

TP 2 : Le lasso adaptatif et la formulation duale

Stéphane Canu

Septembre 2017, ASI, INSA Rouen

Le but du TP est d'étudier une méthode de sélection de variables, le Lasso adaptatif¹, dans le cadre de la régression sur des données partiellement réelles. Pour le faire fonctionner, vous êtes supposé avoir déjà installé CVX (que vous pourrez télécharger à cette adresse : <http://cvxr.com/cvx/>)

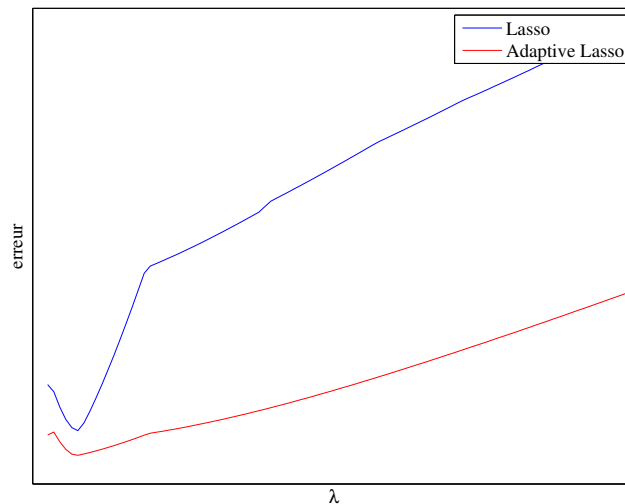


FIGURE 1 – Résultat du TP2

Ex. 1 — Dualité du Lasso et des variantes du Lasso

1. Génération des données du problème.
 - a) Générez les données du problème $n = 50$ et $p = 18$.

```
clear
rand('seed',3);
randn('seed',3);

n = 50;
p = 18;

Xi = randn(n,p);
C = corrcoef(Xi);
Xi = Xi*C;
Xi = (Xi - ones(n,1)*mean(Xi))./(ones(n,1)*std(Xi,1));
Xi = Xi/sqrt(n);

betaVrai = zeros(p,1);
betaVrai(1:10) = [1 2 3 4 5 1 2 3 4 5];
sig = 0.25;
yi = Xi*betaVrai + sig*randn(n,1);

[n,p] = size(Xi);
```

- b) Calculez l'erreur de test de la méthode des moindres carrés

```
b_mc = (Xi'*Xi)\(Xi'*yi);
```

¹<http://www.stat.wisc.edu/~shao/stat992/zou2006.pdf>

2. Le Lasso et son dual : vérifiez que les deux méthodes donnent le même résultat.

a) Résoudre le Lasso comme nous l'avons fait lors du TP1

```
lambda = 2;
tic
cvx_begin
    variables betaL(p)
    minimize( .5* (yi - Xi*betaL)'*(yi - Xi*betaL) + lambda * sum(abs(betaL)) )
cvx_end
```

b) Calculez l'erreur du modèle

```
Err = norm(betaVrai-betaL);
fprintf('Lasso Primal: %10.2f - ', Err)
toc
```

c) résoudre le dual du lasso à l'aide de CVX

```
tic
cvx_begin
    variables beta_dual(p)
    dual variable d
    minimize( sum_square(Xi*beta_dual) )
    subject to
        d : abs(Xi'*(Xi*beta_dual - yi)) <= lambda;
cvx_end
Err = norm(betaVrai-beta_dual)^2;
fprintf('Lasso Dual: %10.2f - ', Err)
toc
```

d) résoudre le dual du lasso à l'aide de GUROBI

```
clear model;
model.Q = .5*sparse(Xi'*Xi);
model.obj = zeros(p,1);
model.A = [sparse(Xi'*Xi);sparse(Xi'*Xi)];
model.sense = [repmat('<',p,1);repmat('>',p,1)];
clear params;
params.Presolve = 2;
params.TimeLimit = 100;
params.OutputFlag = 0;

model.rhs = [lambda + Xi'*yi;-lambda + Xi'*yi];
result = gurobi(model, params);
beta_gu = result.x;
```

e) Comparez les résultats

```
fprintf(' Truth Least Square Lasso \n')
for i=1:length(beta_lasso)
    fprintf('%10.2f %10.2f %10.2f %10.2f %10.2f \n',[betaVrai(i) b_mc(i) betaL(i)
        beta_dual(i) beta_gu(i)]);
end
```

3. Le lasso adaptatif

a) Calculez les poids

```
w = 1./abs(b_mc); % set the weight
```

b) Résoudre le problème du lasso adaptatif à l'aide de CVX

```
cvx_begin
    variables beta_adapt_lasso(p)
    minimize( .5* (yi - Xi*beta_adapt_lasso)'*(yi - Xi*beta_adapt_lasso) + lambda *
        w'*abs(beta_adapt_lasso) )
cvx_end
Err = norm(betaVrai-beta_adapt_lasso)^2;
fprintf('Adaptive Primal: %8.2f - ', Err)
```

- c) Résoudre le problème du lasso adaptatif en décomposant $\beta = \beta^+ - \beta^-$

```
cvx_begin
    variables beta_cvx(p) beta_cvxm(p)
    dual variable d
    minimize( sum_square(yi - Xi*(beta_cvx-beta_cvxm)) )
    subject to
        d : w'*(beta_cvx+beta_cvxm) <= b;
        beta_cvx >= 0;
        beta_cvxm >= 0;
cvx_end
beta_cvx = beta_cvx-beta_cvxm;
```

- d) Résoudre le problème en utilisant votre fonction du TP1 $\beta \leftarrow \text{lasso}(X, y)$

```
tic
beta_adL = monLasso(Xi*diag(1./(w)),yi);
Err = norm(betaVrai-beta_adL)^2;
fprintf('Adaptive monLasso: %6.2f - ', Err)
toc
```

- e) Résoudre le problème du lasso adaptatif dans le dual

```
tic
cvx_begin
    cvx_precision best
    variables beta_dual(p)
    dual variable d
    minimize( sum_square(Xi*beta_dual) )
    subject to
        d : abs(Xi'*(Xi*beta_dual - yi)) <= lambda*w;
cvx_end
fprintf('CVX Dual 2: ')
toc
```

- f) Résoudre le problème du lasso adaptatif en utilisant Gurobi

```
clear model;
model.Q = sparse(Xi'*Xi);
model.obj = zeros(p,1);
model.A = [sparse(Xi'*Xi);sparse(Xi'*Xi)];
model.sense = [repmat('<',p,1);repmat('>',p,1)];
model.rhs = [lambda*w + Xi'*yi;-lambda*w + Xi'*yi];

clear params;
params.Presolve = 2;
params.TimeLimit = 100;
params.OutputFlag = 0;

result = gurobi(model, params);

beta_gu = result.x;
```

- g) Affichez les résultats et vérifiez que toutes les méthodes donnent le même résultat.

4. Concrètement, entre le Lasso, et le Lasso adaptatif, la quelle de ces méthodes préconiseriez vous et dans quelles conditions ? Justifiez votre réponse par une expérience incroyable.