

SF1626 Flervariabelanalys, bra formler

# CHAPTER 1

## SATSER, DEFINITIONER

### Example 1.0.1 (När Jacobianen inte behövs!)

Om man behöver beräkna ytintegralen eller även flödesintegralen av en kurva så behöver man inte lägga till Jacobianen!

**Till exempel:** Om man vill beräkna ytan av kurvan som beskrivs som intersektionen av cylindern  $x^2 + y^2 \leq 1$  och ytan  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ , så kan parametrisera kurvan på sättet nedan:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x &= r \cos(t) \\ y &= r \sin(t) \\ z &= \sqrt{1 - r^2 \cos^2(t)} \end{cases}$$

... $r \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Om man då behöver beräkna ytan så gör man det på sättet nedan:

$$\iint_Y \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| dr dt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| dr dt$$

Lägg märke på att Jacobianen inte lades till! Detta på grund att vi **inte** transformerar en areaelement från en koordinatsystem till en annan - eftersom vi från första början hade parametriserat kurvan i koordinatsystemet vi behöver för att beräkna ytan. Mer info: [1] [2].

### Sats 1.0.1 Gradientens definition

$$\nabla F(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\vec{a} + t(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)) - F(\vec{a})}{t}$$

### Definition 1.0.1: Tangentplan (linjär approximation) unmystified

I vissa uppgifter så kommer det att frågas om att bestämma en tangentplan i en viss punkt för en kurva som ges implicit, t.ex:  $\cos(2z)(x^2 + 3y^2 + z) = 0$ , detta kan tolkas som en 3D kurva. Då tangentplanen i en punkt  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , för en kurva  $f = k$ ,  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  ges av:

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

..där  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  och  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . I  $\mathbb{R}^3$  så blir  $\vec{x} = (x, y, z)$ .

**Observera** att funktioner som  $g(x, y) = z$  kan skrivas om implicit till  $g(x, y) - z = 0$  för att använda denna metod.

Mer info: [1]

### Sats 1.0.2 Orienteringsidentitet på vektorfältintegral

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = - \oint_{\gamma} F \cdot d\vec{r} \iff \oint_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = - \oint_{\gamma} F \cdot d\vec{r}$$

Mer info: [1]

### Definition 1.0.2: Orientering på randkurvor och randytor

En randyta sägs vara **positiv** orienterad om randytans normal pekar ifrån själva kroppen som randytan täcker. Tvärtom med negativ orientering på randyta.

En randkurva sägs vara **positiv** orienterad om ytan som randkurvan täcker är åt vänstra sidan när man följer orienteringen på kurvan. Tvärtom med negativ orientering på randkurvan.

### Sats 1.0.3 Inversa funktionssatsen

Om vi har en funktion  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  och vi betecknar Jacobianen av  $f$  i punkten  $\vec{a}$  som  $Df(\vec{a})$ , så är  $f$  inverterbar i närheten av punkten  $\vec{a}$  om  $Df(\vec{a})$  är inverterbar, d.v.s:

$$\det(Df(\vec{a})) \neq 0$$

Dessutom så gäller identiteten:

$$D(f^{-1})(\vec{y}) = [Df(\vec{x})]^{-1}$$

..där  $f(\vec{x}) = \vec{y}$

Mer info: [1]

### Definition 1.0.3: Linjärisering för en funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

Linjäriseringen av en funktion  $f$  i en punkt  $\vec{a}$  kan beskrivas på sättet nedan:

$$L(\vec{x})_{\vec{a}} = f(\vec{a}) + \nabla f_{\vec{a}} \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

**Definition 1.0.4: Differentierbarhet för funktioner  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$** 

Observera att differentierbarhet inte är samma sak som deriverbar! Differentierbarheten för funktionen  $f$  i en punkt  $\vec{a}$  definieras som:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - L(\vec{a} + \vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

..alltså att linjäriseringen för funktionen går mot det riktiga värdet av funktionen.

**Definition 1.0.5: Greens sats med alla villkor**

Låt  $D$  vara en sluten och begränsad (kompakt) mängd i  $\mathbb{R}^2$ , där randkurvan  $\gamma$  till  $D$  består av en eller flera stängda styckvis kontinuerligt deriverbara kurvor (*en. piecewise smooth*). Alltså att randkurvorna är deriverbara överallt förutom i vissa punkter, som kan tolkas som hörn till kurvorna. Randkurvorna ska då vara positivt orienterade med avseende på  $D$ . Låt vektorfältet  $F$  vara  $C^1$  i hela  $D$ , då gäller följande:

