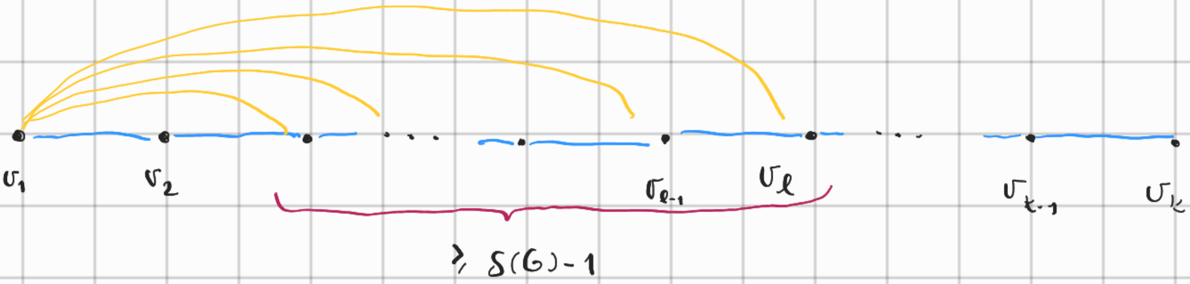
Definición: $\delta(G)$ denota al menor grado entre los vértices de G, $\Delta(G)$ denota al mayor grado entre los vértices de G.

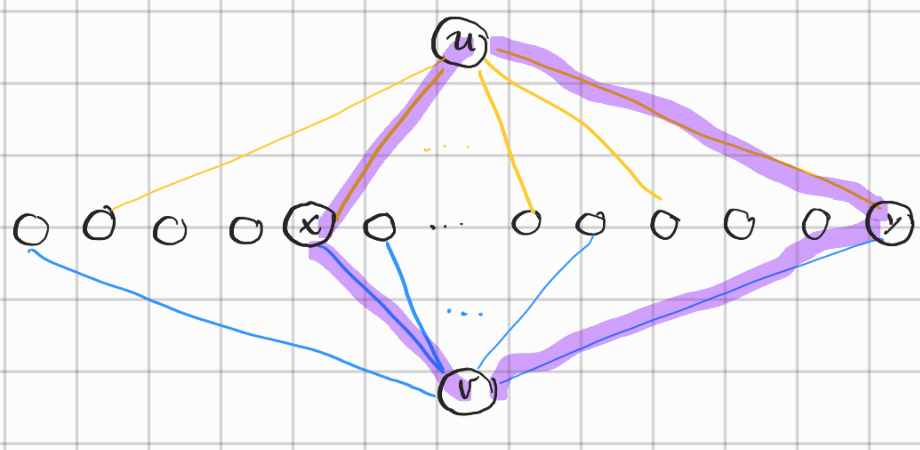
Teorema. Si G es un grafo tal que $\delta(G) \geq 2$, G contiene un ciclo simple de longitud $\geq \delta(G)+1$.

Prueba. Consideramos el camino de longitud máxima. Luego $v_1 v_2 \dots v_\ell$ es un ciclo de longitud $\geq \delta(G)+1$. ∎



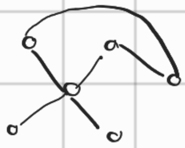
Ejercicio. Un grafo G tiene $2n$ vértices y cumple que $\delta(G) \geq n$, demuestre que G tiene al menos un ciclo simple de longitud 4, $n \geq 2$.

Prueba. Si G es completo, como tenemos al menos 4 vértices, entonces $v_1 v_2 v_3 v_4$ forman un ciclo simple. En otro caso existe un par de vértices $u, v \in V(G)$ tal que $(u,v) \notin E(G)$.
Afirmo que existen al menos dos vértices $x, y \in V(G)$ de los $2n-2$ restantes tales que $ux, xv, vy, yu \in E(G)$. Asumamos que coinciden en 0 vértices, luego $2n-2 \geq \delta(G)+\delta(G) \geq 2n$ lo cual es imposible. Ahora supongamos que coinciden en exactamente 1 vértice, luego $2n-3 \geq \delta(G)-1+\delta(G)-1 \geq 2n-2$ lo cual es imposible. De esta manera, coinciden en al menos 2 vértices.
Sean x, y dos de estos vértices, luego $uxvy$ es un ciclo simple de longitud 4. ∎

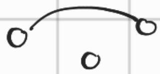


Conexidad

Definición. Un grafo G es llamado conexo, si se cumple que cualesquiera dos vértices de G están unidos por medio de un recorrido (o camino).



grafo conexo



grafo no conexo

Dados dos vértices a y b de G, decimos que $a \sim b$ si existe un recorrido (o camino) que une a con b.

