Ex. 1. Prove that every tree with a vertex of degree n has at least n vertices of degree one.

Prueba 1. Sea v el vértice de grado n y sean $v_1, \dots, v_n$ sus vecinos.
Luego podemos encontrar n caminos que inician en v en las direcciones $v_1, \dots, v_n$.
Como un árbol no tiene ciclos, ningún par de caminos se intersecta y ningún camino se intersecta consigo mismo. Así, cada camino termina en un vértice de grado 1 y como tenemos n caminos, tenemos al menos n vértices de grado 1 en el árbol.

Prueba 2. Sea $T = (V, E)$ un árbol y considere los conjuntos

$$V_1 = \{ v \in V : d(v) = 1 \}, \quad V_2 = \{ v \in V : d(v) \geq 2 \},$$

donde $d(v)$ denota el grado del vértice v.
Como T es un árbol, necesariamente todos los nodos pertenecen a alguno de los conjuntos pues es conexo. Luego

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v_1 \in V_1} d(v_1) + \sum_{v_2 \in V_2} d(v_2) = 2|E| = 2(|V| - 1)$$

$$= |V_1| + \sum_{v_2 \in V_2 \setminus \{v_n\}} d(v_2) + n = 2(|V| - 1)$$

$$\sum_{v_2 \in V_2 \setminus \{v_n\}} d(v_2) = 2(|V| - 1) - |V_1| - n$$

$$\geq 2(|V_2| - 1)$$

$$2(|V_1| + \cancel{|V_2|} \cancel{- 1}) - |V_1| - n \geq 2(\cancel{|V_2|} \cancel{- 1})$$

$$|V_1| \geq n. \blacksquare$$

Ex. 2. The ancient king Gvidon had 5 children. It is known that exactly 57 of his descendants had 3 children, while all others didn't have any children. How many descendants did the king have?

Solución. Sea $T = (V, E)$ el árbol que representa la genealogía del rey.

Sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \underset{T \text{ es árbol}}{=} 2(|V| - 1)$

Sea x el número de descendientes del rey.

Tenemos $|V| = 1 + x$.

Así mismo, $d(v) = \begin{cases} 5 & , \quad v \text{ es el rey.} \\ 3+1 & , \quad v_1^1, \dots, v_1^{57} \\ 0+1 & , \quad v_2^1, \dots, v_2^{1+x-57} \end{cases}$

Por un lado $\sum_{v \in V} d(v) = 5 + 4(57) + 1(1 + x - 57)$

y por otro $2(|V| - 1) = 2(1 + x - 1) = 2x$

obteniendo $5 + 3(57) + 1 + x = 2x$

$177 = x$. ∎

Ex. 3. Prove that every graph with n vertices and $n-1$ edges that doesn't contain a cycle is a tree.

Prueba. Sea $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$ y $|E| = n-1$ acíclico.

Probemos que G es conexo. Supongamos que G no es conexo.

Luego, sin pérdida de generalidad, supongamos que tenemos dos componentes conexas G_1 y G_2.

Sean $u_1 \in G_1$ y $u_2 \in G_2$ dos vértices arbitrarios que pertenecen a ambas componentes.

Definamos el grafo $G' = (V, E')$ con $E' = E \cup \{u_1 u_2\}$.

El grafo G' es conexo pues dados $v_1, v_2 \in V$ tenemos lo siguiente:

Caso $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_1$. ✓

Caso $v_1 \in V_2$ y $v_2 \in V_2$. ✓

Caso $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$: Tenemos el camino $(v_1 \rightsquigarrow u_1) u_1 u_2 (u_2 \rightsquigarrow v_2)$. ✓

Asimismo, G' es acíclico, ya que si existiese un ciclo, este debería contener a la arista $u_1 u_2$ pero si la removemos, u_1 y u_2 se desconectan.

Sin embargo, $|V| = |E'| = |V| - 1$ pues es un árbol, lo cual es imposible.

De esta manera, concluimos que G es un árbol. ∎

Ex.4. Prove that every connected graph with n vertices and $n-1$ edges is a tree.

Prueba. Sea G un grafo conexo con n vértices y $n-1$ aristas.

Probemos que G no contiene ciclos.

Por contradicción, asumamos que G contiene ciclos.

Luego podemos quitar aristas una a una de cada ciclo hasta que el grafo resultante se un árbol H con $|E(H)| < n-1$. Sin embargo, al ser árbol con n vértices, $|E(H)| = n-1$, lo cual no es posible.

Así, G no tiene ciclos y por lo tanto es un árbol. ∎

Ex. 5. Let G be a connected graph. For any $u, v \in V(G)$ the distances $d(u,v)$ is defined as the length of the shortest path connecting u and v. Prove that the distance function satisfies the triangle inequality, i.e. for any $u, v, w \in V(G)$ we have $d(u,w) + d(w,v) \geq d(u,v)$.

Prueba. Sea Γ_1 un camino de u a w de distancia $d(u,w)$ y Γ_2 un camino de w a v de distancia $d(w,v)$.

Conectemos Γ_1 y Γ_2 en un walk $W = v_0 v_1 \ldots v_r$ con $v_0 = u$, $v_{d(u,w)} = w$ y $v_r = v$ con longitud $r = d(u,w) + d(w,v)$.

Si W no es un simple walk, tenemos un subwalk $v_j v_{j+1} \ldots v_k$ tal que $v_j = v_k$. Reemplazemos $v_j v_{j+1} \ldots v_k$ con v_j y continuemos con el procedimiento mientras que el walk contenga un vértice que haya sido visitado dos veces.

Al final del procedimiento W se convierte en un path de u hacia v denotado por Γ_3 o un único vértice (si y solo si $u = v$ por lo que $d(u,v) = 0$).

Cada vez que un subwalk es reemplazado por un vértice el número de aristas en W decrece. Así, Γ_3 tiene longitud a lo más $d(u,w) + d(w,v)$.

Como $d(u,v)$ es la longitud del camino más corto de u a v, tenemos que $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$. Esto es la desigualdad triangular. ■