西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

人工智能概论

西安电子科技大学 人工智能学院

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第六章 模糊逻辑及模糊推理

6.1 模糊逻辑

6.2 模糊集合

6.3 模糊关系及其合成

6.4 模糊推理

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

模糊逻辑

模糊集合

模糊关系及其合成

模糊推理

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

经典二值（布尔）逻辑

在经典二值（布尔）逻辑体系中，所有的分类都被假定为有明确的边界；

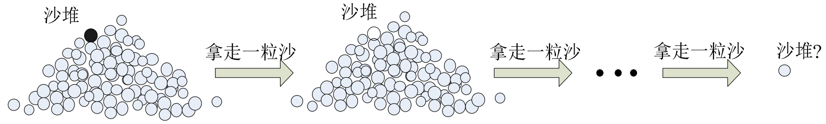
任一被讨论的对象，要么属于这一类，要么不属于这一类；

一个命题不是真即是假，不存在亦真亦假或非真非伪的情况。

为什么需要模糊逻辑?

常识告诉我们应该回答“是”。然而，如果回答“是”，这样顺推下去就会掉入陷阱：从上次剩下的沙堆里再拿走一粒沙子，剩下的还是一个沙堆，那么如此反复，直到只剩下两三粒沙子甚至没有一粒沙子时，这也还是一个沙堆。

从沙堆里拿走一粒沙子，这还是一个沙堆吗?

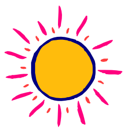


为什么需要模糊逻辑?

问题出在哪里?

这里的问题就在于“沙堆”这个概念是模糊的，没有一个清晰的界限将“沙堆”与“非沙堆”分开。我们没有办法明确指出，在这个不断拿走沙子的过程中，什么时候“沙堆”不再是“沙堆”。

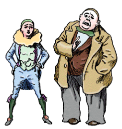
与“沙堆”相似的模糊概念还有很多。这种在生活中常见的模糊概念，在用传统数学方法处理时，往往会出现问题。



天气冷热

雨的大小

风的强弱

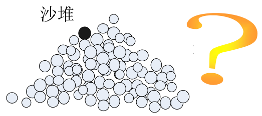


人的胖瘦

年龄大小

个子高低

为什么需要模糊逻辑?



若尝试消除这些概念的模糊性，会怎样呢?

如果规定沙堆只能由10000粒以上的沙子组成，“沙堆”这个概念的模糊性就消除了。10000粒沙子组成的是沙堆，9999粒沙子组成的不是沙堆：这在数学上没有任何问题。

然而，仅仅取走微不足道的一粒沙子，就将“沙堆”变为“非沙堆”，这又不符合我们日常生活中的思维习惯

为什么需要模糊逻辑?

在企图用数学处理生活中的问题时，精确的数学语言和模糊的思维习惯产生了矛盾。

传统的数学方法常常试图进行精确定义，而人关于真实世界中事物的概念往往是模糊的，没有精确的界限和定义。在处理一些问题时，精确性和有效性形成了矛盾，诉诸精确性的传统数学方法变得无效，而具有模糊性的人类思维却能轻易解决。

模糊数学及模糊逻辑就是用来解决这一矛盾的工具之一。

模糊概念

模糊概念：从属于该概念到不属于该概念之间无明显分界线。

年轻、重、热、美、厚、薄、快、慢、大、小、高、低、长、短、贵、贱、强、弱、软、硬、阴天、多云、暴雨、清晨......

模糊理论的产生与基本思想

产生

1965年，扎德（L.A. Zadeh ）发表了论文《模糊集 》(Fuzzy Sets，Information and Control, 8, 338-353)

基本思想

用属于程度代替属于或不属于。

❖ 模糊理论的发展

模糊理论起源于美国，但是它在美国却因为传统的习惯力量，发展并不顺利，同样在欧洲也受到一定程度的抵制。西方人喜欢研究精确问题，偏好二元逻辑系统。东方人擅长兼蓄思维，西方人娴熟于分析推理，这种文化沉淀上的差异也可以从对模糊逻辑的接受程度上反映出来。

模糊是相对于精确而言的。对于多因素的复杂状况，模糊往往显示出更大的精确。过份精确还可能导致过于克板、缺乏灵活性。

❖ 模糊理论的历史

An interview with L. A. Zadeh, Communication of the ACM, vol.27, No.4, 304-311, April 1984

虽然人们正在日益接受这一理论，但对此还有很大的怀疑和反对。目前，研究模糊集理论人数最多的国家是中国。似乎在东方国家对于与二值逻辑不同的体系有更大的兴趣，大概这是因为他们的逻辑不同于西方的笛卡尔逻辑。

❖ 模糊理论的应用领域

控制、决策、专家系统、医学、土木、农业、气象、信息、经济、文学、音乐

❖ 模糊产品

洗衣机、摄像机、照相机、电饭锅、空调、电梯

- 模糊逻辑
- **模糊集合**
- 模糊关系及其合成
- 模糊推理

模糊逻辑与模糊推理

❖ 基础理论

- 模糊集合的概念
- 模糊集合的隶属函数
- 模糊集合上的运算及其基本定律
- 模糊关系及其合成运算

经典集合

集合是数学中最基本的概念之一。

所谓集合，是指具有某种特定属性的对象的全体。

讨论某一概念的外延时总离不开一定的范围。这个讨论的范围称为“论域”，论域中的每个对象称为“元素”。

经典集合

❖ 表示集合的几种方法

（1）列举法：
列写出集合中的全体元素。
适用于元素有限的集合。

（2）定义法：
以集合中元素的共性来描述集合的一种方法。
适用于有许多元素而不能一一列举的集合。

经典集合

对于任意一个集合A，论域中的任何一个元素x，或者属于A，或者不属于A。集合A也可以由其特征函数定义：

$$C_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

例：设有论域：U={ 1,2,3,4,5 }，集合A={ 1,3,5 }，求A的特征函数。
解：特征函数如下：

$$C_A(u)=\begin{cases}1, & 当u=1,3,5\\ 0, & 当u=2,4\end{cases}$$

模糊集合

❖ 模糊集合的概念

定义1-1 模糊集合：论域U中的模糊集F用一个在区间[0,1]上取值的隶属函数 μ_F 来表示，即：

$$\mu_F: \ U\rightarrow[0,1]$$

其中，μ_F称为F的隶属函数，$\mu_F(u)$称为u对F的隶属度

模糊集合

❖ 模糊集合的概念

模糊子集F完全由其隶属函数所刻画。隶属函数μ_F把U中的每一个元素都映射为[0,1]上的一个值，表示该元素隶属于F的程度，值越大表示隶属的程度越高。当μ_F的值仅为0或1时，模糊子集F就退化为一个普通的集合，隶属函数也就退化为特征函数。

