Boundary Element Method (BEM)

二维自由场问题

对于 $\overrightarrow{r}'$ 处点源，在 $\overrightarrow{r}$ 点处的基本解为

$$G(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}')=\frac{1}{2\pi}ln|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|$$

$$H(\vec{r},\vec{r}')=\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n}=\frac{1}{2\pi}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2}$$

声势的相关式子

$$p=\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}=jk\rho_0c_0\Phi$$

$$\vec{v}=-\nabla\Phi$$

$v_n(\vec{r}')=-\dfrac{\partial\Phi(\vec{r'})}{\partial n}$ (这个才是正确的，但是下面为了式子好看是用的 $v_n(\vec{r}')=\dfrac{\partial\Phi(\vec{r'})}{\partial n}$)

三维自由场问题

对于 $\overrightarrow{r}'$ 处点源，在 $\overrightarrow{r}$ 点处的基本解为

$$G(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}')=\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$H(\vec{r},\vec{r}')=\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n}=\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-jk\right)\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

注意：$\vec{n}$ 为源点 $\vec{r}'$ 处的法向矢量

在 $\overrightarrow{r}$ 点处的声势 $\Phi(\vec{r})$

$$\Phi(\vec{r})=\iiint_V q(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}')d\vec{r}'+\iint_\Sigma G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial\Phi(\vec{r'})}{\partial n}-\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n}\Phi(\vec{r'})d\Sigma$$

其中第一项代表内部点源产生的声势,$q(\vec{r}')$ 为每秒体积流量，第二个积分可以大致理解为 Gv_nS ，代表面元上振动产生的声势

当声场内部无源时，

$$\Phi(\vec{r})=\iint_\Sigma G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial\Phi(\vec{r'})}{\partial n}-\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n}\Phi(\vec{r'})d\Sigma$$

使用 $v_n(\vec{r}')=\frac{\partial\Phi(\vec{r'})}{\partial n}, H(\vec{r},\vec{r}')$

则 $\Phi(\vec{r})=\iint_\Sigma G(\vec{r},\vec{r}')v_n(\vec{r}')-H(\vec{r},\vec{r}')\Phi(\vec{r'})d\Sigma$

对面 Σ 作离散化，得到N个面元 $\Sigma_j, j=1,2...N$

同时假设每一个面元上的声势为常数 Φ_j ，则振动速度也为常数 v_j

只考虑面元 Σ_j ，在 $\vec{r}$ 处的声势为：

$$\Phi_j(\vec{r})=(\int_{\Sigma_j}G(\vec{r},\vec{r}_j)d\Sigma_j)v_j-(\int_{\Sigma_j}H(\vec{r},\vec{r}_j)d\Sigma_j)\Phi_j$$

所有面元产生的声势叠加起来，在 $\vec{r}$ 处的声势为：

$$\Phi(\vec{r})=\sum_j(\int_{\Sigma_j}G(\vec{r},\vec{r}_j)d\Sigma_j)v_j-\sum_j(\int_{\Sigma_j}H(\vec{r},\vec{r}_j)d\Sigma_j)\Phi_j$$

这就是任意位置处声势的表达式

下面我们来考虑边界条件，通过边界条件算出边界上的声势和振速：

当 $\vec{r}$ 落在某一个面元 Σ_i 上而不是在空间中时，注意左边等式还要乘上一个 $\frac{1}{2}$ 的修正因子

$$\frac{1}{2}\Phi_i=\sum_j(\int_{\Sigma_j}G(\vec{r}_i,\vec{r}_j)d\Sigma_j)v_j-\sum_j(\int_{\Sigma_j}H(\vec{r}_i,\vec{r}_j)d\Sigma_j)\Phi_j$$

记 $G_{ij}=\int_{\Sigma_j}G(\vec{r}_i,\vec{r}_j)d\Sigma_j, H_{ij}=\int_{\Sigma_j}H(\vec{r}_i,\vec{r}_j)d\Sigma_j$， $i\neq j$

对于奇异积分（意为发散，比如指 $\frac{1}{|\vec{r}_-\vec{r}'|}=\frac{1}{|\vec{r}_i-\vec{r}_i|}$ 趋于无穷） G_{ii}, H_{ii} ：

有一些不同处理的方法，以NumCalc为例：

对 H_{ii}（一阶奇点）：将奇点作为边界的一部分来分割内部，各自可正常积分

对 G_{ii}（二阶奇点）：将积分范围分为边界和内部，边界上正常积分，内部的处理方式同 H_{ii}

这里很复杂，不妨先令 $H_{ii}=-0.5, G_{ii}=\frac{\Sigma_i}{4\pi r_c}, r_c$为奇点到$\Sigma_i$中心的距离 ，后续再来处理

则 $\frac{1}{2}\Phi_i=\sum_j G_{ij}v_j-\sum_j H_{ij}\Phi_j$

可以写为矩阵的形式,令`

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ . \\ \Phi_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad , v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_N \end{bmatrix}_{N\times 1}$$

则 $\frac{1}{2}\Phi = Gv - H\Phi$

则 $(H + \frac{1}{2}E)\Phi = Gv$

令 $H = H + \frac{1}{2}E$

则 $H_{N\times N}\Phi_{N\times 1} = G_{N\times N}v_{N\times 1}$ 为线性方程组，对于高阶的N直接求解算力消耗较大，需要使用FMM等方法来计算

考虑实际计算，流程大致如下：

1.给定模型曲面，分出N个面元 $\Sigma_j, j = 1, 2...N$

2.计算曲面边界上 $G_{ij} = \int_{\Sigma_j} G(\vec{r}_i, \vec{r}_j)d\Sigma_j, H_{ij} = \int_{\Sigma_j} H(\vec{r}_i, \vec{r}_j)d\Sigma_j$，$i \neq j$

$$G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}e^{-jk|\vec{r}_i - \vec{r}|}$$
$$H(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{\partial G(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}{\partial n_j} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}e^{-jk|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (-\frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - jk) \quad \vec{n}_j \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

其实在分割足够小时就是 $G_{ij} = G(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\Sigma_j, H_{ij} = H(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\Sigma_j$，$i \neq j$

和奇异积分 G_{ii}, H_{ii}

得到 N x N 的矩阵 G 和 H

3.求解线性方程组 $H\Phi = Gv$，注意此处是 $H = H + \frac{1}{2}E$

要求给定边界条件 $a\Phi + bv = 0$，可分出三类边界条件

得到边界上的 Φ和v

4.使用空间任意位置处声势表达式来计算

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_j(\int_{\Sigma_j} G(\vec{r}, \vec{r}_j)d\Sigma_j)v_j - \sum_j(\int_{\Sigma_j} H(\vec{r}, \vec{r}_j)d\Sigma_j)\Phi_j$$

注意此时不能用 G_{ij}和H_{ij} 来代替上面的积分，因为此时 $\vec{r}$ 为任取的

已转化为代码：https://github.com/IN03X/Boundary-Element-Method

目前代码中的奇异积分为AI给的一种特殊情况，若后续影响较大的话再来修改，优化算法MLFMM同理