INF155 - Informática Teórica

Ayudantía #8

NP-Complete Warriors

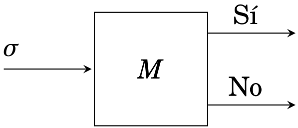
Semestre 2021-1

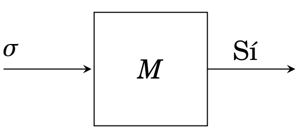
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Lenguajes computables y CE

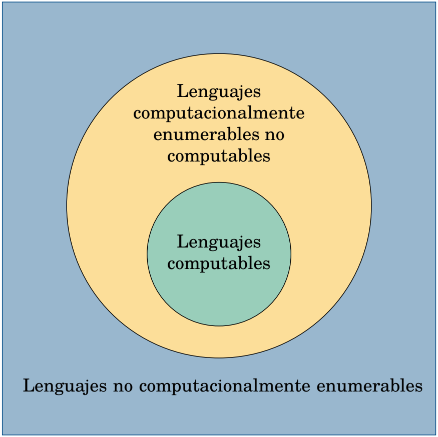
- Un lenguaje se llama ***computable*** si es aceptado por una máquina de Turing que *siempre* se detiene.
- Un lenguaje se llama ***computacionalmente enumerable (CE)*** si hay una máquina de Turing que lo acepte.

En el modelo de las *cajitas*, respectivamente, corresponde a:





Lenguajes computables y CE



Observaciones importantes

Los lenguajes CE son todos aquellos aceptados por máquinas de Turing. Por lo tanto, **los lenguajes computables son computacionalmente enumerables**, por definición.

Vocabulario

- Lenguaje computable = Lenguaje recursivo = Lenguaje decidible
- Reconocer lenguaje $\Rightarrow$ Lenguaje CE
- Decidir lenguaje $\Rightarrow$ Lenguaje computable

Propiedades

- $\mathscr{L}$ es computable $\Rightarrow \overline{\mathscr{L}}$ es computable
- $\mathscr{L}$ y $\overline{\mathscr{L}}$ son CE $\Rightarrow$ ambos son computables
- $\mathscr{L}$ es CE no computable $\Rightarrow \overline{\mathscr{L}}$ no es CE
- $\mathscr{L}$ no es CE $\Rightarrow \overline{\mathscr{L}}$ no es computable

Máquina de Turing Universal

Dada una máquina de Turing M (cuya representación como palabra es $\langle M\rangle$), buscamos construir una máquina de Turing universal U tal que U acepta $(\langle M\rangle,\sigma)$ si la máquina de Turing M acepta σ. El lenguaje aceptado por la máquina de Turing universal se denota como $\mathscr{L}_U$.

Teorema de Cantor

Las palabras de un lenguaje (y en consecuencia, las máquinas de Turing) forman un conjunto numerable (es decir, existe una biyección entre este conjunto y el conjunto de los números naturales).

El teorema de Cantor dice que hay más subconjuntos de los números naturales que números naturales. Esto implica que hay más lenguajes que máquinas de Turing. Por lo tanto, **hay lenguajes que ninguna máquina de Turing acepta**.

Lenguaje Diagonal

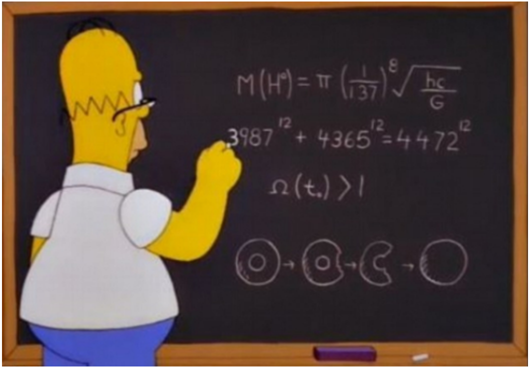
Definimos el *lenguaje diagonal* $\mathscr{L}_d$ como:

$$\mathscr{L}_d = \{i : \sigma_i \notin \mathscr{L}(M_i)\}$$

$$\begin{array}{cc|cccccc}
 & & & & \sigma_i \rightarrow & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
 & 1 & \color{red}{1} & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
M_i \downarrow & 2 & 0 & \color{red}{0} & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & 3 & 1 & 0 & \color{red}{0} & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & 4 & \vdots & \vdots & \vdots & \color{red}{1} & \cdots & \cdots \\
 & 5 & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
 & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Teorema: No hay TM que acepte el lenguaje diagonal.