模糊集合的表示法

❖ 模糊集合的表示方法主要有如下三种：

（1）扎德表示法

$$A=\sum_{u\in U}\frac{f_A(u)}{u}$$ （离散）

$$A=\int_u\frac{f_A(u)}{u}$$ （连续）

（2）序对表示法

$$A=\{(u,f_A(u))\,|\,u\in U\}$$

（3）向量表示法

$$A=\{f_A(u_1),f_A(u_2)\ldots,f_A(u_n)\}$$

（离散）

模糊集合的表示法

序对表示法

$$A=\{(x,\mu_A(x))|\,x\in X\}$$

模糊集

隶属函数

论域

模糊集合的表示法

扎德表示法中，当某个元素的隶属度为0时，可以略去不写。如：

$$A=1/u_1+0.7/u_2+0/u_3+0.5/u_4$$

$$B=1/u_1+0.7/u_2+0.5/u_4$$

它们是相同的模糊集。

序对表示法也可以省略

注意：向量表示法中，隶属度为0的项不能省略。

模糊集合的表示法

思考：扎德表示法、序对表示法、向量表示法的优缺点分别有哪些?

答：扎德表示法与序对表示法可以直观看到元素与其隶属度的对应关系，其中序对表示法适合比较少的元素，一目了然，比较清晰，但对于元素比较多的模糊集合，扎德表示法更简便。向量表示法是给论域中元素规定一个表达顺序，可以将序对表示法简写，优点是更简单，缺点是不适合元素较多或者论域连续的情况，且无法直观看到元素与隶属度的对应关系。

模糊集合的表示法

例：设有论域：U={高山，刘水，秦声}

确定一个模糊集A，以表示他们分别对“学习好”的隶属程度。

假设他们的平均成绩分别为：98分，72分，86分，设映射关系为平均成绩除以100。

求隶属度及模糊集A。

解：

μ_A(高山)=0.98，μ_A(刘水)=0.72，μ_A(秦声)=0.86

则模糊集A={0.98, 0.72, 0.86}。向量表示法

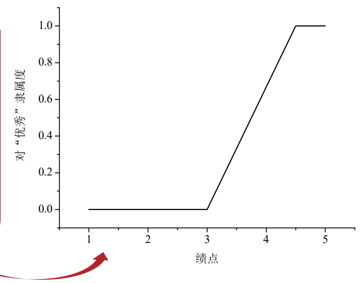
模糊集合表示法示例

例：在考核中，学生的绩点为[0,5]区间上的实数。按照常识，绩点在3以下显然不属于“优秀”，绩点在4.5以上则显然属于“优秀”，这是没有问题的。然而，绩点为4.4时该怎么算呢？ 这个成绩很接近4.5，如果和绩点为3一样，都不属于“优秀”，未免对绩点为4.4的同学不公平。

如何用模糊集合表示“优秀”集合呢?

模糊集合表示法示例

有了模糊集合这个工具，在3到4.5之间就可以认为是一个“灰色地带”，其间的成绩在一定程度上属于“优秀”这个模糊集。假设各绩点对“优秀”的隶属度可以用如图的曲线表示：



解：在这个例子中，设模糊集合“优秀”为A，则隶属函数为：

$$f_A(u)=\begin{cases}0 & 0\le u<3\\ \frac{2}{3}u-2 & 3\le u<4.5\\ 1 & 4.5\le u\le 5\end{cases}$$

此处的论域是连续的，模糊集合用扎德表示法可以表示为

$$A=\int_{0\le u<3}\frac{0}{u}+\int_{3\le u<4.5}\frac{\frac{2}{3}u-2}{u}+\int_{4.5\le u<5}\frac{1}{u}$$

用序对表示法可以表示为

$$A=\{(u,0)\,|\,0\le u<3\}+\left\{\left(u,\frac{2}{3}u-2\right)\Big|\,3\le u<4.5\right\}+\{(u,1)\,|\,4.5\le u<5\}$$

隶属函数的确定方法

隶属函数的确定方法

- 模糊统计法
- 例证法
- 专家经验法

如何确定隶属函数?

隶属函数的确定方法

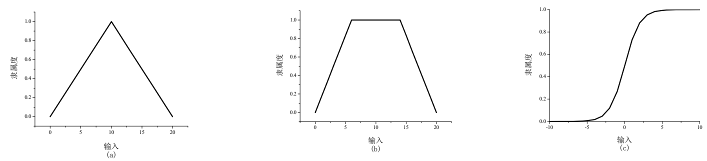
（1）模糊统计法
是在大量的实验中确定隶属函数的方法。

（2）例证法
由已知的有限个隶属函数的值，来估计论域U上的模糊子集A的隶属函数。

（3）专家经验法
是根据专家的实际经验给出模糊信息的处理算式或者相应的权系数值来确定隶属函数的一种方法。

常用的隶属函数

❖在不同的具体问题中，往往需要选择不同的隶属函数。以下是一些常用的隶属函数：



三角形函数　　梯形函数　　sigmoid函数

模糊集合的运算

模糊集合是利用集合中的隶属函数来定义和操作的，A,B是U中的两个模糊子集，隶属函数分别为μ_A和μ_B。

定义1-2 设A,B是论域U的模糊集，即 $A,B\in F(U)$，若对于任一 $u\in U$，都有$\mu_B(u)\le\mu_A(u)$，则称B包含于A，或者称B是A的一个子集，记作$B\subseteq A$。若对于任一 $u\in U$ 都有 $\mu_B(u)=\mu_A(u)$，则称B等于A，记作$B=A$。

