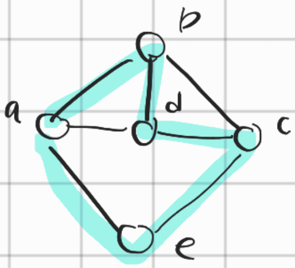
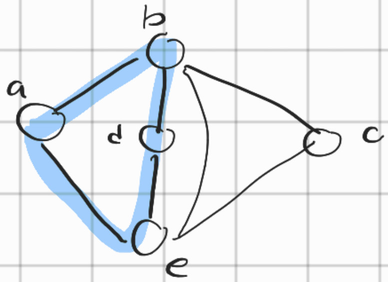
Ejemplos:



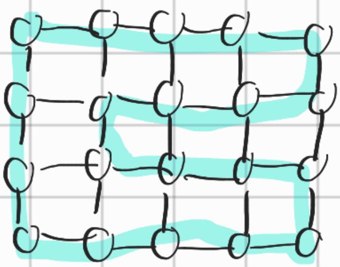


¿Tienen ciclo hamiltoneano?

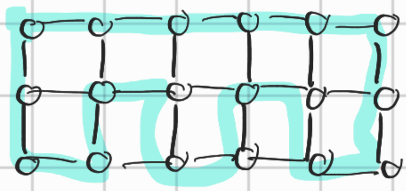
Sí. El ciclo abdce

No. Pues ab, ae, bd y de pertenecen al ciclo, por lo que abde sería el ciclo simple pero no contendría a c.

Ejemplos:



$G_{3\times 4}$

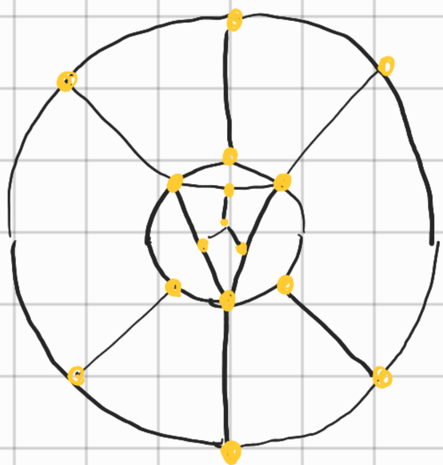


$G_{2\times 5}$

$G_{6\times 8}$?

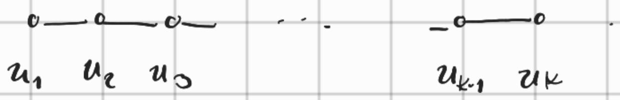
No, pues la malla se puede representar como grafo bipartito y el ciclo hamiltoneano tendría longitud 63, lo cual es imposible.

Ejercicio: ¿El siguiente grafo tiene ciclo hamiltoniano?

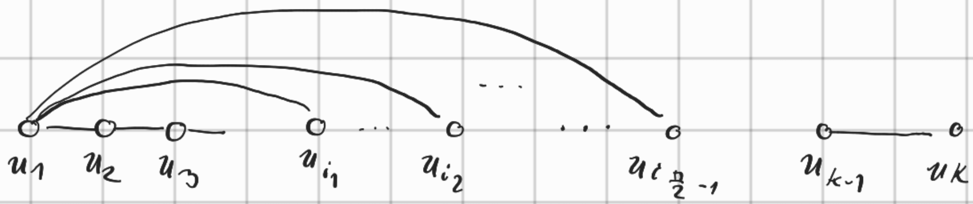


Teorema. (Dirac) Si G es un grafo simple de n vértices $(n \geq 3)$ tal que el grado de cada vértice es $\geq n/2$, entonces G tiene ciclo hamiltoniano.

Prueba. Para el caso base $n=3$ cumple. A partir de $n \geq 4$, tomamos el camino de longitud máxima:



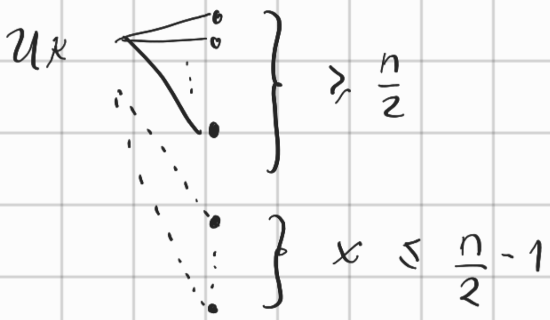
Vamos a demostrar que existe $2 \leq i \leq k$ tal que u_1 sea adyacente a u_i y que u_{i-1} sea adyacente con u_k.



donde $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{\frac{n}{2}-1}}, u_{i_{\frac{n}{2}}} = u_2$ están unidos con u_1.

Supongamos que no existe dicho i, luego

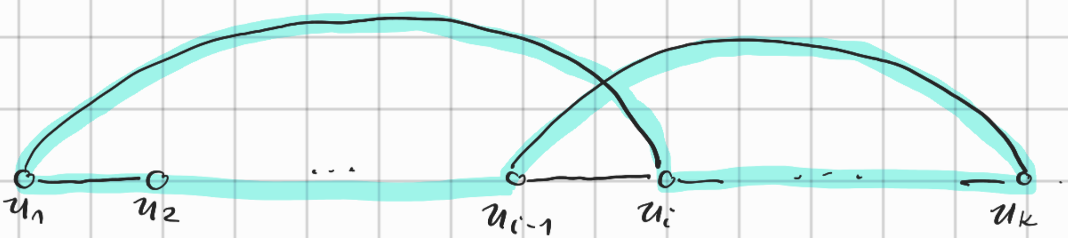
$$\left.\begin{array}{l} u_{i_1-1} \text{ no está unido con } u_k \\ \vdots \\ u_{i_{\frac{n}{2}}-1} \text{ no está unido con } u_k \end{array}\right\} \quad u_k \text{ no está unido con } \frac{n}{2} \text{ vértices.}$$



Tenemos $x \leq \frac{n}{2} - 1$ y $x \geq \frac{n}{2}$

lo cual es imposible.

Así, existe $2 \leq i \leq k$ $\left(k \geq \frac{n}{2} + 1\right)$ tal que



Veamos el ciclo $u_1 u_2 \ldots u_{i-1} u_k u_{k-1} \ldots u_i u_1$.

Si $k=n$, este ciclo sería hamiltoniano.

Si $k<n$, existiría por lo menos un vértice fuera de ese ciclo.

Sea w este vértice, como $\deg(w) \geq \frac{n}{2}$ y el ciclo tiene al menos $\frac{n}{2}+1$ vértices, w está unido directamente con por lo menos un vértice del ciclo.

De esta manera, conseguiríamos un camino de longitud k, lo cual es imposible pues $k-1$ es la longitud máxima.

Finalmente, concluimos que este ciclo es hamiltoniano. ∎