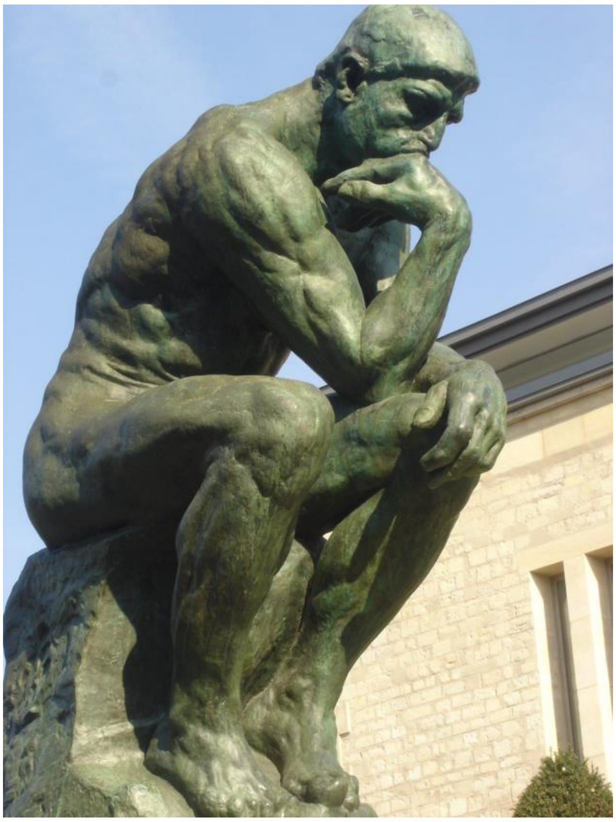


INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

DESCRIPCIÓN

Este apunte contiene un repaso y una breve introducción a la Lógica Matemática, ofrecida a los ingresantes como una herramienta fundamental para las actividades que se plantean durante la carrera.

Curso de Ingreso a la Ingeniería en Computación 2023

Pablo E. Argañaras

Contenido

1. Teoría de Conjuntos 2
1.1. Ejercicios de Teoría de Conjuntos 5
2. Conjuntos Numéricos 6
2.1. Números Naturales (ℕ) 6
2.2. Números Enteros (ℤ) 7
2.3. Elemento Neutro en (ℕ) y en (ℤ) 8
2.4. Expresiones algebraicas y Ecuaciones 8
3. El razonamiento lógico 9
3.1. La Lógica Formal 10
3.2. La Lógica Proposicional o Lógica de Enunciados 11
3.2.1 Variables y Valores de Verdad 12
3.2.2 Conectivas y sus interpretaciones Semánticas 12
3.2.2.1 Reducción de conectivas 15
3.3 Las Reglas de Formación (RF) 15
3.4 Reglas de transformación 15
3.4.1 Cálculo de enunciados como sistema de deducción natural 16
3.4.2 La Lógica Proposicional como sistema Axiomático 16
3.5 Lógica y semántica 17
3.6 Implicación lógica - Equivalencia lógica 18
3.7 Ejercicios de Lógica 19
Bibliografía 21

MÓDULO: Introducción al pensamiento lógico-matemático

1. Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos. Fue iniciada en 1870 por Georg Cantor y en la actualidad se considera una rama matemática independiente con aplicaciones en topología, álgebra abstracta y matemáticas discretas.

En lo cotidiano se suele emplear la palabra **conjunto** como sinónimo de colección, de reunión o de agrupación de objetos, aunque si intentáramos dar un concepto matemático, fijando con exactitud el significado de cada término para no dar lugar a contradicciones o interpretaciones equívocas, entraríamos en un "retroceso infinito" o en un "círculo vicioso".

Para evitar esto en matemática, existen algunos términos que se aceptan "sin definir" al comenzar el desarrollo de una teoría, y se los conoce como "conceptos primitivos" o "conceptos fundamentales" de la teoría. Esos conceptos primitivos se conocen a través de sus propiedades y de la forma en que se comportan en el desarrollo de la teoría.

En la teoría de conjuntos existen tres conceptos primitivos: conjunto, elemento y pertenencia. (Tapia et al., 1974)

Los conjuntos son colecciones abstractas de objetos consideradas como objetos en sí mismas. O *un conjunto es una colección única de objetos llamados elementos*, los cuales pueden ser cualquier cosa como árboles, compañías, números enteros, vocales o consonantes.

Los conjuntos se representan con una letra mayúscula de imprenta como A, B, C, etc.

Llamaremos elemento a cada uno de los objetos que forman parte de un conjunto.

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos (aquellos en los que la enumeración de sus elementos nunca llega a nombrar al primero o al último elemento o a ambos). Por ejemplo, las vocales en nuestro lenguaje español representan un conjunto finito, mientras que los números enteros representan un conjunto infinito.

Un conjunto está bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no a él.

En matemática en general y en teoría de conjuntos en particular, se hace uso de distintos lenguajes como son el coloquial, el simbólico y el gráfico. El **lenguaje coloquial** es el que usamos naturalmente en forma oral o escrita, el **lenguaje simbólico** (o **notación**) es el que ofrece la ventaja de ser más sintético y claro para usar en demostraciones y razonamientos, y el **lenguaje gráfico** (o **diagramas**) es el que permite aclarar o interpretar conceptos o situaciones.

Los conjuntos se pueden definir **por enumeración** o **por extensión**, cuando se enumeran uno a uno los elementos que lo forman; y **por comprensión** o **por propiedad**, cuando se da un criterio que permite decidir con certeza si un elemento pertenece o no al conjunto.

Por ejemplo, usando lenguaje coloquial podríamos nombrar el conjunto:

"Dígitos en el sistema de numeración decimal" por comprensión, o "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9" por extensión.

El lenguaje simbólico establece ciertas convenciones para representar los conjuntos, los elementos y la relación de pertenencia:

a) Los elementos que forman un conjunto se encierran entre llaves.
b) Los elementos se designan con letras minúsculas.
c) Para indicar que un elemento pertenece al conjunto se escribe el signo ∈ y para indicar que un elemento no pertenece al conjunto se escribe el mismo signo tachado.
d) Para definir un conjunto por comprensión o por propiedad, se suele usar una letra **x** para designar genéricamente a cualquier elemento del conjunto, y en tal caso decimos que **x** es una **variable**.