模糊集合的运算

定义1-3 并：并（$A\cup B$）的隶属函数：对所有的$u\in U$ 逐点定义为取大运算，即：$\mu_{A\cup B}(u)=\mu_A(u)\vee\mu_B(u)$

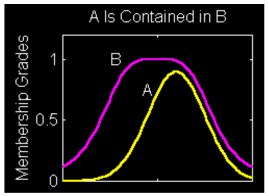
式中，$\vee$ 符号表示取极大值运算。

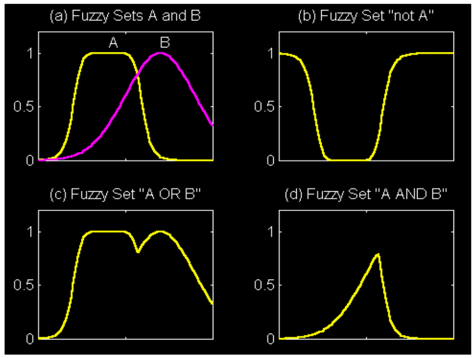
定义1-4 交：交（$A\cap B$）的隶属函数：对所有的 $u\in U$ 逐点定义为取小运算，即：$\mu_{A\cap B}(u)=\mu_A(u)\wedge\mu_B(u)$

式中，$\wedge$ 符号表示取极小值运算。

定义1-5 补：隶属函数 $\mu_{\bar{A}}$：对所有的 $u\in U$ 逐点定义为 $\mu_{\bar{A}}(u)=1-\mu_A(u)$

模糊集合的运算





模糊集合的运算

例： 设论域 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ 中的两个模糊子集如下，求$A\cup B, A\cap B$。

$$A=\frac{0.6}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.3}{u_5}\quad B=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.7}{u_5}$$

解：

$$A\cup B=\frac{0.6\vee0.5}{u_1}+\frac{0.6\vee0.6}{u_2}+\frac{1\vee0.3}{u_3}+\frac{0.4\vee0.4}{u_4}+\frac{0.3\vee0.7}{u_5}=\frac{0.6}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.7}{u_5}$$

$$A\cap B=\frac{0.6\wedge0.5}{u_1}+\frac{0.6\wedge0.6}{u_2}+\frac{1\wedge0.3}{u_3}+\frac{0.4\wedge0.4}{u_4}+\frac{0.3\wedge0.7}{u_5}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.3}{u_5}$$

模糊集合的运算

例：设$U=\{u_1,u_2,u_3\}$

$A=0.3/u_1+0.8/u_2+0.6/u_3$

$B=0.6/u_1+0.4/u_2+0.7/u_3$

求：$A\cap B$, $A\cup B$及$\overline{A}$。

解：

$A\cap B=0.3/u_1+0.4/u_2+0.6/u_3$

$A\cup B=0.6/u_1+0.8/u_2+0.7/u_3$

$\overline{A}=(1-0.3)/u_1+(1-0.8)/u_2+(1-0.6)/u_3$

$=0.7/u_1+0.2/u_2+0.4/u_3$

例：设论域$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$为一个4人集合，X上的模糊集合A表示“高个子”：

$A=\{(x_1,0.6),(x_2,0.5),(x_3,1),(x_4,0.4)\}$，

模糊集合B表示“胖子”：$B=\{(x_1,0.5),(x_2,0.6),(x_3,0.3),(x_4,0.4)\}$。

分别求模糊集合“高或胖”、“又高又胖”、“个子不高”。

解：模糊集合“高或胖”为：

$$A\cup B=\{(x_1,0.6\vee 0.5),(x_2,0.5\vee 0.6),(x_3,1\vee 0.3),(x_4,0.4\vee 0.4)\}$$
$$=\{(x_1,0.6),(x_2,0.6),(x_3,1),(x_4,0.4)\}$$

模糊集合“又高又胖”为：$A\cap B=\{(x_1,0.5),(x_2,0.5),(x_3,0.3),(x_4,0.4)\}$

模糊集合“个子不高”为：$\overline{A}=\{(x_1,0.4),(x_2,0.5),(x_3,0),(x_4,0.6)\}$

模糊集运算的基本定律

定理1-1 模糊集运算的基本定律：U为论域，A、B、C为U中的任意模糊子集，则下列等式成立：

（1）幂等律：$A\cap A=A, A\cup A=A$

（2）结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C, A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

（3）交换律：$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$

（4）分配率：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（5）同一律：$A\cap U=A, A\cup\varnothing=A$

模糊集运算的基本定律

（6）零一律：$A\cup U=U, A\cap\varnothing=\varnothing$

（7）吸收率：$A\cap(A\cup B)=A, A\cup(A\cap B)=A$

（8）德摩根律：$\overline{A\cap B}=\overline{B}\cup\overline{A}, \overline{A\cup B}=\overline{B}\cap\overline{A}$

（9）双重否定率：$A=A$

模糊集运算的基本定律

提问：观察模糊集合的交并补运算和运算的基本定律，你发现模糊集合与经典集合存在什么关系？

答：模糊集合保留了经典集合的许多性质与运算法则，因为一定程度上来说，经典集合是模糊集合的一个特例，模糊集合是经典集合的推广。

符号

模糊集的截集

λ截集是把模糊集向经典（普通）集合转化的一个重要概念。

定义：设$A \in F(u), \lambda \in [0,1]$，则：

（1）$A_\lambda = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) \geq \lambda\}$ 称A_λ为A的一个λ截集，称λ为阈值（置信水平）；

（2）$A_\lambda = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) > \lambda\}$ 称A_λ为A的一个λ强截集；

