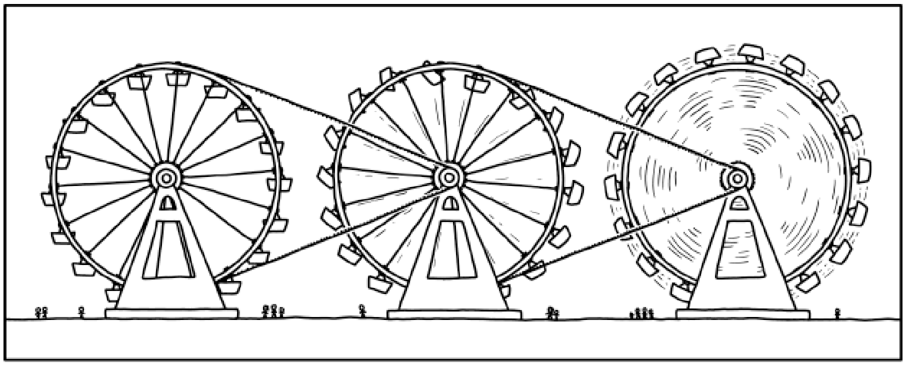
Certamen Recuperativo
Informática Teórica

28 de noviembre de 2024



https://www.xkcd.org/2973

La entrega es en hojas separadas por pregunta, cada una debidamente identificada (nombre, rol, certamen y ramo). Si no responde, entregue una pregunta en blanco.

1. Demuestre que el lenguaje $L = \{\langle M \rangle : M \text{ es un DFA y } \mathscr{L}(M) = \Sigma^*\}$ es decidible.

   (20 puntos)

2. Demuestre que los lenguajes en P son cerrados respecto de (a) la unión y (b) la concatenación. Basta una explicación informal, pero clara.
   Pista: Un lenguaje en $L \in \mathsf{P}$ puede representarse mediante una función $f(\sigma)$ y un polinomio $p(n)$ que dice si $\sigma \in L$ y se ejecuta en a lo más $p(|\sigma|)$ pasos.

   (39 puntos)

3. En lo siguiente, considere problemas D_i decidibles, I_i no decidibles, E_i computacionalmente enumerables no decidibles. Indique cuáles de las siguientes reducciones son posibles. Justifique brevemente.

   a) $\overline{E}_1 \le I_1$ b) $E_2 \le D_2$ c) $E_3 \le I_3$ d) $D_2 \le \overline{D}_3$

   (20 puntos)

4. En lo siguiente, considere problemas $P_i \in \mathsf{P}$, $N_i \in \mathsf{NP}$, C_i es NP-completo, y X_i es desconocido. Indique qué permiten concluir sobre X_i las siguientes reducciones, suponiendo que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$:

   a) $X_1 \le_p N_1$ b) $X_2 \le C_2$ c) $X_3 \le_p P_3$ y $X_3 \le_p C_3$ d) $C_4 \le X_4$ y $X_4 \le_p C_4$

   (20 puntos)

5. El problema PARTITION da un multiconjunto $\mathscr{A}$ de números naturales y pregunta si se puede dividir en dos multisubconjuntos que tienen la misma suma. Sabemos que PARTITION es NP-completo. El problema 3-PARTITION da un multiconjunto $\mathscr{A}$ y pregunta si se puede dividir en tres multisubconjuntos que tienen la misma suma. La siguiente es una demostración propuesta de que 3-PARTITION es NP-completo.

   Demostración. Definamos:

$$S(\mathscr{A}) = \sum_{e \in \mathscr{A}} e$$

   Llamemos $S(\mathscr{A}) = 3m$ en lo que sigue.

   a) Observe que si no hay $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ tal que $S(\mathscr{A}') = 2m/3$, entonces $\mathscr{A}$ no puede particionarse en tres subconjuntos que suman m cada uno (ya que la premisa implica que tampoco hay un subconjunto de $\mathscr{A}$ que suma m).

   b) Construya una instancia de PARTITION tomando un subconjunto $\mathscr{A}'$ con $S(\mathscr{A}') = 2m/3$. Si es una instancia correcta de PARTITION puede particionarse en multisubconjuntos $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ que con $\mathscr{A} \setminus \mathscr{A}'$ resuelven 3-PARTITION.

   Al revés (instancia correcta de PARTITION lleva a una instancia correcta de 3-PARTITION) es por un razonamiento igual de simple. □

   Quien publicó esta consulta pregunta:

   a) ¿Esta reducción es polinomial? El multiconjunto $\mathscr{A}'$ es arbitrario, hallarlo es una instancia de SUBSET SUM (¿Hay un multisubconjunto de $\mathscr{A}$ con suma dada S?), que sabemos es NP-completo.

   Preguntamos además:

   b) ¿Falta algo en la demostración propuesta?

   c) ¿Qué reducción pretende demostrar? ¿Es correcto esto?

(40 puntos)