INF155 - Informática Teórica

Ayudantía #3

NP-Complete Warriors

Semestre 2022-2

UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Previamente...

Como se había dicho anteriormente, hay 3 herramientas que permiten describir los mismos lenguajes regulares junto a cómo estos se relacionaban

$$
\begin{tikzcd}
\text{R.E.} \arrow[rr, "\text{Thompson}"] & & \text{NFA} \arrow[dl, "\varepsilon\text{-closure}"] \\
& \text{DFA} \arrow[ul, "\text{Lema de Arden}"] &
\end{tikzcd}
$$

Algoritmo ε-*closure*

Es un algoritmo que permite transformar un NFA en un DFA que acepta el mismo lenguaje. Cada estado del DFA corresponde a un conjunto de estados del NFA, desde los cuales se puede acceder únicamente mediante transiciones ε.

Algoritmo *ε-closure*

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Construimos una tabla como la siguiente:

Conjunto	**a**	**b**	**c**	...	**Tipo**

En la columna *Conjunto* van las etiquetas que le da a cada conjunto de estados. En la columna *Tipo*, se indica si en dicho conjunto de estados se encuentra el estado inicial y/o estado(s) final(es). En las columnas del centro van todos los símbolos del alfabeto (una columna por cada uno de ellos).

Algoritmo *ε-closure*

2. Recorremos cada estado y nos preguntamos hacia dónde podemos movernos consumiendo ε. Esto corresponde a determinar la $\varepsilon-$clausura de dicho conjunto de estados.
3. Al conjunto de los estados pertenecientes a la $\varepsilon-$clausura le asignamos una etiqueta.
4. Luego, vemos a qué conjunto de estados podemos llegar consumiendo cada uno de los símbolos del alfabeto. A cada uno de los conjuntos obtenidos se les calcula la $\varepsilon-$clausura.
5. Si ya se determinó la $\varepsilon-$clausura de un conjunto, no se vuelve a realizar. Si aparece un nuevo conjunto, se le asigna una etiqueta y se determina su $\varepsilon-$clausura.
6. Una vez que tengamos la $\varepsilon-$clausura de todos los conjuntos, rellenamos la tabla del paso 1.

Algoritmo ε-*closure*

6. Un ejemplo es el siguiente:

Conjunto	**a**	**b**	**c**	...	**Tipo**
A	B	D	C	A	

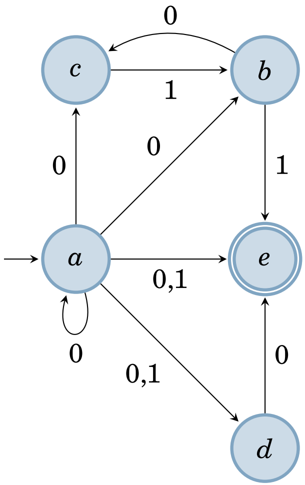
   Esto se lee: *Si estoy en el conjunto de estados A y consumo a, llego al conjunto de estados B* (y así respectivamente con los demás símbolos).

7. Una vez llenada la tabla de transiciones, podemos dibujar el DFA obtenido.

Observación: si no hay transiciones ε explícitas, recuerde que si está en un estado y no consume nada, se queda en el mismo estado.

ε-*closure* - Ejemplo

Consideremos el siguiente NFA:



ε-*closure* - Ejemplo

Apliquemos el algoritmo:

$$\varepsilon - closure(\{a\}) = \{a\} = A \rightarrow \text{inicial}$$

$$A:$$

$$0 \rightarrow \{a,b,c,d,e\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{a,b,c,d,e\}) = \{a,b,c,d,e\} = B \rightarrow \text{final}$$

$$1 \rightarrow \{d,e\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{d,e\}) = \{d,e\} = C \rightarrow \text{final}$$

$$B:$$

$$0 \rightarrow \{a,b,c,d,e\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{a,b,c,d,e\}) = B$$

$$1 \rightarrow \{b,d,e\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{b,d,e\}) = \{b,d,e\} = D \rightarrow \text{final}$$

$$C:$$

$$0 \rightarrow \{e\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{e\}) = E \rightarrow \text{final}$$

$$1 \rightarrow \emptyset$$

ε-*closure* - Ejemplo

Apliquemos el algoritmo:

$$
\begin{aligned}
&D:\\
&0 \rightarrow \{c,e\} \Rightarrow \varepsilon - closure(\{c,e\}) = \{c,e\} = F \rightarrow \text{final}\\
&1 \rightarrow \{e\} \Rightarrow \varepsilon - closure(\{e\}) = \{e\} = E\\
&E:\\
&0 \rightarrow \varnothing\\
&1 \rightarrow \varnothing\\
&F:\\
&0 \rightarrow \varnothing\\
&1 \rightarrow \{b\} \Rightarrow \varepsilon - closure(\{b\}) = \{b\} = G
\end{aligned}
$$