Ejercicios


$M(H^0) = \pi \left(\frac{1}{137}\right)^8 \sqrt{\frac{hc}{G}}$
$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$
$\Omega(t_0) > 1$

Ejercicio 1

Considere lenguajes A (computable), B (computacionalmente enumerable) y C (no computacionalmente enumerable). ¿Qué puede decir sobre el lenguaje D en cada uno de los siguientes casos? Justifique *brevemente*.

1. $A \subseteq D$
2. $D \leq A$
3. $B \leq_p D$
4. $D \leq B$
5. $C \leq_p D$
6. $D \leq C$

Solución Ejercicio 1

1. $A \subseteq D$ no permite concluir nada. D puede ser trivial (como σ^*) hasta ni siquiera computacionalmente enumerable (por ejemplo, $A \cup \mathscr{L}_d$).
2. $D \leq A$ dice que D no es más difícil que A, permite concluir que D es computable.
3. $B \leq_p D$ indica que hay una reducción (que sea polinomial no interesa en esta situación particular), B no es más difícil que D. Vale decir, D puede ser cualquier cosa (computable, computacionalmente enumerable o no computacionalmente enumerable).
4. $D \leq B$ dice que D no es más difícil que B, permite concluir que D es computacionalmente enumerable.

Solución Ejercicio 1

5. $C \leq_p D$ dice que C no es más difícil que D, permite concluir que D no es computacionalmente enumerable.
6. $D \leq C$ dice que D no es más difícil que C, no entrega información alguna sobre D.

Ejercicio 2

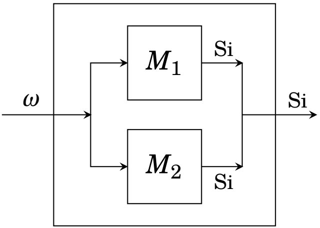
Explique mediante una construcción informal (pero convincente) su respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Son cerrados respecto a unión los lenguajes computacionalmente enumerable?
2. ¿Son cerrados respecto de intersección los lenguajes computables?

Solución Ejercicio 2

1. Supongamos dos lenguajes CE $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Como son CE, hay TM M_1 y M_2 que los aceptan, o sea $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(M_1)$ y $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}(M_2)$. Entonces $\omega \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ si y solo si ω es aceptado por M_1 o por M_2. Podemos correr M_1 y M_2 en paralelo, alternadamente, para aceptar $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$. Una descripción informal es la figura a la derecha.

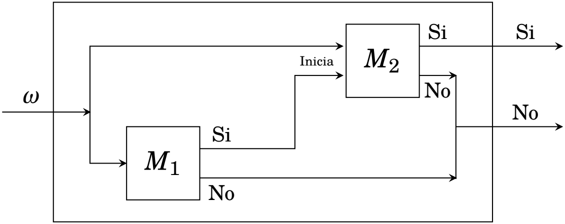
   $\therefore$ Son cerrados respecto a unión.



Solución Ejercicio 2

2. Supongamos dos lenguajes computables $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Como son computables, hay máquinas de Turing M_1 y M_2 que los aceptan y siempre se detienen, o sea $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(M_1)$ y $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}(M_2)$. Ahora bien, $\omega \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ si ω es aceptado por M_1 y por M_2. Una descripción informal es la figura de abajo.

   $\therefore$ Son cerrados respecto a intersección.



