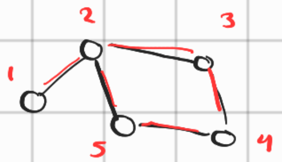
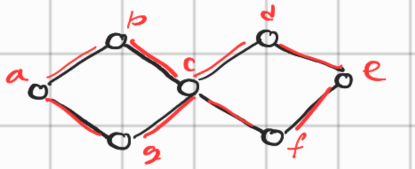
Grafos eulerianos y hamiltonianos

Definiciones

1) Decimos que un grafo tiene un camino euleriano, si existe en ese grafo un recorrido que pasa por cada arista del grafo exactamente una vez.

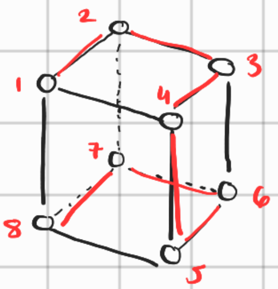


2) Decimos que un grafo tiene ciclo euleriano si existe un ciclo en ese grafo que pasa por cada arista exactamente una vez.

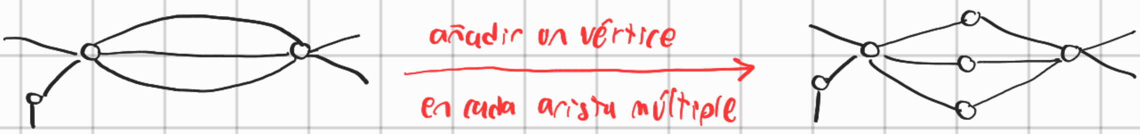


3) Decimos que un grafo tiene un camino hamiltoniano, si existe en ese grafo un recorrido que pasa por cada vértice del grafo exactamente una vez.

4) Decimos que un grafo tiene un ciclo hamiltoniano si existe en ese grafo un ciclo que pasa por cada vértice exactamente una vez.



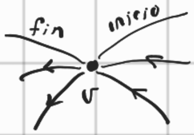
Observación: Para grafos eulerianos, podemos considerar que en general tenemos multigrafos.



Recordemos el lema (también se cumple para multigrafos):
Si G es un grafo conexo, existe un vértice v de G tal que $G \setminus \{v\}$ es conexo.

Teorema. Un multigrafo conexo tiene un ciclo euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.

Prueba. ($\Rightarrow$)

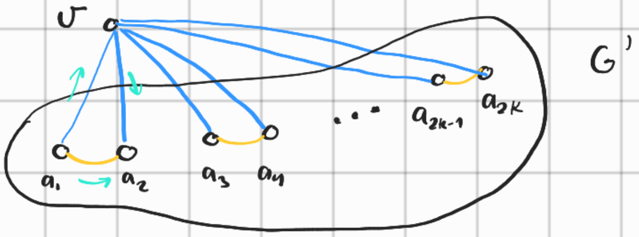


($\Leftarrow$) Por inducción en el número de vértices.

El caso base es trivial.

Sea G un multigrafo conexo de $n+1$ vértices que tiene todos sus grados pares.

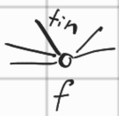
Por el lema, tenemos un vértice $v \in V(G)$ tal que $G \setminus \{v\} = G'$ es conexo de n vértices.



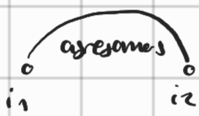
El multigrafo $G' + a_1a_2 + a_3a_4 + \dots + a_{2k-1}a_k$ es conexo y tiene los mismos grados que G (todos son pares). Por hipótesis este nuevo multigrafo tiene circuito euleriano. Luego, en él reemplazamos cada arista $a_{2i-1}a_{2i}$ por $a_{2i-1}v$ y $v a_{2i}$.

Teorema. Un multigrafo conexo tiene un camino euleriano que empieza y termina en vértices distintos si y solo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Prueba. ($\Rightarrow$)



($\Leftarrow$)



Ejercicio. Dado un multigrafo conexo con vértices de grado par. Pruebe que el recorrido que pasa por aristas distintas y tiene la mayor longitud posible es un circuito.