ε-*closure* - Ejemplo

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
&G: \\
&0 \rightarrow \{c\} \Rightarrow \varepsilon-closure(\{c\}) = \{c\} = H \\
&1 \rightarrow \{e\} \Rightarrow \varepsilon-closure(\{e\}) = \{e\} = E \\
&H: \\
&0 \rightarrow \varnothing \\
&1 \rightarrow \{b\} \Rightarrow \varepsilon-closure(\{b\}) = \{b\} = G
\end{aligned}
$$

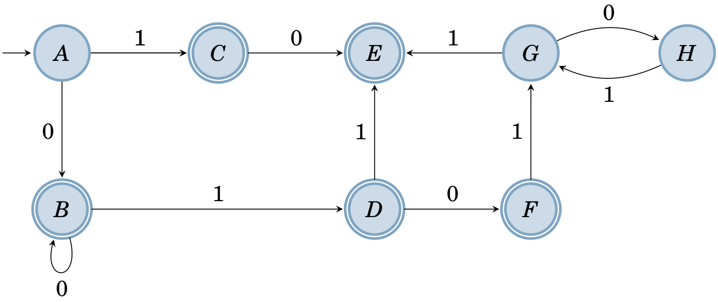
ε-*closure* - Ejemplo

Esto nos da la siguiente tabla de transición:

Conjunto	**0**	**1**	**Tipo**
A	B	C	Inicial
B	B	D	Final
C	E	$\varnothing$	Final
D	F	E	Final
E	$\varnothing$	$\varnothing$	Final
F	$\varnothing$	G	Final
G	H	E	
H	$\varnothing$	G	

ε-*closure* - Ejemplo

Y el siguiente DFA:



DFA → RE

Ya vimos cómo construir un NFA a partir de una RE. Ahora cambiaremos nuestro enfoque, y obtendremos una RE que representa el mismo lenguaje aceptado por un DFA. Para ello, lo que haremos será construir expresiones regulares para las palabras que llevan al DFA de un estado a otro. De esta forma, obtendremos un ***sistema de ecuaciones***, el cual tras ser resuelto nos permitirá obtener la RE buscada.

Lema de Arden

Sea Σ un alfabeto y $A, B \subseteq \Sigma^*$, donde $\varepsilon \notin A$. La solución de la ecuación entre lenguajes

$$X = A \cdot X \mid B$$

viene dada por:

$$X = A^* B$$

También se cumple que si la ecuación entre los lenguajes es:

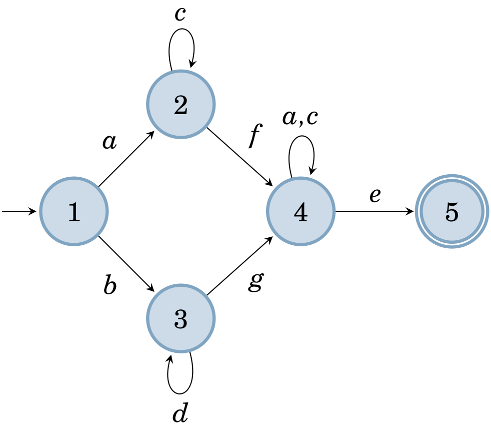
$$X = X \cdot A \mid B$$

su solución es:

$$X = BA^*$$

Lema de Arden - Ejemplo

Consideremos el siguiente DFA:



¿Cuál será su RE equivalente?

