Relación entre los lenguajes definidos

Horst H. von Brand
vonbrand@inf.utfsm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Contenido

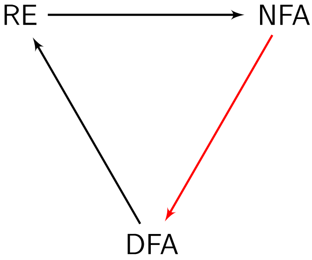
Plan de batalla

Estamos demostrando las construcciones explícitas indicadas por el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{RE} \arrow[rr] & & \mathrm{NFA} \arrow[dl] \\
& \mathrm{DFA} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

Manos a la obra

Segundo paso:



NFA → DFA

La construcción explícita de un DFA que acepta el lenguaje denotado por un NFA se conoce como *construcción de subconjuntos* (fea traducción del inglés *subset construction*)

Nace de la observación que en un instante dado del procesamiento de una palabra el NFA puede estar en un subconjunto de sus estados, y eso es todo lo que determina la evolución siguiente. El conjunto de los subconjuntos de los estados del NFA es un conjunto finito, si logramos construir una función de transición, determinar un estado inicial y estados finales entre los conjuntos, tenemos un DFA.

La función $\varepsilon-\mathrm{closure}$

Nos interesa poder expresar «el conjunto de estados en que puede estar el NFA», parte del problema son transiciones espontáneas.

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA, y sea $\mathscr{A} \subseteq Q$. Definimos $\varepsilon-\mathrm{closure}(\mathscr{A})$ como el conjunto de todos los estados que M puede alcanzar desde $\mathscr{A}$ sin leer nada.

Usando la relación de transición de M:

$$\varepsilon-\mathrm{closure}(\mathscr{A}) = \{q \in Q \colon q_a \in \mathscr{A} \wedge q_a \vdash_M^* q\}$$

La función $\varepsilon-\mathrm{closure}$

function $\varepsilon-\mathrm{closure}(\mathscr{A})$
  loop
    $\mathscr{R} \leftarrow \bigcup_{q \in \mathscr{A}} \delta(q, \varepsilon)$
    if $\mathscr{A} = \mathscr{A} \cup \mathscr{R}$ **then**
      return $\mathscr{A}$
    end
    $\mathscr{A} \leftarrow \mathscr{A} \cup \mathscr{R}$
  end
end

La función $\varepsilon - \text{closure}$

La idea es partir del conjunto $\mathscr{A}$, ir agregando estados alcanzables desde $\mathscr{A}$ con ε hasta que no hayan cambios.
Si vemos el NFA como un digrafo solo con los arcos marcados ε, lo que estamos haciendo es hallar todos los vértices (estados) alcanzables desde $\mathscr{A}$.

NFA → DFA

La idea de la construcción es simple: Dado el NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ construimos el DFA $M' = (2^Q, \Sigma, \delta', q_0', F')$.

En detalle:

$$\delta'(\mathscr{A}, a) = \varepsilon - \text{closure}\left(\bigcup_{q \in \varepsilon - \text{closure}(\mathscr{A})} \delta(q, a) \right)$$

$$q_0' = \varepsilon - \text{closure}(\{q_0\})$$

$$F' = \{\mathscr{A} \subseteq Q : \mathscr{A} \cap F \neq \varnothing\}$$

NFA → DFA

La función de transición de $\mathscr{A}$ con a es «todos los estados que se alcanzan desde $\mathscr{A}$ consumiendo una a y varias ε», estado inicial son todos los alcanzables sin consumir nada (solo ε) desde q_0, finales son todos los conjuntos de estados que contienen estados finales del NFA (el NFA podría estar en un estado final).

NFA → DFA

Parafraseando las inmortales palabras de Lagrange, «Es fácil ver que el resultado es un DFA, y que acepta $\mathscr{L}(M)$».

(Debiéramos verificar que δ' es una función, y que las relaciones de transición de M y M' coinciden, en que si

$$\alpha q \beta \vdash'_M \alpha' q' \beta'$$

entonces hay estados $p, p'' \in Q$ tales que

$$\alpha p \beta \vdash^*_M \alpha' p' \beta$$

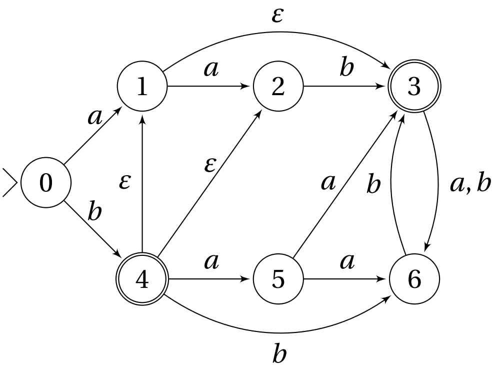
con $q \in p$ y $q' \in p'$.)

NFA → DFA

El problema es que incluso para Q más bien modesto 2^Q es gigante, y normalmente la inmensa mayoría de los conjuntos son inalcanzables. En la práctica, construimos solo los estados alcanzables desde el estado inicial del DFA.

Los conjuntos de estados que registraremos siempre incluirán todos los estados alcanzables vía transiciones ϵ, para simplificar el trabajo.

NFA ejemplo



NFA ejemplo — tabla de transición

	a	b	ε	Tipo
0	$\{1\}$	$\{4\}$	$\varnothing$	Inicial
1	$\{2\}$	$\varnothing$	$\{3\}$	
2	$\varnothing$	$\{3\}$	$\varnothing$	
3	$\{6\}$	$\{6\}$	$\varnothing$	Final
4	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{1, 2\}$	Final
5	$\{3, 6\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	
6	$\varnothing$	$\{3\}$	$\varnothing$	

Cálculo de $\varepsilon-\text{closure}$

Calculemos $\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\})$ para nuestro NFA. Note que este conjunto de estados es imposible: 0 es inicial, sin transiciones que llegan a él; a 2 se llega únicamente leyendo a (desde 1) o b (desde 0 vía 4).

Cálculo de $\varepsilon-\text{closure}$

$\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\}) = \{0,2,4$	Agregamos $\delta(0,\varepsilon) = \varnothing$
$\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\}) = \{\overset{\checkmark}{0},2,4$	Agregamos $\delta(2,\varepsilon) = \varnothing$
$\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\}) = \{\overset{\checkmark}{0},\overset{\checkmark}{2},4$	Agregamos $\delta(4,\varepsilon) = \{1,2\}$
$\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\}) = \{\overset{\checkmark}{0},\overset{\checkmark}{2},\overset{\checkmark}{4},1$	Agregamos $\delta(1,\varepsilon) = \{3\}$
$\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\}) = \{\overset{\checkmark}{0},\overset{\checkmark}{2},\overset{\checkmark}{4},\overset{\checkmark}{1},3$	Agregamos $\delta(3,\varepsilon) = \varnothing$
$\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\}) = \{\overset{\checkmark}{0},\overset{\checkmark}{2},\overset{\checkmark}{4},\overset{\checkmark}{1},\overset{\checkmark}{3}\}$	Todos considerados, fin

$$\varepsilon-\text{closure}(\{0,2,4\}) = \{0,1,2,3,4\}$$

Construcción del DFA

Construimos sistemáticamente los conjuntos alcanzables y la parte relevante de la tabla de transición. Inicialmente es solo el conjunto $\varepsilon-\mathrm{closure}(\{q_0\})$. Cada vez que aparezca un conjunto nuevo, lo agregamos a nuestra creciente tabla de transición, asignándole un nombre (letras mayúsculas, para distinguir).
Para cada conjunto construido vemos dónde nos lleva con cada símbolo de Σ, calculamos el $\varepsilon-\mathrm{closure}$ del resultado y agregamos el conjunto resultante si aún no está.

Construcción del DFA

$\varepsilon - \text{closure}(\{0\}) = \{0\} \rightsquigarrow A$:

Con a: $\{1\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{1\}) = \{1,3\} \rightsquigarrow B$

Con b: $\{4\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{4\}) = \{1,2,3,4\} \rightsquigarrow C$

$B = \{1,3\}$:

Con a: $\{2,6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{2,6\}) = \{2,6\} \rightsquigarrow D$

Con b: $\{6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{6\}) = \{6\} \rightsquigarrow E$

$C = \{1,2,3,4\}$:

Con a: $\{2,5,6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{2,5,6\}) = \{2,5,6\} \rightsquigarrow F$

Con b: $\{3,6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{3,6\}) = \{3,6\} \rightsquigarrow G$

$D = \{2,6\}$:

Con a: $\varnothing$; $\varepsilon - \text{closure}(\varnothing) = \varnothing \rightsquigarrow H$

Con b: $\{3\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{3\}) = \{3\} \rightsquigarrow I$

	Conjunto	a	b
A	$\{0\}$	B	C
B	$\{1,3\}$	D	E
C	$\{1,2,3,4\}$	F	G
D	$\{2,6\}$	H	I
E	$\{6\}$		
F	$\{2,5,6\}$		
G	$\{3,6\}$		
H	$\varnothing$		

Construcción del DFA (cont)

$E = \{6\}$:

Con a: $\varnothing$; $\varepsilon-\text{closure}(\varnothing) = \varnothing = H$

Con b: $\{3\}$; $\varepsilon-\text{closure}(\{3\}) = \{3\} = I$

$F = \{2,5,6\}$:

Con a: $\{3,6\}$; $\varepsilon-\text{closure}(\{3,6\}) = \{3,6\} = G$

Con b: $\{3\}$; $\varepsilon-\text{closure}(\{3\}) = \{3\} \rightsquigarrow I$

$G = \{3,6\}$:

Con a: $\{6\}$; $\varepsilon-\text{closure}(\{6\}) = \{6\} = E$

Con b: $\{3,6\}$; $\varepsilon-\text{closure}(\{3,6\}) = \{3,6\} = G$

	Conjunto	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
A	$\{0\}$	B	C
B	$\{1,3\}$	D	E
C	$\{1,2,3,4\}$	F	G
D	$\{2,6\}$	H	I
E	$\{6\}$	H	I
F	$\{2,5,6\}$	G	I
G	$\{3,6\}$	E	G
H	$\varnothing$		
I	$\{6\}$		

Construcción del DFA (cont)

$G = \{3, 6\}$:

Con a: $\{6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{6\}) = \{6\} = E$

Con b: $\{3, 6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{3, 6\}) = \{3, 6\} = G$

$H = \varnothing$:

Con $(a, b) : \varnothing$; $\varepsilon - \text{closure}(\varnothing) = \varnothing = H$

$I = \{3\}$:

Con a: $\{6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{6\}) = \{6\} = E$

Con b: $\{6\}$; $\varepsilon - \text{closure}(\{6\}) = \{6\} = E$

	Conjunto	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
A	$\{0\}$	B	C
B	$\{1, 3\}$	D	E
C	$\{1, 2, 3, 4\}$	F	G
D	$\{2, 6\}$	H	I
E	$\{6\}$	H	I
F	$\{2, 5, 6\}$	G	I
G	$\{3, 6\}$	E	G
H	$\varnothing$	H	H
I	$\{3\}$	E	E

Construcción del DFA (cont)

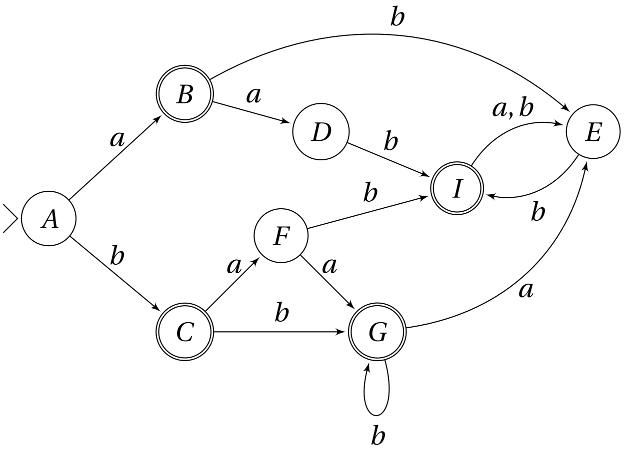
No hay más estados alcanzables, fin. Falta definir los tipos de los estados.

Construcción del DFA (cont)

Inicial (por construcción) es A. Finales son conjuntos que contienen 3 o 4. Si no es final, y siempre volvemos a él, es muerto.

	Conjunto	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	Tipo
A	$\{0\}$	B	C	Inicial
B	$\{1,3\}$	D	E	Final
C	$\{1,2,3,4\}$	F	G	Final
D	$\{2,6\}$	H	I	
E	$\{3\}$	H	I	Final
F	$\{2,5,6\}$	G	I	
G	$\{3,6\}$	E	G	Final
H	$\varnothing$	H	H	(muerto)
I	$\{6\}$	E	E	

El DFA resultante



Número de estados del DFA

El número de subconjuntos del conjunto Q de estados del NFA es $2^{|Q|}$. Resulta que hay lenguajes con NFAs muy chicos que requieren DFAs gigantes.

Usaremos el lenguaje que describimos mediante:

$$(0 \mid 1)^* 0 (0 \mid 1)^{n-1}$$

en la demostración.
Un NFA que reconoce este lenguaje tiene $n+1$ estados; un DFA que reconozca esto tiene que «recordar» los últimos n símbolos vistos, lo que se traduce en 2^n estados.

Número de estados del DFA

Dejamos la construcción del NFA como ejercicio. (No, la construcción de Thompson no da $n+1$ estados, ni de lejos.) Asimismo, dejamos de ejercicio construir un DFA para el reverso de este lenguaje, también de $n+1$ estados.

Un lenguaje que muestra crecimiento exponencial

Teorema

El lenguaje $L = \mathscr{L}((0 \mid 1)^* 0 (0 \mid 1)^{n-1})$ *es reconocido por un NFA de* $n+1$ *estados, todo DFA que lo reconoce tiene al menos* 2^n *estados.*

Un lenguaje que muestra crecimiento exponencial

Demostración.
Construir un NFA de $n+1$ estados que reconoce L quedó de ejercicio.

Un lenguaje que muestra crecimiento exponencial

Demostramos que se requiere un DFA de al menos 2^n estados por contradicción. Supongamos que el DFA $M = (Q, \{0,1\}, \delta, q_0, F)$ reconoce L, y $|Q| < 2^n$. Sean dos palabras $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ y $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$, $\alpha \neq \beta$ y $\delta(q_0, \alpha) = \delta(q_0, \beta)$ (tienen que existir por el principio del palomar: hay 2^n palabras de largo n y menos de 2^n estados).

Un lenguaje que muestra crecimiento exponencial

Sea i tal que $a_i \neq b_i$, con $a_i = 0$ y $b_i = 1$. Las palabras $\alpha 0^i$ y $\beta 0^i$ difieren en la posición $n - i + i = n$ desde el final. Solo una de ellas pertenece a L, pero el DFA supuesto acepta ambas o rechaza ambas:

$$\delta(q_0, \alpha 0^{n-i}) = \delta(\delta(q_0, \alpha), 0^{n-i}) = \delta(\delta(q_0, \beta), 0^{n-i}) = \delta(q_0, \beta 0^{n-i})$$

Contradicción. □

Resumen

- Tres formas de describir lenguajes: RE, DFA, NFA. ¿Cómo se relacionan?
- Plan de batalla: demostrar un ciclo de construcciones, RE → NFA → DFA → RE
- El conjunto de estados en que puede estar el NFA en un punto del proceso sirve de estado de un DFA. Ilustramos la construcción con un ejemplo.
- Resulta posible que el DFA necesite un número de estados exponencial en el número de estados del NFA.