Symulacje w finansach, część 2

Metody redukcji wariancji

Olga Bączkowska

4.04.2022

Błąd standardowy estymacji Monte Carlo

Przypomnijmy, e jeśli chcemy wyestymować wartość oczekiwaną $(\psi(X))$ przy pomocy estymatora $\hat{\alpha}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)$, gdzie x_i s niezależnymi próbkami z rozkładu f_X, to wariancja estymatora wynosi

$$Var(\hat{\alpha}_N) = \frac{\sigma(\psi(X))}{N}$$

Błąd standardowy estymacji Monte Carlo

Przypomnijmy, e jeśli chcemy wyestymować wartość oczekiwaną $(\psi(X))$ przy pomocy estymatora $\hat{\alpha}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)$, gdzie x_i s niezależnymi próbkami z rozkładu f_X, to wariancja estymatora wynosi

$$Var(\hat{\alpha}_N) = \frac{\sigma(\psi(X))}{N}$$

Możemy zastąpić (często nieznane) $\sigma(\psi(X))$ odchyleniem standardowym próbki

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)\right)^2}.$$

Błąd standardowy estymacji Monte Carlo

Przypomnijmy, e jeśli chcemy wyestymować wartość oczekiwaną $(\psi(X))$ przy pomocy estymatora $\hat{\alpha}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)$, gdzie x_i s niezależnymi próbkami z rozkładu f_X, to wariancja estymatora wynosi

$$Var(\hat{\alpha}_N) = \frac{\sigma(\psi(X))}{N}$$

Możemy zastąpić (często nieznane) $\sigma(\psi(X))$ odchyleniem standardowym próbki

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)\right)^2}.$$

Wyrażenie $\epsilon_N = \frac{s_N}{\sqrt{N}}$ nazywamy bkedem standardowym.

Błąd standardowy estymacji Monte Carlo

Przypomnijmy, e jeśli chcemy wyestymować wartość oczekiwaną $(\psi(X))$ przy pomocy estymatora $\hat{\alpha}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)$, gdzie x_i s niezależnymi próbkami z rozkładu f_X, to wariancja estymatora wynosi

$$Var(\hat{\alpha}_N) = \frac{\sigma(\psi(X))}{N}$$

Możemy zastąpić (często nieznane) $\sigma(\psi(X))$ odchyleniem standardowym próbki

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)\right)^2}.$$

Wyrażenie $\epsilon_N = \frac{s_N}{\sqrt{N}}$ nazywamy bkedem standardowym.

Im mniejszy bąd standardowy tym większa dokładność kalkulacji.

Błąd standardowy estymacji Monte Carlo

Przypomnijmy, e jeśli chcemy wyestymować wartość oczekiwaną $(\psi(X))$ przy pomocy estymatora $\hat{\alpha}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)$, gdzie x_i s niezależnymi próbkami z rozkładu f_X, to wariancja estymatora wynosi

$$Var(\hat{\alpha}_N) = \frac{\sigma(\psi(X))}{N}$$

Możemy zastąpić (często nieznane) $\sigma(\psi(X))$ odchyleniem standardowym próbki

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i)\right)^2}.$$

Wyrażenie $\epsilon_N = \frac{s_N}{\sqrt{N}}$ nazywamy bkedem standardowym.

Im mniejszy bąd standardowy tym większa dokładność kalkulacji.

Nie ma jednej uniwersalnej metody redukcji wariancji. Zwykle największy wzrost efektywności możemy uzyskać korzystając ze szczególnych własności danego problemu czy modelu.

Antitethic sampling

Metoda *antithetic sampling* polega na redukcji wariancji poprzez wprowadzenie ujemnej zależności między parami próbek. Jeśli nasza realizacja Y_i zależy od próbki Z_i ($Y_i = Y(Z_i)$), to do obliczeń używamy również $\tilde{Y}_i = Y(-Z_i)$.