Lema de Arden - Ejemplo

Primero, construyamos las ecuaciones para cada uno de los estados. Para ello, nos preguntamos *¿qué he leído para llegar a este punto?*

1. Para llegar al estado inicial no se lee nada (ya que es nuestro punto de partida). Por ende, la ecuación para este estado es:

$$R_1 = \varepsilon$$

Lema de Arden - Ejemplo

Primero, construyamos las ecuaciones para cada uno de los estados. Para ello, nos preguntamos *¿qué he leído para llegar a este punto?*

1. Para llegar al estado inicial no se lee nada (ya que es nuestro punto de partida). Por ende, la ecuación para este estado es:

$$R_1 = \varepsilon$$

2. Para llegar a este estado tenemos 2 opciones: venir desde el estado 1 leyendo el símbolo a, o bien venir desde el estado 2 leyendo el símbolo c. Por lo tanto, la ecuación para este estado es:

$$R_2 = R_1 a \mid R_2 c$$

Lema de Arden - Ejemplo

3. Seguimos la misma lógica anterior: o venimos desde el estado 1 leyendo el símbolo b, o bien venimos desde el estado 3 leyendo el símbolo d. Por lo tanto, la ecuación para este estado es:

$$R_3 = R_1 b \mid R_3 d$$

Lema de Arden - Ejemplo

3. Seguimos la misma lógica anterior: o venimos desde el estado 1 leyendo el símbolo b, o bien venimos desde el estado 3 leyendo el símbolo d. Por lo tanto, la ecuación para este estado es:

$$R_3 = R_1 b \mid R_3 d$$

4. Para el estado 4 tenemos tres puntos de partida distintos: el estado 2, el 3 y el 4. Siguiendo la misma lógica anterior, se obtiene la ecuación correspondiente:

$$R_4 = R_2 f \mid R_3 g \mid R_4 (a \mid c)$$

Lema de Arden - Ejemplo

5. El estado 5 tiene solo un punto de partida, por lo que su ecuación correspondiente es:

$$R_5 = R_4 e$$

Lema de Arden - Ejemplo

5. El estado 5 tiene solo un punto de partida, por lo que su ecuación correspondiente es:

$$R_5 = R_4 e$$

Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \varepsilon \\
R_2 &= R_1 a \mid R_2 c \\
R_3 &= R_1 b \mid R_3 d \\
R_4 &= R_2 f \mid R_3 g \mid R_4 (a \mid c) \\
R_5 &= R_4 e
\end{aligned}$$

Lema de Arden - Ejemplo

¿Qué hacemos con el sistema de ecuaciones? Lo resolvemos aplicando el lema de Arden :)

1. Ya está lista, no hay incógnitas.

Lema de Arden - Ejemplo

¿Qué hacemos con el sistema de ecuaciones? Lo resolvemos aplicando el lema de Arden :)

1. Ya está lista, no hay incógnitas.
2. Reemplazamos todas las incógnitas por sus respectivos valores. Así, la ecuación queda como:

$$R_2 = a \mid R_2 c$$

Ahora aplicamos el lema de Arden ($X = X \cdot A \mid B \Rightarrow X = BA^*$) y obtenemos el valor explícito de R_2:

$$R_2 = ac^*$$

Lema de Arden - Ejemplo

3. Reemplazamos todas las incógnitas por sus respectivos valores. Así, la ecuación queda como:

$$R_3 = b \mid R_3 d$$

Ahora aplicamos el lema de Arden ($X = X \cdot A \mid B \Rightarrow X = BA^*$) y obtenemos el valor explícito de R_3:

$$R_3 = bd^*$$

Lema de Arden - Ejemplo

4. Igual que antes, reemplazamos todo lo conocido hasta el momento:

$$R_4 = ac^*f \mid bd^*g \mid R_4(a \mid c)$$

Aplicamos el lema de Arden ($X = X \cdot A \mid B \Rightarrow X = BA^*$) y obtenemos el valor de R_4:

$$R_4 = (ac^*f \mid bd^*g)(a \mid c)^*$$

5. Igual que antes (aunque ahora terminamos al fin):

$$R_5 = (ac^*f \mid bd^*g)(a \mid c)^*e$$

Lenguajes Regulares

Los lenguajes regulares son aquellos que pueden describirse utilizando las operaciones de concatenación, unión y estrella de Kleene una cantidad **finita** de veces. Este tipo de lenguajes es reconocido por los artefactos conocidos hasta el momento: DFAs, NFAs y REs.

Lenguajes Regulares

Los lenguajes regulares son aquellos que pueden describirse utilizando las operaciones de concatenación, unión y estrella de Kleene una cantidad **finita** de veces. Este tipo de lenguajes es reconocido por los artefactos conocidos hasta el momento: DFAs, NFAs y REs.

¿Y cómo saber si un lenguaje NO es regular?

