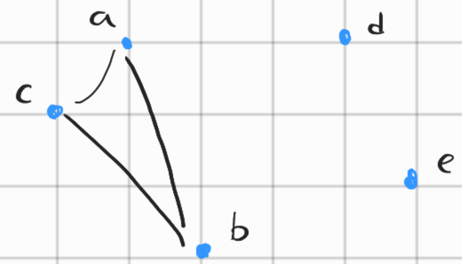
Teoría de grafos



$V = \{a, b, c, d, e\}$

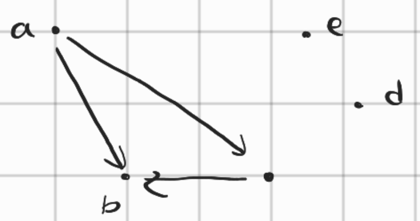
$E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$

Un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de aristas. Cada elemento de E es un subconjunto V que tiene dos elementos (este tipo de grafo se llama simple)

Una arista del grafo es $\{v_1, v_2\}$ que se denota también como v_1v_2 $(= v_2v_1)$.

Observaciones

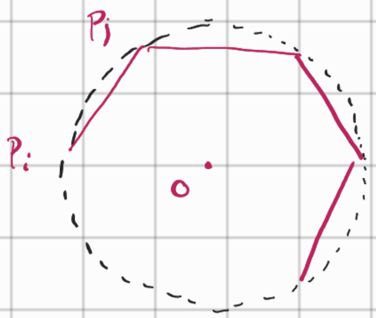
- No se requiere que V sea finito, pero por lo general trabajamos con grafos finitos.
- Si en vez de que la arista sea un subconjunto, consideramos que es un par ordenado, obtenemos un grafo dirigido.



Ejemplos

① En un grafo (V, E), V puede ser un conjunto de personas y definimos la arista $v_1v_2 \Leftrightarrow v_1$ y v_2 se conocen.

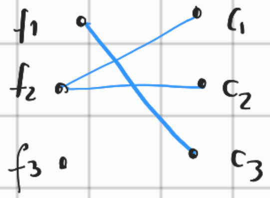
② Sean $P_1, P_2, \dots, P_n$ puntos alrededor de una circunferencia de centro O.
$V = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, definimos la arista $P_iP_j \Leftrightarrow \angle P_iOP_j \leq 90°$



③ Sea M una matriz cuadrada de orden n tal que cada una de sus entradas es 0 o 1. Digamos que las filas de M son $f_1, f_2, \dots, f_n$ y las columnas son $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Definiremos un grafo cuyo conjunto de vértices es $\{f_1, f_2, \dots, f_n, c_1, c_2, \dots, c_n\}$ y una arista une f_i con $c_j \iff$ en la intersección de f_i con c_j hay un 1.

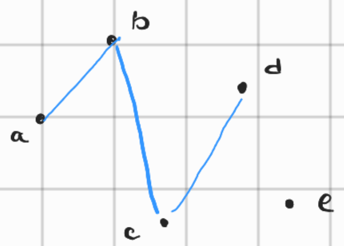
$$M = \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \end{array}$$



Más definiciones:

Sea $G = (V, E)$ un grafo.

- Grado de $v \in V$ es la cantidad de aristas de E que contienen a v.
- v_1 es adyacente o incidente a v_2 si $v_1 v_2 \in E$.
- recorrido: $v_1 v_2 \dots v_k$ si v_i es adyacente a v_{i+1}, para todo $1 \leq i \leq k-1$.



Un recorrido: abcbcbcbcd

- camino: $v_1 v_2 \dots v_k$ si v_i es adyacente a v_{i+1} para $1 \leq i \leq k-1$ y además $v_1, v_2, \dots, v_k$ son distintos. La longitud del camino es $k-1$.

Obs: En un grafo finito existe el camino de longitud máxima.

- ciclo: $v_1 v_2 \dots v_k$ si v_i es adyacente v_{i+1} para todo $1 \leq i \leq k-1$ y además v_k es adyacente a v_1. $(k \geq 3)$
- ciclo simple: $v_1 v_2 \dots v_k$ es un ciclo tal que $v_1, v_2, \dots, v_k$ son distintos $(k \geq 3)$.

La longitud del ciclo es k.

<u>Teorema</u>. Existe un camino que une a los vértices a y $b \iff$ existe un recorrido que une a los vértices a y b.

Prueba. $(\Rightarrow)$ Trivial

$(\Leftarrow)$ $a\, v_1 \dots v \,\cancel{\dots v} \dots b$

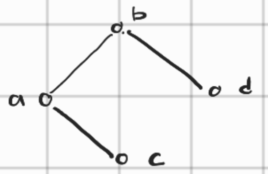
$a\, v_1 \dots v \dots b$

$\vdots$

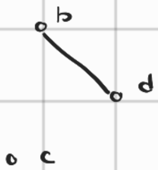
$a \dots b$ Todos los vértices son distintos. ∎

Algunas operaciones en grafos

1) Suprimir un vértice v: consiste en suprimir ese vértice de V y suprimir todas las aristas aristas que contienen a v. Se denota $G \setminus \{v\}$.

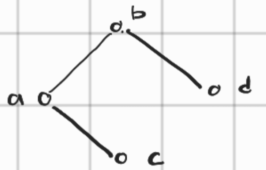


G

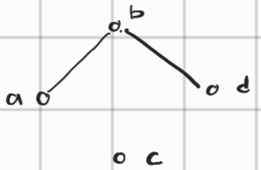


$G \setminus \{a\}$

2) Suprimir una arista ab: consiste en suprimir ab de E.

