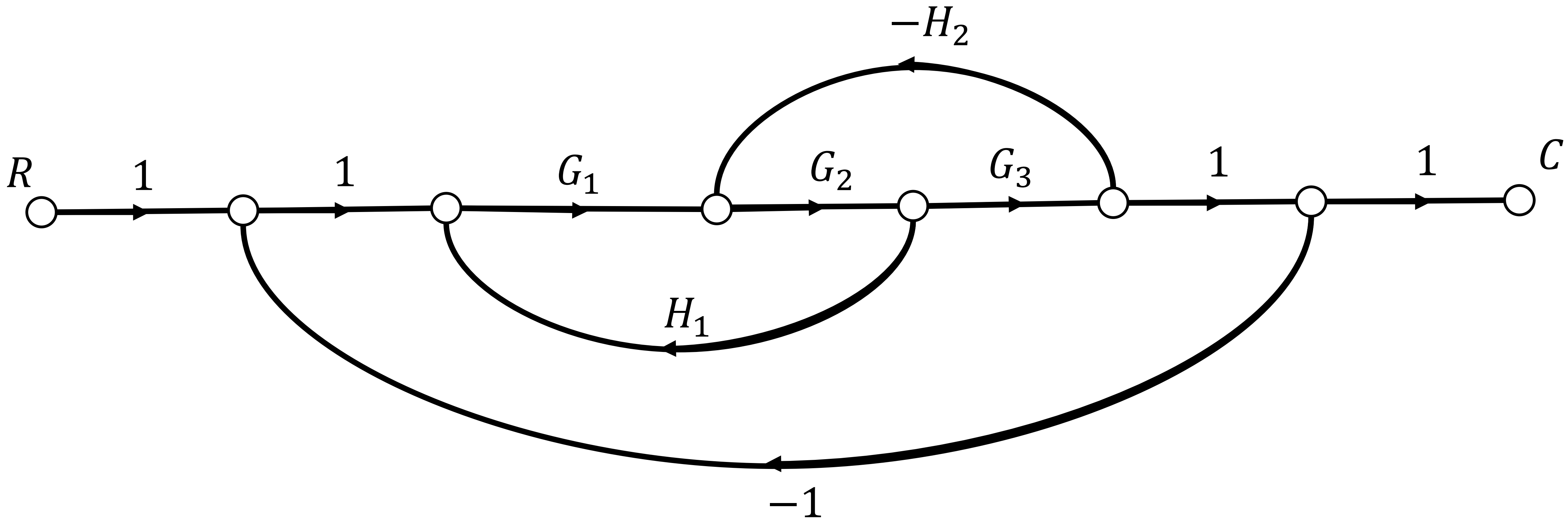


Diagrama de Flujos de Señal

Obtener el SFG a partir de ecuaciones

$$Y(s) = aX(s) + bU(s)$$

$$X(s) = cZ(s) - dY(s)$$

$$Z(s) = eU(s)$$

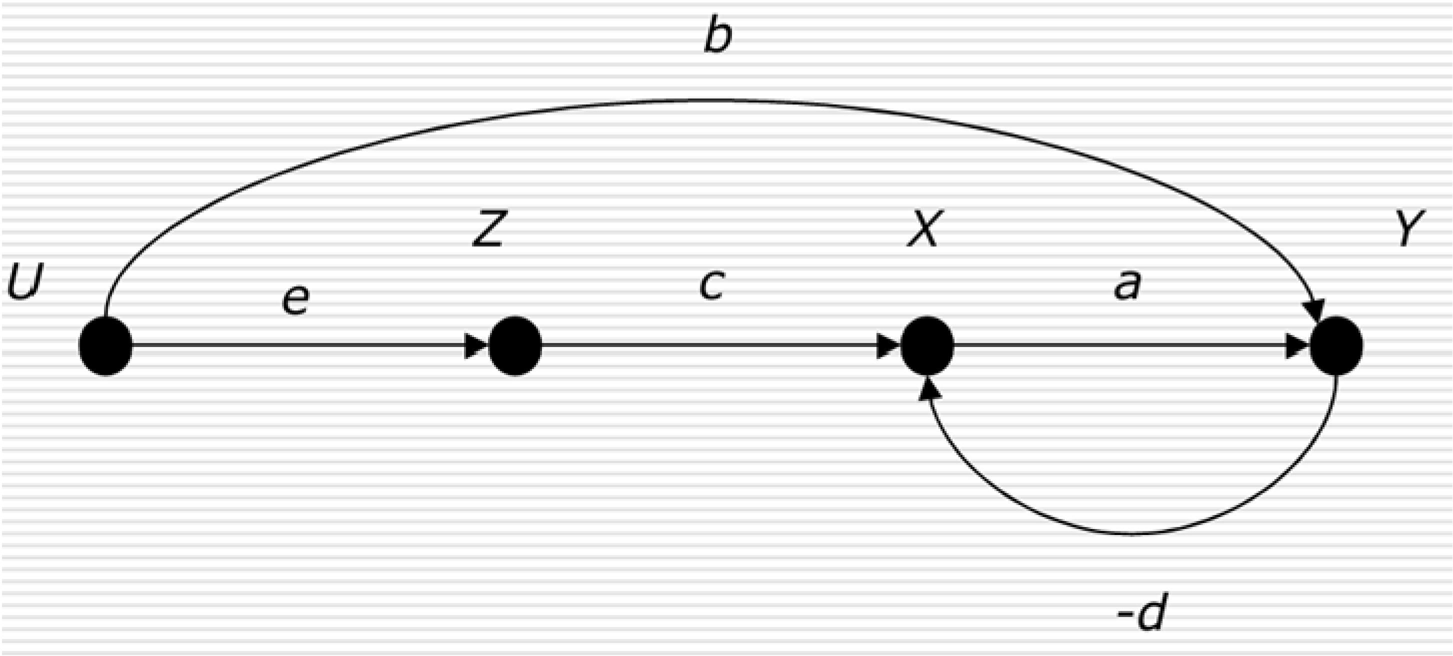


Diagrama de Flujos de Señal

Una forma de determinar la función de transferencia a partir de los SFG es haciendo uso de la ecuación de Mason

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_i T_i \Delta_i}{\Delta}$$

i: el numero de trayectorias directas
T_i: es la ganancia del trayecto directo i-esimo
$\boldsymbol{\Delta}$: es el determinante o ecuación característica del sistema

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_e L_f L_g + \ \ldots$$

$\sum L_a$: es la suma de todos las mallas individuales
$\sum L_b L_c$: suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos mallas que no se tocan
$\sum L_e L_f L_g$ es la suma del producto de las ganancias de todas las combinaciones posibles de tres mallas que no se tocan
$\boldsymbol{\Delta}_i$: son aquellas mallas que no tocan la trayectoria directa

Diagrama de Flujos de Señal

Hallar la función de transferencia para el siguiente SFG, definiendo como entrada R(s) y salida C(s):

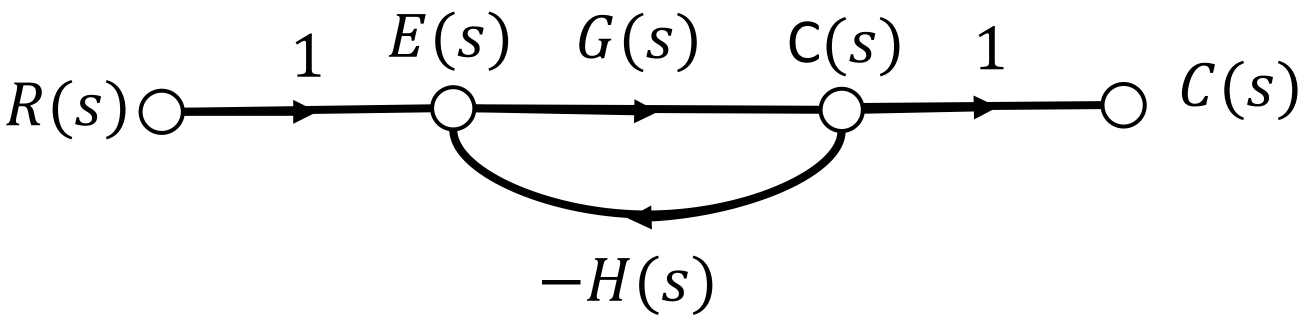
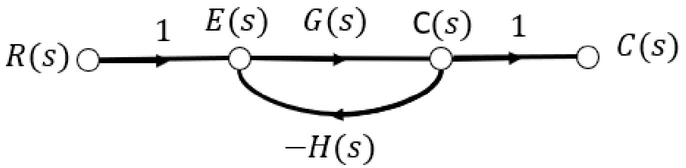


Diagrama de Flujos de Señal

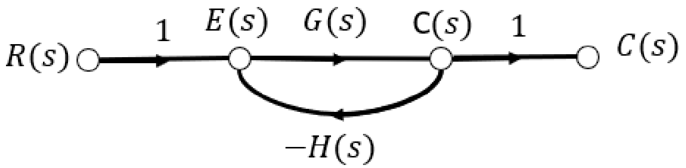


1. Identificar las trayectorias directas y hallar el producto de sus respectivas ganancias:

$$T_1 : R - E - C$$

$$T_1 = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

Diagrama de Flujos de Señal

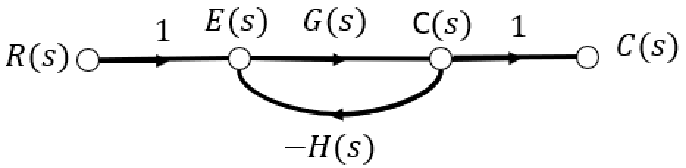


2. Identificar las mallas individuales en el SFG y estimar el producto de su ganancia

$$L_{11}: E - C - E$$

$$L_{11} = G \cdot (-\mathrm{H}) = -GH$$

Diagrama de Flujos de Señal



2.1. En caso que se tengan dos o mas mallas, se deben de identificar de forma sucesiva:

- Si existen grupos de dos mallas que NO se toquen, en caso de ser así se multiplican sus ganancias

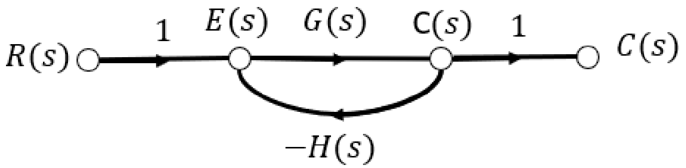
$$L_{21} = G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots = G_{21} \qquad L_{2n} = G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots = G_{2n}$$

- Si existen grupos de tres mallas que NO se toquen, en caso de ser así, se multiplican sus ganancias

$$L_{31} = G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots = G_{31} \qquad L_{3n} = G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots = G_{3n}$$

Así sucesivamente, si es posible encontrar mallas que NO se toquen

Diagrama de Flujos de Señal



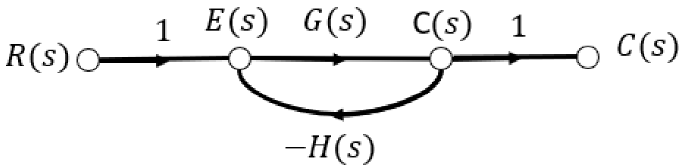
3. Hallar los cofactores por trayectoria identificadas, para ello se debe de identificar las mallas que no tocan la trayectoria directa y se suman

$$\Delta_i = 1 - (L_{nm} + \ \ldots)$$

$$\Delta_1 = 1$$

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA

Diagrama de Flujos de Señal

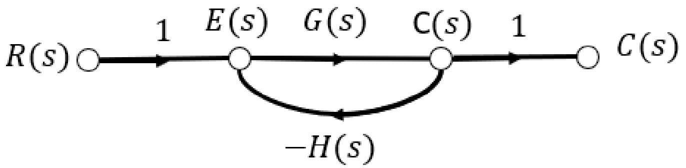


4. Hallar el determinante:

$$\Delta = 1 - (L_{11} + \cdots + L_{1n}) + (L_{21} + \cdots + L_{2n}) - (L_{31} + \cdots + L_{3n}) + \ \ldots$$

$$\Delta = 1 - (-GH) = 1 + GH$$

Diagrama de Flujos de Señal



5. A partir de los términos hallados (Trayectorias directas <<T_i>>, Mallas individuales <<L_{ij}>>, cofactores <<Δ_i>> y el determinante <<Δ>>), reemplazarlos en la ecuación de Mason:

$$M = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{K=1}^{N} T_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

$$M = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{T_1 \cdot \Delta_1}{\Delta}$$

$$M = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 + GH}$$

Diagrama de Flujos de Señal

Hallar la función de transferencia para el siguiente SFG, definiendo como entrada R(s) y salida C(s):