Lenguajes Regulares

Los lenguajes regulares son aquellos que pueden describirse utilizando las operaciones de concatenación, unión y estrella de Kleene una cantidad **finita** de veces. Este tipo de lenguajes es reconocido por los artefactos conocidos hasta el momento: DFAs, NFAs y REs.

¿Y cómo saber si un lenguaje NO es regular? Utilizando el Lema de Bombeo.

Lema de Bombeo

Si $\mathscr{L}$ es un lenguaje regular, hay una constante $N > 0$ tal que si $\sigma \in \mathscr{L}$, $|\sigma| \geq N$ podemos escribir:

$$\sigma = \alpha\beta\gamma$$

con $|\alpha\beta| \leq N$, $\beta \neq \epsilon$ tal que para todo $k \geq 0$:

$$\alpha\beta^k\gamma \in \mathscr{L}$$

Aplicación del Lema de Bombeo

La siguiente proposición siempre se cumple:

$$\mathscr{L} \text{ es regular} \Rightarrow \mathscr{L} \text{ cumple el Lema de Bombeo}$$

Nosotros usaremos su versión *contrapositiva*:

$$\mathscr{L} \text{ no cumple el Lema de Bombeo} \Rightarrow \mathscr{L} \text{ no es regular}$$

Es decir, el lema sólo sirve para demostrar que un lenguaje **NO ES regular**.

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo.

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema y $\sigma = a^N b^N$, con $|\sigma| = 2N \geq N$.

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema y $\sigma = a^N b^N$, con $|\sigma| = 2N \geq N$. El lema nos dice que podemos dividir σ en $\alpha\beta\gamma$, con $|\alpha\beta| \leq N$ y $\beta \neq \varepsilon$.

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema y $\sigma = a^N b^N$, con $|\sigma| = 2N \geq N$. El lema nos dice que podemos dividir σ en $\alpha\beta\gamma$, con $|\alpha\beta| \leq N$ y $\beta \neq \varepsilon$.

Dado que la palabra escogida es $a^N b^N$, el *substring* $\alpha\beta$ sólo abarcará la sección con $a's$.

a	a	a	$\cdots$	a	a	a	b	b	b	$\cdots$	b	b	b
1	2	3	$\cdots$	N-2	N-1	N	N+1	N+2	N+3	$\cdots$	2N-2	2N-1	2N

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

Continuando con el lema, nos dice que para todo $k \geq 0$, la palabra $\alpha\beta^k\gamma$ pertenece a $\mathscr{L}$. Si escogemos $k = 0$, estaremos quitando las a's contenidas en el *substring* β (al menos una, ya que $\beta \neq \varepsilon$).

Luego de bombear, nuestra palabra tendría la forma $a^{N-|\beta|}b^N$. Para que esta palabra pertenezca a $\mathscr{L}$, debe cumplirse que $N - |\beta| = N$ (es decir, que a's y b's estén en la misma cantidad). Esto último sólo se cumple si $|\beta| = 0$, es decir, si $\beta = \varepsilon$. Esto es una contradicción, por lo que nuestro supuesto de que $\mathscr{L}$ es regular está errado.

$\therefore \mathscr{L}$ no es regular.

$\square$

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^{n^2} : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo.

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^{n^2} : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema y $\sigma = a^{N^2}$, con $|\sigma| = N^2 \geq N$.

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^{n^2} : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema y $\sigma = a^{N^2}$, con $|\sigma| = N^2 \geq N$. El lema nos dice que podemos dividir σ en $\alpha\beta\gamma$, con $|\alpha\beta| \leq N$ y $\beta \neq \varepsilon$.

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

El lenguaje $\mathscr{L} = \{a^{n^2} : n \geq 0\}$ no es regular.

Demostración: por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}$ es regular, por lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema y $\sigma = a^{N^2}$, con $|\sigma| = N^2 \geq N$. El lema nos dice que podemos dividir σ en $\alpha\beta\gamma$, con $|\alpha\beta| \leq N$ y $\beta \neq \varepsilon$.

Continuando con el lema, nos dice que para todo $k \geq 0$, la palabra $\alpha\beta^k\gamma$ pertenece a $\mathscr{L}$. Si escogemos $k = 2$, estaremos duplicando las a's contenidas en el *substring* β (al menos una, ya que $\beta \neq \varepsilon$).

