Coloración de los vértices de un grafo

Definición. Una coloración propia de los vértices de un grafo, consiste en asignar un color a cada vértice de tal manera que los extremos de cada arista sean de colores distintos.

$f: V \to \mathbb{N}$ tal que $uv \in E$ implica $f(u) \neq f(v)$.

El menor número posible de colores en una coloración propia de un grafo G se llama número cromático y se denota por $\chi(G)$.

Observaciones.

a) Si G tiene n vértices, entonces $\chi(G) \leq n$.

b) Si G tiene al menos una arista, $\chi(G) \geq 2$.

c) $\chi(K_n) = n$

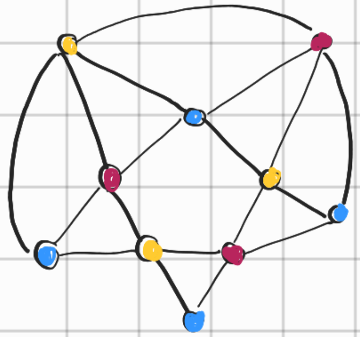
d) Si G es bipartito, $\chi(G) \leq 2$.

e) $\chi(C_{2n}) = 2$ y $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

f) Si G es un árbol con $|V(G)| \geq 2$, luego $\chi(G) = 2$.

g) Si H es subgrafo de G, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.

¿Cuál es el número cromático del siguiente grafo?



- $\chi(G) \geq 3$ (por un triángulo)
- $\chi(G) = 3$ (ejemplo)

Definiciones. Dado un grafo G, el número clique es el mayor cardinal posible de un subgrafo completo y se denota por $\omega(G)$. El número de independencia de G es el mayor cardinal posible de un conjunto de vértices entre los cuales no hay dos que estén unidos por una arista y se denota por $\alpha(G)$.

Propiedad. $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$.

Teorema. Sea G un grafo de n vértices se cumple que $\chi(G) \geq \omega(G)$, $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

Prueba. Probamos que $\chi(G) \geq \omega(G)$. Por contradicción, supongamos que $\chi(G) < \omega(G)$. Sea $\omega(G) = m$, luego K_m es subgrafo de G. Luego,

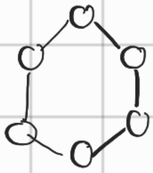
$m = \chi(K_m) \leq \chi(G) < \omega(G) = m$ lo cual es imposible.

Así, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Ahora probemos que $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$. Sea $\chi(G) = k$ y $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ donde V_i es el conjunto de los vértices que tienen color i, con $1 \leq i \leq k$. Luego cada uno de los V_i es un conjunto independiente

$$\begin{aligned} n &= |V_1| + |V_2| + \dots + |V_k| \\ &\leq k\,\alpha(G). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio. ¿Existe un grafo G para el cual se cumple $\chi(G) = n/\alpha(G)$?

Sí. Por ejemplo  o el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{\}$.

Teorema. Sea G un grafo, luego $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Prueba. Sea $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Definimos una coloración de G de la siguiente manera:

- A v_1 le asignamos el color 1.
- Supongamos que $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ ya tienen su color, definimos el color de v_i como el menor entero positivo que no aparece entre los colores de los vecinos de v_i.

De esta forma, el color de v_i pertenece al conjunto $\{1, 2, \dots, \deg(v_i) + 1\}$.

Entre todos los colores, digamos que el color de v_j es el mayor. Luego

$$\#\,\text{colores} \leq \text{color } v_j \leq \deg(v_j) + 1 \leq \Delta(G) + 1. \quad \blacksquare$$

Teorema. (Brooks) Si G es un grafo conexo que no es completo ni es un ciclo de longitud impar, se cumple que $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Teorema. (5 colores) Si G es un grafo plano, se cumple que $\chi(G) \leq 5$.

Teorema. (4 colores) Si G es un grafo plano, se cumple que $\chi(G) \leq 4$.

Teorema. Sea G un grafo, luego $\chi(G) \leq 1 + \max\limits_{H \text{ subgrafo de } G} \{\delta(H)\}$.