Metryka

$d: X \times X \to \mathbb{R}$ nazywamy metryką na X jeżeli:

1° $\forall x,y \in X \ d(x,y) \geq 0$

2° $\forall x,y \in X \ d(x,y) = d(y,x)$

3° $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

4° $\forall x,y,z \in X \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (tzw. nierówność trójkąta)

Przestrzeń i podprzestrzeń metryczna

1° zbiór X wraz z metryką d na X nazywamy przestrzenią metryczną i oznaczamy (X,d)

2° jeśli $Y \subseteq X$ oraz $d' = d|_Y$, to (Y,d') nazywamy podprzestrzenią X

Otwarta kula

dla (X,d), $x \in X$, $r > 0$ $\{y \in X : d(x,y) < r\}$ nazywamy otwartą kulą i oznaczamy $B(x,r)$

Zbiór otwarty

dla (X,d), $S \subseteq X$ nazywamy otwartym jeżeli $\forall x \in S \ \exists r>0 \ B(x,r) \subseteq Y$

Twierdzenie

Suma oraz skończony przekrój zbiorów otwartych są otwarte

Wnętrze zbioru

dla (X,d), $S \subseteq X$ $\{x \in S : \exists r>0 \ B(x,r) \subseteq S\}$ nazywamy wnętrzem zbioru i oznaczamy $\mathrm{Int}(S)$

Punkt domknięcia

dla (X,d), $S \subseteq X$ jeżeli $\forall r>0 \ B(x,r) \cap S \neq \emptyset$, to x nazywamy punktem domknięcia zbioru S

Domknięcie

dla (X,d), $S \subseteq X$ $\{x \in X : \forall r>0 \ B(x,r) \cap S \neq \emptyset\}$ nazywamy domknięciem zbioru S i oznaczamy $\overline{S}$

Zbiór zamknięty

dla (X,d), $S \subseteq X$ mówimy, że S jest zamknięty jeżeli $S = \overline{S}$

Twierdzenie:

Przeliczalna suma oraz dowolny przekrój zbiorów zamkniętych jest zamknięty

Twierdzenie:

dla (X,d) $S \subseteq X$ jest zamknięty $\Leftrightarrow$ S^c jest otwarty

Twierdzenie:

dla (X,d) $x \in X$ jest punktem domknięcia zbioru S $\Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

zad. 8

I niech $S=\{y\in X: d(x,y)\leq r\}$

oczywiście $S\subseteq \mathrm{Int} S$, zatem wystarczy pokazać zawieranie w drugą stronę

zał, że $t\in X$ taki, że $\forall r_0>0 \ S\cap B(r_0,t)\neq 0$

niech $y\in B(t,r_0)\cap S$, wtedy

$d(x,t)\leq d(x,t)+d(y,t)<r+r_0$

z dowolności r_0 $d(x,t)\leq r$, zatem $t\in S$, zatem S jest zamknięty

II rozważamy $\{0,1\}$ z metryką $d(x,y)=|x-y|$

$B(0,1)=\{0\}$, $\{y: d(0,y)\leq 1\}=\{0,1\}$, ale

1 nie jest punktem domknięcia $B(0,1)$, bo

$B(0,1)\cap B(1,\frac{1}{2})=\emptyset$

III niech $B(x,r_0)\subseteq \mathbb{R}^n$ oraz t takie, że $d(x,t_0)=r_0$

ponieważ $\mathbb{R}^n$ jest gęsty znajdziemy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B(x,r_0)$, że

$\lim_{n\to\infty} x_n=t$, zatem $\{y: d(x,y)\leq r_0\}$ jest domknięciem $B(x,r_0)$

zad. 12

Lemat: $x_n\to x \iff \forall O$-otwartego $\exists N \ \forall n>N \ x_n\in O$

$\Rightarrow$ wynika z faktu, że

$\Leftarrow$ wynika z faktu, że zbiór jest zamknięty jeżeli zawiera granicę każdego podciągu zbieżnego punkt graniczny

dla (X,d) $x \in S$ nazywamy punktem granicznym zbioru S jeżeli:

istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$, że $\forall_n\ x_n \neq x$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

punkt izolowany

dla (X,d) $x \in S$ nazywamy punktem granicznym zbioru S jeżeli:

$\exists_{r>0}\ B(x,r) \cap S = \{x\}$

Twierdzenie

niech $S \subseteq X$, A - zbiór punktów granicznych S, B - zbiór punktów izolowanych S, wtedy

$A \cap B = \emptyset$ oraz $\bar{S} = A \cup B$

Twierdzenie:

domknięcie zbioru zawiera wszystkie punkty graniczne

Brzeg zbioru

dla $S \subseteq X$ $\bar{S} \cap \overline{S^c}$ nazywamy brzegiem zbioru i oznaczamy ∂S

Twierdzenie

brzeg zbioru otwartego jest pusty

ciąg cauchy'ego

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy ciągiem cauchy'ego jeżeli $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N\ d(x_n,x_m)<\varepsilon$

Twierdzenie

Ciąg zbieżny jest ciągiem cauchy'ego

zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego

jeżeli $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \forall x\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ to mówimy, że $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega jednostajnie do f

szereg funkcyjny cauchyego

jeżeli $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m>N\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$, to mówimy, że

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem funkcyjnym cauchy'ego

przestrzeń zupełna

(X,d) jest przestrzenią zupełną jeżeli każdy ciąg cauchy'ego jest zbieżny

Twierdzenie

w przestrzeni zupełnej ciąg funkcyjny Cauchy'ego jest zbieżny jednostajnie

Twierdzenie

niech (X,d) zupełna, $Y\subseteq X$, wtedy:

Y jest zamknięty $\iff$ $(Y,d|_Y)$ jest zupełna

zbiór gęsty

Y jest gęsty w X jeżeli $\overline{Y}=X$

Twierdzenie Baire'a

Jeżeli $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ są gęste, otwarte w X oraz (X,d) jest przestrzenią zupełną, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ jest gęsty w X

zbiór nigdzie gęsty

Y jest nigdzdziegęsty w X jeżeli $int(\overline{Y})=\emptyset$

równoważnie: $int(\overline{Y})=\emptyset \iff X/\overline{Y}$ jest gęsty i otwarty w X

Twierdzenie

Jeżeli $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ są nigdziegęste w X oraz (X,d) jest przestrzenią zupełną

, to $int(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\emptyset$

dowód tw. Baire'a

Korzystamy z faktu, że A jest gęsty w $X \iff \forall \varepsilon>0\ \forall x\in X\ \exists y\in A\ y\in B(x,\varepsilon)$

weźmy więc $x\in X$ oraz $\varepsilon>0$

Konstruujemy zbiory w następujący sposób:

$\exists y_1\in A_1\ y_1\in B(x,\varepsilon)$, niech r_1 takie, że $r_1<1$ $\overline{B(y_1,r_1)}\subseteq A_1$ oraz $\overline{B(y_1,r_1)}\subseteq B(x,\varepsilon)$ (bo A_1 otwarty)

⋮

$\exists y_n\in A_n\ y_n\in B(y_{n-1},r_{n-1})$, niech r_n takie, że $r_n<\frac{1}{n}$ $\overline{B(y_n,r_n)}\subseteq A_n$ oraz $\overline{B(y_n,r_n)}\subseteq B(y_{n-1},r_{n-1})$ (bo A_n otwarty)

⋮

zauważamy, że $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem cauchy'ego, zatem zbiega do pewnego y

$\forall n$ $\overline{B(y_n,r_n)}$ jest zamknięty zatem $\forall n\ y\in \overline{B(y_n,r_n)}$, stąd $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B_n(y_n,r_n)}$, stąd $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$

zad. 3

weźmy ciąg $x_1,x_2,\dots$ punktów, które nie są izolowane

wtedy $\forall n$ $X/\{x_n\}$ jest gęsty w X oraz otwarty, zatem

zbiór punktów izolowanych $\bigcap_{n=1}^{\infty}X/\{x_n\}$ jest gęsty w X

zad. 7

a) łatwe

b) aksjomaty 1-4 łatwe

pokażemy, że granica istnieje:

weźmy $\varepsilon>0$

niech N_1 takie, że $\forall n,m>N_1\ d(s_n,s_m)<\frac{\varepsilon}{2}$

niech N_2 takie, że $\forall n,m>N_2\ d(t_n,t_m)<\frac{\varepsilon}{2}$

wtedy $\forall n,m>\max\{N_1,N_2\}$

$|d(s_n,t_n)-d(s_m,t_m)|=|d(s_n,t_m)+d(t_m,t_n)-d(s_m,t_m)|=|d(s_n,t_m)+d(s_n,s_m)+d(t_n,t_m)-d(s_m,t_m)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

czyli $\{d(s_n,t_n)\}$ jest zbieżny w $\mathbb{R}$

sprawdzamy czy funkcja jest dobrze zdefiniowana

zał, że $\{s_n^1\}\sim\{t_n^1\}$, $\{s_n^2\}\sim\{t_n^2\}$

$\rho(\tilde{s}^1,\tilde{t}^1)=\lim_{n\to\infty}d(s_n^1,t_n^1)\underset{*}{=}\lim_{n\to\infty}(s_n^2,t_n^1)\underset{\Delta}{=}\lim_{n\to\infty}d(s_n^2,t_n^2)=\rho(\tilde{s}^2,\tilde{t}^2)$

$*$ bo $\forall n\ |d(s_n^1,t_n^1)-d(s_n^2,t_n^1)|\le|d(s_n^1,t_n^1)+d(s_n^1,t_n^1)-d(s_n^2,t_n^1)|=d(s_n^1,t_n^1)\xrightarrow{n\to\infty}0$

Liczby rzeczywiste

$\mathbb{R}$ powstaje poprzez „uzupełnienie" $\mathbb{Q}$ następującym aksjomatem:

- $\exists M \ \forall x \in A \ \ x \leq M \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$

Twierdzenie

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest przestrzenią zupełną

niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ciąg cauchy'ego w $(\mathbb{R}, |\,|)$

niech S będzie zbiorem $x \in \mathbb{R}$ takich, że istnieje co najwyżej skończenie wiele n takich, że $x \leq a_n$

weźmy $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon \ |a_{N_\varepsilon} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

oczywiście $\forall x \in S \ \ x \leq a_{N_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}$, $\sup S \in \mathbb{R}$ oraz $|\sup S - a_{N_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2}$

wtedy $\forall n > N_\varepsilon \ \ |a_n - \sup S| \leq |a_n - a_{N_\varepsilon}| + |a_{N_\varepsilon} - \sup S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

zatem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sup S \in \mathbb{R}$

Twierdzenie

każdy otwarty podzbiór $\mathbb{R}$ jest przeliczalną sumą odcinków otwartych

zad. 5

zał., że $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ zamknięte oraz $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, wtedy $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$

$\mathbb{R}$ jest gęste w $\mathbb{R}$ zatem z tw. Baire'a $\exists n \; int(A_n) \neq \emptyset$, czyli $\exists q \in \mathbb{Q} \; q \in A_n$ - sprzeczność

