Uso de las propiedades de lenguajes regulares

Horst H. von Brand
vonbrand@inf.utfsm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Contenido

Propiedades de los lenguajes regulares

- Lema de bombeo
- Cerrados respecto de operaciones regulares
- Cerrados respecto de reverso
- Cerrados respecto de operaciones entre conjuntos
- Cerrados respecto de substitución
- Cerrados respecto de homomorfismos y homomorfismos inversos

$\{a^m b^n \colon m \neq n\}$

$L = \{a^m b^n \colon m \neq n\}$ no es regular.
El complemento de esto es casi nuestro niño símbolo.

Si L fuera regular, sería regular $\overline{L} \cap \mathscr{L}(a^* b^*) = \{a^n b^n \colon n \geq 0\}$, que sabemos no es regular.

$\{a^m b^n \colon m < n\}$

$L = \{a^m b^n \colon m < n\}$ no es regular.

Por contradicción. Supongamos L regular, con lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema, consideremos $\sigma = a^N b^{N+1} \in L$, $|\sigma| = 2N + 1 \geq N$. Al dividir $\sigma = \alpha\beta\gamma$ con $|\alpha\beta| \leq N$ y $\beta \neq \varepsilon$, β es solo a, repetir β agrega a y podemos obtener más a que b, $\alpha\beta^k\gamma \neq L$ si $k > 1$. Contradicción.

$\{a^m b^n : m > n\}$

$L = \{a^m b^n : m > n\}$ no es regular.

Podemos demostrarlo de forma afín al caso anterior, pero eligiendo $k = 0$ («desinflando», no bombeando).
Alternativamente, sea $h : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ el homomorfismo definido por $h(a) = b, h(b) = a$. Entonces $h(L^{\mathrm{R}}) = \{a^n b^m : m > n\} = \{a^m b^n : m < n\}$, que acabamos de demostrar no es regular.

¡Peligro!

De $L_1 = \{a^m b^n : m < n\}$ y $L_2 = \{a^m b^n : m > n\}$ no regulares *no* podemos concluir que $L_1 \cup L_2 = \{a^m b^n : m \neq n\}$ no es regular. (Sí, en *este* caso es cierto, pero no siempre.)

Note por ejemplo que para todo L es $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$, que es regular. Incluso si L no es regular.

$\{\sigma \in \{a, b, c\}^* : \#a = 2\#b + 3\#c\}$

$L = \{\sigma \in \{a, b, c\}^* : \#a = 2\#b + 3\#c\}$ no es regular.

$\{\sigma \in \{a, b, c\}^* : \#a = 2\#b + 3\#c\}$

Consideremos los homomorfismos:

$h_1 : \{a, b, c\}^* \to \{A, B, C\}^*$ dado por:

$$h_1(a) = A$$
$$h_1(b) = BB$$
$$h_1(c) = CCC$$

Idea es que h_1 crea repeticiones, de forma de tener números iguales de A y $B + C$.

$h_2 : \{A, B, C\}^* \to \{a, b\}^*$ dado por:

$$h_2(A) = a$$
$$h_2(B) = b$$
$$h_2(C) = b$$

Idea es que h_2 cambia B y C por b.

$\{\sigma \in \{a, b, c\}^* : \#a = 2\#b + 3\#c\}$

Ahora bien, el conjunto de valores no negativos que se pueden representar por $2u + 3v$ con $u, v \geq 0$ excluye exactamente el 1 (podemos representar 2 y 3; de allí podemos representar $2 + 2k$ y $3 + 2k$ para $k \geq 0$, o sea, todos los números mayores a 1). Si L fuera regular, sería regular $h_2(h_1(L \cap \mathscr{L}(a^* b^* c^*))) \cup \{ab\} = \{a^n b^n : n \geq 0\}$.

$\{a^n b^{n^2} : n \geq 0\}$

$L = \{a^n b^{n^2} : n \geq 0\}$ no es regular.
Intuitivamente, nos dará problemas el n^2.

Usando el lema de bombeo, bombeando a falla el balance.
Alternativamente, el homomorfismo definido por $h(a) = \varepsilon, h(b) = a$ da $h(L) = \{a^{n^2} : n \geq 0\}$, que demostramos no es regular.

Cumple el lema de bombeo, no es regular

El lenguaje $L = \{ab^n c^n : n \geq 0\} \cup \mathscr{L}(b^* c^*) \cup \mathscr{L}(aaa^* b^* c^*)$ cumple el lema de bombeo, pero no es regular.

Cumple el lema de bombeo, no es regular

Cumple el lema de bombeo

Cumple el lema con $N = 3$. Tomemos una palabra σ de largo al menos N en L. Hay varios casos a considerar:

$\sigma = b^s c^t$: Si $s > 0$, podemos repetir la primera b; en caso contrario, podemos repetir la primera c.

$\sigma = ab^s c^s$: Repitiendo la a cero veces tenemos $b^s c^s \in \mathscr{L}(b^* c^*) \subset L$.
Repitiendo la a al menos 2 veces, digamos k veces, tenemos $a^k b^s c^s \in \mathscr{L}(aaa^* b^* c^*) \subset L$.

Cumple el lema de bombeo, no es regular

Cumple el lema de bombeo

$\sigma = a^2 b^s c^t$: Omitiendo aa del comienzo queda $b^s c^t \in \mathscr{L}(b^* c^*) \subset L$.
Repitiendo aa $k > 1$ veces es $a^{2k} b^s c^t \in \mathscr{L}(aaa^* b^* c^*) \subset L$.

$\sigma = a^r b^s c^t$ con $r \geq 3$: Omitiendo a del comienzo queda $a^{r-1} b^s c^t \in \mathscr{L}(aaa^* b^* c^*) \subset L$.
Repitiendo a k veces es $a^{r+k-1} b^s c^t \in \mathscr{L}(aaa^* b^* c^*) \subseteq L$.

Cumple el lema de bombeo, no es regular

Cumple el lema de bombeo

Vimos que toda palabra en L de largo mayor a 3 puede dividirse para bombeo. Cumple el lema de bombeo.

Acá podemos elegir N y la subdivisión de σ, queremos demostrar que *sí* cumple el lema. El uso del lema es por contradicción, demostrar que *ningún* N permite una subdivisión bombeable.

Cumple el lema de bombeo, no es regular

No es regular

Para demostrar que no es regular, aislamos la parte $\{ab^n c^n \colon n \geq 0\}$ (vía una intersección), eliminamos la a y traducimos el resto a nuestro niño símbolo.
Sea el homomorfismo determinado por $h(a) = \varepsilon, h(b) = a, h(c) = b$.
$h(L \cap \mathscr{L}(ab^* c^*)) = \{a^n b^n \colon n \geq 0\}$, no regular.

Resumen

- Repasamos las operaciones que demostramos preservan regularidad. Hay muchas más.
- Mostramos algunos ejemplos del uso de las operaciones.

  Intersección: Permite aislar palabras de interés

  Homomorfismos, homomorfismos inversos: Traducciones varias. Borrar, insertar símbolos.
- Se cumplió la promesa de exhibir un lenguaje no regular bombeable.