Ejercicio 3

Sea $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,x,x^2,.,+\}$ y sea $\mathscr{L}_{p[2]}$ el lenguaje de los polinomios de grado 2 sobre Σ generado por la expresión regular

$$([0-9])^+.([0-9])^+x^2 + ([0-9])^+.([0-9])^+x + ([0-9])^+.([0-9])^+$$

y sea $\mathscr{L}_{p[1]}$ el lenguaje de los polinomios de grado 1 sobre Σ generado por la expresión regular

$$([0-9])^+.([0-9])^+x + ([0-9])^+.([0-9])^+$$

Realizar lo siguiente:

Ejercicio 3

1. Hallar una función que reduzca una instancia de $\mathscr{L}_{p[1]}$ a $\mathscr{L}_{p[2]}$
2. Sabiendo que determinar si la solución de la ecuación $\sigma = 0$ es real, donde σ es una instancia de $\mathscr{L}_{p[2]}$, es decidible, ¿Qué puede concluir de $\mathscr{L}_{p[1]}$ para la misma ecuación? Argumente
3. Si reducimos $\mathscr{L}_{p[2]}$ a $\mathscr{L}_{p[3]}$, ¿Qué podemos concluir sobre $\mathscr{L}_{p[3]}$? ¿Es decidible saber si $\sigma = 0$ tiene solución real?

Solución Ejercicio 3

1. Como muchos ya sabrán, un polinomio de grado 1 es un caso particular de un polinomio de grado 2, en donde si $P[2]$ es de la forma $ax^2 + bx + c$, cuando $a = 0$ obtenemos un polinomio de primer grado ($bx + c$).
   Sabiendo lo anterior, nuestra función $f(\sigma)$ buscada simplemente realiza lo siguiente:

$$f(\sigma) = "0{,}0x^2 + " \cdot \sigma$$

donde $\sigma \in \mathscr{L}_{p[1]}$ y $f(\sigma) \in \mathscr{L}_{P[2]}$.

Solución Ejercicio 3

2. Determinar si una instancia de $\mathscr{L}_{p[1]}$ tiene una solución real en la ecuación $\sigma = 0$ es decidible. A continuación veremos 2 maneras de argumentar esto:

- Hemos reducido un problema que desconocemos su comportamiento frente a la ecuación $\sigma = 0$ a uno que si conocemos. Sabemos que el problema al cual hemos reducido (el conocido) es decidible, por lo tanto, por propiedades de reducción, sabemos que nuestro problema original es decidible (ya que hemos encontrado una reducción).

Solución Ejercicio 3

- Por otro lado, hemos encontrado una función que transforma una instancia de $\mathscr{L}_{p[1]}$ a una instancia de $\mathscr{L}_{p[2]}$ en un tiempo finito, y para el cual si podemos determinar si su solución es real o no dada la ecuación $\sigma = 0$, entonces si podemos decidir esto para $\mathscr{L}_{p[2]}$ también podemos decidirlo para $\mathscr{L}_{p[1]}$.

Solución Ejercicio 3

En realidad, ambas visiones explican lo mismo y por lo tanto hacen hincapié en el mismo concepto, la bella **reducción**.
Dependiendo qué estemos buscando determinar (si un lenguaje es decidible o si no lo es) tendrá sentido una reducción u otra.
Cuando buscamos demostrar que un lenguaje de decidible, nos es conveniente reducir este a otro lenguaje que sabemos que es decidible, en cambio si queremos demostrar que un lenguaje es indecidible, reducir un lenguaje indecidible a este es la opción correcta.

Solución Ejercicio 3

3. Por el contrario, si reducimos $\mathscr{L}_{p[2]}$ a $\mathscr{L}_{p[3]}$ no podemos concluir que para este último es decidible saber si su solución es real frente a la ecuación $\sigma = 0$ es decidible, puesto que al mapear instancias de $\mathscr{L}_{p[2]}$ a $\mathscr{L}_{p[3]}$ solo tendremos la certeza de que esas instancias, producto de la transformación a $\mathscr{L}_{p[3]}$, son decidibles mas no todas las instancias puesto que no se cubren todos los casos. Esta idea se vuelve intuitiva cuando miramos estos polinomios matemáticamente.

Solución Ejercicio 3

Consideremos los polinomios de grado 3, cuya forma es $ax^3 + bx^2 + cx + d$, cuando transformamos instancias de un polinomio de grado 2 a uno de grado 3, al polinomio de grado 2, cuya forma es $bx^2 + cx + d$, le hemos añadido $0x^3$ al comienzo, pero no cubrimos los casos donde $a = 1$ por ejemplo.

¿Dudas?

INF155 - Informática Teórica

Ayudantía #8

NP-Complete Warriors

Semestre 2021-1

UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA