Ex.1. Let $G = (V, E)$ be a graph and K consists of all 2-element subsets of V, then $\bar{G} = (V, K \setminus E)$ is called the complimentary graph of G.
Let G be self complimentary (this means G is isomorphic to $\bar{G}$) with n vertices, where n is even. Show that $n = 4m$ for some positive integer m.

Solución. Como G es isomorfo a $\bar{G}$ tenemos que

$$|E(G)| = \frac{1}{2} |E(K_n)|.$$

$$= \frac{n(n-1)}{4}.$$

Como $n = 2k$, $|E(G)| = \frac{2k(2k-1)}{4} = \frac{4k^2 - 2k}{4} = k^2 - \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}.$

Así, $k = 2m$. Luego, $n = 2(2m) = 4m$. ∎

Ex. 2. Let T be a tree with an even number of edges. Show that at least one vertex must have even degree.

Solución. Sea $T = (V, E)$. Sabemos que

$$|E| = |V| - 1.$$

Como $|E|$ es par, $|V|$ es impar.

Por contradicción, supongamos que todos los vértices tienen grado impar.

Luego, $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ lo cual es imposible.

(impar, pues es una suma de una cantidad impar de números impares) (par)

Así, existe al menos un vértice de grado par. ■

Ex. 3. Prove that if G is not connected, then the complementary graph $\overline{G}$ is connected.

Prueba. Sean $G_1, G_2, \dots, G_m$ las componentes conexas de G.

Sean $u, v \in V(\overline{G})$. Si existen $i \neq j$ tal que

$u \in V(G_i)$ y $v \in V(G_j)$, luego $(u,v) \in E(\overline{G})$.

Si no existen, tenemos $1 \leq i \leq m$ tal que $u, v \in G_i$.

Tenemos que $m \geq 2$, pues si $m < 2$, el grafo G sería conexo.

Luego, sea $1 \leq k \leq m$ y $k \neq i$.

Como $V(G_k)$ es no vacío, tenemos $w \in V(G_k)$.

Luego (u, w) y (w, v) pertenecen a $E(\overline{G})$.

Así, el camino uwv conecta a u con v en $\overline{G}$. ∎

Ex. 4. Show that if a graph G with n vertices and $n \geq 2$ satisfies the inequality $|E| > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ then it is a connected graph.

Prueba. Supongamos que G no es conexo. Luego existe $v_i \in V(G)$ tal que $(v_i, v_j) \notin E(G)$.

Luego $\frac{(n-1)(n-2)}{2} < |E| \leq \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

lo cual es imposible. Así, $|E|$ es conexo. ∎

Prueba. (Viazovska) Primero, consideremos el caso $n=2$:

En este caso $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 0$. Esto significa que si G satisface la desigualdad, luego G es un grafo con dos vértices y $|E| > 0$, así $|E| = 1$. Como G es un grafo de 2 vértices conectados por una arista, G es un grafo conexo.

Supongamos que el resultado se cumple para un grafo con $|V| = n = k-1 > 2$ (hipótesis inductiva). Queremos probar que esto se cumple para un grafos con $n = k$. Si G es un grafo completo, cada vértice es adyacente a todo vértice, por lo que existe un path entre todo par de vértices. Hemos probado que G es conexo.

Si G no es completo y $|E| > 1/2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)$, luego existe $v \in V(G)$ con $0 < deg(v) < k-1$. Usemos la hipótesis inductiva para probar que $G \setminus \{v\}$ es conexo:

El grafo $G \setminus \{v\}$ tiene $k-1$ vértices. La diferencia

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}(n-2)(n-3) = \frac{1}{2}(n-2)[n-1-n+3] = n-2 = k-2$$

implica $|E(G \setminus \{v\})| > \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - deg(v)$

$$\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (k-2) = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

y $G \setminus \{v\}$ es conexo por la hipótesis inductiva. Como $G \setminus \{v\}$ es conexo y $deg(v) > 0$ en G, G también es conexo. ∎

Ex. 5. For all $n \geq 2$ find a disconnected graph such that

$$|E| = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Solución. Sea $G = (V, E)$ con

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (v_1, v_2), (v_1, v_3), \dots, (v_1, v_{n-1}), \\ \qquad (v_2, v_3), \dots, (v_2, v_{n-1}), \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad (v_{n-2}, v_{n-1}) \end{array} \right\}.$$

Tenemos $|V| = n$,

$|E| = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, y

G disconexo, pues no existe camino de v_1 a v_n. ∎