Antitethic sampling

Metoda *antithetic sampling* polega na redukcji wariancji poprzez wprowadzenie ujemnej zależności między parami próbek. Jeśli nasza realizacja Y_i zależy od próbki Z_i ($Y_i = Y(Z_i)$), to do obliczeń używamy również $\tilde{Y}_i = Y(-Z_i)$.

$$\hat{Y}_{AV} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2}\right)$$

Antitethic sampling

Metoda *antithetic sampling* polega na redukcji wariancji poprzez wprowadzenie ujemnej zależności między parami próbek. Jeśli nasza realizacja Y_i zależy od próbki Z_i ($Y_i = Y(Z_i)$), to do obliczeń używamy również $\tilde{Y}_i = Y(-Z_i)$.

$$\hat{Y}_{AV} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2}\right)$$

A zatem z centralnego twierdzenia granicznego

$$\frac{\hat{Y}_{AV} - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_{AV}/\sqrt{n}} \to N(0,1), \quad \sigma_{AV}^2 = Var\left(\frac{Y_1 + \tilde{Y}_i}{2}\right)$$

Antitethic sampling

Metoda *antithetic sampling* polega na redukcji wariancji poprzez wprowadzenie ujemnej zależności między parami próbek. Jeśli nasza realizacja Y_i zależy od próbki Z_i ($Y_i = Y(Z_i)$), to do obliczeń używamy również $\tilde{Y}_i = Y(-Z_i)$.

$$\hat{Y}_{AV} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2}\right)$$

A zatem z centralnego twierdzenia granicznego

$$\frac{\hat{Y}_{AV} - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_{AV}/\sqrt{n}} \to N(0,1), \quad \sigma_{AV}^2 = Var\left(\frac{Y_1 + \tilde{Y}_i}{2}\right)$$

Zakładając, że "koszt" wygenerowania pary $(Y_i, \tilde{Y}_i)$ jest dwa razy większy niż wygenerowania Y_i, metoda redukuje wariancję jeśli

$$Var\left(\hat{Y}_{AV}\right) < Var\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} Y_i\right) \leftrightarrow Cov(Y_i, \tilde{Y}_i) < 0.$$

Antitethic sampling

Metoda *antithetic sampling* polega na redukcji wariancji poprzez wprowadzenie ujemnej zależności między parami próbek. Jeśli nasza realizacja Y_i zależy od próbki Z_i ($Y_i = Y(Z_i)$), to do obliczeń używamy również $\tilde{Y}_i = Y(-Z_i)$.

$$\hat{Y}_{AV} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2}\right)$$

A zatem z centralnego twierdzenia granicznego

$$\frac{\hat{Y}_{AV} - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_{AV}/\sqrt{n}} \to N(0,1), \quad \sigma_{AV}^2 = Var\left(\frac{Y_1 + \tilde{Y}_i}{2}\right)$$

Zakładając, że "koszt" wygenerowania pary $(Y_i, \tilde{Y}_i)$ jest dwa razy większy niż wygenerowania Y_i, metoda redukuje wariancję jeśli

$$Var\left(\hat{Y}_{AV}\right) < Var\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} Y_i\right) \leftrightarrow Cov(Y_i, \tilde{Y}_i) < 0.$$

Ten warunek zachodzi np. gdy $Y(Z)$ jest monotoniczne względem Z.

Moment matching

Niech $S(t)$ będzie procesem cen (niepłacącego dywidend) aktywa, a r stałą stopą wolną od ryzyka. Wiemy, że

$$\mathbb{E}(S(t)) = e^{rt} S(0).$$

Załóżmy, że wysymulowaliśmy n niezależnych próbek $S^1, \ldots, S^n$.

Moment matching

Niech $S(t)$ będzie procesem cen (niepłacącego dywidend) aktywa, a r stałą stopą wolną od ryzyka. Wiemy, że

$$\mathbb{E}(S(t)) = e^{rt} S(0).$$

Załóżmy, że wysymulowaliśmy n niezależnych próbek $S^1, ..., S^n$. Przeważnie mamy

$$e^{-rt} \bar{S}(t) = e^{-rt} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \neq S(0). \tag{1}$$

Moment matching

Niech $S(t)$ będzie procesem cen (niepłacącego dywidend) aktywa, a r stałą stopą wolną od ryzyka. Wiemy, że

$$\mathbb{E}(S(t)) = e^{rt} S(0).$$

Załóżmy, że wysymulowaliśmy n niezależnych próbek $S^1, \ldots, S^n$. Przeważnie mamy

$$e^{-rt} \bar{S}(t) = e^{-rt} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \neq S(0). \tag{1}$$

W problemie wyceny instrumentów pochodnych zwykle celem jest określenie wartości instrumentu w odniesieniu do instrumentów bazowych. Brak równości w (1) możemy rozumieć jako potencjalną możliwość arbitrażu.

Moment matching

Niech $S(t)$ będzie procesem cen (niepłacącego dywidend) aktywa, a r stałą stopą wolną od ryzyka. Wiemy, że

$$\mathbb{E}(S(t)) = e^{rt} S(0).$$

Załóżmy, że wysymulowaliśmy n niezależnych próbek $S^1, \dots, S^n$. Przeważnie mamy

$$e^{-rt} \bar{S}(t) = e^{-rt} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \neq S(0). \tag{1}$$

W problemie wyceny instrumentów pochodnych zwykle celem jest określenie wartości instrumentu w odniesieniu do instrumentów bazowych. Brak równości w (1) możemy rozumieć jako potencjalną możliwość arbitrażu. Jednym z rozwiązań tego problemu jest transformacja wysymulowanych ścieżek:

$$\tilde{S}(t) = S_i(t) \frac{\mathbb{E}(S(t))}{\bar{S}(t)}, \quad i = 1, \dots, n;$$

Moment matching

Niech $S(t)$ będzie procesem cen (niepłacącego dywidend) aktywa, a r stałą stopą wolną od ryzyka. Wiemy, że

$$\mathbb{E}(S(t)) = e^{rt} S(0).$$

Załóżmy, że wysymulowaliśmy n niezależnych próbek $S^1, ..., S^n$. Przeważnie mamy

$$e^{-rt}\bar{S}(t) = e^{-rt}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i(t) \neq S(0). \tag{1}$$

W problemie wyceny instrumentów pochodnych zwykle celem jest określenie wartości instrumentu w odniesieniu do instrumentów bazowych. Brak równości w (1) możemy rozumieć jako potencjalną możliwość arbitrażu. Jednym z rozwiązań tego problemu jest transformacja wysymulowanych ścieżek:

$$\tilde{S}(t) = S_i(t)\frac{\mathbb{E}(S(t))}{\bar{S}(t)}, \quad i = 1, ..., n;$$

lub

$$\tilde{S}(t) = S_i(t) + \mathbb{E}(S(t)) - \bar{S}(t), \quad i = 1, ..., n.$$

Moment matching - przykład

Dla standardowego procesu Wienera transformacja

$$\tilde{W}_i(t) = \frac{W_i(t) - \hat{W}(t)}{s(t)/\sqrt{t}},$$

gdzie $s(t)$ jest odchyleniem standardowym próbki, daje dopasowanie dwóch pierwszych moementów, ale nie zapewnia niezależności przyrostów.

Moment matching - przykład

Dla standardowego procesu Wienera transformacja

$$\tilde{W}_i(t) = \frac{W_i(t) - \hat{W}(t)}{s(t)/\sqrt{t}},$$

gdzie $s(t)$ jest odchyleniem standardowym próbki, daje dopasowanie dwóch pierwszych moementów, ale nie zapewnia niezależności przyrostów. Jeśli przyjmiemy że

$$W_i(t_k) = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{t_j - t_{j-1}} Z_{ij}, \quad \{Z_{ij}\} \text{ i.i.d. z } N(0,1),$$

$$\hat{Z}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_{ij}, \quad s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Z_{ij}) - \hat{Z}_j s_j$$

zachowujemy niezależność przyrostów.

"Zmienne kontrolne" (Control Variates)

Załóżmy, że mamy n realizacji zmiennej losowej Y - $(Y_1, ..., Y_n)$ i chcemy wyestymować $\mathbb{E}(Y)$ oraz że dla każdej realizacji Y_i mamy dodatkowo realizację innej zmiennej losowej X - X_i. Jeśli pary (X_i, Y_i) są i.i.d., a $\mathbb{E}(X)$ jest znane i zdefiniujemy

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}(X)),$$

"Zmienne kontrolne" (Control Variates)

Załóżmy, że mamy n realizacji zmiennej losowej Y - $(Y_1, ..., Y_n)$ i chcemy wyestymować $\mathbb{E}(Y)$ oraz że dla każdej realizacji Y_i mamy dodatkowo realizację innej zmiennej losowej X - X_i. Jeśli pary (X_i, Y_i) są i.i.d., a $\mathbb{E}(X)$ jest znane i zdefiniujemy

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}(X)),$$

możemy estymować $\mathbb{E}(Y)$ jako

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}(X)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b(X_i - \mathbb{E}(X)).$$

"Zmienne kontrolne" (Control Variates)

Załóżmy, że mamy n realizacji zmiennej losowej Y - $(Y_1, ..., Y_n)$ i chcemy wyestymować $\mathbb{E}(Y)$ oraz że dla każdej realizacji Y_i mamy dodatkowo realizację innej zmiennej losowej X - X_i. Jeśli pary (X_i, Y_i) są i.i.d., a $\mathbb{E}(X)$ jest znane i zdefiniujemy

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}(X)),$$

możemy estymować $\mathbb{E}(Y)$ jako

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}(X)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b(X_i - \mathbb{E}(X)).$$

Tak określony estymator jest nieobciążony i zgodny z prawdopodobieństwem 1 a jego wariancja wynosi

$$Var(\bar{Y}(b)) = \frac{\sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma Y\rho XY + b^2\sigma_X^2}{n}.$$

Control Variates - redukcja wariancji

Optymalny współczynnik b minimalizujący wariancję jest dany wzorem:

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)}$$

Control Variates - redukcja wariancji

Optymalny współczynnik b minimalizujący wariancję jest dany wzorem:

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

Stosunek wariancji optymalnego estymatora do wariancji estymatora "niekontrolowanego" wynosi

$$\frac{Var\left(\bar{Y} - b^*(\bar{X} - \mathbb{E}(X))\right)}{Var(\bar{Y})} = 1 - \rho^2_{XY}.$$

Control Variates - redukcja wariancji

Optymalny współczynnik b minimalizujący wariancję jest dany wzorem:

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

Stosunek wariancji optymalnego estymatora do wariancji estymatora "niekontrolowanego" wynosi

$$\frac{Var\left(\bar{Y} - b^*(\bar{X} - \mathbb{E}(X))\right)}{Var(\bar{Y})} = 1 - \rho_{XY}^2.$$

Aby uzyskać duża redukcję wariancji potrzebujemy zmiennych kontrolnych silnie skorelowanych z Y.

Control Variates - redukcja wariancji

Optymalny współczynnik b minimalizujący wariancję jest dany wzorem:

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

Stosunek wariancji optymalnego estymatora do wariancji estymatora "niekontrolowanego" wynosi

$$\frac{Var\left(\bar{Y} - b^*(\bar{X} - \mathbb{E}(X))\right)}{Var(\bar{Y})} = 1 - \rho_{XY}^2.$$

Aby uzyskać duża redukcję wariancji potrzebujemy zmiennych kontrolnych silnie skorelowanych z Y. W praktyce najczęściej nie znamy σ_Y i ρ_{XY}. Zastępując te wartości ich standardowymi estymatorami mamy

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

przy czym $\hat{b}_n \to b$ z prawdopodobienstwem 1.