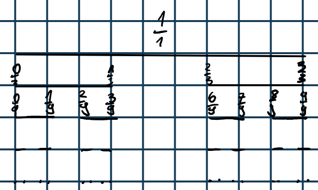
zad. 7

a.) $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, oczywiście C_n zamknięte, zatem C zamknięty

niech $x \in C$, $r > 0$

$\exists k \; \frac{1}{3^k} < r$, wtedy $B(x,r) \not\subseteq C_k$, czyli $B(x,r) \not\subseteq C$

stąd $int(C) = \emptyset$



b.) załóżmy, że $x \in C$, niech $r > 0$

$\exists m, k \in \mathbb{N} \; x = \frac{m}{3^k}$, niech k takie, że

x jest krańcem pewnego przedziału z C_k,

możemy założyć, że jest on postaci $[\frac{m}{3^k}, \frac{m+1}{3^k}]$

weźmy l takie, że $[\frac{m}{3^l}, \frac{l}{3^l}]$ jest przedziałem pewnego C_p

oraz $\frac{l}{3^l} - \frac{m}{3^k} < r$, wtedy $\frac{l}{3^l} \in B(x,r) \cap C$

c.) C jest zamknięty, czyli $(C, |\cdot|)$ jest przestrzenią zupełną

jeśli C byłby przeliczalny, to punkty izolowane są gęste w C, czyli $\bar{\emptyset} = C$ - sprzeczność

zad. 10

definiujemy $E_n = \{x : |f(x)| < n\}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}$, zatem z tw. Baire'a $\exists n \; int(E_n) \neq \emptyset$

czyli mamy x_0 oraz $r > 0$, że $B(x_0, r) \in E_n$

czyli $\forall x \in B(x_0, r) \; |f(x)| < n$

istnienie podciągu jest oczywiste, wystarczy wziąć $a_n = x_0 \; \forall n$

Produktowa przestrzeń metryczna

jeżeli $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ przestrzenie metryczne, to

$(X_1\times\dots\times X_k,d)$ nazywamy produktową przestrzenią metryczną

własność 1°

$\forall (x_{n1},\dots,x_{nk})\in X_1\times\dots\times X_k \ \lim_{n\to\infty}(x_{n1},\dots,x_{nk})=(x_1,\dots,x_k) \iff \forall (x_{n1},\dots,x_{nk})\in X_1\times\dots\times X_k \ \forall_{j\in\{1,\dots,k\}} \ \lim_{n\to\infty} x_{nj}=x_j$

Twierdzenie

jeżeli (X,d) spełnia warunek 1°, oraz $O\in X$ otwarty, wtedy $\exists O_1\in X_1,\dots,O_n\in X_n$, że $O=O_1\times\dots\times O_n$

dowód:

niech $O\in X$ otwarty

załóżmy, że $O_j\in X_j$ jest otwarty, wtedy

$X_1\times\dots\times O_j^c\times\dots\times X_k$ jest zamknięty z warunku 1°

zatem jeżeli $O_1,\dots,O_k$ otwarte, to

$O_1\times\dots\times O_k=\bigcup_{j=1}^{k}(X_1\times\dots\times O_j^c\times\dots\times X_k)^c$ jest otwarty

załóżmy niewprost, że O jest otwarty, $x\in O$, ale

nie istnieje takie otwarte $O_1,\dots,O_k$, że $x\in O_1\times\dots\times O_k\subseteq O$, wtedy

$\forall_n \ B(x_1,\frac{1}{n})\times\dots\times B(x_k,\frac{1}{n})\nsubseteq O$

zatem $\exists x_n\in O^c$, że $\forall_k \ x_{kn}\to x_k$, z warunku 1°

$x_n\to x$, ale O^c jest zamknięty, zatem $x\notin O$ - sprzeczność

Własność 2°

$\forall_{j\in\{1,\dots,k\}} \ d(x_k,y_k)\le d(x,y)$

Twierdzenie

jeżeli $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ są zupełne oraz (X,d) spełnia warunki 1° i 2°, to (X,d) jest zupełna

zad. 7c

niech O otwarty w X

$\forall x\in O \ \exists r>0 \ \forall y\in B(x,r) \ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\min(1,d(x_j,y_j))<r$

weźmy $x\in O$, niech r_x takie, że $\forall y\in B(x,r_x) \ d(x,y)<r_x$

weźmy N_x takie, że $\sum_{j=N_x}^{\infty}\frac{1}{2^j}<\frac{r_x}{2}$, definiujemy $A_x=B(x_1,\frac{r_x}{2N_x})\times\dots\times B(x_{N_x},\frac{r_x}{2N_x})\times X_{N_x}\times X_{N_x+1}\times\dots$

$x\in A_x$ oraz $\forall y\in A_x \ d(x,y)<r_x$, A_x otwarty, zatem $X=\bigcup_{x\in O}A_x$

otwarta otoczka

Jeśli $\forall t \in A$ O_t otwarty oraz $S \subseteq \bigcup_{t \in A} O_t$ to mówimy, że $\{O_t\}_{t \in A}$ jest otwartą otoczką zbioru S

zbiór ograniczony

S jest ograniczony jeśli $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall x,y \in S$ $d(x,y) \leq r$

zbiór całkowicie ograniczony

S jest całkowicie ograniczony jeśli $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1, \ldots, x_n$ $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$

Lemat 1°

Podprzestrzeń zbioru całkowicie ograniczonego jest całkowicie ograniczona

Twierdzenie

1° jeżeli S jest całkowicie ograniczony, to S jest ograniczony

2° $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jest całkowicie ograniczony $\Leftrightarrow$ $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jest ograniczony

Twierdzenie

Każdy ciąg przestrzeni całkowicie ograniczonej ma podciąg cauchy'ego

niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ciąg w przestrzeni całkowicie ograniczonej X

$\exists x_1 \in X$ $B(x,1)$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n

niech a_{n_1} będzie jednym z tych wyrazów

indukcyjnie $\exists x_k \in B(x_{k-1}, \frac{1}{k-1})$ że $B(x_k, \frac{1}{k})$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

niech a_{n_k} będzie jednym z tych wyrazów

oczywiście a_{n_k} jest ciągiem cauchy'ego

przestrzeń ośrodkowa

Jeżeli istnieje przeliczalny zbiór gęsty w X to X nazywamy przestrzenią ośrodkową

Twierdzenie

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest przestrzenią ośrodkową

Uwaga: w dowodzie nie wystarczy wziąć części wspólnej

Twierdzenie

Całkowicie ograniczona przestrzeń jest ośrodkowa

baza zbiorów otwartych

$\mathbb{B}$ nazywamy bazą zbiorów otwartych przestrzeni X jeżeli $\forall O \in X$ otwartego $O = \bigcup_{t \in A} B_t$ dla pewnych $\{B_t\}_{t \in A} \in \mathbb{B}$

Lemat: 2°

$\mathbb{B}$ jest bazą $X \iff \forall x \in X\ \forall O$ otwarteg $x \in O \Rightarrow \exists B \in \mathbb{B}\ B \subseteq O$

Drugi aksjomat przeliczalności

mówimy, że X spełnia drugi aksjomat przeliczalności jeżeli ma przeliczalną bazę

Twierdzenie

X spełnia drugi aksjomat przeliczalności $\iff$ X jest ośrodkowa

Twierdzenie Lindelöfa

Jeśli X spełnia drugi aksjomat przeliczalności to każda otwarta otoczka X jest przeliczalna

dowód wynika z lematu 2.

Twierdzenie:

następujące warunki są równoważne:

1° X jest zwarta

2° każy ciąg w X ma podciąg zbieżny

3° X jest absolutnie ograniczona i zupełna

Uwaga: w przypadku $\mathbb{R}^n$ 3° możemy zastąpić X jest ograniczony i zamknięty

dowód 2°, 3° $\Rightarrow$ 1

X jest absolutnie ograniczona, zatem ośrodkowa, wtedy spełnia drugi aksjomat przeliczalności, stąd

każda otoczka ma przeliczalną podotoczkę $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$

zał, że $\forall m\ \exists x_m$ $x_m \in X / O_{n_1} \cup \ldots \cup O_{n_m}$, wtedy x_m ma podciąg x_{m_k} zbieżny do x, $\forall m$ $x \in X / O_{n_1} \cup \ldots \cup O_{n_m}$

zatem $x \in X / \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ - sprzeczność

zad. 4

niech $\{O_n\}_{k=1}^{n}$ otwarta otoczka X

zał. niewprost, że $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $B(x, \varepsilon) \notin O_i$

niech x_m taki że $\forall i$ $B(x_m, \frac{1}{m}) \notin O_i$

x_m ma podciąg zbieżny do pewnego $l \in X$

stąd $\forall \varepsilon > 0\ \forall i$ $B(l, \varepsilon) \notin O_i$ - sprzeczność

b.) zał, że $O_1 \subseteq X$ O_1 jest ograniczony zatem $\exists t\ \forall x, y \in O_1$ $d(x,y) < t$

zatem $S = \{\varepsilon \in \mathbb{R} : \forall x \in X\ \exists i\ B(x, \varepsilon) \subseteq O_i\}$ jest ograniczony z góry przez t

zad. 7

($\Rightarrow$) zał. że S jest nieskończone, wtedy $P(S)$ jest nieprzeliczalne

$\forall A \neq B \in P(S) \quad d(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = 1$

$\{\mathbb{1}_A : A \in P(S)\} \subseteq B(S)$ oraz nie jest ośrodkowy, zatem $B(S)$ nie jest ośrodkowy

($\Leftarrow$) $A = \{f : f : S \to \mathbb{Q}\}$ jest przeliczalny oraz $\overline{A} = B(S)$

ciągłość funkcji

$(X,d),(Y,\rho)$ - przestrzenie metryczne

$f: X \to Y$ jest ciągła w x_0 jeżeli $\forall \varepsilon \exists \delta \; d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

mówimy że f jest ciągła jeżeli $\forall x_0 \in X$ f jest ciągła w x_0

Twierdzenie

następujące warunki są równoważne:

1° f jest ciągła

2° $\forall x_0 \in X, x_n \to x_0 \quad f(x_n) \to f(x_0)$

3° $\forall O \in Y$ otwartego $f^{-1}(O)$ jest otwarty

Twierdzenie:

f ciągła na zbiorze zwartym jest ciągła jednostajnie

dowód 1:

niech $\varepsilon > 0$, $x \in \operatorname{rng} f$

$\exists \delta_x \; \forall t \; B(x, \delta_x) \; f(t) \in B(f(x), \varepsilon)$, zatem

$\{ B(x, \frac{\delta_x}{2}) : x \in X \}$ jest otwartą otoczką X

niech $C := \{ B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2}) : k \in \{1, \dots, n\} \}$ będzie skończoną podotoczką X

weźmy $\delta = \min \{ \frac{\delta_{x_k}}{2} : k \in \{1, \dots, n\} \}$, niech $x, y \in X$, że $d(x,y) < \delta$

$\exists k \in \{1, \dots, n\} \; x \in B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2})$, wtedy $\quad d(y, x_k) \le d(y,x) + d(x, x_k) < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \frac{\delta_{x_k}}{2}$

stąd $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

dowód 2.

zał. niewprost, że $\exists \varepsilon \; \forall n \; \exists x_n, y_n \; d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ oraz $\rho(f(x_n), f(y_n)) \ge \varepsilon$

przechodząc po podciągów zbieżnych $x_{n_k} \to x$, $y_{n_{k_s}} \to y$ mamy, że

$\rho(f(x), f(y)) \ge \varepsilon$, ale $x = y$ - sprzeczność zad.6

jeżeli $f(0)=0$, to dowód gotowy, załóżmy że $f(0)>0$

niech $S=\{x\in[0,1]: f(x)<x\}$

$\lim_{t\to \sup S^-} f(t)\le \sup S$, $\lim_{t\to \sup S^+} f(t)\ge \sup S$

ponieważ f ciągła $f(\sup S)=\sup S$

zad.7

niech $\{O_t\}_{t\in A}$ otoczka $f(X)$, wtedy $X=f^{-1}(\bigcup_{t\in A} O_t)=\bigcup_{t\in A} f^{-1}(O_t)$ ← otwarta otoczka X

