El lema de Arden

Horst H. von Brand
vonbrand@inf.utfsm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Contenido

Introducción

Ocasionalmente querremos resolver ecuaciones entre lenguajes. La ecuación no trivial más simple es el tema del lema de Arden.

El lema de Arden

Lema (Arden)

Si A, B, X son lenguajes sobre Σ, donde $\varepsilon \notin A$, la única solución a la ecuación:

$$X = A \cdot X \cup B$$

es:

$$X = A^* \cdot B$$

Si $\varepsilon \in A$, cualquier conjunto X tal que $A^* \cdot B \subseteq X$ es solución.

Discusión

De $X = A \cdot X \cup B$ sabemos que $B \subseteq X$. Substituyendo $X = B$ obtenemos que $A \cdot B \cup B \subseteq X$. Continuar de la misma manera sugiere el resultado.

El lema de Arden

Demostración.
Substituyendo $A^* \cdot B$ en la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} A \cdot (A^* \cdot B) \cup B &= A^+ \cdot B \cup B \\ &= (A^+ \cup \{\varepsilon\}) \cdot B \\ &= A^* \cdot B \end{aligned}$$

Es decir, lo indicado es una solución.

El lema de Arden

De lo anterior es claro que $A^* \cdot B$ es subconjunto de toda solución. Resta demostrar que es única si $\varepsilon \notin A$.
Supongamos ahora $\varepsilon \notin A$. Por contradicción (usando la estrategia del mínimo contraejemplo) demostramos que no hay $\xi \in X$ que no pertenece a $A^* \cdot B$. Sea $\xi \in X$ una de las palabras de largo mínimo tal que $\xi \notin A^* \cdot B$. Entonces $\xi \notin B$, por lo que $\xi \in A \cdot X$. O sea es $\xi = \alpha\xi'$, con $\alpha \in A$ y $\xi' \in X$. Como $\varepsilon \notin A$, $|\xi| = |\alpha\xi'| > |\xi'|$. Esto es absurdo.

El lema de Arden

Resta el caso en que $\varepsilon \in A$. De lo anterior sabemos que $A^* \cdot B \subseteq X$. Sea X un conjunto cualquiera. Resulta:

$$A \cdot X \cup B \subseteq X$$

dado que $\varepsilon \in A$. $\square$

Situaciones similares

Una demostración muy similar es aplicable a la ecuación:

$$X = X \cdot A \cup B$$

De forma afín resulta la solución $B \cdot A^* \subset X$, con igualdad si y solo si $\varepsilon \notin A$.

Resumen

- Resolvimos las ecuaciones no triviales más simples entre lenguajes.