Control Variates - przykłady

Klasyczne przykłady użycie metody control variates:

Control Variates - przykłady

Klasyczne przykłady użycie metody control variates:

- instrument bazowy jako "zmienna kontrolna" dla zdyskontowanej wypłaty z opcji Y:

$$\bar{Y}(b_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(Y_i - b + n(S_i(T) - e^{rT}S(0))\Big)$$

Control Variates - przykłady

Klasyczne przykłady użycie metody control variates:

- instrument bazowy jako "zmienna kontrolna" dla zdyskontowanej wypłaty z opcji Y:

$$\bar{Y}(b_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(Y_i - b + n(S_i(T) - e^{rT}S(0))\Big)$$

- ceny "prostszych" opcji wyznaczone przy pomocy rozwiązań analitycznych moga być zmienną kontrolną dla bardziej skomplikowanych instrumentów np. w modelu Blacka-Scholesa ceny geometycznych opcji azjatyckich dla arytmetycznych opcji ajatyckich.

Control Variates - przykłady

Klasyczne przykłady użycie metody control variates:

- instrument bazowy jako "zmienna kontrolna" dla zdyskontowanej wypłaty z opcji Y:

$$\bar{Y}(b_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(Y_i - b + n(S_i(T) - e^{rT}S(0))\Big)$$

- ceny "prostszych" opcji wyznaczone przy pomocy rozwiązań analitycznych moga być zmienną kontrolną dla bardziej skomplikowanych instrumentów np. w modelu Blacka-Scholesa ceny geometycznych opcji azjatyckich dla arytmetycznych opcji ajatyckich.
- w stochastycznych modelach stopy procentowej "zmienną kontrolną" mogą być ceny obligacji.

Zwykle istotną redukcję wariancji możemy uzyskątylko dzięki znajomości specyficznych właściwości danego modelu / instrumentu.

Importance Sampling

Metoda *Importance sampling* ma na celu redukcję wariancji poprzez zmianę miary prawdopodobieństwa, względem której generujemy ścieżki skupiając się na obszarach, które najbardziej wpływają na średnią. Chcąc wyestymować

Importance Sampling

Metoda *Importance sampling* ma na celu redukcję wariancji poprzez zmianę miary prawdopodobieństwa, względem której generujemy ścieżki skupiając się na obszarach, które najbardziej wpływają na średnią. Chcąc wyestymować

$$\alpha = \mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)f(x)dx,$$

gdzie f jest gęstością zmiennej X, bierzemy inną gęstość g taką, że $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Wtedy

Importance Sampling

Metoda *Importance sampling* ma na celu redukcję wariancji poprzez zmianę miary prawdopodobieństwa, względem której generujemy ścieżki skupiając się na obszarach, które najbardziej wpływają na średnią. Chcąc wyestymować

$$\alpha = \mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)f(x)dx,$$

gdzie f jest gęstością zmiennej X, bierzemy inną gęstość g taką, że $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Wtedy

$$\alpha = \int h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx = \tilde{\mathbb{E}}\left(h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right),$$

Jeśli $X_1, ..., X_n$ są niezależnymi próbkami z g mamy estymator:

$$\hat{\alpha}_g(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)}$$

Importance Sampling

Metoda *Importance sampling* ma na celu redukcję wariancji poprzez zmianę miary prawdopodobieństwa, względem której generujemy ścieżki skupiając się na obszarach, które najbardziej wpływają na średnią. Chcąc wyestymować

$$\alpha = \mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)f(x)dx,$$

gdzie f jest gęstością zmiennej X, bierzemy inną gęstość g taką, że $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Wtedy

$$\alpha = \int h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx = \tilde{\mathbb{E}}\left(h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right),$$

Jeśli $X_1, ..., X_n$ są niezależnymi próbkami z g mamy estymator:

$$\hat{\alpha}_g(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)}$$

Ten estymator jest nieobciążony, a jego wariancja zależy od wyboru g. Aby uzyskać redukcję wariancji powinniśmy wybierać próbki proporcjonalnie do iloczynu h i f.