$\exists t_1,\dots,t_n$, że $X=\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{t_k})=f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{n} O_{t_k})$, wtedy $f(X)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n} O_{t_k}$ ← skończona podotoczka $f(X)$

zbiór zwarty jest całkowicie ograniczony, zatem ograniczony

zad.10

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ \sup_{s\in S} d(f_n(s),f_m(s))<\varepsilon \iff \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n,m>N\ \forall x\ d(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon$ ← zbieżność jednostajna Cauchy'ego

$\Rightarrow$ niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ciąg cauchy'ego, traktując go jako ciąg funkcji stałych mamy że x_n jest zbieżny

do pewnej stałej f

$\Leftarrow$ niech $\{f_n\}$ ciąg cauchy'ego w $B(S,X)$

wtedy $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcyjnym cauchy'ego w X, zatem $\exists f$ $f_n\to f$ jednostajnie

$f_n\to f$ w $B(S,X)$

3° wystarczy sprawdzić, że jeżeli $f_n\to f$ jednostajnie oraz f_n ciągłe i ograniczone, to f ciągła i ogr.

zad.12

$A_n=\{x\in X: \forall\alpha\ f_\alpha(x)\le n\}$

$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, zatem z tw. Baire (bo X zupełna) $\exists n$ $\mathrm{Int}\,\overline{A_n}\neq\emptyset$

z ciągłości $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ A_n jest zamknięty, zatem $A_n=\overline{A_n}$, stąd $\mathrm{Int}(A_n)\neq\emptyset$ co kończy dowód

Definicja:

Normą na przestrzeni liniowej V nazywamy $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, że

1° $\forall x \in V$ $\|x\| \geq 0$

2° $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3° $\forall x, y \in V$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3° $\forall c \in \mathbb{K}$ $\forall x \in V$ $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$

przestrzeń liniową z taką normą nazywamy unormowaną przestrzenią liniową

Twierdzenie

jeśli $\|\cdot\|$ norma na V, to V jest przestrzenią metryczną z $d(x,y) = \|x-y\|$

Twierdzenie

Na unormowanej przestrzeni liniowej ciągłe są:

1° dodawanie wektorów

2° mnożenie przez skalar

3 norma

Definicja

odwzorowanie $T: V \to W$ nazywamy transformacją liniową jeżeli $\forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$

Jeżeli W jest ciałem, T nazywamy funkcjonałem liniowym

Definicja

$T: V \to W$ nazywamy ograniczonym jeżeli $\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$

dla T ograniczonego definiujemy $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$

zachodzi nierówność: $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$

Twierdzenie:

następujące warunki są równoważne:

1° T jest ciągły

2° T jest ciągły w 0

3° T jest ograniczony

Definicja:

Przestrzenią Banacha nazywamy unormowaną przestrzeń liniową, która jest zupełna względem metryki indukowanej przez normę

Twierdzenie

Jeżeli $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ przekształcenia ciągłe z V w W, gdzie W jest przestrzenią banacha takie że dla gęstego podzbioru V $\lim_{n\to\infty} T_n x$ istnieje oraz $M = \sup_n \|T_n\| < \infty$, to istnieje taki T, że $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$ oraz $\forall x \lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$

dowód:

dla $x \in V$, że $\lim_{n\to\infty} T_n x$ istnieje definiujemy $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$

jeżeli $z \in V$ - dowolny, to $\exists x$, że $\lim_{n\to\infty} T_n x$ istnieje oraz $\|x-z\| < \varepsilon$

$\|T_n z - T_m z\| \le \|T_n(z-x)\| + \|T_n x - T_m x\| + \|T_m(z-x)\| \le M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon$

zatem $\{T_n z\}$ jest ciągiem cauchy'ego w przestrzeni banacha, czyli jest zbieżny

liniowość T wynika z ciągłości operacji mnożenia i dodawania

$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le (\lim_{n\to\infty})\|T_n\| = \limsup \|T_n\|$, stąd $\|T\| \le \limsup \|T_n\|$,

zamieniając $\|T_n\|$ na $\|T_{n_k}\| \to \liminf \|T_n\|$ otrzymujemy $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$

Twierdzenie:

$B(V,W)$ - przestrzeń ograniczonych transformacji liniowych $T: V \to W$, gdzie W jest przestrzenią banacha, też jest przestrzenią banacha

dowód:

niech $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ciąg cauchy'ego

$\forall x \; \|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\| \|x\|$, zatem $\forall x \{T_n x\}$ jest ciągiem cauchy'ego, zatem jest zbieżny

$\sup \|T_n\| < \infty$, zatem $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunki poprzedniego twierdzenia

weźmy odpowiednie T, zauważamy, że $\forall m$ $T - T_m$ również spełnia te warunki, zatem

$\|T - T_m\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n - T_m\|$, stąd $T \to T_m$

Twierdzenie o jednostajnej ograniczoności

Jeżeli $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ przekształcenia z V do przestrzeni banacha W. Jeśli $\forall x \sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$, to $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$

dowód:

$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, gdzie $E_n = \{x \in W : \sup_\alpha \|T_\alpha x\| \le n\}$ z tw. Baira $\exists E_m \exists x_0 \in E_m$ $B(x, x_0) \subseteq E_m$

zał, że $\|x\| < 1$, wtedy $\|\varepsilon x\| < \varepsilon$, stąd $\|x_0 + \varepsilon x - x_0\| < \varepsilon$, wtedy $\varepsilon \|T_\alpha x\| \le \|T_\alpha(\varepsilon x - x_0) - T_\alpha(x_0)\| \le m + \sup_\alpha \|T_\alpha(x_0)\|$

zad. 6c

$T\{x : \|x\| \leq 1\} = \{x : |||x||| \leq 1\}$, stąd

$\forall x \quad |||T\frac{x}{\|x\|}||| \leq 1$, czyli $|||Tx||| \leq \|x\|$ czyli $|||Tx||| = 1 \Rightarrow \|x\| = 1$

jeśli $Tx = y$, to $T\frac{x}{|||y|||} = \frac{y}{|||y|||}$, zatem $|||T\frac{x}{|||y|||}||| = |||\frac{y}{|||y|||}||| = 1 \Rightarrow \frac{\|x\|}{|||y|||} = 1 \Rightarrow \|x\| = |||y|||$

iniekcja: zał. że $Tx_1 = Tx_2 = 0 \Rightarrow \|x_1\| = \|x_2\| = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

suriekcja: $y \in W \Rightarrow \frac{y}{|||y|||} \in$ kuli jednostkowej $\Rightarrow \exists x \quad Tx = \frac{y}{|||y|||} \Rightarrow Tx|||y||| = y$

zad. 7

$$\sum |x_i + y_i|^p = \sum |x_j| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq (x_1^p + \ldots + x_j^p)^{\frac{1}{p}} (|x_1 + y_1|^p + \ldots + |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} + \ldots$$

$$= (|x_1 + y_1|^p + \ldots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{q}} (\|x\|_p + \|y\|_p)$$

- ciąg cauchy'ego

Definicja

Odwzorowaniem zwężającym nazywamy $\Phi: V \to W$ jeżeli $\exists c \in (0,1)$ $\forall x,y \in V$ $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq c\,d(x,y)$

$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq c \cdot |x-y|$

Twierdzenie:

Odwzorowanie zwężające w przestrzeni Banacha posiada dokładnie jeden punkt stały

niech $\Phi_0(x) = x$, $\Phi_n(x) = \Phi_{n-1}(\Phi(x))$

zauważamy, że $d(\Phi_n(x), \Phi_{n+1}(x)) \leq c^n d(x, \Phi_1(x)) \leq c^n \sum_{k=1}^{n} d(\Phi_{k-1}(x), \Phi_k(x)) = c^n \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} d(x, \Phi(x)) \leq \frac{c^n d(x,\Phi(x))}{1-c} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

zatem $\Phi_n(x)$ jest zbieżny do pewnego x^*

$\Phi(x^*) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{n+1}(x) = x^*$

jeżeli x_1^*, x_2^* punkty stałe, to $d(x_1^*, x_2^*) \leq c\,d(x_1^*, x_2^*)$, czyli $d(x_1^*, x_2^*) = 0$, stąd $x_1^* = x_2^*$

ponadto punkt stały możemy przybliżać w następujący sposób: $\forall x$ $d(\Phi_n(x), x^*) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x, \Phi(x))$

Twierdzenie

Równanie Fredholma postaci $v(s) = u(s) + \int_a^b K(s,t) v(s) ds$ ma dokładnie jedno rozwiązanie

jeżeli $|K(s,t)| < \frac{1}{b-a}$ ciągła na $[a,b]^2$, u ciągła na $[a,b]$

$(Tv)(s) = \int_a^b K(s,t) v(s) ds$ jest operatorem liniowym

niech $M = \sup_{s,t} |K(s,t)|$

$\|Tv\| \leq |\sup_s \int_a^b K(s,t) v(s) ds| = \sup_s \int_a^b |K(s,t)| \cdot |v(s)| ds \leq M(b-a)\|v\|$

stąd $\|T\| \leq M(b-a)$, zatem $\|T\| < 1$

biorąc $\Phi v = u - Tv$

$d(\Phi v, \Phi w) = \|Tv - Tw\| \leq \|T\| \cdot \|v-w\| \leq c \cdot d(v,w)$ stąd Φ jest odwzorowaniem zwężającym

Twierdzenie Cauchy'ego - Picarda

Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego stopnia postaci

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(u(t), t) \\ u(a) = \xi \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na pewnym $[a, \beta]$, $\beta < b$ (β zależy jedynie od r, M oraz c)

- f określona na pewnym otwartym $U \times [a,b] \subseteq \mathbb{R}^n$, że $\exists r\ \{x: |x-\xi| < r\} \subseteq U$
- f ciągła, czyli $\exists M = \sup\{|f(x,t)|: |x-\xi| < r, t \in [a,b]\}$
- $\exists c > 0$ $|f(x,t) - f(y,t)| \leq c|x-y|$ $\forall x,y \in \{x: |x-\xi| < r\}$ $\forall t \in [a,b]$

dowód

niech $(\Phi u)(t) = \xi + \int_a^t f(u(s), s) ds$ $t \in [a, \beta]$, niech $E = C[a,\beta]$ z metryką $d(u,v) = \sup_s |f(u) - f(v)|$

$|(\Phi u)(t) - \xi| = |\int_a^t f(u(s), s) ds| \leq (\beta - a) M$, aby $\Phi(E) \subseteq E$ wybieramy β, że $(\beta - a) \leq \frac{r}{M}$

$d(\Phi(u), \Phi v) \leq \sup_{a \leq t \leq \beta} \int_a^t |f(u(s), s) - f(v(s), s)| ds \leq \sup_{a \leq t \leq \beta} \int_a^t c|v(s) - u(s)| ds| \leq (\beta - a) c\, d(u,v)$ wybieramy β, że $(\beta - a) < \frac{1}{c}$

Definicja:

jeżeli $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ oraz:

1° $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2° $\mathcal{T}$ jest zamknięty na sumy

3° $\mathcal{T}$ jest zamknięty na skończone przekroje

to $\mathcal{T}$ nazywamy topologią na X, a $(X, \mathcal{T})$ przestrzenią topologiczną

Definicja

S nazywamy otwartym jeżeli $S \in \mathcal{T}$

S nazywamy zamkniętym jeżeli $S^c \in \mathcal{T}$

Twierdzenie:

1° $\emptyset, X$ są zamknięte

2° skończona suma zbiorów zamkniętych jest zamknięta

3° przekrój zbiorów zamkniętych jest zamknięty

Definicja

S nazywamy sąsiedztwem x jeżeli $x \in S \wedge \exists \mathcal{O} \in \mathcal{T}\ x \in \mathcal{O} \wedge \mathcal{O} \subseteq S$

Wnętrzem X nazywamy $int(S) := \{x \in S : S \text{ jest otoczeniem } x\}$

Twierdzenie:

1° $S \in \mathcal{T} \Leftrightarrow int(S) = S$

2° $S \subseteq X \Rightarrow int(S) \in \mathcal{T}$

Definicja

x jest punktem domknięcia zbioru S jeżeli każde otoczenie x ma część wspólną z S

domknięciem S nazywamy zbiór punktów domknięcia S i oznaczamy $\overline{S}$

Twierdzenie

3° $S \subseteq X$ jest zamknięty $\Leftrightarrow S = \overline{S}$

4° $S \subseteq X \Rightarrow \overline{S}$ jest zamknięty

Definicja

$x_n \to x$ w sensie topologicznym jeśli dla każdego otoczenia $\mathcal{O}$ punktu x $\exists N\ \forall n > N\ x_n \in \mathcal{O}$

Twierdzenie

$x_n \subseteq S \wedge x_n \to x \Rightarrow x \in \overline{S}$

Definicja:

Jeżeli $S \subseteq X$, $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią topologiczną, to $(S, \mathcal{S})$, gdzie $\mathcal{S} = \{S \cap O : O \in \mathcal{T}\}$ nazywamy podprzestrzenią $(X, \mathcal{T})$. Tak zdefiniowana $\mathcal{S}$ jest topologią na S.