Lema de bombeo - Ejemplo clásico

Luego de bombear, nuestra palabra tendría la forma $a^{N^2+|\beta|}$. Para que esta palabra pertenezca a $\mathscr{L}$, debe cumplirse que $N^2+|\beta|$ sea un cuadrado perfecto. Sin embargo:

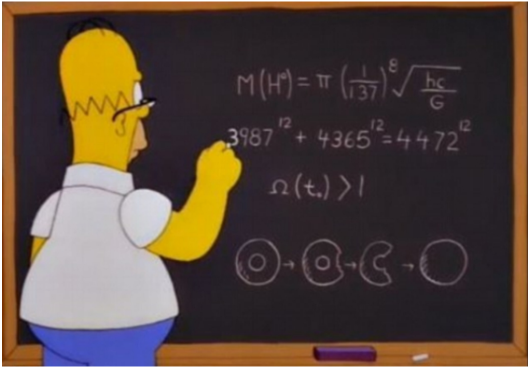
$$N^2 < N^2+|\beta| \leq N^2+N < N^2+2N+1 = (N+1)^2$$

Es decir, $N^2+|\beta|$ no es un cuadrado perfecto, y $\alpha\beta^2\gamma \notin \mathscr{L}$.

$\therefore \mathscr{L}$ no es regular.

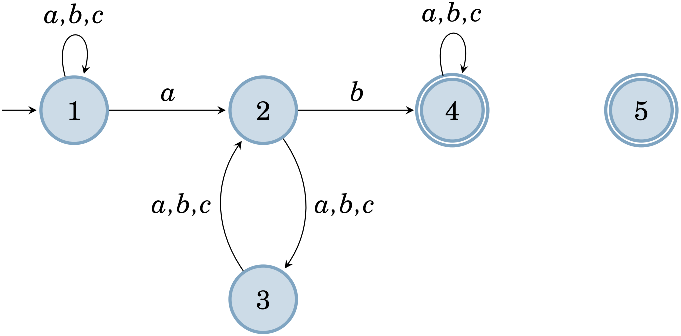
$\square$

Ejercicios


$M(H^0) = \pi \left(\frac{1}{137}\right)^8 \sqrt{\frac{hc}{G}}$
$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$
$\Omega(t_0) > 1$

Ejercicio 1

Considere el siguiente autómata:



Aplique el algoritmo ε–*closure* para obtener el DFA equivalente.

Solución Ejercicio 1

Procedemos:

$$\varepsilon - closure(\{1\}) = \{1\} = A \rightarrow \text{inicial}$$

$$A:$$

$$\text{a} \rightarrow \{1,2\} \Rightarrow \varepsilon - closure(\{1,2\}) = \{1,2\} = B$$

$$\text{b} \rightarrow \{1\} \Rightarrow \varepsilon - closure(\{1\}) = \{1\} = A$$

$$\text{c} \rightarrow \{1\} \Rightarrow \varepsilon - closure(\{1\}) = \{1\} = A$$

Solución Ejercicio 1

$B:$

$\text{a} \to \{1,2,3\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\} = C$

$\text{b} \to \{1,3,4\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,3,4\}) = \{1,3,4\} = D \to \text{Final}$

$\text{c} \to \{1,3\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,3\}) = \{1,3\} = E$

$C:$

$\text{a} \to \{1,2,3\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\} = C$

$\text{b} \to \{1,2,3,4\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,2,3,4\}) = \{1,2,3,4\} = F \to \text{Final}$

$\text{c} \to \{1,2,3\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\} = C$

$D:$

$\text{a} \to \{1,2,4\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,2,4\}) = \{1,2,4\} = G \to \text{Final}$

$\text{b} \to \{1,2,4\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,2,4\}) = \{1,2,4\} = G$

$\text{c} \to \{1,2,4\} \Rightarrow \varepsilon - \text{closure}(\{1,2,4\}) = \{1,2,4\} = G$

Solución Ejercicio 1

$$E:$$
$$\text{a} \rightarrow \{1,2\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,2\}) = \{1,2\} = B$$
$$\text{b} \rightarrow \{1,2\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,2\}) = \{1,2\} = B$$
$$\text{c} \rightarrow \{1,2\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,2\}) = \{1,2\} = B$$
$$F:$$
$$\text{a} \rightarrow \{1,2,3,4\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,2,3,4\}) = F$$
$$\text{b} \rightarrow \{1,2,3,4\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,2,3,4\}) = F$$
$$\text{c} \rightarrow \{1,2,3,4\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,2,3,4\}) = F$$
$$G:$$
$$\text{a} \rightarrow \{1,2,3,4\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,2,3,4\}) = F$$
$$\text{b} \rightarrow \{1,3,4\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,3,4\}) = \{1,3,4\} = D$$
$$\text{b} \rightarrow \{1,3,4\} \Rightarrow \varepsilon-\text{closure}(\{1,3,4\}) = \{1,3,4\} = D$$