Por ejemplo, usando lenguaje simbólico podríamos definir el conjunto del ejemplo anterior como:

A = {x/x es un dígito del sistema de numeración decimal} Definición por **comprensión**

y se lee: "A es el conjunto de todos los x tales que, cada x es un dígito del sistema de numeración decimal".

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} Definición por **extensión**

Si a = 1 entonces a ∈ A   y se lee: "1 pertenece a A".

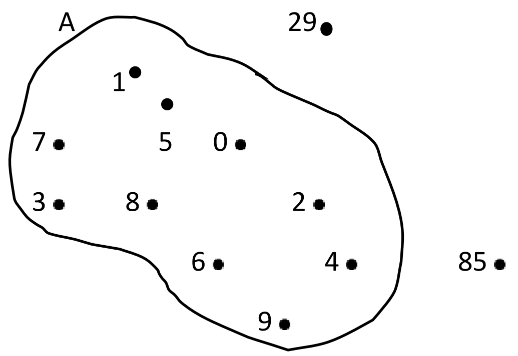
Si a = 12 entonces a ∉ A y se lee: "12 no pertenece a A".

Vemos entonces que con las primeras letras del alfabeto se designan a los elementos **constantes** y bien determinados, y con las últimas letras a los elementos **variables**.

El lenguaje gráfico utiliza una curva simple cerrada para encerrar los elementos (puntos) que pertenecen a un conjunto, y también fija algunas convenciones:

a) Los conjuntos se representan por una curva simple cerrada.
b) Los elementos que pertenecen al conjunto se representan por puntos interiores a la curva.
c) Los elementos que no pertenecen al conjunto se representan por puntos exteriores a la curva.
d) Ningún punto se representa sobre la curva.

Por ejemplo, usando el lenguaje gráfico podríamos representar el conjunto del ejemplo anterior como:



Estas representaciones ideadas por Euler y difundidas por John Venn, conocidas como diagramas de Venn, son representaciones convencionales que no dicen nada de la ubicación de los elementos en el espacio físico o en el mundo real.

Si un conjunto se define por comprensión, la propiedad debe ser claramente enunciada para que todos puedan decidir con el mismo criterio, cuándo un elemento pertenece al conjunto. Por ejemplo, decidir si una persona es alta o baja, o si un auto es veloz o no, o si una prenda de vestir es cara o barata, depende de una apreciación personal y por lo tanto la elección de los elementos que pertenecen a cada conjunto varía de acuerdo con los distintos criterios. En cambio, cuando nos referimos al conjunto de los varones que miden más de 1,73 m de altura, o al conjunto de los colores primarios, estamos señalando a cuáles elementos nos referimos y los conjuntos quedan bien determinados.

Además de los conjuntos convencionales se pueden encontrar otros conjuntos especiales como:

- Conjunto vacío, que no tiene ningún elemento: ∅
- Conjunto unitario, que tiene 1 elemento.
- Conjunto par, que tiene 2 elementos.
- Conjunto terna, que tiene 3 elementos.
- Conjunto referencial o universal, formado por todos los elementos del tema de referencia.
- Complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos que pertenecen al universal y que no pertenecen a A.
- Conjuntos iguales son aquellos que están formados por los mismos elementos.

La noción de conjuntos iguales permite vincular conjuntos entre sí. Luego, la inclusión de un conjunto en otro se puede ver como una relación que existe entre ellos.

Supongamos el conjunto de los dígitos en el sistema de numeración decimal, y el conjunto de los dígitos pares del sistema de numeración decimal, y llamemos A al primer conjunto, y llamemos B al segundo conjunto. Diremos que B es parte de A, o que B es parte propia de A, o que B es subconjunto de A, o que B está propiamente incluido en A.

Un conjunto B está estrictamente incluido en A si todo elemento de B pertenece a A pero existe por lo menos un elemento de A que no pertenece a B.

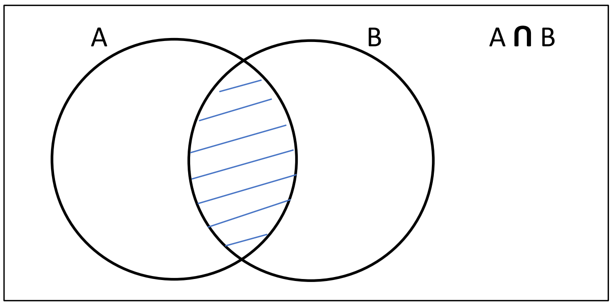
Además, dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si cada uno de ellos está incluido en el otro.

El conjunto vacío está incluido en todo conjunto.

Finalmente, hay que aclarar la diferencia entre la relación de pertenencia y la relación de inclusión:

- La relación de pertenencia vincula un elemento con un conjunto.
- La relación de inclusión vincula dos conjuntos.

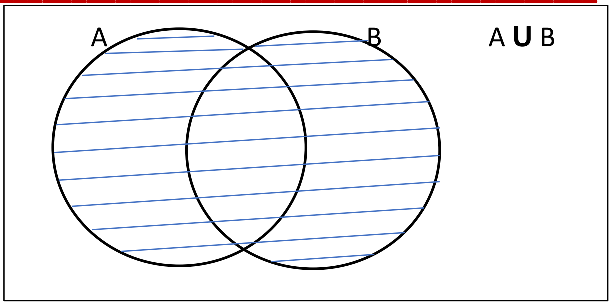
Las operaciones entre conjuntos son: Intersección, Unión y Diferencia.



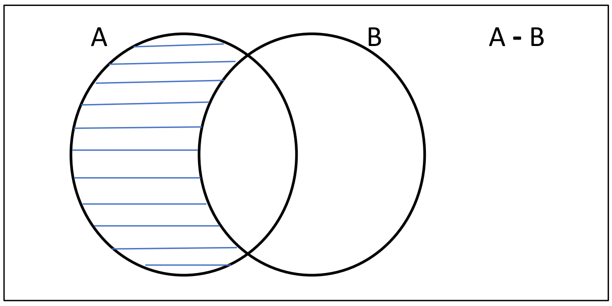
Se llama **intersección** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B.

Esta operación de intersección da origen a un nuevo tipo de conjuntos llamados Disjuntos. Se dice que dos conjuntos A y B son disjuntos cuando la intersección es vacía.

Se llama **unión** de dos conjuntos A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, o a B, o a ambos.



Se llama **diferencia** entre un conjunto A y otro B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. El orden de la operación "A – B" es "Importante".



