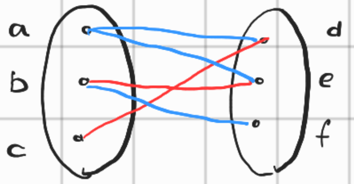
Teorema [König] Si G es bipartito, entonces $\nu(G) = \tau(G)$.

- Dado un emparejamiento M, definimos "vértice no emparejado".
- Camino alternante: empieza en un vértice no emparejado y sus aristas alternan entre aristas fuera de M y dentro de M.
- Camino alternante aumentable: Además cumple que el vértice final no está emparejado.



$M = \{be, cd\}$

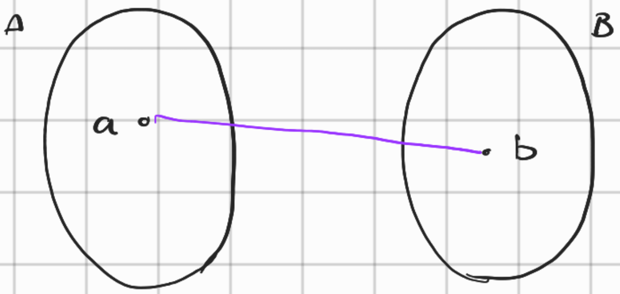
Dem. Sea M un emparejamiento máximo, vamos a encontrar un cubrimiento U tal que $|U| = |M| = \nu(G)$ (lo cual implicaría $\tau(G) \leq \nu(G)$).

Definamos U de la siguiente manera:

Para cada arista $xy \in M$ con $x \in A$, $y \in B$, colocamos a y en U si existe un camino alternante que termina en y y empieza en un vértice de A.

Caso contrario, colocamos x en U.

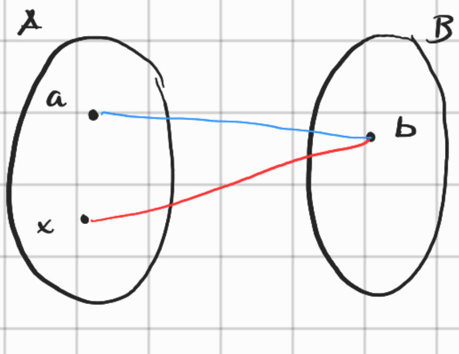
Así, $|U| = |M|$. Ahora demostremos que U es un cubrimiento.



Sea ab cualquier arista de G.

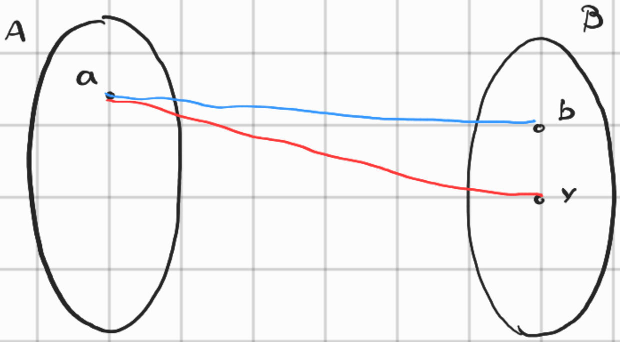
- Caso $ab \in M$: Necesariamente uno de sus extremos pertenece a U.
- Caso $ab \notin M$: Necesariamente a está emparejado o b está emparejado, pues de no serlo, M no sería máximo pues podríamos añadir ab a M.

* Caso a no está emparejado: Necesariamente b está emparejado.



ab es un camino alternante y $xb \in M$. Según nuestro algoritmo, $b \in U$.

* Caso a está emparejado:



Si $a \in U$, luego ab tiene un extremo en U.

Si $a \notin U$, $y \in U$. Luego existe un camino alternante que termina en y.

Este camino no pasa por ay, pues necesariamente llega a y con una arista azul.

Si b no está emparejado, al añadir ya y ab tendríamos un alternante aumentable, lo cual es imposible. De esta manera, tenemos que b está emparejado.

Utilizando el camino anterior, por el algoritmo b estaría en U.

Concluimos que U es un cubrimiento. ■