Tarea 0
Informatica Teorica

Matias peñaloza 202373037-8

2024-2

Concepto	**Tiempo [min]**
Revisión	30
Desarrollo	120
Informe	60

Objetivo

Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ definimos el lenguaje L mediante la definición recursiva:

1. $b \in L$
2. Si $\sigma \in L$, entonces $\sigma b \in L$, $\sigma ab \in L$ y $b\sigma a \in L$.

Demueste formalmente que las palabras en L tienen más b que a.

Demostracion

- Definiciones:
  - Utilizando las definiciones del lenguaje L, podemos ver que L es infinito:

    $L = \{b, bb, bab, bba, bbb, bbab, bbba, ...\}$

    Podemos descomponer L y ver que esta definido de la forma:

    $L_0 = \{b\}$
    $L_i = L_{i-1} \cup U_i$, donde $U_i = \bigcup\limits_{\sigma \in L_{i-1}} \{\sigma b, \sigma ab, b\sigma a\}$ y $i > 0$
    $L = L_\infty$

  - Denotaremos $|x|_y$ como la cantidad de y's hay en la palabra x

- Hipotesis:
  Todas las palabras que pertenecen al lenguaje L tienen mayor cantidad de b's que de a's:

  $\forall \sigma \in L : |\sigma|_b > |\sigma|_a$

- Proposicion:
  Para comprobar nuestra hipotesis utilizaremos la siguiente proposicion:
  $P(L_n) : \forall \sigma \in L_n / |\sigma|_b > |\sigma|_a$

  Veremos si se cumple $P(L_n)$ para $n = 0$ y $n = 1$
  $L_0 = \{b\}$
  $L_1 = \{b, bb, bab, bba\}$

  - Para $P(L_0)$:
    $|b|_b = 1 > |b|_a = 0$
  - Para $P(L_1)$:
    $|b|_b = 1 > |b|_a = 0$
    $|bb|_b = 2 > |bb|_a = 0$
    $|bab|_b = 2 > |bab|_a = 1$
    $|bba|_b = 2 > |bba|_a = 1$

  Como podemos ver que $P(L_n)$ se cumple para $n = 0$ y $n = 1$ entonces los usaremos como casos base

- Analisis inductivo:
  Para poder analizar el comportamiento de nuestra proposicion a lo largo de nuestro camino hacia $L = L_\infty$, tendremos que analizar como se comportan las palabras en U_i, ya que U_i a lo largo de $i \to \infty$ contendra todas las palabras que nos quedan por revisar hasta L_∞. Por lo tanto comprobaremos $P(U_i), \forall i \in \mathbb{N}$.

  Como podemos ver $U_i = \bigcup_{\sigma \in L_{i-1}} \{\sigma b, \sigma ab, b\sigma a\}$, siendo σ cada una de las palabras en L_{i-1} podemos escribir:

  $U_i = L_{i-1} \cdot b \cup L_{i-1} \cdot ab \cup b \cdot L_{i-1} \cdot a$

  Ahora podemos ver que para comprobar $P(U_i)$ simplemente tenemos que comprobar que $P(L_{i-1} \cdot b)$, $P(L_{i-1} \cdot ab)$ y $P(b \cdot L_{i-1} \cdot a)$ se cumplan.

  - Para $P(L_{i-1} \cdot b)$:
    partiendo de nuestros casos base podemos suponer que todas las palabras en L_{i-1} cumplen la condicion, ssi U_{i-1} tambien la cumple. Por lo que supondremos $P(L_{i-1})$ verdadero.

    Ahora si $\sigma \in L_{i-1}$, este cumple $|\sigma|_b > |\sigma|_a$, entonces:

$|\sigma b|_b = |\sigma|_b + 1$
$|\sigma b|_a = |\sigma|_a + 0$
$|\sigma b|_b > |\sigma b|_a$

Por lo tanto $P(L_{i-1} \cdot b)$ verdadero.

  – Para $P(L_{i-1} \cdot ab)$:
    Utilizando la misma suposicion anterior tenemos que:
    $|\sigma ab|_b = |\sigma|_b + 1$
    $|\sigma ab|_a = |\sigma|_a + 1$
    $|\sigma ab|_b > |\sigma ab|_a$

    Por lo tanto $P(L_{i-1} \cdot ab)$ verdadero.

  – Para $P(b \cdot L_{i-1} \cdot a)$:
    Utilizando la misma suposicion tenemos que:
    $|b\sigma a|_b = |\sigma|_b + 1$
    $|b\sigma a|_a = |\sigma|_a + 1$
    $|b\sigma a|_b > |b\sigma a|_a$

    Por lo tanto $P(b \cdot L_{i-1} \cdot a)$ verdadero.

  Finalmente podemos decir que $P(U_i)$ es verdadero ssi $P(U_{i-1})$ tambien.

- Conclusion:
  Comprobamos que $P(L_0)$ y $P(L_1)$ son verdaderos, y que $P(U_i)$ es verdadero ssi $P(U_{i-1})$ tambien.

  Utilizando la definicion de L_i con $i = 1$ podemos ver que:

  $P(L_1) = P(L_0 \cup U_1)$

  Lo que nos dice que $P(L_1) \iff [P(L_0) \wedge P(U_1)]$. Al ser $P(L_0)$ y $P(L_1)$ verdadero, no existe otra posibilidad mas que $P(U_1)$ verdadero.

  Al ser $P(U_1)$ verdadero y con la condicion de que $P(U_i)$ es verdadero ssi $P(U_{i-1})$ es verdadero, significa que $P(U_2)$ es verdadero, lo que implica que tambien $P(U_3)$, $P(U_4)$, $P(U_5)$...

  Finalmente podemos comprobar que $P(U_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$ es verdadero, lo que sumado a $P(L_0)$ verdadero, podemos decir que nuestra hipotesis:

  $\forall \sigma \in L : |\sigma|_b > |\sigma|_a$ se comprueba.

  Las palabras de L tienen mas b's que a's