$$\oint_{\gamma} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

**Definition 1.0.6: Divergenssatsen (Gauss sats) med alla villkor**

Låt  $D$  vara en sluten och begränsad (kompakt) mängd i  $\mathbb{R}^3$ , där randytan  $S$  är stängd och positivt orienterad (normalen pekar ut från  $D$ ), samt styckvis glatt med enhetsnormalfältet  $\hat{N}$ . Låt också vektorfältet  $F$  vara  $C^1$  i hela  $D$ , då gäller följande:

$$\iiint_D \nabla \cdot F dV = \iint_S F \cdot \hat{N} dS$$

**Definition 1.0.7: Stokes sats med alla villkor**

Låt  $D$  vara en styckvis glatt yta i  $\mathbb{R}^3$  med randkurvan  $\gamma$ . Låt  $D$  ha enhetsnormalfältet  $\hat{N}$ . Låt randkurvan  $\gamma$  bestå av en eller flera stängda styckvis kontinuerligt deriverbara kurvor som är positivt orienterade med hänsyn till  $D$ . Låt vektorfältet  $F$  vara  $C^1$  och definierad på  $D$ , då gäller följande:

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times F) \cdot \hat{N} dS$$

## CHAPTER 2

## BEVIS, BEVISTEKNIKER

**Bevisteknik 2.0.1** Bevis på att  $D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{a})$ , (15/03/2022, fråga 6)

Låt  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  och  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Då kan vi definiera  $D_{\vec{u}}f(\vec{a})$  med ett gränsvärde på följande sätt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t}$$

Låt oss definiera  $g(t) = f(\vec{a} + t\vec{u})$ , då kan vi skriva gränsvärdet ovan som:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{dg}{dt}(0)$$

Det sista kan utvecklas vidare till:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{d}{dt} f(\vec{a} + t\vec{u}) \\ &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ &= \vec{u} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\ &= \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{a} + t\vec{u}) \end{aligned}$$

..när man sätter  $t = 0$  i det sista så får vi  $\vec{u} \cdot \nabla f(\vec{a})$ . Alltså **V.S.B!**

**Bevisteknik 2.0.2** Gradienten och nabla operatoren i polära koordinater (genom tillämpningen av kedjeregeln)

För att beräkna gradienten, så behöver vi en ortogonal koordinatsystem. I polära koordinater, brukar man definiera enhets-basvektorerna som beror på vinkeln  $\theta$  som:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos(\theta)\hat{e}_1 + \sin(\theta)\hat{e}_2 \\ \hat{\theta} &= -\sin(\theta)\hat{e}_1 + \cos(\theta)\hat{e}_2 \end{aligned}$$

..där  $\hat{e}_1$  och  $\hat{e}_2$  är enhets-basvektorerna i standard (Kartesiska) koordinatsystem.

Gradienten och nabla operatoren för en funktion  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  i termer av  $x$  och  $y$  definieras i termer av enhets-basvektorerna som:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_2 \implies \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_2$$

En funktion  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  i termer av  $r$  och  $\theta$  beror av  $x$  och  $y$  eftersom:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Därmed partiell derivering med avseende på  $x$  eller  $y$  på en funktion som är angiven i polära koordinater (beror på  $r$  och  $\theta$  som i sin tur beror på  $x$  och  $y$ ) kommer vara definierad på sättet nedan:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Detta enligt kedjeregeln.  $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$  kan då fås ut från definitionerna ovan, där  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  och  $\theta(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos(\theta)}{\sqrt{r^2}} = \cos(\theta) & \implies \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \cos(\theta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r} & \implies \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin(\theta)}{\sqrt{r^2}} = \sin(\theta) & \implies \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \sin(\theta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos(\theta)}{\sqrt{r^2}} = \frac{\cos(\theta)}{r} & \implies \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} \end{aligned}$$

Om vi följer definitionen för gradienten och nabla operatoren i standard koordinatsystemet och definitionerna av  $\frac{\partial}{\partial x}$  och  $\frac{\partial}{\partial y}$  för polära funktioner så får vi att:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left( \frac{\partial}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_2$$

Men vi vill använda de polära basvektorerna istället för  $\hat{\mathbf{e}}_1$  och  $\hat{\mathbf{e}}_2$ . Vi kan bryta ut  $\hat{\mathbf{e}}_1$  och  $\hat{\mathbf{e}}_2$  i termer av  $\hat{\mathbf{r}}$  och  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ :

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos(\theta) \hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \sin(\theta) \hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Då blir nabla operatoren i polära koordinater och med polära basvektorer:

$$\begin{aligned} \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r} \right) (\cos(\theta) \hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \left( \frac{\partial}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} \right) (\sin(\theta) \hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \dots \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Därmed gradienten för en funktion  $h$  i polära koordinater blir:

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$