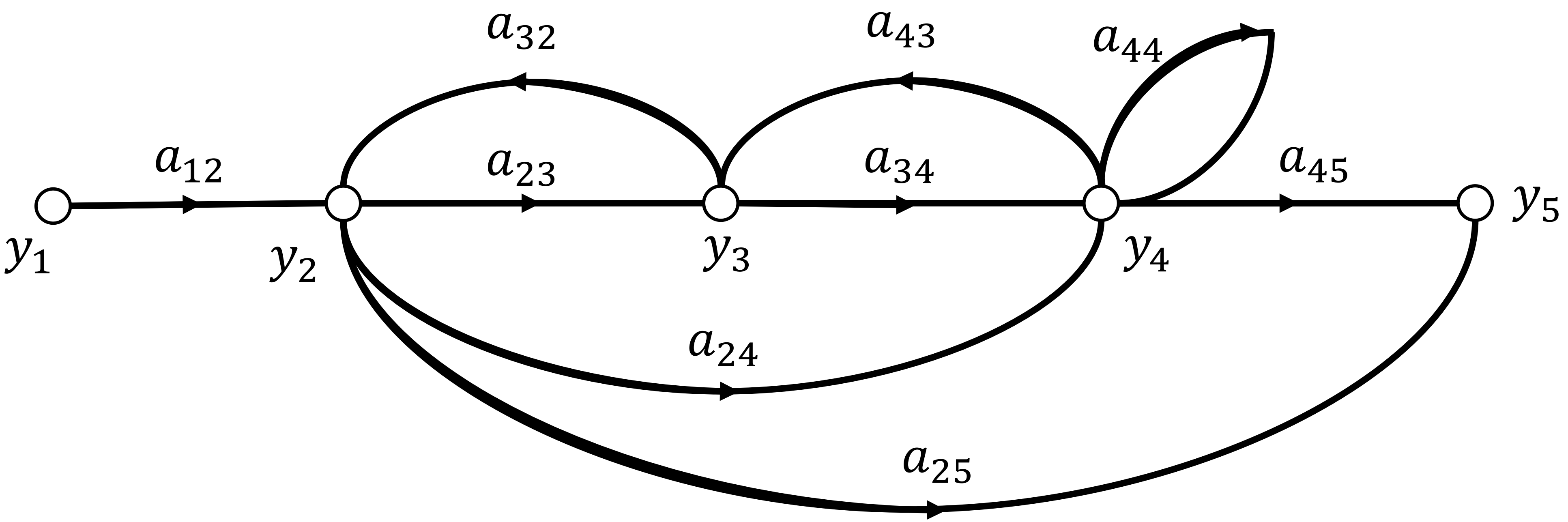
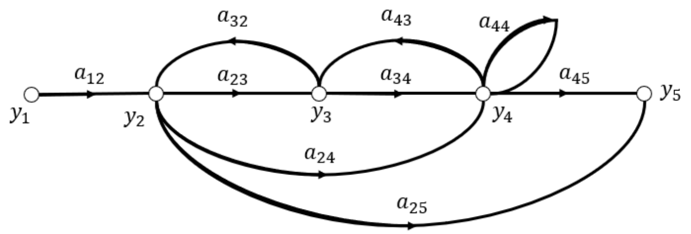


Diagrama de Flujos de Señal



1. Identificar las trayectorias directas y hallar el producto de sus respectivas ganancias:

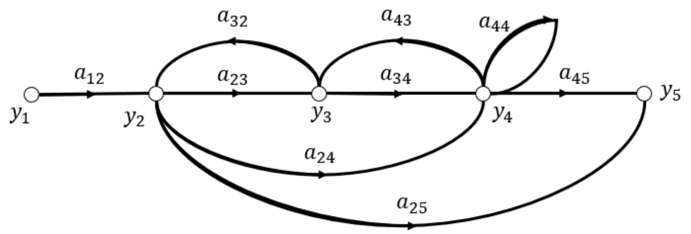
$$T_1: Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5$$

