SF1626 Flervariabelanalys, bra formler

CHAPTER 1

SATSER, DEFINITIONER

Example 1.0.1 (När Jacobianen inte behövs!)

Om man behöver beräkna ytintegralen eller även flödesintegralen av en kurva så behöver man inte lägga till Jacobianen!

Till exempel: Om man vill beräkna ytan av kurvan som beskrivs som intersektionen av cylindern $x^2+y^2 \leq 1$ och ytan $x^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, så kan parametrisera kurvan på sättet nedan:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x & = rcos(t) \\ y & = rsin(t) \\ z & = \sqrt{1 - r^2cos^2(t)} \end{cases}$$

...$r \in [0, 1]$, $t \in [0, 2\pi]$. Om man då behöver beräkna ytan så gör man det på sättet nedan:

$$\iint_Y \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| drdt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| drdt$$

Lägg märke på att Jacobianen inte lades till! Detta på grund att vi **inte** transformerar en areaelement från en koordinatsystem till en annan - eftersom vi från första början hade parametriserat kurvan i koordinatsystemet vi behöver för att beräkna ytan. Mer info: [1] [2].

Sats 1.0.1 Gradientens definition

$$\nabla F(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{a} + t(e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n) - F(\vec{a}))}{t}$$

Definition 1.0.1: Tangentplan (linjär approximation) unmystified

I vissa uppgifter så kommer det att frågas om att bestämma en tangentplan i en viss punkt för en kurva som ges implicit, t.ex: $cos(2z)(x^2 + 3y^2 + z) = 0$, detta kan tolkas som en 3D kurva. Då tangentplanen i en punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, för en kurva $f = k$, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ges av:

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

..där $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ och $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$. I $\mathbb{R}^3$ så blir $\vec{x} = (x, y, z)$.

Observera att funktioner som $g(x, y) = z$ kan skrivas om implicit till $g(x, y) - z = 0$ för att använda denna metod.
Mer info: [1]

Sats 1.0.2 Orienteringsidentitet på **vektorfälts**integral

$$\ointctrclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r} = -\varointclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r} \iff \varointclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r} = -\ointctrclockwise_\gamma F \cdot d\vec{r}$$

Mer info: [1]

Definition 1.0.2: Orientering på randkurvor och randytor

En rand**yta** sägs vara **positiv** orienterad om randytans normal pekar ifrån själva kroppen som randytan täcker. Tvärtom med negativ orientering på randyta.

En rand**kurva** sägs vara **positiv** orienterad om ytan som randkurvan täcker är åt vänstra sidan när man följer orienteringen på kurvan. Tvärtom med negativ orientering på randkurvan.