Luego, cada vez que se necesite trabajar con conjuntos, sean estos de números, de puntos, de figuras, de caracteres, de símbolos de un alfabeto, u otros, imitaremos a los matemáticos cuando inician el desarrollo de una teoría: fijando como punto de partida los conceptos primitivos (que se aceptan sin definir) y ciertas propiedades que se aceptan sin demostrar (axiomas), a partir de ellos se definen nuevos conceptos (definiciones) y se demuestran nuevas propiedades (teoremas). Y el lenguaje que usan los matemáticos para desarrollar sus teorías es el lenguaje de la lógica.

1.1. Ejercicios de Teoría de Conjuntos

a) Indique el tipo de definición (comprensión o extensión) de los siguientes conjuntos:
   1. A = {x/x es dígito del sistema de numeración binario} ______________________________
   2. B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F} ____
   3. C = {x/x es dígito del sistema de numeración octal} ________________________________
   4. D = {x/x es dígito del sistema de numeración hexadecimal} __________________________
   5. E = {0, 1}
   6. F = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
   7. G = {x/x es letra minúscula del código ASCII}

b) Defina por extensión los siguientes conjuntos:
   1. H = {x/x es letra de la fila guía del teclado QWERTY}
   2. I = {x/x es dígito de la fila superior del teclado QWERTY}
   3. J = {x/x es letra de la fila inferior del teclado QWERTY}
   4. K = {x/x es número natural de dos dígitos múltiplo de 5}
   5. L = {x/x es número natural de dos dígitos divisible por 7}

c) Repasando "pertenencia" con los puntos a) y b), indique con V o F si es verdad o es falso que:
   1. 2 ∈ A ______
   2. 9 ∉ C ______
   3. D ∈ D ______
   4. z ∈ G ______
   5. 1 ∈ A ______
   6. 3 ∈ C ______
   7. 45 ∈ L ______

d) Repasando "operaciones entre conjuntos" de los puntos a) y b) encuentre gráficamente:
   1. B ∩ F

2. H $\cup$ I
3. B $-$ F
4. H $\cap$ B
5. J $\cup$ D
6. F $-$ E
7. A $\cap$ H

2. Conjuntos Numéricos

En este apartado haremos un repaso de las propiedades y de las operaciones en los conjuntos numéricos que se consideran imprescindibles para los módulos siguientes del curso de Ingreso.

2.1. Números Naturales (ℕ)

Es el conjunto de números que existe desde que el hombre tuvo necesidad de "contar", por ejemplo, sus utensilios o su ganado. Es el primer conjunto de números que aprendemos desde niños, posee infinitos elementos, y su primer elemento es 1. Este conjunto se simboliza con la letra ℕ y sus elementos son:

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}$$ y así continúa indefinidamente.

Consideremos las operaciones elementales en el conjunto de los números naturales y revisemos sus propiedades:

1) La suma de dos números naturales es un número natural. Debido a esto se dice que el conjunto de los números naturales es "*cerrado para la suma*".

$$\text{Si } a \in \mathbb{N}\ y\ b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a + b = c\ siendo\ \ c \in \mathbb{N}$$

2) Si se consideran tres números naturales el resultado de la suma de los dos primeros más el tercero es igual a la suma del primero más el resultado de la suma de los otros dos. Por eso se dice que "*la suma de números naturales es asociativa*".

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{N} \text{ entonces } (a + b) + c = a + (b + c)$$

3) Si a un número natural le sumo otro, se obtiene el mismo resultado que si al segundo le sumo el primero. Por esto se dice que "*la suma de naturales es conmutativa*".

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a + b = b + a$$

4) La resta de dos números naturales solamente será un número natural si el minuendo es mayor que el sustraendo.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{N} \text{ y } a > b \text{ entonces } a - b = c\ siendo\ \ c \in \mathbb{N}$$

5) La multiplicación de dos números naturales es un número natural. Debido a esto se dice que el conjunto de los números naturales es "*cerrado para la multiplicación*".

$$\text{Si } a \in \mathbb{N}\ y\ b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a \cdot b\ = c\ siendo\ \ c \in \mathbb{N}$$

6) Si se consideran tres números naturales el resultado de la multiplicación de los dos primeros por el tercero es igual a la multiplicación del primero por el resultado de la multiplicación de los otros dos. Por eso se dice que “*la multiplicación de números naturales es asociativa*”.

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{N} \text{ entonces } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

7) Si a un número natural se lo multiplica por otro, se obtiene el mismo resultado que si al segundo se lo multiplica por el primero. Por esto se dice que “*la multiplicación de naturales es conmutativa*”.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a \cdot b = b \cdot a$$

8) La división de dos números naturales solamente será un número natural si el dividendo se puede repartir de forma exacta en grupos indicados por el divisor. Es decir, el cociente de dos números naturales será un número natural, solamente cuando se verifique que:

$$Dividendo - (Divisor \cdot Cociente) = 0$$

esto es, cuando el resto de la división sea igual a cero

Dividendo	Divisor
Resto	Cociente

2.2. Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Es el conjunto de números que aparece para dar solución a situaciones que el conjunto de los números naturales no alcanza a representar. Por ejemplo, la resta 1-3, o la cantidad de dinero que debemos, o las temperaturas bajo cero, entre otros. Posee infinitos elementos, se simboliza con la letra $\mathbb{Z}$ y sus elementos son:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-4}, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-2}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\}$$

Consideremos las operaciones elementales en el conjunto de los números enteros y revisemos sus propiedades:

9) La suma de dos números enteros es un número entero. Debido a esto se dice que el conjunto de los números enteros es “*cerrado para la suma*”.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a + b = c\ siendo\ \ c \in \mathbb{Z}$$

10) Si se consideran tres números enteros el resultado de la suma de los dos primeros más el tercero es igual a la suma del primero más el resultado de la suma de los otros dos. Por eso se dice que “*la suma de números enteros es asociativa*”.

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ entonces } (a + b) + c = a + (b + c)$$

11) Si a un número enteros le sumo otro, se obtiene el mismo resultado que si al segundo le sumo el primero. Por esto se dice que “*la suma de enteros es conmutativa*”.

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a + b = b + a$$

12) La resta de dos números enteros es un número entero.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a - b = c\ siendo\ \ c \in \mathbb{Z}$$

13) La multiplicación de dos números entero es un número entero. Debido a esto se dice que el conjunto de los números enteros es "*cerrado para la multiplicación*".

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a \cdot b = c\ siendo\ \ c \in \mathbb{Z}$$

14) Si se consideran tres números enteros el resultado de la multiplicación de los dos primeros por el tercero es igual a la multiplicación del primero por el resultado de la multiplicación de los otros dos. Por eso se dice que "*la multiplicación de números enteros es asociativa*".

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ entonces } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

15) Si a un número entero se lo multiplica por otro, se obtiene el mismo resultado que si al segundo se lo multiplica por el primero. Por esto se dice que "*la multiplicación de enteros es conmutativa*".

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a \cdot b = b \cdot a$$

16) La división de dos números enteros solamente será un número entero si el divisor es distinto de cero y si el dividendo se puede repartir de forma exacta en grupos indicados por el divisor. Es decir, el cociente de dos números enteros será un número entero, solamente cuando se verifique que:

$$Dividendo - (Divisor \cdot Cociente) = 0$$

esto es, cuando el resto de la división sea igual a cero

Dividendo | Divisor
Resto Cociente

2.3. Elemento Neutro en (ℕ) y en (ℤ)

El elemento neutro para el producto en el conjunto de números naturales es "**1**", porque cualquier número multiplicado por 1 da como resultado el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{N}\ y\ 1 \in \mathbb{N} \text{ entonces } a \cdot 1 = a$$

El elemento neutro para la suma en el conjunto de números enteros es "**0**", porque cualquier número sumado a 0 da como resultado el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}\ y\ 0 \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a + 0 = a$$

El elemento neutro para el producto en el conjunto de números enteros es "**1**", porque cualquier número multiplicado por 1 da como resultado el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}\ y\ 1 \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a \cdot 1 = a$$

2.4. Expresiones algebraicas y Ecuaciones

Una expresión algebraica es una expresión matemática en la cual se combinan números, letras y operaciones. Una expresión algebraica permite expresar una relación o una operación entre distinto valores numéricos pero de manera general. A partir de expresiones algebraicas se presentan las fórmulas, las ecuaciones y los polinomios. Por ejemplo,

$$2ab^2 - 3a + b^3$$

es una expresión algebraica. Los números 2, -3 y 1 son los coeficientes de los términos ab^2, a y b^3, que forman la parte literal de la expresión.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido llamado incógnita. Resolver una ecuación significa encontrar, si existe, el valor de esta incógnita, es decir, un valor real que hace verdadera la igualdad.

Las ecuaciones pueden no tener solución, o bien tener una, varias o infinitas soluciones.

3. El razonamiento lógico

Pensar es un complejo proceso que se inicia con la creación de imágenes mentales en nuestro cerebro, a las que integramos, emparejamos, proyectamos o asociamos con los conceptos o esquemas que tenemos memorizados, representándonos las situaciones del mundo y de nosotros mismos, en un proceso simbólico que necesitamos estructurar en secuencias, sintáctica o lógicamente organizadas. Luego de ello podemos prever lo que sucederá, evaluar las consecuencias de nuestros actos, anticiparnos para evitar episodios desfavorables y promocionar aquellos que más nos beneficien. Naturalmente, esto se puede ver influido por nuestras emociones y por factores físicos o sociales que modulan, habitúan y prejuzgan nuestras maneras de representarnos las cosas del mundo.

Al estar constantemente pensando, construimos secuencias temporalizadas de imágenes o conceptos que representan simbólicamente cosas o eventos que podemos poner en movimiento para producir (simbólicamente) lo que aún no ha acontecido. Ese “poner en movimiento” que necesita de una memoria en funcionamiento y de una conciencia de lo que estamos pensando, es a lo que podemos llamar *razonamiento*. Luego, *razonar,* consiste en producir juicios.

Un juicio tiene la forma de una proposición, es decir, de una oración. Por ejemplo, “esta hoja es blanca”, es un juicio. En él están contenidos los conceptos “hoja” y “blanca”, y también hay una estructura sintáctica, lógica, como el verbo “ser” que es un elemento que nos sirve de enlace o de conjunción o de cuantificador que indica el dominio del que hablamos, por ejemplo. Esos elementos que tienen origen en nuestros esquemas de imágenes y nos permiten razonar, también nos permiten ir de lo dado a lo que todavía no sabemos o no ha ocurrido, porque una vez que creamos un juicio podemos conectarlo con otro y producir una secuencia causal o deductiva entre ellos.

Si por ejemplo obtenemos el siguiente juicio:

(1) Todos los hombres son mortales

Y luego conocemos a Romualdo y construimos el siguiente juicio:

(2) Romualdo es un hombre

¿Será necesario esperar a la muerte de Romualdo para deducir que

(3) Romualdo es mortal?

Razonando, es decir, encadenando juicios conocidos podemos llegar a obtener nuevos conocimientos, prever situaciones, tomar decisiones, etc. Así la idea de razón es una característica que adopta el pensamiento cuando compone, relaciona y asocia juicios respetando las estructuras lógicas contenidas en los juicios mismos.

El *razonamiento lógico* es entonces un conjunto de juicios que mantienen entre sí relaciones lógicas de forma tal que, partiendo de algunos juicios dados a los que denominamos *premisas*, podemos llegar deductivamente a un juicio que no teníamos y que denominamos *conclusión*.

La obtención de la conclusión, si procedemos lógicamente, asegura la validez de esta por la propia estructura lógica de los juicios que componen las premisas. (Gutiérrez, s. f.)

Por ejemplo, si partimos de los siguientes juicios como premisas:

Si llueve ***entonces*** me mojo

y llueve

Podemos concluir que: me mojo

Esto es una **inferencia** o razonamiento deductivo en el cual, si las premisas fueran verdaderas, la conclusión también lo sería.

La ciencia que estudia qué tipos de esquemas de inferencia asegura la validez de las conclusiones es la **Lógica**.

3.1. La Lógica Formal

Podemos definir a la **lógica** como *la ciencia de los principios de la validez formal de la inferencia*. La lógica solamente se ocupa de razonamientos como productos o resultados, independientemente de quién lo piense o de cómo se haya producido.

Las ciencias empíricas o experimentales se ocupan de investigar la verdad material, por ser este un asunto de experiencia. La lógica en cambio se ocupa de la verdad formal o de la validez formal, prescindiendo de los contenidos de los juicios para ocuparse de la mera forma lógica.

El proceso de formalización consistirá en asignar a cada proposición u oración una letra minúscula a partir de la letra “p”, por convención, a la que llamaremos variable proposicional. Una variable proposicional es algo que puede estar por cualquier oración, con cualquier contenido. La noción de variable es precisamente algo que admite *instancias de sustitución* dentro de un dominio especificado, en este caso que trataremos con variables proposicionales el dominio de sustitución será el conjunto de las oraciones.