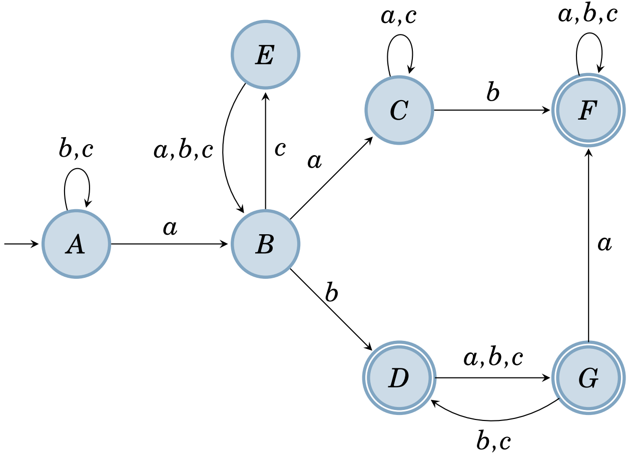
Solución Ejercicio 1

Ahora podemos construir la tabla de transiciones de nuestro DFA:

Conjunto	**a**	**b**	**c**	**Tipo**
A	B	A	A	Inicial
B	C	D	E	
C	C	F	C	
D	G	G	G	Final
E	B	B	B	
F	F	F	F	Final
G	F	D	D	Final

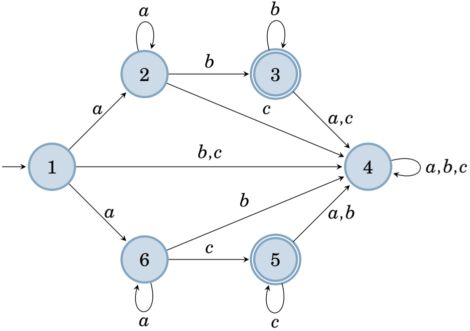
Solución Ejercicio 1

Que dibujado resulta en este pequeño artefacto:



Ejercicio 2

El jefe Gorgory solicita su ayuda para descifrar la expresión regular utilizada por la mafia para realizar sus operaciones, ya que su máquina de escribir invisible solo soporta dicha estructura. La única información disponible es el dibujo del siguiente autómata:



Ejercicio 3

Sea el lenguaje $\mathscr{L} = \{\omega\omega^R : \omega = a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que el lenguaje $\mathscr{L}$ no es regular.

Solución Ejercicio 3

Demostraremos por contradicción que $\mathscr{L}$ no es regular.

Demostración: Supongamos **L** regular, por lo tanto debe cumplir el *Lema del bombeo*

Solución Ejercicio 3

Sea N > 0 la constante del lema, escogemos $\sigma = a^N b^N b^N a^N \in \mathscr{L}$ con $|\sigma| = 4N \geq N$, entonces σ puede dividirse en 3 substrings tal que $\sigma = \alpha\beta\gamma$, $|\alpha\beta| \leq N$ y $\beta \neq \varepsilon$.

Entonces $\forall k \geq 0$, $\alpha\beta^k\gamma \in \mathscr{L}$

Solución Ejercicio 3

Notamos que, como $|\alpha\beta| \leq N$, $\alpha\beta$ contiene solo $a's$ del comienzo de la palabra σ y en consecuencia β también solo se compone de $a's$ (al menos 1)

Si $k = 0$, entonces $\alpha\beta^0\gamma = \alpha\gamma = a^{N-|\beta|}b^N b^N a^N$.

para que $a^{N-|\beta|}b^N b^N a^N$ pertenezca a $\mathscr{L}$, $|\beta| = 0 \Rightarrow \beta = \varepsilon$ pero esto es una contradicción a lo que definido en la slide anterior, por lo tanto, $\mathscr{L}$ no puede ser regular.

¿Dudas?

INF155 - Informática Teórica

Ayudantía #3

NP-Complete Warriors

Semestre 2022-2

UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA