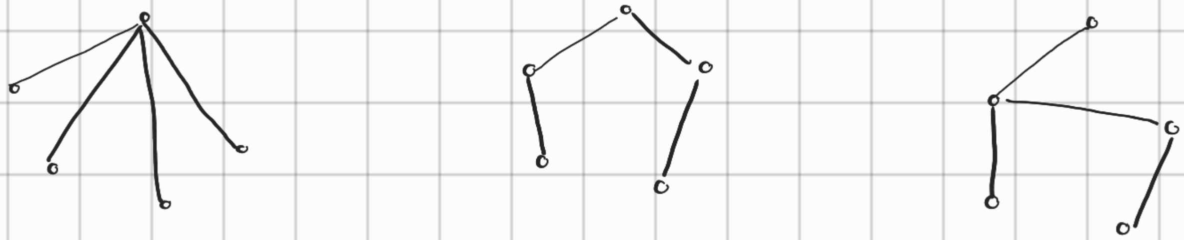
Árboles

Definición: Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos simples.

Algunos árboles de 5 vértices:



Una hoja (en un árbol) es un vértice de grado 1. Un bosque es un grafo que no tiene ciclos simples. En consecuencia, un bosque es unión disjunta de árboles (vértices disjuntos).

Teorema: Todo árbol de ≥ 2 vértices tiene al menos 2 hojas.

Prueba. Consideremos un camino de longitud máxima $v_1 v_2 \cdots v_k$.

, $k \geq 2$.

Afirmo que v_1 y v_k son hojas. Realicemos la prueba para v_1.

Si de v_1 sale una arista distinta a v_1v_2 se conecta a v_i.

Caso $v_i \neq v_2, \dots, v_k$. Esto es imposible, pues contradice la maximalidad de $v_1v_2 \cdots v_k$.

Caso $v_i = v_3, \dots, v_k$. Esto es imposible, pues un árbol no tiene ciclos.

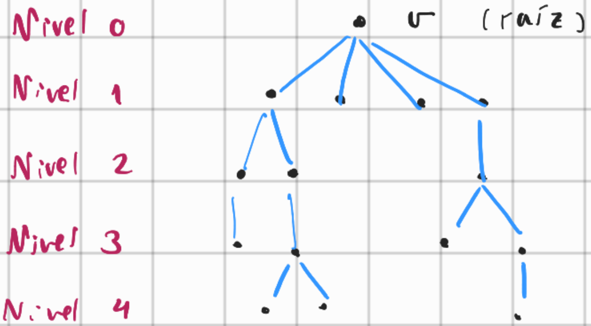
Así, necesariamente v_1 es una hoja.

La prueba para v_k es análoga.

Finalmente, hemos encontrado 2 hojas ∎

Un par de resultados en árboles:

1) Árbol con raíz: dado un árbol que tiene un vértice v, hacemos el siguiente proceso:

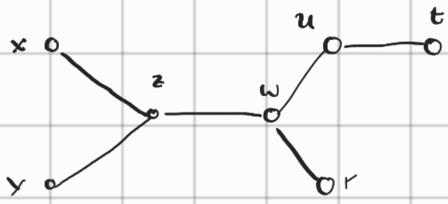


Cada arista une un vértice de un nivel k con un vértice del nivel $k+1$.

Cada vértice de un nivel $k \geq 1$ está unido con exactamente un vértice del nivel anterior.

2) En un árbol, para cualesquiera dos vértices a y b, existe un único camino que une a y b.

Luego podemos hablar de distancia en un árbol como la cantidad de aristas que se requiere para ir de a a b.



$d(x,x) = 0$

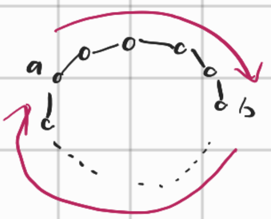
$d(z,u) = 2$

$d(x,r) = 3$

Teorema: Un grafo es un árbol si y solo para cualesquiera dos vértices existe un único camino que los une.

Prueba. $(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$ Conexo sin ciclos, pues si tuviese ciclos



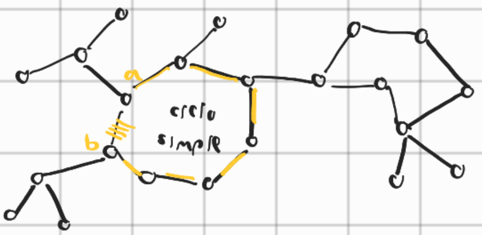
Teorema: Un árbol de n vértices tiene exactamente $n-1$ aristas.

Prueba. 1ra forma: inducción al número de vértices (paso inductivo: quitar una hoja)

2da forma (usar los niveles)

Teorema. Un grafo conexo de n vértices y $n-1$ aristas es un árbol.

Lema. Si un grafo conexo tiene un ciclo simple, al eliminar una arista de ese ciclo, lo que queda sigue siendo un grafo conexo.



Prueba del teorema. Sea G un grafo conexo de n vértices y $n-1$ aristas. Si G tuviera algún ciclo simple, al quitar una arista de ese ciclo, tendríamos un grafo conexo de n vértices y $n-2$ aristas. Contradicción.

$\therefore$ G es un árbol.

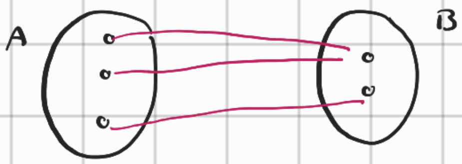
Teorema. (árbol generador / spanning tree) Dado cualquier grafo conexo G, existe un árbol A que tiene el mismo conjunto de vértices de G tal que es posible agregar $\underbrace{\text{algunas}}_{\geq 0}$ aristas al árbol A para obtener G.

Prueba. Usar el lema anterior mientras haya un ciclo simple. Al final obtenemos un árbol al cual podemos agregar las aristas que eliminamos para recuperar el grafo inicial. ∎

Corolario. Dado cualquier grafo conexo, es posible suprimir un vértice, tal que el grafo que quede siga siendo conexo.

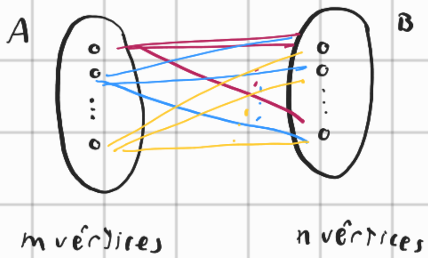
Algunos tipos de grafos

- Grafo completo: Un grafo de n vértices en el que cualesquiera dos de sus vértices están unidos por una arista. A ese grafo se le suele denotar con K_n.
- Grafo bipartito: Un grafo G es llamado bipartito si el conjunto de sus vértices se puede particionar en dos conjuntos no vacíos A y B tales que no haya una arista cuyos extremos están ambos en A o ambos en B.



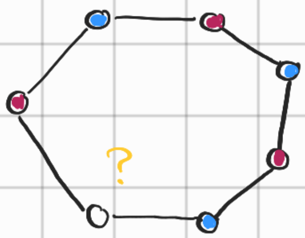
- Grafo k-partito: análogo a lo anterior pero con una partición en k conjuntos.
- Grafo completo bipartito:

$K_{m,n}$



Observación: bipartito $\Leftrightarrow$ una coloración de los vértices en dos colores tal que cada arista une vértices de dos colores distintos.

Ejemplo.



Ciclo simple de longitud 7 no es bipartito.

Teorema: Un grafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos simples de longitud impar.