Twierdzenie

niech $(S, \mathcal{S})$ podprzestrzeń $(X, \mathcal{T})$, wtedy

E jest zamknięty w $(S, \mathcal{S}) \Leftrightarrow E = S \cap F$, gdzie F zamknięty w $\mathcal{T}$

Twierdzenie

niech $(S, \mathcal{S})$ podprzestrzeń $(X, \mathcal{T})$, wtedy dla $E \in S$ $\bar{E}$ w S jest równe $\bar{E} \cap S$

Definicja:

$f: X \to Y$, gdzie $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ przestrzenie topologiczne nazywamy ciągłą jeżeli $\forall O \in \mathcal{S}$ $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$

f jest ciągła w punkcie x jeśli dla dowolnego otwartego otoczenia $O_0 \in \mathcal{S}$ $f(x)$ istnieje otwarty $O_1 \in \mathcal{T}$, że $x \in O_1$ oraz $f(O_1) \subseteq O_0$

Jeśli f, f^{-1} są ciągłe, różnowartościowe i na, to f nazywamy homeomorfizmem oraz mówimy, że X, Y są homeomorficzne

Twierdzenie:

$f: X \to Y$ jest ciągła $\Leftrightarrow$ jest ciągła w każdym punkcie

Twierdzenie

Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe

Twierdzenie:

$f: X \to Y$ gdzie $(X, \mathcal{T})$ przestrzeń topologiczna, (Y, d) przestrzeń metryczna jest ciągła w $x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists O \in \mathcal{T}, x \in O \quad \forall y \in O \ d(x, y) < \varepsilon$

Twierzenie

$f_n: X \to Y$ gdzie $(X, \mathcal{T})$ przestrzeń topologiczna, (Y, d) przestrzeń metryczna

jeśli $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne jednostajnie do f i ciągłe w x, to f jest ciągła w x

zad.5

niech (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ - otwarty odcinek

$f_1: (0,1) \to (a, b)$ $\quad f_1(x) = (b-a)x + a$

$f_2: (0,1) \to (a, \infty)$ $\quad f_2(x) = \frac{1}{1+x} + a - 1$

$f_3: (0,1) \to (a, -\infty)$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{x-1} + a + 1$

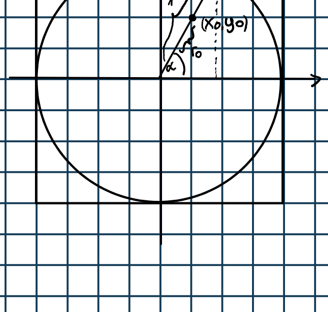
$f_4(0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f_4(x) = tg((x - \frac{1}{2})\pi)$

powyższe funkcje są izomorfizmami, ponadto izomorfizm jest relacją równoważności, zatem wszystkie odcinki otwarte są izomorficzne

zad.6

$f_1: (0,1)^2 \to (-1,1)^2$ $\quad f(x, y) = (2x-1, 2y-1)$

$f_2: (-1,1)^2 \to B(0,1)$



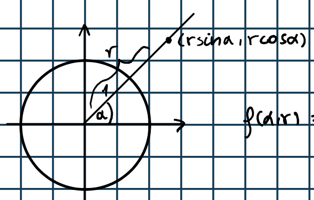
dla kąta α chcielibyśmy aby $f(\alpha_0, r_0) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \cdot \frac{1}{1+d(\alpha_0)}$

dla $\alpha \in I$ $\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \rangle \cup \langle \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$ $\quad \frac{1}{1+d(\alpha_0)} = |\sin\alpha|$

dla $(0, 2\pi] / I$ $\quad \frac{1}{1+d(\alpha_0)} = |\cos\alpha|$

oczywiście f jest poszukiwanym homeomorfizmem

zad. 7



$f(\alpha,r) = ((r-1)\sin\alpha, (r-1)\cos\alpha)$

zad. 9

$f(x,y) = f(\ln x, y)$ jest homeomorfizmem $\{(x,y): x>0\}$ z $\mathbb{R}^2$

$$g(\alpha,r) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{r+1}+1\right)(r\cos\alpha, r\sin\alpha) & r\neq 0 \\ (0,0) & r=0 \end{cases}$$

g jest homeomorfizmem płaszczyzny z $B(0,1)$

Definicja

$\mathbb{B}$ - rodzinę zbiorów otwartych nazywamy bazą przestrzeni topologicznej $\mathcal{T}$, jeżeli dowolny element $O \in \mathcal{T}$ jest sumą zbiorów z $\mathbb{B}$

Twierdzenie

$\mathbb{B}$ jest bazą $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \ \forall V$ - otoczenia x $\exists O \in \mathbb{B}, x \in O$, że $O \subseteq V$

Twierdzenie

$\mathbb{B}$ jest bazą pewnej topologii na X wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

- $\forall x \in X \ \exists O \in \mathbb{B} \ x \in O$
- $U, V \in \mathbb{B}, \ x \in U \cap V \Rightarrow \exists O \in \mathbb{B} \ x \in O \wedge O \subseteq U \cap V$

Twierdzenie Lindelöf'a

Jeżeli $(X, \mathcal{T})$ spełnia drugi aksjomat przeliczalności, to każda otwarta otoczka X ma skończoną podotoczkę.

Twierdzenie

Jeżeli $(X, \mathcal{T})$ spełnia drugi aksjomat przeliczalności to X jest ośrodkowa

zad. 7

zał. że X spełnia drugi aksjomat przeliczalności $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - gęsty w X

niech $S \subseteq X$, zał. że $x \in S$, niech O - sąsiedztwo x

$\exists n \ a_n \in O$

Definicja

T_1 - $\forall x,y \in X \ \exists O \in \tau \ x \in O \wedge y \notin O$

T_2 - (przestrzeń Hausdorffa) $\forall x,y \in X \ \exists O_1, O_2 \in \tau \ x \in O_1, y \in O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$

T_3 - przestrzeń jest regularna jeżeli $\forall F$ - zamkniętego $\forall x \in F^c \ \exists O_1, O_2 \in \tau \ x \in O_1, F \subseteq O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$

przestrzeń T_1, która jest regularna nazywamy przestrzenią T_3

T_4 - przestrzeń jest normalna jeżeli $\forall F_1, F_2$ zamkniętych $\exists O_1, O_2 \in \tau \ F_1 \subseteq O_1, F_2 \subseteq O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$

przestrzeń T_1, która jest normalna nazywamy przestrzenią T_4

Twierdzenie

(X,τ) jest $T_4 \Rightarrow (X,\tau)$ jest $T_3 \Rightarrow (X,\tau)$ jest $T_2 \Rightarrow (X,\tau)$ jest T_1

należy skorzystać z faktu, że w przestrzeni T_1 singletony są zamknięte

Twierdzenie

(X,τ) jest normalna $\Leftrightarrow \forall F$ zamkniętego $\forall O_1 \in \tau, F \subseteq \tau \ \exists O_2 \ F \subseteq \overline{O_2} \subseteq O_1$

Twierdzenie: lemat Urysohna

Jeśli (X,τ) normalna, E, F zamknięte, to istnieje $f: X \to [0,1]$ ciągła, że $f=0$ na E oraz $f=1$ na F

ponieważ (X,τ) normalna $\exists U_{\frac{1}{2}} \in \tau \ E \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq F^c$, dalej

$\exists U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}} \quad E \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subseteq F^c$

w ten sposób konstruujemy zbiory dla każdej liczby postaci $\frac{m}{2^n} \in [0,1]$ (liczby takie są gęste w $[0,1]$)

definiujemy $f(x) = \sup\{q : x \notin U_q\}$

niech $\varepsilon > 0$, x ustalony $\exists p,q$ postaci $\frac{m}{2^n}$, że $-\varepsilon < p < f(x) < q < \varepsilon$

wtedy $U_q / \overline{U_p}$ jest otoczeniem x oraz $\forall y \in U_q / \overline{U_p} \quad d(f(y), f(x)) < \varepsilon$

–

Twierdzenie Tietze'a o rozszerzeniach

Jeżeli $(X,\mathcal{T})$ normalna, f ciągła i ograniczona na zbiorze zamkniętym Y, to istnieje ciągła i ograniczona g na X, że $g=f$ na Y

definiujemy:

$c_0 = \sup\{|f(x)| : x \in Y\}$

$$\left.\begin{array}{l} E_0 = \{x : f(x) \le -\frac{c_0}{3}\} \\ F_0 = \{x : f(x) \ge \frac{c_0}{3}\} \end{array}\right\} \text{ są zamknięte}$$

z lematu Urysohn'a $\exists\, g_0$ ciągła, że $g_0 = -\frac{c_0}{3}$ na E_0 oraz $g_0 = \frac{c_0}{3}$ na F_0, że $\operatorname{rng} g_0 = [-\frac{c_0}{3}, \frac{c_0}{3}]$

wtedy na Y $|g_0| \le \frac{c_0}{3}$, $|f - g_0| \le \frac{2}{3}c_0$

analogicznie konstruujemy $g_1, g_2, \ldots$ za f biorąc $f - g_0 - \ldots - g_n$, wtedy

$|g_n| \le \frac{2^n c_0}{3^{n+1}}$, $|f - g_0 - \ldots - g_n| < \le \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} c_0$

niech $h_n = g_0 + \ldots + g_n$

$|h_n - h_m| = |\sum_{n=1}^{m} g_n| \le \sum_{n=1}^{m} |g_n| \le \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^n c_0$ - jest ciągiem Cauchy'ego w metryce zbieżności jednostajnej funkcji ciągłych i ograniczonych

zatem $h(x) := \lim_{n\to\infty} h(x)$ ograniczona i ciągła, spełnia teze

Dla abstrakcyjnych przestrzeni topologicznych mamy tą samą definicję zbioru zwartego, co dla przestrzeni metrycznych

Twierdzenie:

Skończona suma zbiorów zwartych jest zwarta

Twierdzenie

Zamknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty

jeżeli $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ - otoczka S - zamkniętego, $S \subseteq X$, gdzie X zwarty, to

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{X/S\}$ jest otwartą otoczką X

Lemat:

