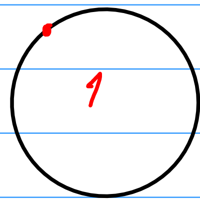
Notas de Clase 01 - Manuel Loaiza Vasquez 02/09/2020

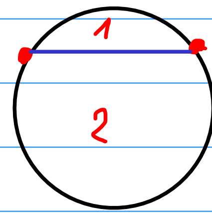
Problema: Con n puntos en una circunferencia que están unidos por cuerdas, ¿en cuántas piezas está dividido el círculo?

$n=1$



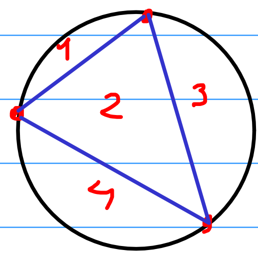
1

$n=2$



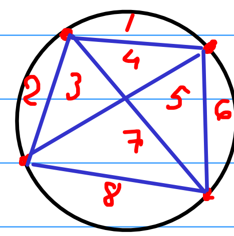
2

$n=3$



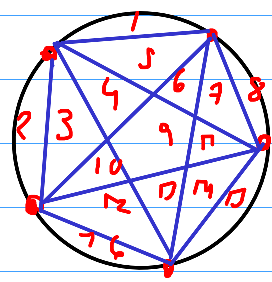
4

$n=4$



8

$n=5$



16

Aparentemente la respuesta es 2^{n-1}, sin embargo, para $n=6$ obtenemos 31 piezas, lo cual destruye nuestra hipótesis.

- El incremento de una pieza al añadir una cuerda.
  = una cuerda divide cada pieza en dos.
- La cantidad de piezas divididas por la cuerda
  = cada pieza se divide por un segmento de la cuerda.
- La cantidad de segmentos en la cuerda
  = la cantidad de puntos internos que son intersección con otros segmentos.
- Observamos que [1 + cantidad puntos de intersección interna] es la cantidad de piezas que un segmento dividirá en dos.
- El incremento al añadir c cuerdas
  = c + [cantidad total de puntos de intersección interna en las nuevas cuerdas].

Sea $\quad f :=$ cantidad de piezas

$\quad c :=$ cantidad de cuerdas

$\quad p :=$ cantidad de puntos de intersección interna

Comenzando con cero puntos, tenemos una pieza, luego

$$f = 1 + c + p.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ la cantidad de puntos que tenemos de entrada, sabemos que cada cuerda se forma con 2 puntos

$$f(n) = 1 + \binom{n}{2} + p(n)$$

y cada punto de intersección interna se forma con 4 puntos

$$f(n) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

$$= 1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$= 1 + \frac{12(n^2-n)}{24} + \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24}$$

$$= 1 + \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n}{24} \quad \blacksquare$$

$\therefore$ Con n puntos en una circunferencia que están unidos por cuerdas, el círculo puede ser dividido en $\frac{1 + n^4 + 6n^3 + 23n^2 - 18n}{24}$ piezas.