Resulta que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia formadas por "$\sim$" son llamadas componentes conexas.

Obs. Un grafo es conexo $\iff$ tiene exactamente una componente conexa.

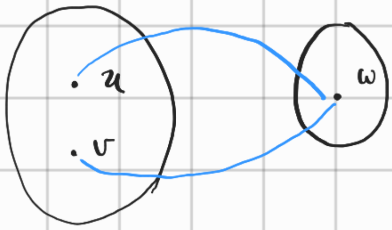
Ejercicio. Sea G grafo (finito y simple) entonces G o $\overline{G}$ conexo.

Prueba. Si G es conexo, ya está. Supongamos que G no es conexo, luego tenemos al menos dos componentes conexas. Sean u y v dos vértices de G.

Caso u y v pertenecen a diferentes componentes conexas en G:

uv es arista en $\overline{G}$.

Caso u y v pertenecen a la misma componente conexa en G:



$\left.\begin{array}{l} uw \text{ es arista en } \overline{G} \\ wv \text{ es arista en } \overline{G} \end{array}\right\}$ uwv es camino de u hacia v en $\overline{G}$.

Como en ambos casos existe un camino, al ser la elección de u y v arbitraria, tenemos que $\overline{G}$ es conexo. ∎

Teorema: Un grafo conexo de n vértices tiene al menos $n-1$ aristas.

Prueba 1. (Inducción + contradicción)

Probemos el caso base. Cuando $n=1$, con 0 aristas el grafo es conexo.

Ahora probemos el paso inductivo. Supongamos que se cumple para $n=\ell$.

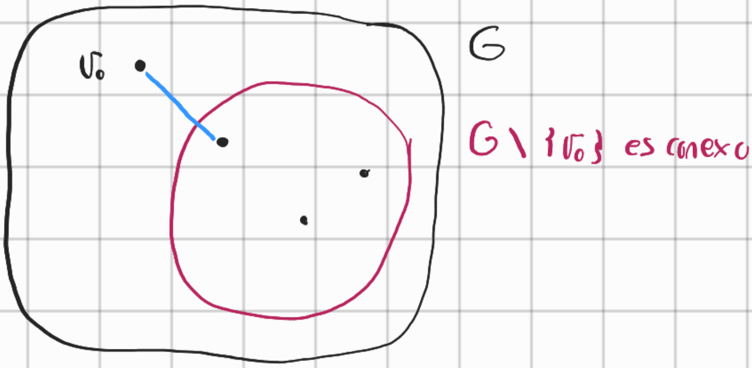
Por contradicción, supongamos que para $n=\ell+1$ el grafo conexo G tiene $\leq n-1$ aristas.

Tenemos $\sum_{v\in V} \deg(v) \leq 2(n-1)$.

Existe $v_0 \in V$ tal que $\deg(v_0) < 2$ pues si $\deg(v) \geq 2$ para todo $v \in V$,

tendríamos $\sum \deg(v) = 2n > 2(n-1)$.

Así, $\deg(v_0) = 1$ ya que al ser conexo, $\deg(v) > 0$ para todo $v \in V$.



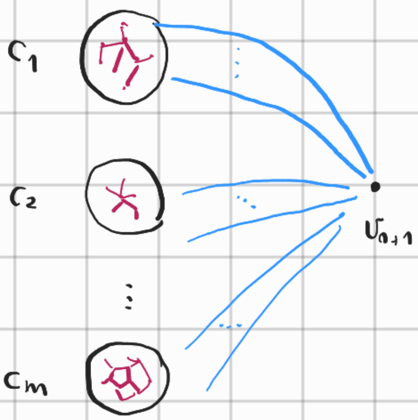
Por la hipótesis inductiva, como $G\setminus\{v_0\}$ es conexo y tiene n vértices, entonces tiene $\geq n-1$ aristas. Luego G tiene $\geq n$ aristas, lo cual es una contradicción. Así, G tiene $\geq n$ aristas.

Concluimos que un grafo conexo de n vértices tiene al menos $n-1$ aristas. ■

Prueba 2. (Inducción Fuerte)

Supongamos que se cumple la hipótesis para grafos conexos con $\leq n$ vértices.

Analicemos un grafo conexo con $n+1$ vértices.



$$|E| \geq \sum_{i=1}^{m} |E_{c_i}| + m$$
$$\geq n - m + m$$
$$= n. \quad ■$$