Niech X - przestrzeń Hausdorffa, S - zwarty podzbiór X, wtedy

$\forall x \in X/S \ \exists O_1, O_2 \in T \quad x \in O_1, O_1 \cap O_2 = \emptyset, S \subseteq O_2$

Twierdzenie:

Zwarty podzbiór przestrzeni Hausdorffa jest zamknięty

Twierdzenie:

Zwarta przestrzeń Hausdorffa jest normalna

niech S_1, S_2 zamknięte, wtedy S_1, S_2 są zwarte

weźmy $x \in S_1$, niech $O_{1x}, O_{2x} \in T$, że $x \in O_{1x}$, $S_2 \subseteq O_{2x}$, $O_{1x} \cap O_{2x} = \emptyset$

$\{\bigcup_{x\in S_1} O_{x1}\}$ jest otwartą otoczką S_1

niech $O_{x_1 1}, \ldots O_{x_n 1}$ otwarta otoczka S_1, wtedy $S_2 \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} O_{x_k 2}$ oraz $\bigcup_{k=1}^{n} O_{x_k 1} \cap \bigcap_{k=1}^{n} O_{x_k 2} = \emptyset$

Twierdzenie

Jeżeli X zwarty $f: X \to Y$ ciągła, to $f(X)$ zwarty

Twierdzenie

Jeżeli $f: X \to Y$ iniekcja, ciągła, X zwarty, Y jest przestrzenią Hausdorffa, to f jest izomorfizmem między X a $f(X)$

niech O - otwarty w X, zatem X/O zamknięty czyli zwarty

wtedy $f(X/O) = f(X)/f(O)$ - zwarty, zatem zamknięty

Definicja

$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest jednakowo ciągła jeżeli $\forall x\ \forall \varepsilon>0\ \exists O$ - otoczenie x $\forall \alpha\ \forall y\in O\ |f_\alpha x - f_\alpha y| < \varepsilon$

Twierdzenie Arzela - Ascoliego

Niech (X,T) zwarta przestrzeń topologiczna, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ absolutnie ograniczone i jednakowo ciągłe.
Istnieje wtedy podciąg $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jednostajnie zbieżny na X

dowód:

weźmy $k\in\mathbb{N}$, niech $x\in X$ oraz O_x taki, że $\forall y\in O_x\ \forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(x)-f_n(y)|<\frac{1}{k}$

$\{O_x\}_{x\in X}$ zatem niech $x_{k1},\dots,x_{km_k}$, że $X=\bigcup_{i=1}^{m_k} O_{x_{km_i}}$

niech $x_{s_1}, x_{s_2},\dots$ wyliczenie punktów skonstruowanych jak wyżej dla wszystkich k

$\{f_n(x_{s_1})\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony, zatem jest ma podciąg zbieżny $f_{n_s}(x_{s_1})$

$\{f_{n_s}(x_{s_1})\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony, zatem znowu znajdziemy podciąg zbieżny

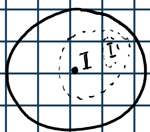
kontynuując w ten sposób mamy podciąg zbieżny dla każdego x_{jmi}

dla wygody oznaczmy ten podciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, niech $x\in X$, x_{ki} taki, że $x\in O_{ki}$ oraz $k<\frac{\varepsilon}{3}$

ponieważ x_{si}, że $k<\frac{\varepsilon}{3}$ jest skończenie wiele, zatem $\exists N\ \forall n>N\ \forall x$

$|f_n(x)-f_m(x)| \le |f_n(x)-f_n(x_{ki})| + |f_n(x_{ki})-f_m(y)| \le |f_n(x)-f_n(x_{ki})| + |f_n(x_{ki})-f_m(x_{ki})| + |f_m(x_{ki})-f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$

zatem f_n jest zbieżny w metryce ciągłości jednostajnej



Definicja

$(X,\mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią lokalnie zwartą jeżeli $\forall x\in X\ \exists \mathcal{O}\in\mathcal{T}$, że $x\in\mathcal{O}$ oraz $\overline{\mathcal{O}}$ jest zwarty

Twierdzenie

Niech $(X,\mathcal{T})$ lokalnie zwarta przestrzeń Hausdorffa

Jeżeli weźmiemy pewny element $\notin X$, oznaczony ∞, $Y=X\cup\{\infty\}$, to istnieje jedyna topologia $\mathcal{S}$ Y, że topologia indukowana na X jako podprzestrzeń Y jest zgodna z $\mathcal{T}$ oraz Y jest zwarty

dowód:

niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną zbiorów, takich, że

1° $\{\mathcal{O}:\mathcal{O}\in\mathcal{T}\}$

2° $\{S:\infty\in S,\ X/S \text{ jest zwarty}\}$

a.) $\mathcal{S}$ jest topologią na Y, bo:

- $\emptyset\in\mathcal{S}$, $X/Y=\emptyset$ zwarty w X, zatem $Y\in\mathcal{S}$
- niech $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\mathcal{S}$

  jeśli $\forall\alpha\ \infty\notin A_\alpha$, to $\bigcup\limits_{\alpha\in A}A_\alpha$ otwarty podzbiór X

  jeżeli $\exists\alpha_0\ \infty\in A_{\alpha_0}$, to $X/\bigcup\limits_{\alpha\in A}A_\alpha=\underbrace{(X/A_{\alpha_0})}_{\text{zwarty}}\cap\bigcap\limits_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\neq\alpha_0}}(X/A_\alpha)$ ← zamknięty jest zwarty, bo X - przestrzeń Hausdorffa
- niech $\{A_k\}_{k=1}^n$ podrodzina $\mathcal{S}$

  jeśli $\forall k\ \infty\in A_k$, to $X/\bigcap\limits_{k=1}^n A_k=\bigcup\limits_{k=1}^n X/A_k$ zwarty w X, !

  ∞ $n\neq\infty$

  jeśli $\exists k\ \infty\notin A_k$, to $\bigcap\limits_{k=1}^n A_k$ otwarty w X

b.) niech $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ otwarta otoczka Y

  weźmy α_0 taki, że $\infty\in A_{\alpha_0}$, wtedy Y/A_{α_0} zwarty, zatem ma skończoną podotoczkę C, ale

  $Y\subseteq C\cup\{A_{\alpha_0}\}$

c.) niech $x\in X$, weźmy $\mathcal{O}\in\mathcal{T}$ że $x\in\mathcal{O}$ i $\overline{\mathcal{O}}$ zwarty wtedy $\infty\in Y/\overline{\mathcal{O}}$ oraz $\mathcal{O}\cap Y/\overline{\mathcal{O}}=\emptyset$

d.) niech $\mathcal{S}'$ - inna topologia spełniająca założenia, weźmy $\mathcal{O}\in\mathcal{T}$

  $\{\infty\}$ jest zamknięty w $\mathcal{S}'$, zatem $X=Y/\{\infty\}\in\mathcal{S}'$

  jeżeli $\mathcal{O}\in\mathcal{T}$ istnieje S - otwarty w $\mathcal{S}'$, że $\mathcal{O}=S\cap X\in\mathcal{S}'$

  jeśli $U\in\mathcal{S}'$, że $\{\infty\}\in\mathcal{S}$, to Y/U jest zwarty w $(X,\mathcal{T})$, czyli X/U zamknięty w $\mathcal{S}'$, zatem $U\in\mathcal{S}'$

  mamy zatem, że $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{S}'$

  $Id:(Y,\mathcal{S}')\to(Y,\mathcal{S})$ jest ciągła, "1-1" oraz "na", zatem jest homeomorfizmem

Definicja

Uzwarceniem przestrzeni $(X,\mathcal{T})$ nazywamy $(Y,\mathcal{S})$ taką, że $(X,\mathcal{T})$ jest homeomorficzna z gęstą podprzestrzenią $(Y,\mathcal{S})$

Definicja

Mówimy, że (X,T) jest spójna jeżeli nie istnieją takie U,V - jednocześnie otwarte i zamknięte, że $U \cup V = X$ oraz $U \cap V = \emptyset$

Równoważnie możemy powiedzieć że nie istnieje U, że U jest otwarty i zamknięty oraz $U \neq \emptyset$ i $U \neq X$

Powiemy że $S \subseteq X$ jest spójny jeżeli S jest spójny w topologii relatywnej na S

Twierdzenie:

Jeśli f ciągła na spójnej przestrzeni X, to $f(X)$ jest spójny

Twierdzenie

Jeżeli $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rodzina zbiorów spójnych, że każde dwa mają niepusty przekrój, wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ jest spójny

dowód:

niech U jednocześnie otwarty i zamknięty, BSO zał, że $U \neq \emptyset$

niech $x_0 \in U$ oraz α_0 taki, że $x \in E_{\alpha_0}$ wtedy $U \cap E_{\alpha_0}$ jest zamknięty i otwarty w E_{α_0}, zatem $U \cap E_{\alpha_0} = E_{\alpha_0}$. Dla dowolnego $\beta \in A$ $E_\beta \cap E_{\alpha_0}$ jest niepusty zatem przeprowadzając podobne rozumowanie $E_\beta \cap F = E_\beta$, czyli $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \subseteq U$, stąd $U = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$

Definicja

$C(x)$ oznaczamy sumę wszystkich zbiorów spójnych zawierających x

Twierdzenie

$\forall x,y$ $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ lub $C(x) = C(y)$

Twierdzenie

Każdy odcinek na $\mathbb{R}$ jest spójny

Definicja

Składową spójności punktu x nazywamy sumę zbiorów spójnych, zawierających x i oznaczamy $C(x)$

zad.9

niech E - spójny

weźmy U,V otwarte w $\overline{E}$, że $\overline{E} = U \cup V$

wtedy $U \cap E$, $V \cap E$ otwarte w E, czyli jeden z nich np $U \cap E = \emptyset$

$U = W \cap \overline{E}$ dla pewnego W otwartego w X

ponieważ W jest rozłączny z E, W jest rozłączny z $\overline{E}$, stąd $U = \emptyset$

jeżeli $C(x)$ jest składową spójności, to $\overline{C(x)}$ jest spójny, ale $C(x) \subseteq \overline{C(x)}$, stąd $\overline{C(x)} \subseteq C(x)$, zatem $C(x)$ zamknięty

Definicja

Łukiem między x_1, a x_2 nazywamy $f:[0,1] \to X$ ciągłą, że $f(x_1)=0$, $f(x_2)=1$

Mówimy, że X jest spójna łukowo jeżeli $\forall x_1, x_2 \in X$ istnieje łuk między x_1, a x_2

Lemat

Istnienie łuku między punktami jest relacją równoważności

Twierdzenie

Przestrzeń spójna łukowo jest spójna

Twierdzenie

Składowa spójności punktu x jest zbiorem wszystkich łuków, które można poprowadzić z x

zad. 4

niech X lokalnie łukowo spójna, $x \in X$, $C(x)$ - składowa spójności, $S(x)$ - składowa łukowej spójności

$S(x) \subseteq C(x)$, ponieważ przestrzeń łukowo spójna jest spójna

$C(x)$ jest otwarty, ponieważ $\forall y \in C(x)$ $\exists D$-otoczenie y, że D jest łukowo spójny

$C(x)^c$ jest otwarty z argumentu jak wyżej

ponieważ $C(x)$ jest spójna $C(x) \subseteq S(x)$, mamy zatem $C(x) = S(x)$

zad. 5b

niech $x \in X$, V - otoczenie x

niech $C(x)$ - składowa spójności x w V

wtedy $S(x)$ jest otwarty, oraz $S(x)$ lokalnie spójny łukowo, zatem

jeśli x - składowa spójności x w $S(x)$, to $S(x) = C(x)$, tzn $S(x)$ jest otwarty i spójny