Si formalizamos inferencias como (1):

p: llueve

q: se me moja la ropa

simbolicemos la relación condicional *si…entonces* mediante el signo → que usaremos de forma infija:

$p \to q$

$\underline{p\quad\quad}$

q

Si en cambio formalizamos inferencias como (2):

p: llueve

q: me mojo

p → q

q

p

La lógica nos indicaría que (1) es un esquema de inferencia válido, mientras que (2) no lo es. Porque todo razonamiento que tenga la estructura lógica de (1) asegura la validez de las conclusiones obtenidas, o bien si las premisas fueran verdaderas, la conclusión también sería verdadera. A esto se le llama *validez formal de las inferencias*.

3.2. La Lógica Proposicional o Lógica de Enunciados

La lógica se estructura en cálculos, es decir, en una simple estructura sintáctica; y un primer criterio de clasificación de la lógica viene determinado en función de cómo sean estos cálculos. Una de estas clasificaciones es la **Lógica de Proposiciones o de Enunciados**: el cálculo básico de la lógica formal es el cálculo de enunciados o proposicional, cuyas fórmulas son proposiciones, oraciones o enunciados sin analizar internamente. La relación lógica por estudiar es la que se establece entre oraciones que constituyen la unidad mínima de significación lógica. Este cálculo es un cálculo hipotético, porque la deducción se establece en una relación condicional entre las premisas y la conclusión (**si** *ocurren las premisas*, **entonces** *ocurre la conclusión*).

La estrategia de la lógica como ciencia es que diseña un método general de prueba de razonamientos, un mecanismo efectivo que responde sí o no ante la pregunta ¿es este razonamiento válido? Y es lo que llamamos *cálculo*. Entonces nos preguntamos ¿de qué se compone todo cálculo?:

(1) De un **vocabulario básico** o **elementos primitivos**, porque se necesita una definición exhaustiva que determine cuáles son los elementos primitivos, y cuáles no.
(2) De un conjunto de **reglas de formación** que establecen cuáles son las combinaciones correctas posibles de los elementos primitivos. El conjunto de reglas de formación proporciona una definición de **fórmula bien formada** (fbf) de manera que ante cualquier combinación de elementos se pueda determinar si la expresión resultante es o no una fbf.
(3) De un conjunto de **reglas de transformación** que definen cómo pasar de fbf a otras que estén igualmente bien formadas. Estas reglas deben tener un carácter efectivo o algorítmico, de manera que sea posible decidir si una transformación de unas fórmulas en otras se ha realizado correctamente.

En consecuencia, por cómo se diseñan los cálculos no es posible equivocarse, es decir, su estructura inferencial asegura siempre la validez formal. Y lo que debemos cuidar en cada paso al construir un cálculo, es que se mantenga la validez usando una premisa, o un supuesto hipotético o el resultado de la aplicación de una regla.

El cálculo de proposiciones o de enunciados toma como elementos primitivos o vocabulario básico, por un lado, *variables proposicionales* que se usan para referirse a oraciones completas, y por otro lado los *símbolos lógicos* que formalizan a los elementos que indican la estructura y las relaciones lógicas que se establecen entre las proposiciones, que en el lenguaje natural lo suelen cumplir las conjunciones. Y como la lógica proposicional es una lógica bivalente, sus proposiciones siempre asumirán dos valores posibles, y siempre serán sólo verdaderas o falsas.

3.2.1 Variables y Valores de Verdad

El contenido de una proposición lo representamos mediante una *variable*, que en general se nombra con letras consonantes minúsculas a partir de p, q, r, s y así siguiendo. Y si fuera necesario también es posible usar subíndices como p_1, p_2, p_3, ..., p_n.

Las proposiciones que nos interesan en lógica proposicional son siempre proposiciones enunciativas o aseverativas, que serán verdaderas o falsas. Por lo tanto, una proposición formalizada por la variable p, por ejemplo, podrá tener el valor verdadero o falso, y se podrá simbolizar con los valores 1 para verdadero y 0 para falso. Si lo expresamos gráficamente usando una tabla, quedaría como

p
V
F

p
1
0

Para dos variables **p** y **q**, las posibles combinaciones de valores de verdad que se pueden dar entre ellas son:

p	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

En general, dado un número **n** de proposiciones, el número de combinaciones posibles de sus valores de verdad sería $\mathbf{2^n}$. Entonces para n=3 habría 8 combinaciones, para n=4 habría 16 combinaciones, y así siguiendo. Por ejemplo, para 3 variables **p**, **q** y **r**, la tabla sería:

p	Q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

3.2.2 Conectivas y sus interpretaciones Semánticas

Los *símbolos lógicos*, también conocidos como *conectivas* u *operadores* de un cálculo, son los encargados de establecer las conexiones lógicas entre las proposiciones y se comportan como funciones u operadores en las matemáticas.

Las conectivas lógicas se comportan de igual manera que las matemáticas, con la diferencia que sus argumentos van a ser proposiciones y su valor un valor de verdad. Es decir que las conectivas lógicas toman como argumentos los valores de verdad de las proposiciones y su resultado es también un valor de verdad.

Dado que la verdad de una oración compuesta depende del valor de verdad de las oraciones simples que se conectan para formarla, los elementos que permiten componer oraciones atómicas en oraciones moleculares son funciones de verdad.

Los operadores o conectivas se pueden clasificar en monádicos y en diádicos. Los monádicos tienen sólo un argumento y los diádicos requieren de dos argumentos para el cálculo. En general llamamos operadores poliádicos a los que requieren más de dos argumentos.

Negación: es una conectiva monádica que toma como argumento una proposición y arroja como valor lo contrario de la proposición. Se expresa mediante el signo **~** ó **¬** y se usa prefija a la variable proposicional a la que se aplica, por ejemplo: **~p** ó **¬p**. Evidentemente simboliza al "no" o a cualquier forma de negación del lenguaje natural. Opera invirtiendo el valor de verdad del argumento. Si la proposición p es verdadera, entonces **¬p** es falsa, y al revés. En forma de tabla sería:

p	¬p
V	F
F	V

p	¬p
1	0
0	1

Conjunción: es una conectiva diádica que dadas dos proposiciones p y q se pueden unir en conjunción mediante "y" o cualquier otra forma de conjunción del lenguaje natural. Se expresa mediante el signo **∧** y se coloca de forma infija entre las dos variables proposicionales que conecta, como **p ∧ q**. La conjunción de dos proposiciones atómicas es verdadera cuando cada proposición componente es verdadera. En el ejemplo de la inferencia (2) decíamos que p: "llueve" y q: "me mojo", y la interpretación semántica de la conjunción es:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunción: es una conectiva diádica que dadas dos proposiciones cualesquiera p y q se pueden unir mediante disyunción "o" y se simboliza con el signo **v** que se coloca de forma infija entre las dos variables proposicionales que conecta, como **p v q**.