（3）$SuppA = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) > 0\}$ A的支集；

$KerA = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) = 1\}$ A的核；

当A的核不为空，则称A为正规模糊集。

模糊集的截集

例：设有模糊集：

$A=0.3/u_1+0.7/u_2+1/u_3+0.6/u_4+0.5/u_5$

且λ分别为1,0.6,0.5,0.3，分别求其相应的λ截集、核及支集。

解：

（1）λ截集　$A_1=\{u_3\}$　$A_{0.6}=\{u_2,u_3,u_4\}$

$A_{0.5}=\{u_2,u_3,u_4,u_5\}$　$A_{0.3}=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$

（2）核、支集　$\mathrm{Ker}A=\{u_3\}$

$\mathrm{Supp}A=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$。

小结

重点：

- 扎德表示法
- 序对表示法
- 向量表示法
- 模糊集合的运算方法
- 模糊关系合成的计算方法

模糊逻辑

模糊集合

模糊关系及其合成

模糊推理

普通集合上的“关系”

笛卡尔乘积（直积，代数积）：
设U与V是两个集合，则称
$$U\times V=\{ (u,v) \mid u\in U, v\in V \}$$
为U与V的笛卡尔乘积。

例： 设U={ 红桃,方块,黑桃,梅花 }
$V=\{A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K\}$
求$U\times V$。

解：
$U\times V=$ {(红桃,A), (红桃, 2), ... , (红桃, K), (方块,A), ... , (方块, K), (黑桃,A), ... , (黑桃, K), (梅花,A)... , (梅花,K)}，共52个元素。

有序偶

普通集合上的“关系”

若R是$U\times V$上的一个子集，则称R为从U到V的一个关系。记为：
$$U \xrightarrow{R} V$$

对于$U\times V$中的元素(u,v)，若$(u,v)\in R$，则称u与v有关系R，否则，称u与v没有关系R。

例： 设课程$U=\{ A,B,C \}$
学生$V=\{1,2,3,4\}$
$U\times V=\{(A,1),(A,2),(A,3),(A,4),...,(C,4)\}$
选课关系$R=\{(A,3),(B,1),(C,2),(C,4)\}$
可以看出
$U\times V$中的元素$(A,3)\in R$，说明课程A与学生3有关系R，即学生3选了课程A；
而元素$(A,1)\notin R$，说明课程A与学生1没有关系R，即学生1没有选课程A。

模糊关系

在普通集合上定义的“关系”都是确定性关系，u和v或者有某种关系，或者没有这种关系。

但是，在现实世界中，很多事物的关系并不是十分明确的，如：人与人之间的相像关系，人与事物之间的爱好关系等。

模糊关系的定义

模糊关系的定义

设论域U和V,则$U\times V$的一个子集R,就是从U到V的模糊关系，记作

$$U \xrightarrow{R} V$$

这里的模糊关系R是属于模糊二元关系。其隶属函数为映射:

$$\mu_R: U\times V \to [0,1]$$

隶属度$\mu_R(u_0,v_0)$，表示u_0与v_0具有关系R的程度。

模糊二元关系R是以$U\times V$为论域的一个模糊子集，序偶(u,v)的隶属度为$\mu_R(u,v)$

模糊关系也是一种模糊集合，若$\mu_R(u, v)$取值为0或1，这种模糊集合就等同于经典集合，模糊关系也退化为经典关系的形式。

模糊关系

对于有限论域$U=\{u_1, u_2,\ldots,u_m\}$，$V=\{v_1, v_2 ,\ldots, v_n\}$，则$U$对$V$的模糊关系的隶属函数可以用$m\times n$阶模糊矩阵$R$来表示，即

$$R=(r_{ij})_{m\times n}$$

例：设有一组学生U:

U={ 张三，李四，王五 }

他们对球类运动V:

V={ 篮球，排球，足球，乒乓球 }

有不同的爱好，其爱好程度可以用下面的模糊关系来表示:

$$R=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

模糊关系

提问：在上述例子中，若学生对球类运动的爱好程度是用下面的关系来表示，那么学生对球类运动的爱好程度还是一种模糊关系吗?

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

答：从关系矩阵R中可以看出，学生对球类运动要么喜欢要么不喜欢，即学生与球类有关系或没关系，比如张三不喜欢篮球，喜欢排球、足球、乒乓球。

可见，当模糊关系取值仅为0或1时，这种模糊集合就等同于经典集合，模糊关系也退化为经典关系的形式。

例：设有七种物品：苹果、乒乓球、书、篮球、花、桃、菱形组成的一个论域U，并设X_1、X_2、…、X_7分别为这些物品的代号，则$U=\{X_1,X_2,\ldots,X_7\}$,现在就这些物品中两两之间的相似程度来确定他们的模糊关系。

R	苹果	乒乓器	书	篮球	花	桃	菱形
苹果	1.0	0.7	0	0.7	0.5	0.6	0
乒乓球	0.7	1.0	0	0.9	0.4	0.5	0
书	0	0	1.0	0	0	0	0.1
篮球	0.7	0.9	0	1.0	0.4	0.5	0
花	0.5	0.4	0	0.4	1.0	0.4	0
桃	0.6	0.5	0	0.5	0.4	1.0	0
菱形	0	0	0.1	0	0	0	1.0

U与V可以是相同的论域，此时，称R为U上的模糊关系。

1-7

模糊集的笛卡尔乘积

❖模糊集$A\in F(U)$和$B\in F(V)$的笛卡尔乘积为：
$$A\times B=\int_{U\times V}\min(\mu_A(u),\mu_B(v)/(u,v))$$

例： 设 $U=\{1,2,3\},V=\{1,2,3,4\}$ $A=\frac{1}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{0.2}{3},B=\frac{0.8}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.2}{4}$ ，求$A\times B$。

