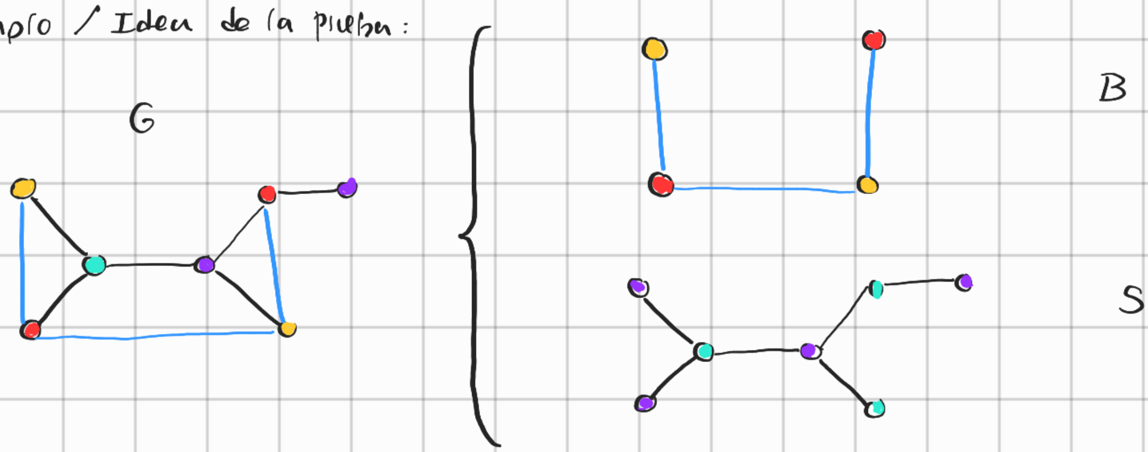
Problema: Sea G un grafo conexo que tiene la siguiente propiedad: si eliminamos las aristas de cualquier ciclo simple de longitud impar incluido en G, obtenemos un grafo que no es conexo.

Demuestre que a cada vértice se le puede asignar uno de cuatro colores disponibles, de tal manera que cada arista de G une vértices de colores distintos.

Ejemplo / Idea de la prueba:



Prueba: Como G es un grafo conexo, obtengamos un árbol de expansión S.
Sea B el subgrafo formado por las aristas removidas y los vértices involucrados en estas. Afirmamos que B es bipartito. Por contradicción, supongamos que no es bipartito, luego B tendría ciclos de longitud impar. Sin embargo, esto implicaría que S no es conexo, lo cual es imposible ya que es un árbol. Hemos probado que B es bipartito. Esto nos genera una bicoloración para los vértices de B. Asimismo, al ser S un árbol también obtenemos otra bicoloración.
Tenemos 4 colores y la siguiente regla:

Si $v \in V(B)$, entonces recibe su color en B.
sino recibe su color en S.

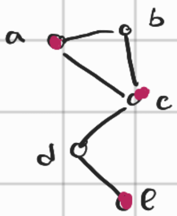
Sea $e = uv \in E(G)$.
Si $u \in V(B)$ y $v \in V(B)$ ✓
sino, si $u \in V(B)$ y $v \in V(S)$ o $u \in V(S)$ y $v \in V(B)$ ✓
Sino $u \in V(S)$ y $v \in V(S)$ ✓. ∎

Emparejamientos y cubrimientos

Sea G un grafo, un emparejamiento (matching) es un subconjunto de las aristas de G tales que entre ellas no hay dos que comparten un vértice.

Un emparejamiento es máximo si está formado por el mayor número posible de aristas. Ese número se denota $\nu(G)$. Un emparejamiento perfecto usa todos los vértices.

Sea G un grafo, un cubrimiento (covering) es un subconjunto C de los vértices, de tal manera que cada arista tiene por lo menos un extremo en C.



$C = \{a, c, e\}$.

Un cubrimiento es mínimo si tiene el menor cardinal posible, ese cardinal se denota con $\tau(G)$

Ejemplos:

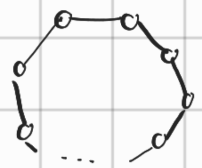
a) Si G

, $n \geq 2$.

n vértices

$$\nu(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \tau(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

b) Si G



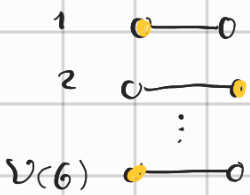
n vértices

$$\nu(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \tau(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

/

Lema. Para todo grafo G, $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Prueba.

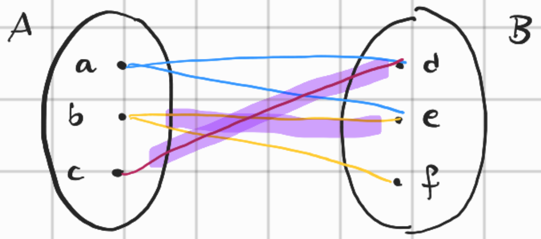


Cualquier cubrimiento requiere al menos $\nu(G)$.

En particular, $\tau(G) \geq \nu(G)$. ∎

Teorema. (König) Si G es un grafo bipartito, entonces $\nu(G) = \tau(G)$.

Sea M un emparejamiento de G, decimos que un vértice "no está emparejado" si ese vértice no pertenece a ninguna arista de M.



$M = \{ be, cd \}$

a y f no están emparejados

Un camino en G es llamado alternante si empieza en un vértice no emparejado y sus aristas alternan entre aristas de M y aristas fuera de M. Ejemplo: $aebf$.

Un camino alternante es llamado "aumentable" si además cumple que el vértice final no está.