La disyunción puede interpretarse de dos maneras distintas:

- Disyunción exclusiva: si se da una de las alternativas no se da la otra.
- Disyunción inclusiva: se puede dar una u otra de las alternativas, o ambas a la vez.

Desde el punto de vista lógico es mayor la importancia de la disyunción inclusiva, y su interpretación en forma de tabla es:

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	p v q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Condicional: el condicional “si…entonces” es también una conectiva para formalizar la estructura deductiva entre dos premisas, así se pueden relacionar p y q condicionalmente como “*si* **p** *entonces* **q**”, y se puede simbolizar con **→** como **p → q**. La primera parte del condicional (**p**) se llama antecedente y la última parte (**q**) se llama consecuente. En esta conectiva hay que tener en cuenta el orden de colocación de las variables, porque la fórmula **p → q** no es igual que **q → p** que produce un resultado completamente distinto.

Analicemos en qué casos es verdadero el ejemplo “*si llueve entonces me mojo*” y:

- Su antecedente y su consecuente son verdaderos: entonces ocurre que llueve y ocurre que me mojo. No necesita mayor análisis.
- Su antecedente es falso, pero su consecuente es verdadero: en este caso sabemos que existe una relación entre el hecho de llover y el hecho de mojarme, el hecho de mojarme, aunque deje de llover no niega la relación anterior. Todavía sería verdad que “*si lloviera, me mojaría*”.
- Su antecedente y consecuente son falsos: en este caso podríamos utilizar el mismo razonamiento anterior, “*si no llueve* entonces *no me mojo*”, y “*si lloviera, me mojaría*”.
- El único caso en que el condicional es Falso, es cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Es decir, “*si llueve*” en ningún caso dejaría de verificarse que “*me mojo*”.

Luego la tabla de verdad del condicional quedaría como:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	p → q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bicondicional: el bicondicional expresa la condición suficiente y necesaria como “*si y sólo si*” y se simboliza mediante ↔ como **p ↔ q**. El bicondicional es la conjunción del condicional con su inverso, o sea, de **p → q** y de **q → p** Diremos que un bicondicional es verdadero sólo cuando sus proposiciones atómicas tienen el mismo valor de verdad.

Luego la tabla de verdad del bicondicional quedaría como:

p	q	p → q	q → p	(p → q) ∧ (q → p)	p ↔ q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

p	q	p → q	q → p	(p → q) ∧ (q → p)	p ↔ q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

3.2.2.1 Reducción de conectivas

Se puede probar que para el cálculo basta con usar exclusivamente dos conectivas, pudiendo definir las restantes en función de las dos elegidas. De las cuatro conectivas que se acaba de definir, se pueden elegir entre los siguientes conjuntos de conectivas {¬, **∧**}; {¬, **v**}; {¬, **→**} es decir, la negación con la conjunción o con la disyunción o con el condicional.

	Negación y Conjunción	**Negación y Disyunción**	**Negación y Condicional**
Conjunción	-	**¬ (¬ x v ¬ y)**	**¬ (x → ¬ y)**
Disyunción	**¬ (¬ x ∧ ¬ y)**	-	**¬ x → y**
Condicional	**¬ (x ∧ ¬ y)**	**¬ x v y**	-

3.3 Las Reglas de Formación (RF)

Una vez que se conoce el vocabulario básico: variables proposicionales y conectivas, el siguiente elemento que se debe definir son las reglas de formación que nos permitirán determinar si una fórmula cualquiera pertenece o no al cálculo, es decir, si es una fórmula bien formada (bfb).

La noción de *fórmula bien formada* se define como:

RF1. Una variable proposicional sola es una fbf del cálculo.

RF2. Si x es una fbf, entonces ¬x también lo es.

RF3. Si x e y son fbf, entonces x **∧** y, x **v** y, x **→** y son también fbf.

RF4. Estas son todas las reglas de formación del cálculo.

3.4 Reglas de transformación

La lógica estudia los principios de la inferencia válida y el cálculo lógico nos podrá decir cuáles esquemas de inferencia son válidos y cuáles no. En general hay dos maneras de constituir los cálculos:

- Como un **sistema de leyes**: donde se trata de encontrar todas las leyes lógicas que se pueden derivar de un conjunto reducido de leyes (llamados *axiomas*) que se aceptan como *verdaderos* sin prueba por su autoevidencia. Estos sistemas se llaman *sistemas axiomáticos* y en ellos todo lo que se deriva, es válido, porque el sistema asegura la validez de la deducción.
- Como un **sistema de reglas**: que exige un razonamiento por objetivos, ya que se propone un razonamiento y mediante la aplicación de reglas hay que determinar si ese razonamiento propuesto es válido o no. Estos sistemas se llaman *sistemas de deducción natural* y parten de enunciados propuestos cuyo valor de verdad está indeterminado, y el objetivo es determinar su validez o no.

3.4.1 Cálculo de enunciados como sistema de deducción natural

Este cálculo consiste en ver si la conclusión de un razonamiento se deriva de las premisas mediante transformaciones de estas según las reglas de transformación del cálculo, y a este proceso lo llamaremos derivación.

Luego, una derivación es una secuencia de transformaciones desde las premisas de las que partimos a la conclusión que queremos obtener.

Las transformaciones posibles que se pueden realizar están delimitadas por el conjunto de reglas de transformación del cálculo, y diremos que ***un argumento es lógicamente válido*** *si existe una derivación de la conclusión a partir de las premisas, empleando las reglas del cálculo; en otro caso diremos que* ***el argumento es lógicamente incorrecto***.

¿Cuáles son las reglas de transformación de nuestro cálculo proposicional? Aquellas que nos permitan producir fórmulas más complejas a partir de otras más simples introduciendo nuevas conectivas entre ellas, o las que nos permitan simplificarlas eliminando conectivas que están presentes en las fórmulas dadas. Lógicamente entonces, para cada conectiva del cálculo existirán dos reglas: una de introducción de la conectiva y otra de la eliminación de la conectiva.