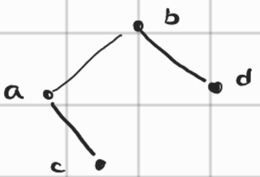


G

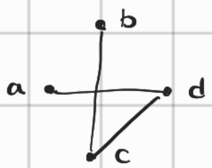


$G \setminus \{ac\}$

3) Complemento de un grafo G. Sea $G = (V, E)$. El complemento de G, denotado por $\overline{G}$, es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices V, pero sus aristas son todas las que faltan a G.



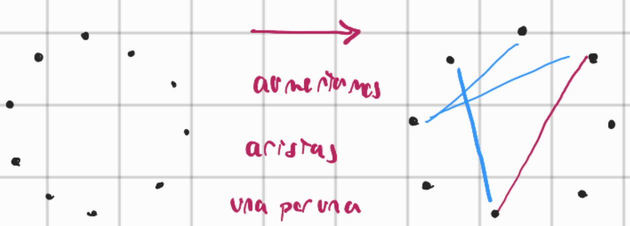
G



$\overline{G}$

Observación: El grado de un vértice v se denota con $d(v)$.

<u>Teorema</u>. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.



<u>Corolario</u>. En todo grafo finito, la cantidad de vértices de grado impar es par

<u>Teorema</u>. En todo grafo finito existen dos vértices de igual grado.

Prueba. Como $\deg(v) \leq n-1$ y $|V| = n$, luego los posibles grados son $0, 1, \ldots, n-1$. Pero no podemos tener un nodo con 0, otro con $n-1$. ∎

Problema. En un grafo de n vértices, todos los vértices tienen grado 3. Hallar todos los posibles valores de n.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 3n = 2|E| = 2 \cdot \quad \text{Luego} \quad |E| = \frac{3n}{2}.$$

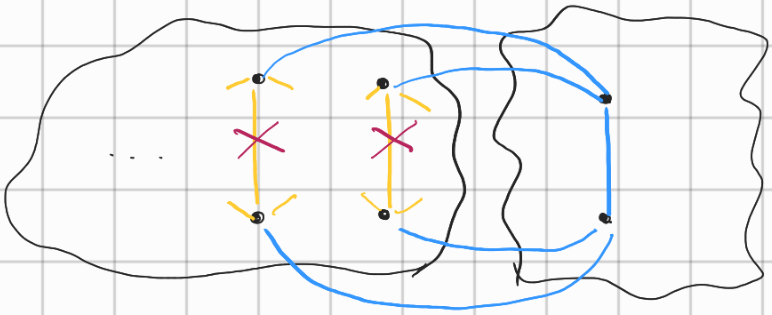
Para $n=2$ es imposible, pues $\max_{v\in V}\{\deg(v)\} \leq 1$.

Para $n=4$ es posible, pues  cumple lo requerido.

Probemos que para $n = 2k$ con $k \geq 2$ siempre podemos construir un grafo de n vértices donde cada uno de ellos tiene grado 3.

Comenzamos probando el caso base, $k=2$.

Ahora probemos el paso inductivo. Supongamos que el enunciado se cumple para $k=\ell$ para algún $\ell \geq 2$. Queremos probar el enunciado para $k=\ell+1$. Para esto, tenemos $n = 2(\ell+1) = 2\ell+2$ vértices.



Usando la hipótesis inductiva, obtenemos un grafo válido con 2ℓ vértices y eliminamos las aristas de rojo y añadimos las azules manteniendo la invariante de que cada vértice tiene grado 3 en los vértices antiguos, y trivialmente imponiéndola en los nuevos. ∎

Teorema. a) Si un grafo finito cumple que cada vértice tiene grado ≥ 2, entonces contiene un ciclo simple.

b) Si un grafo tiene n vértices y n aristas, entonces contiene un ciclo simple.

Prueba. a) Sea $v_1 v_2 \dots v_k$ el camino de longitud máxima.

Como $\deg(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, en particular, $\deg(v_1) \geq 2$.

Obsérvese que $v_1 v_i$ satisface que $2 \leq i \leq k$, pues en caso contrario $v_i \in V \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$ y tendríamos $v_i v_1 v_2 \dots v_k$ un camino de longitud $k+1$, lo cual contradice la maximalidad.

De esta manera, $v_1 v_2 \dots v_i$ es un ciclo simple. ∎

b) Probemos un resultado aún más fuerte. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Si $|E| \geq |V|$, luego G contiene un ciclo simple.

Procedamos a probar este enunciado por inducción.

El caso base es $|V| = 3$. El único grafo simple con $|E| \geq |V| = 3$ es $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_1\}$ el cual es un ciclo simple.

Supongamos que el enunciado se cumple para $|V| = n$. Analicemos ahora los grafos tales que $|V| = n+1$. Si $\delta(G) \geq 2$, por (a) tenemos un ciclo simple.

Si $\delta(G) < 2$, tenemos $v \in V$ tal que $\deg(v) < 2$. Sea $G' = G - v$.

Si $\deg(v) = 0$ en G, luego $|V(G')| = n$, y $|E(G')| = n+1$ y si $\deg(v) = 1$, $|V(G')| = n$ y $|E(G')| = n$, por lo que en ambos casos podemos obtener un ciclo simple en G' por la hipótesis inductiva.

Finalmente, estamos frente a un caso particular en el cual $|V(G)| = |E(G)|$. ∎