Definicja

Dla przestrzeni topologicznych $(X_1,T_1),\dots,(X_n,T_n)$ definiujemy topologię na $X_1\times\dots\times X_n$ jako zgenerowaną przez zbiory postaci $O_1\times\dots\times O_n$, gdzie $O_1\in T_1,\dots,O_n\in T_n$

Twierdzenie

Naturalna topologia na $X_1\times\dots\times X_n$ jest najmniejszą topologią dla której wszystkie rzuty na współrzędne są ciągłe

Twiedzenie

Rzut π_i na i-tą współrzędną jest homeomorfizmem między X_i a $\pi_i(X)$

Twierdzenie

Dla przestrzeni topologicznej E $f: E\to X_1\times\dots\times X_n$ jest ciągła $\iff \forall_{1\le j\le n}\ \pi_j\circ f$ jest ciągła

Twierdzenie

Jeżeli $X_1,\dots,X_n$ przestrzenie Hausdorffa, to $X_1\times\dots\times X_n$ jest przestrzenią Hausdorffa

Twierdzenie

Jeżeli $X_1,\dots,X_n$ są spójne łukowo, to $X_1\times\dots\times X_n$ jest spójna łukowo

Twierdzenie

Jeżeli $X_1,\dots,X_n$ spójne, to $X_1\times\dots\times X_n$ spójna

dowód:

niech O - niepusty, otwarty i zamknięty w $X_1\times\dots\times X_n$

zał, że $(x_1,\dots,x_n)\in X_1\times\dots\times X_n$, $(y_1,\dots,y_n)\in O$

$X_1\times\{x_2\}\times\dots\times\{x_n\}$ jest spójna, oraz $O\cap X_1\times\{y_2\}\times\dots\times\{y_n\}$ jest otwarty i zamknięty, czyli $(x_1,y_2,\dots,y_n)\in O$

powtarzając tą procedurę mamy, że $(x_1,\dots,x_n)\in O$

Lemat

X jest zwarty $\iff$ każda otoczka X zawarta w bazie ma skończoną podotoczkę

Twierdzenie Tychonoffa

Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ zwarte, to $X_1 \times \dots \times X_n$ zwarta

dowód: pokażemy dla $X_1 \times X_2$

niech $\mathcal{C}$ - otoczka $X_1 \times X_2$, ustalmy $z \in X_2$

istnieje skończona podotoczka $\{U_i \times V_i\}_{i=1}^{n}$ zbioru $X_1 \times \{z\}$, że z $\forall_i$ $z \in V_i$, zdefiniujmy $V(z) = V_1 \cap \dots \cap V_n$

$\{V(z) : z \in X_2\}$ jest otwartym pokryciem X_2, ponieważ X_2 jest zwarty znajdziemy $\{V(z_i)\}_{i=1}^{m}$,

będące pokryciem V_2, z tego wynika, że znajdziemy skończoną otoczkę w zbiorze $\mathcal{C}$

zad.1

niech $E_1, \dots, E_n$ zamknięte

$(E_1 \times \dots \times E_n)^c = \bigcup_{i=1}^{n} (X_1 \times \dots \times E_i^c \times \dots \times X_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi^{-1}(E_i^c)$ jest otwarty

wtedy $E_1 \times \dots \times E_n$ zamknięty

zad.2

E_1, E_2 regularne

niech $F \subseteq E_1 \times E_2$ zamknięty

F^c jest otwarty zatem $F^c = \bigcup_{\alpha \in A} O_{1\alpha} \times O_{2\alpha}$, gdzie $O_{i\alpha}$ otwarte w E_i

wtedy $F = \bigcap_{\alpha \in A} (O_{1\alpha} \times O_{2\alpha})^c$, niech $x \notin F$

$\exists \alpha$ $x \notin (O_{1\alpha} \times O_{2\alpha})^c$ czyli $x \in O_{1\alpha} \times O_{2\alpha}$

mamy, że $\exists V_i$, że $x_i \in V_i$ oraz $\overline{V_i} \subseteq O_{i\alpha}$

wtedy $x \in V_1 \times V_2$ oraz $F \subseteq (\overline{V_1} \times \overline{V_2})^c$ zatem jest regularna

zad.4a

niech $X_1 \times X_2$ regularna, weźmy $x_1, x_1' \in X_1$ $x_1 \neq x_1'$ oraz $x_2 \in X_2$

istnieją otwarte V_1, V_2, U_1, U_2, że $(x_1, x_2) \in U_1 \times V_1$, $(x_1', x_2) \in U_2 \times V_2$ oraz $U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2$ rozłączne

wtedy U_1 i U_2 rozłączne otwarte zawierające odpowiednio x_1 i x_2

Aksjomat wyboru

Niech $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ takie, że $\forall_\alpha\ A_\alpha \neq \emptyset$, wtedy $\exists f\ \forall \alpha\ f(\alpha) \in E_\alpha$

$f(A)$ jest wtedy zbiorem zawierającym element z każdego E_α

Porządki

Relację $\leq$ na X taką, że:

$\forall_{x\in X}\ x \leq x$

$\forall_{x,y,z \in X}\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$\forall_{x,y}\ x\leq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$

nazywamy częściowym porządkiem

Jeżeli częściowy porządek spełnia:

$\forall_{x,y\in X}\ x \leq y \vee y \leq x$

to nazywamy go porządkiem liniowym

Element maksymalny i ograniczenie

$\exists x\ \forall y\ y \leq x$ to $x \leq y$ to mówimy, że x jest górnym ograniczeniem

jeżeli x jest jedynym górnym ograniczeniem, to x nazywamy elementem maksymalnym

Lemat Zorna

Następująca własność jest równoważna aksjomatowi wyboru:

Niech $\leq$ częściowy porządek na X

jeżeli każdy liniowy porządek na X ma ograniczenie górne to X ma element maksymalny

Twierdzenie

Każda przestrzeń liniowa ma bazę

dowód:

niech $\Upsilon = \{S \subseteq V : S$ liniowo niezależne$\}$

weźmy $\mathcal{S} \subseteq \Upsilon$, że $\mathcal{S}$ zawieranie na $\mathcal{S}$ jest porządkiem liniowym

niech $A = \bigcup\{S : S \in \mathcal{S}\}$, weźmy $v_1, \dots, v_n$ dowolne z A

$\exists S \in \mathcal{S}\ \forall i\ v_i \in S$, stąd $v_1, \dots, v_n$ liniowo niezależne stąd A jest elementem maksymalnym $\mathcal{S}$

mamy zatem, że Υ posiada element maksymalny B

niech $v \notin B$ $B \cup \{v\}$ musi być liniowo zależny, zatem v daje się zapisać jako

kombinację liniową wektorów z B, czyli B jest bazą

Definicja

$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{ f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha) : \forall \alpha \; f(\alpha)\in X_\alpha \}$ nazywamy produktem zbiorów $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$

zbiory postaci $\pi^{-1}(O_{\alpha_1})\cap \ldots \cap \pi^{-1}(O_{\alpha_n})$ gdzie O_{α_i} otwarty w X_{α_i}, $n\in\mathbb{N}$

stanowią bazę tzw. naturalnej topologii na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$

Definicja

Podbazą bazy B nazywamy zbiór S_B jeżeli $B = \{E_1\cap\ldots\cap E_n : \exists n\in\mathbb{N}, \forall i \; E_i \in S_B\}$

Twierdzenie Aleksandra o podbazie

jeżeli każde pokrycie X ze zbiorów podbazy ma skończone podpokrycie, to X jest zwarty

Szkic dowodu:

- zakładamy niewprost, że X nie jest zwarty, czyli istnieje pokrycie P, które nie ma skończonego podpokrycia, oznaczamy S_B jako podbazę
- podobnie jak przy bazie przestrzeni liniowej pokazać, że istnieje maksymalny w sensie zawierania zbiór M spośród pokryć zawierających P
- Zauważamy, że $M\cap S_B$ nie ma podpokryć X, zatem wystarczy pokazać, że $M\cap S_B$ pokrywa X
- przeprowadzamy dowód powyższego:

  niech $x\in X$ oraz $U\in P$, weźmy $V_1,\ldots,V_n \in S_B$, że $x\in V_1\cap\ldots\cap V_n \subseteq U$

  zał. niewprost, że $\forall i \; 1\le i\le n \; V_i\notin M$, wtedy $\forall i$ znajdziemy $W_1,\ldots,W_{m_i}\in M$, które z V_i są pokryciem X

  wtedy zbiory W_{ij} z $V_1\cap\ldots\cap V_n$ są pokryciem X - sprzeczność
- wnioskujemy, że $X \subseteq M\cap S_B$

Twierdzenie Tychonoffa

Jeżeli $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ zwarte, to $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ zwarta

dowód:

zał, że $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ nie jest zwarta, tzn istnieje pokrycie $\{O_\beta\}_{\beta\in B}$ ze zbiorów podbazy, bez skończonego podpokrycia, niech $\alpha_0\in A$

zauważamy, że $G_{\alpha_0} = \{\pi_{\alpha_0}(O_\beta) : \beta\in B\}$ jest pokryciem X_{α_0}

wybieramy $\beta_{\alpha_0 1},\ldots,\beta_{\alpha_0 n}$, że $\{\pi_{\alpha_0}(O_{\beta_{\alpha_0 i}})\}_{i=1}^{n}$ jest podpokryciem X_{α_0}

niech $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ takie, że $X_{\alpha_j} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} \{\pi_{\alpha_j}(O_{\beta_{\alpha_0 i}})\}$

dla każdego j konstruujemy $\beta_{\alpha_j m_1},\ldots,\beta_{\alpha_j n_j}$ jak przy α_0

wtedy $\{O_{\beta_{\alpha_j m_k}}\}$ są skończonym podpokryciem $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ - sprzeczność

zad. 6

niech $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ spójne

weźmy dowolny $x \in \prod X_\alpha$

zbiory S takie, że $\pi_\alpha(S) = \begin{cases} X_\alpha & \text{gdy } \alpha \in \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ x(\alpha) & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$

są homeomorficzne z $X_{\alpha_1} \times \dots \times X_{\alpha_n}$, zatem są spójne

ponieważ należy do nich x, zawierają się w $C(x)$

niech $z \in \prod X_\alpha$, istnieje $\mathcal{O} = \pi_{\beta_1}^{-1}(V_1) \cap \dots \cap \pi_{\beta_m}^{-1}(V_m)$ że $z \in \mathcal{O}$, biorąc

$\pi_\alpha(S_0) = \begin{cases} X_\alpha & \text{gdy } \alpha \in \beta_1, \dots, \beta_m \\ x(\alpha) & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$ mamy, że $S_0 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, czyli $C(x) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$

zatem $\overline{C(x)} = \prod X_\alpha$, ale $\overline{C(x)}$ jest zamknięty, czyli $C(x) = \prod X_\alpha$

$\prod X_\alpha$ jest spójna

zad. 9

1° pokazać, że $\prod S_\alpha \cup \{p\}$ jest zwarta

2° pokazać, że $\pi_\alpha^{-1}(S_\alpha)$ są zamknięte oraz mają niepuste skończone części wspólne

