Komplexitet och korrekthet

movitzs

Januari 2023

1 Induktion

1.1 a

Bevisa följande ekvation med induktion

$$\sum_{n}^{i=1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

Basfall då $n = 1$,

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1 = 1^2 \tag{2}$$

Induktionssteg: Antag att ekvationen stämmer för n, då måste likheterna nedan stämma

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \tag{3}$$

Förenkling av vänsterledet

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+4n+6)}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \tag{4}$$

Förenkling av högerledet

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{6(n^2+2n+1}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \tag{5}$$

Som man kan se via symbolerna ovan är $HL = VL$, därmed är

1.2 b

Bevisa följande ekvation med induktion

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2 \tag{6}$$

Basfall $n = 1$

$$\sum_{j=1}^{1} 2j - 1 = 2j - 1 = 1 = 1^2 = n^2 \tag{7}$$

Induktionssteg: Antag att ekvationen stämmer för n, då måste

$$\sum_{j=1}^{n+1} 2j - 1 = n^2 + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2 \tag{8}$$

Förenkling av vänsterledet

$$n^2 + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 \tag{9}$$

Förenkling av högerledet

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \tag{10}$$

därmed basta

2 Iterativ korrekthet

```
double expIterative(double x, int n) {
    double res = 1.0;

    // res = x^0
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // res = x * .. * x (i times) => x^(i)
        res *= x;
        // res = x * .. * x (i+1 times) => x^(i+1)
    }
    // res = x^n
    return res;
}
```

Time complexity: $\Theta(n)$

3 Rekursiv korrekhet

```
double expRecursive(double x, int n) {
    if (n <= 4) {
        return expIterative(x, n);
    }

    return expRecursive(x, n/2) * expRecursive(x, (n + 1)/2);
}
```

3.1 Bevis

Härifrån benämns expRecursive som G för läslighetetens skull.
Basfall: G är korrekt för $n \leq 4$ då det redan är bevisat via expIterative. Ytterligare fyra fall bevisas nedan, för säkerhets skull.

$G(5) = G(\lfloor \frac{5}{2} \rfloor) \cdot G(\lfloor \frac{6}{2} \rfloor) = x^2 \cdot x^3 = x^5$
$G(6) = G(\lfloor \frac{6}{2} \rfloor) \cdot G(\lfloor \frac{7}{2} \rfloor) = x^3 \cdot x^3 = x^6$
$G(7) = G(\lfloor \frac{7}{2} \rfloor) \cdot G(\lfloor \frac{8}{2} \rfloor) = x^3 \cdot x^4 = x^7$
$G(8) = G(\lfloor \frac{8}{2} \rfloor) \cdot G(\lfloor \frac{9}{2} \rfloor) = x^4 \cdot x^4 = x^8$

Induktions antagande: Antar att $G(i) = x^i$, för $8 < i < n, i \in \mathbb{N}$. Måste visa att $G(i+1) = x^{i+1}$.

Fall då $i = 2k, k \in \mathbb{N}$
$G(2k+1) = G(\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor) \cdot G(\lfloor \frac{2k+2}{2} \rfloor) = G(k) \cdot G(k+1) =$ "enligt I.A." $= x^k \cdot x^{k+1} = x^{2k+1}$

Fall då $i = 2k+1, k \in \mathbb{N}$
$G(2k+2) = G(\lfloor \frac{2k+2}{2} \rfloor) \cdot G(\lfloor \frac{2k+3}{2} \rfloor) = G(k+1) \cdot G(k+1) =$ "enligt I.A." $= x^{k+1} \cdot x^{k+1} = x^{2k+2}$

Applicerar mästarsatsen med $a = 2, b = 2$, $f(n) = \Theta(n^0)$ så att G har komplexiteten $\Theta(n)$