解：

$$A\times B=\frac{0.8}{(1,1)}+\frac{0.6}{(1,2)}+\frac{0.4}{(1,3)}+\frac{0.2}{(1,4)}+\frac{0.7}{(2,1)}+\frac{0.6}{(2,2)}+\frac{0.4}{(2,3)}+\frac{0.2}{(2,4)}+\frac{0.2}{(3,1)}+\frac{0.2}{(3,2)}+\frac{0.2}{(3,3)}+\frac{0.2}{(3,4)}$$

u \ v	1	2	3	4
1	0.8	0.6	0.4	0.2
2	0.7	0.6	0.4	0.2
3	0.2	0.2	0.2	0.2

模糊关系的合成

在日常生活中，两个单纯关系的组合，可以构一种新的合成关系。例如，有u，v，w三个人，若u是v的妹妹，而v又是w的丈夫，则u与w就是一种新的关系，即姑嫂关系。

设R与S分别是$X\times Y$及$Y\times Z$上的两个模糊关系，则R与S的合成是指从U到W的一个模糊关系，记为：$R\circ S$

其隶属函数为：（极大-极小合成）

$$R\circ S\leftrightarrow \mu_{R\circ S}(x,z)=\vee_{y\in Y}(\min(\mu_R(x,y),\mu_S(y,z)))$$

或（极大-乘积合成）

$$\mu_{R\circ S}(x,z)=\vee_{y\in Y}(\mu_R(x,y)\times\mu_S(y,z))$$

例

注意两种方法都要求！！

模糊关系的合成

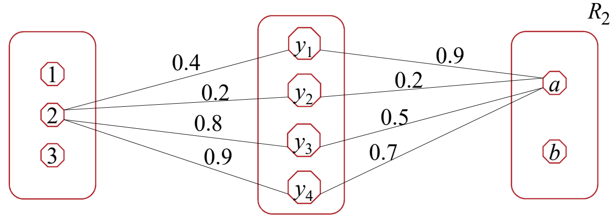
例： 设有三个论域$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，$Z=\{a,b\}$，R_1表示X和Y的模糊关系，R_2表示Y和Z的模糊关系，且

$$R_1=\begin{bmatrix}0.1&0.3&0.5&0.7\\0.4&0.2&0.8&0.9\\0.6&0.8&0.3&0.2\end{bmatrix}\leftarrow 2\qquad R_2=\begin{array}{c}a\\\downarrow\\\begin{bmatrix}0.9&0.1\\0.2&0.3\\0.5&0.6\\0.7&0.2\end{bmatrix}\end{array}$$

求X中的2与Z中的a之间的模糊关系。

模糊关系的合成

$$R_1=\begin{bmatrix}0.1&0.3&0.5&0.7\\0.4&0.2&0.8&0.9\\0.6&0.8&0.3&0.2\end{bmatrix}\leftarrow 2\qquad R_2=\begin{array}{c}a\\\downarrow\\\begin{bmatrix}0.9&0.1\\0.2&0.3\\0.5&0.6\\0.7&0.2\end{bmatrix}\end{array}$$



$R_3(2,a)=R_1\circ R_2(2,a)=\max(\min(0.4,0.9),...,\min(0.9,0.7))$（极大-极小）

$R_3(2,a)=R_1\circ R_2(2,a)=\max(0.4*0.9,...,0.9*0.7)$（极大-乘积）

后先

外内

模糊关系的合成

❖ 求模糊关系合成的一般方法

方法：
取R_1的第 i 行元素分别与R_2的第 j 列的对应元素相比较，两个数中取其小者，然后在所得的一组数中取最大的一个，并以此数作为 $R_1 \circ R_2$第 i 行第 j 列的元素。

例：设有如下两个模糊关系：

$$R_1=\begin{pmatrix}0.4&0.5&0.1\\0.2&0.6&0.2\\0.5&0.3&0.2\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}0.2&0.8\\0.4&0.6\\0.6&0.4\end{pmatrix}$$

求 $R_1 \circ R_2$。

解：

$$R_1 \circ R_2=\begin{pmatrix}0.4&0.5\\0.4&0.6\\0.3&0.5\end{pmatrix}$$

例：假设有两个模糊关系如下：$X\xrightarrow{P}Y,\ Y\xrightarrow{Q}Z$

$$P=\begin{bmatrix}0.5&0.3\\0.4&0.8\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0.8&0.5&0.1\\0.3&0.7&0.5\end{bmatrix}$$

求模糊关系 P 与模糊关系 Q 的合成。

解：

$$R\circ S=\begin{bmatrix}0.5&0.3\\0.4&0.8\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.8&0.5&0.1\\0.3&0.7&0.5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.5\wedge0.8)\vee(0.3\wedge0.3)&(0.5\wedge0.5)\vee(0.3\wedge0.7)&(0.5\wedge0.1)\vee(0.3\wedge0.5)\\(0.4\wedge0.8)\vee(0.8\wedge0.3)&(0.4\wedge0.5)\vee(0.8\wedge0.7)&(0.4\wedge0.1)\vee(0.8\wedge0.5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0.3\\0.4&0.7&0.5\end{bmatrix}$$

模糊关系的合成

例：设有模糊集X、Y、Z分别为：$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，$Z=\{z_1,z_2\}$，且X、Y之间有模糊关系R，Y、Z之间有模糊关系S，

$$R=\begin{bmatrix}0.5&0.6&0.3\\0.7&0.4&1\\0&0.8&0\\1&0.2&0.9\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0.2&1\\0.8&0.4\\0.5&0.3\end{bmatrix}$$

求模糊关系R与S的合成。

解：

$$R\circ S=\begin{bmatrix}0.5&0.6&0.3\\0.7&0.4&1\\0&0.8&0\\1&0.2&0.9\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.2&1\\0.8&0.4\\0.5&0.3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.5\wedge0.2)\vee(0.6\wedge0.8)\vee(0.3\wedge0.5)&(0.5\wedge1)\vee(0.6\wedge0.4)\vee(0.3\wedge0.3)\\(0.7\wedge0.2)\vee(0.4\wedge0.8)\vee(1\wedge0.5)&(0.7\wedge1)\vee(0.4\wedge0.4)\vee(1\wedge0.3)\\(0\wedge0.2)\vee(0.8\wedge0.8)\vee(0\wedge0.5)&(0\wedge1)\vee(0.8\wedge0.4)\vee(0\wedge0.3)\\(1\wedge0.2)\vee(0.2\wedge0.8)\vee(0.9\wedge0.5)&(1\wedge1)\vee(0.2\wedge0.4)\vee(0.9\wedge0.3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.6&0.5\\0.5&0.7\\0.8&0.4\\0.5&1\end{bmatrix}$$

