Autómatas finitos deterministas

Horst H. von Brand
vonbrand@inf.utfsm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Contenido

Modelo formal

Formalizamos el modelo discutido recién, lo que permitirá demostraciones más adelante.

Definición

Un *autómata finito determinista* (abreviado DFA, por el inglés *Deterministic Finite Automaton*) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ consta de:

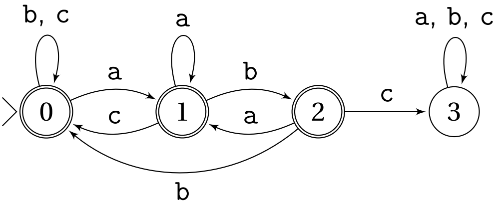
- $\boldsymbol{Q}$: Conjunto finito de *estados*
- $\boldsymbol{\Sigma}$: *Alfabeto* de entrada
- $\boldsymbol{\delta}$: *Función de transición*, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- $\boldsymbol{q_0}$: *Estado inicial*, $q_0 \in Q$
- $\boldsymbol{F}$: Conjunto de *estados finales*, $F \subseteq Q$

Comentarios

Nuestro ejemplo de comentarios en C tiene un único estado final, podemos imaginar situaciones en que se requieran dos o más. Por ejemplo, para reconocer también comentarios estilo C++, resulta cómodo crear dos ramas separadas, cada una con su estado final.

Comentarios

Para reconocer palabras que no contienen $\mathtt{abc}$ sobre $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ construimos:



Comentarios

Note que nuestro modelo permite por ejemplo $F = \varnothing$ (con lo que el autómata no acepta nada) y estados que no se pueden alcanzar desde el estado inicial entre otras cosas que no tienen sentido. Es preferible mantener simples las definiciones, y dejar fuera las construcciones cuestionables al usarlas.

Comentarios

Lo único especial del estado inicial es que el procesamiento comienza en él. En particular, puede ser final (en cuyo caso el autómata acepta ε).

Lo único especial de los estados finales es que una vez terminado el procesamiento se consulta si el estado es final o no para aceptar.

Comentarios

Nada en la definición dice que el digrafo que representa al autómata tenga que ser conexo. Estados que no pueden alcanzarse desde el estado inicial simplemente no se usan nunca.

Mantenemos simples las definiciones, dejamos fuera las construcciones cuestionables en uso práctico.

Función de transición extendida

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma.\delta, q_0, F)$ un DFA. Definimos la *función de transición extendida* de M), $\widehat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to Q$, mediante:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\delta}(q, \varepsilon) &= q && \text{para todo } q \in Q \\
\widehat{\delta}(q, \sigma a) &= \delta(\widehat{\delta}(q, \sigma), a) && \text{para todo } q \in Q,\ \sigma \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma
\end{aligned}
$$

En resumen, $\widehat{\delta}(q, \alpha)$ es el estado en el que está M si parte en q y consume α.
Como no hay confusión posible, generalmente omitiremos la decoración. O sea, en nuestro caso usaremos δ tanto para la función de transición como para la función de transición extendida.

Lenguaje aceptado

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, $\widehat{\delta}$ su función de transición extendida. El *lenguaje aceptado por M* es:

$$\mathscr{L}(M) = \{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_o, \alpha) \in F\}$$

Simplemente repite nuestra explicación informal: son las palabras que llevan a M del estado inicial a uno final.

Descripción instantánea

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, donde suponemos $Q \cap \Sigma = \varnothing$. Una *descripción instantánea de M* es una palabra sobre $\Sigma \cup Q$:

$$\alpha q \beta$$

con $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, $q \in Q$.

La idea es que M leyó α, está en el estado q y le queda por leer β. Note que nada exige que $\widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q$, son palabras arbitrarias.

Relación de transición

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. La *relación de transición de M* entre descripciones instantáneas de M, anotada $\vdash_M$, se define por:

$$\alpha q x \beta \vdash_M \alpha x p \beta \qquad \text{para todo } \alpha, \beta \in \Sigma^* \text{ y todo } x \in \Sigma \text{ con } \delta(q, x) = p$$

La idea es que M leyó α, está en el estado q y le queda por leer $x\beta$; el primer paso es leer x desde q cambiando el estado a $p = \delta(q, x)$.

Un desvío...

Definición

Sea $R \subseteq \mathscr{U} \times \mathscr{U}$ una relación. Definimos la *clausura transitiva* de R como la relación más pequeña R^+ tal que $R \subseteq R^+$ y R^+ es transitiva. Definimos la *clausura transitiva y reflexiva* de R como la relación más pequeña R^* tal que $R \subseteq R^*$ y R^* es transitiva y reflexiva.

En castellano simple: $a \, R^+ \, b$ si podemos llegar de a a b en uno o más pasos de R, $a \, R^* \, b$ si podemos llegar de a a b en cero o más pasos de R.

Lenguaje aceptado

Definición

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, $\vdash_M$ su relación de transición. El *lenguaje aceptado por* M es:

$$\mathscr{L}(M) = \{\alpha \in \Sigma^* : q_0\alpha \vdash_M^* \alpha q_f \wedge q_f \in F\}$$

Resumen

- Definimos formalmente nuestro modelo de autómata. Note que la definición formal exige que *todo* estado tenga transiciones con *todos* los símbolos (δ es una función). En discusiones informales omitiremos estados muertos.
- Dimos dos definiciones alternativas del lenguaje aceptado por un DFA. Convénzase que son equivalentes.
- Definimos también las importantes nociones de clausura transitiva y de clausura reflexiva y transitiva de una relación.