$$T_2: Y_1 - Y_2 - Y_5$$

$$T_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$$

$$T_2 = a_{12}a_{25}$$

Diagrama de Flujos de Señal



2. Identificar las mallas individuales en el SFG y estimar el producto de su ganancia

$L_{11}: Y_2 - Y_3 - Y_2$

$L_{11} = a_{23}a_{32}$

$L_{12}: Y_3 - Y_4 - Y_3$

$L_{12} = a_{34}a_{43}$

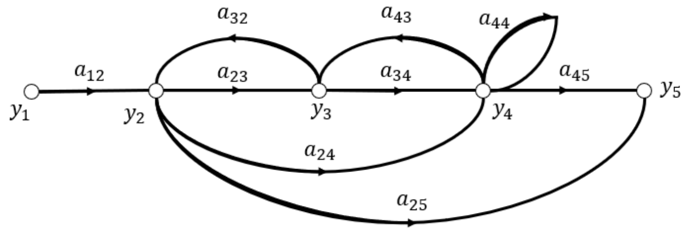
$L_{13}: Y_2 - Y_4 - Y_3 - Y_2$

$L_{13} = a_{24}a_{43}a_{32}$

$L_{14}: Y_4 - Y_4$

$L_{14} = \mathrm{a}_{44}$

Diagrama de Flujos de Señal



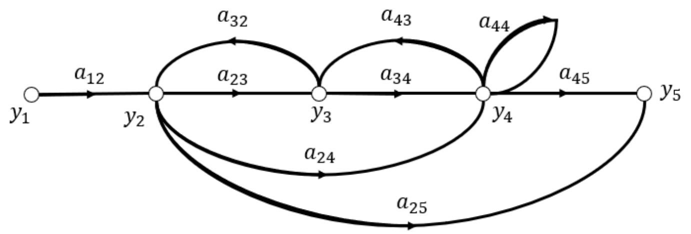
2.1. En caso que se tengan dos o mas mallas, se deben de identificar de forma sucesiva:

- Conformar grupos de dos mallas que NO se toquen, en caso de ser así se multiplican sus ganancias

$$L_{21} = L_{11}L_{14}$$

$$L_{21} = a_{23}a_{32}a_{44}$$

Diagrama de Flujos de Señal



3. Hallar los cofactores por trayectoria identificadas, para ello se debe de identificar las mallas que no tocan la trayectoria directa y se suman

Todas las mallas tocan la T_1

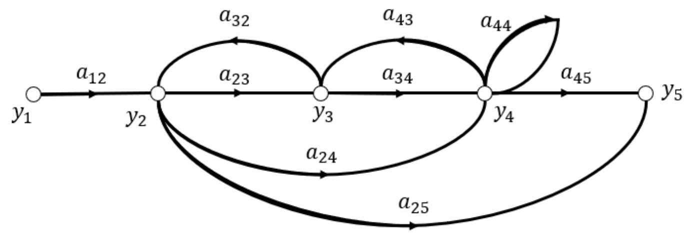
$$\Delta_1 = 1$$

Las mallas L_{12} y L_{14} no tocan la T_2

$$\Delta_2 = 1 - L_{12} - L_{14}$$

$$\Delta_2 = 1 - a_{34}a_{43} - a_{44}$$

Diagrama de Flujos de Señal



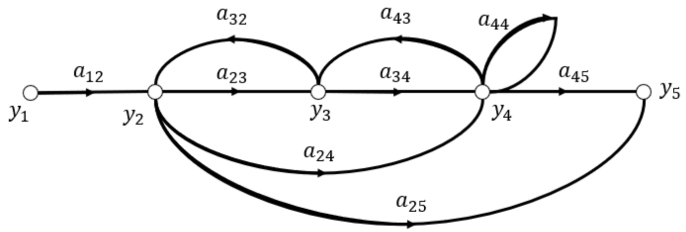
4. Hallar el determinante:

$$\Delta = 1 - (L_{11} + \cdots + L_{1n}) + (L_{21} + \cdots + L_{2n}) - (L_{31} + \cdots + L_{3n}) + \ \ldots$$

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14}) + (L_{21})$$

$$\Delta = 1 - (a_{32}a_{23} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{43}a_{32} + a_{44}) + (a_{32}a_{23}a_{44})$$

Diagrama de Flujos de Señal



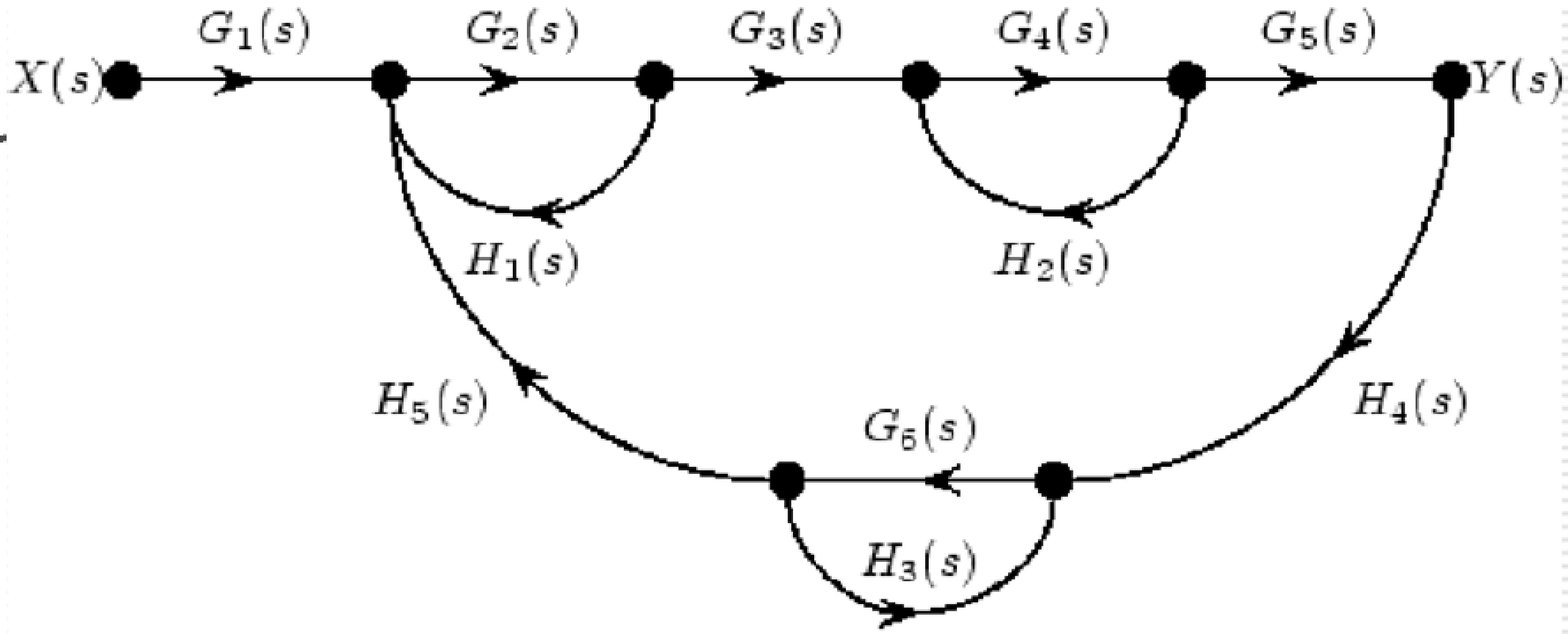
5. A partir de los términos hallados (Trayectorias directas <<T_i>>, Mallas individuales <<L_{ij}>>, cofactores <<Δ_i>> y el determinante <<Δ>>), reemplazarlos en la ecuación de Mason:

$$M = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{K=1}^{N} T_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

$$M = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{T_1 \cdot \Delta_1 + T_2 \cdot \Delta_2}{\Delta}$$

$$M = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45})(1) + (a_{12}a_{25}) \cdot (1 - a_{34}a_{43} - a_{44})}{1 - (a_{32}a_{23} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{43}a_{32} + a_{44}) + (a_{32}a_{23}a_{44})}$$

Diagrama de Flujos de Señal



Método de Espacio Estado

Bibliografía

[1] Dukkipati, Rao V. "Analysis and Design of Control Systems Using Matlab", New Age International Publishers, 2006.

[2] Zill, Dennis G., “Differential Equations with boundary-value problems”, 7 edición, Brooks/Cole Cengage Leraning, 2009.

[3] Castaño G., Sergio Andres, “Teorema del valor final e inicial”, https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/teorema-de-valor-final-y-inicial/

[4] Castaño G., Sergio Andres,” Función de Transferencia” https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/funcion-de-transferencia/

Bibliografía

[5] Castaño, Ezequiel L., “Función de Transferencia”, https://elc.github.io/control-theory-with-matlab/chapters/ELC02_Funcion_de_transferencia.html, 2021.

[6] Kuo, Benjamin C., “Sistema de control automatico”, 7ma edición.

[8] “**Resolución de diagramas de bloques**”, UNAM https://suayed.cuautitlan.unam.mx/uapas/4/