模糊关系的合成

例： 某家中的子女与父母的长相的相似关系R为模糊关系，可表示为：

R	父	母
子	0.2	0.8
女	0.6	0.1

用模糊矩阵R表示为：

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\0.6 & 0.1\end{bmatrix}$$

该家中的父母与祖父母的相似关系S也是模糊关系，可表示为：

S	祖父	祖母
父	0.5	0.7
母	0.1	0

用模糊矩阵S表示为：$S=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\0.1 & 0\end{bmatrix}$

那么家中孙子，孙女与祖父，祖母的相似程度如何？

模糊关系的合成

答：

$$R\circ S=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\0.6 & 0.1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\0.1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.2\wedge 0.5)\vee(0.8\wedge 0.1) & (0.2\wedge 0.7)\vee(0.8\wedge 0)\\(0.6\wedge 0.5)\vee(0.1\wedge 0.1) & (0.6\wedge 0.7)\vee(0.1\wedge 0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\0.5 & 0.6\end{bmatrix}$$

P	祖父	祖母
孙子	0.2	0.2
孙女	0.5	0.6

- 模糊逻辑
- 模糊集合
- 模糊关系及其合成
- **模糊推理**

模糊命题

1、张三是一个年轻人。 → 模糊概念

2、李四的身高为1.75m左右。
3、他考上大学的可能性在60%左右。
4、明天八成是个好天气。 → 模糊数据

模糊推理

模糊命题

定义：含有模糊概念、模糊数据的语句称为模糊命题。它的一般表示形式为：

$$x \quad \text{is} \quad A$$

或者 $$x \quad \text{is} \quad A \quad (CF)$$

其中，A是模糊概念或者模糊数，用相应的模糊集及隶属函数刻画；x是论域上的变量，用以代表所论述对象的属性；CF是该模糊命题的可信度因子，它既可以是一个确定的数，也可以是一个模糊数或者模糊语言值。

模糊推理

相关定义

定义 模糊语言值是指表示大小、长短、多少等程度的一些词汇。如：极大、很大、相当大、比较大。

模糊语言值同样可用模糊集描述。

定义 模糊数：如果实数域R上的模糊集A的隶属函数$\mu_A(u)$在R上连续且具有如下性质，则A为一模糊数：

（1）A是正规模糊集，即存在u属于R，使得$\mu_A(u)=1$。

（2）A是凸模糊集，即对于任意实数x，$a<x<b$,有$\mu_A(x) >= \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}$。

直观上看，模糊数的隶属函数的图形是单峰的，在峰顶时隶属度达到1。

模糊数 就是 模糊数集合

模糊推理

模糊知识的表示

（1）模糊产生式规则的一般形式是：

$$\text{IF} \ E \ \text{THEN} \ H \ (CF,\lambda)$$

其中，E 是用模糊命题表示的模糊条件；H 是用模糊命题表示的模糊结论；CF 是知识的可信度因子，它既可以是一个确定的数，也可以是一个模糊数或模糊语言值。λ 是匹配度的阈值，用以指出知识被运用的条件。例如：

$$\text{IF} \ x \ \text{is} \ A \ \text{THEN} \ y \ \text{is} \ B \ (CF,\lambda)$$

（2）推理中所用的证据也用模糊命题表示，一般形式为

$$x \ \text{is} \ A' \ \text{或者} \ x \ \text{is} \ A' \ (CF)$$

（3）模糊推理要解决的问题：证据与知识的条件是否匹配；如果匹配，如何利用知识及证据推出结论。

模糊推理

模糊匹配与冲突消解

在模糊推理中，知识的前提条件中的A与证据中的A’不一定完全相同，因此首先必须考虑匹配问题。例如：

IF x is 小 THEN y is 大 (0.6)

x is 较小

两个模糊集或模糊概念的相似程度称为匹配度。常用的计算匹配度的方法主要有贴近度、语义距离及相似度等。

关系：匹配度 & 三种计算方法

记住符号（A，B）

复杂公式考试会给出，但是左边的符号要记住，然后每个类别的第一个式子记一下就行，主要是选择题可能考

模糊匹配与冲突消解

❖ 1、贴近度

设A与B分别是论域$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$上的两个模糊集，则它们的贴近度定义为：

$$(A,B)= [A\cdot B+(1-A\odot B)]/2$$

其中

（内积） $A\bullet B = \underset{U}{\vee}(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(u_i))$

（外积） $A\odot B = \underset{U}{\wedge}(\mu_A(u_i)\vee\mu_B(u_i))$

模糊匹配与冲突消解

匹配度为：1 - $d(A,B)$

❖ 2、语义距离

（1）海明距离：

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

$$d(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b|\mu_A(u)-\mu_B(u)|\,du$$

（2）欧几里得距离：

$$d(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i))^2}$$

（3）明可夫斯基距离：

$$d(A,B)=[\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|^q]^{\frac{1}{q}},\quad q\geq 1$$

（4）切比雪夫距离：

$$d(A,B)=\max_{1\leq i\leq n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

记忆：都看外围的底部：外积，外围的底部是往下打开的，所以是“外”

注意到前三个分子都是一样的

模糊匹配与冲突消解

❖ 3、相似度

（1）最大最小法：

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\max\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}$$

（2）算术平均法：

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)+\mu_B(u_i))}$$

（3）几何平均最小法：

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mu_A(u_i)\times\mu_B(u_i)}}$$

模糊匹配与冲突消解

❖ 3、相似度

（4）相关系数法：

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\bar{\mu}_A)\times(\mu_B(u_i)-\bar{\mu}_B)}{\sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\bar{\mu}_A)^2]\times[\sum_{i=1}^{n}(\mu_B(u_i)-\bar{\mu}_B)^2]}}$$

$$\bar{\mu}_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i),\quad \bar{\mu}_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_B(u_i)$$

