1 Induktion

1.1 Uppgift 1

Bevisa med induktion att

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

för alla $n \geq 1$ där $n \in \mathbb{Z}$

Basfall: $n = 1$

$$P(1)VL = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6} = HL$$

Induktionsantagande: Antag att $P(k)$ är sann vilket ger att

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Induktionssteget: Vi ska visa att givet induktionsantagandet är $P(k+1)$ sant.

$$VL = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = (k+1)^2 + \sum_{i=1}^{k} i^2$$

Nu stoppar vi in det vi kom fram till i induktionsantagandet och får

$$VL = (k+1)^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} =$$

$$= \frac{6(k^2+2k+1) + 2k^3 + 3k^2 + k}{6} =$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

$$HL = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} =$$

$$= \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6} =$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} = VL$$

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

1.2 Uppgift 2

Bevisa med induktion att

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$$

för alla $n \geq 1$ där $n \in \mathbb{Z}$

Basfall: $n = 1$

$$P(1)VL = \sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 2*1-1 = 1 = 1^2 = HL$$

Induktionsantagande: Antag att $P(k)$ är sann vilket ger att

$$\sum_{j=1}^{k}(2j-1) = k^2$$

Induktionssteget: Vi ska visa att givet induktionsantagandet är $P(k+1)$ sant.

$$VL = \sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 2(k+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k}(2j-1)$$

Nu stoppar vi in det vi kom fram till i induktionsantagandet och får

$$VL = 2(k+1) - 1 + k^2 =$$
$$= k^2 + 2k + 1 =$$
$$= (k+1)^2 = HL$$

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

2 Iterativ korrekhet

3 Rekursiv korrekhet