1 Induktion

1.1 Uppgift 1

Bevisa med induktion att

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

för alla $n \geq 1$ där $n \in \mathbb{Z}$

Basfall: $n = 1$

$$P(1)VL = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6} = HL$$

Induktionsantagande: Antag att $P(k)$ är sann vilket ger att

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Induktionssteget: Vi ska visa att givet induktionsantagandet är $P(k+1)$ sant.

$$VL = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = (k+1)^2 + \sum_{i=1}^{k} i^2$$

Nu stoppar vi in det vi kom fram till i induktionsantagandet och får

$$VL = (k+1)^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} =$$

$$= \frac{6(k^2+2k+1) + 2k^3 + 3k^2 + k}{6} =$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

$$HL = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} =$$

$$= \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6} =$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} = VL$$

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

1.2 Uppgift 2

Bevisa med induktion att

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$$

för alla $n \geq 1$ där $n \in \mathbb{Z}$

Basfall: $n = 1$

$$P(1)VL = \sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 2 * 1 - 1 = 1 = 1^2 = HL$$

Induktionsantagande: Antag att $P(k)$ är sann vilket ger att

$$\sum_{j=1}^{k}(2j-1) = k^2$$

Induktionssteget: Vi ska visa att givet induktionsantagandet är $P(k+1)$ sant.

$$VL = \sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 2(k+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k}(2j-1)$$

Nu stoppar vi in det vi kom fram till i induktionsantagandet och får

$$VL = 2(k+1) - 1 + k^2 =$$

$$= k^2 + 2k + 1 =$$

$$= (k+1)^2 = HL$$

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

2 Iterativ korrekhet

Innan loopen har vi att $res_0 = 1.0 = x^0$

I slutet av iteration i har vi att $res_{i+1} = x{*}res_i =$ induktionssteg $= res_i = x^i$

Den sista iterationen är $i = n - 1$ då vi startar från i = 0 vilket ger att $res_{n-1+1} = res_n = x^n$

Vi har då visat att $f(x,n) = x^n$.

Antalet iterationer är n vilket ger att tidskomplexiteten är $O(n)$.

3 Rekursiv korrekhet

$$expRecursive(x,n) = f(x,n) = \begin{cases} g(x,n) & \text{då } 0 \leq n \leq 4 \\ f(x, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \cdot \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) & \text{då } 0 \leq n \leq 4 \end{cases}$$

$$expIterative(x,n) = g(x,n) = x^n$$

där $n \in \mathbb{Z}$ Påstående $P(n)$:

$$P(n) \iff expRecursive(x,n) = x^n$$

Basfall:

$$f(x,n) = g(x,n) = x^n \longleftarrow P(n), 0 \leq n \leq 4$$

Induktionssteg: Antag $P(n)$ för alla $4 < n < m$

Då m är på formen $m = 2k$

$$g(x,m) = g(x,k) \cdot g(x,k) = \text{induktionsantagande} = x^k \cdot x^k = x^{2k} = x^m$$

Då m är på formen $m = 2k + 1$

$$g(x,m) = g(x,k) \cdot g(x,k+1) = \text{induktionsantagande} = x^k \cdot x^{k+1} = x^{2k+1} = x^m$$

Påståendet $P(n)$ följer då enligt starka induktionsprincipen för alla $n > 0$ där $n \in \mathbb{Z}$

Rekursiv tidskomplexitet ges av formeln

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

där $a = 2, b = 2$ och $f(n) \in \theta(1)$ mästarsatsen ger då

$$T(n) \in \Theta(n^{log_2 2}) = \Theta(n)$$