Numerabilidad

Horst H. von Brand
vonbrand@inf.utfsm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Contenido

Cardinalidades

La manera básica para verificar que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos es hallar una biyección entre ellos. Por ejemplo, si en la sala todas las sillas están ocupadas y no hay personas sin sillas, hay tantas personas como sillas.

Definición

Sean conjuntos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. Diremos que la cardinalidad de $\mathscr{A}$ es a lo más la de $\mathscr{B}$ si hay una función inyectiva $f\colon \mathscr{A} \mapsto \mathscr{B}$. Anotamos $|\mathscr{A}| \le |\mathscr{B}|$ en tal caso.
Diremos que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ tienen la misma cardinalidad si hay una biyección $g\colon \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$. Anotamos $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$ en tal caso.
Si hay una función inyectiva de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$, pero no hay una biyección entre ellos, decimos $|\mathscr{A}| < |\mathscr{B}|$.

Conjuntos infinitos

Las definiciones anteriores son perfectamente aplicables a conjuntos infinitos. Por ejemplo, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, ya que podemos definir la biyección $f : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z}$:

$$f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Note que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, a pesar de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Esta es una forma de definir conjuntos infinitos: tienen la misma cardinalidad que algún subconjunto propio.

Cardinalidades

La relación $\leq$ que definimos entre cardinalidades cumple los requisitos típicos: es reflexiva y transitiva. Demostrar que si $|\mathscr{A} \leq |\mathscr{B}|$ y $|\mathscr{B} \leq |\mathscr{A}|$ entonces $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$ (si hay inyecciones en ambas direcciones hay una biyección) es más delicado si los conjuntos son infinitos (teorema de Schröder-Bernstein).
Es claro que si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ entonces $|\mathscr{A} \leq |\mathscr{B}|$.

Cardinalidades

Teorema (Cantor)

Para todo conjunto $\mathscr{A}$ *es* $|\mathscr{A}| < |2^{\mathscr{A}}|$.

Demostración.

Es claro que $|\mathscr{A}| \leq |2^{\mathscr{A}}|$. Consideremos la función cualquiera $f\colon \mathscr{A} \rightarrow 2^{\mathscr{A}}$, demostramos que no puede ser sobreyectiva (y no es una biyección). Sea $\mathscr{B} = \{x \in \mathscr{A} : x \notin f(x)\}$. Si f es sobreyectiva, hay $\xi \in \mathscr{A}$ tal que $f(\xi) = \mathscr{B}$ ya que $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Pero por construcción $\xi \in \mathscr{B} \iff \xi \notin \mathscr{B}$. $\square$

Numerabilidad

Definición

Si $|\mathscr{A}| \leq |\mathbb{N}|$ se dice que $\mathscr{A}$ es *numerable*.

Son numerables uniones finitas de conjuntos numerables, uniones numerables de conjuntos numerables, productos cruz finitos de conjuntos numerables, entre otras operaciones. Para productos cruz, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, podemos listar (r, s) en orden de $r + s$ creciente, y dentro de éstos por orden de r creciente: $(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),\ldots$. Hay una inyección $\mathbb{Q} \mapsto \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a/b \rightsquigarrow (a, b)$ con $\gcd(a, b) = 1$. Como además $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, resulta $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Numerabilidad

Teorema

El conjunto $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración.

Demostramos que el intervalo $(0,1]$ no es numerable. Escribamos $a \in (0,1]$ en decimal, $a = 0,a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$. Para evitar ambigüedades, anotamos fracciones decimales exactas con una secuencia final infinita de nueves.

Supongamos una lista de reales $r_1, r_2, \ldots$, anotados $r_k = 0,r_{k1} r_{k2} \cdots$, y consideremos el número $b = 0,b_1 b_2 b_3 \cdots$, donde

$$b_k = \begin{cases} 1 & r_{kk} \neq 1 \\ 2 & r_{kk} = 1 \end{cases}$$

q Entonces $b \in (0,1]$, pero no es ninguno de los r_k (difiere de éste al menos en el k-ésimo dígito). No hay biyección posible entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$