Tomemos como ejemplo las reglas de la Negación.

Para la regla de introducción de la Negación, si partimos de una fórmula X y a través de varias transformaciones llegamos a la expresión $Y \land \neg Y$ entonces estaremos concluyendo $\neg X$.

$$\begin{array}{l} X \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{Y \land \neg Y} \\ \neg X \end{array}$$

Esta regla recoge un procedimiento básico de inferencia lógica que se denomina **reducción al absurdo**, es un procedimiento indirecto de prueba o demostración. Consiste en que, si un supuesto nos lleva a una contradicción, tiene que ser falso y, si es falso, lo contrario será verdadero.

A una contradicción la expresamos mediante la conjunción de una variable proposicional con su negación, de la forma:

$$\mathbf{Y \land \neg Y}$$

Para la regla de eliminación de la Negación, si partimos de una fórmula $\neg\neg X$ al estar doblemente negada, resulta que entonces está afirmada. Por lo tanto, si tenemos una fórmula expresada de esta manera, podemos simplificarla eliminando la negación.

$$\begin{array}{l} \underline{\neg\neg X} \\ X \end{array}$$

Esta es la manera como generalmente hacemos una demostración (o una prueba), como una sucesión de aplicaciones de reglas de inferencia que permite llegar a una conclusión a partir de determinadas premisas o axiomas.

3.4.2 La Lógica Proposicional como sistema Axiomático

Los sistemas axiomáticos se conocen desde la antigüedad, y un ejemplo de ellos son los Principios de Geometría Euclídea.

En general, un sistema axiomático procede deduciendo todas las verdades, a las que llamaremos **teoremas**, de un conjunto lo más sencillo e independiente de axiomas, que aceptamos como verdaderos sin prueba, por su autoevidencia. El sistema posee también un mecanismo de inferencia en forma de reglas, pero mucho más simplificado que en los sistemas de deducción natural.

El conjunto de axiomas será el siguiente:

Axiomas

A1. (p v p) → p

A2. p → (p v q)

A3. (p v q) → (q v p)

A4. [p v (q v r)] → [q v (p v r)]

A5. (q → r) → [(p v q) → (p v r)]

Reglas de Transformación

R1. **Regla de Sustitución**: Dada una tesis (cualquier fórmula verdadera del cálculo, axioma o teorema) del cálculo, en la que aparecen variables proposicionales, el resultado de sustituir una, alguna o todas las apariciones de esas variables por fbfs del cálculo será una tesis del cálculo. Con la restricción de que cada variable ha de ser sustituida siempre que aparezca y siempre por el mismo sustituto.

R2. **Regla de Separación** (*Modus Ponens*): Si "X" es una tesis del sistema, y lo es también la expresión "X→Y", entonces "Y" es una tesis del sistema.

3.5 Lógica y semántica

Entendemos por **semántica** a la disciplina que se ocupa de las relaciones entre los signos y aquello de lo cual hablamos por medio de esos signos.

Desde el punto de vista semántico interesa atribuir significados a las fórmulas y aceptar como integrantes del sistema aquellas fórmulas o estructuras deductivas cuyo significado cumple determinadas condiciones. La atribución de significado, que no es otra cosa que ofrecer las condiciones que debe cumplir una fórmula para que sea verdadera, se realiza mediante la idea de **interpretación**.

En la lógica proposicional la interpretación de una fórmula viene dada por la interpretación semántica de las conectivas que contiene. Es decir, en la medida en que nuestras conectivas son funciones de verdad, una interpretación para el cálculo proposicional consiste en atribuir un valor de verdad a cada una de las variables proposicionales que componen una fórmula y evaluar según la interpretación semántica de las conectivas el valor final de la fórmula.

Luego la relación semántica básica entre el lenguaje de proposiciones y el mundo o universo del que se habla es la *valoración de verdad*. Una valoración de verdad sobre el lenguaje proposicional es una aplicación que asigna a cada fórmula del lenguaje un valor de verdad, es decir, uno de los dos elementos del conjunto {V, F} de valores de verdad.

En nuestro sistema de lógica de enunciados tenemos un método de prueba semántico que nos permite decidir si una fórmula es o no una **verdad lógica**. Este método de prueba es la **Tabla de verdad**, que es bastante limitado porque su confección resulta muy grande e incómoda cuando el número de variables crece demasiado, porque el número de combinaciones es siempre $\mathbf{2^n}$ con n = n° de variables proposicionales.

Tomemos el ejemplo **(((p → q) ∧ ¬q) → ¬p)** y construyamos su tabla de verdad como:

p	Q	¬q	p → q	(p → q) ∧ ¬q	(((p → q) ∧ ¬q) → ¬p)
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1

¿Qué hicimos? Primero asignamos un valor de verdad a las dos variables proposicionales que componen la fórmula de la que queremos obtener sus posibles valores de verdad, **p** y **q**. Como tenemos dos valores, obtendremos cuatro (2^2) combinaciones posibles de valores de verdad (por eso la tabla tiene cuatro filas). Después, en las siguientes columnas vamos evaluando cómo se modifican estos valores iniciales conforme las variables pasan a ser argumentos de conectivas teniendo en cuenta la interpretación semántica de las conectivas.

Por ejemplo, cuando q=1, ¬q=0 y viceversa. Y si p=1 y q=1, entonces p → q = 1. Procedemos de esta forma hasta que debajo de la conectiva principal de la fórmula obtenemos la columna de todos los posibles resultados para la fórmula que estamos estudiando.

¿Qué fórmulas interesan a la lógica desde el punto de vista semántico?

Evidentemente aquellas fórmulas que arrojen como resultado en la columna final de su tabla de verdad en todas sus filas el valor de "verdadero". A estas fórmulas las llamaremos **tautologías** o **verdades lógicas**.

Si por el contrario todos los resultados en la columna final de la tabla son "falso", esas fórmulas serán **contradicciones**.

Y si en cambio, se encuentran tanto valores "verdadero" como "falso", diremos que las fórmulas son **satisfacibles**, es decir, que en alguna valoración de verdad la fórmula resulta verdadera.

Lo importante de las tautologías es que toda interpretación posible satisface a la fórmula, es decir, la hace verdadera, y eso significa que son "razonamientos correctos" o "formalmente válidos".