Importance sampling - przykład

Zbieżność cen opcji call (put) zależd liczby ścieżek instrumentu bazowego będących powyżej (poniżej) ceny wykonania. Aby poprawić zbieżność dla opcji out-of-the-money zastosujemy metodę *importance sampling* tak aby względem nowej miary zdyskontowany proces cen akcji miał dryf zapewniający zwiększenie liczby ścieżek ponad (poniżej) ceny wykonania.

Importance sampling - przykład

Zbieżność cen opcji call (put) zależd liczby ścieżek instrumentu bazowego będących powyżej (poniżej) ceny wykonania. Aby poprawić zbieżność dla opcji out-of-the-money zastosujemy metodę *importance sampling* tak aby względem nowej miary zdyskontowany proces cen akcji miał dryf zapewniający zwiększenie liczby ścieżek ponad (poniżej) ceny wykonania. Niech względem miary $\mathbb{Q}^\theta$:

$$dSt = (r + \sigma\theta)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}^\theta}$$

Z twierdzenia Girsanowa mamy

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^\theta}|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\theta W_t^{\mathbb{Q}^\theta} - \frac{\theta^2}{2}t}$$

Importance sampling - przykład

Zbieżność cen opcji call (put) zależd liczby ścieżek instrumentu bazowego będących powyżej (poniżej) ceny wykonania. Aby poprawić zbieżność dla opcji out-of-the-money zastosujemy metodę *importance sampling* tak aby względem nowej miary zdyskontowany proces cen akcji miał dryf zapewniający zwiększenie liczby ścieżek ponad (poniżej) ceny wykonania. Niech względem miary $\mathbb{Q}^{\theta}$:

$$dSt = (r + \sigma\theta)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}^{\theta}}$$

Z twierdzenia Girsanowa mamy

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^{\theta}}|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\theta W_t^{\mathbb{Q}^{\theta}} - \frac{\theta^2}{2}t}$$

Wówczas biorąc przyrosty $d\tilde{W}_t = dW_t + \theta dt$ i symulując $\tilde{S}(t)$ cenę opcji liczymy jako

$$C(0, K) \approx e^{-rT}\left(max(\tilde{S}(T) - K, 0)e^{-\theta W_T^{\mathbb{Q}^{\theta}} - \frac{\theta^2}{2}T}\right)$$

Variate recycling

Często zależy nam nie tylko na tym aby wycenićinstrument pochodny, ale też żeby wyznaczyś wrażliwość ceny na zmianę pewnych paramterów np.

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial S}, \qquad vega = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Variate recycling

Często zależy nam nie tylko na tym aby wycenićinstrument pochodny, ale też żeby wyznaczyś wrażliwość ceny na zmianę pewnych paramterów np.

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial S}, \qquad vega = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Najczęściej estymuje się wrażliwości przy pomocy przybliżenia:

$$\frac{\partial v}{\partial p} \approx \frac{v(p+\delta p) - v(p)}{\delta p}.$$

Variate recycling

Często zależy nam nie tylko na tym aby wycenićinstrument pochodny, ale też żeby wyznaczyś wrażliwość ceny na zmianę pewnych paramterów np.

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial S}, \qquad vega = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Najczęściej estymuje się wrażliwości przy pomocy przybliżenia:

$$\frac{\partial v}{\partial p} \approx \frac{v(p+\delta p) - v(p)}{\delta p}.$$

Można pokazać, że

$$Var\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) \approx \frac{2}{\delta p} Var(v(p)) \left(1 - corr(v(p+\delta p), v(p))\right),$$

oraz że dla monotonicznych funkcji $v(p)$ korelacja jest dodatnia jeśli użyjemy tych samych realizacji ścieżek procesu Wienera. To znaczy użycie tych samych próbek przy obliczaniu $v(p+\delta p)$ i $v(p)$ (metoda *variate recycling*) przyspiesza zbieżność.

Bibliografia

1. P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.
2. P. Jackel,*Monte Carlo Methods in Finance*, Wiley, 2002.