++13

Castor

February 3, 2023

1 Induktion

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

Basfall: n = 1
$VL = 1^2 = 1$
$HL = 1(1+1)(2*1+1)/6 = 6/6 = 1$
$VL = HL$

Induktionssteg: Antag att f(p) är sant för något heltal p.
$f(p+1) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$

$VL = \frac{6+13p+9p^2+2p^3}{6} = HL$

$$g(n) = \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2 \tag{2}$$

Basfall: n = 1
$VL = 2*1-1 = 1$
$HL = 1^2 = 1$
$VL = HL$

Induktionssteg: Antag att g(p) är sant för något heltal p.
$g(p+1) = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$

$VL = p^2 + 2p + 1 = HL$

2 Iterativ korrekthet

Vi modifierar funktionen med en loop-invariant för att verifiera funktionens korrekthet:

```
double expIterative(double x, int n) {
    double res = 1.0;

    // Loop invariant: At the start of each iteration, res = x^i, where
        i is the number of completed iterations
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        res *= x;
        // Maintenance of the loop invariant: res is updated to be
            x^(i+1)
    }
    // Termination: At the end of the loop, res = x^n
    return res;
}
```

Tidskomplexiteten är O(n) eftersom vi gör totalt 5n+3 operationer. 2n+2 assignments, 1 return, n comparisons, n additions och n multiplications.

3 Rekursiv korrekthet

Här är ett bevis för korrektheten hos expRecursive-funktionen genom matematisk induktion:

Basfall (n = 1): När n är lika med 1 returnerar funktionen expIterative(x, 1), vilket är lika med x^1. Detta är det korrekta resultatet, så basfallet gäller.

Induktiv steg: Antag att funktionen returnerar det korrekta resultatet för n = k. Vi måste visa att den också returnerar det korrekta resultatet för n = k + 1.

I fallet där n = 2k returnerar funktionen expRecursive(x, k) * expRecursive(x, k). Genom den induktiva hypotesen returnerar båda dessa funktionanrop x^k, så deras produkt är $x^k * x^k = x^{2k}$, vilket är det korrekta resultatet för n = 2k.

I fallet där n = 2k + 1 returnerar funktionen expRecursive(x, k) * expRecursive(x, k + 1). Genom den induktiva hypotesen returnerar det första funktionanropet x^k och det andra anropet returnerar x^{k+1}. Deras produkt är $x^k * x^{k+1} = x^{2k+1}$, vilket är det korrekta resultatet för n = 2k + 1.

Eftersom funktionen returnerar det korrekta resultatet för både n = 2k och n = 2k + 1, följer det genom induction att funktionen returnerar det korrekta resultatet för alla värden av n.

Därför är expRecursive-funktionen bevisad att vara korrekt genom matematisk induktion.

Mästarsatsen:

a = 2 b = 2 d = 0

O(n)