SF1626 Flervariabelanalys, bra formler

CHAPTER 1

SATSER, DEFINITIONER

Example 1.0.1 (När Jacobianen inte behövs!)

Om man behöver beräkna ytintegralen eller även flödesintegralen av en kurva så behöver man inte lägga till Jacobianen!

Till exempel: Om man vill beräkna ytan av kurvan som beskrivs som intersektionen av cylindern $x^2+y^2 \leq 1$ och ytan $x^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$, så kan parametrisera kurvan på sättet nedan:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x & = rcos(t) \\ y & = rsin(t) \\ z & = \sqrt{1 - r^2 cos^2(t)} \end{cases}$$

...$r \in [0, 1],\ \ t \in [0, 2\pi]$. Om man då behöver beräkna ytan så gör man det på sättet nedan:

$$\iint_{Y} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| drdt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| drdt$$

Lägg märke på att Jacobianen inte lades till! Detta på grund att vi **inte** transformerar en areaelement från en koordinatsystem till en annan - eftersom vi från första början hade parametriserat kurvan i koordinatsystemet vi behöver för att beräkna ytan. Mer info: [1] [2].

Sats 1.0.1 Gradientens definition

$$\nabla F(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{a} + t(e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n) - F(\vec{a}))}{t}$$

Definition 1.0.1: Tangentplan (linjär approximation) unmystified

I vissa uppgifter så kommer det att frågas om att bestämma en tangentplan i en viss punkt för en kurva som ges implicit, t.ex: $cos(2z)(x^2 + 3y^2 + z) = 0$, detta kan tolkas som en 3D kurva. Då tangentplanen i en punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, för en kurva $f = k$, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ges av:

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

..där $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ och $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$. I $\mathbb{R}^3$ så blir $\vec{x} = (x, y, z)$.

Observera att funktioner som $g(x, y) = z$ kan skrivas om implicit till $g(x, y) - z = 0$ för att använda denna metod.
Mer info: [1]

Sats 1.0.2 Orienteringsidentitet på **vektorfälts**integral

$$\ointctrclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r} = -\ointclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r} \iff \ointclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r} = -\ointctrclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r}$$

Mer info: [1]

Definition 1.0.2: Orientering på randkurvor och randytor

En rand**yta** sägs vara **positiv** orienterad om randytans normal pekar ifrån själva kroppen som randytan täcker. Tvärtom med negativ orientering på randyta.

En rand**kurva** sägs vara **positiv** orienterad om ytan som randkurvan täcker är åt vänstra sidan när man följer orienteringen på kurvan. Tvärtom med negativ orientering på randkurvan.

Sats 1.0.3 Inversa funktionssatsen

Om vi har en funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ och vi betecknar Jacobianen av f i punkten $\vec{a}$ som $Df(\vec{a})$, så är f inverterbar i närheten av punkten $\vec{a}$ om $Df(\vec{a})$ är inverterbar, d.v.s:

$$det(Df(\vec{a})) \neq 0$$

Dessutom så gäller identiteten:

$$D(f^{-1})(\vec{y}) = [Df(\vec{x})]^{-1}$$

..där $f(\vec{x}) = \vec{y}$

Mer info: [1]