Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto A, con una relación $\preccurlyeq$ (un subconjunto de $A \times A$) que cumple tres condiciones:

- $\preccurlyeq$ es reflexiva:

  $a \preccurlyeq a$, $\forall a \in A$.

- $\preccurlyeq$ es antisimétrica:

  Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$.

- $\preccurlyeq$ es transitiva:

  Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$ entonces $a \preccurlyeq c$.

Ejemplos. $(A, \leq)$ es un poset donde $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $(B, |)$ es un poset donde $B \subseteq \mathbb{Z}^+$.

- $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

  poset $(C, |)$

  $2|2$, $3|3$, $4|4$, $5|5$, $6|6$

  $2|4$, $2|6$, $3|6$.

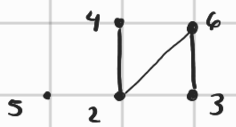
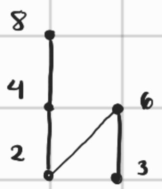


Diagrama de Hasse ↑

- $D = \{2, 4, 8, 3, 6\}$, poset $(D, |)$

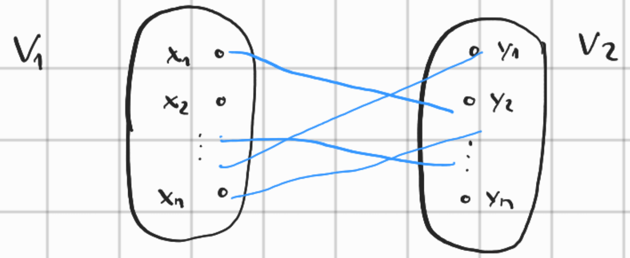


Sea $(A, \preccurlyeq)$ un poset, una cadena $\mathcal{C}$ es un subconjunto de A tal que
$x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$, $\forall x, y \in \mathcal{C}$.
Una anticadena B es un subconjunto de A tal que $x \npreceq y$ y $y \npreceq x$, $\forall x, y \in B$.

Teorema. (Dilworth) El número mínimo de cadenas disjuntas que cubren un poset finito es igual a la longitud de la anticadena más larga.

Prueba. Si las cadenas disjuntas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$ cubren el poset y $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ es una anticadena de longitud máxima. Luego $k \geq m$, entonces $\min \geq \max$.

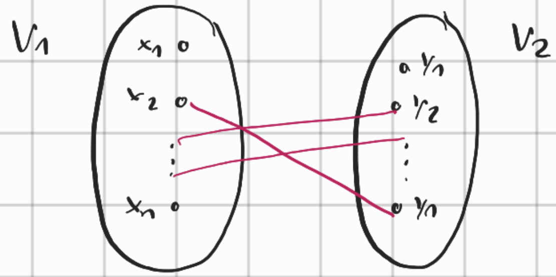
Sea X la cantidad mínima de cadenas disjuntas que cubren el poset, y Y la longitud de la anticadena más larga. Ya tenemos que $X \geq Y$. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ el poset con el orden parcial $<$. Construimos un grafo bipartito $(V_1 \cup V_2, E)$



$x_i y_j \in E \iff a_i < a_j$, $i \neq j$

Aplicamos el teorema de König a este grafo bipartito.

Sea k la cardinalidad del emparejamiento máximo.



$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_7, \dots, a_{11}, \dots, a_n$

Al final el poset queda dividido en $n-k$ cadenas.

Entonces $n-k \geq X$

Ahora, consideremos un cubrimiento de los vértices del grafo bipartito que sea mínimo, tal cubrimiento tiene cardinalidad k.

Por el teorema de König, tenemos $T = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}, y_{j_1}, \dots, y_{j_s}\}$, $r+s=k$.