3° wywnioskować, że $\exists x \; x \in \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(S_\alpha) = \prod_{\alpha \in A} S_\alpha$

zad. 174

$\delta(A) = \sup(\{d(x,y) : x,y \in A\})$

$\overline{A} = \{x \in A : \forall r>0 \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$

weźmy $x,y \in \overline{A}$, $r>0$

$\exists z,w \in A \quad d(x,z)<r \ , d(w,y)<r$ z definicji $\overline{A}$

mamy, że $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y) \leq d(x,z)+ d(z,w)+d(w,y) < r+\delta(A)+r$

z dowolności r oraz x,y $\quad \delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$, ale $A \subseteq \overline{A}$ czyli $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$

stąd $\delta(A) = \delta(\overline{A})$

zad. 175

$a \in X$

niech $x_n \to x$ (tzn $d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

$f_a(x_n) - f_a(x) = d(x_n,a) - d(x,a) \leq d(x_n,x) + d(a,x) - d(x,a) = d(x_n,x)$

$f_a(x_n) - f_a(x) = d(x_n,a) - d(x,a) \geq d(x_n,a) - d(x,x_n) - d(x_n,a) = -d(x,x_n)$

$0 \leq |f_a(x_n) - f_a(x)| \leq d(x_n,a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

zatem $f_a(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_a(x)$

zad. 176

1° pokazujemy, że $T_1 \subseteq T_2$

niech $O_1 \in T_1$, $f \in O_1$

$\exists r \ B_{d_1}(f,r) \subseteq O_1$

teraz weźmy $B_{d_2}(f,r)$

$g \in B_{d_2}(f,r) \Rightarrow \sup_t |f(t)-g(t)|<r \Rightarrow \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt < \int_0^1 r\,dt = r$

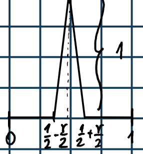
mamy zatem, że $B_{d_2}(f,r) \subseteq B_{d_1}(f,r) \subseteq O_1$ tzn O_1 jest otwarty w T_2

2° pokazujemy, że $T_2 \nsubseteq T_1$

weźmy $B_{d_2}(0,1)$ - otwarty w T_2

niech $r>0$

konstruujemy g w sposób następujący:



$\int_0^1 |0-g| = \left(\frac{1}{2}+\frac{r}{2} - \left(\frac{1}{2}-\frac{r}{2}\right)\right)\cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{2} < r \quad \in B_{d_1}(0,r)$

$\sup|0-g| = 1 \notin B_{d_1}(0,1)$

$B_{d_1}(0,r) \nsubseteq B_{d_1}(0,1)$, bo wyżej skonstruowane $g \notin B_{d_1}(0,1)$

z dowolności r $\quad B(0,1) \notin T_1$

zad. 177

$L \in C([0,1])$ $f_a(t) = at$

1° $\tau(d_1) \subseteq \tau(d_2)$

niech O d_1 - otwarty w L

$\exists U \in \tau_1$, że $L \cap U = O$, ale z poprzedniego zadania $U \in \tau_2$, zatem $O = U \cap L$ jest d_2-otwarty w L

2° $\tau(d_2) \subseteq \tau(d_1)$

niech O d_2-otwarty, weźmy $f \in O$

$\exists r$ $B_{d_2}(f_a, r) = \{g : d_2(f_a, g) < r\}$

$\sup_{t \in [0,1]} |at - bt| = \sup_{t \in [0,1]} t|a-b| = |a-b|$

$\int_0^1 |at - bt| dt = \int_0^1 t|a-b| dt = \frac{1}{2}t^2|a-b| \Big|_0^1 = \frac{|a-b|}{2}$

weźmy $B_{d_1}(f, \frac{r}{2})$

$g_b \in B_{d_1}(f, \frac{r}{2}) \Rightarrow \frac{|a-b|}{2} < \frac{r}{2} \Rightarrow |a-b| < r \Rightarrow g_b \in B_{d_2}(f_a, r)$

zatem $B_{d_1}(f_a, \frac{r}{2}) \subseteq B_{d_2}(f_a, r)$

mamy, że O jest d_1 - otwarty

zad. 178

definiujemy metrykę na $\mathbb{R}$ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

$B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, zatem singletony są otwarte

czyli baza musi zawierać singletony - stąd jest nieprzeliczalna

zad. 179

Przestrzeń jak wyżej - $\mathbb{R}$ ma przeliczalną bazę, zatem żaden podzbiór $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową nie może być homeomorficzny z przestrzenią z 1.78

zad. 180

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $S = \{a \in A : a \notin \overline{A \setminus \{a\}}\}$

sposób 1:

$\forall a \in S$ $\exists r_a$, że $B(a, r_a) \cap S = \{a\}$, wtedy

$B(a, \frac{r_a}{2})$ są parami rozłączne, a każda z nich zawiera punkt $q_a \in \mathbb{Q}^n$

$f: S \to \mathbb{Q}^n$ zdefiniowana $f(a) = q_a$ jest różnowartościowa, a $rng(f)$ jest przeliczalny

stąd S jest przeliczalny

zad. 181

a.) ciągła bijekcja z $(0,1]$

$f:(0,1] \to (0,2\pi]$ zdefiniowana $f(x)=2\pi x$ jest bijekcją

$g:(0,2\pi] \to S_1$ $g(x)=(\cos x, \sin x)$ jest ciągła

$g\circ f$ jest naszą ciągłą bijekcją

b.) $S_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową jest zamknięty

ponieważ S_1 jest ograniczony $\forall x,y \in S_1$ $d(x,y) \leq 2$

zatem z tw. Heine-Borela S_1 jest zwarty

$(0,1]$ nie jest zwarty, bo nie jest zamknięty

zwartość jest niezmiennikiem homeomorfizmu, zatem gdyby istniała ciągła bijekcja

z S_1 na $(0,1]$ to z a. mielibyśmy homeomorfizm

zad. 182

$(0,0,g(x)) + V_x = (\cos f(x), \sin f(x), 0)$

$V_x = (\cos f(x), \sin f(x), -g(x))$ zwarty, bo produkt przestrzeni zwartych jest zwarty

definiujemy $h: X \times [0,1] \to \bigcup_{x\in X} I_x$

$h(x,y) = (0,0,g(x)) + yV_x = (\cos f(x), \sin f(x), -yg(x))$

h ciągła na przestrzeni zwartej zatem $\bigcup_{x\in X} I_x = \operatorname{rng}(h)$ jest zwarty

zad. 183

$\Rightarrow$ niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zwarty, f ciągła

wtedy $f(A)$ zwarty, stąd zamknięty i ograniczony

$\Leftarrow$ niech $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ otwarte pokrycie A

ponieważ $f(x)=x$ ograniczona na A, to A jest ograniczony

pokażemy, że A jest zamknięty

zał, że A jest otwarty, wtedy $\exists l \notin A$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, że $x_n \to l$

definiujemy $g: A \to \mathbb{R}^n$ $g(x) = \frac{1}{d(x,l)}$

ewidentnie g nie jest ograniczona, stąd A jest zamknięty

dla podzbiorów $\mathbb{R}^n$ mamy, że jeżeli jest zamknięty i ograniczony to jest zwarty

stąd A jest zwarty

zad. 184 $\mathbb{R}^n / A$ jest nieograniczony

$\Rightarrow$ zał, że A zwarty, niech B zamknięty, rozłączny z A

zał, że $d(A,B)=0$ tzn $\exists \{x_n\} \subseteq A, \{y_n\} \subseteq B$ $d(x_n, y_n) \to 0$

A zwarty zatem znajdziemy x_{n_k} zbieżny do pewneg l w A

wtedy $d(l, y_{n_k}) \to 0$ - sprzeczność, bo B zamknięty, a $l \notin B$

$\Leftarrow$ założy że A nie jest zwarty

1° A nie jest zamknięty

$\exists l \in A^c, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ $x_n \to l$ wtedy $\{l\}$ zamknięty, rozłączny z A oraz $d(A, \{l\})=0$

2° A nie jest ograniczony ; jest zamknięty

wtedy A ma nieograniczony brzeg $B(A)$

niech $B_n(x_n, \frac{1}{n})$ - ciąg kul rozłącznych, że $x_n \in B(A)$

niech y_n, że $y_n \in B(x_n, \frac{1}{n}) \cap A^c$

wtedy $S=\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest zamknięty oraz $d(A,S)=0$

zad. 185

$Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$, $Z_2 = Z_1 \cup \mathbb{N}$

1° Zał, że $f: Z_1 \to Z_2$ homeomorfizm

$a_n := \frac{1}{n}$ $a_n \to 0$ $\Rightarrow$ $f(a_n) \to f(0)$ bo f ciągła

ponieważ $\forall n \neq m$ $f(a_n) \neq f(a_m)$ mamy sprzeczność, bo

w Z_0 zbieżne są tylko ciągi od pewnego miejsca stałe

2° niech $g: Z_1 \to Z_2$ homeomorfizm

$a_n := \frac{1}{n}$ $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\Rightarrow$ $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(0)$

$\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ zawiera całe Z_2 poza $f(0)$, zatem $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ jest nieograniczony

zatem nie może być zbieżny - sprzeczność

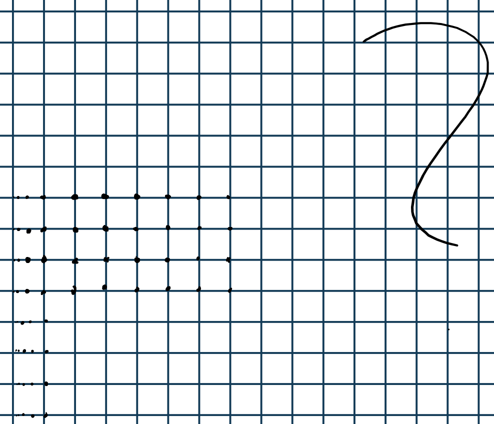
3° $Z_1 \not\approx Z_2$, $Z_2 \not\approx Z_3$, poniewa homeomorfizm jest relacją równoważności $Z_1 \not\approx Z_3$

zad. 186

$Z_0 = \mathbb{N}$, $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$, $Z_2 = Z_1 \cup Z_0$

$f: Z_0 \times Z_1 \to Z_0 \times Z_2$

$$f(n, \tfrac{1}{m}) = \begin{cases} (\frac{1}{2}n, \ \frac{1}{m}) & n \text{ parzyste} \\ (n, n) & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$



2	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{4}$
2	3	3	2

zad. 187

1° Niech X zupełna, wtedy

a.) jeżeli $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ przeliczalna rodzina otwartych zbiorów gęstych w X, to $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n}$ gęsty w X

b.) jeżeli $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ przeliczalna rodzina zbiorów nigdzie gęstych w X, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ ma puste wnętrze

warunki a i b są równoważne

2° X niepusta i przeliczalna przestrzeń metryczna zupełna

niech a_n - wyliczenie elementów z X

$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}} = X$, ale X nie ma pustego wnętrza, zatem z b.) $\exists n$ $\{a_n\}$ nie jest nigdzie gęsty

tzn $\overline{\{a_{n_0}\}} = \{a_n\}$ ma niepuste wnętrze, więc $\exists r$ $B(a_{n_0}, r) \subseteq \{a_n\}$, czyli $\exists r$ $\{a_n\}$ $B(a_{n_0}, r) \cap X = \{a_{n_0}\}$

mamy zatem, że a_{n_0} jest punktem izolowanym

zad. 188

a.) jeżeli (X, d) zupełna, $T: X \to X$, że $\exists c \in (0,1)$ $\forall x,y \in X$ $d(Tx, Ty) \le c\,d(x,y)$

to $\exists$ jedyny $x \in X$ $T(x) = x$

b.) zał, że $\exists r > 1$ $\forall x,y \in X$ $d(Tx, Ty) \ge r\,d(x,y)$

$x \neq y \Rightarrow d(Tx, Ty) \ge r\,d(x,y) \Rightarrow d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow Tx \neq Ty$ - iniekcja

ponieważ $\operatorname{dom} T = \operatorname{rng} T$, T jest suriekcją, bo jest iniekcją

zatem T^{-1} istnieje

niech $\rho(x,y) = d(Tx, d\,Ty)$

$\forall x,y$ $\rho(T^{-1}x, T^{-1}y) = d(x,y) \le \frac{1}{r} d(Tx, Ty) = \frac{1}{r} \rho(x,y)$

