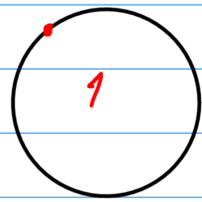
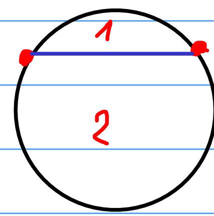
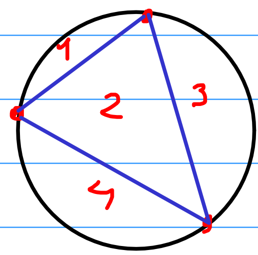
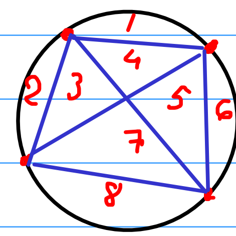
Notas de Clase 01 - Manuel Loaiza Vasquez 02/09/2020

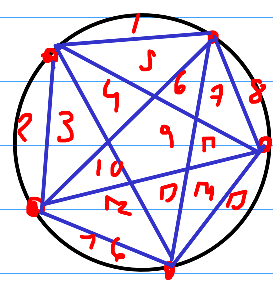
Problema: Con n puntos en una circunferencia que están unidos por cuerdas, ¿en cuántas piezas está dividido el círculo?

$n=1$  $n=2$ 

1 2

$n=3$  $n=4$ 

4 8

$n=5$ 

16

Aparentemente la respuesta es 2^{n-1}, sin embargo, para $n=6$ obtenemos 31 piezas, lo cual destruye nuestra hipótesis.

- El incremento de una pieza al añadir una cuerda.
  = una cuerda divide cada pieza en dos.
- La cantidad de piezas divididas por la cuerda
  = cada pieza se divide por un segmento de la cuerda.
- La cantidad de segmentos en la cuerda
  = la cantidad de puntos internos que son intersección con otros segmentos.
- Observamos que [1 + cantidad puntos de intersección interna] es la cantidad de piezas que un segmento dividirá en dos.
- El incremento al añadir c cuerdas
  = c + [cantidad total de puntos de intersección interna en las nuevas cuerdas].

Sea $f :=$ cantidad de piezas

$c :=$ cantidad de cuerdas

$p :=$ cantidad de puntos de intersección interna

Comenzando con cero puntos, tenemos una pieza, luego

$$f = 1 + c + p.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ la cantidad de puntos que tenemos de entrada, sabemos que cada cuerda se forma con 2 puntos

$$f(n) = 1 + \binom{n}{2} + p(n)$$

y cada punto de intersección interna se forma con 4 puntos

$$f(n) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

$$= 1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$= 1 + \frac{12(n^2-n)}{24} + \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24}$$

$$= 1 + \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n}{24} \quad \blacksquare$$

$\therefore$ Con n puntos en una circunferencia que están unidos por cuerdas, el círculo puede ser dividido en $1 + \frac{n^4 + 6n^3 + 23n^2 - 18n}{24}$ piezas.

<u>Problema</u>: ¿Cómo calculamos el máximo común divisor de A y B?

- Solución trivial pero ineficiente:

Hallamos los divisores de A y B

$$\operatorname{div} A = \{ \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{d_1}, d_2, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ A}}{d_n} \} \wedge \operatorname{div} B = \{ \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{e_1}, e_2, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ B}}{e_m} \}.$$

El cálculo de cada lista sería en $O(\max(A,B))$, para cada factor en $\operatorname{div} A$ realizaría una búsqueda binaria en $\operatorname{div} B$ para saber si aparece. De esta manera la complejidad en tiempo sería // Notación Manuel

$T(A,B) = O(A + B + A \lg B)$ // $\lg := \log_2$

$= O(\max(A,B) \lg(\max(A,B)))$.

- Solución eficiente: Algoritmo de Euclides

GCD(A, B)

if (B == 0) return A;

else return GCD(B, A mod B)

Analicemos la corrección del algoritmo provisto.

Teorema. Para todo $A \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $B \in \mathbb{N}$ tenemos que

$GCD(A,B) = GCD(B, A \bmod B)$.

Prueba: Sabemos que si $n \mid m$ y $m \mid n$, entonces $m = n$, donde $x \mid y$ significa que x divide a y, $m, n, x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

($\Rightarrow$) Comencemos probando que $GCD(A,B) \mid GCD(B, A \bmod B)$.

Aplicando el teorema de representación única de la división tenemos

$A = Bk + r$, $0 \leq r < B$ $\wedge$ $r = A \bmod B$

$r = A - Bk$ y como $GCD(A,B)$ es un divisor de A y B,

tenemos que $\left.\begin{matrix} GCD(A,B) \mid A \\ GCD(A,B) \mid Bk \end{matrix}\right\}$ $GCD(A,B) \mid (A - Bk)$

$\Downarrow$

$GCD(A,B) \mid (A \bmod B)$

Por lo tanto, $GCD(A,B) \mid B$ y $GCD(A,B) \mid (A \bmod B)$

$\Rightarrow GCD(A,B) \mid GCD(B, (A \bmod B))$.

($\Leftarrow$) Probemos que $GCD(B, A \bmod B) \mid GCD(A,B)$.

Análogamente a la prueba anterior, tenemos que

$GCD(B, A \bmod B) \mid B$ $\wedge$ $GCD(B, A \bmod B) \mid A \bmod B$

$A \bmod B = A - Bk \Rightarrow A = Bk + A \bmod B$

Como $GCD(B, A \bmod B) \mid (A \bmod B)$ y $GCD(B, A \bmod B) \mid Bk$

entonces $GCD(B, A \bmod B) \mid A$.

Como también $GCD(B, A \bmod B) \mid B$, tenemos $GCD(B, A \bmod B) \mid GCD(A,B)$

$\therefore$ Concluimos que $GCD(A,B) = GCD(B, A \bmod B)$ ∎