Teoría de Grafos | Ejercicio 03 | Manuel Loaiza Vasquez

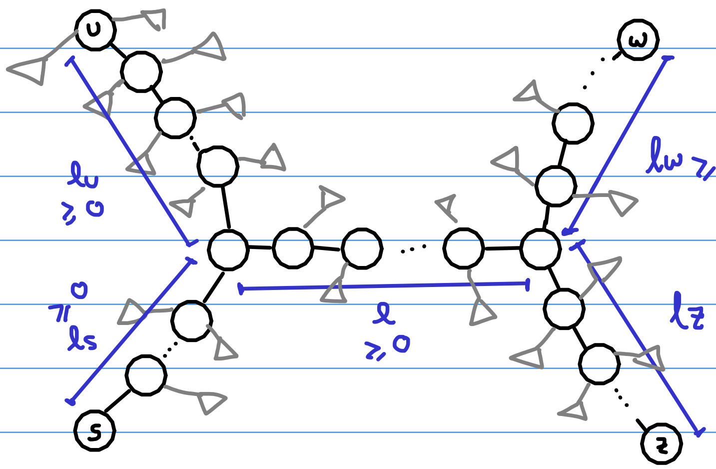
Sea S' el nodo más lejano a U. Ahora sea T el nodo más lejano a S'. Demostrar que si el grafo es un árbol, entonces el path $\langle S', \dots, T \rangle$ es el camino más largo del grafo.

Prueba: Queremos demostrar que existe un diámetro que tiene a S' como extremo de este.

El primer detalle que debemos tener en cuenta es que S' necesariamente es una hoja del árbol, pues de no serlo, siempre podremos extender el path y alcanzar un nodo más lejano hasta llegar a una hoja.

Ahora, por contradicción, supongamos que no existe diámetro que tenga a S' como extremo, entonces para todo diámetro $\langle w, \dots, z \rangle$ tenemos los siguientes dos casos:

i) $\langle w, \dots, z \rangle$ y $\langle u, \dots, S' \rangle$ no tienen vértices en común.

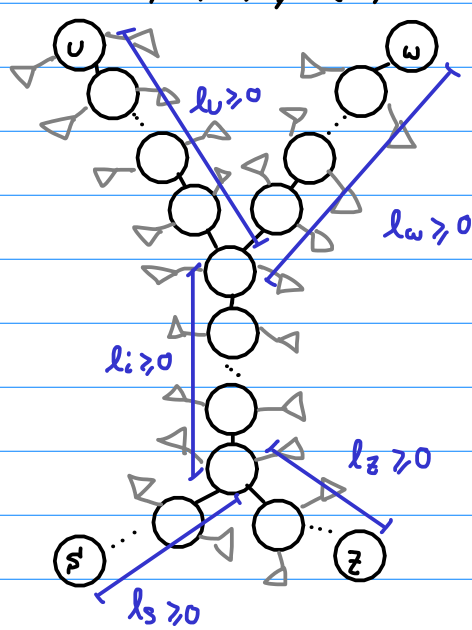


Como ningún diámetro contiene a S' como extremo

$$l_w + l_z > l_w + l + l_s$$
$$l_z > l + l_s$$
$$l + l_z > 2l + l_s \geq l_s$$
$$l + l_z > l_s$$

$(\Rightarrow\Leftarrow)$ pues z sería el nodo más lejano a U en vez de S'.

ii) $\langle w, \dots, z \rangle$ y $\langle u, \dots, S \rangle$ tienen vértices en común



Como ningún diámetro tiene a S' como extremo

$$l_w + l_i + l_z > l_w + l_i + l_{s'}$$
$$l_z > l_s$$
$$l_u + l_i + l_z > l_u + l_i + l_s$$

lo cual implica que z es un nodo más lejano que S' de U $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

$\therefore$ Siempre existirá un diámetro que tenga a S' como extremo. ■