# DD1337: Homework 6 - Komplexitet och korrekthet

Lukas Viering

## 1. Induktion

**(1)**

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Basfall $n = 1$:

$$\mathrm{VL} = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$
$$\mathrm{HL} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \ \mathrm{VL} = \mathrm{HL}$$

Vi antar nu att påståendet gäller för $n = p$, och bevisar att det även gäller för $n = p + 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL} &= \frac{(p+1) \cdot (p+2) \cdot (2(p+1)+1)}{6} \\
&= \frac{(p+1) \cdot (p+2) \cdot (2p+3)}{6} \\
&= \frac{(p^2+3p+2) \cdot (2p+3)}{6} \\
&= \frac{2p^3+9p^2+13p+6}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{HL} &= \frac{p \cdot (p+1) \cdot (p+2)}{6} + (p+1)^2 \\
&= \frac{(p^2+p) \cdot (2p+1)}{6} + p^2 + 2p + 1 \\
&= \frac{2p^3+p^2+2p^2+p+6p^2+12p+6}{6} \\
&= \frac{2p^3+9p^2+13p+6}{6} = \mathrm{VL}
\end{aligned}$$

Vi har därmed bevisat att likheten kommer gälla för alla $n \geq 1$.

**(2)**

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$$

Basfall $n = 1$:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ \text{HL} &= 1^2 = 1 \\ \text{VL} &= \text{HL} \end{aligned}$$

Vi antar nu att påståendet gäller för $n = p$, och bevisar att det även gäller för $n = p + 1$.

$$\text{VL} = (p + 1)^2 = p^2 + 2p + 1$$

$$\text{HL} = p^2 + 2 \cdot (p + 1) - 1 = p^2 + 2p + 1 = \text{VL}$$

Vi har därmed bevisat att likheten kommer gälla för alla $n \geq 1$.

## 2. Iterativ korrekthet

```
double expIterative(double x, int n) {
    double res = 1.0;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        res *= x;
    }
    return res;
}
```

Eftersom funktionen bara innehåller en loop som körs $n$ gånger får vi helt enkelt tidskomplexiteten $O(n)$.

Vi vill nu beräkna korrektheten. Vi antar att invarianten är att $\text{res} = x^i$, nedan är funktionen fast med invariant som kod-kommentarer:

```
double expIterative(double x, int n) {
    double res = 1.0;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // invariant: res = x^i
        res *= x;
    }
    // invariant: i = n => res = x^i = x^n
    return res;
}
```

Innan loopen är $\text{res} = 1$, vilket är samma som $x^0 = 1$. Det innebär att om loopen inte körs (dvs ifall $n = 0$), så kommer vi få svaret 1 vilket är korrekt. Innan varje iteration av loopen är $\text{res} = x^i$. När loopen är klar kommer då $\text{res} = x^i = x^n$, och därmed har vi bevisat funktionens korrekthet.

## 3. Rekursiv korrekthet

```
double expRecursive(double x, int n) {
    if (n <= 4)
        return expIterative(x, n);
    }

    return expRecursive(x, n/2) *
           expRecursive(x, (n + 1)/2);
}
```

Eftersom detta är en rekursiv funktion blir det lite klurigare, men vi kan använda oss av mästarsatsen för att få fram tidskomplexiteten.

Vi använder oss av följande formel:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Följande värden kan vi härleda:

- Vårt $a$ blir det antal gånger funktionen körs varje gång den kallas, alltså 2 i detta fall.
- Vårt $b$ blir också 2, eftersom $n$ halveras varje gång funktionen anropas av sig själv.
- $f(n)$ är de operationer som sker utöver det rekursiva, men i detta fall är det enbart en multiplikation som därför får tidskomplexiteten $\Theta(1)$. Om $f(n) = \Theta(n^d)$ måste $d = 0$.

Det finns sedan tre möjliga fall för att räkna ut tidskomplexiteten, baserat på förhållandet mellan $a$ och $b^d$. I detta fall är $a = 2$ och $b^d = 2^0 = 1$, alltså är $a > b^d$, vilket innebär att tidskomplexiteten kan definieras som

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 2}\right) = \Theta\left(n^1\right) = \Theta(n)$$

Vi ska nu bevisa funktions korrekthet, vilket vi gör genom induktion. Vår invariant är att `expRecursive(x, n) = x^n`. Eftersom funktionen använder sig av `expIterative` för att räkna ut för $n \leq 4$ vet vi att de stämmer för de fallen, vilket blir våra basfall.

Vi antar nu att likheten gäller för något $n = p$, och vill då bevisa att det även måste gälla för $n = p + 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL} &= x^{p+1} \\
\mathrm{HL} &= x^{\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor} \cdot x^{\left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor} = x^{\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor} = x^{p+1} = \mathrm{VL}
\end{aligned}$$

För att ytterligare förklara vad som sker i högerledet så är $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = n + 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$, oavsett om $n$ är udda eller inte. Anledningen till att vi kan byta ut de iterativa anropen mot $x^n$ är för att vi redan bevisat att funktionen är korrekt för alla lägre positiva $n$. I och med detta har vi alltså bevisat att funktionen är korrekt för alla $n \geq 0$.