Propiedades de lenguajes de contexto libre

Horst H. von Brand
vonbrand@inf.utfsm.cl

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Contenido

Propiedades

Igual que para lenguajes regulares, interesa derivar propiedades de lenguajes de contexto libre, básicamente con los mismos usos. A diferencia de los lenguajes regulares, donde el interés práctico es en la pertenencia al lenguaje, en lenguajes de contexto libre generalmente interesa la estructura impuesta por la gramática. En consecuencia, las propiedades son menos relevantes.

Propiedades

Demostraremos primero que los lenguajes de contexto libre son cerrados respecto de substitución, lo que nos servirá para demostrar varias propiedades adicionales.

En lo que sigue, tomaremos como gramáticas de contexto libre gramáticas que pueden incluir ε como lado derecho de producciones.

Substitución

Teorema

Los lenguajes de contexto libre son cerrados respecto de substitución.

Substitución

Demostración.

Supongamos los lenguajes del caso ($L \subseteq \Sigma^*$, $L_a \subseteq \Gamma^*$ para $a \in \Sigma$) dados como gramáticas de contexto libre, donde podemos suponer sin pérdida de generalidad que las gramáticas no tienen no-terminales en común. Basta entonces substituir el símbolo de partida de cada L_a cada vez que aparece a en la gramática para L, y adicionar las producciones de las gramáticas para las L_a. $\square$

Operaciones regulares

Teorema

Los lenguajes de contexto libre son cerrados respecto de las operaciones regulares.

Demostración.

Podemos expresar las operaciones regulares mediante gramáticas regulares, que son caso particular de las de contexto libre. Luego usamos clausura bajo substitución. □

Homomorfismo

Teorema

Los lenguajes de contexto libre son cerrados respecto de homomorfismos.

Demostración.

Un homomorfismo podemos considerarlo como una substitución de lenguajes de una única palabra, lenguajes que son regulares y por tanto de contexto libre. □

Homomorfismo inverso

Teorema

Los lenguajes de contexto libre son cerrados respecto de homomorfismos inversos.

Demostración.

Podemos usar la misma idea que empleamos con lenguajes regulares: alimentar un PDA que acepta L con $h(\sigma)$, que podemos descomponer en aplicar h símbolo a símbolo, resulta en un PDA que acepta $h^{-1}(L)$. Una complicación es que $h(a)$ puede llevar a varias movidas, considerando varios símbolos de la pila. Pero un autómata de pila que considera varios símbolos del tope de la pila puede simularse mediante movidas con ε para consumirlos y luego reemplazarlos con una palabra. $\square$

Intersección

Teorema

Los lenguajes de contexto libre no son cerrados respecto de intersección.

Demostración.

Los lenguajes $L_1 = \{a^k b^k c^n \colon k, n \geq 0\}$ y $L_2 = \{a^k b^n c^n \colon k, n \geq 0\}$ son ambos de contexto libre, sin embargo $L_1 \cap L_2 = \{a^k b^k c^k \colon k \geq 0\}$ no es de contexto libre. $\square$

Complemento

Teorema

Los lenguajes de contexto libre no son cerrados respecto de complemento.

Complemento

Demostración.

El lenguaje $L = \{a^k b^k c^k \colon k \geq 0\}$ no es de contexto libre, sí lo es:

$$\overline{L} = \overline{\mathscr{L}(a^* b^* c^*)} \cup L_{ab} \cup L_{ac} \cup L_{bc}$$

donde $L_{ab} = \{a^i b^j c^k \colon i, j, k \geq 0 \land i \neq j\}$, similarmente L_{ac} y L_{bc}. Podemos forzar más de un símbolo, por ejemplo, más a que b con:

$$S \to aSb \mid aA \qquad A \to aA \mid \varepsilon$$

Una construcción similar da más b que a. Concatenar con $\mathscr{L}(c^*)$ da L_{ab}. Insertar b^j entre a^i y c^k con $i > k$ es:

$$S \to aSc \mid aA \qquad A \to aA \mid B \qquad B \to bB \mid \varepsilon$$

Complemento

Demostración.

Por contradicción. Supongamos L_1 y L_2 de contexto libre, entonces es de contexto libre:

$$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$$

Pero sabemos que los lenguajes de contexto libre no son cerrados respecto de intersección. $\square$

Intersección con regulares

Teorema

Los lenguajes de contexto libre son cerrados respecto de intersección con lenguajes regulares.

Intersección con regulares

Demostración.

Sean $L_C = \mathscr{L}(M_C)$, con $M_C = (Q_C, \Sigma, \Gamma, \delta_C, q_C, Z_C, F_C)$ un PDA y $L_R = \mathscr{L}(M_R)$ donde $M_R = (Q_R, \Sigma, \delta_R, q_R, F_R)$ es un DFA. El PDA:

$$M = (Q_C \times Q_R, \Gamma, \delta, (q_C, q_R), Z_C, F_C \times F_R)$$

donde δ se define por:

$$\begin{aligned}\delta((q^{(C)}, q^{(R)}), x, A) = \{((p^{(C)}, p^{(R)}), \alpha) \colon (p^{(C)}, \alpha) \in \delta_C(q^{(C)}, x, A) \\ \wedge\, p^{(R)} = \delta_R(q^{(C)}, x)\}\end{aligned}$$

acepta $L_C \cap L_R$. □

Intersección con regulares

Igual que en la construcción para intersección entre lenguajes regulares, en una componente del estado simula M_C, en la otra M_R. Acepta si ambos autómatas aceptan. Podemos extender la misma idea a todo tipo de operación entre conjuntos de contexto libre y regulares, tal como lo hicimos para lenguajes regulares.

No podemos simular dos pilas en paralelo de la misma forma.

Resumen

- Analizamos algunas operaciones entre lenguajes de contexto libre, que nos dan herramientas adicionales para demostrar que ciertos lenguajes son de contexto libre o no.
- Tenga cuidado, los lenguajes de contexto libre *no* son cerrados respecto de complemento o intersección.
- Las demostraciones son similares a las del caso respectivo de lenguajes regulares, por lo que solo las esbozamos.