МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет физический

Кафедра радиофизики

Отчет по контрольной работе на тему:

«Формирование негауссовских случайных процессов»

Специальность 03.04.03 «Радиофизика»

Специализация: Компьютерные методы обработки радиофизической информации

Выполнил Дроздов Д. Г.

Студент 1 курса магистратуры

Преподаватель Радченко Ю. С.,

д.ф.-м.н., профессор

Воронеж 2022

Общая схема моделирования

Задача моделирования негауссовского процесса $\xi(t)$ с заданными одномерным распределением $W_\xi(x,t)$, моментными функциями $m_k[\xi]$ и ковариационной $B_\xi(t_1,t_2)$ и нормированной корреляционной функцией $R_\xi(t_1,t_2)$ может быть реализована с помощью двухэтапной процедуры (рис. 1). **Этап 1:** формируется стандартный гауссовский процесс $x(t)$ с заданной нормированной корреляционной функцией $R_x(t_1,t_2)$ из белого шума $\eta(t)$. **Этап 2:** нелинейное безынерционное преобразование $\xi = g(x)$ процесса $x(t)$.

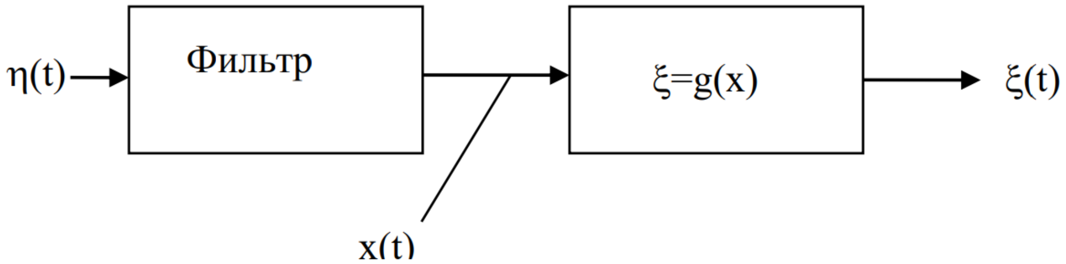


Рис. 1. Общая схема моделирования.

Нелинейное монотонное преобразование $\xi = g(x)$ нетрудно получить из следующих преобразований

$$F_x(u) = P[x < u] = P[g^{-1}(\xi) < u] = P[\xi < g(u)] = F_\xi[g(u)]. \tag{1}$$

Дифференцируя обе части соотношения (1) по u и учитывая, что $\frac{d}{du}F_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$, получаем итоговое нелинейное дифференциальное уравнение

$$W_\xi[g(u)]\frac{dg(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right). \tag{2}$$

Расчет начальных моментов можно выполнить по формуле

$$m_k[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} g^k(u) W_x(u) du \tag{3}$$

Соответственно: $m_\xi = m_1[\xi],\ D_\xi = m_2[\xi] - (m_\xi)^2$, и ковариационная функция равна

$$B_\xi(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u_1)g(u_2)W_{x2}(u_1,u_2;t_1,t_2)du_1 du_2, \tag{4}$$

где $W_{x2}(u_1,u_2;t_1,t_2)$ - двумерная плотность вероятности гауссовского процесса $x(t)$. Тогда нормированную корреляционную функцию $R_\xi(t_1,t_2)$ можно рассчитать по формуле $R_\xi(t_1,t_2) = (B_\xi(t_1,t_2) - (m_\xi)^2)/D_\xi$. В приведенных расчетах функция $\xi = g(x)$ должна быть монотонно возрастающей. Если же мы выберем монотонно убывающую функцию, то (1) преобразуется в соотношение $F_x(u) = 1 - F_\xi[g(u)]$. Тогда дифференциальное уравнение (2) принимает вид

$$\left|\frac{dg(u)}{du}\right| W_\xi[g(u)] = W_x(u). \tag{5}$$

Трехэтапная схема формирования негауссовского процесса.

Модифицируем общую двухэтапную схему формирования негауссовкого процесса в трехэтапную. **Этап 1:** формируется стандартный гауссовский процесс $x(t)$ с заданной нормированной корреляционной функцией $R_x(t_1,t_2)$. **Этап 2:** нелинейное безынерционное преобразование $\alpha = g(x)$ процесса $x(t)$ в процесс $\alpha(t)$ с стандартным равномерным распределением $W_\alpha(u)=1$. **Этап 3:** монотонное нелинейное преобразование $\xi(t)= f[\alpha(t)]$ согласно методу обратных функций.

Дифференциальное уравнение для преобразования $\alpha = g(x)$ принимает вид $dg(u)/g(u)]=W_x(u)$. Откуда получаем $g(u)=\Phi(u)$, то есть $\alpha(t)=\Phi[x(t)]$, где $\Phi(u)$ – интеграл вероятности. По методу обратных функций $f(u)=F_\xi^{-1}(u)$. Таким образом, общее нелинейное преобразование имеет вид

$$\xi(t)=F_\xi^{-1}\left[\Phi\left(x(t)\right)\right]. \qquad (6)$$

Модифицированный трехэтапный метод формирования процессов.

Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ - независимые стандартные гауссовские процессы с параметрами $N(0,1)$. Тогда величина $Y(t)=\left(X_1^2(t)+X_2^2(t)\right)/2$ имеет стандартное экспоненциальное распределение $W_Y(u)=\exp(-u)$, которое связано с равномерно распределенным случайным числом преобразованием $Y=-ln(\alpha)$. Таким образом, можно записать

$$\alpha(t)=\exp\left[-\left(X_1^2(t)+X_2^2(t)\right)/2\right]. \qquad (7)$$

Далее по методу обратных функций

$$\xi(t)=F_\xi^{-1}[\alpha(t)]=F_\xi^{-1}\left[\exp\left(-\left(X_1^2(t)+X_2^2(t)\right)/2\right)\right]. \qquad (8)$$

По сравнению с соотношением (6) в (8) отсутствует функция $\Phi(u)$, не имеющая простого аналитического вида. Алгоритм формирования равномерно распределенного процесса $\alpha(t)$ по формуле (7) проще, чем по формуле $\alpha(t)=\Phi[X(t)]$. Но для этого требуется формирования двух гауссовских реализаций, вместо одной, присутствующей в стандартном трехэтапном алгоритме.

Пример моделирования негауссовского равномерно распределенного процесса.

Сформировать коррелированный случайный процесс с равномерной плотностью вероятности $W_\xi(x)=\frac{1}{2*a}, |x|\le a$.

Решение: Дифференциальное уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{2a}\frac{dg(u)}{du}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

Его решение с учетом соответствия: при x=-∞ ξ=-a , есть

$$g(u)=a[2\Phi(u)-1],$$

где $\Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{u} \exp(-t^2/2)dt$ - интеграл вероятностей. Первые моменты процесса $\xi(t)$: $m_\xi = 0$, $D_\xi = m_2[\xi] = a^2/3$. Нормированная корреляционная функция

$$R_\xi(\tau) = (6/\pi)\arcsin(0.5R_x(\tau)),$$

или $R_x(\tau) = 2\sin\left[(\pi/6)R_\xi(\tau)\right]$. Учитывая, что $\sin(z) \approx z$ при $|z| \le \pi/6$, и $|R_\xi(\tau)| \le 1$, можно записать $R_x(\tau) \approx (\pi/3)R_\xi(\tau)$, или $R_\xi(\tau) \approx (3/\pi)R_x(\tau) \approx R_x(\tau)$.

Практическая часть

Вариант№1

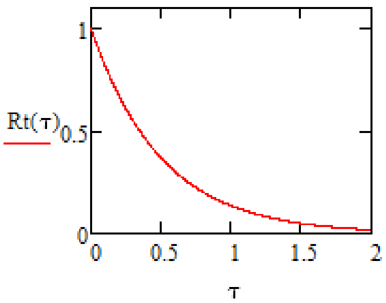
Моделирование негауссовских процессов

1. Сформировать равномерно распределенный процесс $W_\xi(x) = 1/2, x \in [0, 2]$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau) = \exp(-|\tau|/\tau_k)$. $\tau_k = 0.5$ с. Учесть, что нормированные корреляционные функции производящего процесса $X(t)$ и $\xi(t)$ $R_X(\tau) \approx R_\xi(\tau)$.

Листинг программы

$$W(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

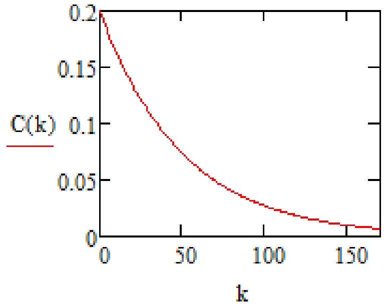
$\tau k := 0.5$ $\alpha := \frac{1}{\tau k}$ $Rt(\tau) := e^{-\alpha \cdot |\tau|}$