（5）指数法：

$$r(A,B)=e^{-\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|}$$

模糊匹配与冲突消解

$$A \bullet B = \underset{U}{\vee}(\mu_A(u_i) \wedge \mu_B(u_i))$$

$$A \odot B = \underset{U}{\wedge}(\mu_A(u_i) \vee \mu_B(u_i))$$

例：设$U=\{a,b,c,d\}$，有模糊集

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

请利用贴近度、语义距离及相似度三种方法计算匹配度。

解：（1）贴近度：

$A \cdot B$=(0.3∧0.2)∨(0.4∧0.5)∨(0.6∧0.6)∨(0.8∧0.7)=0.7

$A \odot B$=(0.3∨0.2)∧(0.4∨0.5)∧(0.6∨0.6)∧(0.8∨0.7)=0.3

则 (A,B)=1/2[$A \cdot B$+(1-$A \odot B$)]=1/2[0.7+(1-0.3)]=0.7

模糊匹配与冲突消解

$$d(A,B) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|$$

例：设$U=\{a,b,c,d\}$，有模糊集

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

请利用贴近度、语义距离及相似度三种方法计算匹配度。

解：（2）海明距离：

$d(A,B)$=1/4×(|0.3-0.2|+|0.4-0.5|+|0.6-0.6|+|0.8-0.7|)=0.075

则 (A,B)=1-$d(A,B)$=1-0.075=0.925

模糊匹配与冲突消解

$$r(A,B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \min\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n} \max\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}}$$

例：设$U=\{a,b,c,d\}$，有模糊集

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

请利用贴近度、语义距离及相似度三种方法计算匹配度。

解：（3）相似度：（最大最小法）

$r(A,B)$=((0.3∧0.2)+(0.4∧0.5)+(0.6∧0.6)+(0.8∧0.7))/((0.3∨0.2)+(0.4∨0.5)+(0.6∨0.6)+(0.8∨0.7))

=1.9/2.2=0.86

模糊推理中的冲突消解

当有一条以上的规则的条件部分和当前数据库相匹配时，就需要**决定首先使用哪一条规则**，这称为冲突消解。

解决方法

（1）按匹配度大小排序

（2）按加权平均值排序

（3）按广义顺序关系排序

拒取式的关键：否定后件，也即，对P->Q，否定Q，得到-P
模糊集合的拒取式：B’和B不完全一致，可以视为某种否定

模糊推理的基本模式

❖ 1、模糊假言推理

知识：IF x is A THEN y is B

证据：x is A'

结论：y is B'

模糊推理的基本模式

❖ 2、模糊拒取式推理

知识：IF x is A THEN y is B

证据：y is B'

结论：x is A'

简单模糊推理

知识中只含有简单条件，且不带可信度因子的模糊推理称为简单模糊推理。

合成推理规则：

对于知识　　IF x is A THEN y is B

首先构造出A与B之间的模糊关系R，然后通过R与证据的合成求出结论。

如果已知证据是x is A'，且A与A'可以模糊匹配，则通过下述合成运算求取B'：

$$B'=A'\circ R$$

如果已知证据是y is B'，且B与B'可以模糊匹配，则通过下述合成运算求出A'：

$$A'=R\circ B'$$

注意顺序！

构造模糊关系R的方法

❖ 1、扎德方法

扎德提出了两种方法：一种称为条件命题的极大极小规则；另一种称为条件命题的算术规则，由它们获得的模糊关系分别记为R_m和R_a。

设$A\in F(U),B\in F(V)$，其表示分别为

$$A=\int_U \mu_A(u)/u,\quad B=\int_V \mu_B(v)/v$$

且用×，∪，∩，¬，⊕ 分别表示模糊集的笛卡儿乘积、并、交、补及有界和运算，则扎德把R_m和R_a分别定义为：

$$R_m=(A\times B)\cup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$R_a=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}1\wedge((1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,v)$$

保证最大值不超过1

构造模糊关系R的方法

❖ 1、扎德方法

IF x is A THEN y is B

对于模糊假言推理，若已知证据为 x is A'，则：

$B'_m=A'\circ R_m$

$B'_a=A'\circ R_a$

对于模糊拒取式推理，若已知证据为 y is B'，则：

$A'_m=R_m\circ B'$

$A'_a=R_a\circ B'$

构造模糊关系R的方法

❖ 1、扎德方法

例：设$U=V=\{1,2,3,4,5\}$，$A=1/1+0.5/2$，$B=0.4/3+0.6/4+1/5$

并设模糊知识及模糊证据分别为：

IF x is A THEN y is B

x is A'

其中，A'的模糊集为：$A'=1/1+0.4/2+0.2/3$，请利用模糊知识求出B'_m和B'_a。

若已知证据为：y is B'，且$B'=0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.5/4+0.3/5$，此时的$A'_m$和$A'_a$又分别是多少?

$A=\{1,0.5,0,0,0\}$

$B=\{0,0,0.4,0.6,1\}$

$$R_m=(A\times B)\cup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$R_a=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}1\wedge((1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,v)$$

解：由模糊知识可分别得到R_m与R_a：

$$R_m=\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},\quad R_a=\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0.5&0.5&0.9&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

构造模糊关系R的方法

解：则

$$B'_m=A'\circ R_m=\{1,0.4,0.2,0,0\}\circ\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}=\{0.4,0.4,0.4,0.6,1\}$$

同理，$B'_a=A'\circ R_a=\{0.4,0.4,0.4,0.6,1\}$

构造模糊关系R的方法

解：若已知证据为：y is B'，且B'=0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.5/4+0.3/5，则

$$A'_m = R_m \circ B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \{0.5,0.5,0.6,0.6,0.6\}$$

同理，$A'_a = R_a \circ B'$={0.5,0.6,0.6,0.6,0.6}。

最后一定写成一个向量的形式？如果本来结果是n*1向量？

一定是采用极大-极小算法来合成？

构造模糊关系R的方法

❖ 2、Mamdani方法

IF x is A THEN y is B

$$R_c = A \times B = \int_{U\times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / (u,v)$$