Como vemos en la tabla de verdad del caso ejemplo, tiene verdadero en todas sus filas, por lo que sabemos que esa fórmula es una tautología y, en consecuencia, que toda valoración de verdad la hace verdadera lógicamente. Efectivamente, el caso ejemplo de la tabla de verdad, corresponde al Modus Tollens (negación del consecuente o ley de contraposición) que es una forma de argumento válida y una regla de inferencia en lógica proposicional.

3.6 Implicación lógica - Equivalencia lógica

Dados dos enunciados A y B, diremos que "A implica lógicamente a B" o que "B es consecuencia lógica de A" (y lo denotaremos con A $\Longrightarrow$ B) si la forma enunciativa A → B es una **tautología**. (Pons et al., 2017)

Y diremos que "A es lógicamente equivalente a B" (y lo denotaremos con A$\Longleftrightarrow$B) si la forma enunciativa A↔B es una **tautología**.

Por ejemplo:

- **p ∧ q** implica lógicamente a **p**
- **¬ (p ∧ q)** es lógicamente equivalente a **(¬p) v (¬q)**
- **¬ (p v q)** es lógicamente equivalente a **(¬p) ∧ (¬q)**

Las siguientes son equivalencias lógicas muy conocidas, por resultar útiles a la hora de manipular formas enunciativas:

Ley de Doble Negación	¬ (¬p)⇔ p
Ley Conmutativa de la Conjunción	p **∧** q⇔ q **∧** p
Ley Conmutativa de la Disyunción	p **v** q⇔ q **v** p
Ley Asociativa de la Conjunción	(p **∧** q) **∧** r ⇔ p **∧** (q **∧** r)
Ley Asociativa de la Disyunción	(p **v** q) **v** r ⇔ p **v** (q **v** r)
Leyes de De Morgan	¬ (p **v** q) ⇔ (¬p) **∧** (¬q)
	¬ (p **∧** q) ⇔ (¬p) **v** (¬q)
Leyes de Distribución	p **∧** (q **v** r) ⇔ (p **∧** q) **v** (p **∧** r)
	p **v** (q **∧** r) ⇔ (p **v** q) **∧** (p **v** r)
Leyes de Absorción	p **∧** p⇔ p
	p **v** p⇔ p

3.7 Ejercicios de Lógica

a. Indique con V o F si considera que la frase dada es una proposición:
   1) ¡Auxilio! ___
   2) ¿Qué hora es? ___
   3) El mes en curso es febrero ___
   4) Google necesita programadores ___
   5) ¿Quién aprobará el examen de ingreso? ___
   6) Alcánzame el cuaderno ___
   7) Dos al cubo (2^3) es 6 ___
   8) Dos a la cuarta (2^4) es 16 ___
   9) Si tengo dinero y paso por Mamuschka entonces me compro unos chocolates ___
   10) Nieva ___
b. Asigne las variables proposicionales que corresponde a cada frase del punto a.
c. Formalice en el lenguaje del cálculo proposicional las siguientes oraciones del lenguaje natural:
   1) Llueve _____
   2) Llueve y me mojo __________
   3) No llueve __________
   4) Llueve o nieve y no se puede tirar en parapente __________
   5) Llueve, graniza y nieva __________

6) Si entro a un comercio entonces debo tener barbijo colocado y desinfectadas las manos __________
7) En vacaciones iremos al cine si y sólo si hay mal tiempo __________
8) Si Romualdo va al aeropuerto o Eustaquia va a la terminal, entonces llamaremos un taxi __________
9) Si no llueve y no nieva entonces hay sol o hay niebla __________
10) Romualdo esquía si y sólo si hay nieve en la montaña __________
11) Si Eustaquia desea construir un modelo entonces necesita un informático o un matemático __________
12) Si Eustaquia no necesita un matemático entonces necesita un informático __________
13) Si estudio lógica y atiendo las clases y resuelvo las prácticas propuestas y hago consulta de dudas entonces aprobaré lógica __________

d. Construye las tablas de verdad de los ejercicios de los puntos a., b. y c.

e. Formalice y pruebe la validez de los siguientes argumentos:

1) Si llueve entonces me mojo. Me llevo el paraguas o no llueve. Luego, si llueve entonces me mojo y saco el paraguas.
2) O bien la Tierra es redonda y los hombres no lo saben, o bien la Tierra es redonda y los extraterrestres lo saben hace tiempo. Si los hombres no lo saben, entonces la Tierra no es redonda. En conclusión, los extraterrestres lo saben hace tiempo.
3) Si Romualdo tiene par de ases, tiene poker o gana; si tiene poker, no tiene par de ases; si no sabe jugar al poker, no gana. Luego, si Romualdo tiene par de ases, sabe jugar al poker.
4) Si Superman fuese capaz de destruir el mal y si quisiese hacerlo entonces lo haría. Si Superman no fuese capaz de destruir el mal entonces no sería poderoso. Si Superman no quisiese destruir el mal entonces sería maligno. Superman no destruye el mal. Si Superman existe entonces es poderoso y no es maligno. Por lo tanto, Superman no existe.

f. Indique si las siguientes fbf están correctamente escritas o indique por qué es incorrecta:

1) $\rightarrow (q \rightarrow r)$
2) $p \rightarrow p \vee p$
3) $\neg p \neg$
4) $\vee\, p \wedge q$
5) $\neg\neg p \wedge q$
6) $p \leftrightarrow \neg q \vee \neg$

g. Construya las tablas de verdad de los razonamientos del punto e. y diga qué tipo de fórmulas son desde el punto de vista semántico (tautologías, contradicciones o fórmulas satisfacibles).

h. Construya la tabla de verdad de los teoremas siguientes y verifique si son tautologías:

1) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
2) $p \rightarrow p$
3) $\neg p \vee p$
4) $p \vee \neg p$
5) $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

Bibliografía

Bel, Andrea L. & Del Punta, Jessica A. (2017). *Notas Teóricas: Guía de Actividades* (1° ed.). Editorial de la Universidad Nacional del Sur. Ediuns. https://www.matematica.uns.edu.ar/ingresantes/Notas_Teoricas_y_Guia_de_Actividades2018.pdf

Gutiérrez, C. M. (s. f.). Introducción a la Lógica. *Universidad Complutense de Madrid*, 44. Gutiérrez - Introducción a la Lógica.pdf.

Pons, C., Rosenfeld, R., & Smith, C. P. (2017). *Lógica para Informática*. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP). https://doi.org/10.35537/10915/61426

Tapia, N. V. de, Tapia de Bibiloni, A., & Tapia, C. A. (1974). *Matemática 1*. Estrada.