$L := 170$ $\gamma := 0.02$ $k := 0..L$

$C(k) := \sqrt{2\cdot\gamma}\cdot\exp(-k\cdot\gamma)$

$$\left(\sum_{k=0}^{L} C(k)^2\right) = 1.019$$

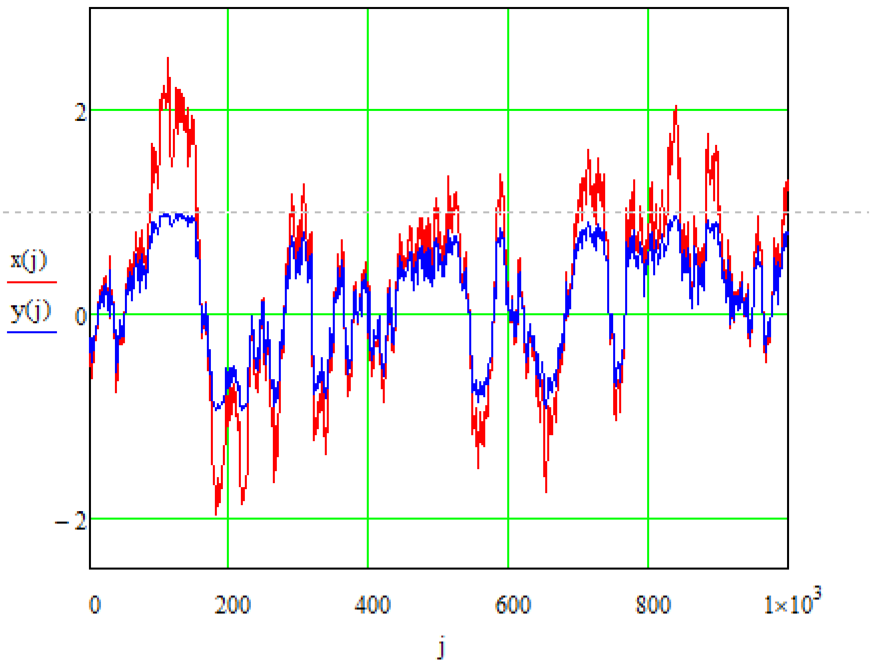


$N := 1400$ $J := 1000$ $j := 0..J$

$u := rnorm(N, 0, 1)$

$$x(j) := \sum_{k=0}^{L} \left(C(k) \cdot u_{j-k+L}\right)$$ гауссовский процесс $$\Phi(x) := \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}\right) \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$$

$$y(j) := 2 \cdot \Phi(x(j)) - 1$$ негауссовский процесс



Анализ процесса

$$m := \sum_{j=0}^{J} \frac{y(j)}{J+1} = 0.156$$

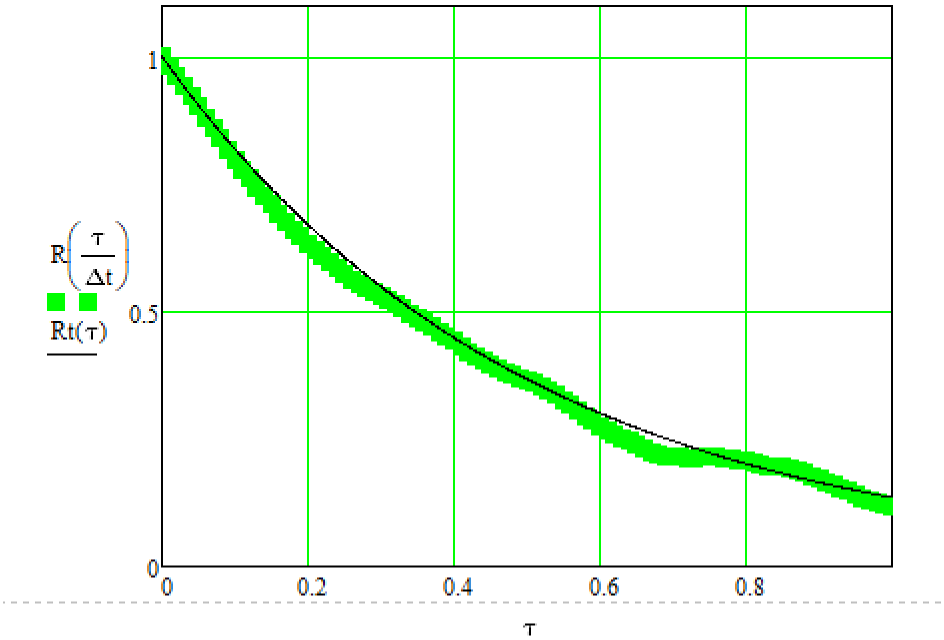
$$D := \frac{1 \cdot \sum_{j=0}^{J} y(j)^2}{J} = 0.313$$

$$D - m^2 = 0.289$$

$$B(\tau) := \left(\frac{1}{J-\tau}\right) \cdot \left[\sum_{j=0}^{J-\tau} (y(j) \cdot y(j+\tau))\right]$$

$$R(\tau) := \frac{B(\tau)}{D}$$

$$\Delta t := \frac{\gamma}{\alpha} = 0.01$$



1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
R(τ/Δt)
Rt(τ)
τ