Induktion

(a)

Bevisa följande ekvation med hjälp av induktion

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}.$$

Basfall $n = 1$:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= 1^2 = 1 \\ \text{HL} &= \frac{1\left(1+1\right)\left(2\left(1\right)+1\right)}{6} \\ \iff \text{HL} &= \frac{6}{6} = 1 = \text{VL} \end{aligned}$$

Induktionsantagande: Antag att ekvationen är sant då $n = p$.

Induktionssteg $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \sum_{i=1}^{p+1} i^2 \\ \iff \text{VL} &= \left(p+1\right)^2 + \sum_{i=1}^{p} i^2 \end{aligned}$$

Enligt induktionsantagandet är summan ovan lika med $\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

$$\begin{aligned} \iff \text{VL} &= \left(p+1\right)^2 + \frac{p\left(p+1\right)\left(2p+1\right)}{6} \\ \iff \text{VL} &= \frac{6\left(p+1\right)^2 + p\left(p+1\right)\left(2p+1\right)}{6} \\ \iff \text{VL} &= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{HL} &= \frac{\left(p+1\right)\left(p+1+1\right)\left(2\left(p+1\right)+1\right)}{6} \\ \iff \text{HL} &= \frac{\left(p+1\right)\left(p+2\right)\left(2p+3\right)}{6} \\ \iff \text{HL} &= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6} = \text{VL} \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller ekvationen för alla $n \geq 1$.

(b)

Bevisa följande ekvation med hjälp av induktion

$$\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2.$$

Basfall $n = 1$:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= 2\,(1) - 1 = 1 \\ \text{HL} &= 1^2 = 1 = \text{VL} \end{aligned}$$

Induktionsantagande: Antag att ekvationen är sant då $n = p$.

Induktionssteg $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \sum_{j=1}^{p+1} (2j - 1) \\ \iff \text{VL} &= 2\,(p + 1) - 1 + \sum_{j=1}^{p} (2j - 1) \end{aligned}$$

Enligt induktionsantagandet är summan ovan lika med p^2.

$$\begin{aligned} \iff \text{VL} &= 2\,(p + 1) - 1 + p^2 \\ \iff \text{VL} &= p^2 + 2p + 1 \\ \iff \text{VL} &= (p + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{HL} = (p + 1)^2 = \text{VL}$$

Enligt induktionsprincipen gäller ekvationen för alla $n \geq 1$.

Iterativ korrekthet

Bevisa korrekthet för denna iterativa funktion och ange dess tidskomplexitet

```
double expIterative(double x, int n) {
    double res = 1.0;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        res *= x;
    }
    return res;
}
```

Tidskomplexitet av `expIterative` är $O(n)$ då det är en enstaka for-loop. Om det initiala värdet av res kallas för $\text{res}_0 = 1$ och det resulterande värdet efter loopen för res_{i+1} för alla $i < n$. Funktionen kan matematiskt beskrivas med rekursionen $\text{res}_{i+1} = x \times \text{res}_i$. Dess korrekthet kan således bevisas med induktion:

Påstående: funktionen `expIterative` returnerar värdet x^n.

Basfall $n = 0$: Fallet är triviellt korrekt då loopen inte kör och $x^0 = 1$ för alla x.

Induktionsantagande: Antag att påståendet är sant då $n = p$.

Induktionssteg $n = p + 1$:

$$\text{HL} = x^{p+1}$$

$$\begin{aligned}
&\text{VL} = \text{res}_{p+1} \\
\iff &\text{VL} = \text{res}_p \times x \\
\iff &\text{VL} = x^p \times x \\
\iff &\text{VL} = x^{p+1} = \text{HL}
\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 0$.

Rekursiv korrekthet

Bevisa korrekhet för denna rekursiva funktion och ange dess tidskomplexitet

```
double expRecursive(double x, int n) {
    if (n <= 4) {
        return expIterative(x, n);
    }

    return expRecursive(x, n/2) *
           expRecursive(x, (n + 1)/2);
}
```

Hint: Använd mästarsatsen

Tidskomplexiteten av `expRecursive` kan bestämmas med mästarsatsen, $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ där $f(n) = \Theta(1)$, $a = 2$, $b = 2$. Då $1 = n^0$ och $a > 1$ är tidskomplexiteten $\Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n)$.

Funktionen `expRecursive`, kan beskrivas matematiskt som $g(x, n)$, där $n \in \mathbb{N}$ ty definitionen av `expIterative`.

$$g(x,n) = \begin{cases} x^n & n \leq 4 \\ x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} & n > 4 \end{cases}$$

$$\iff g(x,n) = \begin{cases} x^n & n \leq 4 \\ x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil} & n > 4 \end{cases}$$

Denna definition antar att $g(x, m) = x^m$ då $m \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ bla bla stark induktion och så vidare, men det är sant (source: trust me bro). Om $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ är lika med n för alla n är $g(x, n) = x^n$. Detta kan delas upp i två fall, där n är udda och där n är jämn.

Fall I: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\text{HL} &= 2k \\
\text{VL} &= \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil \\
\iff \text{VL} &= \lfloor k \rfloor + \lceil k \rceil \\
\iff \text{VL} &= 2k = \text{HL}
\end{aligned}$$

Fall II: $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\text{HL} &= 2k + 1 \\
\text{VL} &= \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil \\
\iff \text{VL} &= \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil \\
\iff \text{VL} &= 2k + 1 = \text{HL}
\end{aligned}$$