Łatwo pokazać, że ρ jest metryką oraz, że (X, ρ) zupełna

wtedy T^{-1} jest zwężające, zatem istnieje jedyny x, że $T^{-1}x = x$, czyli $Tx = x$ musi być jedyny

zad. 189

$\Rightarrow$ zał, że $X(A)$ zupełny

1° zał niewprost, że $X(A)$ nie jest ograniczony

BSO $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, że $x_n \to \infty$

$f_n(x) = -\frac{1}{x_n} x + 1$ - równanie odcinka x_n

$f_n(1) = -\frac{1}{x_n} + 1$

$z_n = (f_n(1), 1) \subseteq X(A)$ oraz $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (1,1)$, ale $(1,1) \in X(A)$

stąd $X(A)$ nie jest zupełna - sprzeczność

2° jeżeli $X(A)$ nie jest zamknięty, to znajdziemy $\{x_n\} \subseteq X(A)$ zbieżny do pewnego $x \notin X(A)$

stąd sprzeczność

$\Leftarrow$ zwarty podzbiór $\mathbb{R}^2$ jest zamknięty, a zamknięty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest zupełny

zad. 190

Podzbiory $\mathbb{R}^2$ są spójne $\Leftrightarrow$ są łukowo spójne

ewidentnie $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$ $X(A)$ jest spójny ($x, y \in A$, prowadzimy łuk z x do $(0,1)$ oraz z $(0,1)$ do y)

$\Leftarrow$ niech BSO $x \in A \cap \overline{B}$

wystarczy pokazać , że $B \cup \{x\}$ jest spójny

niech U - niepusty otwarty i zamknięty w $B \cup \{x\}$

Wtedy $U \cap B$ otwarty i zamknięty w B , czyli

$U \cap B = B \vee U \cap B = \emptyset$, bo B spójny

1° $U \cap B = B$, jeżeli $x \notin B$, to $\{x\}$ otwarty w B - sprzeczność

bo $\forall r$ $B(x,r) \cap B \neq \emptyset$, czyli $U = B \cup \{x\}$

2° $U \cap B = \emptyset$, to $U = \{x\}$ - otwarty - sprzeczność

mamy , że $U = B \cup \{x\}$, zatem $B \cup \{x\}$ spójny

stąd $X(A) \cup X_-(B)$ spójny

$\Rightarrow$ zał , że $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$

niech $x \in A \times \{0\}$, wtedy $x \notin \overline{B} \times \{0\}$ tzn $\exists r_x$, że $B(x, r_x) \cap B \times \{0\} = \emptyset$

, weźmy $z = (z_1, z_2) \in X(A)$, że $z_2 > 0$, wtedy $B(z, \frac{z_2}{2}) \cap X_-(B) = \emptyset$

wtedy $\bigcup_{x \in A \times \{0\}} B(x, \frac{r_x}{2}) \cup \bigcup_{\substack{z \in X(A) \\ z_2 > 0}} B(z, \frac{z_2}{2})$ otwarty , zawierający $X(A)$

analogicznie konstruujemy otwarty , zawierający $X_-(B)$

ponieważ braliśmy $\frac{r_x}{2}$, zamiast r_x , zbiory będą rozłączne

zad. 190

jeżeli $X \simeq Y$, a f homeomorfizm , to $\forall x$ $f|_{X/\{x\}}$ jest homeomorfizmem

między $X/\{x\}$, a $Y/\{f(x)\}$

stąd jeśli $[0,1] \sim \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

, to $\{(x,y) : x^2+y^2=1\} / \{f(\frac{1}{2})\}$ nie jest spójny , bo $[0,1]/\{\frac{1}{2}\}$ nie jest spójny

zad. 191

zał. że istnieje ciągła bijekcja f z $(0,1)$ na okrąg jednostkowy O

niech $A_n := (\frac{2}{n}, 1-\frac{2}{n})$, wtedy $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \ldots$ oraz $(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

wtedy $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)$, gdzie $f(A_1) \subsetneq f(A_2) \subsetneq f(A_3) \ldots$

ponieważ f jest bijekcją $\forall n$ $f(A_n)$ jest otwarty

czyli istnieje skończone podpokrycie O ze zbiorów $\{f(A_n)\}$ - sprzeczność bo $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie mają skończonego podpokrycia $(0,1)$

zad. 192

$Z_0 = \{\frac{1}{i} : i \in \mathbb{N}_+\}$, $Z_1 = \{\frac{1}{i} : i \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$

1° $Z_0 \times (0,1) \not\approx Z_1 \times (0,1)$

$S := \{0\} \times (0,1) \subseteq Z_1 \times (0,1)$

zał, że f - homeomorfizm, wtedy

$f(S)$ jest spójny, zatem $\exists n_0$ $f(S) \subseteq \{\frac{1}{n_0}\} \times (0,1)$

czyli $f(S) = \{\frac{1}{n_0}\} \times I_S$, gdzie I_S - przedział

ponieważ przedziały zamknięte i półotwarte nie są homeomorficzne z $(0,1)$, to $\exists (a,b)$ $I_S = (a,b)$

$\left(n_0 - \frac{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0-1}}{2}, n_0 + \frac{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1}}{2}\right) \times I_S \cap Z_1 \times (0,1) = f(S)$, zatem $f(S)$ jest otwarty w dziedziczonej topologii

czyli $f^{-1}(f(S)) = S$ otwarty - sprzeczność, bo nie znajdziemy otwartego U, że $U \cap Z_1 \times (0,1) = S$

2° $Z_1 \times (0,1) \not\approx Z_0 \times [0,1]$

działa identyczne rozumowanie co w 1°

3° $Z_0 \times (0,1) \not\approx Z_0 \times [0,1]$

każda składowa spójności $Z_0 \times (0,1)$ jest otwarta, a w $Z_1 \times (0,1)$ zamknięta

4° $Z_1 \times I$ jest zwarta, w przeciwieństwie do każdej innej (produkt przestrzeni zwartych)

192

niech $a, b \in \mathbb{R}^2 / A$

dla dowolnego $r \geq \|a-b\|$ a, b leżą na okręgu o promieniu r, tworząc łuk

takich rozłącznych łuków jest nieprzeliczalnie wiele stąd jeśli A - przeliczalny, to znajdziemy łuk łączący a z b

195

$\varphi: A \to B$ $\quad A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}: f(n) \le f(n+1)\}$ $\quad B = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}: f(n) < f(n+1)\}$

$\varphi(f)(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$

1° iniekcja

jeżeli $f_1 \ne f_2$, a $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}: f_1(n) \ne f_2(n)\}$, to $\sum_{i=1}^{n_0} f_1(i) \ne \sum_{i=1}^{n_0} f_2(i)$ zatem $\varphi(f_1)(n_0) \ne \varphi(f_2)(n_0)$, czyli $\varphi(f_1) \ne \varphi(f_2)$

2° bijekcja

$g \in B$ niech $f(n) = \sum_{i=1}^{n} g(i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(i)$, wtedy $\varphi(n) = g$

196

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \forall r \in \mathbb{R}\ \exists x_1, x_2$ $\quad f^{-1}(r) = \{x_1, x_2\}$

zał. że istnieje taka funkcja ciągła

niech $y \in \mathbb{R}$ oraz a, b, że $f(a) = f(b) = y$

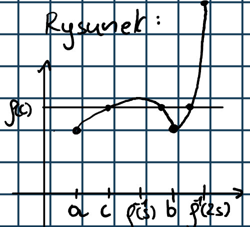
BSO $\exists t\ rng(f|[a,b])$ $t > y$, wtedy $s := \sup(rng f[a,b])$ istnieje z ciągłości oraz $s > y$

f na $(a, f^{-1}(s))$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między y oraz s

podobnie na $(f^{-1}(s), b)$ zatem dla $c \in (a, f^{-1}(s))$ $f(c)$ zostało już przyjęte dwa razy na (a, b)

BSO $f^{-1}(2s) > b$, wtedy $f(c)$ musi być przyjęte trzeci raz na $(b, f^{-1}(2s))$ - sprzeczność

Rysunek:



zad. 197

niech f ma w x_0 minimum lokalne

$\exists \varepsilon_{x_0}$ $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < f(x)$ niech $q_{x_0} \in \mathbb{Q}$, że $|x_0 - q_1| < \varepsilon$

niech $a_{x_0}, b_{x_0} \in \mathbb{Q}$, że $x_0 - \varepsilon < a_{x_0} < x_0 < b_{x_0} < x_0 + \varepsilon$

wtedy $g(x) = (a_x, b_x)$ jest różnowartościowa w $\mathbb{Q}^2$

198

niech a_n - liczba ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0,1,2,3\}$

$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \cdot b_n = 3a_n + 4^n - a_n = 4^n + 2a_n$ $\qquad$ b_n - liczba ciągów z nieparzystymi zerami

0 na n+1 miejscu

$b_n = 4^n - a_n$

$\{1,2,3\}$ na n+1 miejscu

sprawdzamy ciąg:

$\frac{1}{2}(4^{n+1} + 2^{n+1}) = \frac{1}{2}(4 \cdot 4^n + 2 \cdot 2^n) = 2 \cdot 4^n + 2^n = 4^n + 2\frac{1}{2}(4^n + 2^n) = 4^n + 2a_n$

zad. 199

$\mathbb{1}_{A_n} \overset{\text{punktowo}}{\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}} \mathbb{1}_A \iff \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = A$

$\Rightarrow$ mamy, że $\forall x \ \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_A(x)$

1° zał, że $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ tzn. $\forall m \exists n \geq m \ x \in A_n$. stąd $\mathbb{1}_{A_n}(x) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

ponieważ $\mathbb{1}_{A_n}(x)$ zbieżny, to $\mathbb{1}_{A_n}(x) \overset{n\to\infty}{\to} 1 = \mathbb{1}_{A_n}(x)$, stąd $x \in A$ oraz $\exists m \forall n \geq m \ x \in A_n$, czyli $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$

2° ponieważ $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ mamy równość

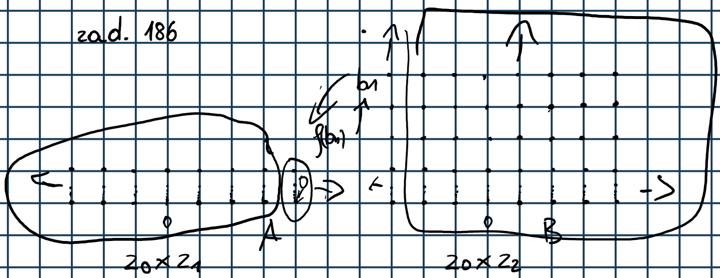
3° jeżeli $x \in A$, to $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$, czyli $\exists m \forall n \geq m \ x \in A_n$, stąd $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$

$\Leftarrow$

1° jeżeli $x \in A$, to $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$, czyli $\exists m \forall n \geq m \ x \in A_n$, tzn $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$

2° jeżeli $x \notin A$, to $x \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, czyli $\exists m \forall n \geq m \ x \notin A_n$, tzn $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$

zad. 186



f nie istnieje

fA : A

$f(n, \frac{1}{m}) = \begin{cases} f(a, \frac{1}{b}) \\ f(c, d) \end{cases}$

$a_n \to f(a_n)$

$b_n \Rightarrow f^{-1}(b_n)$