对于模糊假言推理，

$$B'_c = A' \circ R_c$$

对于模糊拒取式推理，

$$A'_c = R_c \circ B'$$

构造模糊关系R的方法

❖ 3、Mizumoto方法

米祖莫托等人根据多值逻辑中计算T(AB)的定义，提出了一组构造模糊关系的方法，分别记为R_s，R_g，R_{sg}，R_{gs}，R_{gg}，R_{ss}等等。其定义分别为：

$$R_s = A \times V \underset{s}{\Rightarrow} U \times B = \int_{U\times V} [\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v)] / (u,v)$$

$$\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ 0, \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$R_g = A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times B = \int_{U\times V} [\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v)] / (u,v)$$

$$\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ \mu_B(v), \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

…

构造模糊关系R的方法

❖ 3、Mizumoto方法

例：设U=V={1,2,3,4,5}，A=1/1+0.5/2，B=0.4/3+0.6/4+1/5

模糊知识：IF x is A THEN y is B

模糊证据：x is A'

其中，A'的模糊集为：A'=1/1+0.4/2+0.2/3，求B'_s和B'_g。

构造模糊关系*R*的方法

❖ 3、Mizumoto方法

$$R_s = A\times V \underset{s}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v)]/(u,v)$$

$$\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v) = \begin{cases}1, & \mu_A(u)\le \mu_B(v)\\ 0, & \mu_A(u) > \mu_B(v)\end{cases}$$

$$R_g = A\times V \underset{g}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v)]/(u,v)$$

$$\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v) = \begin{cases}1, & \mu_A(u)\le \mu_B(v)\\ \mu_B(v), & \mu_A(u) > \mu_B(v)\end{cases}$$

…

解：

$$R_s = \begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},\quad R_g = \begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0&0&0.4&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

则 $B'_s = A' \circ R_s = \{0.2,0.2,0.2,0.4,1\}$

$B'_g = A' \circ R_g = \{0.2,0.2,0.4,0.6,1\}$。

模糊判决方法

在推理得到的模糊集合中取一个相对最能代表这个模糊集合的单值的过程就称作解模糊或模糊判决（Defuzzification）。

模糊判决可以采用不同的方法：重心法、最大隶属度方法、加权平均法。

下面介绍各种模糊判决方法，并以“水温适中”为例，说明不同方法的计算过程。

假设“水温适中”的模糊集合为

$$F = 0.0/0 + 0.0/10 + 0.33/20 + 0.67/30 + 1.0/40 + 1.0/50$$
$$+0.75/60 + 0.5/70 + 0.25/80 + 0.0/90 + 0.0/100$$

模糊判决方法

❖ 1、重心法

所谓重心法就是取模糊隶属函数曲线与横坐标轴围成面积的重心作为代表点。理论上应该计算输出范围内一系列连续点的重心，即

$$u = \frac{\int_x x\mu_N(x)dx}{\int_x \mu_N(x)dx}$$

但实际上一般是计算输出范围内整个采样点（即若干离散值）的重心。

模糊判决方法

❖ 1、重心法

“水温适中”的模糊集合为：

$$F = 0.0/0 + 0.0/10 + 0.33/20 + 0.67/30 + 1.0/40 + 1.0/50$$
$$+0.75/60 + 0.5/70 + 0.25/80 + 0.0/90 + 0.0/100$$

解：（重心法）

$$u = \sum x_i \cdot \mu_N(x_i) / \sum \mu_N(x_i)$$
$$= (0\times0.0 + 10\times0.0\times + 20\times.033\times + 30\times0.67\times + 40\times1.0\times + 50\times1.0$$
$$+ 60\times0.75\times + 70\times0.5 + 80\times0.25 + 90\times0.0 + 100\times0.0)$$
$$/(0.0 + 0.0 + 0.33 + 0.67 + 1.0 + 1.0 + 0.75 + 0.5 + 0.25 + 0.0 + 0.0)$$
$$= 48.2$$

即输出的代表值为48.2ºC。

模糊判决方法

❖ 2、最大隶属度法

这种方法最简单，只要在推理结论的模糊集合中取隶属度最大的那个元素作为输出量即可。

不过，要求这种情况下的隶属函数曲线一定是单峰曲线。

如果该曲线是梯形平顶，那么具有最大隶属度的元素就可能不只一个，这时就要对所有取最大隶属度的元素求其平均值。

模糊判决方法

❖ 2、最大隶属度法

“水温适中”的模糊集合为：

$$F = 0.0/0 + 0.0/10 + 0.33/20 + 0.67/30 + 1.0/40 + 1.0/50 + 0.75/60 + 0.5/70 + 0.25/80 + 0.0/90 + 0.0/100$$

解：（最大隶属度法）

对于“水温适中”这种情况，按最大隶属度原则，有两个元素40和50具有最大隶属度1.0，那就要对所有取最大隶属度的元素40和50求平均值，执行量应取：

$$u_{max} = (40+50)/2 = 45$$

模糊判决方法

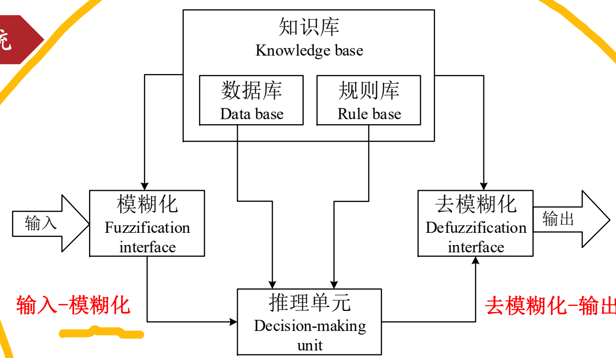
❖ 3、系数加权平均法

系数加权平均法的输出执行量由下式决定：

$$u = \sum k_i \cdot x_i / \sum k_i$$

式中，系数k_i的选择要根据实际情况而定，不同的系统决定了系统有不同的响应特性。

模糊推理系统



模 糊 推 理

课后小结

- 模糊推理
- 构造模糊关系矩阵
  - 扎德方法
  - Mamdani方法
  - Mizumoto方法
- 模糊判决
  - 重心法
  - 最大隶属度法
  - 系数加权平均法